Analízis PróbaZH
2001. október 8.
Fritzné kurzus

1. feladat (13 pont)
Számítsa ki a következő kifejezéseket:
a) $\left[(\arccos 4x^2)^3 + \cos \frac{2x+3}{x^5+2x^3}\right]' \;=\; ?$ Hol differenciálható a kifejezés?
b) $\left[(\ln \sin x^2) 3x^3\right]' \;=\; ?, \quad x \in (0,1)$

2. feladat (8 pont)
A definíció alapján határozza meg $f(x) = 2x^2 + 1$ deriváltját!

3. feladat (13 pont)
$y = f(x)$ folytonosan differenciálható és kielégíti az $(x-1)^2 y + 2x + y = 6$ implicit függvénykapcsolatot, $f(2) = 1$. Írja fel az f $x_0 = 2$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

4. feladat (12 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2+6x+9)}{|x+1|(x+4)^2(x+3)}$$

5. feladat (8 pont)
Mely nyílt intervallumokon nő ill. csökken az $y = \operatorname{arctg}(2x^2+3x)$?

6. feladat (12 pont)
Mutassa meg, hogy az $f(x) = \arccos(4x-1) + 2\pi$ függvénynek létezik az $f^{-1}(x)$ inverze! Adja meg ezen inverzfüggvényt, annak értelmezési tartományát, értékkészletét!
($f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$)

7. feladat (12 pont)
Számítsa ki a következő határértékeket!
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-5} \;=\; ?$
b) $\lim\limits_{x\to 5-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-5} \;=\; ?$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^3+1}{x^2+2x} \;=\; ?$

8. feladat (8 pont)
A határérték definíciója alapján bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 2 = \infty$$

9. feladat (7 pont)
Számítsa ki a következő határértéket:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{tg}^2(2x-4)}{\cos(x-2)-1}$$

10. feladat (7 pont)
Adja meg az m paraméter értékét úgy, hogy az alábbi függvény folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{ha } x > 1 \\ 3x+m & \text{ha } x \le 1 \end{cases}$$

FRITZNÉ

① [8] a, $3 \cdot (\arccos 4x^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(4x^2)^2}}\right) \cdot 8x + \left(-\sin\frac{2x+3}{x^5+2x^3}\right) \cdot \frac{2(x^5+2x^3)-(5x^4+6x^2)(2x+3)}{(x^5+2x^3)^2}$

deriválás (5)

hol diffható:

$-1 \leq 4x^2 \leq 1$

$0 \leq 4x^2 \leq 1$

$0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$x^5+2x^3 \neq 0$

$x^3(x^2+2) \neq 0$

$x \neq 0$

$\boxed{0 < x \leq \frac{1}{2}}$ (3)

[5] b, $\frac{1}{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x \cdot 3x^3 + 9x^2 \ln \sin x^2$ (5)

② [8] def.: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x_0+h)^2+1-2x_0^2-1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2x_0^2}+4x_0h+h^2\cancel{+1}-\cancel{2x_0^2}\cancel{-1}}{h} = \lim_{h\to 0} 4x_0+h = 4x_0$

③ [13] Ell (koordináták kielégítik): $1 \cdot 1+4+1=6$

Der. $2(x-1)y(x)+(x-1)^2y'(x)+2+y'(x)=\emptyset$ (5)

Behely. $2\cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot y'(2)+2+y'(2)=\emptyset$

$4+2y'(2)=\emptyset$ (4)

$y'(2)=-2$

érintőegyenes: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (4)

$y=1-2(x-2)$

④ [12] $x=-1$ $\lim_{x\to -1^+} (+1)\frac{4}{9\cdot(-2)} = -\frac{2}{9}$

$\frac{(x+1)}{|x+1|}$

$\lim_{x\to -1^-} (-1)\frac{4}{9(-2)} = \frac{2}{9}$

=> I. fajú véges ugrás (4)

