

# AZ ENTRÓPIA

*A jövő azoké, akik kezelni tudják az entrópiát; akik csak az energiát értik, azok csupán könyvelők lesznek... A korai ipari forradalom alapja az energia volt, a jövő önműködő gyára azonban az entrópia forradalma!*

FREDERIC KEFFER

*A termodinamika törvényei:*

1. Nem nyerhetsz.
2. Nem tarthatod egyensúlyban a nyereséget és a veszteséget.
3. Nem hagyhatod abba a játékot.

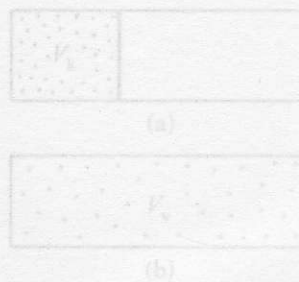
## 23.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben egy más szempontból vizsgáljuk a második főtételt, teljesen más perspektívából közelítünk hozzá, mint az előző fejezetben. Ez a megközelítés új fogalmat foglal magába: az *entrópiát*, amely nemcsak önmagában érdekes, de a második főtételnek sokkal mélyebb megértését teszi lehetővé. A termodinamika főtételei a fizika legáltalánosabb törvényei közé tartoznak. Az első főtétel azt mondja ki számunkra, hogy a hő az energiacsere egyik formája és, hogy az energia megmarad. A második főtétel megtilt bizonyos energiaátalakítási folyamatokat, annak ellenére, hogy bennük az energia végső soron megmaradna. Így a második főtétel fontos megállapítást tesz arról, hogy mi nem tehető meg.

A természetben lejátszódó folyamatok – az un. „természetes” folyamatok – gyakran járnak hőáramlással meleg testektől a hidegebbek felé. Valójában nincs tökéletes hőszigetelés, így hőveszteségek mindig előfordulnak. Másrészt, a fordított folyamat, – hőáramlás hidegebből melegebb testre – sohasem fordul elő természetes módon. Nem melegedhetünk fel úgy, hogy magunkhoz szorítunk egy jégcsapot, annak ellenére sem, hogy az energia megmaradna a hőtadási folyamat során. Úgy tűnik a termikus energia csak „lefelé megy”, magasabb hőmérsékletről alacsonyabbra.

Ez az egyik jelentése az „irreverzibilis folyamat” kifejezésnek. Makroszkópikus szinten hő sohasem áramlik „felfelé”. Igaz azonban, hogy mesterségesen átvihetünk termikus energiát hidegebb testről melegebbre. Ezt teszi minden hűtőgép. De ennek az az ára, hogy további változások is bekövetkeznek: a környezet munkát végez a rendszeren, és valamilyen még hidegebb test még több termikus energiát vesz fel. *Minden olyan természetes folyamat, amely hőáramlással jár, irreverzibilis.*

Az ilyen folyamatok közös vonása az, hogy mikroszkópikus szinten egyre növekvő rendezetlenséggel járnak. Ez a kettős megközelítés – a makroszkópikus hőáramlás és a mikroszkópikus rendezetlenség – ugyanannak az alapjelenségnek kétféle megközelítési módja. Tárgyalásunkat a makroszkópikus szemponttal kezdjük.



23-1 ábra

Szabad expanzió során a gázi nagyobb térfogatra hagyjuk tágulni, és így betölti a vákuum helyét.

## 23.2 Entrópia makroszkópikus szempontból

Idézzünk fel az előző fejezetben tárgyalt termodinamikai folyamatokra vonatkozó néhány eredményt! A (22-12) egyenletből a Carnot-körfolyamatra a következő összefüggés adódik:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \quad (23-1)$$

Tekintsük most a  $Q$  hőátvitelt algebrai mennyiségnek és legyen  $Q$  pozitív, ha hő kerül a rendszerbe és negatív, ha hő távozik a rendszerből. (Bár ez az előjelhasználat eltér a Carnot-körfolyamat tárgyalásakor használttól, megegyezik az I. főtételeben alkalmazott előjellel és ez az elfogadott az entrópia tárgyalásánál is.) Elfogadva ezt az előjelkonvenciót, a (23-1) egyenletből arra a következtetésre jutunk, hogy ha a  $Q/T$  un. redukált hőmennyiségeket teljes (reverzibilis) Carnot-ciklus mentén összegezzük, az eredmény zérus:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

Még tömörebb jelöléssel

Egy Carnot-ciklusra: 
$$\sum_{\text{(a teljes ciklus mentén)}} \left( \frac{Q}{T} \right) = 0 \quad (23-2)$$

Emlékeztetünk arra, hogy a Carnot-körfolyamat definíció szerint reverzibilis körfolyamat. Mi a helyzet vajon más reverzibilis körfolyamatokkal, amelyek nem követik a Carnot-ciklus görbét? Mennyi a  $Q/T$  redukált hőkö összege ezekben az esetekben? Amint azt a legutóbbi fejezetben megmutattuk, tetszőleges reverzibilis körfolyamat Carnot-ciklusokat alkotó izotermikus és adiabatikus lépések sorozatával közelíthető (ld. 22-5. ábra). Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy bármely reverzibilis körfolyamat mentén a redukált hőkö  $\Sigma(Q/T)$  összege szintén zérus.

Bármely reverzibilis körfolyamatra: 
$$\sum_{\text{(a teljes ciklus mentén)}} \left( \frac{Q}{T} \right) = 0 \quad (23-3)$$

Rudolf Clausius, német fizikus, 1865-ben a  $Q/T$  mennyiséget „az **entrópia**-nak ( $S$ )” nevezte el a görög trope szó után, aminek jelentése „változás”, vagy „átalakítás”. (Clausius ezt a fogalmat a rendszer átalakító képességének mértékekeként kezelte.) Az entrópia infinitezimális (reverzibilis) változását ( $dS$ ) a következő összefüggéssel definiáljuk:<sup>1</sup>

**ENTRÓPIA  $S$**   
**(makroszkópikus definíció)**

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (23-4)$$

Zárt reverzibilis folyamatra:

$$\Delta S = 0$$

**Integrálalakban:**

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

$$\oint dS = 0$$

<sup>1</sup> Hivatkozunk a 21. fejezet (4) lábjegyzetére. A  $\delta Q$  jelölés azt fejezi ki, hogy a hő nem teljes differenciál. Ezzel szemben  $\delta Q/T$  teljes differenciál, így  $S$  ( $Q$ -val és  $W$ -vel ellentétben) a  $p$ ,  $V$ ,  $T$  és  $U$  mennyiségekkel együtt állapotváltozó.

Az entrópiát – SI egységekkel – joule/kelvin-ben mérjük. A  $\delta Q$  hőátvitel pozitív, amikor hőt vesz fel a rendszer és negatív, amikor hőt vonunk el a rendszertől. Két állapot között *bármely reverzibilis úton* haladhatunk, mivel – a (23-3) egyenlet alapján – a két állapot mindegyike rajta van valamelyik, reverzibilis körfolyamatot leíró, zárt görbén.

Jegyezzük meg, hogy a definíció csak az entrópia *megváltozását* rögzíti, az egyes állapotokhoz tartozó abszolút entrópia skálát azonban nem jelöli ki. Ebből a szempontból az entrópia és a gravitációs potenciális energia hasonló egymáshoz, mindkét mennyiségnek *csak a megváltozása fontos*. (Az entrópia esetén is – éppúgy, mint a gravitációs energiánál – egy adott rendszer meghatározott állapotához, mint referenciaponthoz hozzárendelhetnénk egy számértéket. Ezután az egymást követő változásokat kiszámítva már minden esetben meghatározhatnánk az entrópia abszolút értékét is.)

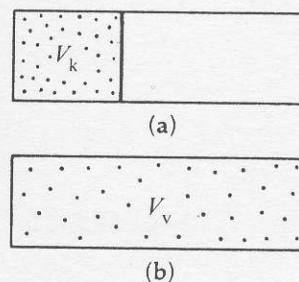
### Az entrópia állapotfüggvény

A termodinamikában bizonyos változók speciális fontossággal bírnak, mivel ezek ún. *állapotfüggvények*: a rendszer adott állapotában mindig ugyanazt az értéket veszik fel. Ilyen állapotfüggvény az abszolút hőmérséklet ( $T$ ) és a belső energia ( $U$ ) is (*állapotváltozóknak* is nevezik őket). Az entrópia azért is fontos, mert szintén állapotfüggvény. Értékének megváltozása, miközben a rendszer egyik állapotból a másikba jut, *csak magától a két állapottól, nem pedig az állapotokat összekötő úttól függ*. Ugyanúgy viselkedik minden más állapotfüggvény is, mint például a belső energia ( $U$ ), a nyomás ( $P$ ) és a hőmérséklet ( $T$ ). (Emlékeztetünk arra, hogy – amint azt a 21.3 fejezetben tárgyaltuk,  $Q$  és  $W$  nem állapotfüggvény.) A rendszer állapotváltozói közötti egyensúlyi állapotban mindig fennálló kapcsolatot *állapotegyenletnek* nevezük.

A *hőmérsékletet* ( $T$ ) és a *belső energiát* ( $U$ ) rendre a nulladik, ill. az első főtétel segítségével definiáltuk. Az *entrópia* ( $S$ ) a második főtételhez kapcsolódik. Az entrópia fontos fogalom, mivel – amint azt a későbbiekben megmutatjuk – egy rendszerben rendelkezésre álló energia „minőségének” a mértékeként, nevezetesen az energia „munkára foghatóságának” mértékeként értelmezhető! Pusztán egy rendszer teljes energiájának ismerete nem elegendő annak meghatározására, hogy mennyi munkát képes végezni a rendszer. Erről csak a rendszer entrópiája ad információt.

Eddig csak teljes reverzibilis körfolyamatokat vizsgáltunk. Mi a helyzet azonban egy olyan folyamattal, amelynek során egy rendszer csupán az egyik állapotból a másik állapotba jut? Bár nem biztos, hogy az ilyen folyamat reverzibilis, az entrópiaváltozást a kezdeti és végállapot között mindig ki tudjuk számítani úgy, hogy *tetszőleges*, a két állapotot összekötő reverzibilis folyamatot veszünk figyelembe. *Ez lehetséges, mivel az entrópia állapotfüggvény*. Nem számít, hogy milyen úton jutunk az 1 állapotból a 2 állapotba, az entrópiaváltozás azonos.

