# C) Kapcsolat a FI és DI jelek és rendszerek között

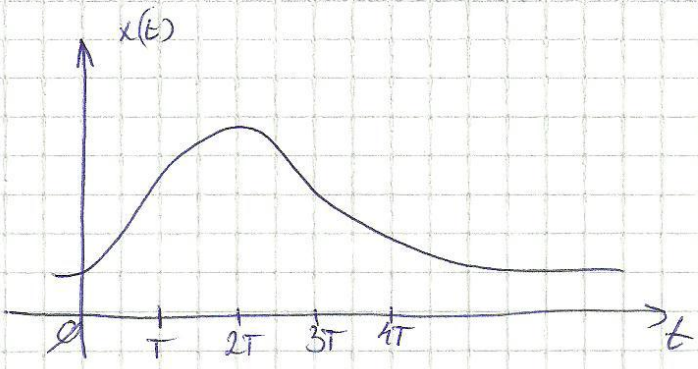
## I. Mintavételezett jel

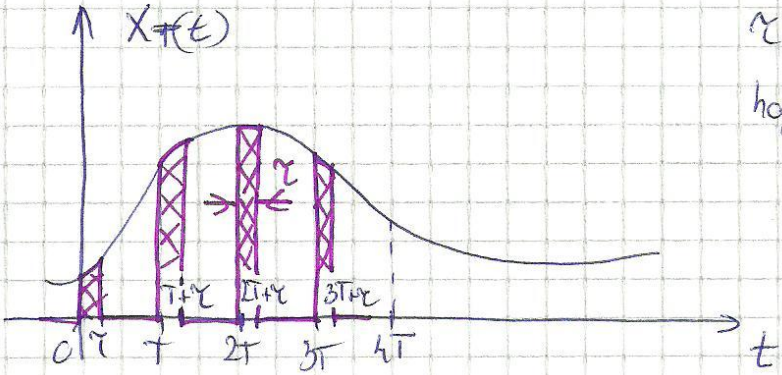
- Való világ: FI jelek $\xrightarrow[\text{mintavételezés}]{\text{feldolgozás}}$ DI jel
- gyakorlatban idő diszkretizáció és érték kvantálás egyszerre van
- itt csak idő diszkretizáció van

$$FI \longrightarrow DI$$

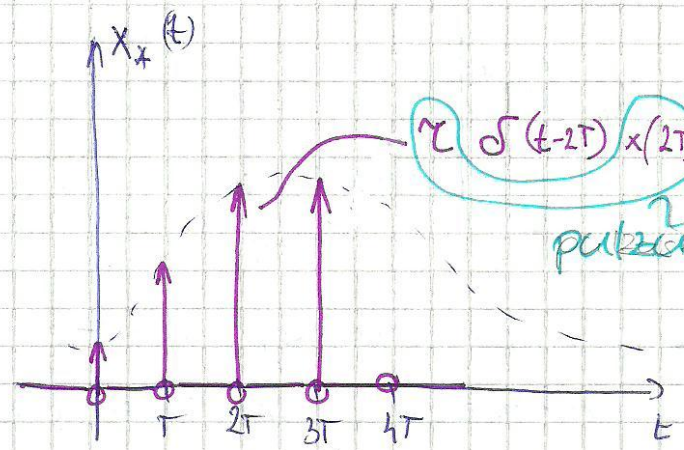
### 1, mintavételezett jel fogalma

- $x(t)$ FI jel, korlátos, folytonos
- mintavételi periódusidő $= T$
- minták: $t = kT$ időpontokban felvett értékek
  ($k \in \mathbb{Z}$)




$\tau$ olyan kicsi, hogy $x(t)$ változása elhanyagolható




$x_*(t)$: mintavételezett jel

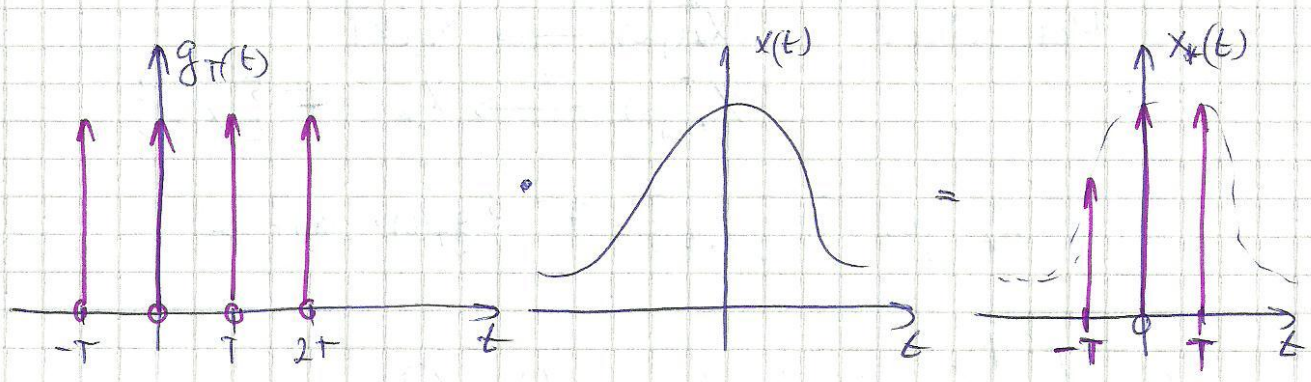
$$x_*(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\, \delta(t-kT)$$

