

VIIIAB05 - Szabályozástechnika

Holtidő és mintavételezés a szabályozási körben

Kiss Bálint

Irányítástechnika és Informatika Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. március 21.



Az előző előadások tartalmából

a hallgató

- 1 képes megfogalmazni a szabályozástechnika vizsgálódásainak tárgyát és elmagyarázni alapfogalmait,
- 2 ismeri a szabályozási kör elemeit, osztályozásának, szempontjait, minőségi jellemzőit,
- 3 átlátja, milyen módon kapható meg egy szakasz átviteli függvénye,
- 4 képes meghatározni a szabályozási kör statikus tulajdonságait,
- 5 képes átlátni a tranzienseket befolyásoló egyes tényezőket, például egy domináns póluspár alapján,
- 6 tisztában van a szabályozási kör stabilitásának jelentőségével,
- 7 ismeri a Nyquist- és a Bode-kritériumot,
- 8 ismeri a vágási frekvencia és a fázistartalék definícióját és kapcsolatukat a stabilitással,



Az előző előadások tartalmából

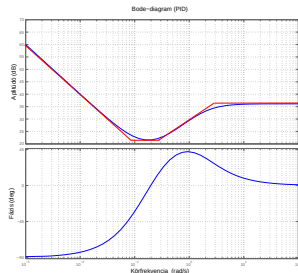
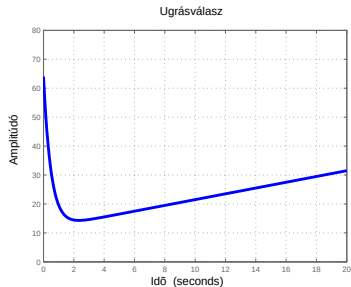
a hallgató

- 1 ismeri a hagyományos soros kompenzátorok működési mechanizmusát
- 2 tisztában van a hangolás szempontjaival
- 3 érti a beavatkozó jel korlátosságából adódó tervezési megkötéseket
- 4 tisztában van a sáv szélesség fogalmával a szabályozási körök esetében
- 5 tisztában van a PID szabályozókban alkalmazott három hatás (arányos, integráló és deriváló) jellemzőivel,
- 6 képes a PID szabályozók különböző változatai esetében a méretezést elvégezni,

Az előző előadások tartalmából

a PID szabályzó

$$W_{PID_k}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{sT_c + 1} \right) = \frac{A_p}{T_i} \frac{T_i(T_d + T_c)s^2 + (T_i + T_c)s + 1}{s(sT_c + 1)}$$



Szisztematikus tervezés

Szabályzó kiválasztása (P, PI, PD, PID)

- Típuszám növeléséhez I-hatás kell.
- Tranziensek gyorsításához D-hatás kell.

P, PI (D-hatás nélkül)

Itt a maximális beavatkozó jel csak A_p -tól függ.

- 1 Pólus-zérus kiejtés (I-hatás esetén megadja T_i értékét)
- 2 Fázistartalék beállítása alapján A_p meghatározásával

PD, PID

Itt a maximális beavatkozó jel csak A_p -tól és időállandóktól függ.

- 1 Pólus-zérus kiejtés
- 2 A_p , ω_c , és az időállandók meghatározása egyenletrendszer alapján



PD, PID paraméterek számítása egyenletek alapján

Előírások

A φ_t fázistartalék és a maximális beavatkozó jel u_{max} adottak.

Kiejtés

Kiejtési szabályok (korábbról) - a $-20dB/D$ szakasz meghosszabbítása

- 1 PD: a szakasz második leglassabb (valós) pólusa
- 2 PID: a szakasz két leglassabb (valós vagy konjugált komplex) pólusai

Egyenletek - részletesen a tantermi gyakorlaton

Ismeretlenek: A_p, ω_c, T_i (Matlab támogatás: `sisotool`, `fsolve`)

$$\begin{aligned} \|W_o(j\omega_c)\| - 1 &= 0 \\ \pi + \arg(W_o(j\omega_c)) - \varphi_t &= 0 \\ u_{PD,PID}(0) - u_{max} &= 0 \end{aligned}$$