Példaként vegyük azt az entrópiaváltozást, ami akkor következik be, amikor egy ideális gáz kezdetben egy edény kis térfogatrészére van összenyomva egy válaszfalal, amit később eltávolítunk. Ekkor a gáz *szabadon kitágul*  $V_k$ -ről  $V_v$  térfogatra (ld. 23-1 ábra). A folyamat irreverzibilis. A nyomás, sűrűség és hőmérséklet ugyanis nem azonos a folyamat során a gáz egészében. Eltérésük mértéke nagyobb, mint a reverzibilis változások során megengedett kicsiny különbségek. Például a gyorsabb, „melegebb” molekulák gyorsabban hatolnak be az üres térbe, mint a lassúbb molekulák. Így, – mivel a gáz nincs termikus egyensúlyban a tágulás során, – nem alkalmazhatjuk az állapotegyenletet az entrópiaváltozás számításakor. Bizonyos értelemben elveszítjük a folyamat matematikai kontrollját. Mivel a rendszer entrópiája csak a rendszer állapotától függ, az irreverzibilis tágulás alatt bekövetkező entrópiaváltozásnak egyenlőnek kell lennie az ugyanazon két



23-1 ábra

Szabad expanzió során a gáz nagyobb térfogatra hagyjuk tágulni, és így betölti a vákuum helyét.

állapotot összekötő, bármely reverzibilis úton bekövetkező entrópiaváltozással. Ez az a módszer, amit az irreverzibilis folyamatokra vonatkozó entrópiaváltozás meghatározásakor használunk: az entrópiaváltozást az azonos kezdeti és végállapotot összekötő valamilyen más, megfelelő reverzibilis út felhasználásával számítjuk ki.

Szabad tágulás során a gáz összenergiája nem változik, fontos azonban tudnunk: az entrópia növekszik. Tovább követve ezt a megállapítást, tekintjük át a következő gondolatmenetet. Mivel a gáz vákuumba tágul, nem végez munkát, ezért  $W = 0$ . Továbbá a tartály hőszigetelt, így a gázzal nem közlünk hőt sem, ezért  $Q = 0$ . Az I. főtétel szerint:

$$\Delta U = Q - W,$$

innen

$$\Delta U = 0.$$

Mivel  $\Delta U = 0$ , a hőmérséklet állandó marad. Tehát a két állapotot összekötő reverzibilis folyamat egyik típusa az izotermikus tágulás. Jegyezzük meg, hogy annak ellenére, hogy szabad tágulást vizsgálunk, – mivel az entrópia csak a rendszer állapotától függ, – az entrópiaváltozást számíthatjuk egy másik folyamatra, amellyel könnyebben dolgozhatunk (izotermikus tágulás). Az így kapott eredmény egyben megegyezik az éppen vizsgált szabad tágulás során bekövetkező entrópiaváltozással is.

A 21. fejezet (21-5) egyenlete szerint  $V_k$ -től  $V_v$ -ig történő izotermikus táguláshoz  $Q$  hőmennyiség szükséges:

$$Q = nRT \ln \left( \frac{V_v}{V_k} \right) \quad (23-5)$$

Így a reverzibilis tágulás során bekövetkező ( $Q/T$ ) entrópiaváltozás, ami egyben a kérdéses szabad expanzióra is ugyanannyi:

ENTRÓPIAVÁL-  
TOZÁS SZABAD  
TÁGULÁS SORÁN

$$\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_v}{V_k} \right) \quad (23-6)$$

A szabad tágulás mellett az entrópia akkor is nő, amikor kipukkasztunk egy léggömböt, amikor lehelünk, vagy amikor egy autó kipufogócsöve gázokat bocsát ki, stb.

A makroszkópikus folyamatok mindig úgy mennek végbe, hogy az entrópia növekedjék. Az entrópiának ezt az egyirányú változását a „természet nyilá”-nak nevezik, mivel azt az irányt jelzi, amerre minden természetes folyamat halad. Ezt matematikailag így fejezzük ki:

$$\Delta S_{\text{Univerzum}} > 0 \quad (23-7)$$

A természetes (irreverzibilis)folyamatokra



(a)



(b)

### 23-1 PÉLDA

Mekkora az entrópiaváltozás, amidőn 2 kg,  $0^\circ\text{C}$ -os jég  $0^\circ\text{C}$ -os víz-zé olvad?

#### MEGOLDÁS

A hőmérséklet állandó marad az egész folyamat során:  $T = 0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$ . A hőtávitel a jég-víz fázisátmenetnek köszönhető. Feltételezzük, hogy hőtávitel csak differenciálisan kicsiny hőmérsékletkülönbség eredményeképpen jön létre. Így a folyamat reverzibilis és alkalmazhatjuk a (23-4) egyenletet. A jég olvadáshője:  $L = 3,34 \times 10^5\text{ J/kg}$ . Így

$$Q = mL = 2 \text{ kg } 3,34 \times 10^5 \text{ J/kg} = 6,68 \times 10^5 \text{ J}$$

és az entrópiaváltozás:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{6,68 \times 10^5 \text{ J}}{273 \text{ K}} = 2,45 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

### 23-2 PÉLDA

Egy  $m_2$  tömegű,  $c_2$  fajhőjű,  $T_2$  hőmérsékletű, forró követ  $m_1$  tömegű,  $c_1$  fajhőjű,  $T_1$  hőmérsékletű, hideg vizet tartalmazó tartályba dobunk. ( $T_1 < T_2$ ). A végső hőmérséklet  $T_v$ . (A tartállyal kapcsolatos hatásokat elhanyagoljuk.) Mekkora az entrópiaváltozás a folyamat során?

### MEGOLDÁS

A folyamat irreverzibilis, mivel véges hőmérsékletkülönbséggel jár. Ha azonban elképzelünk egy, a kezdeti és végállapotot összekötő reverzibilis folyamatot, az entrópiaváltozás az általunk keresett érték lesz (mivel az entrópiaváltozás nem függ az úttól). Így elképzeljük, hogy a kő fokozatosan – azaz reverzibilisen – hűl  $T_v$ -re, csupán elemien kicsiny (differenciális) hőmérsékletkülönbségek és differenciális hőcserék során. Hasonló korlátozásokat alkalmazunk a víz melegedésére. Ezen az alapon az entrópiaváltozás:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T_{\text{víz}}} + \int \frac{\delta Q}{T_{\text{kő}}}$$

A differenciális hőmennyiség:  $\delta Q = mc dT$ . Így

$$\Delta S = m_1 c_1 \int_{T_1}^{T_v} \frac{dT}{T} + m_2 c_2 \int_{T_2}^{T_v} \frac{dT}{T}$$

$$= m_1 c_1 (\ln T_v - \ln T_1) + m_2 c_2 (\ln T_v - \ln T_2)$$

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \left( \frac{T_v}{T_1} \right) + m_2 c_2 \ln \left( \frac{T_v}{T_2} \right)$$

Az első kifejezés pozitív, mert  $T_v > T_1$ , a második pedig negatív, mert  $T_v < T_2$ . Azonfelül kimutatható, hogy mivel  $T_1 < T_v < T_2$ , a pozitív tag nagysága mindig nagyobb, ami minden esetben entrópianövekedést eredményez.

### 23-3 PÉLDA

Vörösréz rúd végei termikus kapcsolatban vannak a  $T_2 = 500 \text{ K}$  hőmérsékletű hőtartállyal, ill. a  $T_1 = 300 \text{ K}$  hőmérsékletű hőtartállyal. Határozzuk meg a) az egyes hőtartályok entrópiaváltozását, b) a rúd entrópiaváltozását és c) a Világegyetem entrópiaváltozását, ha a rúd egyik végétől a másikig átvezetett hő  $8000 \text{ J}$ , miközben a rúd mentén a hőmérsékleteloszlás nem változik!

**MEGOLDÁS**

- a) Emlékezzünk arra, hogy egy rendszertől elvont hő negatív. A meleg hőtartály entrópiaváltozása

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2} = \frac{-8000 \text{ J}}{500 \text{ K}} = -16,0 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

A hideg hőtartály entrópiaváltozása

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} = \frac{+8000 \text{ J}}{300 \text{ K}} = +26,7 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

- b) A rúd termikus energiájában, ill. hőmérsékletében nem történt változás. Ezért

$$\Delta S_{\text{rúd}} = 0$$

- c) A Világegyetem eredő entrópiaváltozása:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{univerzum}} &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{\text{rúd}} = 26,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} + \left( -16,0 \frac{\text{J}}{\text{K}} \right) + 0 \\ &= 10,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned}$$

### 23.3 Entrópia vizsgálata mikroszkópikus szempontból

A termodinamika más témáihoz hasonlóan, az entrópia fogalom mikroszkópikus megfontolásokkal – azaz a molekuláris mozgások statisztikus elemzésével – éppúgy megközelíthető, mint makroszkópikus fogalmakból kiindulva (nyomás, hőmérséklet, vagy más, laboratóriumi eszközökkel mérhető paraméterek). Tekintsük az éppen most vizsgált folyamatot, az ideális gáz szabad tágulását, mikroszkópikus szempontból.

A kinetikus elmélet szerint a gázmolekulákat véletlenszerű mozgásban lévő tömegpontoknak képzeljük. Kezdetben az egész gáz a  $V_k$  térfogatra van összenyomva (23-1a ábra). Amikor eltávolítjuk a válaszfalat, a molekulák – végül is, – többé-kevésbé egyenletesen oszlanak el mindenütt a nagyobb  $V_v$  térfogatban. A pontos eloszlás valószínűségi kérdés.

