Bevezetés a számításelméletbe II.
1. (emelt) gyakorlat 2002. február 14.

1. Mutassuk meg, hogy ha egy összefüggő gráf páratlan fokú pontjainak a száma $2k$, akkor a gráf élhalmaza lefedhető k darab élsorozat diszjunkt egyesítésével!

Mo: a $2k$ db páratlan fokszámú pontot állítsuk párba és kössük össze a párokat egy éllel (összesen k db új élet húztunk így be). Ezáltal olyan gráfot kapunk amiben minden pont foka páros, tehát van benne Euler-kör. Ezen az Euler-körön rajt van a k darab új él is. Ezeket elhagyva k db diszjunkt élsorozatot kapunk a volt Euler-közrön haladva (mivel páratlan fokszámú pontokat kötöttünk össze), amik lefedik a teljes eredeti gráfot.

Megj: Ez az eljárás azért alkalmazható, mert az Euler-körre tanult tétel nem csak egyszerű gráfokra igaz, ezért nem gond ha a k új él behúzásával többszörös éleket is kapunk.

2. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

Mo: Mivel a fokok párosak, létezik Euler-köz. Ezen haladva színezzük ki az éleket felváltva pirossal illetve kékkel. Így minden pontba pontosan két kék és két piros él fog futni (mivel ha a bemenő él kék, akkor a kimenő piros, illetve fordítva). A gond csak a kezdőpontban lehetne, azonban mivel az élek száma $e = 4n/2 = 2n$, vagyis páros az élszám, így a kezdőpontban sem lehet gond (mivel felváltva színezek, ezért ha kékkel kezdtem akkor pirossal fogom befejezni).

3. Fel lehet-e sorolni egy kör mentén 2^k darab 0-t illetve 1-est, hogy minden k hosszú 0 – 1 sorozat pontosan egyszer álljon elő ívként?

4. Hány különböző Hamilton-kört tartalmaz az az n szögpontú gráf, amit K_n ből kapunk egy élének elhagyásával?

Mo: K_n-ben a Hamilton-körök száma: $n!/2n$ ($2n$ permutáció adja ugyan azt a kört, mivel n kiindulópont lehetséges ugyan arra a körre két irányból). Ebből kell levonni azokat, amik Hamilton-utat adnak az él elhagyása után. Ezek száma $(n-2)!$.
Vagyis a megoldás: $n!/2n - (n-2)!$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n szögpontú egyszerű gráfnak legalább $\binom{n-1}{2}+2$ éle van akkor van benne Hamilton-kör! Igaz-e ez $\binom{n-1}{2}+1$ esetén is?

Mo: Az első esetben $(n-3)$ éllel van kevesebb mint ha teljes gráfunk lenne, ezért az Ore-tétel teljesül rá mindenképp (mivel két összekötetlen pont fokainak összege a legrosszabb esetben is legalább $(n - 2) + 2 = n$, ami abban a szélsőséges esetben van, amikor van a gráfnak egy $(n-1)$ pontú teljes részgráfja, amihez hozzákötődik egy 2 fokú pont), vagyis van benne Hamilton-kör. A második esetben szintén vesszük azt az esetet, amikor a gráf egy $(n-1)$ pontú részgráfja teljes gráf, amihez ez esetben egy 1 fokú pont kapcsolódik, így nincs benne Hamilton-kör, vagyis ez az eset nem mindig igaz.

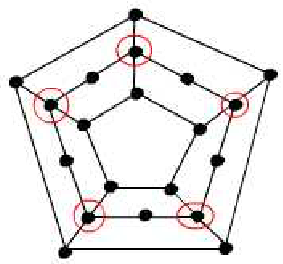
6. A $G_{n,k}$ gráf pontjai egy *n*-elemű halmaz k-elemű részhalmazainak felelnek meg. Két pont akkor van összekötve egy éllel, ha a pontoknak megfelelő két részhalmaz diszjunkt. Van-e $G_{n,k}$-nak Euler-, illetve Hamilton-köre, ha
(a) n = 6, k = 3?
(b) n = 16, k = 3?

