Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2011. május 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

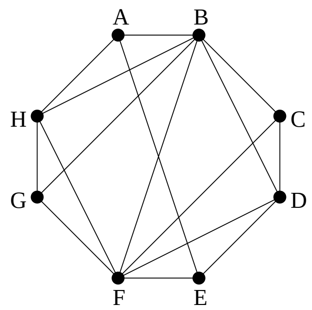
Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy banketten 50 vendég vesz részt, mindegyikük legalább 5 embert ismer a többiek közül. (Az ismeretségek kölcsönösek.) A vendégek közül bárhogyan is választunk 3-at, 4-et vagy 5-öt, ezek nem tudnak leülni egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismerje. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes vendég le tud ülni egy 50 fős, kör alakú asztal köré úgy, hogy bármely két, egymás mellett ülő, de egymást nem ismerő embernek legyen a vendégek közt közös ismerőse!

* * * * *

Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai a vendégek és az élek az ismeretségeknek felelnek meg.
Legyen továbbá H az a gráf, amelynek csúcsai ismét a vendégek, de két vendég akkor szomszédos H-ban, ha ismerik egymást, vagy van közös ismerősük. A feladat azt megmutatni, hogy H-ban van Hamilton-kör. (1 pont)
Legyen v tetszőleges vendég. A feladat szerint van legalább 5 ismerőse, ezek H-ban (is) szomszédai. Továbbá v minden ismerősének van v-n kívül legalább 4 ismerőse, akikkel v szomszédos H-ban. (2 pont)
A felsorolt legalább $5 + 4 \cdot 5 = 25$ H-beli szomszéd közül bármely kettő különböző, hiszen ha v két ismerőse között volna ismeretség az egy 3 hosszú, ha v egy ismerőse és egy „másodismerőse" között volna ismeretség, az egy 4 hosszú, ha pedig v két „másodismerőse" között volna ismeretség, az egy 5 hosszú kört jelentene G-ben; a feladat szövege szerint ezek nem fordulhatnak elő. (5 pont)
A H egyszerű gráf tehát 50 pontú és minden pont foka legalább 25, így a Dirac-tétel miatt valóban van benne Hamilton-kör. (2 pont)

2. Az alábbi gráfnak mely éleire teljesül, hogy azt a gráfból elhagyva a kapott (15 élű) gráfban van Euler-út?



* * * * *

A gráfban a páratlan fokú pontok: A, C, E és G. (1 pont)
Az $\{A, E\}$ élet elhagyva A és E foka párosra változik (1 pont)
és a maradék gráf összefüggő is lesz, (1 pont)
így a tanult tétel szerint lesz benne Euler-út. (1 pont)
Azonban $\{A, E\}$-n kívül más él nem felel meg a feladat feltételének: mivel $\{A, E\}$ az egyetlen olyan él a gráfban, ami A, C, E és G közül köt össze kettőt, bármely más él elhagyása után e közül a négy pont közül legalább három még páratlan fokú marad (sőt: még egy további páratlan fokú is keletkezik), így nem lesz a maradék gráfban Euler-út. (6 pont)

3. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legföljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát!

* * * * *

Legyen G a feladatbeli gráf. Az előadáson tanult tétel (miszerint az intervallumgráfok perfektek) miatt $\chi(G) = \omega(G)$. Így $\chi(G)$ helyett $\omega(G)$-t is meghatározhatjuk. (1 pont)
Ha G-ben klikket alkot néhány csúcs, akkor a megfelelő intervallumok közül bármely kettő metsző; vagyis a klikkek az egy adott számot tartalmazó intervallumok halmazának felelnek meg. Így a kérdés az, hogy legföljebb hány k-t tartalmazó intervallum lehet G-ben, ha $1 \leq k \leq 100$. (3 pont)
Ha k páros, akkor a 4 hosszúakból legföljebb 3 van ($[k-4, k]$, $[k-2, k+2]$, $[k, k+4]$), a 3 hosszúakból legföljebb 4 ($[k-3, k]$, $[k-2, k+1]$, $[k-1, k+2]$, $[k, k+3]$) a 2 hosszúakból legföljebb 2 ($[k-2, k]$, $[k, k+2]$) és az 1 hosszúakból is legföljebb 2 ($[k-1, k]$, $[k, k+1]$). (A „legföljebb" mindig arra utal, hogy a felsorolt intervallumok 1-hez vagy 100-hoz közeli k-kra kilóghatnak $[1, 100]$-ból.) (2 pont)
Ha k páratlan, akkor a 3 és 1 hosszú intervallumok esetében nincs változás, de a 4 és 2 hosszúak száma eggyel-eggyel kisebb: $[k-3, k+1]$ és $[k-1, k+3]$, illetve $[k-1, k+1]$. (2 pont)
Következésképp a k-t tartalmazó intervallumok maximális száma 11 (ami 6 és 96 közötti páros k-kra következik be), így $\omega(G) = \chi(G) = 11$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a hiánytalan megoldáshoz elvileg hozzátartozna annak indoklása is, hogy a fenti megoldásban elegendő egész k-kat vizsgálni; ennek elmulasztásáért azonban nem vonunk le pontot. A feladat megoldható úgy is, hogy a gráfban mutatunk egy 11-es klikket (a fentiek szerint pl. az 50-et tartalmazó intervallumok) és egy 11 színnel való helyes színezést (pl. az 1 hosszúakat felváltva 2 színnel színezzük, a 2 hosszúakat ugyanígy 2 újabb színnel, a 3 hosszúakat ciklikusan váltogatva 4 színnel, a 4 hosszúakat ugyanígy 3 színnel). Ha így indoklunk, az intervallumgráfok perfektségére nem kell hivatkozni.

