3. Villamosmérnök szigorlat - MEGOLDÁSOK

1. (**20 pont**)
   Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

   függvényen és vázolja fel a függvényt!

Megoldás:

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{\text{1 pont}}$
- $f(-x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ nem páros, nem páratlan; nem periodikus $\boxed{\text{1 pont}}$
- $f(x) > 0 \quad \Longrightarrow$ nincs zérushelye $\boxed{\text{1 pont}}$
-

$$\lim_{x\to 0+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ 0\cdot\infty \text{ típus}}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\infty}{\infty} \text{ l'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \infty \qquad \boxed{\text{3 pont}}$$

$$\lim_{x\to 0-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot 0 = 0 \qquad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$

- monotonitás vizsgálata

$$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1). \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

  Ezek alapján táblázatba foglalva:

x	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\infty)$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	MIN$=\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$

$\boxed{\text{3 pont}}$

- konvexitás vizsgálata

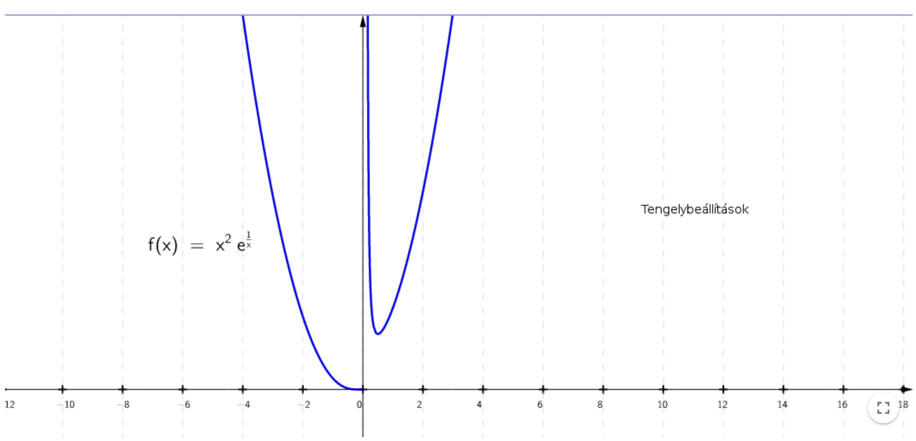
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)(2x-1) + e^{\frac{1}{x}}2 = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(2x^2-2x+1) \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$

Mivel a $2x^2-2x+1=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4 - 4\cdot 2\cdot 1 = -4 < 0,$$

ezért $2x^2-2x+1>0$, így $f''(x)>0$ az egész értelmezési tartományon. Az f függvény tehát mindenütt **konvex**. $\boxed{\text{2 pont}}$

- Ábrázolás $\boxed{\text{2 pont}}$



Az $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$ függvény gráfja.

2. (**15+15 pont pont**)

(a) Számítsa ki annak a korlátos térrésznek a térfogatát, amelyet a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű forgási paraboloid és a $z = 0$ sík határol!
Megoldás:
A $z = 4 - x^2 - y^2$ felület egy alulról nyitott forgási paraboloid, melynek metszete a $z = 0$ síkkal, az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör. A térfogatot megkaphatjuk hármas integrállal, ha hengerkoordinátákra térünk át:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad |J| = r \text{ (Jacobi-determináns)} \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

A határok henger koordinátákban:

$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2. \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

$$V \underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \int_0^{2\pi}\int_0^2 \underbrace{\int_0^{4-r^2} r \,\mathrm{d}\,z}_{[rz]_{z=0}^{4-r^2} = 4r - r^3} \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\varphi \underset{\boxed{3 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^2 (4r - r^3)\,\mathrm{d}\,r}_{\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4} \,\mathrm{d}\,\varphi \underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \int_0^{2\pi} 4 \,\mathrm{d}\,\varphi = 8\pi \qquad \boxed{2 \text{ pont}}$$

(b) Határozza meg az alábbi integrál értékét!

$$I = \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y.$$

Megoldás:
Az integrálást ebben a sorrendben nem tudjuk elvégezni, ezért meg kell cserélni az integrálás sorrendjét. Az integrálási tartomány:

$$T : \sqrt{y} \le x \le 2, \quad 1 \le y \le 4,$$

melyet átírva:

$$T : 1 \le y \le x^2, \quad 1 \le x \le 2. \quad \boxed{5 \text{ pont}}$$

Ezzel:

$$I = \int_1^2 \underbrace{\int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \mathrm{d}\,y}_{\left[y\sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right]_{y=1}^{x^2} = (x^2-1)\sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right)} \,\mathrm{d}\,x \underset{\boxed{4 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}} \int_1^2 (x^2 - 1)\sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \mathrm{d}\,x \underset{\boxed{4 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right]_1^2 \underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}} -\cos\frac{2}{3} + \cos\left(-\frac{2}{3}\right) = -\cos\frac{2}{3} + \cos\left(\frac{2}{3}\right) = 0,$$

mive a koszinusz függvény páros.