$x=-4$ $\lim_{x\to -4} \frac{1}{(x+4)^2} \cdot \ldots = \infty$ => II. fajú (4)

$\left(\begin{matrix}-4^+ & 0^+ \\ -4^- & 0^-\end{matrix}\right) \to 0$ négyzetre miatt

$x=-3$ $\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)^2}{\cancel{x+3}} \ldots = 0$ => I fajú megszüntethető szakadás (4)

5 [8]

$$y' = \frac{1}{1+(2x^2+3x)^2}\cdot(4x+3)$$
≥ 0

$y'>0 \Rightarrow$ szig. m. nő
$y'<0 \Rightarrow$ szig. m. csökken (3)

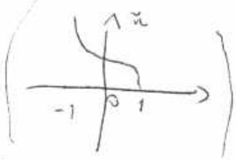
$4x+3>0$
$4x>-3$
$x>-\frac{3}{4} \rightarrow y'>0 \Rightarrow$ szig. m. nő
$4x+3<0 \rightarrow y'<0 \Rightarrow$ szig. m. csökken
$x<-\frac{3}{4}$

6 [12] invert: $x = \arccos(4y-1)+2\pi$ — létezik: arccos szig. mon. $+2\pi$ szintén (2)

$\cos(x-2\pi) = 4y-1$

$$y = \frac{\cos(x-2\pi)+1}{4} = f^{-1}(x) \quad (3)$$

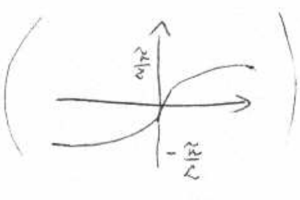
$\left.\begin{array}{l} -1 \leq 4x-1 \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \mathcal{D}_f = \mathcal{R}_{f^{-1}} = [0, \frac{1}{2}]$ (3)



$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \arccos(4y-1) \leq \pi \\ \cancel{0 \leq x-2\pi)} \\ 2\pi \leq 2\pi+\arccos(4y-1) \leq 3\pi \end{array}\right\} \mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} = [2\pi, 3\pi]$ (1)

7
a, [1] $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{\underbrace{x-5}_{\to-\infty}} \to 0 = (\operatorname{arctg} 0) = 0$

b, [1] $\lim_{x\to5^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{\underbrace{x-5}_{5^-\ \to 0^-}} \to -\infty = -\frac{\pi}{2}$



c, [1] $\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(x+\frac{1}{x^2})^{\to 0}}{\cancel{x^2}(1+\frac{2}{x})_{\to 0}} = \frac{\pi}{2}$

8 [18] $x^3-3x^2+5 > x^3-3x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \underbrace{\frac{1}{2}x^3-3x^2} > \frac{1}{2}x^3 > \Omega$

$\underset{\underset{0}{\vee\!\!|}}{x^2}(\frac{1}{2}x-3) \geq 0$ — $x^3 > 2\Omega$

$\frac{1}{2}x-3 \geq 0$ — $x > \sqrt[3]{2\Omega}$

$x \geq 6 \longrightarrow$

$N = \max(6, \sqrt[3]{2\Omega})$

(def. $f(x) > \Omega$, ha $x > N$)

(9) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{\sin^2(2x-4)}{\cos^2(2x-4)}}_{\downarrow\ 1} \cdot \frac{\cos(x-2)+1^{\nearrow 2}}{\underbrace{\cos^2(x-2)-1}_{-\sin^2(x-2)}} = \underbrace{\frac{\sin^2(2x-4)}{(2x-4)^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{(x-2)^2}{\sin^2(x-2)}}_{\to 1} (-2) \frac{(2x-4)^2}{(x-2)^2} =$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} (-2) \frac{4\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}} = -8$$

(10) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3x+m = 3$$

$3+m$

$\downarrow$

$m=0$

folytonos ha a kettő megegyezik