Az eloszlásra vonatkozó valószínűség meghatározását a szabad tágulás során előforduló részecske-elrendeződések valószínűségének meghatározásával kezdjük. A válaszfal eltávolítása utáni pillanatban – mielőtt a molekuláknak esélyük lenne arra, hogy elmozduljanak a tartály másik felébe, – az összes molekulát a kezdeti,  $V_k$  térfogatban találjuk. Ennek a speciális elrendezésnek a valószínűségét könnyen megbecsülhetjük, ha „természetes módon” lép fel a molekuláknak a nagyobb  $V$  térfogatban végzett mozgása során. Ebben az esetben, mivel minden egyes molekula szabadon mozog a teljes térfogatban, egy adott molekula megtalálásának valószínűsége ( $W_k$ ) a  $V_k$  térfogatban – ami a teljes térfogat ( $V_k / V$ ) törtrésze – éppen a térfogatok aránya:

$$\text{Valószínűség} \quad W_k = \frac{V_k}{V} \quad (\text{egy molekulára}) \quad (23-8)$$

További molekulákat adva a rendszerhez, ha a részecskék egymástól függetlenül mozognak, a valószínűségek összeszorzódnak. Ezért annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg  $N$  molekula található  $V_k$  térfogatban:

$$W_k = \left(\frac{V_k}{V}\right)^N \quad (N \text{ molekulára}) \quad (23-9)$$

Hasonlóképpen, annak valószínűsége, hogy  $N$  molekulát valamilyen nagyobb  $V_v$  térfogatban találunk:

$$W_v = \left(\frac{V_v}{V}\right)^N \quad (N \text{ molekulára}) \quad (23-10)$$

E két valószínűség aránya:

$$\frac{W_v}{W_k} = \frac{\left(\frac{V_v}{V}\right)^N}{\left(\frac{V_k}{V}\right)^N} = \left(\frac{V_v}{V_k}\right)^N \quad (23-11)$$

Ha ennek az egyenletnek a természetes logaritmusát vesszük és megszorozzuk a Boltzmann-állandóval, nagyon érdekes következtetést vonhatunk le:

$$k \ln \left(\frac{W_v}{W_k}\right) = nN_A k \ln \left(\frac{V_v}{V_k}\right) \quad (23-12)$$

ahol az  $N$  molekulaszámot  $nN_A$ -nak írjuk, vagyis a mólszám szorozva az Avogadro-számmal. A 20.2 fejezetből tudjuk, hogy  $N_A k$  az univerzális gáz-állandó ( $R$ ), tehát ezt az egyenletet így írhatjuk:

$$k \ln W_v - k \ln W_k = nR \ln \left(\frac{V_v}{V_k}\right) \quad (23-13)$$

De termodinamikai megfontolásból (speciálisan a (23-6) egyenletből) azt találtuk, hogy amikor  $n$  mólnyi gáz  $V_k$ -től  $V_v$ -ig szabad expanziót végez, a  $\Delta S$  entrópiaváltozás:

$$S_v - S_k = nR \ln \left(\frac{V_v}{V_k}\right) \quad (23-14)$$

Vegyük észre, hogy a (23-13) és a (23-14) egyenlet jobb oldala azonos. Tehát az entrópia és a valószínűség között a következő összefüggés írható fel:

$$\text{ENTRÓPIA } S \quad S = k \ln W \quad (23-15)$$

(mikroszkópikus definíció)

Bár tárgyalásunk során az ideális gáz szabad tágulásának speciális esetét vizsgáltuk, az entrópia statisztikus elméletének szigorú interpretációja ugyanerre a következtetésre vezet:

$$\text{ENTRÓPIA} \quad \text{Az entrópia a mikroszkópikus rendezetlenség mértéke..}^2$$

(mikroszkópikus nézőpont)

<sup>2</sup> Az entrópia és a rendezetlenség közti kapcsolat sokkal bonyolultabb, mint azt itt jeleztük. Néhány megfontolandó megjegyzés található P.G.Wright: Entropy and Disorder. Contemporary Physics 11 (Nov. 1970) pp.581-588. c. könyvében.

### 23-2 ábra

Egy tartályban lévő gáz molekuláris mozgásának két lehetséges állapota. Jegyezzük meg, hogy az összenergia mindkét állapotban azonos.

## 23-4 PÉLDA

Ismét a szabad expanziót tekintve, igazoljuk, hogy a makroszkópikus és a mikroszkópikus megközelítés ugyanarra a következtetésre vezet. Tegyük fel, hogy 1 mól ideális gázzal szabad expanziót hajtunk végre a kezdeti térfogattól annak négyszereséig. A kezdeti és a végső hőmérséklet természetesen ugyanaz. a) Számoljuk ki az entrópiaváltozást a makroszkópikus megközelítés segítségével! b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a véletlenszerű mozgások során minden molekula egyidejűleg az eredeti  $V_k$  térfogatban található! c) A b) rész valószínűségi megfontolásait felhasználva számoljuk ki a  $\Delta S$  entrópiaváltozást a szabad tágulásra és mutassuk meg, hogy az megegyezik az a) részben kapott értékkel:

$$\Delta S = S_v - S_k = k \ln W_v - k \ln W_k = k \ln \left( \frac{W_v}{W_k} \right)$$

## MEGOLDÁS

a) A (23-6) egyenletből ezt kapjuk:

$$\Delta S = nR \ln \left( \frac{V_v}{V_k} \right) = (1) \cdot R \ln \left( \frac{4V_k}{V_k} \right) = R \ln 4$$

b) Annak a valószínűsége, hogy egyetlen molekula a  $V_k$  térfogatban található, éppen a térfogatok arányával egyenlő:  $W_k = V_k/4V_k = 1/4$ . Egy mólnyi molekulára vonatkozóan ( $N_A$ ) – amelyek egymástól függetlenül mozognak, – rendkívül kicsi szám annak a valószínűsége, hogy mindegyik a  $V_k$  térfogatban található:

$$W_k = \left( \frac{1}{4} \right)^{N_A} \quad (N_A \text{ molekulára})$$

c) Annak a valószínűsége ( $W_v$ ), hogy az összes molekula  $4V_k$  térfogatban található: 1 (mivel nem lehetnek sehol másutt).

$$\Delta S = k \ln \left( \frac{W_v}{W_k} \right) = k \ln \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{4} \right)^{N_A}} \right] = N_A k \ln 4 = R \ln 4$$

Ez ugyanaz az eredmény, mint amit az a) pontban a makroszkópikus paraméterek felhasználásával kaptunk.

## 23.4 Az entrópia és a második főtétel

Az entrópia és a valószínűség közötti kapcsolat újszerű bepillantást nyújt a második főtételbe. Annak, hogy az entrópia növekszik, nagyon nyilvánvaló oka van: minden természetes folyamat a maximális valószínűségű állapot irányába tart. Vagyis a rendszerek mindig a legvalószínűbb konfiguráció, a maximális rendezetlenség irányában változnak. Ezek a maximális entrópiájú állapotok egyensúlyi állapotok. A magukra hagyott rendszerek az egyensúlyi állapotok felé haladnak, amelyek a legnagyobb valószínűségű, – vagy maxi-



mális entrópiájú – állapotok. Ez a növekedés nem „bizonyítható” jobban, mint ahogyan a „lefelé történő” hőáramlás iránya „bizonyítható”. Az állítás pusztán statisztikus tendenciát fejez ki. De miután a makroszkópikus rendszerek hihetetlenül nagy számú molekulát tartalmaznak, ez a tendencia döntően meghatározza, hogy mi fog történni.

A fenti megfontolások alapján a második főtételt az entrópia segítségével is megfogalmazhatjuk. A következő megállapítás teljesen egyenértékű a második főtétel egyéb alakjaival:

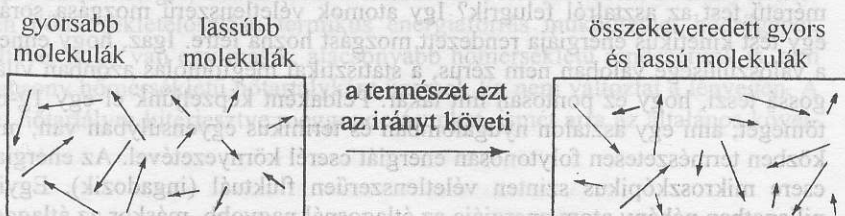
A TERMODINAMIKA II.  $\Delta S_{\text{univerzum}} > 0$  Minden természetes, – (azaz  
FŐTÉTELE irreverzibilis) folyamatra  
(entrópiával kifejezve)  $\Delta S_{\text{univerzum}} = 0$  Csak reverzibilis folyamatokra.

Egy speciális példa sokat segíthet a megértésben. Tekintsünk egy tartályban lévő gázt, amelyben az átlagosnál nagyobb sebességgel rendelkező molekulák a bal oldalon gyűltek össze, a lassúbb molekulák pedig a másikon, amint azt a 23-2a ábra mutatja. Ez a speciális elrendezés persze nagyon valószínűtlen, mivel a véletlenszerű molekuláris mozgások a gyors és lassú csoportok többé-kevésbé egyenletes keveredését idézik elő, ahogyan az a 23-2b ábrán látható. Az első esetet a „rendezettség” és a „kicsiny valószínűség” kifejezések írják le. A második esetben inkább alkalmazhatók a „rendezetlenség” és a „nagy valószínűség” kifejezések. Ha csak tíz molekula lenne a tartályban, véletlenül, bizonyos pillanatban, találhatnánk öt gyorsabb molekulát a tartály egyik felében és öt lassúbbat a másikban. De a molekulaszám növekedésével ezeknek a véletlenszerű fluktuációknak az esélye, amelyek „gyors-lassú” szétválasztást eredményeznek, gyakorlatilag elhanyagolhatóvá válik: ha nem is zérussá, de a zérushoz rendkívül közeli értéké.

Becsüljük meg ezt a valószínűséget. Annak a valószínűsége, hogy bármely molekula véletlenszerű mozgás eredményeként a tartály neki „megfelelő” oldalán van  $1/2$ . További molekulákat adva a rendszerhez – feltéve, hogy egymástól függetlenül mozognak, – a valószínűségek összeszorzódnak. Így – ha mondjuk 100 molekulánk van, – a véletlenszerű mozgás eredményeként a gyors-lassú szétválasztás elérésének valószínűsége:

$$W = \left[ \begin{array}{l} \text{az 50 gyorsabb molekula} \\ \text{bal oldali előfordulásának} \\ \text{valószínűsége} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{az 50 lassúbb molekula jobb} \\ \text{oldali előfordulásának való-} \\ \text{színűsége} \end{array} \right]$$

$$W = \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{1,27 \times 10^{30}}$$



a) Rendettség: a molekulák nagyon valószínűtlen sebesség-eloszlása.

b) Rendetlenség: a molekulák valószínű sebesség-eloszlása.

### 23-2 ábra

Egy tartályban lévő gáz molekuláris mozgásának két lehetséges állapota. Jegyezzük meg, hogy az összenergia mindkét állapotban azonos.

vagy másképpen:  $10^{30}$  esetből 1 körüli az esély. A rendszer molekulaszámának növekedésével a valószínűség gyorsan válik még kisebbé. Így a 23-2a ábra rendezettségének az előfordulási valószínűsége rendkívül kicsi, ha 100 molekuláról 1 mólyi gázra ( $\sim 10^{23}$  molekula) extrapolálunk.