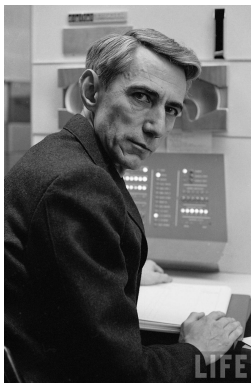
A mai előadás célja

A hallgató

- 1 ismeri a holtidős elem leírását, a holtidő és a stabilitás közötti összefüggést,
- 2 tisztában van a matematikai mintavételezés és jelrekonstrukció fogalmaival, illetve a Shannon-tétellel
- 3 ismeri az ideális aluláteresztő szűrő alkalmazhatatlanságának indokait és a kiváltására használható és realizálható tartószervek tulajdonságait
- 4 képes meghatározni a mintavételi periódusidőt a folytonos méretezésből kiadódó ω_c vágási frekvenciából
- 5 képes meghatározni a folytonos idejű szabályozó mintavételes megfelelőjét
- 6 ismeri az áttérési módszereket és szabályokat a folytonos és diszkrét idejű átvitelek között



Tartalom



Claude Elwood Shannon, amerikai
matematikus, villamosmérnök
(1916-2001)

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések

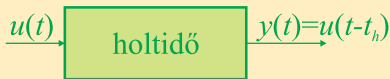
Tartalom

- 1 **Holtidő**
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



(Ideális) Holtidő vagy késleltetés

A kimenet a késleltetett bemenet



Átviteli függvény

$$W_h(s) = \exp(-st_h)$$

Amplitúdómenet

$$|W_h(j\omega)| = |\exp(-j\omega t_h)| = 1$$

Fázismenet

$$\arg(W_h(j\omega)) = \arg(e^{-j\omega t_h}) = -\omega t_h$$

Megjegyzés

A holtidő a felnyitott kör átviteli függvényében csökkenti a fázismenetet.



Stabilitás és holtidő

Stabilitás kritériumok érvényessége

A Nyquist- és a Bode-kritériumok érvényben maradnak.

Bevezethető a késleltetéstartalék D_m fogalma

A késleltetéstartalék (**delay margin**) megmutatja, hogy mekkora késleltetés eszi meg a fázistartalékot.

$$\pi + \varphi(\omega_c) = \omega_c \cdot D_m$$

Holtidő figyelembe vétele soros kompenzátor tervezésekor

Kiejtések (szakasz pólus szabályozó zérussal)

Nincs változás a holtidőmentes esethez képest.

Az amplitúdóra vonatkozó egyenlet

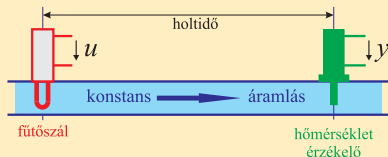
Változatlan.

A fázismenetre vonatkozó egyenlet

A holtidős tag hozzájárulása $W_o(s)$ fázisához a vágási frekvencián: $-\omega_c \cdot t_h$.

Példa: holtidő kompenzálása I-hatású szabályzóval

Fűtésszabályozás elvi felépítése

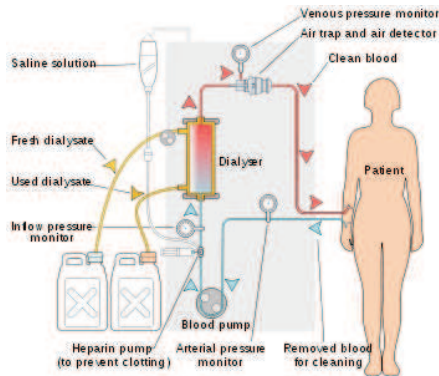


A fűtőszál feszültsége és a hőmérséklet munkaponti értékek körül értendők.

A szakasz átviteli függvénye

$$W_P(s) = \frac{2}{2s + 1} e^{-3s}$$

Tervezzünk szabályozót, hogy $\varphi_m = 60^\circ$!



Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó**
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



Miért van szükség mintavételezésre?

Szabályozók megvalósítása

A szabályozókat számítógépek valósítják meg. A számítógépek működése diszkrét (nem folytonos):

- ① mind értékészletben,
- ② mind időtartományban,

Következmények

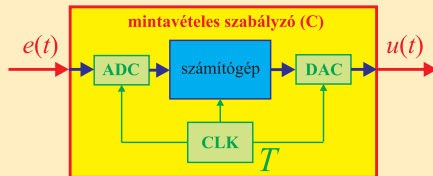
- ① Jelátalakítókra van szükség.
- ② A számítógép $W_C(s)$ egy mintavételes megfelelőjét futtatja.



Mire van szükség a mintavételezéshez?

Jelátalakítók

- 1 **ADC - Analog-Digital-Converter:** mintavevő szerv
- 2 **DAC - Digital-Analog-Converter:** tartószerv



Megjegyzés

Az analog-digitális konverzió folytonos értékkészletet véges és korlátos halmazba képez le (számábrázolás a számítógépekben). Az ebből eredő esetleges nehézségekkel nem foglalkozunk.

A mintavételi periódusidő

Jelölések

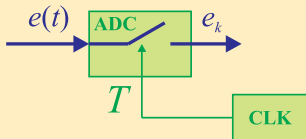
A mintavételi periódusidő jelölése T . A mintavételi frekvencia $f_s = \frac{1}{T}$. A mintavételi körfrekvencia $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$.

Feltételezések

- 1 A jelátalakításokhoz szükséges idő elhanyagolható a mintavételi periódusidőhöz képest.
- 2 A számításokhoz szükséges idő elhanyagolható a mintavételi periódusidőhöz képest.

A jelátalakítók - mintavevő

Működés



$$e_k = e(kT), \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}$$



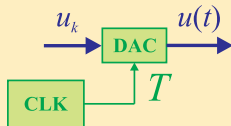
AD átalakító IC

Megjegyzés

A kapcsoló minden T idő elteltével egy pillanatra zárja a szabályozási kört. Ezen pillanatok között a szakasz nyílt hurokban működik.

A jelátalakítók - tartószervek

Működés



A DAC az $u_k \mapsto u(t)$ átalakítást végzi.



Image is for illustration purposes only

DA átalakító áramkör

Megjegyzés: a kauzalitás követelmény

Mivel a szabályzó valós időben működik, így $u(t)$ előállításához, csak olyan u_k értékeket lehet felhasználni, hogy $kT \leq t$.

Megjegyzés: választék

Látni fogjuk, hogy többfajta módon elvégezhető az $u_k \mapsto u(t)$ átalakítás, azaz többfajta tartószervek van.

A számítógép működése

A szabályzó algoritmusa

A számítógép egy véges és kauzális differenciaegyenletet számol minden mintavételkor: az aktuális hibaértékből (e_k), a korábbi hibaértékekből (e_{k-i} , $i = 1, 2, \dots, m$), és a korábbi beavatkozó értékekből (u_{k-i} , $i = 1, 2, \dots, n$) állítja elő az aktuális beavatkozó jelet (u_k).

$$u_k = -a_{n-1}u_{k-1} - a_{n-2}u_{k-2} - \dots - a_0u_{k-n} + b_0e_{k-n} + b_1e_{k-(n-1)} + \dots + b_me_{k-(n-m)}$$

A szabályzó impulzusátviteli függvénye

A fenti differencia-egyenletet $\mathcal{Z}$ -transzformálva (nulla kezdeti értékek mellett) a

$$D_C(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0}$$

impulzusátviteli függvényt kapjuk.

