A Számítástudomány alapjai

MÁSODIK pótZH 2011. XII. 1. 8^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

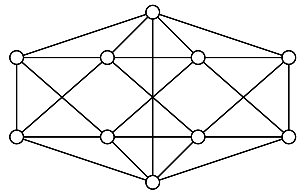
1. Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a v_iv_j él hossza legyen $l(v_iv_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a v_7v_8 él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?

2. A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a v_iv_j él kapacitása $c(v_iv_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető?

3. Tekintsük a k-szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k+1)$-szeresen összefüggő.

4. Tegyük fel hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?

5. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?



6. Számítsuk ki a $10! + 99$ és $9! + 9$ számok legnagyobb közös osztóját.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Ács Bernadett (K IB 138, Bérczi Kristóf (K, E 407), Csákány Rita (K-Cs, IB 134), Drótos Márton (K, IB 138, J 302), Faller Beáta (K, IB 139), Göbölös-Szabó Julianna (K-Cs, IB 140), Kőrösi Attila (Cs, IB 141), Mihálka Éva Zsuzsanna (Cs, IB 138), Recski András (K, IE 217.1), Salánki Ágnes (K, E 406), Soltész Dániel (Cs, IB 142), Szolnoki Lénárd (Cs, IB 139), Varga Kitti (K, IB 140)

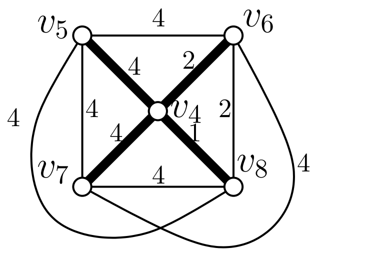
Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

2. pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

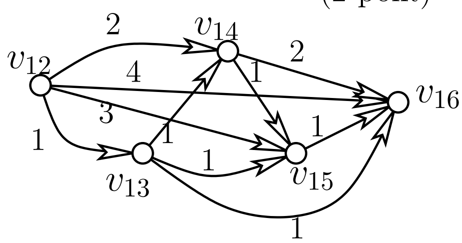
1. Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a v_iv_j él hossza legyen $l(v_iv_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a v_7v_8 él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?



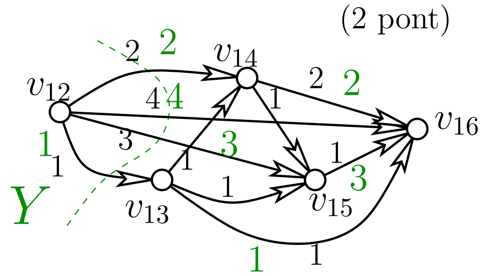
Az ábrán látható a G gráf diagramja az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. (3 pont)
A v_4-től mért távolságokat a v_4-ből indított Dijkstra algoritmus segítségével határozhatjuk meg. Ennek során v_8, v_6, v_5, v_7 sorrendben érjük el a csúcsokat, mindegyik távolságot a v_4-ből vezető közvetlen él határozza meg, tehát a legrövidebb utak fája a v_4 közepű csillag lesz. (3 pont)
Ennek alapján a v_5, v_6, v_7 ill. v_8 csúcsok v_4-től mért távolságai rendre $4, 2, 4, 1$ lesznek. (2 pont)
Mivel $dist(v_4, v_7) = 4 > 3$, és $dist(v_4, v_8) = 1$, ezért ha a v_4v_8 él hosszát 2-re változtatjuk 4-ről, akkor v_4 és v_7 távolsága 3 lesz. (2 pont)

2. A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a v_iv_j él kapacitása $c(v_iv_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető?

Az ábrán az adott látható a hálózat diagramja. (2 pont)



Ezen a tanult javító utas algoritmussal kerestünk maximális nagyságú folyamot, mégpedig av_{12}, v_{16}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{12}, v_{13}, v_{16} és v_{12}, v_{15}, v_{16} utakon rendre 4-t, 2-t ill. 1-t, 1-t javítva. (Az egyes éleken felvett értéket a kék színű, nagyobb méretű számok jelzik.) A kapott 8 nagyságú folyam maximalitását az X halmaz meghatárrozta, szaggatottal jelzett 8 kapacitású vágás bizonyítja. (4 pont)
Ha most a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását kellően nagynak választjuk, akkor még tovább növelhető a folyam nagysága a v_{12}, v_{15}, v_{16} úton segítségével. Így kapjuk a zölddel jelölt, 10 nagyságú folyamot, aminél nagyobbat nem kaphatunk, hiszen az Y meghatározta vágás kapacitása 10, és ez a vágás nem tartalmazza a $v_{15}v_{16}$ élt. (2 pont)



