Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat megoldása

Műszaki informatika szak

2012. március 30.

1. Az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbf{P}(A|B) = 0,2$ és $\mathbf{P}(B|A) = 0,6$, mennyi $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ és $\mathbf{P}\left(\bar{A}B\right)$?
   Megoldás: $\mathbf{P}\left(AB\right) = 0,2 \cdot \mathbf{P}\left(B\right) = 0,6 \cdot \mathbf{P}\left(A\right)$
   $\mathbf{P}\left(A+B\right) = \mathbf{P}\left(A\right) + \mathbf{P}\left(B\right) - \mathbf{P}\left(AB\right) = 1$
   $1 = \mathbf{P}\left(A\right) + 3\mathbf{P}\left(A\right) - 0,6 \cdot \mathbf{P}\left(A\right) = 3,4 \cdot \mathbf{P}\left(A\right)$
   $\mathbf{P}\left(A\right) = \frac{5}{17}, \mathbf{P}\left(B\right) = \frac{15}{17}, \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) = \mathbf{P}\left(B\right) - \mathbf{P}\left(AB\right) = \frac{12}{17}.$

2. Egy 20x20 cm-es négyzetrácsos hálózatra ledobunk 5 db 5 cm *átmérőjű* pénzdarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pénzek között lesz olyan, amelyik lefedi valamelyik négyzet csúcsát?
   Megoldás: $p = \mathbf{P}\left(\text{egy pénz lefedi a csúcsot}\right) = \frac{(2,5)^2\pi}{400} \approx 0,0491,$
   Ha X jelöli a csúcsot lefedő pénzdarabok számát, akkor $X \in B\left(5,p\right).$
   $\mathbf{P}\left(\text{van lefedő pénz az 5 között}\right) = \mathbf{P}\left(X \geq 1\right) =$
   $= 1 - \mathbf{P}\left(X = 0\right) = 1 - \left(1 - \frac{(2,5)^2\pi}{400}\right)^5 \approx 0,2225.$

3. Adja meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a második legkisebb szám eloszlásfüggvényének az értékét a 8π helyen.
   Megoldás: Jelölje X a második legkisebb kihúzott lottószámot.
   $R_X = \{2, 3, ...86\},$
   $F_X\left(8\pi\right) = \mathbf{P}\left(X < 8\pi\right) = \mathbf{P}\left(X < 26\right) =$
   $= \sum_{i=2}^{25} \frac{(i-1)\binom{90-i}{3}}{\binom{90}{5}}.$

4. Egy dobozban 2 piros 4 fehér és 1 piros színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! $\mathbf{P}\left(X = 4\right) =?$
   Megoldás: Összes eset: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$
   Kedvező eset: 192
   Zöldet húzunk negyedikre: $24 + 72 = 96$
   Pirosat húzunk negyedikre: 72
   Fehéret húzunk negyedikre: 24.
   $\mathbf{P}\left(X = 4\right) = \frac{192}{840} \approx 0,2286$

5. Ha az X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye és várható értéke az $Y = \frac{1}{X+1} + 2$ valószínűségi változónak?
   Megoldás: $R_Y = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

$F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{t-2} - 1 < X\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{t-2} - 1\right) = 2 - \frac{1}{t-2}$
$f_Y(t) = F_Y^{'}(t) = \frac{1}{(t-2)^2}, t \in \left(\frac{5}{2}, 3\right).$
$\mathbf{E}Y = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1} + 2dx = [\ln(x+1) + 2x]_0^1 = \ln 2 + 2$

Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat megoldása
Műszaki informatika szak
2012. március 30.

1. Az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbf{P}(A|B) = 0,7$ és $\mathbf{P}(B|A) = 0,3$, mennyi $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ és $\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right)$?
Megoldás: $\mathbf{P}(AB) = 0,7 \cdot \mathbf{P}(B) = 0,3 \cdot \mathbf{P}(A)$
$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = 1$
$1 = \mathbf{P}(A) + \frac{3}{7}\mathbf{P}(A) - 0,3 \cdot \mathbf{P}(A) = \frac{79}{70} \cdot \mathbf{P}(A)$
$\mathbf{P}(A) = \frac{70}{79}, \mathbf{P}(B) = \frac{30}{79}, \mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \frac{49}{79}.$

2. Egy 15x15 cm-es négyzetrácsos hálózatra ledobunk 8 db 3 cm *átmérőjű* pénzdarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pénzek között nem lesz olyan, amelyik lefedi valamelyik négyzet csúcsát?

Megoldás: $p = \mathbf{P}\,(\text{egy pénz lefedi a csúcsot}) = \frac{(1,5)^2\pi}{225} \approx 0,0314,$
Ha X jelöli a csúcsot lefedő pénzdarabok számát, akkor $X \in B(8, p)$.
$\mathbf{P}\,(\text{nincs lefedő pénz az 5 között}) = \mathbf{P}(X = 0) =$
$= \left(1 - \frac{(1,5)^2\pi}{225}\right)^8 \approx 0,7747.$

3. Adja meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a második legnagyobb szám eloszlásfüggvényének az értékét a $\sqrt{1000}$ helyen.
Megoldás: Jelölje X a második legnagyobb kihúzott lottószámot.
$R_X = \{4, 3, ...89\},$
$F_X\left(\sqrt{1000}\right) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt{1000}\right) = \mathbf{P}(X < 32) =$
$= \sum_{i=4}^{31} \frac{\binom{i-1}{3}(89-i)}{\binom{90}{5}}.$

4. Egy dobozban 3 piros 3 fehér és 1 piros színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! $\mathbf{P}(X = 3) = ?$
Megoldás: Összes eset: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.
Kedvező eset: 54
Zöldet húzunk harmadikra: 18
Pirosat húzunk harmadikra: 18
Fehéret húzunk harmadikra: .18
$\mathbf{P}(X = 3) = \frac{54}{210} \approx 0,2571.$

5. Ha az X a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye és várható értéke az $Y = \frac{1}{X+2} + 1$ valószínűségi változónak?

Megoldás: $R_Y = \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$
$F_Y\left(t\right) = \mathbf{P}\left(Y < t\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{t-1} - 2 < X\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{t-1} - 2\right) = 3 - \frac{1}{t-1}$
$f_Y\left(t\right) = F_Y^{'}\left(t\right) = \frac{1}{(t-1)^2}, t \in \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right).$
$\mathbf{E}Y = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+2} + 1dx = \left[\ln\left(x+2\right) + x\right]_0^1 = \ln 3 + 1 - \ln 2 = \ln 1,5 + 1.$