$$\boxed{x_D[k] \equiv x(kT)}$$

A mintából álló DI jel

Dirac-fésű

$$g_T(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$




pl: $x(t) = e^{-2t}$ $(t \geq 0)$ $T = 0,1$

$$x_D[k] = e^{-2kT} = \left(e^{-2T}\right)^k = 0,8187^k$$

## 2. a mintavételezett jel spektruma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

$$X_*(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x_*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\, \delta(t-kT)\right) e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot e^{-j\omega kT} = \tau \underbrace{\mathcal{F}_{DI}\{x_D[k]\}}_{X_D(e^{j\nu})}\Big|_{\nu=\omega T}$$

$\nu$

$$X_*(j\omega) = \tau\, X_D\left(e^{j\nu}\right)\Big|_{\nu=\omega T}$$

Következmény: $X_*(j\omega)$ periódikus, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_0$ : mintavételi körfrekvencia

$X_*(j\omega)$-ból a minták előállnak

$$x_D[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_D\left(e^{j\nu}\right) e^{j\nu k}\, d\nu = \ldots =$$

$$= \frac{T}{2\pi\tau}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\pi/T} X_*(j\omega)\, e^{jkT\omega}\, d\omega$$

Motivációd: $X_*(j\omega) \longrightarrow x_0[k]$

$X_*(j\omega) \xrightarrow{?} X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

$$X_*(j\omega) = \mathcal{F}\{x_*(t)\} = \mathcal{F}\{g_\tau(t)\cdot x(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\tau(j\lambda)\, X(j(\omega-\lambda))\, d\lambda =$$

$$G_\tau(j\omega) = \frac{\tau 2\pi}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - p\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

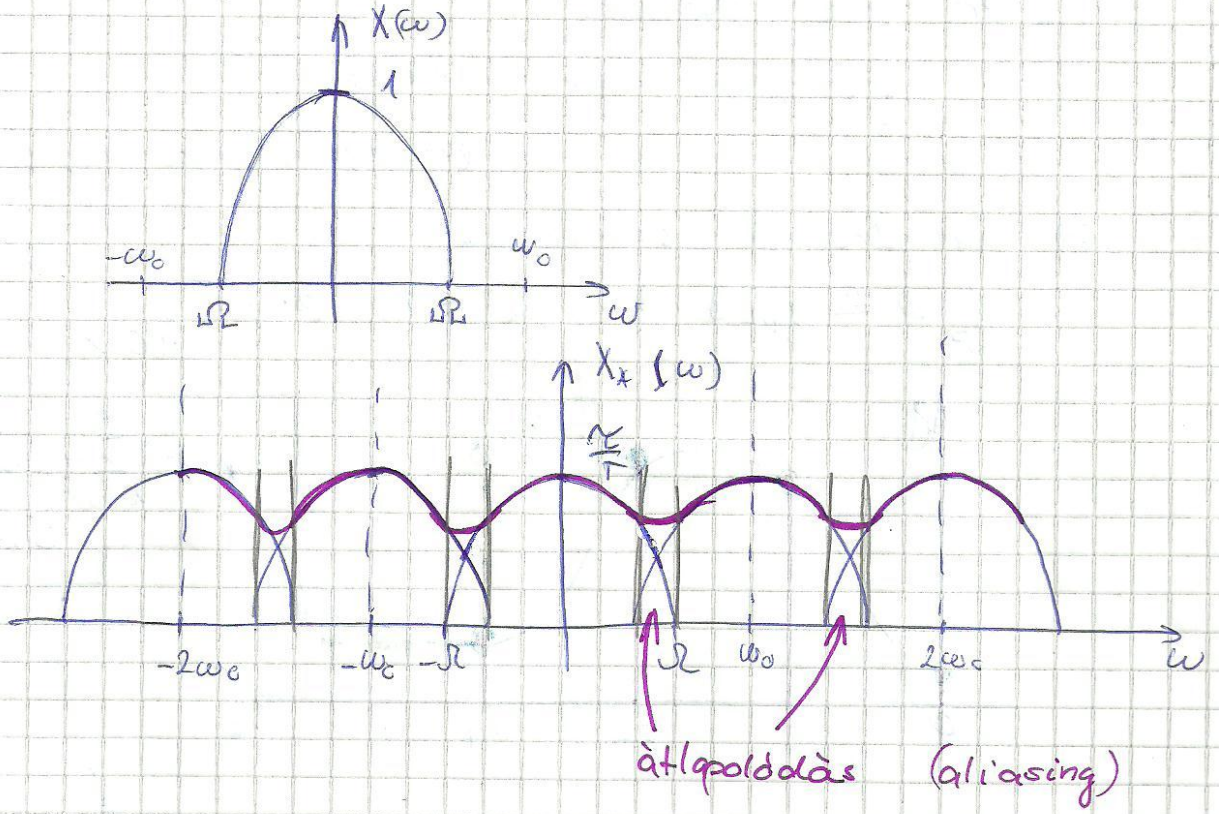
$$= \frac{\tau}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\lambda - p\omega_0)\, X(j\lambda)\, d\lambda = \frac{\tau}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega - p\omega_0)\right) =$$

$$= \frac{\tau}{T}\left[X(j\omega) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(X\left(j(\omega+p\omega_0)\right) + X\left(j(\omega-p\omega_0)\right)\right)\right]$$

