Kristóf János

A matematikai analízis elemei
III

Tartalomjegyzék

simasága; paraméterezés modulusának transzformációs tulajdonsága; paraméterezés modulusának integrálelemléleti jelentősége; szétvágási lemma; Riemann-sokaság felületi mértékének és felszínének értelmezése; az euklidészi mértékek; a felületi mérték szerinti helyettesítéses integrálás tétele; a felületi mérték szerinti integrálhatóság kritériumai; kompakt tartójú folytonos függvények integrálhatósága felületi mérték szerint; szintfelületek kollektív paraméterezése euklidészi térben; egységosztás-tétel részsokaságokra; a térfogati és felületi integrálok kapcsolata; a Cavalieri-elv)

Függelék. Topologikus terek

3. Kompakt és lokálisan kompakt terek (495)

(Kompakt halmazok és kompakt terek; centrált halmazok és a kompaktság jellemzése; Cantor-féle közösrész-tétel; Bolzano-Weierstrass-tétel; Tyihonov-tétel; kompakt téren folytonos függvények tulajdonságai; Weierstrass-féle maximum-minimum elv; alulról- és felülről félig folytonos függvények; alulról félig folytonos függvény folytonos approximációja metrizálható téren; kompakt terek metrizálhatóságának jellemzése; lokálisan kompakt terek; kompakt tér normálissága; lokálisan kompakt halmazok jellemzése; az egypontú kompaktifikáció egzisztenciája és unicitása; Uriszon-tétel, Tietze-tétel és egységosztás-tétel lokálisan kompakt terekre; Baire-terek és a Baire-féle kategóriatétel; parakompakt terek; parakompakt Hausdorff-terek normálissága; egységosztás-tétel parakompakt terekre; σ-kompakt terek; lokálisan kompakt tér parakompaktságának jellemzése; lokálisan kompakt tér metrizálhatóságának jellemzése)

4. Folytonos függvények lokálisan kompakt terek felett (525)

(Általánosított függvénysorozat pontonkénti, egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája; folytonos függvények lokálisan egyenletes limeszének folytonossága; végtelenben eltűnő folytonos függvények jellemzése; lineáris függvényhálók; Stone-tétel; Stone-Weierstrass-tétel; Stone-Weierstrass-tétel lokálisan kompakt terekre; Dini-tétel; metrizálható kompakt téren folytonos függvények terének szeparabilitása)

XI. HOLOMORF FÜGGVÉNYEK

Ebben a fejezetben a komplex változós, komplex Banach-terekbe ható differenciálható (másnéven *holomorf*) függvények speciális tulajdonságaival foglalkozunk. Ennek a témakörnek és a többdimenziós általánosításainak fontos alkalmazásai vannak a matematikában (például a komplex Banach-terek között ható folytonos lineáris operátorok területén, vagy a parciális differenciálegyenletek elméletében), és az elméleti fizikában (például a hidrodinamikában, vagy a fizikai térelméletekben). A többváltozós komplex függvénytan természetes folytatása az egyváltozós holomorf függvények elméletének, ezért a többdimenziós általánosítás feltételezi az egydimenziós speciális eset ismeretét.

A VII. fejezetben láttuk, hogy a valós normált terek, illetve a komplex normált terek között ható függvények differenciálhatóságának fogalma formálisan egyszerre megadható, és sok nemtriviális differenciális tulajdonság ugyanúgy érvényes, a skalárterek választásától függetlenül. Ezért egyáltalán nem magától értetődő az, hogy komplex Banach-terek között ható függvényekre a differenciálhatóság feltétele sokkal erősebb, mint valós Banach-terek esetében. Látni fogjuk, hogy a X. fejezetben tárgyalt geometriai integrálelmélet egyfajta továbbfejlesztése (a *komplex vonalintegrálás*) szoltáltatja azt az eszközt, amely lehetővé teszi a valós és a komplex differenciálható függvények tulajdonságai között fennálló lényeges különbségek feltárását.

