INFOANALÍZIS2 2.ZH

2016 november 11.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x, \text{ és } y = x^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az origóban a függvénynek nemcsak a parciális deriváltjai léteznek, hanem minden irányban van iránymenti deriváltja.

2. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Írjuk fel a parciális deriváltfüggvényeket!

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{n} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3 3^n}.$$

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{ha } 0<x,\ \text{és } y=x^2\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az origóban a függvénynek nemcsak a parciális deriváltjai léteznek, hanem minden irányban van iránymenti deriváltja.

Megoldás. Az origóhoz az $y=mx$ egyenes mentén közelítve $\boxed{\mathbf{2p}}$ az iránymenti derivált $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{1+m^2}},\frac{mh}{\sqrt{1+m^2}}\right)-0}{h}\overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=}0,$$

ugyanis $m\le 0$ esetén a függvény azonosan 0 $\boxed{\mathbf{2p}}$, pozitív m esetén pedig a $h<m$ értékekre azonosan 0 $\boxed{\mathbf{2p}}$.

---

2. Feladat. Határozzuk meg az f parciális deriváltjait ahol léteznek.

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Megoldás. Ha $(x,y)\neq(0,0)$ akkor $\boxed{\mathbf{3+3p}}$

$$f'_x(x,y)=\frac{6x^2(x^2+y^2)-(2x^3-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{-2y(x^2+y^2)-(2x^3-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ha $(x,y)=(0,0)$ akkor $\boxed{\mathbf{2+2p}}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{x^2}}{x}=2,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{y^2}{y^2}}{y}=\nexists. \quad \blacksquare$$

---

3. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Írjuk fel a parciális deriváltfüggvényeket!

Megoldás. Az origó kivételével minden pontnak van olyan környezete, ahol az első sor képlete érvényes, így formálisan deriválhatunk. $\boxed{\mathbf{2p}}$
Az origóban, ha $x = 0$, akkor $f(0,y) = y$, így az y szerinti parciális derivált 1, $\boxed{\mathbf{1p}}$
ha $y = 0$, akkor $f(x,0) = -x$, így az x szerinti parciális derivált -1. $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{-x(x^3+3xy^2+2y^3)}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \boxed{\mathbf{2p}} \\ -1 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \boxed{\mathbf{1p}} \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^3+3x^2y+2x^3)}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \boxed{\mathbf{2p}} \\ 1 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \boxed{\mathbf{1p}} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{n} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

Megoldás. Mivel $f_n(0) = 0$, és

$$\left| \frac{1}{x} \sin \frac{x}{n} \right| = \left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n} n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

a sorozat minden x esetén konvergens, és a határfüggvény az azonosan 0 függvény. $\boxed{\mathbf{5p}}$
Mivel minden x-re és pozitív ε-ra $\left| \frac{1}{x} \sin \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, a függvénysorozat egyenletesen konvergens az egész konvergenciatartományán. $\boxed{\mathbf{5p}}$ $\blacksquare$

---

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3 3^n}.$$

Megoldás. Mivel $\boxed{\textbf{2p}}$

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^3 3^n}}} = 3$$

ezért konvergens a $(-6, 0)$ intervallumon. $\boxed{\textbf{2p}}$ A végpontokban:
$x = -6$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3},$$

ami (abszolút) konvergens. $\boxed{\textbf{2p}}$
$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

ami (abszolút) konvergens. $\boxed{\textbf{2p}}$
A konvergenciatartomány $[-6, 0]$. $\boxed{\textbf{2p}}$ ■