Eredeti jel : $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

mintavételezett jel: $X_*(j\omega) = \mathcal{F}\{x_*(t)\}$

$$X_*(j\omega) = \frac{\tau}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - p\omega_0)), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$




Mintavételi tétel:

A FI jel a mintából hibamentesen visszaállítható, ha

- sávkorlátozott $X(\omega) \equiv 0, \ |\omega| > \Omega$
- $\omega_0 > 2\Omega$

$f_0 > 2 f_{max}$

$f_N$: NYQUIST frekvencia

Gond: ha $x(t)$ sávkorlátozott, akkor nem lehet véges idejű.

$\Rightarrow \infty$ sok minta kell

## 3. Mintavételezett jel rekonstrukciója

Adott: a FI $y(t)$ jelnek a mintái: $y_0[k]$

Cél: közelítő jel: $\hat{y}(t)$

$\hat{y}(t) \simeq y(t)$

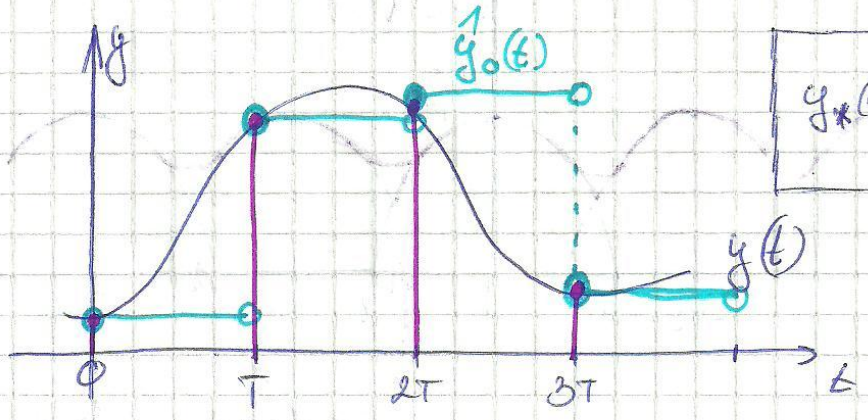
„On-line" módszer:

$\hat{y}(t)$-hez csak $kT < t$

(múltbeli minták)

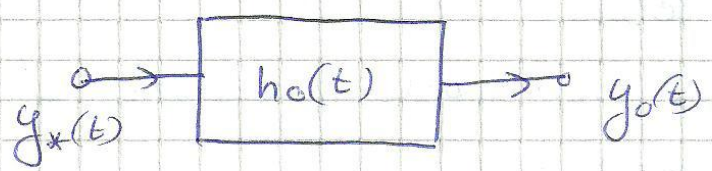
a) nulladrendű tartóval

$\hat{y}_0(t) \triangleq y_0[k]$ ha $kT \leq t < (k+1)T$ $(k \in \mathbb{Z})$




$$y_*(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_0[k] \cdot \delta(t - kT)$$

nulladrendű tartó:




$$y_*(t) = \tau\,\delta(t) \rightarrow y_0(t) = 1 \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T))$$

$$h_0(t) = \frac{1}{\tau}\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right]$$

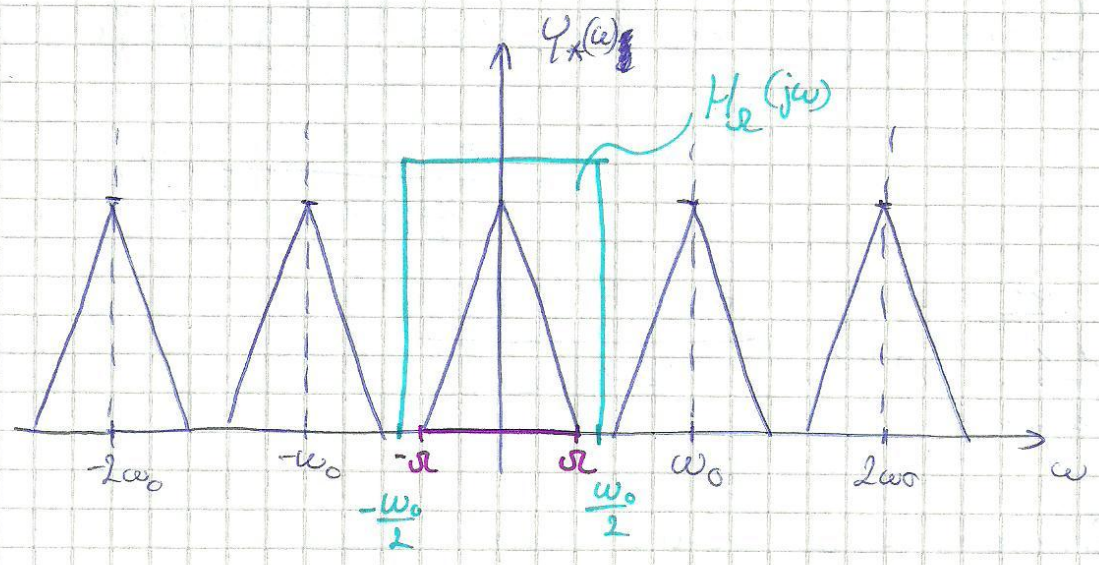
$$H_0(s) = \frac{1}{s\tau}\left[1 - e^{-sT}\right]$$

nem differenciális rendszer

↓

nem realizálható koncentrált paraméterű hálózattal

b) aluláteresztő szűrővel




$$H_{\Omega}(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{\tau}, & \text{ha } |\omega| < \frac{\omega_0}{2} \\ \cdot \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$Y_{\Omega}(j\omega) = H_{\Omega}(j\omega) \cdot Y_*(j\omega) = Y(j\omega)$$