Komplex normált terek között ható függvény egyben az alulfekvő valós normált terek között ható függvénynek is tekinthető, ezért ilyen függvényre kétféle differenciálás-fogalom is értelmes. A $\mathbb{C}$-differenciálhatóság és az $\mathbb{R}$-differenciálhatóság közötti kapcsolatot vizsgáljuk meg az első pontban. Az $\mathbb{R}$-differenciálható függvények $\mathbb{C}$-differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltételét fejezi ki a *Cauchy-Riemann egyenlet*.

Látni fogjuk, hogy a holomorf függvények *primitív függvényeinek* létezése döntő szerepet játszik a holomorf függvények speciális tulajdonságait illetően. A második pontban bevezetjük a *szakasz menti integrál* fogalmát, és ennek segítségével bebizonyítjuk a Newton-Leibniz-tétel komplex formáját. A X. fejezet 2. pontjában igazoltuk, hogy az $\mathbb{R}$ egy nyílt intervallumán értelmezett, valós Banach-térbe ható folytonos függvénynek szükségképpen létezik primitív függvénye; ez a Newton-Leibniz-tétel valós formája. Ezzel szemben a $\mathbb{C}$ egy nyílt csillaghalmazán értelmezett, komplex Banach-térbe ható folytonos függvénynek csak egy rendkívül speciális integrális mellékfeltétel teljesülése esetén létezik primitív függvénye. Itt még nem látható világosan, hogy ez az integrális feltétel mennyire erős követelmény; csak az nyilvánvaló, hogy ez nem teljesül automatikusan minden folytonos függvényre. Később kiderül (a *Morera-tételből*), hogy a Newton-Leibniz-tétel komplex formájában szereplő integrális mellékfeltétel *ekvivalens* a függvény holomorfitásával a nyílt csillaghalmazon. A *Goursat-lemma* szerint a holomorfitás *elégséges* a szóbanforgó integrális feltétel teljesüléséhez. Ennek fontos következménye, hogy minden holomorf függvénynek *lokálisan* léteznek primitív függvényei.

A szakasz menti integrál alkalmazásával - közvetlenül - csak egészen speciális, lokális természetű állítások bizonyíthatók. A holomorf függvényekkel kapcsolatos erösebb, globális eredmények származtatásához szükség van a szakasz menti integrál fogalmának általánosítására. Így jutunk el a *komplex vonalintegrálhoz*, amiről a harmadik pontban lesz szó. E fogalom pontos értelmezése szempontjából egészen lényeges az "integrációs út" egzakt definícója. Az általunk választott általánosság szintjén mind elméleti, mind gyakorlati szempontból kielégítő a *szakaszonként* C^1-*osztályú ívek* menti vonalintegrálás fogalma. Itt vezetjük be az ilyen típusú ívek *indexfüggvényét*, ami gyakran előfordul bizonyos vonalintegrálokkal kapcsolatos formulákban.

A Cauchy-integráltétel és a Cauchy-integrálformulák centrális jelentőségűek a holomorf függvények elméletében. A komplex függvénytan valamennyi nemtriviális tétele, legalábbis közvetve, hivatkozik ezekre. Az ötödik pontban bemutatjuk a Cauchy-integráltétel néhány elemi következményét. Ezek közül kiemelkedik az az elvi fontosságú állítás, hogy egy nyílt halmazon $\mathbb{C}$-differenciálható függvény $\mathbb{C}$-analitikus az adott nyílt halmaz minden pontjában. Kiderül, hogy egy holomorf függvény adott pontbeli Taylor-sorának összegfüggvénye a függvényt állítja elő a pontnak még azon a legnagyobb nyílt gömbi környezetén is, amely része a definíciós tartománynak; ez a Taylor-sorfejtés *maximalitása*, ami valós analitikus függvényekre általában nem igaz. Megmutatjuk, hogy egyszeresen összefüggő halmazon értelmezett holomorf függvénynek létezik primitív függvénye, és bebizonyítjuk a *Morera-tételt*, amely a holomorfitás integrálelméleti jellemzését adja.