A második főtételt valójában mindenki „ismeri”. Következmenyei mindenütt felismerhetők körülöttünk. Minden esetben, amikor olyat látunk, ami ha a róla készült filmet visszafelé játszánánk, butaságnak tűnne, akkor a második főtételt láttuk működés közben. A kézírás nem „szívódik fel” a golyóstollba; az autók kipufogói a szmogos levegőt nem szívják vissza és nem alakítják benzinné és tiszta levegővé; egy atléta sohasem lesz friss, ha visszafelé fut a pálya mentén és nem abszorbeálja az izzadságát; hajtincsek sohasem ugranak fel a fodrászat padlójáról és ragadnak vissza a vendég fejére; a műugró nem repül vissza az úszómedencéből az ugródeszkára, miközben a hullámok és a loccsanások hirtelen sima vízfelületté válnak; egy lábos víz nem fagy meg a tűzhely lángján (hő nem áramlik hideg testről melegre) stb. Valójában szinte minden makroszkópikus esemény, amit megfigyelünk rendkívül világosan illusztrálja a második főtételt.

Amikor egy jégkocka megolvad, nő az entrópiája. A második főtétel természetesen nem jelenti azt, hogy a megolvadt jégkockát nem lehet visszafagyasztani. De ehhez a mélyhűtőnek – a saját működésével – még nagyobb entrópiánövekedést kell létrehoznia. Ha egyszer egy jégkocka megolvadt, lehetetlen mindent pontosan ugyanúgy visszaállítani mint az elolvadás előtt volt.

Természetesen teremtünk is rendet, például minden alkalommal, amikor összeillesztünk egy kirakós játékot, vagy összeállítunk egy autót. Maguk az élő szervezetek növekedésük során egyre rendezettebbé válnak és mialatt folytatják a molekuláknak egy magasan szervezett rendszerré való alakítását, helyi entrópiacsökkenést produkálnak. Az emberi agy a kis entrópia-koncentráció mintája. De minden ilyen rendezett állapotú rendszer létrehozása végül is mindig entrópiánövekedést eredményez, ha a rendszernek és környezetének együttes entrópiaváltozását vizsgáljuk. Egy izolált rendszer nem képes csökkenteni saját entrópiáját. Az entrópia csak változatlan maradhat, vagy nőhet.

Nehéz elképzelni az ettől folytonosan eltérően működő világegyetemet, azt, hogy minden természetes folyamat a növekvő rend felé irányul. Például, ha 100 fehér golyót egy dobozban lévő 100 hasonló, de fekete golyó tetejére helyezünk és összerázzuk őket, akkor elkerülhetetlenül összekeverednek. Az ellentétes folyamat, az, hogy véletlenszerű keverékükből kiindulva összerázás után majdnem mindig fekete és fehér csoportra szétválasztva találjuk őket, egyaránt szokatlan és elképzelhetetlen. Ezért a második főtétel talán a legvisszavonhatatlanabbul érvényes az összes fizikai törvény között.

Időnként felvetődik a kérdés: „Ha a „lefelé” irányuló hőáramlás csak valószínűség kérdése, vajon nincs-e esély arra, hogy egy lábosnyi víz a tűzön megfagy, ahelyett, hogy felmelegedne?” Vagy talán ez: „Nem lehetséges-e, hogy a molekulák bolyongása véletlenül úgy erősíti egymást, hogy egy kis méretű test az asztalról felugrik? Így atomok véletlenszerű mozgása során egy test kinetikus energiája rendezett mozgást hozna létre. Igaz, hogy ennek a valószínűsége valóban nem zérus, a statisztikai megfontolás azonban világossá teszi, hogy ez pontosan mit takar. Példaként képzeljünk el egy 1g-os tömeget, ami egy asztalon nyugalomban és termikus egyensúlyban van, miközben természetesen folytonosan energiát cserél környezetével. Az energiacsere mikroszkópikus szinten véletlenszerűen fluktuál (ingadozik). Egyik pillanatban néhány atom energiája az átlagosnál nagyobb, máskor az átlagosnál kisebb. Ezek a statisztikai ingadozások – elvileg – eredményezhetnének kis mértékű impulzustöbbletet valamelyik irányban. A többlet elég lehetne ahhoz, hogy előidézzék a tömeg spontán kis magasságú felugrását az asztalról. Eközben a véletlenszerű molekuláris mozgás kinetikus energiája gravitációs potenciális energiává alakulna. Annak esélye azonban, hogy ez az esemény bekövetkezzék, olyan kicsiny, hogy szinte elképzelhetetlen. Kimutatható,

állapotok felé haladnak, amelyek a legnagyobb valószínűsűgű, – vagy márai-

23-2 ábra  
Egy asztalon lévő gáz molekuláinak mozgásának két lehetséges állapota. Felgyekeznek meg, hogy az összehajlás mindkét állapota azonos.

hogy az időnek az a töredéke, amíg ez a tömeg – statisztikus fluktuációk következtében – elegendő energiát nyer ahhoz, hogy legalább 1 mm-re a gravitáció ellenében függőlegesen felugorjon, csupán annyi, ahogyan

1 aránylik a  $10^{1\,000\,000\,000\,000\,000}$ -hoz (vagyis  $10^{10^{15}}$ -höz)

Hogy valamilyen képet adjunk erről a számról: az ismert világegyetem összes galaxisában az elektronok, protonok és neutronok teljes száma talán „mindössze”  $10^{82}$  nagyságrendbe esik.

Természetesen fontos tényező a vizsgált rendszer mérete. Az elrendezésben bekövetkező statisztikus fluktuáció ténylegesen is megfigyelhető akkor, amikor folyadékban lebegő (szuszpendált) nagyon kicsiny részecskéket vizsgálunk mikroszkóppal. A részecskét különböző irányból érő, egyenlőtlen molekuláris ütközések azt okozzák, hogy a részecske véletlenszerű cikcakkos pályán halad. A mozgást *Brown-mozgásnak* nevezzük. A statisztikus fluktuációknak azonban a nagyobb tömegek esetén is figyelemreméltó következményei vannak. Az emberi dobhártya – termikus mozgás során – átlagosan  $10^{-10}$  m amplitúdóval rezeg. Ha egy bejövő hang olyan gyenge, hogy nem vált ki enél a küszöbértéknél nagyobb amplitúdójú rezgést, dobhártyánk termikus „zaját” halljuk a bejövő hang helyett.

Egy fizikakönyv<sup>3</sup> igen színesen tette még szemléletesebbé a nagy méretű rendszerekre vonatkozó entrópiaváltozás egyirányú viselkedését. Ezt írja: „Az, hogy szobahőmérsékleten egyetlen kalória termikus energiát teljes egészében potenciális energiává alakítsunk, kevésbé valószínű esemény, mint az, hogy egy vad majomcsapat leírja Shakespeare összes művét 15 kvadrilliószor egymás után, hiba nélkül, úgy hogy véletlenszerűen ütögetnek egy sor írógépet.” (Kiemelés a szerzőktől.) Mivel a második főtétel végül is statisztikus megfontolásokon alapul, érvényessége megdönthetetlen. Úgy tűnik, nincs mód a megkerülésére.

### 23.5. Az entrópia és a nem felhasználható energia

A 23-2. ábra két elrendezése között van még egy fontos különbség azonkívül, hogy nyilvánvaló az eltérés a rendezettség és a rendezetlenség között. Az a) ábra rendezettsége alkalmas munkavégzésre, mert – bizonyos értelemben – a molekulák két csoportja magas és alacsony hőmérsékletű hőtartályt alkot, amelyek között hőerőgépet működtethetnénk. De a b) ábra rendezetlensége ezt nem teszi lehetővé, mivel a teljes rendszer ugyanazon a hőmérsékleten van. Jegyezzük meg, hogy mindkét konfiguráció pontosan azonos mennyiségű termikus energiával rendelkezik. A 23-2b ábra szerint nem hasznosítható ez az energia munkaként<sup>4</sup>. Csupán az, hogy energiával rendelkezünk, még nem jelent semmit. Az is lényeges, hogy vajon olyan alakban van-e ez az energia, ami munkává alakítható. Természetesen, bármely homogén hőmérsékleteloszlású termikus energiaforrás működtethet hőerőgépet, feltéve, hogy van egy másik, alacsonyabb hőmérsékletű rendszerünk is, ami alacsony hőmérsékletű hőtartályként üzemel. Ez nem változtat a lényegen. A két hőtartályra kiterjesztve megdöntésünket, ismét arra az általános követ-

<sup>3</sup> H.A.Bent: The Second Law, Oxford University Press, 1965. A termodinamikának különösen világos és élvezhető tárgyalását találhatjuk a következő rövid könyvben: H.C.Van Ness: Understanding Thermodynamics, McGraw-Hill Paperbacks, 1969.

<sup>4</sup> Egyes humoristák azzal tréfálkoztak, hogy a II. főtétel bizonyítja, hogy a Pokolnak annak a helynek kell lennie, ahol mindenütt azonos a hőmérséklet. Különböztetést az ott tartózkodó termodinamikások a hőmérsékletkülönbségeket felhasználnák egy lokális régió hűtésére szolgáló hűtőberendezés működtetésére.

kezetetésre jutunk, hogy valahányszor hő áramlik melegebb testről hidegebbre, csökken a munkavégzés további lehetősége és nő az entrópia. Habár az energia megmaradt, felhasználhatósága romlott. Ebben az értelemben

**Az entrópia az energia munkára való fel nem használhatóságának a mértéke.**

### 23-5 PÉLDA

Tegyük fel, hogy  $Q$  hőmennyiség jut hővezetéssel a meleg,  $T_2$  hőmérsékletű hőtartályból a hideg,  $T_1$  hőmérsékletű hőtartályba. a) Határozzuk meg a világegyetem entrópiaváltozását. b) Mekkora maximális munkát végezhetünk volna ennek a hőnek a felhasználásával?

### MEGOLDÁS

- a) A meleg hőtartályból történő hőelvonás következtében fellépő entrópiaváltozás:  $-Q/T_2$ . A  $Q$  hőleadás a hideg hőtartály  $Q/T_1$  entrópiainövekedésével jár. Az Univerzum teljes entrópiaváltozása ezen változások összege:

$$\Delta S_{\text{univerzum}} = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2}$$

amely pozitív mennyiség, mivel  $T_2 > T_1$ .

- b) A munka, amit végezhetnénk, nem egyenlő az átvitt hővel. A maximálisan elvégezhető munkát a két hőmérséklet között működő Carnot-körfolyamat hatásfoka  $\eta = 1 - T_1/T_2$  korlátozza.

$$W = \eta Q = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q = T_1 \left(\frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2}\right) = T_1 \Delta S_{\text{univerzum}}$$

Tehát a maximális munka, amit végezhetnénk: az alacsony hőmérséklet ( $T_1$ ) szorozva a világegyetem entrópiaváltozásával ( $\Delta S_{\text{univerzum}}$ ).