Ahhoz, hogy az X által meghatározott vágás kapacitása legalább 10 legyen, a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását legalább 3-ra kell növelni, tehát ekkora növelés feltétlenül szükséges a 10 nagyságú folyamhoz. Láttuk, hogy ez elég is, tehát, 3 a legkisebb olyan kapacitás, amire ez elérhető. (2 pont)

3. Tekintsük a k-szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k+1)$-szeresen összefüggő.

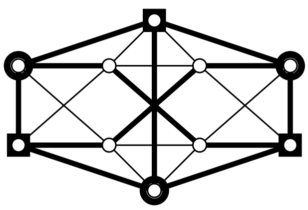
Mivel G k-öf volt, ezért $|V(G)| \geq k + 1$, tehát $|V(G')| = 2 \cdot |V(G)| > k + 1$ is teljesül, ami az egyik feltétel ahhoz, hogy G' k-öf legyen. (1 pont)

A k-szoros pontösszefüggőség definíciója szerint tehát mindössze azt kell ellenőriznünk, hogy ha G' nem eshet szét legfeljebb $k-1$ csúcs elhagyásától. (3 pont)
Tegyük fel tehát, hogy elhagytunk legfeljebb $k-1$ csúcsot G'-ből. Mivel G k-öf, ezért G semelyik diszjunkt példánya sem esett szét, (2 pont)
így mindössze azt kell igazolnunk, hogy maradt a két rész között is él, azaz van olyan csúcs, amit G egyik példányában sem töröltünk. (2 pont)
Ez utóbbi pedig azért igaz, mert G-nek legalább $k-1$ csúcsa van a k-öf tulajdonság miatt, így olyan csúcsának is kell lennie, aminek egyik példányát sem bántottuk a legfeljebb $k-1$ csúcs törlésekor. (2 pont)

4. Tegyük fel hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?

   Legyenek a $G=(V,E)$ gráf csúcsai az iskolások, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha az adott iskolások leveleznek. A feladat feltételeiből G-nek 77 csúcsa van és 8-reguláris. A borítékokra a feladatban megkívánt feltétel pedig pontosan G 8-élszínezhetőségét jelenti, a célunk tehát ennek eldöntése. (3 pont)
   Tegyük fel indirekt, hogy G 8-élszínezhető. Ekkor az azonos színű élek G egy párosítását alkotják. (2 pont)
   Mivel 8 színt használtunk, és minden csúcsból 8-féle színű él indul, ezért az azonos színű élek teljes párosítást alkotnak minden egyes szín esetén. (3 pont)
   Azonban G-nek 77 csúcsa lévén nem létezhet teljes párosítása, az indirekt feltevésünk tehát nem helytálló, G élei nem színezhetők 8 színnel, a borítékokra a feladatban megkívánt elvárás nem teljesíthető. (2 pont)

5. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?

   A vastaggal jelölt élek által alkotott részgráf a $K_{3,3}$ gráf egy soros bővítése, ahol a kerek csúcsok a kutak, a négyszögletesek a házkak. (8 pont)
   Tanultuk, hogy $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, így annak soros bővítése sem az, tehát a feladatban szereplő gráf sem síkbarajzolható. (2 pont)

6. Számítsuk ki a $10!+99$ és $9!+9$ számok legnagyobb közös osztóját.

   Az Euklideszi algoritmus kapcsán azt tanították, hogy $(a,b)=(a-b,b)=\ldots=(a-kb,b)$ tetszőleges k egész számra. (2 pont)
   Ezek szerint$(10!+99, 9!+9) = (10!+99-10(9!+9), 9!+9) = (9, 9!+9) = (9!+9, 9) = (9!+9-(8!+1)\cdot 9, 9) = (0,9) = 9$ (7 pont)
   A keresett lnko tehát 9. (1 pont)

   Természetesen közvetlenül az Euklideszi algoritmussal is megoldható a feladat.