Az általános differenciálelméletben (a VII. fejezetben) láttuk, hogy a véges növekmények formulája sok nemtriviális következménnyel jár. A véges növekmények formulája felső becslést ad egy differenciálható függvény értékeinek távolságára, a defiváltfüggvény segítségével. Ezzel szemben, holomorf függvények deriváltjainak normáját felülről lehet becsülni a függvényértékek normájával; ennek a lényegesen nemtriviális állításnak a pontos formája a *Cauchy-egyenlőtlenség*. A Cauchy-egyenlőtlenség alapján könnyen igazolhatjuk a *Liouville-tételt*, amelyből az algebra alaptételének egészen rövid, és a korábbi bizonyítástól független, bizonyítása nyerhető. Ugyancsak a Cauchy-egyenlőtlenség alkalmazása vezet arra az eredményre, hogy holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozatának limeszfüggvénye szükségképpen holomorf; ez a *Weierstrass-féle konvergencia-tétel*.

Az utolsó pontban, a holomorf függvények Taylor-sorfejtésének általánosításaként, bevezetjük a *Laurent-sorfejtés* fogalmát, és ezzel kapcsolatban értelmezzük a *meromorf* függvényeket, amelyek a meromorf függvények legfontosabb speciális típusát képviselik. A meromorf függvények komplex vonalintegráljainak kiszámítása szempontjából érdekes a *reziduum-tétel*, amelynek egy viszonylag egyszerű, de a gyakorlatban jól hasznosítható formáját mutatjuk be.

Végül hangsúlyozzuk, hogy ebben a fejezetben a holomorf függvények elméletének csak a legelemibb, bevezető részét tárgyaljuk. A gyakorlatok anyagában megtalálató néhány könnyen származtatható eredmény, például a holomorf függvények gyökeinek izoláltságáról, a *Mittag-Leffler* problémakörről, a holomorf függvények *lokális maximumának* elvéről, valamint a *Riemann-féle zéta-függvényről*. Érintünk néhány feladattípust, amely jól szemlélteti a Cauchy-integrálformulák és a reziduum-tétel alkalmazhatóságát az improprius Lebesgue-integrálok kiszámítására. A többváltozós függvények igen nehéz elméletéből bemutatjuk a *Hartogs-tételet*, valamint ennek általánosításaként, a komplex normált térben értelmezett és komplex Banach-térbe ható függvények *holomorfi-*

tásának, *skaláris holomorfitásának*, *iránymenti holomorfitásának* és *analitikusságának* ekvivalenciáját. Megadjuk a *Cauchy-egyenlőtlenség* végtelen dimenziós általánosítását, és annak következményeként bemutatjuk a *Cauchy-féle maximum-elvet*, valamint az általános *Weierstrass-féle konvergencia-tételt*. Mélyebb eredmények származtatásához az általános topológia, a geometriai integrálelmélet, és a funkcionálanalízis eddig nem érintett, lényegesen nemtriviális területeinek ismerete szükséges.

Irodalomjegyzék

1. L. Schwartz, *Analyse mathématique*, Hermann, Paris, 1967.

2. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Variétés différentielles et analitiques, Fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1967-1971.

3. J. Duncan, *Bevezetés a komplex függvénytanba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

4. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill Book, New-York, 1974.

5. J. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1975.

6. Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Функции одного переменного*, Наука, Москва, 1969.

7. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Co., New-York, 1966.

1. Cauchy-Riemann egyenlet

Legyen E komplex vektortér. Az E halmaz az E feletti összeadás-függvénnyel, és a $\mathbb{C} \times E \to E$ leképezés $\mathbb{R} \times E$-re vett leszűkítésével ellátva *valós vektortér*; ezt nevezzük az E *alatt fekvő valós vektortérnek* és $E_{\mathbb{R}}$-rel jelöljük (VI. fejezet, 2. pont). Tehát az E és $E_{\mathbb{R}}$ vektorterek alaphalmazai egyenlők, továbbá az E bármely két elemének az összege ugyanaz mindkét vektortérben, és az E bármely elemének a szorzata bármelyik valós számmal megegyezik mindkét vektortérben.

