

# A Számítástudomány alapjai

1. ZH 2012. X. 11. 8<sup>15</sup>

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

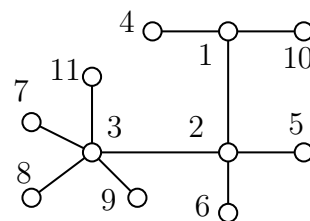
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának idopontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

- Szerencsére elmúlt a veszély, pánikra semmi ok. Luke Skywalker ugyan kivont lézerkarddal ment órára a jediképzőben, de a birodalmi gárda sem teketóriázott: még kicsöngetés előtt sikerült megelőznie a fejvesztett zűrzavart. A hatalmas sikert természetesen sajtótájékoztató követte, amire a birodalmiak három tagú vezetése terepszínű álcaruházatban, 10 feketébe öltözött elitgárdista társaságában vonult be. Itt minden nyitott kérdés megnyugtatóan tisztázódott, csupán egyetlen egy maradt. Hányféle sorrendben történhet a bevonulás, ha a szigorú előírás szerint 3 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 3 gárdista sorrendben kell vonulniuk? Segítsünk nekik.
- A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?
- Adott  $n + 2$  rendezett tömb, méreteik rendre  $1, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$ . Adjunk olyan eljárást, ami legfeljebb  $2^{n+2}$  összehasonlítással rendezi a tömbökben tárolt rekordokat.
- Kupac-e az 

1	4	2	8	3	7	5
---	---	---	---	---	---	---

 tömb?
- Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, 10 pontú gráf adható meg, amelyek egyetlen 9-fokú és 9 db 3-fokú csúcsot tartalmaznak?
- Határozzuk meg azt az  $F'$  fát, aminek Prüfer-kódja az ábrán látható  $F$  fa Prüfer-kódjának fordítottja, tehát amit úgy kapunk, hogy  $F$  Prüfer-kódját jobbról balra olvassuk.



*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404; 27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Pácsonyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

Jó munkát!

# A Számítástudomány alapjai

## 1. ZH javítókulcs (2012.10.11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Szerencsére elmúlt a veszély, pánikra semmi ok. Luke Skywalker ugyan kivont lézerkarddal ment órára a jediképzőben, de a birodalmi gárda sem teketóriázott: még kicsöngetés előtt sikerült megelőznie a fejvesztett zűrzavart. A hatalmas sikert természetesen sajtótájékoztató követte, amire a birodalmiak három tagú vezetése terepszínű álcaruházatban, 10 feketébe öltözött elitgárdista társaságában vonult be. Itt minden nyitott kérdés megnyugtatóan tisztázódott, csupán egyetlen egy maradt. Hányféle sorrendben történhet a bevonulás, ha a szigorú előírás szerint 3 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 3 gárdista sorrendben kell vonulniuk? Segítsünk nekik.

Minden bevonulási sorrendhez tartozik a vezetőknek és a gárdistáknak is egy-egy sorrendje. Ráadásul a vezetők tetszőleges sorrendjéhez és a gárdisták tetszőleges sorrendjéhez pontosan egy helyes bevonulási sorrend tartozik, amit úgy kapunk, hogy a két sorrendet alkalmas módon összefésüljük. (4 pont)

A vezetők sorrendje egy permutáció, ezek lehetséges száma  $3!$ . (2 pont)

A gárdisták sorrendje szintén egy ismétlés nélküli permutáció, ezek lehetséges száma  $10!$ . (2 pont)

A szabályszerű sorrendek száma tehát a permutáció-párok száma, ami  $3! \cdot 10!$ , és ez a válasz a sajtótájékoztatón nyitva maradt kérdésre. (2 pont)

Aki az elitgárdistákat a jól láthatóan viselt azonosító szám ellenére nem tekinti megkülönböztethetőnek, és így  $3!$  végeredményt kap, az csak 2 pontot érdemel.

Aki „félíg” különbözteti meg a gárdistákat, azaz  $\binom{10}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{2}{1} \binom{5}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{3}{3}$  válasszal próbálkozik, az kapjon 5 pontot.

2. A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?

A leszámolálandó pörgetések száma úgy kapható, hogy a lehetséges pörgetéssorozatok számából kivonjuk azon pörgetéssorozatok számát, amelyekben mind a 10 szám különböző. (3 pont)

A lehetséges pörgetéssorozatok száma 37 elem 10-edosztályú ismétléses permutációinak száma, azaz  $37^{10}$ . (3 pont)

A csupa különböző eredményt adó pörgetéssorozatok éppen 37 elem 10-edosztályú ismétlés nélküli variációi, ezek száma  $\frac{37!}{27!}$ . (3 pont)

A válasz tehát  $37^{10} - \frac{37!}{27!}$ . (1 pont)

Aki szerint egy pörgetés kimenetele csupán 36-féle lehet, de egyébként jól számol, az kapjon 9 pontot.

3. Adott  $n + 2$  rendezett tömb, méreteik rendre  $1, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$ . Adjunk olyan eljárást, ami legfeljebb  $2^{n+2}$  összehasonlítással rendezi a tömbökben tárolt rekordokat.

