Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Műszaki informatikus BSc
2012.12.19.
Megoldások

1. Ha $Y_1, Y_2 \in U(0,1)$ függetlenek, akkor $X = |Y_1 - Y_2|$.
$F_X(t) = \mathbf{P}(X < t) = \mathbf{P}(Y_2 - t < Y_1 < Y_2 + t) = 1 - (1-t)^2, t \in (0,1)$.
$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$. $f_X(t) = F'_X(t) = 2 - 2t$.
$\mathbf{E}X = \int\limits_0^1 t \cdot (2-2t)\, dt = \frac{1}{3}, \mathbf{E}X^2 = \int\limits_0^1 t^2 \cdot (2-2t)\, dt = \frac{1}{6},$
$\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1}{18}, \boldsymbol{\sigma} X = \frac{1}{\sqrt{18}}$.

2. a.) $\mathbf{P}\left(A\bar{B} + \bar{A}B\right) = \mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}\left(\bar{B}\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}\right)\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
b.) $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

3. a.) $\frac{1}{c} = \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} 1 + x^3y - xy^3 dxdy = 4,$
b.) $f_X(x) = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} 1 + x^3y - xy^3 \,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{4}\left[y + x^3\frac{y^2}{2} - x\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2};$
$f_Y(y) = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} 1 + x^3y - xy^3 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\left[x + \frac{x^4}{4}y - \frac{x^2}{2}y\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2};$
A vetületi eloszlások egyaránt $U(-1,1)$ eloszlások! X, Y nem függetlenek, mivel $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$.

4. Az X, Y együttes eloszlás táblázata:

Y \ X	0	1	2	3	Y perem
0	$\frac{8}{216}$	$\frac{12}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{27}{216}$
1	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{9}{216}$	0	$\frac{81}{216}$
2	$\frac{54}{216}$	$\frac{27}{216}$	0	0	$\frac{81}{216}$
3	$\frac{27}{216}$	0	0	0	$\frac{27}{216}$
X perem	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	1

X és Y nem függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X=3, Y=3) = 0 \neq \frac{1}{216}\frac{27}{216} = \mathbf{P}(X=3)\,\mathbf{P}(Y=3)$.
$\mathbf{E}X = \frac{1}{2}; \mathbf{E}Y = \frac{3}{2}; \mathbf{E}X^2 = \frac{2}{3}; \mathbf{E}Y^2 = 3; \boldsymbol{\sigma}^2 X = \frac{5}{12}; \boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{3}{4};$
$\mathbf{E}XY = 1 \cdot 1 \cdot \frac{36}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{27}{216} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{9}{216} = 0,5 \Longrightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{1}{4}$.
A kovarianciamátrix: $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

5. $f_X(x) = \int\limits_0^1 \frac{4}{5}(x+y+xy)\,dy = \frac{4}{5}\left[xy + \frac{y^2}{2} + x\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

   $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2x+2y+2xy}{3x+1}$, így

   $\mathbf{E}(Y \mid X = x) = \int\limits_0^1 y\frac{2x+2y+2xy}{3x+1}dy = \frac{5x+2}{9x+3}$, azaz $\mathbf{E}(Y \mid X) = \frac{5X+2}{9X+3}$.

   $\mathbf{E}\left(Y \cdot X^2 \mid X\right) = X^2 \cdot \mathbf{E}(Y \mid X) = \frac{5X+2}{9X+3} \cdot X^2$.

6. A T_n statisztika az minta eloszlása ϑ paraméterének torzítatlan becslése, ha $\mathbf{E}T_n = \vartheta$.

   A T_n statisztika az minta eloszlása ϑ paraméterének konzisztens becslése, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|T_n - \vartheta| \geq \varepsilon\right) = 0$$

   Pl. az átlagstatisztika a várható érték torzítatlan becslése. Ha a minta szórása létezik, akkor ez a becslés konzisztens is. Ez a helyzet pl. a normális eloszlás esetében.