INFOANALÍZIS2 6.SZIGORLAT

2016 december 19.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) := y\sqrt{x^2 + y^2}$ függvény parciális deriváltjait az origóban. Totálisan deriválható-e az origóban?

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{e^y - 1}{y} \, dy \, dx.$$

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet (alkalmazzuk az $u := y^3$ helyettesítést)

$$y' + 2y = \frac{x}{y^2}.$$

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{a^{n+1}}, \qquad a \neq 0$$

1. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) := y\sqrt{x^2 + y^2}$ függvény parciális deriváltjait az origóban. Totálisan deriválható-e az origóban?

Megoldás. $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$f(x, 0) = 0.$$

Ezért $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$f_x'(0, 0) = 0.$$

Továbbá, $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$f(0, y) = y|y| = \begin{cases} y^2, & y \geq 0, \\ -y^2, & y \leq 0. \end{cases}$$

Ezért $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$f_y'(0, 0) = 0.$$

A totális deriválhatóságot a definíció segítségével tudjuk megvizsgálni. $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x'(0, 0)x + f_y'(0, 0)y + r(x, y),$$

ahol $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

A mi esetünkben $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$r(x, y) = f(x, y).$$

$\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0.$$

Tehát f totálisan differenciálható az origóban. $\boxed{\mathbf{1p}}$ ■

---

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{e^y - 1}{y} \, dy \, dx.$$

Megoldás. Az integrálási tartomány egy derékszögű háromszög. $\boxed{\mathbf{2p}}$ Az integrálás határainak felcserélésével $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{e^y - 1}{y} \, dx \, dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 \frac{e^y - 1}{y} [x]_{x=0}^y \, dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_0^1 e^y - 1 \, dy = e - 2 \boxed{\mathbf{2p}}$$ ■

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet (alkalmazzuk az $u := y^3$ helyettesítést)

$$y' + 2y = \frac{x}{y^2}.$$

Megoldás. Az eredeti egyenletből $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$3y^2y' + 6y^3 = 3x.$$

Alkalmazva az $u := y^3$ helyettesítést kapjuk $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$u' + 6u = 3x.$$

A megoldóképlet alapján ($p(x) = 6$, $q(x) = 3x$) $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$u(x) = e^{-6x}\left(\int 3xe^{6x}\,dx + c\right).$$

Parciális integrálással ($f := 3x$, $g' := e^{6x}$) kapjuk $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\int 3xe^{6x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{6x} - \frac{1}{12}e^{6x}.$$

Tehát $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$u(x) = ce^{-6x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12},$$

melyből $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y(x) = \sqrt[3]{ce^{-6x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}}. \quad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

Megoldás. Mivel $|\frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n}$ $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sorozat minden x esetén konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$, és a határfüggvény az azonosan 0 függvény $\boxed{\mathbf{1p}}$.

Mivel minden x-re és pozitív ε-ra, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, akkor $|\frac{\sin nx}{n} - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül $\boxed{\mathbf{3p}}$, a függvénysorozat egyenletesen konvergens az egész konvergenciatartományán $\boxed{\mathbf{2p}}$. ■

---

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{a^{n+1}}, \qquad a \neq 0$$

Megoldás. Konvergenciasugár-képlettel $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \lim \sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{a^{n+1}}\right|} \overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \lim \frac{1}{|a|} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{|a|}} \overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \frac{1}{|a|}.$$

Ennek reciproka, vagyis a konvergenciasugár $|a|$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, a hatványsor középpontja pedig $x_0 = 0$ $\boxed{\mathbf{1p}}$. Ha $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, azaz $-|a| < x < |a|$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $\left|\frac{x}{a}\right| > 1$, akkor a sor divergens.

A végpontokban:

Ha $x = a$, a $\sum_0^{\infty} \frac{n+1}{a}$ sor $\boxed{\mathbf{1p}}$, ha $x = -a$, a $\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{a}$ sor $\boxed{\mathbf{1p}}$ nyilvánvalóan divergens, hiszen pl. tagjai nem tartanak 0-hoz. ■