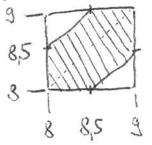
Valószínűségszámítás, pótzh (2007 ősz)
- megoldásvázlatok

(1) X az egyik érkezése, Y a másiké $\Rightarrow$ $X, Y \in U(8,9)$ függetlenek
találkoznak $\Leftrightarrow$ $|X-Y| < 1/2$
geometriai módszer:



az (X,Y) pár a négyzetbe esik, minden pontja ugyanolyan valószínű
a satírozott részen találkoznak

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{találkoznak}) = \frac{\text{terület (satírozott rész)}}{\text{terület (teljes rész)}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{3}{4}$$

(2) $A+B$ és $\bar{C}$ függetlenek $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}((A+B)\bar{C}) = \mathbb{P}(A+B)\,\mathbb{P}(\bar{C})$

$$\mathbb{P}((A+B)\bar{C}) = \mathbb{P}(A\bar{C}) + \mathbb{P}(B\bar{C}) - \mathbb{P}(AB\bar{C}) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{C}) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{C}) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bar{C}) =$$

A, B és C teljesen függetlenek
$\Rightarrow$ A és $\bar{C}$ függetlenek (mert A és C azok)
B és $\bar{C}$ függetlenek (mert B és C azok)
A, B és C függetlenek

$$= \mathbb{P}(\bar{C})\left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(\bar{C})\left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)\right) = \mathbb{P}(A+B)\,\mathbb{P}(\bar{C}),$$ és ezt akartuk belátni

A és B függetlenek

(3) ha $X \in N(-4,3)$, akkor $\tilde{X} = \frac{X+4}{3} \in N(0,1)$ $\quad F_{\tilde{X}}(x) = \Phi(x)$

$Z = \tilde{X}^2$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z < z) = \mathbb{P}(\tilde{X}^2 < z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} < \tilde{X} < \sqrt{z}) = F_{\tilde{X}}(\sqrt{z}) - F_{\tilde{X}}(-\sqrt{z}) = \Phi(\sqrt{z}) - \underbrace{\Phi(-\sqrt{z})}_{1-\Phi(\sqrt{z})} = 2\Phi(\sqrt{z}) - 1$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \varphi(\sqrt{z})\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}, \quad \text{ahol } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(4) $X \in B(3,\frac{1}{4}) \rightarrow$

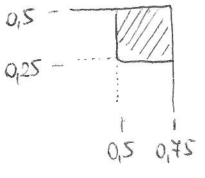
X:	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$:	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$
$Y = X^3$	0	1	8	27

$\left(\mathbb{P}(X=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}, \; k = 0,1,2,3\right)$

tehát Y eloszlása: $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{27}{64}$, $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{27}{64}$, $\mathbb{P}(Y=8) = \frac{9}{64}$, $\mathbb{P}(Y=27) = \frac{1}{64}$

$$EY = 0\cdot\frac{27}{64} + 1\cdot\frac{27}{64} + 8\cdot\frac{9}{64} + 27\cdot\frac{1}{64} = \frac{63}{32}$$

(5) (a) $$\mathbb{P}(0{,}5 \le X \le 0{,}75,\ 0{,}25 \le Y \le 0{,}5) = \underbrace{F_{X,Y}(0{,}75;0{,}5)}_{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)} - \underbrace{F_{X,Y}(0{,}75;0{,}25)}_{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)} - \underbrace{F_{X,Y}(0{,}5;0{,}5)}_{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)} + \underbrace{F_{X,Y}(0{,}5;0{,}25)}_{\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{4}} = \frac{19}{256}$$



$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y)$

(b) $F_{X,Y}$ szorzattá alakítható $\Rightarrow$ X, Y független $\Rightarrow$ $-3X$ és $2Y$ is független $\Rightarrow$ $R(-3X, 2Y) = 0$

(X és Y függetlensége így is igazolható:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2}{dx\,dy}F_{X,Y}(x,y) = 3x^2, \quad (\text{ha } 0 \le X, Y \le 1)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 3x^2\,dy = 3x^2[1-0] = 3x^2$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx = [x^3]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

$\rightarrow$ $f_X(x)\cdot f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$, tehát X és Y függetlenek.