Hibamentes, ha:

- létezik $\Omega$ sávkorlát
- $\frac{\omega_0}{2} > \Omega$

A szűrő impulzusválasza:

$$h_{\Omega}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\Omega}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{T}{\tau} e^{j\omega t} d\omega \quad (=)$$

$$(=) \frac{\frac{2\pi}{\omega_0} \cdot T}{2\pi\tau} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} = \frac{T}{2\pi\tau} \cdot 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)}{t} \quad (=)$$

$$(=) \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)}{\frac{\omega_0}{2} t}$$

nem belépő az impulzus-válasz

$\Rightarrow$ nem kauzális a rsz.

$$h_2(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)}{\frac{\omega_0}{2} t}$$

$$y_*(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_D[k]\, \delta(t - kT)$$

$$\hat{y}_{r2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_*(u) \cdot h_2(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_D[k]\, \delta(u - kT) \right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}(t-u)\right)}{\frac{\omega_0}{2}(t-u)} \cdot du =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_D[k] \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right)}{\frac{\omega_0}{2}(t-kT)}$$

Gondok: - a szűrő nem kauzális

- a jövőbeli minták is kellenek

(nem online..)

/csak utólag lehet vele csinálni/

A mintavételi időpontokban:

$$\hat{y}_{r2}(lT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_D[k] \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}(lT-kT)\right)}{\frac{\omega_0}{2}(lT-kT)}}_{\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$= 1$, ha $l = k$

$= 0$, ha $l \neq k$

$\Downarrow$

a rekonstrukció a mintavételi időpontokban hibamentes.

Def: ha $y(t)$ nem sávhatárolt, akkor

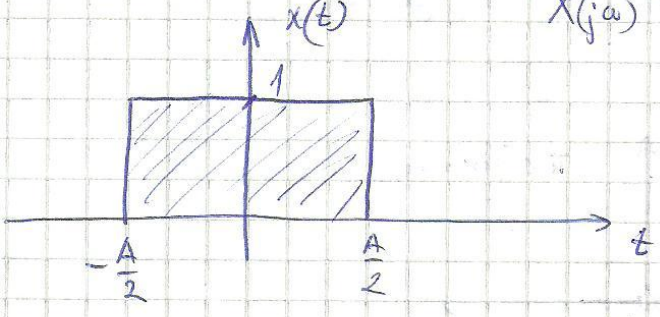
$\hat{y}_{r2}(t)$ az $y(t)$ sávhatárolt közelítése

(melynek sávhatárfrekvenciája $= \frac{\omega_0}{2}$)

## 4., Példák

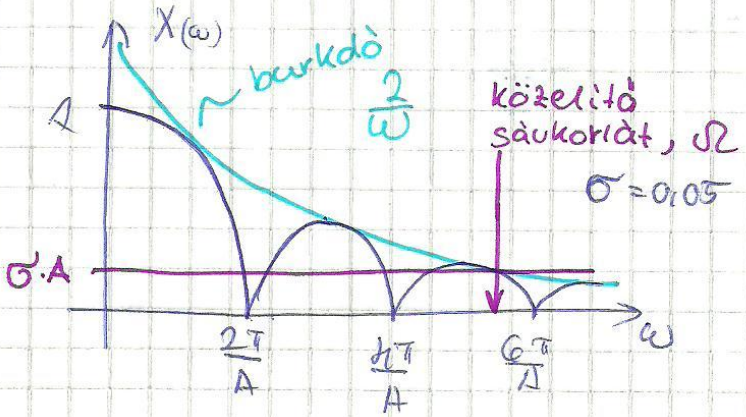
a) négyszögimpulzus

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = A \cdot \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\omega\right)}{\frac{A}{2}\omega}$$




sávkorlát

$$X(\omega) = |X(j\omega)|$$




$$\frac{2}{\Omega} = \sigma \cdot A \qquad A = 2$$

$$\Omega = \frac{2}{\sigma A}$$

$\Omega = 20 \Rightarrow$ mintavételi körfrekvencia:

$$\omega_0 > 2\Omega$$
$$\omega_0 > 40$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} < 0,157$$

b) exponenciális jel : $x(t) = e^{-\frac{|t|}{A}}$ $(A > 0)$

$$X(j\omega) = \frac{\frac{2}{A}}{\left(\frac{1}{A}\right)^2 + \omega^2}, \quad \sigma = 0,05$$

$$X(j\omega)\Big|_{\omega=\Omega} = \sigma X(\omega)\Big|_{max}$$

átrendezés

$$\left(\frac{1}{A}\right)^2 + \Omega^2 = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{A}\right)^2$$

$$\Omega = \sqrt{19} \cdot \frac{1}{A} \xrightarrow[\text{behelyg.}]{\text{adatok}} A = 0,5$$

