2. Zárthelyi megoldásokkal

1998 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Döntse el, hogy létezik-e, és ha igen, számítsa ki az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény századik deriváltját az x = 0 helyen!

MO. Egyrészt e^x origó körüli Taylor-sora alapján : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, tehát f origó körüli hatványsorba fejthetõ, következésképpen itt akárhányszor deriválható és ez az f-et elõállító hatványsor f origó körüli Taylor-sora, így a Taylor-sor definíciója szerint minden valós x-re $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. A két kifejezésben x^{100} együtthatóit összehasonlítva $\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = (-1)^{50} \frac{1}{50!}$, amibõl

$$f^{(100)}(0) = (-1)^{50} \frac{100!}{50!} = \frac{100!}{50!}.$$

2. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla b) egy c) végtelen sok megoldása ?

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= -2 \\ 3x + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. Gauss-elimináció után a kibõvített mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{pmatrix}$, tehát

mo.: $a = -1,\ b \neq 0$, egy mo.: $a \neq -1$, ∞ sok mo.: $a = -1,\ b = 0$.

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{a} \end{pmatrix}$.

Mely **a** valós számok esetén invertálható az $\underline{\underline{A}}$ mátrix? Határozza meg $\underline{\underline{A}}$ inverzét az $\mathbf{a} = 0$ esetben!

MO. Minden $a \neq 1$ esetén, $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Hol deriválható az $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ függvény?

MO. Az origón kívül mindenütt, mert ilyenekbõl van deriválhatóságot megõrzõ módon összerakva. Az origóban azonban nem. Ugyanis $f(x,0)=\sqrt[3]{x^3}=x$ így $f_x(0,0)=1$ és ugyanígy a másik, tehát $f_x(0,0)==f_y(0,0)=1$, továbbá $\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-(1,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és ennek a függvénynek nincs határértéke az origóban, hisz a tengelyek mentén konstans 0 az értéke, az $y=x$, $x>0$ egyenes mentén pedig konstans $\dfrac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0$.

5. Határozza meg az $f(x,y)=3x^3+2xy$ függvény $P=(-1,3)$ pontbeli $v=(1,2)$ irányú iránymenti deriváltját!

MO. grad$f=(9x+2y,2x)$, tehát grad$f|_P=(-3,-2)$, és $|v|=\sqrt{5}$, így

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-3,-2)\cdot(1,2)=\frac{-7}{\sqrt{5}}$$