Mo:

-(a): mivel a pontok foka 1, nincs benne Euler- és Hamilton kör sem.

-(b): a pontok foka $\binom{16-3}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 2 \cdot 11 \cdot 13$ páros szám, vagyis van benne Euler-kör. Mivel minden pont foka nagyobb vagy egyenlő a pontok számának a felénél, vagyis $\binom{16-3}{3} \geq \binom{16}{3} \div 2$, ezért teljesül rá Dirac tétele, így van benne Hamilton-kör is.

7. Van-e Hamilton-köre az ábrán látható gráfnak?



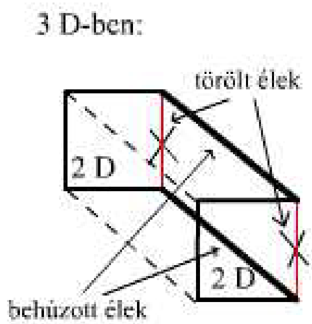
Mo: nincs, mivel a bekarikázott 5 db pontot elhagyva a gráf 7 részre esik.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő *G* gráf *K* köréből bármelyik élt törölve *G* egy leghosszabb útját kapjuk, akkor *K* Hamilton-kör volt *G*-ben!

Mo: Ha *K* nem Hamiltok-kör *G*-ben, akkor biztosan van olyan pont, ami közvetve vagy közvetlenül kapcsolódik a *K* körhöz, azonban ebben az esetben nincs csak *K* elemeiből álló leghosszabb út *G*-ben (hozzávehetjük a körön kívül ponto(ka)t). ➔ *K* biztosan Hamilton-kör *G*-ben.

9. Van-e Hamiton-kör az *n*-dimenziós kocka élgráfjában?

Mo: *n* D-s kockát úgy kapunk, hogy két (*n* – 1) D-s kocka megfelelő csúcsait összekötjük. Ennek élgráfjában pedig úgy kapunk Hamilton-utat, hogy a két (*n* – 1) D-s kocka egy-egy élét elhagyjuk, és az elhagyott élek végpontjait párba állítjuk a két kocka közt és összekötjük. Szemléltetve 3 D-ben (a Hamilton-út fekete folyamatos vonallal):

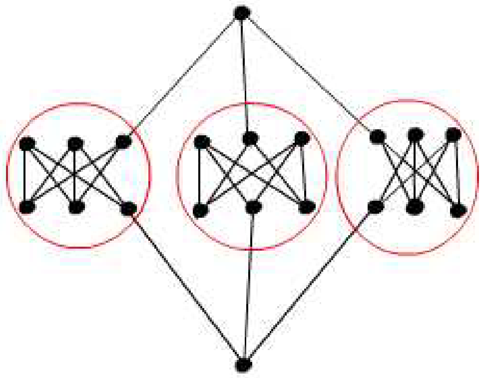


10. Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott turnamentben van irányított Hamilton-út!

Mo: Teljes gráfról lévén szó legfeljebb egy-egy olyan pont lehet amiből vagy csak ki vagy csak be vezetnek élek. Ezeket választva kezdő ill. végpontnak ez esetben is van Hamilton-út.

11. Konstruáljunk k ≥ 3-ra k-reguláris, összefüggő, egyszerű, páros gráfot, amelyben nincs Hamilton-kör! (– ezután „ilyen" gráfoknak hívom őket)

Mo: olyan gráfot kell keresnünk, amelyből *n* pontot elhagyva a gráf több mint *n* komponensre esik szét. Vegyük a legegyszerűbbnek tűnő 3-reguláris „ilyen" gráfot, ami a két szélső pont elhagyásával a 3 bekarikázott részre esik:



Az általános algoritmus úgy zajlik, hogy *k* reguláris „ilyen" gráfot keresve a két szélső pontot összekötjük *k* db 'két pont kivételével' *k*-reguláris gráf $(k-1)$ fokú (vagyis a kivételes) pontjaival. Így a teljes gráf *k*-reguláris lesz, és a két szélső pontot elhagyva *k* komponensre esik.