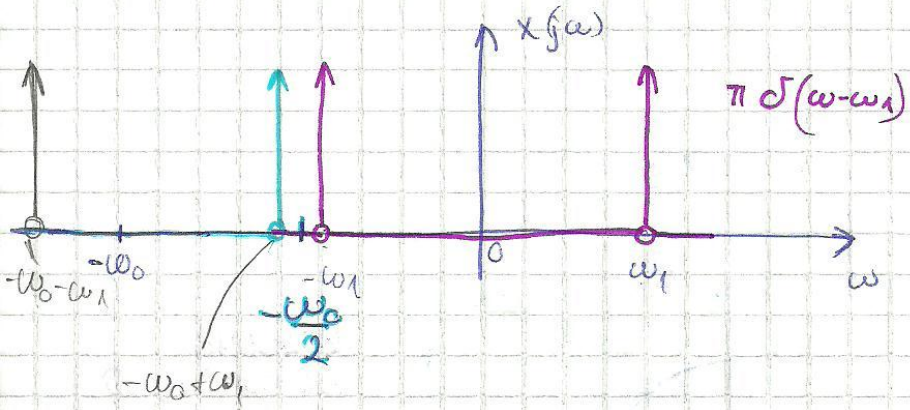
$$\Omega = 8,75, \quad \omega_0 > 2\Omega$$

$$T < \frac{\pi}{\Omega} = 0,36$$

c) koszinusz jel

$$x(t) = \cos(\omega_1 t)$$

$$X_{(j\omega)} = \pi\left(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right)$$



# II. Diszkrét szimuláció

(FI rendszerek DI szimulátorai)

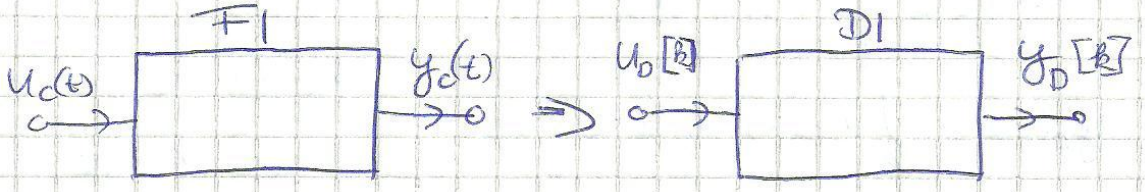
Adott : FI rendszer

Cél: DI rendszer létrehozása, amely „hasonlóan" viselkedik

Motiváció: - a DI rendszer könnyebben számítható

- a <u>realizáció</u> egyszerűbb DI-ben

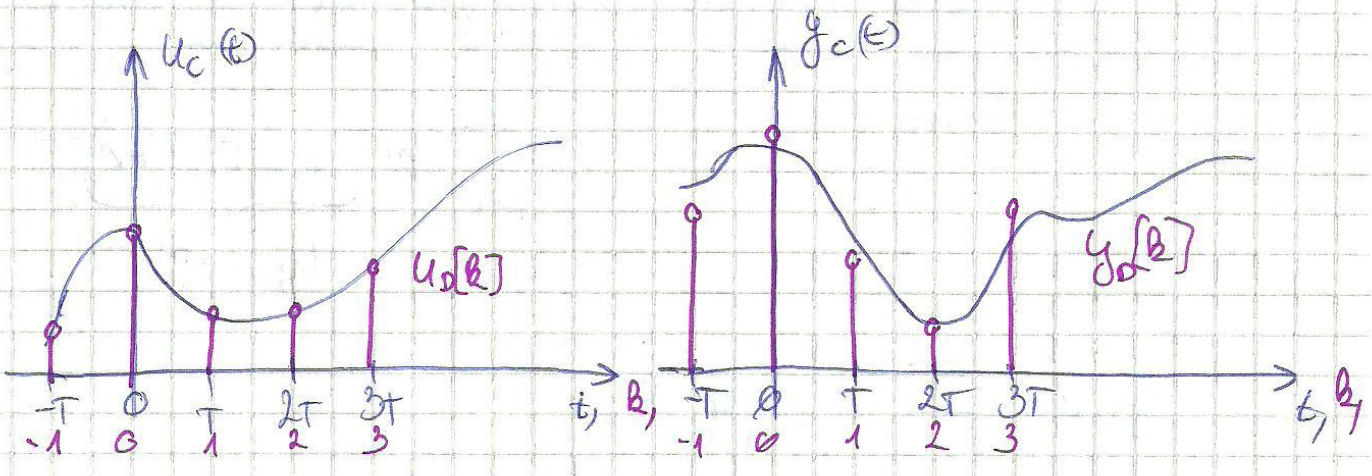
## 1., alapfogalmak, célkitűzés




$u_D[k] = u_c(kT+0)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$, $T > 0$ mintavételi periódusidő

szakadás esetén jobboldali határérték

ha $u_c$ folytonos: $u_c(kT)$




Elvárások:

① $y_c(kT) \simeq y_D[k]$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Def.: ideális szimuláció:

$$y_c(kT) = y_D[k] \quad \text{bármely } u_c(t) \text{ esetén}$$

② stabilitási tulajdonságok őrzése
GV → GV
∅ GV → ∅ GV

③ kauzalitás őrzése
kauz → kauz
nem kauz → nem kauz

## 2. az impulzusválasz szimulációja

Adott: $h_c(t)$

Cél: $h_D[k]$

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} h_c(\tau)\, u_c(t-\tau)\, d\tau$$

$h_c(t)$ belépő
$u_c(t)$ belépő

$$h_c(t) = D\,\delta(t) + \mathcal{E}(t)\, f(t)$$

$$y_c(kT+\varnothing) = \int_{-\infty}^{kT+\varnothing} \left(D\,\delta(\tau) + \mathcal{E}(\tau)\, f(\tau)\right) u_c(kT+\varnothing-\tau)\, d\tau =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{kT+\varnothing} D\,\delta(\tau)\, u_c(kT+\varnothing-\tau)\, d\tau}_{D\,u_c(kT+\varnothing)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{kT+\varnothing} f(\tau)\, u_c(kT+\varnothing-\tau)\, d\tau}_{\approx \sum_{p=1}^{k} f(pT)\, \underbrace{u_c(kT-pT+\varnothing)}_{u_D[k-p]}\, T} =$$

$$y_D[k] = \sum_{p=\varnothing}^{k} h_D[p]\, u_D[k-p]$$

$$\boxed{h_D[k] = D\,\delta[k] + \mathcal{E}[k-1]\, f(kT)\cdot T}$$

első módszerrel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_c(t)|\,dt < \infty \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} |h_D[k]| < \infty$$

$(\Leftarrow)$

gyakorlatban őrzi a stabilitást

kauzális tulajdonságot is őrzi

pl:

$$h_c(t) = M\,\varepsilon(t)\,e^{-\alpha t}\cdot \sin(\omega t)$$

$$h_{D_1}[k] = \varepsilon[k-1]\,T\underbrace{\left(e^{-\alpha T}\right)^{k}}_{q}\cdot \sin\underbrace{(\omega T k)}_{\nu}$$

$T$ megválasztása

$\alpha T \ll 1$

$\omega T \ll 1$

$T = \frac{\pi}{\omega}$

## 3. az átviteli függvény szimulációja

Adott: $H_c(s)$

Cél: $H_D(z)$ úgy, hogy bármely szinuszos $u_c(t)$ esetén: $y_D[k] = y_c(kT)$ $k \in \mathbb{Z}$

$u_c(t) = e^{j\omega t}$ (komplex időfüggvény) $\longrightarrow$ $u_D[k] = e^{j\omega k T}\,\nu$

$y_c(t) = H_c(j\omega)\,e^{j\omega t} \longrightarrow y_D[k] = H_D\left(e^{j\nu}\right)e^{j\nu k}$

$$H_D\left(e^{j\nu}\right) \triangleq H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\nu}{T}}$$

$z = e^{j\nu}$ $\qquad$ $j\omega = s$

$z = e^{sT}$

$\ln z = sT$

$$\boxed{H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}}$$

$$H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

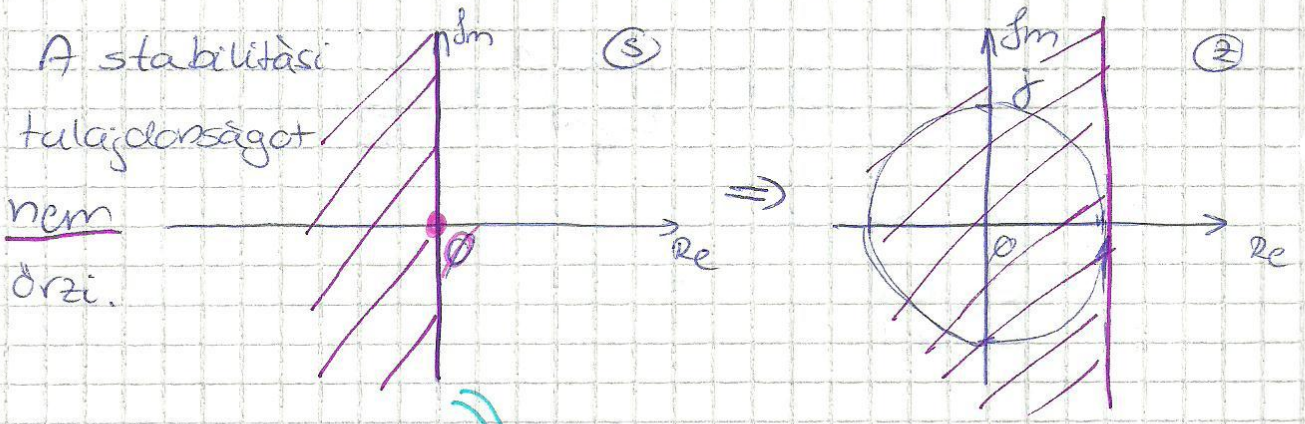
$z$-ben nem racionális törtfüggvény $\Rightarrow$ nem realizálható

$s = \frac{1}{T}\ln z$, $e^{sT} = z$ } racionális közelítés

1) $e^{sT} \approx 1 + sT \quad |sT| \ll 1$

$z \approx 1 + sT$, $s \approx \frac{1}{T}(z-1)$

A stabilitási tulajdonságot nem őrzi.