Legyenek E és F komplex vektorterek. Ekkor az alulfekvő valós vektorterek definíciója alapján világos, hogy $\mathbf{L}(E;F) \subseteq \mathbf{L}(E_{\mathbb{R}};F_{\mathbb{R}})$ teljesül. Az $\mathbf{L}(E;F)$ elemeit gyakran $\mathbb{C}$-*lineáris*, míg az $\mathbf{L}(E_{\mathbb{R}};F_{\mathbb{R}})$ elemeit $\mathbb{R}$-*lineáris* operátoroknak nevezzük; tehát az mondható, hogy komplex vektorterek között ható $\mathbb{C}$-lineáris operátor szükségképpen $\mathbb{R}$-lineáris. Ez a következtetés nem fordítható meg. Például az $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konjugálás-függvény nyilvánvalóan $\mathbb{R}$-lineáris, de nem $\mathbb{C}$-lineáris. Az **1.** gyakorlatban leírjuk az összes nem $\mathbb{C}$-lineáris, de $\mathbb{R}$-lineáris $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt. A következő állításban szükséges és elégséges feltételt adunk ahhoz, hogy egy $\mathbb{R}$-lineáris operátor $\mathbb{C}$-lineáris legyen.

Állítás. Legyenek E és F komplex vektorterek. Egy $u : E \to F$ függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-lineáris, ha $\mathbb{R}$-lineáris, és minden $x \in E$ esetén

$$u(i.x) = i.u(x)$$

teljesül. Ha $(e_j)_{j\in J}$ algebrai bázis az E komplex vektortérben, akkor az $u : E \to F$ függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-lineáris, ha $\mathbb{R}$-lineáris, és minden $j \in J$ esetén

$$u(i.e_j) = i.u(e_j)$$

teljesül.

Bizonyítás. Mindkét feltétel nyilvánvalóan szükséges. Az első feltétel elégségességének bizonyításához legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $x \in E$ tetszőlegesek; ekkor az u additivitása, $\mathbb{R}$-homogenitása, és a feltétel alapján

$$u((\alpha + i\beta).x) = u(\alpha.x + (i\beta).x) = u(\alpha.x) + u((i\beta).x) = \alpha.u(x) + u(\beta.(i.x)) =$$
$$= \alpha.u(x) + \beta.u(i.x) = \alpha.u(x) + \beta.(i.u(x)) = \alpha.u(x) + (i\beta).u(x) = (\alpha + i\beta).u(x),$$

tehát minden $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in E$ esetén $u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$, így az u leképezés $\mathbb{C}$-lineáris. Tegyük fel, hogy $(e_j)_{j\in J}$ algebrai bázis az E komplex vektortérben, és minden $j \in J$ esetén $u(i.e_j) = i.u(e_j)$, továbbá legyen u $\mathbb{R}$-lineáris. Az előzőek egyenlőség-láncot alkalmazva $j \in J$ esetén x helyére e_j-t helyettesítve azt kapjuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{C}$ és $j \in J$ esetén $u(\lambda.e_j) = \lambda.u(e_j)$. Tehát ha $x \in E$ tetszőleges, és $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^{(J)}$ az a rendszer, amelyre $x = \sum_{j\in J} \lambda_j.e_j$, akkor minden $\sigma \in \mathbb{C}$ esetén

$$u(\sigma.x) = u\left(\sigma.\sum_{j\in J}\lambda_j.e_j\right) = u\left(\sum_{j\in J}(\sigma\lambda_j).e_j\right) = \sum_{j\in J} u((\sigma\lambda_j).e_j) =$$
$$= \sum_{j\in J}(\sigma\lambda_j)u(e_j) = \sum_{j\in J}\sigma.(\lambda_j.u(e_j)) = \sigma.\sum_{j\in J}\lambda_j.u(e_j) = \sigma\sum_{j\in J}u(\lambda_j.e_j) =$$
$$= \sigma.u\left(\sum_{j\in J}\sigma_j.e_j\right) = \sigma.u(x),$$

tehát az u függvény $\mathbb{C}$-lineáris. ■

Legyen E komplex normált tér, és jelölje $\|\cdot\|$ az E normáját. Az alulfekvő valós vektortér definíciója alapján nyilvánvaló, hogy ekkor $\|\cdot\|$ norma az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett is, tehát $E_{\mathbb{R}}$ az E normájával ellátva valós normált tér; ezt nevezzük az E komplex normált tér *alatt fekvő valós normált térnek*, és ezt is az $E_{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük. Tekintettel arra, hogy az E és $E_{\mathbb{R}}$ vektorterek alaphalmazai és normái ugyanazok, a normák által generált metrikák is egyenlők, így topológiai szempontból az E komplex normált tér és az alulfekvő $E_{\mathbb{R}}$ valós normált tér azonosak. De vigyázzunk arra, hogy ha E komplex vektortér, akkor létezhet olyan $E_{\mathbb{R}}$ feletti norma, amely nem norma az E komplex vektortér felett (**2**. gyakorlat).