Most tekintsünk el az entrópia és a második főtétel tárgyalásának részleteitől és összegezzünk néhány következtetést. A második főtételt különböző alakban fejezhetjük ki. A következő megállapítások nem teljesen egyenértékűek, de mindegyik tartalmazza a második főtétel lényegét.

- A MÁSODIK FŐTÉTEL**
- (a) A világegyetem entrópiája a növekedésre törekszik.\*
  - (b) A hőáramlás a meleg testről a hideg felé irányul.
  - (c) A világegyetem rendezetlensége egyre növekszik.\*
  - (d) A természetes folyamatok iránya olyan, hogy a termikus energia egyre kevésbé legyen munkává alakítható.
  - (e) Nem létezik olyan periodikus folyamat, amelynek hatására hő hidegebb testről melegebbre áramlik.

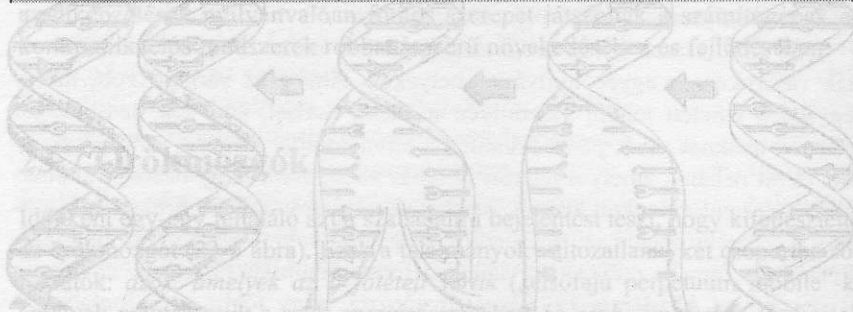
## Az információ bitjei

Egy amerikai egyetem tudósai számítógépet használnak képek változó mennyiségű információtartalommal történő reprodukálására egy olyan kísérlet részeként, amely arra irányul, hogy felfedezzék a vizuális információk azt a legkisebb mennyiségét, amely ahhoz szükséges, hogy még felismerhető legyen. A 23-3 ábrán a kép több, mint 700 hatszögre van bontva és minden egyes hatszöget a szürke 16 árnyalata egyikének egyenletes tónusában nyomtatták. Minden hatszög négy bit információt tartalmaz, mivel négy igen-nem kérdésfeltevésel meghatározhatjuk, hogy a szürkesség 16 lehetséges árnyalata közül melyik az, amelyikkel az egyes hatszögek rendelkeznek. A módszer az, hogy fokozatosan szűkítjük a lehetőségeket, a megmaradt választéknak két egyenlő csoportba való osztásával, és azzal a kérdésfeltevésel, vajon a kettő közül az egyik csoport tartalmazza-e a helyes választ. Így a következő példában minden egyes válasz 1 bit információt reprezentál.

Kérdés	Felelet
1. Az 1 és 8 árnyalat között van a hatszög?	nem
2. A 9 és 12 árnyalat között van?	igen
3. Ez a 9, vagy a 10 árnyalat?	igen
4. A 9 árnyalat?	nem
	összesen: 4 bit

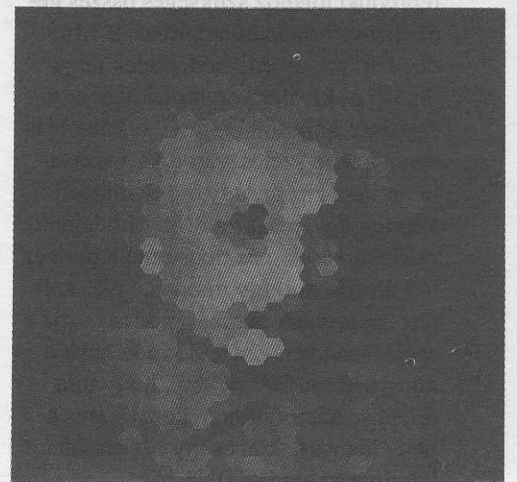
Ezzel a 4 bit információval a színárnyalatot pontosan a 10-esnek azonosíthatjuk.

Az eredeti kép – természetesen – a különböző variációkat folytonosan tartalmazta. A különálló hatszögekre bontás folyamata az éles szélek miatt bizonyos zajt is visz a reprodukcióba. Agyunk képer-telmezési rendszere különösen érzékeny az egyenes vonalakra és a geometriai formákra, így a válogató technikával bevitt zaj homályossá teszi és összekeveri a bevitt információ szerint alkotott képet. Ha hunyorítunk, vagy defókuszáljuk a szemünket, lóbáljuk a képet, vagy olyan távolságból nézzük, hogy a zajt minimalizáljuk, a felismerés meglehetősen javul és a portré könnyen azonosítható.



**23-3 ábra**

Ennek a képnek az információtartalmát számítógépes program segítségével szándékosan olyan minimális számú bitre csökkentették, hogy éppencsak felismerhető legyen.



A természet figyelemreméltó hatásfokkal képes információátvitelre. Például a 23-4 ábrán látható dezoxiribonukleinsav (DNS) – olyan molekula, amely minden élő szervezet minden egyes élő sejtjében benne van, – az olyan fejlett szervezetben, mint az emberé, talán 10 milliárd atomot is tartalmaz. Ha egy átlagos felnőtt emberben lévő összes DNS molekulát szétcsavarnánk és kifektetnénk egy vonalban, több, mint 10 milliárd km hosszúságot érne el, ez pedig akkora, mint a Naprendszerünk átmérője. A DNS molekula a sejt reprodukálására vonatkozó alaptervet hordozza, amely minden információt tartalmaz arról, hogy hogyan fog fejlődni és funkcionálni a szervezet. Becslések szerint a természet kb. 50–100 atomot használ a DNS-ben 1 bit információ kódolására.

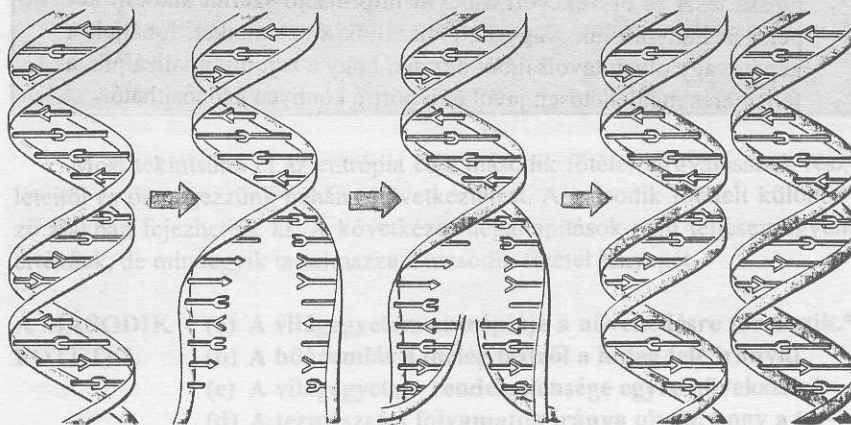
Richard Feynman professzornak érdekes ötlete volt annak hangsúlyozására, hogy milyen figyelemreméltóan nagy információátviteli teljesítmény ez a folyamat.\* Azon a problémán gondolkodott, hogy lehet tárolni az összes információt, amit a világ három nagy könyvtára – a washingtoni Kongresszusi Könyvtár, a párizsi Nemzeti Könyvtár és a British Múzeum könyvtára – tartalmaz. Néhány duplikációt megengedve kb. 24 millió kötet volt (1959-ben) ebben a három könyvtárban. Tekintsük úgy a 24 millió kötet információtartalmát, hogy mindegyik kötet megfelel egy átlagos Encyclopaedia Britannica kötet méretének. Belevesszük az összes fotót és illusztrációt, úgy, hogy az autotípiák\*\* sűrűségét egyenként kódoljuk. Ha 100 atom tárol 1 bit információt, ennek a 24 millió kötetnek a teljes információ-tartalma olyan kockát foglalna el, amelynek élhossza mindössze 1/8 mm! Természetesen a kiolvasása bizonyára kissé fáradságos lenne... De úgy tűnik, hogy a természet ezzel egyenértékű kiolvasási feladatot valósít meg az élő sejtben.

\* Ezek a megjegyzések Caltechben, 1959 decemberében, az Amerikai Fizikai Társulat bankettje után, Feynman esti előadásának részeként hangzottak el. A DNS szerkezetének felfedezésére vonatkozó érdekes történeteket lásd James D. Watson: A kettős spirál (magyarul: Gondolat Kiadó, 1972) és Anne Sayre: Rosalind Franklin and DNA, Norton, 1975.

\*\* Az autotípiák a képeket pontokra bontó és az árnyalatokat a pontok sűrűségével megadó nyomdatechnikai eljárás. (A fordító)

### 23-4 ábra

A DNS molekula vázlatos ábrázolása. A DNS molekula spirál szerkezete, megcsavart létrához, vagy kettős csavarvonalhoz hasonlít és egy élő sejt reprodukációjához szükséges összes genetikai információt tartalmazza. Minden létrafok az ún. nukleotidok négy fajtájából kiválasztott molekulák egy-egy összekapcsolt párja. A sejtosztódás során a létra szétcsavarodik és szétválik, mint a zipzár, úgy, hogy minden létrafok közepén széttörik. Mindegyik nukleotid csak más típusú nukleotidhoz tud illeszkedni. Így minden egyes széttört kapocs automatikusan kiválasztja a speciálisan vele összeillő molekulát a környező sejtanyagból, hogy újra felépítse a létrafokot, rekonstruálja a hélix hiányzó felét és így két másolatot készítve az eredeti DNS-ről.



- (f) Nem létezhet olyan periodikus folyamat, amelynek hatására termikus energiából vele azonos mennyiségű munkát nyerünk.  
 (g) A dolgok általában összekeverednek.

