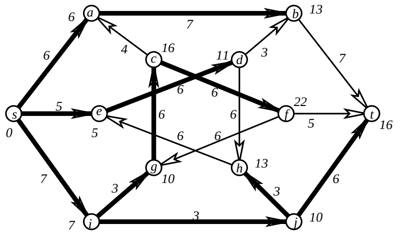
A számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs

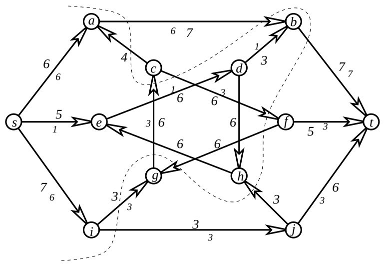
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését: ennek feltétele az is, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása is kiderüljön a dolgozatból.
Természetesen az alább ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott részpontszámok járnak.

1. Határozzuk meg az alábbi irányított $\vec{G}$ gráf minden csúcsának s-től mért távolságát, ahol az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik!



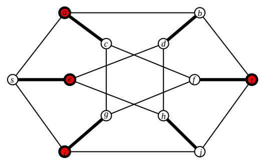
Mivel minden élhossz pozitív, alkalmazhatjuk az órán tanult Dijkstra algoritmust az s-től mért távolságok meghatározására. (4 pont)
Az ábrán $\vec{G}$ minden csúcsa mellett az s-től mért távolsága szerepel, és megvastagítottuk azokat az éleket, ami az adott csúcs távolságát meghatározta. (6 pont)

2. Határozzuk meg a fenti hálózatban a maximális folyam értékét!



Az órán tanult javító utas módszerrel meghatároztunk egy folyamot, amint az ábrán látható. (A kisméretű számok jelentik az adott élen átfolyó folyammennyiséget, ahol nincs szám, ott 0 mennyiségű folyam folyik.) (4 pont)
Ennek a folyamnak az értéke 13. (2 pont)
A kapott folyam maximalitását az ábrán jelölt, 13 kapacitású vágás bizonyítja. (3 pont)
A hálózatbeli maximális folyamérték tehát 13. (1 pont)

3. Határozzuk meg a fenti $\vec{G}$ gráf irányítatlan G megfelelőjének α, τ, ν ill. ρ paramétereit!



A G gráfon megjelöltünk 4 független pontot, tehát $\alpha(G) \geq 4$. (1 pont)
Öt ftn csúcsot csak úgy találhatnánk, ha a külső hatszögről kiválasztanánk a lehetséges 3 csúcsot, a két belső háromszög mindegyikéről pedig egyet-egyet. Ha azonban a külső hatszögről 3 ftn csúcsot kiválasztunk, akkor minden másodikat választjuk ki, és ezért az egyik belső háromszögről nem választhatunk további csúcsot. (2 pont)
Eszerint $\alpha(G) \leq 4$, azaz $\alpha(G) = 4$ teljesül. (1 pont)
Mivel G nem tartalmaz hurokélt, ezért Gallai tétele miatt $\alpha(G)+\tau(G) = |V(G)| = 12$, tehát $\tau(G) = 8$. (1 pont)

A G gráfnak az ábrán megadtuk egy teljes párosítását. (2 pont)
Ennél több független él nem található, tehát $\nu(G) = 6$ (1 pont)
G-nek nincs izolált pontja, ezért Gallai idevágó tétele szerint $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| = 12$, azaz $\rho(G) = 6$. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy egy G gráf tartalmaz három olyan feszítőfát, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G 3-élösszefüggő.

Azt kell igazolnunk, hogy bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 2 élt, a kapott gráf összefüggő marad. (3 pont)
Világos, hogy legfeljebb 2 él elhagyása a három éldiszjunkt feszítőfának legalább egyikét nem érinti. (2 pont)
Ez a feszítőfa az elhagyás utáni gráfnak is feszítőfája marad, (2 pont)
ezért az bizonyosan összefüggő lesz. (3 pont)

Másképp is lehet bizonyítani:

Azt kell igazolnunk, hogy G bármely két csúcsa között létezik 3 éldiszjunkt út. (3 pont)
Legyenek tehát $u, v \in V(G)$ különböző csúcsok, és legyenek F_1, F_2 és F_3 a G éldiszjunkt feszítőfái. (1 pont)
Világos, hogy az F_1, F_2, F_3 feszítőfák mindegyike tartalmaz egy-egy uv utat, (2 pont)
ráadásul ez a három út éldiszjunkt. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy G bármely két csúcsa között létezik 3 éldiszjunkt út, tehát G csakugyan 3-élösszefüggő. (1 pont)

5. Tegyük fel, hogy a $G = (A, B; E)$ páros gráfban létezik A-t fedő párosítás, továbbá, hogy minden A-t fedő párosítás tartalmazza az $ab \in E$ élt (ahol $a \in A$). Bizonyítsuk be, hogy létezik A-nak egy olyan a-t tartalmazó X részhalmaza, amire $|N_G(X)| = |X|$, és b egyedül a-val szomszédos az X-beli csúcsok között.