Legyenek most E és F komplex normált terek. Ha $f : E \rightarrowtail F$ függvény, akkor $f : E_{\mathbb{R}} \rightarrowtail F_{\mathbb{R}}$ függvény is, tehát van annak értelme, hogy f az $\mathfrak{a} \in E$ pontban differenciálható az E és F komplex normált terek között (vagyis f az $\mathfrak{a}$-ban *$\mathbb{C}$-differenciálható*), és az is értelmes, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban differenciálható az $E_{\mathbb{R}}$ és $F_{\mathbb{R}}$ valós normált terek között (vagyis f az $\mathfrak{a}$-ban *$\mathbb{R}$-differenciálható*). Megállapodunk abban, hogy ha az f függvény $\mathbb{R}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor a deriváltját $(Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$ jelöli; tehát ez $E_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ folytonos lineáris operátor, vagyis $E \to F$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor. Ugyanakkor, ha az f függvény $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor a deriváltját $(Df)_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a})$ jelöli; tehát ez $E \to F$ folytonos lineáris operátor, vagyis $E \to F$ folytonos $\mathbb{C}$-lineáris operátor. Az adott pontbeli $\mathbb{C}$-differenciálhatóság és $\mathbb{R}$-differenciálhatóság kapcsolatát írja le a következő állítás.

Állítás. Legyenek E és F komplex normált terek, $f : E \rightarrowtail F$ függvény, és $\mathfrak{a} \in E$. Az f függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, ha $\mathbb{R}$-differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és a $(Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$ operátor $\mathbb{C}$-lineáris. Ha az f függvény $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor $(Df)_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}) = (Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy a $Dom(f)$ halmaz topologikus belseje ugyanaz az E komplex normált térben, mint az $E_{\mathbb{R}}$ valós normált térben.

Tegyük fel, hogy az f függvény $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. Ekkor a $(Df)_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}) : E \to F$ leképezés folytonos $\mathbb{C}$-lineáris operátor és

$$\lim_{x\to\mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((Df)_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}))(x-\mathfrak{a})}{\|x-\mathfrak{a}\|} = 0.$$

Ekkor a $(Df)_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}) : E \to F$ leképezés folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor is, ezért a fenti határérték-egyenlőség miatt az f függvény $\mathbb{R}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és láthatóan $(Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}) = (Df)_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a})$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az f függvény $\mathbb{R}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban, és a $(Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$ operátor $\mathbb{C}$-lineáris. Ekkor

$$\lim_{x \to \mathfrak{a}} \frac{f(x) - f(\mathfrak{a}) - ((Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|} = 0,$$

tehát az f függvény $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a}$ pontban. ■

Tétel. Legyenek E és F komplex normált terek. Az $f : E \rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, ha $\mathbb{R}$-differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $x \in E$ esetén

$$((Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}))(i.x) = i.((Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}))(x)$$

teljesül (*Cauchy-Riemann egyenlet*). Ha $(e_j)_{j \in J}$ algebrai bázis az E komplex vektortérben, akkor az $f : E \rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a} \in E$ pontban, ha $\mathbb{R}$-differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $j \in J$ esetén

$$((Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}))(i.e_j) = i.((Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}))(e_j)$$

teljesül.

Bizonyítás. A két előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

Következmény. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény, és $f_1 := \mathfrak{Re} \circ f$, valamint $f_2 := \mathfrak{Im} \circ f$ (tehát $f = f_1 + i.f_2$). Az f függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ pontban, ha $\mathbb{R}$-differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és teljesülnek az

$$(\partial_1 f_1)(\mathfrak{a}) = (\partial_2 f_2)(\mathfrak{a}),$$
$$(\partial_1 f_2)(\mathfrak{a}) = -(\partial_2 f_1)(\mathfrak{a})$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. Ha f az $\mathfrak{a}$-ban $\mathbb{R}$-differenciálható, akkor $(Df)_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$ azonosítható a

