1. Rakjuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat :

$A = 2^{\log_4 9+1} = 2^{2\cdot\log_4 3}\cdot 2 = 6$, $B = \log_4 20 - \log_4 5 = \log_4 \frac{20}{5} = 1$, $C = \sin\frac{31\pi}{6} = \sin\left(5\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -0.5$,

$D = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{D < C < B < A}$. (8 pont)

2. $\frac{3^5+3^6-3^4}{3^5+3^4} + 0.064^{-\frac{1}{3}} = \frac{3^4\cdot(3+3^2-1)}{3^4\cdot(3+1)} + \sqrt[3]{\frac{1000}{64}} = \frac{11}{4}+\frac{10}{4}\ \boxed{=\frac{21}{4}}$. (8 pont)

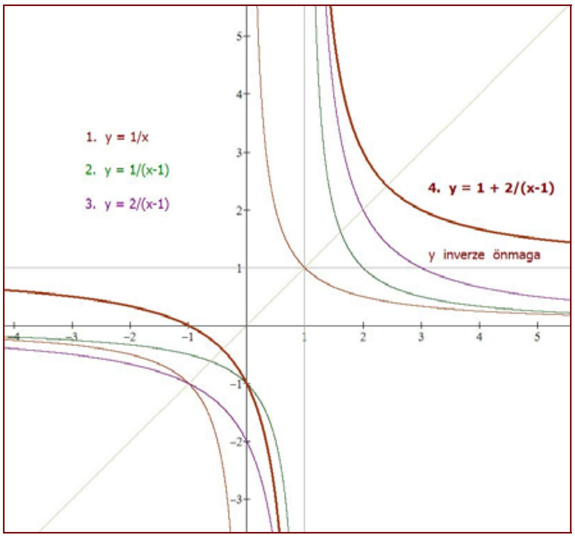
3. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : $\left(\frac{x^2-25}{x^2+9x+20} : \frac{x^2-5x}{x^2-16}\right) : \frac{16+x\cdot(x-8)}{x^2} =$

$= \frac{(x-5)\cdot(x+5)}{(x+4)\cdot(x+5)}\cdot\frac{(x-4)\cdot(x+4)}{x\cdot(x-5)}\cdot\frac{x^2}{x^2-8x+16} = \ = \frac{x-4}{x}\cdot\frac{x^2}{(x-4)^2}\ \boxed{=\frac{x}{x-4}}$. (8 pont)

4. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$ függvényt és adjuk meg az inverzét ! (10 pont)

Függvénytaranszformációval ábrázolva f grafikonját :

az $y = \frac{1}{x}$ grafikont az x tengely mentén 1-gyel jobbra toljuk, majd az y tengely mentén 2-szeresre nyújtjuk, és ezt 1-gyel felfelé eltoljuk.



$D_f = \mathbf{R}\setminus\{1\}$, $R_f = \mathbf{R}\setminus\{1\}$,

f injektív u.i. $\forall\, x_1, x_2 \in D_f \quad 1+\frac{2}{x_1-1} = 1+\frac{2}{x_2-1} \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_2$.

így az inverze létezik :

f inverzének meghatározása :

$D_{f^{-1}} = R_f = \mathbf{R}\setminus\{1\}$,

$x = 1+\frac{2}{f^{-1}(x)-1} \quad\Leftrightarrow\quad x-1 = \frac{2}{f^{-1}(x)-1} \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad \frac{x-1}{2} = \frac{1}{f^{-1}(x)-1} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{f^{-1}(x) = 1 + \frac{2}{x-1}}$

Megj.: $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbf{R}\setminus\{1\}$,

Ha f grafikonját koordinátatranszformációval ábrázoltuk volna, akkor az $\eta = \frac{1}{\xi}$ függvénygrafikont kellett volna abban a ξ, η koordinátarendszerben ábrázolni, melynek origója az x, y koordinátarendszer $(1,1)$ pontjában van, tengelyei párhuzamosak az x, y tengelyekkel, s az egység a vizszintes tengelyen változatlan, az ordinátatengelyen pedig kétszeres. (Vagy fordítva !)