Tanultuk, hogy egy  $n$  és egy  $k$  méretű rendezett tömb összefésüléséhez legfeljebb  $n + k$  összehasonlítás szükséges. (Valójában elegendő  $n + k - 1$  is, de a számolás egyszerűbb a fenti, rosszabb becsléssel.) (3 pont)

Fésüljük össze a két 1 méretű tömböt, majd az így kapott 2 méretűt az eredetileg kapott 2 méretűvel, az így kapott 4 méretű tömböt az inputban szereplő 4 méretű tömbbel, sít. (4 pont)

Az egyes összefésülésekhez legfeljebb  $2, 4, 8, \dots, 2^{n+1}$  összehasonlítás szükséges, így az összehasonlítások száma a teljes eljárásban legfeljebb  $2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^{n+2} - 2 < 2^{n+2}$  (3 pont)

4. Kupac-e az  $\boxed{1\ 4\ 2\ 8\ 3\ 7\ 5}$  tömb?

A kupactulajdonság akkor teljesül egy tömbre, ha minden  $i$ -re igaz, hogy a tömbben  $i$ -diknek tárolt rekord nem nagyobb sem a tömbben  $2i$ -diknek, sem pedig a  $(2i + 1)$ -diknek tárolt rekordnál. (Természetesen akkor, ha léteznek a tömbben a kérdéses elemek.) (5 pont)

Azonban az 5-diknek tárolt rekord kisebb a 2-dik rekornál, (3 pont)

a kupactulajdonság tehát nem teljesül, (1 pont)

a kért tömb nem kupac. (1 pont)

5. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, 10 pontú gráf adható meg, amelyek egyetlen 9-fokú és 9 db 3-fokú csúcsot tartalmaznak?

Ez a feladat rosszul lett kitűzve: nem kötöttük ki, hogy a gráf egyszerű. A kitűzött feladat megoldása sajnos reménytelen. Ezért az alábbi eljárást követjük. Mindenkinek csak a maradék 5 megoldását értékeljük, és az arra kapott pontszámát szorozzuk 1,2-vel, majd lefelé kerekítünk. Ezen kívül, aki foglalkozott ennek a feladatnak az egyszerű változatával, az kapjon legfeljebb 5 pontot a helyes megoldásért, aki pedig a nem egyszerű változatot nézte és érdemi eredményt ért el, az legfeljebb 4 pontot kapjon. A rossz kitűzés egyértelműen az én hibám (Fleiner), elnézést kérek mindenkitől az okozott kellemetlenség miatt.

A feladatban szereplő gráfok mindegyike úgy kapható meg, hogy egy 9 csúcsú 2-reguláris gráfhoz (amiben tehát minden csúcs fokszáma 2) hozzáveszünk egy 10-dik pontot, amit minden más csúccsal összekötünk. (2 pont)

Két ilyen gráf pontosan akkor lesz izomorf egymással, ha a teljes fokú csúcs törlésével kapott 2-reguláris gráfok izomorfak. (2 pont)

Egy 2-reguláris gráf minden komponense kör, tehát a gráf diszjunkt körök uniója. (2 pont)

Az tehát a kérdés, hogy hány lényegesen különböző módon lehet 9 pontot diszjunkt körökkel lefedni, azaz hányféleképpen lehet a 9-et olyan egész számok összegére felbontani, amelyek mindegyike legalább 3. (2 pont)

Ez utóbbit viszont kiszámolhatjuk az ujjainkon:  $9 = 3 + 3 + 3 = 3 + 6 = 4 + 5$ , ami pontosan 4-féle lehetőség, vagyis legfeljebb 4 páronként nem izomorf gráf adható meg a feladatban megkívánt tulajdonsággal. (2 pont)

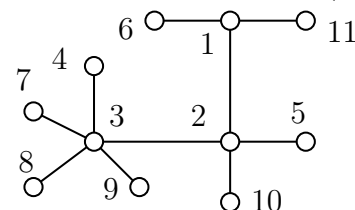
6. Határozzuk meg azt az  $F'$  fát, aminek Prüfer-kódja az ábrán látható  $F$  fa Prüfer-kódjának fordítottja, tehát amit úgy kapunk, hogy  $F$  Prüfer-kódját jobbról balra olvassuk.

Az órán tanult módszerrel kiszámítjuk az adott fa Prüfer-kódját: mindig a legkisebb leveleket törölve, és azok szomszédját felírva kapjuk az  $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 3)$  Prüfer-kódot. (3 pont)

Ennek fordítottja a  $(3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$  kód, (1 pont)

amihez az órán tanultak szerint hozzáírunk egy 11-est, majd mindig az adott halmazból hiányzó legkisebb elemeket kitöltve megkapjuk a leveleket a

a  $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 11 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{array}$  táblázat szerint. (4 pont)



Az ábrán látható a keresett fa, éleit a táblázat oszlopai határozzák meg. (2 pont)