# A Számítástudomány alapjai

**ELSŐ** pótZH 2011. XII. 1. $8^{15}$

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét**a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

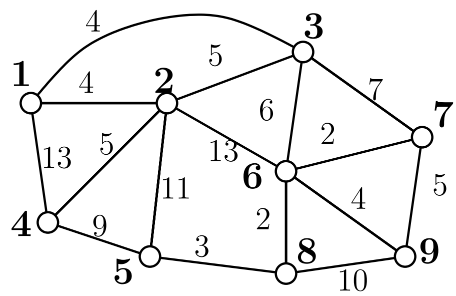
## Feladatok

1. Hányféleképpen lehet tombolán kisorsolni 5 különböző nyereményt 3 részvevő között? Hány olyan sorsolás van, ahol minden részvevő legalább egy nyereményt kap? (Két sorsolás akkor különbözik, ha van olyan nyereménytárgy, amit a két sorsoláson nem ugyanaz nyer meg.)

2. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban $3-3$ olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat?

3. Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris $G$ gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$



Rajzoljuk le a $G$ gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

4. Tegyük fel, hogy az $F$ fának csak első- és hatodfokú csúcsai vannak, szám szerint $n_1$ ill. $n_6$. Igazoljuk, hogy $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$.

5. Keressük meg a fenti mátrix melletti ábrán látható gráf egy minimális súlyú feszítőfáját és adjuk meg a Prüfer-kódját.

6. Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű $G$ gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt $G$-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\overline{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.

Jó munkát!

# A Számítástudomány alapjai

**1. pótZH javítókulcs**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.**

1. Hányféleképpen lehet tombolán kisorsolni 5 különböző nyereményt 3 résztvevő között? Hány olyan sorsolás van, ahol minden résztvevő legalább egy nyereményt kap? (Két sorsolás akkor különbözik, ha van olyan nyereménytárgy, amit a két sorsoláson nem ugyanaz nyer meg.)

   Az öt egymást követő sorsolás meghatározza a nyertesek sorrendjét. Ráadásul a 3 résztvevő tetszőleges sorrendje lehet a sorsolás nyertesek sorrendje, azaz a lehetséges nyereménykiosztások kölcsönösen egyértelműen megfelelnek 3 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációinak. (3 pont)
   Az órán azt tanították, hogy ezek száma $3^5$. (2 pont)
   Ha csak azokat a sorsolásokat kell megszámlálni, ahol mindenki legalább egy nyereménytárgyat kap, akkor le kell vonni azokat a sorsolásokat, ahol csak legfeljebb 2 nyertes lesz az 5 sorsoláson. (1 pont)
   E két nyertest 3-féleképp választhatjuk, és közöttük a fentiek miatt $2^5$-féleképp oszthatjuk szét a nyereményeket. (2 pont)
   Ezzel azonban minden olyan sorsolást, ahol minden nyereménytárgy ugyanahhoz a nyerteshez került, kétszer vontunk le. Ezért azt a 3 esetet még hozzá kell adni az eddigi különbséghez, amikoris mindent ugyanaz a nyertes visz. (1 pont)
   A végeredmény tehát $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 =$ (1 pont)
   $= 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150.$ (0 pont)

   Lehet persze másképp is számolni a második részt.

   Ha mindenki legalább egy nyereményt nyer, akkor a nyeremények eloszlása $3 + 1 + 1$ vagy $2 + 2 + 1$ lesz. (1 pont)
   Az első esetben 3-féle nyereményt $\binom{5}{3} = 10$-féleképp választhatjuk, a nyertes a 3 játékos bármelyike lehet, a maradék két játékos pedig 2-féleképp osztozhat a két nyereményen, ami $10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ lehetőséget jelent. (2 pont)
   A második esetben 5-féle lehet a magányos nyeremény, ami 3-féle játékoshoz kerülhet, míg a maradék 4 nyereményen a maradék két játékos $\binom{4}{2} = 6$-féleképp osztozhat, ekkor tehát $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$ a lehetőségek száma. Összesen tehát $60 + 90 = 150$-féle kívánt sorsolás lehetséges. (2 pont)

2. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban $3 - 3$ olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat?

