ANALÍZIS 1. | **I. ZÁRTHELYI** | **2012. október 11.**
Mérnök informatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (16 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját.
b) A definíció alapján lássa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n-5} = \infty.$$

c) Konvergens-e az

$$a_n = \sqrt{n^2+3n-5} - \sqrt{n^2-n+1}.$$

sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha $\forall P > 0$ esetén $\exists N(P) \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > P$ ha $n \geq N(P)$.

3 pont

b) $a_n = \sqrt{n^2+3n-5} > \sqrt{n^2} = n$, ha $n > 1$, így $a_n > P$, ha $n > P$, és $n > 2$, vagyis $N(P) = \max(2, [P])$. **6 pont**

c) $a_n = \sqrt{n^2+3n-5} - \sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{(n^2+3n-5)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+3n-5}+\sqrt{n^2-n+1}} =$

$$= \frac{4n-6}{\sqrt{n^2+3n-5}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{4-\frac{6}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

2+1+2+2 pont

---

2. feladat (27 pont)
Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét, ha létezik:

$$a_n = \sqrt[2n]{n^2+2^{3n-1}+9^n} \qquad b_n = \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n \qquad c_n = \frac{7^{2n+1}+n^5-8}{n!+3^{n-1}}\cos n.$$

$a_n = \sqrt[2n]{n^2+2^{3n-1}+9^n} = \sqrt{\sqrt[n]{n^2+\frac{1}{2}8^n+9^n}}$, vagyis **2 pont**

$3 = \sqrt{\sqrt[n]{9^n}} \leq a_n \leq \sqrt{\sqrt[n]{3\cdot 9^n}} = 3\cdot \sqrt[2n]{3} \xrightarrow{n\to\infty} 3,$ **5 pont**

így a rendőrelv értelmében $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. **2 pont**

Mivel $\dfrac{2n+1}{3n-1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$, így minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén $\dfrac{2}{3} - \varepsilon < \dfrac{2n+1}{3n-1} < \dfrac{2}{3} + \varepsilon$ **4 pont**

vagyis ha $\varepsilon < \frac{1}{3}$, akkor

$$0 \le b_n \le \left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

így a rendőrelv értelmében $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. **5 pont**

Mivel $\cos n$ korlátos és $n^k \ll a^n \ll n!$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{49^n}{n!} \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \frac{n^5}{49^n} - \frac{8}{49^n}}{1 + \frac{1}{3}\frac{3^n}{n!}} = 0 \cdot 7 = 0,$$

így $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. **9 pont**

---

3. feladat (13 pont)

Adja meg az

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{3n+2}\right)^{2n-2}$$

sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergens-e a sorozat? Konvergens-e a $\sum a_n$ sor?

Páros n esetén

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{3n+2}\right)^{2n-2} = \left(\left(1 + \frac{1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{3n+2}\right)^{-2-\frac{4}{3}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{2}{3}} \cdot 1 = e^{\frac{2}{3}},$$

4 pont

páratlan n esetén pedig ugyanígy

$$a_n = \left(\left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{-2-\frac{4}{3}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 = e^{-\frac{2}{3}}$$ **2 pont**

A sorozat torlódási pontjai tehát $e^{\frac{2}{3}}$ és $e^{-\frac{2}{3}}$. **1 pont**

$\limsup a_n = e^{\frac{2}{3}} \neq \liminf a_n = e^{-\frac{2}{3}}$, tehát (a_n) nem konvergens. **3 pont**

Mivel nem tart 0-hoz, így $\sum a_n$ sem konvergens. **3 pont**

---

4. feladat (16 pont)
Legyen $a_1 = 4$, és $n = 1, 2, ...$ esetén

$$a_{n+1} = 8 - \frac{15}{a_n}.$$

a) Mely valós számok jöhetnek szóba a sorozat határértékeként?

b) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén $3 < a_n < 5$.

c) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.

d) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 8 - \frac{15}{\lim_{n\to\infty} a_n} = 8 - \frac{15}{A},$$

vagyis $A^2 - 8A + 15 = 0$, így a $A = 3$ vagy $A = 5$. **3 pont**

b) Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. $3 < 4 = a_1 < 5$.

II. $3 < a_n < 5 \Rightarrow 5 = \frac{15}{3} > \frac{15}{a_n} > \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow 3 = 8 - 5 < 8 - \frac{15}{a_n} = a_{n+1} < 8 - 3 = 5$. **5 pont**

c) Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. $a_2 = \frac{17}{4} > 4 = a_1$.

II. $a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{15}{a_n} > \frac{15}{a_{n+1}} \Rightarrow 8 - \frac{15}{a_n} < 8 - \frac{15}{a_{n+1}}$. **5 pont**

d) (a_n) monoton növő, és felülről korlátos, így konvergens. $a_n \geq 4$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 4$, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. **3 pont**

---

5. feladat (14 pont)
a) Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó minoráns kritériumot.
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} - 2^n}{4^n - n}$$

sor?

a) Ha $0 \leq c_n \leq a_n$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergens. **3 pont**

b) Minden tag pozitív, és $\frac{3^{2n}-2^n}{4^n-n} \geq \frac{3^{2n}-2^n}{4^n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{4}\right)^n = c_n$. **4 pont**

$\left|\frac{2}{4}\right| < 1$, $\left|\frac{9}{4}\right| > 1$, vagyis $\sum c_n$ egy konvergens és egy divergens mértani sor különbsége, tehát divergens, így a minoráns kritérium miatt az eredeti sor is divergens. **1+1+3+2 pont**

---

6. feladat (14 pont)

Igazolja, hogy a

$$\sum_{n_1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$$

konvergens. Abszolút vagy feltételes konvergencia teljesül? Adjon felső becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára.

A sor alternáló, és

$$\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

2 pont

tehát csak a monoton csökkenést kell vizsgálni.

$$\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} \Leftrightarrow n^2(n^3+3n^2+3n+1+1) > (n^3+1)(n^2+2n+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^5+3n^4+3n^3+2n^2 > n^5+2n^4+n^3+n^2+2n+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^4+2n^3+n^2 > 2n+1 \Leftrightarrow n^4+(n^2-1)(2n+1) > 0,$$

ami nyilván teljesül. A sor tehát Leibniz-típusú, így konvergens. **5 pont**

Ugyanakkor $\dfrac{n^2}{n^3+1} \geq \dfrac{n^2}{n^3+n^3} = \dfrac{1}{2n}$ és $\sum \frac{1}{2n}$ divergens, így a minoráns kritérium miatt a sor nem abszolút konvergens, hanem feltételesen konvergens.

3 pont

$$|s - s_{100}| < \frac{101^2}{101^3+1}.$$

4 pont

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (8 pont)
Konvergens-e az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 1}}$$

sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{2n^4}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 1}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3 + 2n^3}{n^4}} = \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \sqrt[n]{3}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

A két szélső sorozat 1-hez tart, így rendőr-elv értelmében (a_n) is.

---

8. feladat (12 pont)
Számolja ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n-1} - 4 \cdot 3^{2n+1}}{5^{2n}}$$

sor határértékét.

A sor két geometrai sor összege, vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n-1} - 4 \cdot 3^{2n+1}}{5^{2n}} = \frac{\frac{8}{25}}{1 - \frac{16}{25}} - 4 \cdot \frac{\frac{27}{25}}{1 - \frac{9}{25}}.$$