A termodinamika két főtételének megfelelő megfogalmazása lehet például a következő:

- (1) A világegyetem energiája állandó marad.\*  
 (2) A világegyetem entrópiája növekszik.\*

\* Ezek a megállapítások csak egy változatlan méretű és zártan tekinthető világegyetem esetén igazak. (A fordító)

## 23.6 Entrópia és információ

Az entrópiával kapcsolatos fogalmak az *információelméletben* is – egy olyan tudományban, amely alapvetőleg az utóbbi néhány évtizedben fejlődött ki – alkalmazást nyertek. Az információelmélet a valószínűség számításnak olyan ága, amely üzenetek meghatározott pontosságú átvitelének kérdésével foglalkozik figyelembe véve, hogy az üzenetet alkotó információ bitjei az átvitel során torzulhatnak. Az információelméletben az *I információ* alapvető definíciója:

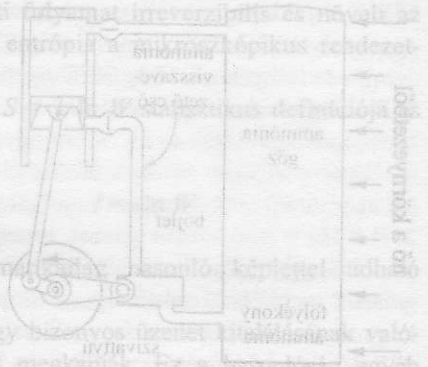
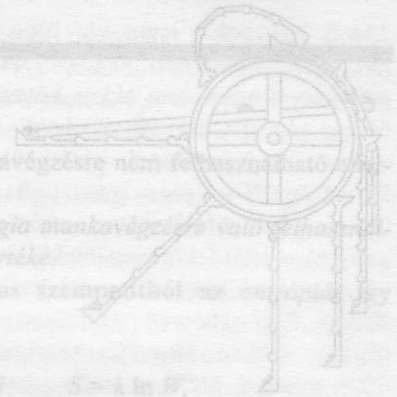
$$I = -\ln W \quad (23-16)$$

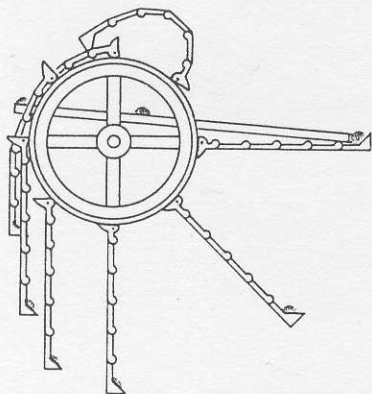
ahol  $W$  annak a valószínűsége, hogy bizonyos üzenetet kitalálunk, mielőtt megkapjuk (vagy bizonyos szövegösszefüggésben egy speciális üzenet elküldésének valószínűsége). A  $W$  valószínűség utalhat egy egyszerű „igen, vagy nem” információegységre – amit az információ egy bit-jeként ismerünk, – vagy egy komplexebb üzenetre. Az  $S = k \ln W$  és az  $I = -\ln W$  összefüggések közötti hasonlóság rámutat az információelmélet és az entrópia egyenletei közötti szoros *matematikai* analógiára. Nevezetesen, az információ megfelel a negatív entrópiának. Egy szerző<sup>5</sup> kiemeli, hogy ez az analógia „segít a tudósoknak, hogy új és ügyes módszereket gondoljanak ki információk kódolására, arra, hogy hatásosan hozzanak össze különféle telefonbeszélgetéseket egyetlen csatornán, erősítők tervezésére, a gramafonlemezek zajának csökkentésére és automata gépek szerkesztésére. Ez az analógia segít idegrendszerünknek, szókincsünknek, memóriánknak, az emberi agy gondolkodásmintáinak és lehet, hogy magának az agynak a tanulmányozásában is. Talán még a társadalomtudományok problémáira is alkalmazható.” Ezek az elképzelések nyilvánvalóan fontos szerepet játszottak a számítógépek és kommunikációs rendszerek robbanásszerű növekedésében és fejlődésében.

## 23.7 Örökmozgók

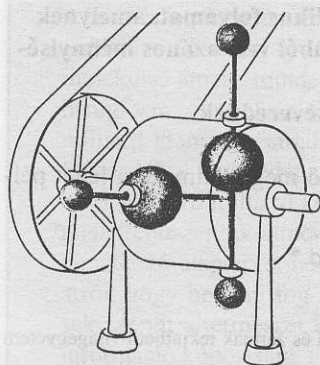
Időnként egy-egy feltaláló azt a szabadalmi bejelentést teszi, hogy kifejlesztette az örökmozgót (23-5 ábra). Ezek a találmányok változatlanul két csoportba sorolhatók: *azok, amelyek az I. főtételt sértik* („elsőfajú perpetuum mobile”-k, amelyek megteremtik a saját energiaforrásukat) és *azok, amelyek a II. főtételt sértik* („másodfajú perpetuum mobile”-k, amelyek zérus, vagy negatív entrópiaváltozással működnek). A legtöbb fizikus olyan mélyen és biztosan hisz a ter-

<sup>5</sup> E.M.Rogers „Physics for the Inquiring Mind” c. könyvéből. (Princeton University Press, 1960, p.395)

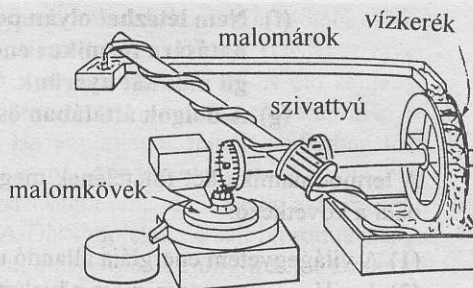




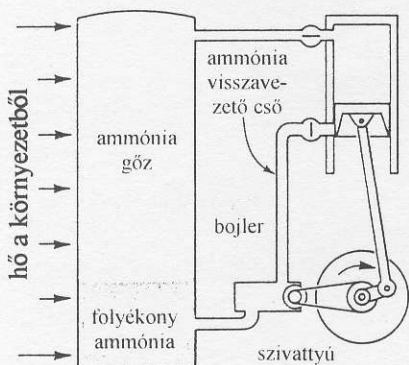
a) Csuklós karok nyúlnak ki az egyik oldal felé, ahol súlyokat szednek fel, amelyek a kerék tengelyéhez közeli pontból gurulnak ki.



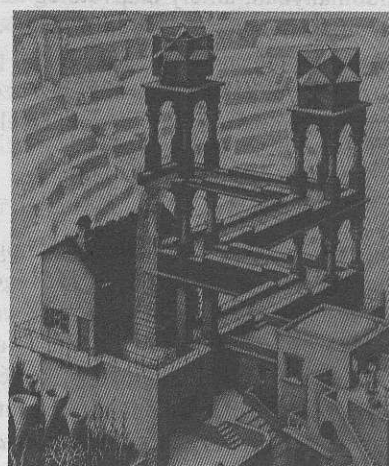
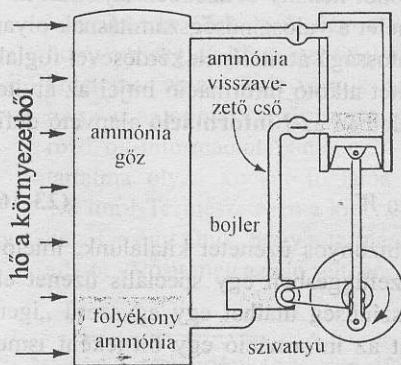
b) Egy vízzel töltött dob belsejében lévő üres úszógömb-pár súlyokat mozgat úgy, hogy – állítólag – a gravitációs erő eredő forgatónyomatékot hoz létre a tengely körül.



c) Ezt a zárt ciklusú malmot 1618-ban javasolták energia „örök forrása”-ként, olyan területeken, ahol nincs folyó. Először Archimédesz találta ki az üreges, csigavonalas csavart víz emelésére.



d) Ez az ammónia-hőerőgép a környezetből vett hőt hasznosítja. A gőznyomás mozgatja a dugattyút. A dugattyú mozgásával a táguló gőz lehül és ezáltal kondenzálódik az ammónia, a folyadék pedig visszatér a tartályba. Ez az örökmozgó sérti a második főtételt: nincs alacsony hőmérsékletű hőtartály a körfolyamat alatt történő hőleadásra.



e) Ezt az örökmozgó vízesést a holland művész, M.C.Escher alkotta.

### 23-5 ábra

Meg tudjuk magyarázni a téves következtetéseket ezekben az örökmozgókra tett javaslatokban?

modinamika alapelveiben, hogy pusztán az a tény, hogy a találmány sérti az egyik vagy a másik főtételt, sokszor elegendő ok ahhoz, hogy – minden további analízis nélkül – elutasítsák a bejelentést. Az ilyen fennhéjázó bánásmód rendszerint nem elégíti ki a feltalálót, aki szeretné tudni, melyik az a speciális pont, ahol az általa javasolt mechanizmusban hiba van.

A XIX. század során örökmozgó masinák működő modelljeit kiállították vásárokon és egyéb nyilvános helyeken. Amint az várható volt, mind-egyikben lehetett találni valamilyen mértékű csalást, ami sok bosszúságot okozott azoknak, akik pénzt fektettek a feltaláló által eladásra kínált eszközbe. (Volt néhány, amely a légköri nyomás változásain vagy hasonló „homályos” energiaforrásokon alapult, ezért ezek nem voltak igazi örökmozgó eszközök.) A tény mégis az, hogy eddig még soha nem készült olyan működőképes gép, amely megsértette volna a termodinamika főtételeit. A francia Tudományos Akadémia 1775-ben elhatározta, hogy többé nem foglalkozik örökmozgó eszközökre vonatkozó semmiféle szabadalmi bejelentéssel. Az angol Szabadalmi Hivatal nem fogad el bejelentést örökmozgó semmilyen formájára sem. Az Amerikai Szabadalmi Hivatal csak akkor fogad el ilyen bejelentést, ha mellékelik az eszköz működő modelljét, s ez érthetően olyan megszorítás, ami miatt ilyen szabadalommal még nem találkoztak.



**Összefoglalás**

**Makroszkópikus szempontból**, az „*S*” entrópia (egysége *J/K*), az 1 és 2 állapotot összekötő bármely reverzibilis útra vonatkozóan a következőképpen definiálható:

**Integrálalakban**

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

ahol  $\delta Q$  pozitív a rendszerrel közölt hő esetén és negatív a rendszertől elvont hő esetén. Az entrópia állapotváltozó, így az egyik állapotból a másikba jutva, az entrópia-változás csak maguktól az állapotoktól függ és nem függ az összekötő úttól.