   Jelölje $x$ és $y$ azon hallgatók számát, akik csak az SzA, ill. csak az Analízis ZH-t nem írták meg, a másikon pedig próbálkoztak. Legyen továbbá $z$ azoknak a hallgatóknak a száma, akik egyik ZH-n sem adtak be dolgozatot. Ekkor a feladat feltételeiből $x + y + z = 25$, $x + z = 12$ és $y + z = 15$ adódik, ahonnan $z = 2$, $x = 10$ és $y = 12$. (3 pont)
   Legyen az 5-tagú küldöttségben az egyes típusokból $a, b$ és $c$ hallgató. Ekkor $a + b + c = 5$, $a + c = 3 = b + c$, ahonnan $a = b = 2$ és $c = 1$. (3 pont)
   Azt kell tehát megszámolnunk, hogy az egyes hallgatótípusokból hányféleképp választhatjuk ki a küldöttségbe a megfelelő számú hallgatót. Mivel az egyes típusokból a választásaink egymástól függetlenek, (2 pont)
   ezért a válasz $\binom{10}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{2}{1}$ lesz. (2 pont)

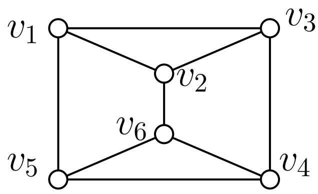
3. Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris $G$ gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Rajzoljuk le a $G$ gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

Mivel $G$ egyszerű, ezért nincs benne hurokél, így a szomszédossági mátrix főátlójában csak 0-k szerepelnek. (2 pont)
Irányítatlan gráfról lévén szó a szomszédossági mátrix szimmetrikus, azaz tetszőleges $i, j$-re ugyanaz a szám áll az $(i, j)$ és a $(j, i)$ helyeken. (2 pont)
Tudjuk még, hogy $G$ 3-reguláris, ezért a mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan 3 a beírt számok összege. (2 pont)
Ennek alapján a mátrix könnyen kiszudokuzható az alábbiak szerint: (2 pont)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



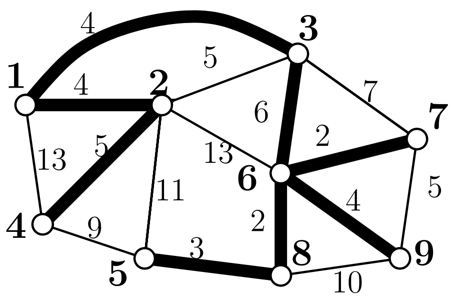

A jobb oldali ábra pedig $G$ egy lehetséges diagramját mutatja. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy az $F$ fának csak első- és hatodfokú csúcsai vannak, szám szerint $n_1$ ill. $n_6$. Igazoljuk, hogy $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$.

Tanultuk, hogy minden véges gráfban a fokszámösszeg az élszám kétszerese, (3 pont)
továbbá, hogy egy $n$ csúcsú fának pontosan $n - 1$ éle van. (2 pont)
Ez $F$-re nézve azt jelenti, hogy $n_1 + 6n_6 = 2n - 2$, ahol $n = n_1 + n_6$ a $G$ csúcsainak száma. (2 pont)
Innen azt kapjuk, hogy $n_1 + 6n_6 = 2(n_1 + n_6) - 2$, (2 pont)
amit rendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$ . (1 pont)

5. Keressük meg a fenti mátrix melletti ábrán látható gráf egy minimális súlyú feszítőfáját és adjuk meg a Prüfer-kódját.

Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével, az élekről a súlyuk növekvő sorrendjében eldöntve, bevegyük-e azokat a megkonstruált feszítőfába, az ábrán vastaggal jelölt minimális súlyú feszítőfát kapjuk. (5 pont)
Ennek a Prüfer-kódját úgy kapjuk, hogy sorra töröljük a legkisebb sorszámú leveleket, és ebben a sorrendben feljegyezzük a levelek szomszédját, (2 pont)
ám az utolsó szomszédot nem vesszük be a kódba. (1 pont)




A leveleket $4, 2, 1, 3, 5, 7, 8, 6$ sorrendben töröljük, a szomszédok rendre $2, 1, 3, 6, 8, 6, 6, 9$ lesznek, tehát a keresett Prüfer-kód $(2, 1, 3, 6, 8, 6, 6)$. (2 pont)

6. Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű $G$ gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt $G$-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\overline{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.

Tanultuk, hogy összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden fokszáma páros. (1 pont)
Ezek szerint $G$-ben minden fokszám páros. (2 pont)
A $\overline{G}$ komplementergráfban a $v$ csúcs foka $d_{\overline{G}}(v) = 98 - d_G(v)$, (2 pont)
ezért $\overline{G}$-ben is páros lesz minden csúcs foka. (2 pont)
Egyedül annak igazolása van hátra, hogy $\overline{G}$ összefüggő. Ez következik pl a Dirac-tételből, hiszen $\overline{G}$-ben minden fok legalább $98 - 30 = 68 > \frac{99}{2}$ (3 pont)

Az utolsó 2 pont úgy is megszerezhető, hogy ha a $\overline{G}$-beli minimális fokszám több, mint $\frac{n}{2}$ (márpedig ez igaz), akkor bármely két nem szomszédos pontnak van közös szomszédja, és ebből azonnal következik az öf tulajdonság.