5. Adjuk meg az $f(x) = \frac{2(x+1)\cdot(x-2)^3 - 3(x+1)^2\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6}$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (8 pont)

$D_f = \mathbf{R}\setminus\{2\}$ (u.i. a nevezőben nem állhat zérus)

$f(x) = \frac{2(x+1)\cdot(x-2)^3 - 3(x+1)^2\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(x+1)\cdot(x-2)^2\cdot(2(x-2)-3(x+1))}{(x-2)^6} = \frac{(x+1)\cdot(-x-7)}{(x-2)^4}$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x=-1$ vagy $x=-7$, tehát $\boxed{f \text{ zérushelyei } -1 \text{ és } -7}$.

6. Legyen $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ és $g(x) = \ln(2x)$. Mivel egyenlő $h(g(x))$ és $g(h(x))$? (8 pont)

$h(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{\ln(2x)+1}}$, $g(h(x)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right)$. Megj. : $D_{h\circ g} = \left(\frac{1}{2e}, +\infty\right)$, $D_{g\circ h} = (-1, +\infty)$.

1. Rakjuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat :

$$A = (\sqrt{2})^{2-\log_2 9} = 2\cdot(2^{\log_2 9})^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \qquad B = \log_2 10 + \log_2\frac{4}{5} = \log_2(10\cdot\frac{4}{5}) = 3, \qquad C = 0.008^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{8}} = 5,$$

$$D = \operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A < D < B < C} \ .$$

(8 pont)

2. $$\sqrt{9-4\cdot\sqrt{5}} - 25^{\frac{1}{4}} + \frac{5^{20}+5^{21}}{5^{22}-5^{20}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} + \frac{5^{20}\cdot(1+5)}{5^{20}\cdot(5^2-1)} = \left|2-\sqrt{5}\right| - \sqrt{5} + \frac{6}{24} = -2 + \frac{1}{4} \boxed{= -\frac{7}{4}} .$$

(8 pont)

3. $$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\sqrt{\frac{(x^2-y^2)^6}{(x-y)^{10}}} = \frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\sqrt{\frac{(x+y)^6}{(x-y)^4}} = \frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\frac{\left|(x+y)^3\right|}{(x-y)^2} \boxed{= \frac{|x+y|}{x-y}} .$$

(8 pont)

4. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : $$\frac{25^{\frac{n}{2}}\cdot(-1)^n\cdot(-5)^n}{(\sqrt{2})^{n+2}\cdot(\sqrt{2})^n + (\sqrt{2})^{2n+4}} =$$

$$= \frac{5^n\cdot((-1)\cdot(-5))^n}{2\cdot(\sqrt{2})^{2n} + 4\cdot(\sqrt{2})^{2n}} = \frac{5^{2n}}{6\cdot(\sqrt{2})^{2n}} = \frac{25^n}{6\cdot 2^n} \boxed{= \frac{1}{6}\cdot(\frac{25}{2})^n} .$$

(8 pont)

5. Legyen $f(x) = \sin(2x)$ és $g(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$. Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$? (8 pont)

$f(g(x)) = \sin(2\cdot\sqrt[3]{x^2+1})$, Megj. : $D_{f\circ g} = \mathbf{R} \quad (= D_g)$,

$g(f(x)) = \sqrt[3]{\sin^2(2x)+1}$, $D_{g\circ f} = \mathbf{R} \quad (= D_f)$.

6. Adjuk meg az $$f(x) = \frac{2x\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)^2 - 2x^2(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x-3)}{(x-2)^4\cdot(x-1)^4}$$

függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (10 pont)

$D_f = \mathbf{R}\setminus\{1, 2\}$ (u.i. a nevezőben nem állhat zérus)

$$f(x) = \frac{2x\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)^2 - 2x^2(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x-3)}{(x-2)^4\cdot(x-1)^4} = \frac{2x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot((x-1)\cdot(x-2) - x\cdot(2x-3))}{(x-2)^4\cdot(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x\cdot(-x^2+2)}{(x-2)^3\cdot(x-1)^3} = \frac{2x\cdot(2-x^2)}{(x-2)^3\cdot(x-1)^3} .$$

$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$, $\sqrt{2}$ vagy $-\sqrt{2}$, tehát $\boxed{f \text{ zérushelyei } 0,\ \sqrt{2} \text{ és } -\sqrt{2}}$.