Valószínűségszámítás 1. PótZH megoldások
Műszaki informatikus BSc
2015. november 2.

1. Egyik vizsgán a kiosztott tesztlapon 10 feleletkiválasztós kérdés szerepel. Mindegyik kérdésre csak egy kiválasztott válasz jó a felkínált négy válasz közül, és csak egyet szabad választani. Ha találomra kitöltünk egy ilyen tesztlapot (mindenféle előzetes tudás nélkül), mekkora valószínűséggel érhetünk el legalább négy találatot?
Megoldás: Ha X-szel jelöljük az eltalált kérdések számát, akkor $X \in B(10, \frac{1}{4})$. Így a keresett valószínűség:
$$\mathbf{P}(X \geq 4) = \sum_{i=4}^{10} \binom{10}{i} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^i \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^{10-i} = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^i \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^{10-i} = 0.22412$$

2. Tekintsük az $f(x) = A \cdot x^4, x \in (0,1), \left(f(x) = 0,\ \text{egyébként}\right)$ valós függvényt. Milyen A paraméterérték mellett lesz ez sűrűségfüggvény? Adja meg ebben az esetben a megfelelő eloszlásfüggvényt. Ha X jelöli a sűrűségfüggvényhez tartozó valószínűségi változót, akkor adja meg milyen valószínűséggel vesz fel X $\frac{1}{2}$-nél nagyobb értéket?
Megoldás: $1 = A \cdot \int_0^1 x^4 dx = A \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow A = 5.$
$$F_X(x) = 5 \cdot \int_0^x t^4 dt = x^5, x \in (0,1), F_X(x) = 0, x \leq 0, F_X(x) = 1, x \geq 1.$$
$\mathbf{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - F_X(\frac{1}{2}) = \frac{31}{32}.$

3. Az egységintervallumot három egyforma részre osztunk az $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ osztópontok segítségével. Ezután ismételten véletlenszerűen, egymástól függetlenül pontokat választunk az egységintervallumban. Akkor fogunk megállni, ha a kiválasztott pont a középső részbe esett. Jelölje X a kiválasztott pontok számát. Mekkora a $\mathbf{P}(X < 5)$ valószínűség?
Megoldás: $X \in G(\frac{1}{3}), \mathbf{P}(X < 5) = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{65}{81} = 0.80247$

4. Kétszer egymás után dobunk egy szabályos kockával. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, B azt az eseményt, hogy a második dobás 6-os, C pedig azt az eseményt, hogy a két dobott érték megegyezik. Bizonyítsa be, hogy a három esemény bár páronként függetlenek, de teljesen nem.
Megoldás: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{6}, \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(BC) = \frac{1}{36} \Rightarrow$ az események páronként függetlenek. De $\mathbf{P}(ABC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216}$ miatt teljesen nem függetlenek.

5. Kilenc kartonlapra három színnel (piros, kék, zöld) felírjuk az 1, 2, 3 számjegyeket, mindegyiket mind a három színnel. Ezután a kartonokat összekeverve belerakjuk azokat egy kalapba. Ha visszatevés nélkül addig húzunk egyenként a kartonokat, míg piros színű számot nem kapunk, mennyi a valószínűsége annak, hogy az így kihúzott kartonok között van hármas?
Megoldás: $1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$