3. (**15 pont**)
Adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ valós paraméterek függvényében!

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -3x + 2y - z &= \mathbf{a} \\ -2x + y + \mathbf{b}\, z &= -1. \end{aligned}$$

Megoldás:
Végezzünk Gauss-eliminációt az egyenletrendszer kibővített mátrixán!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & \mathbf{a} \\ -2 & 1 & \mathbf{b} & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{S_2+3S_1 \\ S_3+2S_1}}{\overset{\sim}{\uparrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{a} \\ 0 & -1 & \mathbf{b}+2 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{\sim}{\uparrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{a} \\ 0 & 0 & \mathbf{b} & -1-\mathbf{a} \end{array}\right).$$

Az utolsó

$$\mathbf{b} \cdot z = -1 - \mathbf{a}$$

egyenletet vizsgálva, a következő esetekkel van dolgunk:

- Ha $\mathbf{b} = 0$ és $\mathbf{a} \neq -1$, akkor ellentmondásra jutunk, azaz ekkor **nincs megoldás**. $\boxed{\text{3 pont}}$
- Ha $\mathbf{b} = 0$ és $\mathbf{a} = -1$, akkor az utolsó tiszta zérus sor törlése után a kibővített mátrix:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right),$$

  melynek rangja 2, így ekkor **végtelen sok megoldásunk van** $3-2=1$ szabad paraméterrel. $\boxed{\text{4 pont}}$
  Ezek például $z = p \in \mathbb{R}$ paraméterrel kifejezve:

  $$x = 1 + p, \quad y = 2p + 1, \quad z = p \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

- Ha $\mathbf{b} \neq 0$, akkor **pontosan egy megoldásunk** van $\boxed{\text{4 pont}}$, melyek

  $$z = \frac{-1-\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, \quad y = \frac{-2-2\,\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \mathbf{a}, \quad x = \frac{-1-\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \mathbf{a} \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

4. (**15 pont**)
Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ felület $P(3,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét! Határozza meg az érintősík és az $x - y + 2z = 0$ egyenletű S sík metszetét, amennyiben metszik egymást.
Megoldás:
A parciális deriváltak:

$$z'_x(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - 2y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}, \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

$$z'_y(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - 2y^2)^{-1/2} \cdot (-4y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}. \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

Innen a $P(3,2)$ pontban

$$z(3,2) = 1, \quad z'_x(3,2) = 3, \quad z'_y(3,2) = -4, \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

ahonnan az érintősík egyenlete:

$$z = 1 + 3(x-3) - 4(y-2),$$

vagy

$$3x - 4y - z = 0. \quad \boxed{\text{3 pont}}$$

Az érintősík normálvektora $\mathbf{n}_1 = (3,-4,-1)$, míg az S sík normálvektora $\mathbf{n}_2 = (1,-1,2)$. Ezek nem párhuzamosak, így a két sík egy egyenesben metszi egymást. Mivel ezen egyenes mindkét síkon rajta van, így irányvektorának merőlegesnek kell lennie mindkét normálvektorra. Ebből egy irányvektor megkapható:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -9\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,. \quad \boxed{\text{3 pont}}$$

Mivel mindkét sík átmegy az origón, így a metszet egyenes az origón átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes, melynek paraméteres alakja:

$$x = -9t, \quad y = -7t, \quad z = t,$$

vagy a paraméter nélküli egyenletrendszere:

$$-\frac{x}{9} = -\frac{y}{7} = z. \quad \boxed{\text{4 pont}}$$

5. (**10+10 pont**)
Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja!

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n \cdot n!}.$$

Megoldás
Legyen $a_n = \frac{n^n}{5^n \cdot n!}$. A pozitív tagú sorokra vonatkozó hányadoskritériumot használjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{5^n \cdot n!}{n^n} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e} \frac{1}{5} \to \frac{e}{5}. \quad \boxed{\text{6 pont}}$$

Mivel $\frac{e}{5} < 1$, így a hányadoskritérium értelmében a sor konvergens. $\boxed{\text{4 pont}}$

(b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}}.$$

Megoldás:
Mivel
$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}, \quad \boxed{\text{3 pont}}$$
az n-dik részletösszeg egy teleszkóp összeg:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) =$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{2} \to \infty,$$

vagyis a sor divergens. $\boxed{\text{7 pont}}$

Lehet minoráns kritériummal is:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} > \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+2}} = \frac{1}{2\sqrt{k+2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha } k \geq 2}}{\geq} \frac{1}{2\sqrt{k+k}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{k}}. \quad \boxed{\text{6 pont}}$$

A minoráló
$$\sum_{k} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{k}}$$
sor divergens, mivel tanultuk, hogy $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ csak $\alpha > 1$ esetén konvergál. Így a minoráns kritérium értelmében a sor divergens. $\boxed{\text{4 pont}}$