Rendszerelmélet 2.ZH

2017.12.07.

Fontos elmélet

(FI) Fourier-sorok

$$x(t+T) = x(t) \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^c e^{jp\Omega t} \qquad X_p^c = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jp\Omega t} dt$$

$x(t)$ valós

$$x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cos(p\Omega t + \xi_p)$$

$$X_0 = X_0^c \quad , X_p = 2|X_p^c| , \ \xi_p = \operatorname{arc}\{X_p^c\}$$

Parseval tétele: $P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \qquad P_x = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |X_p^c|^2$

(DI) Fourier-sorok

$$x[k+L] = x[k] \qquad \Theta = \frac{2\pi}{L}$$

$$x[k] = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^c e^{jp\Theta k} \qquad X_p^c = \frac{1}{L}\sum_{k=\langle L \rangle} x[k] e^{-jp\Theta k}$$

$$X_0 = X_0^c \ , X_p = 2|X_p^c| , \ \xi_p = \operatorname{arc}\{X_p^c\}$$

L páros: $M = \frac{L}{2} - 1$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M} X_p \cos(p\Theta k + \xi_p) + (-1)^k X_{L/2} \quad , X_{L/2} = X_{L/2}^c$$

L páratlan: $M = \frac{L-1}{2}$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M} X_p \cos(p\Theta k + \xi_p)$$

Parseval tétele: $P_x = \frac{1}{L}\sum_{k=\langle L \rangle} |x[k]|^2 \qquad P_x = \sum_{p=\langle L \rangle} |X_p^c|^2$

Fourier-transzformáció

FI	DI
$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$	$X(e^{j\vartheta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j\vartheta k}$
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\vartheta})e^{j\vartheta k}d\vartheta$

Fontos tételek

$x(t-\Delta t)\rightarrow X(j\omega)e^{-j\omega\Delta t}$ – Eltolás – $x[k-i]\rightarrow X(e^{j\vartheta})e^{-ji\vartheta}$

$x(t)e^{j\omega_0 t}\rightarrow X(j(\omega-\omega_0))$ – Moduláció – $x[k]e^{j\vartheta_0 k}\rightarrow X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$

$x'(t)\rightarrow j\omega X(j\omega)$ – Derivált – $x[k+1]\rightarrow e^{j\vartheta}\cancel{k}\cdot X(e^{j\vartheta})$

$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$ – Parseval – $E=\sum_{-\infty}^{\infty}|x[k]|^2$

$\downarrow$

$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$ $\qquad$ $E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\vartheta})|^2d\vartheta$

Nehány jel

$\delta(t)\rightarrow 1$ $\qquad$ $\delta[k]\rightarrow 1$

$\cos(\omega_0 t)\rightarrow 2\pi\frac{\delta(\omega-\omega_0)\mp\delta(\omega+\omega_0)}{2_j}$ $\qquad$ $\cos(\vartheta_0 k)\rightarrow 2\pi\frac{\delta(\vartheta-\vartheta_0)\mp\delta(\vartheta+\vartheta_0)}{2_j}$

sin $\qquad$ sin

$x(t)\cos(\omega_0 t)\rightarrow\frac{X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)}{2}$ $\qquad$ $x[k]\cos(\vartheta_0 k)\rightarrow\frac{X(\vartheta-\vartheta_0)+X(\vartheta+\vartheta_0)}{2}$

$\varepsilon(t)\rightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ $\qquad$ $\varepsilon[k]\rightarrow\pi\delta(\vartheta)+\frac{1}{1-e^{-j\vartheta}}$

$\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\rightarrow\frac{1}{\alpha+j\omega}$ $\quad \alpha>0$ $\qquad$ $\varepsilon[k]q^k; |q|<1\rightarrow\frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}}$

Átviteli karakterisztika

$$DI: H(e^{j\vartheta}) = \underline{C}^T[e^{j\vartheta}\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D$$

$$FI: H(j\omega) = \underline{C}^T[j\omega\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D$$

Az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz

$$DI: \mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\vartheta}) \qquad FI: \mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega)$$

Laplace-transzformáció

(Z-transzformáció)

$$DI: X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} \qquad FI: X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]q^k\} = \frac{z}{z-q} \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{pt}\} = \frac{1}{s-p}$$

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k-r]x[k-r]\} = z^{-r}X(z) \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t-T)x(t-T)\} = e^{-sT}X(s)$$

$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = zX(z) - x[0]z \qquad \mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(-0)$$

Jelek leírása a frekvencia- és a komplex frekvenciatartományban

$$X(e^{j\vartheta}) = X(z)\big|_{z=e^{j\vartheta}}, \text{ ha } x[k]=0,\ k\in\mathbb{Z}_- \text{ és } \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]| < \infty$$

$$X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}, \text{ ha } x(t)=0,\ t\in\mathbb{R}_- \text{ és } \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$$

Átviteli függvény

$$DI: H(z) = \mathcal{Z}\{h[k]\} \qquad FI: H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$H(z) = \underline{C}^T[z\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D \qquad H(s) = \underline{C}^T[s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D$$

Átviteli függvény és átviteli karakterisztika

GV-stabil, kauzális rendszerek esetén:

DI: $H(z) = H(e^{j\vartheta})\big|_{e^{j\vartheta}=z} \Longleftrightarrow H(e^{j\vartheta}) = H(z)\big|_{z=e^{j\vartheta}}$

FI: $H(s) = H(j\omega)\big|_{j\omega=s} \Longleftrightarrow H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$

GV stabilis rendszer $\Leftrightarrow$ DI: $|q_i| < 1$; FI: $Re\{p_i\} < 0$

q_i - átviteli függvény nevezőjének gyökei (pólusok)