Mivel minden A-t fedő párosítás tartalmazza az ab élt, ezért az ezen él törlésével keletkező $G - ab$ gráfnak nincs A-t fedő párosítása, (2 pont)
tehát Hall tétele miatt van A-nak egy olyan X részhalmaza, amire $|N_{G-ab}(X)| < |X|$ teljesül (a $G - ab$ gráfban). (2 pont)
Tudjuk, hogy G-nek létezik A-t fedő párosítása, ezért $|N_G(X)| \geq |X|$. (1 pont)
Ez két megfigyelés csak úgy teljesülhet, ha $a \in X$, (1 pont)
továbbá, ha az ab él törlésével X szomszédainak halmazából b kiesik, (1 pont)
azaz b egyedül a-val szomszédos X-ben. (1 pont)
Ekkor az ab él törlésekor $N(X)$ mérete eggyel csökken és $|X|$-nél kisebb lesz, ezért $|N_G(X)| = |X|$ állt G-ben. (1 pont)
A fenti X halmaz tehát rendelkezik a feladatban megkívánt tulajdonsággal. (1 pont)

6. Tegyük fel, hogy G egy n pontú, egyszerű gráf és $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) = n - 1$, ahol $\overline{G}$ a G gráf komplementerét és χ' az élkromatikus számot jelenti. Bizonyítsuk be, hogy G reguláris!

Tudjuk, hogy $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, (2 pont)
és persze, hogy $\chi'(\overline{G}) \geq \Delta(\overline{G})$. (2 pont)
Világos, hogy $\Delta(\overline{G}) = n - 1 - \delta(G)$, ahol $\delta(G)$ jelenti a G gráf minimális fokszámát. (2 pont)
Ezek szerint $n - 1 = \chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \geq \Delta(G) + n - 1 - \delta(G) \geq$ (2 pont)
$\geq \delta(G) + n - 1 - \delta(G) = n - 1$, hisz a maximális fokszám legalább akkora, mint a minimális. (1 pont)
A fenti egyenlőtlenségláncban tehát mindenütt egyenlőség áll: speciálisan $\Delta(G) = \delta(G)$, azaz G-ben a maximális fokszám azonos a minimálissal. Más szóval G reguláris. (1 pont)

7. Hány pozitív közös osztója van az 4422 és az 2244 számoknak?

Az Euklideszi algoritmus segítségével meghatározzuk a két szám legnagyobb közös osztóját: (2 pont)
$4422 = 1 \cdot 2244 + 2178$, $2244 = 1 \cdot 2178 + 66$, $2178 = 33 \cdot 66 + 0$, tehát $(4422, 2244) = 66$. (3 pont)
Tudjuk, hogy a közös osztók halmaza megegyezik a legnagyobb közös osztó osztóinak halmazával, (1 pont)
ezért azt kell meghatározni, hogy 66-nak hány pozitív osztója van. (2 pont)
A $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1$ kanonikus alak miatt $d(66) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, (1 pont)
tehát a feladat kérdésere is 8 a válasz. (1 pont)

8. Mi az utolsó jegye a 117^{177} számnak 17-es számrendszerben?

Az kell meghatároznunk, hogy 17-tel osztva a 117^{177} szám milyen maradékot ad. (2 pont)
Mivel $117 = 7 \cdot 17 - 2$, $17 = 8 \cdot 2 + 1$, $2 = 2 \cdot 1 + 0$, ezért az Eulkideszi algoritmus szerint
$(117, 17) = (17, -2) = (17, 2) = (2, 1) = (1, 0) = 1$ (1 pont)
Alkalmazható tehát az Euler-Fermat tétel, tehát $117^{\varphi(17)} \equiv 1 (\text{mod } 17)$. (2 pont)
A 17 prím, ezért $\varphi(17) = 16$, (1 pont)
azaz $117^{16} \equiv 1 (\text{mod } 17)$. (1 pont)
Innen $117^{177} = 117^{11 \cdot 16 + 1} = 117^{11 \cdot 16} \cdot 117 = (117^{11})^{16} \cdot 117 \equiv 1^{16} \cdot 117 = 117 \equiv 15 (\text{mod } 17)$, (2 pont)
tehát a keresett utolsó jegy a 15-ös.
(Hisz 17-es számrendszerben az utolsó helyiértéken álló számjegy 0-tól 16-ig bármi lehet.) (1 pont)

Eredetileg az alábbi rossz megoldás szerepelt, amit elszámoltam. Elnézést kérek. (FT)

Az kell meghatároznunk, hogy 17-tel osztva a 117^{177} szám milyen maradékot ad. (2 pont)
Mivel $117 = 7 \cdot 17 + 8$, $17 = 2 \cdot 8 + 1$, $8 = 8 \cdot 1 + 0$, ezért az Eulkideszi algoritmus szerint $(117, 17) = 1$ (1 pont)
Alkalmazható tehát az Euler-Fermat tétel, tehát $117^{\varphi(17)} \equiv 1 (\text{mod } 17)$. (2 pont)
A 17 prím, ezért $\varphi(17) = 16$, (1 pont)
azaz $117^{16} \equiv 1 (\text{mod } 17)$. (1 pont)
Innen $117^{177} = 117^{11 \cdot 16 + 1} = 117^{11 \cdot 16} \cdot 117 = (117^{11})^1 6 \cdot 117 \equiv 1^1 6 \cdot 117 = 117 \equiv 8 (\text{mod } 17)$, (2 pont)
tehát a keresett utolsó jegy a 8. (1 pont)