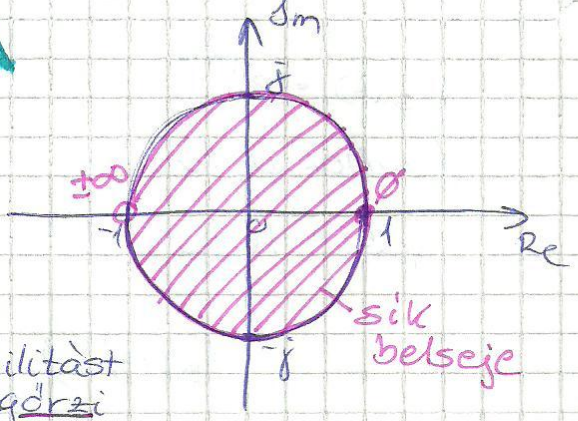



2) $z = \dfrac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}}$ bilineáris transzformáció

$2 \geq \rho > 0$ ($\rho = 2$ eggyáltalán)

$$z = e^{sT} = \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}}$$

$$z = \frac{1 + \frac{j\omega}{2}}{1 - \frac{j\omega}{2}} = \frac{e^{j\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}}}{e^{-j\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2}}}$$




A stabilitást megőrzi

$$H_{D_2}(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

A körfrekvenciák kapcsolata:

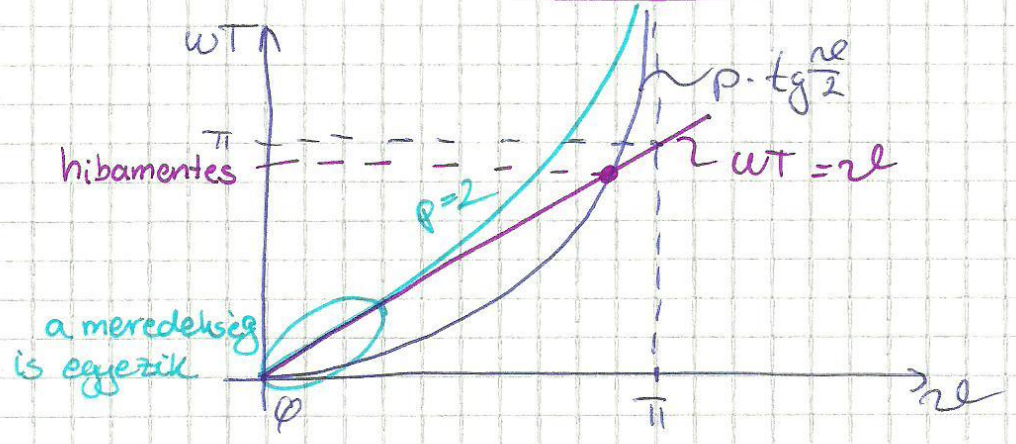
ideális: $\boxed{\nu = \omega T}$

közelítés: $s = \frac{p}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

$$j\omega = \frac{p}{T} \frac{e^{j\nu}-1}{e^{j\nu}+1} = \frac{p}{T} \frac{e^{j\frac{\nu}{2}} - e^{-j\frac{\nu}{2}}}{e^{j\frac{\nu}{2}} + e^{-j\frac{\nu}{2}}}$$

$$\omega = \frac{p}{T} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}$$

$$\boxed{T\omega = p \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}$$




$p=2$: kisfrekvenciás közelítés

## 4. Példák

a) integrátor: $y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} u_c(\tau)\, d\tau$

$$u_c(t) = \delta(t) \rightarrow y_c(t) = h_c(t) = \varepsilon(t)$$

1, impulzusválasz szimulációjával:

$$h_{D_1}[k] = \varepsilon[k-1]\,T \quad \varepsilon(kT) = T \cdot \varepsilon[k-1]$$

$$H_{D_1}(z) = \mathcal{Z}\{h_{D1}[k]\} = T \cdot \frac{1}{z-1}$$

2, átviteli függvény szimulációja:

$$H_c(s) = \mathcal{L}\{h_c(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$H_{D2}(z) = \frac{1}{s}\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

$$h_{D2}[k] = Z^{-1}\{H_{D2}(z)\} = \frac{T}{2} Z^{-1}\left\{1 + z^{-1}\frac{2z^{-1}}{z-1}\right\} =$$

$$= \frac{T}{2}\left(\delta[k] + 2\,\varepsilon[k-1]\right)$$

b) $h_C(t) = \varepsilon(t)\,\alpha e^{-\alpha t}$ T: adott

1, impulzus válasz alapján:

$$h_{D1}[k] = \varepsilon[k-1]\,T\alpha\left(e^{-\alpha T}\right)^{(k-1)+1}$$

$$H_{D1}(z) = \mathcal{Z}\{h_{D1}[k]\} = T\alpha\,\frac{e^{-\alpha T}}{z - e^{-\alpha T}}$$

