1. feladat — 10 pont

Határozza meg a

$$\frac{2+\imath}{3-3\imath}, \qquad \text{és} \qquad (2+\imath)+\overline{(3-3\imath)}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

Megoldás: $\frac{2+\imath}{3-3\imath} = \frac{(2+\imath)(3+3\imath)}{(3-3\imath)(3+3\imath)} = \frac{6+3\imath^2+3\imath+6\imath}{9-9\imath^2}$, ezért $\mathrm{Re}\left(\frac{2+\imath}{3-3\imath}\right) = \frac{1}{6}$, és $\mathrm{Im}\left(\frac{2+\imath}{3-3\imath}\right) = \frac{1}{2}$. $\boxed{\textbf{6p.}}$

$\mathrm{Re}\left(2+\imath+\overline{3-3\imath}\right) = 5$, $\mathrm{Im}\left(2+\imath+\overline{3-3\imath}\right) = 4$. $\boxed{\textbf{4p.}}$

2. feladat — 18 pont

Határozza meg a

$$z^6 - 16z^2 \qquad \text{és} \qquad z^3 - 27\imath$$

polinomok komplex gyökeit algebrai alakban!

Megoldás: $0 = z^6 - 16z^2$ megoldásai $z_{1,2} = \pm 2$, $z_{3,4} = \pm 2\imath$ és $z_{5,6} = 0$. $\boxed{\textbf{9p.}}$

$0 = z^3 - 27\imath$ megoldásai $z_k = \sqrt[3]{27\imath} = 3\sqrt[3]{\cos 90° + \imath \sin 90°} = 3\left(\cos(30° + k120°) + \imath \sin(30° + k120°)\right)$, $(k = 0,1,2)$, azaz $z_{0,1} = \pm 1.5\sqrt{3} + 1.5\imath$, $z_2 = -3\imath$. $\boxed{\textbf{9p.}}$

3. feladat — 32 pont

Határozza meg az

- $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{n^3 + n^4}}$;
- $b_n = \left(\frac{5n+2}{5n-3}\right)^{2n+2}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás: $4 \leftarrow \frac{4}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}^4} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^4+n^4}} \le a_n \le \sqrt[n]{\frac{4^n+4^n}{1}} = \sqrt[n]{2} \cdot 4 \to 4$, így a rendőrelv miatt $a_n \to 4$ $\boxed{\textbf{16p.}}$

$b_n = \left(\frac{1+0.8/2n}{1-1.2/2n}\right)^{2n} \left(\frac{5n+2}{5n-3}\right)^2 \to \frac{e^{0.8}}{e^{-1.2}} \cdot 1 = e^2$ $\boxed{\textbf{16p.}}$

4. feladat **16 pont**

Mondja ki a rendőrelv valamelyik változatát!

Határozza meg a

- $c_n = \dfrac{(-3)^{3n} + (-3)^{-3n}}{(-3)^{2n} + (-3)^{-2n}}$;

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás: Rendőrelv bármelyik változata (akár speciális) $\boxed{\textbf{2p.}}$

$$c_n = \frac{(-27)^n + \dfrac{1}{(-27)^n}}{9^n + \dfrac{1}{9^n}} = \frac{(-3)^n + \dfrac{1}{(-243)^n}}{1 + \dfrac{1}{81^n}}$$

$$c_{2n} = \frac{3^{2n} + \dfrac{1}{243^{2n}}}{1 + \dfrac{1}{81^{2n}}} \to \infty$$

$$c_{2n-1} = \frac{-3^{2n-1} - \dfrac{1}{243^{2n-1}}}{1 + \dfrac{1}{81^{2n-1}}} \to -\infty \boxed{\textbf{10p.}}$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: $\pm\infty$.
$\limsup c_n = \infty, \liminf c_n = -\infty$ határérték nem létezik. $\boxed{\textbf{4p.}}$

5. feladat **24 pont**

Legyen $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = \sqrt[3]{6a_n^2 - 5a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából!

Megoldás: $A = \sqrt[3]{6A^2 - 5A}$ egyenlet megoldásai $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ és $A_3 = 5$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $1 \le a_n \le 5$ minden n-re. $\boxed{\textbf{3p.}}$

$n = 1$ esetén $1 \le a_1 = 2 \le 5$ teljesül.

Ha $1 \le a_n \le 5$, akkor $1 \le 6a_n - 5 \le 25$, ezért $1 \le a_n \cdot (6a_n - 5) = 6a_n^2 - 5a_n \le 125$, tehát $1 \le \sqrt[3]{6a_n^2 - 5a_n} = a_{n+1} \le 5$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Megmutatjuk, hogy $a_n \le a_{n+1}$ minden n-re. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Köbre emelés után $a_n^3 \le 6a_n^2 - 5a_n$, azaz $a_n(a_n^2 - 6a_n + 5) = a_n^3 - 6a_n^2 + 5a_n \le 0$, ami teljesül mivel $a_n > 0$ és $a_n^2 - 6a_n + 5 \le 0$ az előbbi korlátok között. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Megmutattuk, hogy a_n monoton, és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt[3]{6A^2 - 5A}$ egyenletet. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Mivel a_n monoton növő, ezért $A \ge a_1 = 2$, így a fenti gyökök közül csak az $A_3 = 5$ lehet a határérték. $\boxed{\textbf{3p.}}$

IMSC **feladat** **8 pont**

(a) Számolja ki a $\lim \dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$ határértéket!

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ felhasználásával számolja ki a $\lim \dfrac{(3n)!}{n^{3n}}$ határértéket!

Megoldás:

(a) A mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenség miatt $\dfrac{k \cdot (2n-k)}{n^2} \leq 1$ minden $k \in \{0, \ldots, 2n\}$ esetén. Ezt felhasználva

$$0 \leq \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{1 \cdot (2n-1)}{n^2} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot (2n-2)}{n^2}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n^2}}_{\leq 1} \cdot \frac{n \cdot 2n}{n^2} \leq \frac{2(2n-1)}{n^2} \to 0$$

A rendőrelv miatt $\lim \dfrac{(2n)!}{n^{2n}} = 0.$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

(b) n helyére $3n$-et írva kapjuk, hogy $\dfrac{\sqrt[3n]{(3n)!}}{3n} > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, amiből $\dfrac{(3n)!}{n^{3n}} > \left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)^{3n} \to \infty$, így a speciális rendőrelv miatt $\lim \dfrac{(3n)!}{n^{3n}} = \infty.$ $\boxed{\textbf{4p.}}$