A második főtétel megfogalmazható az entrópia segítségével (ami egyenértékű a második főtétel egyéb megfogalmazásaival):

**A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE** A világegyetem entrópiája egyre növekszik. (entrópiával kifejezve)

Zárt rendszer reverzibilis folyamata esetén az entrópia megváltozása zérus.	Minden valóságos, irreverzibilis folyamat során az entrópia nő
---	--

$\Delta S_{\text{rendszer}} = 0$	$\Delta S_{\text{rendszer}} > 0$
----------------------------------	----------------------------------

**Kérdések**

1. Elemezzünk néhányat a természetben előforduló, különböző folyamatok közül és magyarázzuk meg, miért *irreverzibilisek* ezek a változások!
2. Elképzelhető olyan folyamat a természetben, ami *reverzibilisen* megy végbe.
3. Dörzsöljük össze a kezünket erősen mindaddig, amíg a tenyerünk fel nem melegszik! Miért növeli ez a folyamat az entrópiát?
4. Adjuk meg az entrópia *makroszkópikus* és *mikroszkópikus* definícióját anélkül, hogy visszalapoznánk a könyvben és felfrissítsenék memóriánkat.
5. Ideális gázt eredeti térfogatának felére nyomtunk össze két különböző folyamatban: adiabatikus és izotermikus módon. Melyik esetben nagyobb a vég-

**Feladatok**

**23.2 Entrópia makroszkópikus szempontból**

**23A-1** Számítsuk ki a 4g 100°C-os gőz azonos hőmérsékletű vízzé való kondenzálásakor bekövetkező entrópiaváltozást.

Az entrópia a munkavégzésre nem felhasználható energiának a mértéke.

*Az entrópia az energia munkavégzésre való felhasználhatatlanságának mértéke.*

**Mikroszkópikus szempontból az entrópiát** így definiáljuk:

**ENTRÓPIA *S***  $S = k \ln W$ ,

ahol *k* a Boltzmann-állandó és *W* a rendszer egy adott állapotban való tartózkodásának (mikroszkópikus) statisztikus valószínűsége. A rendszerek azon statisztikus viselkedési hajlama miatt, hogy a nagyobb valószínűségű és nagyobb rendezetlenségű állapotok felé haladnak, minden természeti folyamat irreverzibilis és növeli az entrópiát. Így az entrópia a mikroszkópikus rendezetlenség mértéke.

Az entrópia  $S = k \ln W$  statisztikus definíciója és az információ (*I*)

$I = -\ln W$

definíciója matematikailag hasonló képlettel adható meg!

A képletben *W* egy bizonyos üzenet kitalálásának valószínűsége, mielőtt megkapják. Ez a hasonlóság egyéb matematikai analógiákhoz is vezet az entrópiát tartalmazó egyenletek és az információelmélet egyenletei között.

1. ... hőmérséklet (ha nőtt egyáltalán)? Van entrópiaváltozás valamelyik folyamatban?
2. Összel egy levél lehullik a fáról. Hol következik be az entrópia növekedése?
3. Szerkeszthető-e olyan hőerőgép, amely nem hoz létre „termikus környezetszennyezést”?
4. Melyik állapot rendezetlenebb: a jég, vagy a folyékony víz? Növekszik, vagy csökken az olvadó jég entrópiája? Miért nem sérül a második főtétel, amikor télen befagy egy tó?
5. Ha zárt ablakokkal napon hagyjuk az autót, a kocsi belsejében sokkal melegebb lesz, mint a külső környezetben. Miért nem sérti ez a második főtételt?
6. Miért nem sérül a második főtétel, amikor egy névsort betűrend szerint újrendezünk

**23A-2** Határozzuk meg az entrópiaváltozást, amikor 1g 100°C-os víz 100°C-os gőzzé változik. A folyamat állandó nyomáson megy végbe.

**23A-3** Egy pohár jeges víz 100g jeget és 100g vizet tartalmaz, mindkettő 0°C-os. Határozzuk meg az entrópiaváltozást, ami akkor következik be, amikor az összes jég 0°C-on vízzé olvad! (Útmutatás: honnan származik a jeget megolvasztó hő?)

**23A-4** 2g 0°C-os jég – reverzibilis módon – megolvad, 0°C-os vízzé. Mekkora az entrópia változása a) a jégnek? b) a külső környezetnek? c) a világegyetemennek, mint egésznek? (A víz fagyáshője  $3,34 \times 10^3$  J/kg)

**23A-5** Egy 200g-os 100°C-os alumínium hasábot (fajhője 900,21 J/kg °C) hőszigetelt tartályban lévő, 400g tömegű, 20°C-os vízbe teszünk. Számoljuk ki a termikus egyensúly kialakulása után bekövetkező entrópiaváltozást!

**23A-6** 200g 90°C-os vöröszetet teszünk hőszigetelt tartályban lévő 10g 0°C-os vízbe. Határozzuk meg a termikus egyensúly kialakulása során fellépő teljes entrópiaváltozást!

**23B-7** Mekkora a teljes entrópiaváltozás termikus egyensúly kialakulása után, ha 40g 0°C-os jeget hőszigetelt edényben lévő, 100g 90°C-os vízbe teszünk?

**23B-8** Egy hideg napon 12560 J hő szívárog ki az ablaküvegen keresztül a 27 °C-os állandó hőmérsékletű szobából a 4°C-os állandó hőmérsékletű környezetbe. Mekkora a világegyetem entrópiaváltozása?

**23B-9** Ha  $n$  mól ideális gázzal, amelynek kezdeti állapotjelzői  $p_0$ ,  $V_0$  és  $T_0$ , izobár expanziót végzünk térfogatának megkétszereződéséig, akkor próbáljuk igazolni, hogy a gáz entrópiaváltozása:  $nR [\kappa/(\kappa - 1)] \ln 2$ .

**23B-10** Egy hőerőgép  $T_2 = 600$  K és  $T_1 = 350$  K hőmérsékletű hőtartályok között működik. Felvesz 1000 J hőt a magasabb hőmérsékletű hőtartályból s 250 J munkát végez. a) Határozzuk meg erre a folyamatra a világegyetem entrópiaváltozását! b) Mekkora munkát végezhetne egy ideális Carnot-hőerőgép? c) Igazoljuk, hogy az a) és b) pontban végzett munka között a különbség  $T_1 \Delta S_{\text{Univerzum}}$ !

**23B-11** Egy meteorit úgy fűrődik bele egy ember nélküli űrhajóba, hogy a belsejében lévő levegő szabad expanziós folyamattal kiszökik a kb.  $10^{61}$  m<sup>3</sup> térfogatú galaxisba. Mekkora az entrópiaváltozás, ha az űrhajó eredetileg 10 m<sup>3</sup> normál állapotú levegőt tartalmazott?

### 23.3 Entrópia mikroszkópikus szempontból

#### 23.4 Az entrópia és a második főtétel

**23B-12** Egy dobozban lévő pénzérmék 10 fejet és 10 írást mutatnak. A dobozt összerázzuk. Most 7 fej és 13 írás van. Sérült-e a második főtétel? Értelmezzük a választ!

**23B-13** Egy hallgató takarít az íróasztalán, s rendkívül rendezett (kicsiny valószínűségű) állapotban helyezi el a papírokat és könyveket. Miért nem sérti ez a termodinamika II. főtételét?

### További feladatok

**23C-14** Vázzoljuk a Carnot-körfolyamatot a  $T$ - $S$  diagramon és azonosítsuk a 22-3. ábra  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontjait!

**23C-15** Egy szoba hőmérsékletét állandóan 300 K-en tartjuk. Tegyük fel, hogy 100 g szobahőmérsékletű vizet egy olyan Carnot-géppel alakítunk át 273 K hőmérsékletű jéggé, amely a szobahőmérséklet és a hűlő víz változó hőmérséklete között működik. Mekkora az a teljes munka, ami a víz megfagyásához szükséges? (Útmutatás: mivel ez reverzibilisen történt, a víz és a szoba együttes entrópiaváltozása zérus. Számoljuk ki az entrópiaváltozásokat egyenként és igazoljuk, hogy az összegük zérus. Ld. a 23-2 példát!)

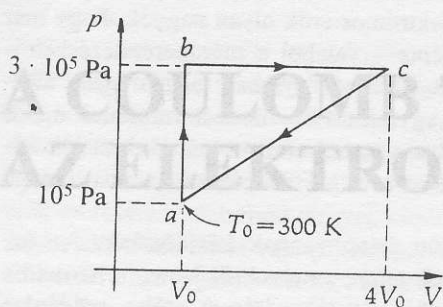
**23C-16** Egy kutató 1g vizet 0°C-ról 100°C-ra melegít úgy, hogy azt egy 100°C-os hőtartállyal hozza érintkezésbe. a) Mekkora a víz entrópiaváltozása és b) a hőtartály entrópiaváltozása? c) Mekkora a világegyetem eredő entrópiaváltozása? Tegyük fel, hogy az előbbi megoldás helyett úgy melegíti a vizet, hogy először 50°C-os hőtartállyal hozza termikus egyensúlyba, majd egy 100°C-os hőtartállyal. Ebben a kétféle folyamatban mekkora d) a víz, e) a két hőtartály és f) a világegyetem teljes entrópiaváltozása? g) Írjunk le olyan módszert, amellyel a vizet úgy lehetne melegíteni, (elméletileg) hogy a világegyetem entrópiája ne változzék!

**23C-17** Igazoljuk, hogy amikor egy egyatomos ideális gáz izochor változson meg át  $p_k$  kezdeti nyomástól  $p_v$  végső nyomásig, az entrópiaváltozás  $3/2 nR \ln(p_v/p_k)$ !

**23C-18** Tekintsük a 23C-19 feladatban szereplő szituációt! Ha a Carnot-gép helyett csupán termikus érintkezésbe hoznánk a két testet, a végső közös hőmérséklet  $(T_2 + T_1)/2$  lenne. (Vagyis a  $\sqrt{T_1 T_2}$  geometriai közép helyett a számtani közép.) Magyarázzuk meg – termodinamikai megfontolásokat alkalmazva, – hogy ebben az esetben miért magasabb a végső hőmérséklet, mint amikor a Carnot-körfolyamatot használjuk!

**23C-19** Két azonos test – mindegyik  $m$  tömegű és  $c$  fajhőjű, –  $T_2$ , ill.  $T_1$  hőmérsékletű. Egy Carnot-gép ezeket változó hőmérsékletű hőtartályokként használja, míg közös végső hőmérsékletre kerülnek, s ezalatt a gép  $W$  munkát végez. a) Mutassuk meg, hogy a gép leállásakor a két test végső közös hőmérséklete  $T_v = \sqrt{T_1 T_2}$ . (Útmutatás: a folyamat reverzibilis lévén, mekkora a rendszer teljes entrópiaváltozása?) b) Mekkora a gép által végzett munka?