A számítógép működése

A szabályzó algoritmusa

A számítógép egy véges és kauzális differenciaegyenletet számol minden mintavételkor: az aktuális hibaértékből (e_k), a korábbi hibaértékekből (e_{k-i} , $i = 1, 2, \dots, m$), és a korábbi beavatkozó értékekből (u_{k-i} , $i = 1, 2, \dots, n$) állítja elő az aktuális beavatkozó jelet (u_k).

$$u_k = -a_{n-1}u_{k-1} - a_{n-2}u_{k-2} - \dots - a_0u_{k-n} + b_0e_{k-n} + b_1e_{k-(n-1)} + \dots + b_me_{k-(n-m)}$$

A szabályzó impulzusátviteli függvénye

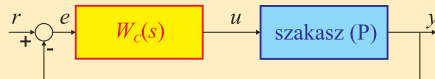
A fenti differencia-egyenletet $\mathcal{Z}$ -transzformálva (nulla kezdeti értékek mellett) a

$$D_C(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

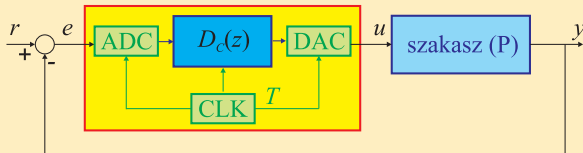
impulzusátviteli függvényt kapjuk.

Méretezés és megvalósítás

Folytonos méretezésű szabályzó



de diszkrét idejű megvalósítás



Tisztázandó

- 1 Mi a hatása a cserének? Mikor nincs hatása?
- 2 Hogyan kapható meg $D_C(z)$ a $W_C(s)$ átvitelből?

Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)**
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések

Shannon-tétel. Melyik?

A Shannon-féle zsonglőr-tétel

$(F + D)H = (V + D)N$ - N -labdák száma; H - kezek száma; F - labda repülési ideje; V - üres kézidő; D - foglalt kézidő



Tartalom

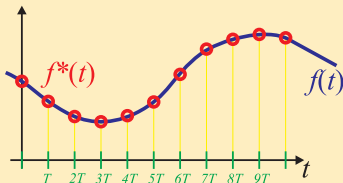
- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések

Matematikai mintavételezés - művelet

Megjegyzés

A Shannon-tétel és a mintavételezés a [Jelek és rendszerek 2](#) tárgyban már szerepelt.

Folytonos idejű jelből impulzussorozat



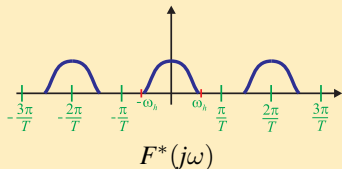
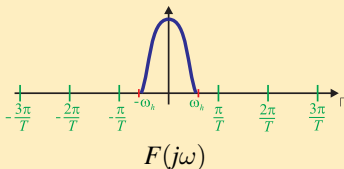
$$\begin{aligned}
 f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - nT)
 \end{aligned}$$

Matematikai mintavételezés - spektrum

Jelölések

Legyen $f(t)$ spektruma $F(j\omega)$ és $f^*(t)$ spektruma $F^*(j\omega)$.

Kapcsolat $F(j\omega)$ és $F^*(j\omega)$ között



$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega + k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

Tartalom

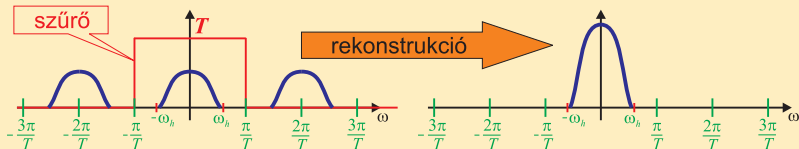
- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)**
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció**
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések

Jel visszaállítása a mintáiból

Shannon-féle mintavételi tétel

A jel visszaállítása mintáiból akkor és csak akkor lehetséges egy ideális (T erősítésű) aluláteresztő szűrővel, ha a mintavételezett jel sávkorlátos és határfrekvenciájára teljesül, hogy $\omega_h \leq \frac{\pi}{T} = \omega_N$, ahol $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ az ún Nyquist-frekvencia.