2, átviteli függvény alapján:

$$H_C(s) = \mathcal{L}\{h_C(t)\} = \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$H_{D2}(z) = H_C(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\alpha}{\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}+\alpha} =$$

$$= \frac{T}{2}\,\frac{\alpha z + \alpha}{\left(\frac{T}{2}\alpha+1\right)z + \frac{T}{2}\alpha - 1}$$

→ számok

→ polinom per polinom alak

$$h_{D2}[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H_{D2}(z)\} = \ldots$$

Megvizsgáljuk: $u_C(t) = \mathcal{E}(t)$, $g(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau =$

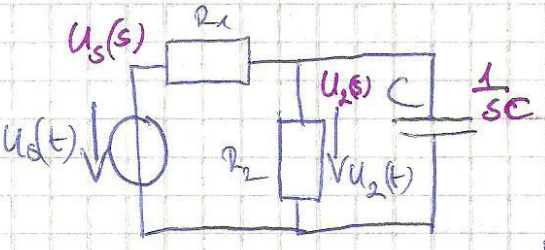
$$= \mathcal{E}(t)\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

- $u_D[k] = \mathcal{E}[k]$

$y_{D1}[k] = ?$ $(g_{D1}[k])$

$y_{D2}[k] = ?$ $(g_{D2}[k])$

c) FI hálózattal reprezentált rendszer szimulációja




$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$

$C = 0{,}5\,\mu F$

$$u_s(t) = [\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t-\tau)]\,V$$

$\tau = 5\,\mu s$

koherens e rsz.:

$V, A, \Omega, \mu s, \mu F$

$$H_C(s) = \frac{U_2(s)}{U_0(s)} = \frac{R_2 \times \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{sCR_1R_2 + (R_1 + R_2)} = \frac{0{,}2}{s + 0{,}2667}$$

Átviteli függvény számlálója:

$$H_D(z) = H_C(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0{,}2z + 0{,}2}{\left(\frac{2}{T} + 0{,}2667\right)z + \left(0{,}2667 - \frac{T}{2}\right)} = a\,\frac{z+1}{z+b}$$

T választási szempontjai:

Hálózat időállandója:

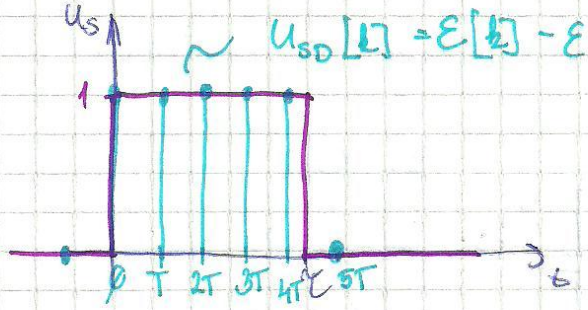
$$\tau_H = RC = (R_1 \times R_2) \cdot C = 3{,}75\ (\mu s)$$

$$T \ll \tau_H$$

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underbrace{U_S(s)}_{\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-5s}} \cdot H_C(s)\} =$$

$$= 0{,}75\left(\varepsilon(t)\left(1 - e^{-0{,}2667t}\right) - \varepsilon(t-5)\left(1 - e^{-0{,}2667(t-5)}\right)\right)$$

$$u[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{U_D(z)\,H_D(z)\}$$



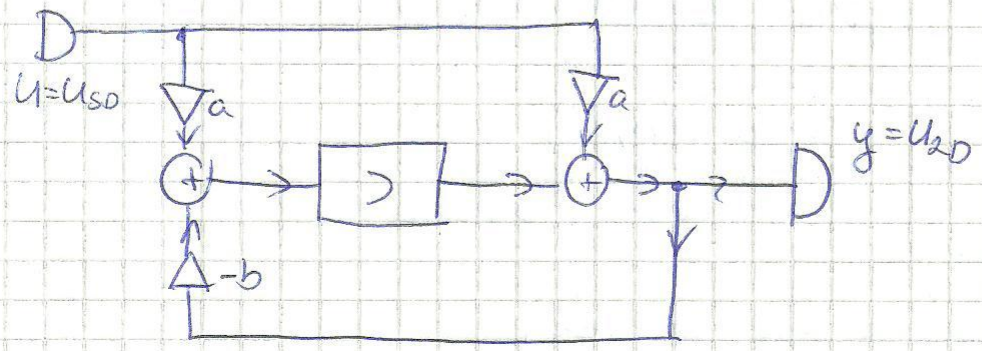

$$u_{SD}[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-(K+1)]$$

$K = \frac{\tau}{T}$ lefelé kerekítve

$$U_{SD}(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} \cdot z^{-(K+1)}$$

$$u_{2D}[k] = Z^{-1}\left\{ \frac{z}{z-1}\left(1 - z^{-(k+1)}\right) \cdot a\,\frac{z+1}{z+b} \right\} \ominus$$

$$\ominus\ \varepsilon[k]\left(\frac{2a}{1+b} + a\,\frac{b-1}{b+1}(-b)^{k}\right) -$$

$$- \varepsilon[k-(k+1)]\left(\frac{2a}{1+b} + a\,\frac{b-1}{b+1}(-b)^{k-(k+1)}\right)$$

$$H_D(z) \rightarrow y[k] + b\,y[k-1] = a\,u[k] + a\,u[k-1]$$