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(\mathfrak{a}) & (\partial_2 f_1)(\mathfrak{a}) \\ (\partial_1 f_2)(\mathfrak{a}) & (\partial_2 f_2)(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}$$

Jacobi-mátrixszal (VII. fejezet, 2. pont). Az első állítás alapján ez a mátrix, mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lineáris operátor, pontosan akkor $\mathbb{C}$-lineáris, ha felcserélhető az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $z \mapsto iz$ $\mathbb{R}$-lineáris operátorral. Ez utóbbi mátrixa a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix. Ezért az **1**. gyakorlat eredménye és a Cauchy-Riemann egyenlet alapján az f függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$-differenciálható az $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ pontban, ha $\mathbb{R}$-differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, valamint teljesülnek a $(\partial_1 f_1)(\mathfrak{a}) = (\partial_2 f_2)(\mathfrak{a})$ és $(\partial_1 f_2)(\mathfrak{a}) = -(\partial_2 f_1)(\mathfrak{a})$ egyenlőségek. ■

Az előző állítás alkalmazásával könnyen felírhatók olyan $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények, amelyek $\mathbb{R}$-analitikusak (vagyis analitikusak a $\mathbb{C}$ alatt fekvő valós Banach-téren), de sehol sem $\mathbb{C}$-differenciálhatók (**1**. gyakorlat).

Elnevezés. A komplex normált terek között ható $\mathbb{C}$-differenciálható függvényeket *holomorf* függvényeknek nevezzük.

Gyakorlatok

1. Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, és az $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ mátrixot tekintsük $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris operátornak, vagyis $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineáris operátornak. Ez pontosan akkor $\mathbb{C}$-lineáris, ha $a = d$ és $c = -b$. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezés megegyezik a

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto (a + ib)z$$

függvénnyel, tehát az $a + ib$ komplex számmal való szorzás operátorával. Ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, és $a \neq d$, vagy $c \neq -b$, akkor az $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény $\mathbb{R}$-analitikus, de sehol sem $\mathbb{C}$-differenciálható.

2. Legyen E valós vektortér, és jelölje $E_{\mathbb{C}}$ az E komplexifikációját (IV. fejezet, 1. pont, **7**. gyakorlat), tehát $E_{\mathbb{C}}$ alaphalmaza az $E \times E$ szorzathalmaz, és minden $(x, y), (x', y') \in E \times E$, valamint $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &:= (x + x', y + y'), \\ \lambda.(x, y) &:= (\mathfrak{Re}(\lambda).x - \mathfrak{Im}(\lambda).y, \mathfrak{Im}(\lambda).x + \mathfrak{Re}(\lambda).y). \end{aligned}$$

Ha $\|\cdot\|$ norma az E valós vektortér felett és $E \neq \{0\}$, akkor az

$$E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \max(\|x\|, \|y\|)$$

leképezés *nem norma* az $E_{\mathbb{C}}$ komplex vektortér felett, de norma az $E_{\mathbb{C}}$ alatt fekvő valós vektortér (azaz $(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$) felett.

3. (*Harmonikus függvények.*) Legyen E véges dimenziós valós vektortér és $g : E \times E \to \mathbb{R}$ olyan szimmetrikus bilineáris funkcionál, amelyre az $E \to E^*$; $x \mapsto g(x, \cdot)$ leképezés bijekció (vagyis *injektív*). Azt mondjuk, hogy az $u : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény *g-harmonikus az $U \subseteq Dom(u)$ halmazon*, ha u kétszer differenciálható az U halmazon, és

$$div(grad_g(u)) = 0$$

teljesül az U halmazon (VII. fejezet, 3. pont, 4. példa). Azt mondjuk, hogy az $u : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény *g-harmonikus*, ha g-harmonikus a $Dom(u)$ halmazon. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ kétszer $\mathbb{R}$-differenciálható holomorf függvény, akkor a $\mathfrak{Re} \circ f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ és $\mathfrak{Im} \circ f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ függvények g-harmonikusak, ahol g az euklidészi skalárszorzás $\mathbb{R}^2$ felett. (Később megmutatjuk, hogy holomorf függvény szükségképpen kétszer $\mathbb{R}$-differenciálható, sőt $\mathbb{R}$-analitikus is.)

4. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és nevezzünk egy $U \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt *primitívnek*, ha minden $X : U \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényre teljesül az, hogy ha minden $j, k \in n$ esetén $\partial_j X_k = \partial_k X_j$ az U halmazon, akkor van olyan $V : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy minden $n \ni k$-ra $X_k = \partial_k V$ az U halmazon (ahol minden $k \in n$ esetén X_k az X függvény k-adik komponens-függvénye, vagyis $X_k := pr_k \circ X$). Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $U \subseteq Dom(f)$ primitív nyílt halmaz, akkor létezik olyan $g : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelyre $Dg \subseteq f$.

(**Megjegyzés**. Később bebizonyítjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ minden egyszeresen összefüggő nyílt részhalmaza primitív (5. pont, **28**. gyakorlat).)

(*Útmutatás.* Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény és $U \subseteq Dom(f)$ primitív nyílt halmaz. Legyen $f_1 := \mathfrak{Re} \circ f$, valamint $f_2 := \mathfrak{Im} \circ f$. A Cauchy-Riemann egyenlet alapján $\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2$ és $\partial_1 f_2 = -\partial_2 f_1$. Ekkor az

$$X : U \to \mathbb{R}^2; \quad z \mapsto (f_1(z), -f_2(z))$$

függvény $\mathbb{R}$-differenciálható, és

$$\partial_2 X_1 = \partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2 = \partial_1 X_2,$$

tehát az U halmaz primitivitása folytán létezik olyan $V_1 : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre $\partial_1 V_1 = X_1 = f_1$ és $\partial_2 V_1 = X_2 = -f_2$ az U halmazon. Továbbá, az

$$Y : U \to \mathbb{R}^2; \quad z \mapsto (f_2(z), f_1(z))$$

függvény $\mathbb{R}$-differenciálható, és

$$\partial_2 Y_1 = \partial_2 f_2 = \partial_1 f_1 = \partial_1 Y_2,$$

tehát az U halmaz primitivitása folytán létezik olyan $V_2 : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre $\partial_1 V_2 = Y_1 = f_2$ és $\partial_2 V_2 = Y_2 = f_1$ az U halmazon. Képezzük a

$$g : R \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto V_1(z) + iV_2(z)$$

leképezést, amely nyilvánvalóan $\mathbb{R}$-differenciálható, és az előzőek alapján $\partial_1 V_2 = f_2 = -\partial_2 V_1$ és $\partial_1 V_1 = f_1 = \partial_2 V_2$, vagyis g-re teljesül az Cauchy-Riemann-egyenlet. Ezért g holomorf függvény, és a fentiek alapján $f = Dg$ az U halmazon.)

5. Legyenek E és F komplex vektorterek, $n \in \mathbb{N}^+$, és $u : E^n \to F$ olyan szimmetrikus *valós* n-lineáris operátor (azaz $u \in \mathbf{L}_n^s(E_{\mathbb{R}}^n; F_{\mathbb{R}})$), hogy minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$u((\lambda.x)^{[n]}) = \lambda^n u(x^{[n]})$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor u szimmetrikus *komplex* n-lineáris operátor (azaz $u \in \mathbf{L}_n^s(E^n; F)$).

(*Útmutatás.* Vezessük be az

$$u_{\mathbb{C}} : E^n \to F; \quad (x_k)_{k\in n} \mapsto \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-i)^{|\varepsilon|} u((i^{\varepsilon_k} x_k)_{k\in n})$$

függvényt, ahol $\varepsilon \in \{0,1\}^n$ esetén $|\varepsilon| := \sum_{k\in n} \varepsilon_k$. Ha $\sigma : n \to n$ bijekció, akkor a

$$\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n; \quad \varepsilon \mapsto \varepsilon \circ \sigma$$

leképezés szintén bijekció. Ebből egyszerű számolással kapjuk, hogy az $u_{\mathbb{C}}$ leképezés szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy az $u_{\mathbb{C}}$ leképezés komplex n-lineáris operátor, tehát $u_{\mathbb{C}} \in \mathbf{L}_n^s(E^n; F)$. Az $u_{\mathbb{C}}$ szimmetrikussága miatt ehhez elég azt igazolni, hogy minden $\mathfrak{a} \in E^n$ esetén az $u_{\mathbb{C}} \circ in_{n-1,\mathfrak{a}} : E \to F$ leképezés $\mathbb{C}$-lineáris. Legyen tehát $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_k)_{k\in n} \in E^n$ rögzített, és minden $\varepsilon \in \{0,1\}^n$ esetén

$$\mathfrak{a}(\varepsilon) := (i^{\varepsilon_k}\mathfrak{a}_k)_{k\in n} \in E^n.$$