Jelrekonstrukció a mintákból ideális aluláteresztő szűrővel



Az ideális aluláteresztő szűrő az időtartományban

Felhasználva az inverz Fourier-transzformáció képletét és a sávkorlátosságot

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \underbrace{F(j\omega)}_{TF^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) e^{-jkT\omega} \right)}_{F^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j(t-kT)\omega} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{T}{2\pi} \frac{1}{j(t-kT)} e^{j(t-kT)\omega} \bigg|_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{e^{j(t-kT)\omega_s/2} - e^{-j(t-kT)\omega_s/2}}{2j} \frac{1}{(t-kT)\omega_s/2} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin(\omega_s(t-kT)/2)}{\omega_s(t-kT)/2}
 \end{aligned}$$



Az ideális aluláteresztő az időtartományban

A kapott eredmény

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin(\omega_s(t - kT)/2)}{\omega_s(t - kT)/2}$$

Tulajdonságok

- 1 Végtelen összegzést kell elvégezni, de erre nincs számítási kapacitásunk.
- 2 Mivel minden t -hez végtelen sok olyan k van, amelyre, $kT > t$, így $f(t)$ számításához f „jövőbeli” értékeit is figyelembe kell venni, így az ideális aluláteresztő szűrő nem kauzális szűrő.

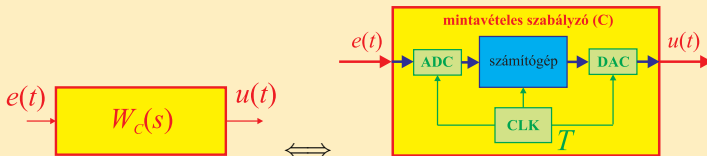
Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)**
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések

Shannon-tétel és a szabályozási kör

Kérdés volt

Mikor egyenértékű a folytonos és a mintavételes megvalósítás?



Válasz a Shannon-tétel alapján

- ① Akkor, ha $e(t)$ sávkorlátos (**Semmi sem garantálja.**) és
- ② ha a tartószerv ideális aluláteresztő szűrő. (**Lehetetlen megvalósítani.**)

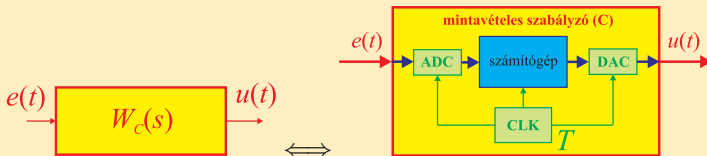
Akkor itt vélhetően (villamos)mérnökökre lesz szükség.



Shannon-tétel és a szabályozási kör

Kérdés volt

Mikor egyenértékű a folytonos és a mintavételes megvalósítás?



Válasz a Shannon-tétel alapján

- ① Akkor, ha $e(t)$ sávkorlátos (**Semmi sem garantálja.**) és
- ② ha a tartószerv ideális aluláteresztő szűrő. (**Lehetetlen megvalósítani.**)

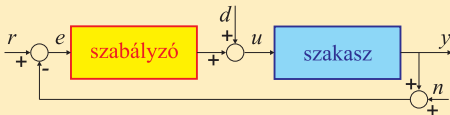
Akkor itt vélhetően (villamos)mérnökökre lesz szükség.



Shannon-tétel és a szabályozási kör

Megjegyzés a sávkorlátosságról

A sávkorlátosságot a referencia jel ($r(t)$) esetében még talán tudjuk garantálni, de a zavaró jel ($d(t)$) és a mérési zaj ($n(t)$) esetében nem. Ugyanakkor láttuk, hogy a szabályozási kör átvitelének sávkorlátja jó közelítéssel ω_c , tehát a Shannon-tétel közelítően betartható, ha $\omega_s > a\omega_c$, ahol $a > 2$. A közelítés annál jobb, minél nagyobb a értéke.



Megjegyzés az ideális aluláteresztő szűrőről

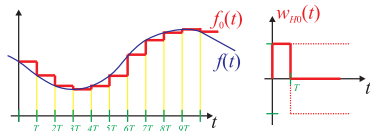
Mivel az ideális aluláteresztő szerv nem megvalósítható, így más, realizálható tartószervekkel kell próbálkozni.

Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek**
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



Nulladrendű tartószer - Zero Order Hold - ZOH



Frekvenciaválasz

$$\begin{aligned}
 W_{H_0}(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\
 &= T \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \frac{1}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} \\
 &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}
 \end{aligned}$$

Súlyfüggvény (impulzusválasz)

$$w_{H_0}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$$

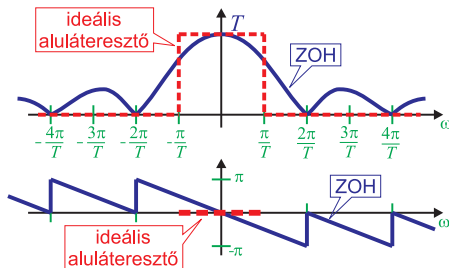
Amplitúdó- és fázismenet

Átviteli függvény

$$W_{H_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$\begin{aligned}
 |W_{H_0}(j\omega)| &= T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| \\
 \varphi_{H_0}(j\omega) &= -\frac{\omega T}{2}
 \end{aligned}$$

Nulladrendű tartószer - Zero Order Hold - ZOH



A tartószer alacsony frekvencián

Alacsony frekvencia: $\omega_c \ll \omega_N = \frac{\pi}{T}$.
 Az ω_c jó közelítéssel a sávszélesség.
 Ha $\omega < \omega_c$, akkor $\omega T/2 \approx 0$. Így
 alacsony frekvencián (kicsi T esetén)

$$|W_{H_0}(j\omega)| \approx T$$

$$\varphi_{H_0}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2}$$

Shannon-tétel?

Nem teljesül, mert az ideális tartószeret közelítettük.

ZOH az ideális szűrő helyett

Olyan, mintha egy $\frac{T}{2}$ holtidőt tettünk volna a szabályozási körbe. Ez rontja a fázismenetet.

Mintavételi idő megválasztása ZOH esetén

A problémafelvetés

- 1 Megterveztük a folytonos idejű $W_c(s)$ szabályozót és abból adódott ω_c .
- 2 Mintavételes szabályozót alkalmazunk, benne nulladrendű tartószerivel (ZOH).
- 3 Mi legyen T (mintavételi periódusidő) értéke?

A válasz

- 1 Láttuk, hogy a ZOH holtidőt visz a szabályozási körbe.
- 2 A holtidő rontja a fázistöbbletet.
- 3 Válasszuk meg T az alapján, hogy mekkora fázistöbblet-csökkenést tudunk tolerálni. Például 5° esetében

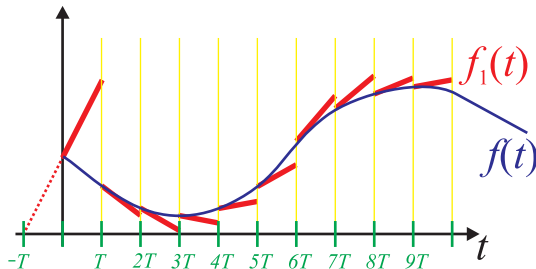
$$\frac{5}{180}\pi = \frac{\omega_c T}{2}$$

Mintavételezés a szabályozási körben

Gondolatkísérlet - az álmosodó vezető problémája



Elsőrendű tartószer - First Order Hold - FOH



Működés

Két korábbi értékre illeszt egyenest (elsőfokú polinomot.)

Shannon-tétel?

Nem teljesül, mert az ideális tartószerket közelítettük.

Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása**
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



Elgondolás

Operátorok a Laplace-tartományban

- 1 $\frac{1}{s}$: integrálás időtartományban
- 2 s : idő szerinti differenciálás
- 3 e^{-sT} : mintavételi periódusidőnyi késleltetés

Operátor a $\mathcal{Z}$ -tartományban

- 1 z^{-1} : eltolás.