4. Legyen G az a gráf, amelyet egy 2011 pontú körből kapunk úgy, hogy mindegyik élét helyettesítjük két párhuzamos éllel. Határozzuk meg G élkromatikus számát!

* * * * *

G minden élszínezésében bármely színt legföljebb 1005-ször használhatunk (hiszen 1006, azonos színű élhez 2012 csúcs kellene). (2 pont)
Ezért 4 szín nem lehet elegendő egy helyes élszínezéshez: így összesen $4 \cdot 1005 = 4020$ élet színezhetnénk meg, pedig G-nek $2 \cdot 2011 = 4022$ éle van. (3 pont)
Megadjuk G egy élszínezését 5 színnel. Bontsuk fel G élhalmazát két 2011 hosszú körre (a „külső körre" és a „belső körre"). Mindkettő megszínezhető három színnel például úgy, hogy két színt felváltva használva megszínezünk 2010 élet, a harmadik színt pedig csak egyszer használjuk (amikor „a kör zárul"). Azonban G élszínezésekor a 3 + 3 színhez képest spórolhatunk egy színt, ha a „külső" és a „belső" körön is a fenti színezést használjuk, de a két esetben a harmadik, egyszer használatos színt azonosnak választjuk (legyen ez például a zöld). Ez könnyen megtehető, ha a két körön vett színezést elforgatjuk egymáshoz képest úgy, hogy a két zöld él ne legyen szomszédos. (5 pont)
Megmutattuk, hogy G élszínezéséhez 5 szín szükséges, de ennyi elégséges is, ezért $\chi_e(G) = 5$.
Megjegyezzük, hogy mivel G nem egyszerű gráf, ezért a tanult Vizing-tétel nem alkalmazható rá, így a fenti megoldásban a színezés megadása nem kerülhető meg.

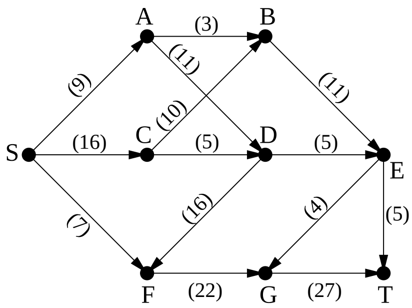
5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_7\}$. Minden $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 7$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Van-e G-ben A-t lefedő párosítás?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixból kiolvasható, hogy az a_1, a_3, a_5 és a_6 csúcsok minden szomszédja a b_2, b_5 és b_6 csúcsok közül kerül ki (vagyis a Hall-tétel jelöléseit használva $N(\{a_1, a_3, a_5, a_6\}) = \{b_2, b_5, b_6\}$). (5 pont)
Így nyilván nincs G-ben A-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (Lehet a Hall-tétel triviális irányára is hivatkozni, miszerint az $X = \{a_1, a_3, a_5, a_6\}$ választással $|N(X)| < |X|$, így nincs A-t lefedő párosítás.) (5 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás kulcsa nyilván az $\{a_1, a_3, a_5, a_6\}$ halmaz megtalálása. Ez – tekintettel a gráf aránylag kicsi méretére – próbálgatással sem nehéz, de az előadáson tanult javító utas algoritmus is gyorsan ide vezet.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be)!



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 30. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (4 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, C, B, E\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, C, B, E\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 30. (4 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 30 értékű vágás bizonyítja, hogy a 30 értékű folyam maximális. (1 pont)
Az utolsó 2 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 2 pontból 1-et kapjon.) Lehet úgy is érvelni, hogy a 30 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út, tehát a folyam maximális.