**23C-20** Tegyük fel, hogy 2 mól egyatomos ideális gázt – amelynek jellemzői kezdetben  $p_0 = 10^5$  Pa és  $T_0 = 300$  K – reverzibilisen végig viszünk a 23-6 ábrán látható  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$  úton. Az  $a \rightarrow b$  folyamat izochor, a  $b \rightarrow c$  izobár és a  $c \rightarrow a$  egy egyenes vonal. a) Mekkora az entrópiaváltozás a teljes ciklusra? b) Számítsuk ki a gáz entrópiaváltozását az  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$  ciklus egyes lépéseire! c) Határozzuk meg az egy ciklus alatt végzett eredő munkát!

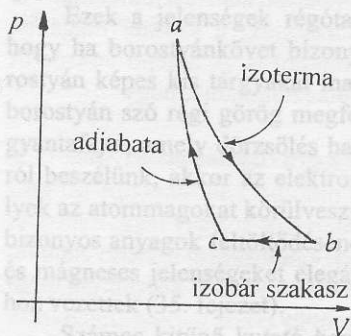


**23-6 ábra**  
A 23C-20 feladathoz

**23C-21** Igazoljuk, hogy amikor egy ideális gáz  $p_1$  és  $V_1$  állapotjelzőkkel jellemzett állapotból izotermikus folyamattal  $p_2$ -vel és  $V_2$ -vel jellemzett állapotba jut, az entrópiaváltozás:  $nR \ln(V_2/V_1) = nR \ln(p_1/p_2)$ .

**23C-22** Egészítsük ki az alábbi táblázatot +, 0 vagy - jelekkel, a 23-7 ábrán bemutatott körfolyamattal kapcsolatos termodinamikai mennyiségekben bekövetkező változások előjelét jelezve (vagy azt a tényt, hogy nem történik változás)!

Út	$Q$	$\Delta U$	$W$	$\Delta p$	$\Delta T$	$\Delta V$	$\Delta S$
a $\rightarrow$ b							
b $\rightarrow$ c			-	0			
c $\rightarrow$ a					+		



**23-7 ábra**  
A 23C-22 feladathoz

**23C-23** Igazoljuk, hogy amikor egy egyatomos ideális gáz izobár folyamattal jut  $T_k$  kezdeti hőmérsékletéről  $T_v$  végső hőmérsékletre, az entrópiaváltozás  $5/2 nR \ln(T_v/T_k)$ !

**23C-24** Egy gázt állandó nyomáson melegítünk  $T_1$  hőmérsékletéről  $T_2$ -re. Az állandó nyomáshoz tartozó mólhő ebben a tatományban a  $C_p = a + bT$  egyenlettel adott. Számítsuk ki az entrópiaváltozást  $n$  mól gázra.

**23C-25** Egy lapátkerék 800g vízbe merül, ami hőszigetelt tartályban van. Egy 20kg-os tömeg forgatja a lapátkereket úgy, hogy a tömeg állandó sebességgel függőlegesen 3 m-t süllyed, miközben a víz hőmérséklete a kezdeti 300 K-ról emelkedik. a) Határozzuk meg a víz belső energiájának változását! b) Mekkora a vízzel közölt hő? c) Mekkora a víz entrópiaváltozása? d) Mekkora a világegyetem entrópiaváltozása?

**23C-26** a) Igazolja, hogy ha sérülne a II. főtétel Kelvin-Planck féle megfogalmazása, akkor csökkenne a világegyetem entrópiája. (Útmutatás: gondoljunk egy „tökéletes” hőerőgépre, ami minden ciklusban bizonyos hőmennyiséget teljes egészében munkává alakít.) b) Igazoljuk, hogy ha a II. főtétel Clausius-féle definícióját megsértenénk, a világegyetem entrópiája csökkenne. (Útmutatás: gondoljunk egy „tökéletes” hűtőgépre, amely  $Q$  hőt von el egy hidegebb hőtartályból és ugyanazt a  $Q$  hőmennyiséget szállítja a melegebb hőtartálynak anélkül, hogy bármilyen munkavégzés történne.) Vegyük észre, hogy ez a feladat azt mutatja, hogy a II. főtétel entrópiával megfogalmazott alakja egyenértékű a főtétel egyéb alakjaival.

**23C-27** Egy légüres dobozban válaszfal van, amely a térfogatot két egyenlő részre osztja. Kezdetben 8 molekula van az egyik részben, ahol véletlenszerű mozgást végeznek. Mekkora az entrópiaváltozás, amikor eltávolítjuk a válaszfalat és a molekulák a teljes  $V$  térfogatban mozognak?

**23C-28** Egy  $V$  térfogatú tartály  $n_1$  molekulát tartalmaz egy  $M_1$  relatív molekula tömegű ideális gázból. Egy másik,  $2V$  térfogatú tartály  $n_2$  molekulát tartalmaz egy  $M_2$  relatív molekula tömegű ideális gázból. Mindkét tartályban azonos a nyomás. A két tartályt érintkezésbe hozzuk és a köztük lévő falon egy lyukat vágunk. Ekkor mindegyik gáz a másik térfogatba expandál – anélkül, hogy kölcsönhatásba kerülne a másik fajtájú molekulákkal, – tehát lényegében mindegyik szabad tágulást végez. Számítsuk ki az entrópiaváltozást, ami a gázok  $3V$  térfogatban történő összekeveredésekor lép fel!

**23C-29** Számítsuk ki a Nap 1 óra alatti entrópiatermelését az L függelék felhasználásával, ha feltételezzük, hogy a Stefan-Boltzmann törvény szerint sugároz és emisszióképessége egy.

A fejlődés lassóságának talán az is oka lehetett, hogy a mechanikai és az elektromos jelenségek alapvetően különbözőek. A mechanikai jelenségek tanulmányozását nagyban elősegítették a köznapi tapasztalatok, amelyeket az emberek tárgyak mozgásával és mozgásuk megfigyelésével szereztek. Az elektromágnességgel kapcsolatban egyáltalán nem volt hasonló érzékszervi tapasztalat (kivéve ami a statikus elektromosságra és a mágnesekre vonatkozott). Az elektromágnesség sokkal elvontabb és megfoghatatlanabb, mint a mindennapos megfigyeléseinkkel érzékelhető jelenségek. Továbbá, az elekt-

- 20A-11  $1,7 \times 10^5 \text{ N}$   
 20A-13 a)  $1,10 \times 10^{30}$  elektron b)  $1,82 \times 10^6$  mol  
 20A-15 8,01 km  
 20B-17 a) 0,489 atm b)  $0,888 \text{ kg/m}^3$   
 20B-19  $6,59 \text{ m}^3$   
 20B-21 átlagban 59,0 atom  
 20B-23 átlagosan 3,48 molekula  
 20B-25 a) 2,56 atm b) 16,1 m  
 20B-27 A válasz adott.  
 20A-29 a)  $4,14 \times 10^{-16} \text{ J}$  b)  $7,04 \times 10^5 \text{ m/s}$   
 20A-31  $5,80 \times 10^9 \text{ K}$   
 20B-33 A válasz adott.  
 20B-35 b) A szökési sebesség 10,8%-a  
 20B-37  $(8,28 \times 10^{-9}/l^3) \text{ N/m}^2$  ( $l$  méterben)  
 20C-39  $8,22 \times 10^{23}$  ütközés/sec  
 20C-41  $mv^2/3l^3$   
 20C-43 A válasz adott.  
 20C-45  $\omega = v\theta/x$   
 20C-47 385 m/s, 417 m/s  
 20C-49 a) 1,77 cm b)  $12,6\text{C}^\circ$   
 20C-51  $63,4\text{C}^\circ$

### XXI. Fejezet

- 21A-1 a) 209 J b) 209 J c) 0 d) 0,0896 l  
 21A-3 a) 0,144 atm b) 157 K  
 21A-5 a) 0,160 atm b) 131 K  
 21B-7 a) 546 K b) 4538 J  
 c)  $1,13 \times 10^4 \text{ J}$  d) 6806 J  
 21B-9 A válasz adott.  
 21B-11  $2,09 \times 10^4 \text{ J}$   
 21B-13 A válasz adott.  
 21A-15 2,93R  
 21B-17 a)  $216\text{C}^\circ$  b) 0,178 L  
 21B-19  $4,14 \times 10^{-21} \text{ J}$   
 21A-21 56, l  
 21C-23 A válasz adott.  
 21C-25 a) 70,2 J b) 36,0 J c) 208,3 J  
 d)  $-53,6 \text{ J}$  e)  $-36,0 \text{ J}$  f) 16,6 J  
 21C-27 a) 47,3 J b)  $1,61 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  c) 13,5 J  
 d) 33,8 J  
 21C-29 b)  $\frac{13}{11}$

### XXII. Fejezet

- 22A-1 150 J  
 22A-3 14,2%  
 22A-5 280 K  
 22A-7 5,76%  
 22B-9 a) 44,6% b) 25%  
 22B-11  $-5,40\text{C}^\circ$   
 22B-13 A válasz adott.  
 22B-15 a) 414 J b) 4600 J  
 22B-17 a) 0,99 J b) 3,45 J  
 22B-19  $1,97 \times 10^5 \text{ J}$   
 22B-21 a) 370 személy b) 14800,00 dollár c) 4,80 dollár  
 22B-23 a)  $\frac{4}{3} P_o V_o$  b) 22,2%  
 22B-25  $\frac{2}{13}$   
 22C-27 a) 12,4 b)  $2,07 \times 10^7 \text{ J}$  c)  $6,00 \times 10^7 \text{ J}$   
 d) 2,32 l e) 1,33 l  
 22C-29 173 W  
 22C-31  $\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right)^{(y-1)}$   
 22C-33 a)  $\alpha: 4,92 \text{ l}$ ; b) 1,67 atm; c) 6,69 l,  $T_c = 408 \text{ K}$   
 b) 52,7 J  
 22C-35 A válasz adott.  
 22C-37 300 N, 400 N

### XXIII. Fejezet

- 23A-1  $-24,2 \text{ J/K}$   
 23A-3 123 J/K  
 23A-5 5,27 J/K  
 23B-7 12,6 J/K  
 23B-9 A válasz adott.  
 23B-11  $\sim 5 \times 10^5 \text{ J/K}$   
 23B-13 A válasz adott.  
 23C-15 3807 J  
 23C-17 A válasz adott.  
 23C-19 b)  $mc[(T_2 + T_1) - 2\sqrt{T_2 T_1}]$   
 23C-21 A válasz adott.  
 23C-23 A válasz adott.  
 23C-25 a) 588 J b) zérus c) 1,96 J/K d) 1,96 J/K  
 23C-27  $8k \ln 2$   
 23C-29  $2,40 \times 10^{26} \text{ J/K}\cdot\text{h}$