Megjegyzés

Ha a számsorozat mintavételezésből származik, ahol annak periódusideje éppen T , akkor a $z^{-1} := e^{-sT}$ megfeleltetéssel lehetne élni. Csakhogy így racionális törtfüggvények s -ben nem vezetnének racionális törtfüggvényekre z -ben.



Differenciáló operátor (s) közelítése

Hátratarató differencia - BWD (backward difference)

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - T)}{T}$$

$$sY \approx \frac{1 - e^{-sT}}{T} Y$$

$$s \approx \frac{1 - e^{-sT}}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz}$$

Előretartó differencia - FWD (forward difference)

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t + T) - y(t)}{T}$$

$$sY \approx \frac{e^{sT} - 1}{T} Y$$

$$s \approx \frac{e^{sT} - 1}{T} = \frac{z - 1}{T}$$

Integráló operátor ($\frac{1}{s}$) közelítése

Baloldali téglalapszabály - LSR (**left-side rule**)

$$s^{-1} \approx \frac{T}{z - 1}$$

Jobboldali téglalapszabály - RSR (**right-side rule**)

$$s^{-1} \approx \frac{Tz}{z - 1}$$

Trapézszaabály - TR (**trapezoidal rule**) - Tustin-képlet

$$s^{-1} \approx \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$



Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



Gerjesztés-válasz ekvivalencia

Elgondolás

Ekvivalencia: azonos gerjesztés (pl. $\varepsilon(t)$ vagy $t\varepsilon(t)$) esetén $W(s)$ válasza a mintavételi időpontokban megegyezik $D(z)$ válaszával.

Egységugrás ekvivalencia

A gerjesztés az egységugrás ($\varepsilon(t)$).

$$D(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} \right\} \quad D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \{v(nT)\}$$

Sebességugrás ekvivalencia

A gerjesztés az sebességugrás ($t\varepsilon(t)$).

$$D(z) \frac{Tz}{(z - 1)^2} = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s^2} \right\} \right\} \quad D(z) = \frac{(z - 1)^2}{Tz} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s^2} \right\} \right\}$$

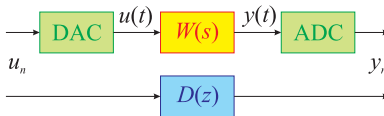


Tartalom

- 1 Holtidő
- 2 Mintavételes szabályzó
- 3 Shannon-tétel (mintavételi)
 - Matematikai mintavételezés
 - Jelrekonstrukció
 - Következmények
- 4 Tartószervek
- 5 Analóg kompenzáló tag mintavételes implementálása
 - Operátorok közelítése
 - Gerjesztés-válasz ekvivalencia
- 6 További áttérések



Jelátalakítók és átvitelek együtt



A jelátalakítók típusai

- ① DAC: nulladrendű tartószer
- ② ADC: mintavételező

Áttérés

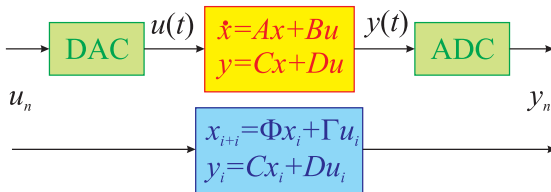
$$D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \{v(nT)\}$$

Matlab támogatás

`c2d` függvény a '`zoh`' opcióval. (Mint az egységugrás-ekvivalencia.)



Jelátalakítók és átvitelek együtt



A jelátalakítók típusai

- ① DAC: nulladrendű tartószer
- ② ADC: mintavételező

Az folytonos állapotegyenlet lépcsős bemenetet kap.



Jelátalakítók és átvitelek együtt

Áttérés

A következő mintavételig az állapotegyenletet kell integrálni konstans bemenet mellett.

$$x((i+1)T) = e^{AT}x(iT) + \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A((i+1)T-\vartheta)} Bu(iT) d\vartheta$$

Változócsere

Legyen $\sigma = (i+1)T - \vartheta$, akkor $d\sigma = -d\vartheta$.

Diszkrét idejű állapotegyenlet mátrixai

$$\Phi = e^{AT} \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma B$$