1.*csoport*

1. Legyenek A, B, C teljesen független események, és $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(C) = \frac{1}{4}$. Határozza meg annak valószínűségét, hogy A, B, C közül csak egy fog bekövetkezni.
   Megoldás: $\mathbf{P}\left(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C\right) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}\left(\overline{C}\right) +$
   $+\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}(C) = \frac{11}{24}$

2. Tekintsük az $A(0,0), B(1,0), C(1,2), D(0,2)$ téglalapot a síkon! A DC oldalon véletlenszerűen kiválasztunk egy Q pontot. Jelölje X az AQ szakasz hosszát! Adja meg X eloszlásfüggvényét!
   Megoldás: X felírható az alábbi alakban:
   $X = \sqrt{4 + Y^2}$, ahol $Y \in U(0,1)$.
   $\mathbf{P}(X < t) = \mathbf{P}\left(Y < \sqrt{t^2 - 4}\right) = \sqrt{t^2 - 4}, t \in \left(2, \sqrt{5}\right).$

3. Egy termék gyártásakor 2% selejt keletkezik. A termékeket 100-asával dobozokba csomagolják. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dobozban nem lesz háromnál több selejt?
   Megoldás: $X \in B\left(100, \frac{2}{100}\right)$, a selejtesek száma.
   $\mathbf{P}(X \leq 3) = \sum\limits_{i=0}^{3} \binom{100}{i} \left(\frac{2}{100}\right)^i \left(\frac{98}{100}\right)^{100-i}$

4. Egy normális eloszlású X valószínűségi változó várható értéke -7. Tudjuk, hogy $\mathbf{P}(-7 < X < 0) = 0,4$. Mekkora a $\mathbf{P}(-5 < X < 5)$ valószínűség?
   Megoldás: $\mathbf{P}(-7 < X < 0) = \mathbf{P}\left(0 < \frac{X+7}{\sigma} < \frac{7}{\sigma}\right) = 0,4$
   $\Phi\left(\frac{7}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0,4 \Longrightarrow \Phi\left(\frac{7}{\sigma}\right) = 0,9 \Longrightarrow \frac{7}{\sigma} = 1,3$
   $\sigma = 5,38$
   $\mathbf{P}(-5 < X < 5) = \mathbf{P}\left(\frac{-5+7}{5,38} < \tilde{X} < \frac{+5+7}{5,38}\right) = \Phi(2,23) - \Phi(0,37) =$
   $= 0,986 - 0,64 = 0,346$

5. Legyen $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek. Számolja ki a $Z = \frac{3+X}{2+Y}$ várható értékét!
   Megoldás: $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}(3 + X)\,\mathbf{E}\left(\frac{1}{2+Y}\right) = 3,5 \cdot \ln 1,5 \approx 1,42$
   $\mathbf{E}(3 + X) = 3 + \mathbf{E}X = 3,5$
   $\mathbf{E}\left(\frac{1}{2+Y}\right) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2+y}dy = [\ln(2+y)]_0^1 = \ln 1,5$