Továbbá, minden $\eta \in \{0,1\}^{n-1}$ esetén legyen $\eta^\circ \in \{0,1\}^n$ az a η függvény nullával vett kiterjesztése n-re. Ha $x \in E$, akkor

$$\begin{aligned}
(u_{\mathbb{C}} \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(x) &:= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-i)^{|\varepsilon|} u((i^{\varepsilon_k}(in_{n-1,\mathfrak{a}}(x))_k)_{k\in n}) = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-i)^{|\varepsilon|} (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\varepsilon)})(i^{\varepsilon_{n-1}}x) = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n;\ \varepsilon_{n-1}=0} (-i)^{|\varepsilon|} (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\varepsilon)})(x) + \\
&+ \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n;\ \varepsilon_{n-1}=1} (-i)^{|\varepsilon|} (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\varepsilon)})(ix) = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\eta\in\{0,1\}^{n-1}} (-i)^{|\eta|} (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\eta^\circ)})(x) + \\
&+ \frac{1}{2^n} \sum_{\eta\in\{0,1\}^{n-1}} (-i)^{|\eta|+1} (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\eta^\circ)})(ix) = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\eta\in\{0,1\}^{n-1}} (-i)^{|\eta|} \left((u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\eta^\circ)})(x) - i(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}(\eta^\circ)})(ix) \right).
\end{aligned}$$

Ebből azonnal látszik, hogy $x \in E$ esetén $(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(ix) = i(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(x)$, ezért az $u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}} : E \to F$ leképezés $\mathbb{C}$-lineáris. Ezután elég azt igazolni, hogy minden $E \ni x$-re $u(x^{[n]}) = u_{\mathbb{C}}(x^{[n]})$, hiszen akkor a VI. fejezet 3. pontjának utolsó állítása alapján $u = u_{\mathbb{C}}$, tehát az u leképezés $\mathbb{C}$-multilineáris.

Ehhez megmutatjuk, hogy $x \in E$ és $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén

$$u((x^{[k]}, (ix)^{[n-k]})) = i^{n-k} u(x^{[n]}),$$

ahol $(x^{[k]}, (ix)^{[n-k]}) \in E^n$ az a rendszer, amelynek j-edik komponense x, ha $j < k$, és ix, ha $k \leq j < n$. Valóban, az u-ra vonatkozó hipotézis alapján a

$$P : \mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto u(((t+i).x)^{[n]})$$

leképezés legfeljebb n-ed fokú polinomiális vektorfüggvény, ugyanis $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(t) = (t+i)^n i(x^{[n]}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k i^{n-k} u(x^{[n]}).$$

Ugyanakkor az u leképezés $\mathbb{R}$-multilinearitása és szimmetrikussága miatt $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(t) = u((t.x + i.x)^{[n]}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k u((x^{[k]}, (ix)^{[n-k]})).$$

A polinomiális vektorfüggvények együtthatóinak egyértelműségi tétele alapján ebből leolvasható, hogy minden $k \leq n$ természetes számra $u((x^{[k]}, (ix)^{[n-k]})) = i^{n-k} u(x^{[n]})$.

Ezután már könnyen belátható, hogy minden $x \in E$ esetén $u(x^{[n]}) = u_{\mathbb{C}}(x^{[n]})$, mert az u szimmetrikussága folytán

$$u_{\mathbb{C}}(x^{[n]}) := \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} (-i)^{|\varepsilon|} u((i^{\varepsilon_k} x)_{k \in n}) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \binom{n}{k} (-i)^{n-k} u((x^{[k]}, (ix)^{[n-k]})) = u(x^{[n]})$$

teljesül.)

2. Holomorf függvény primitív függvényei

Definíció. Legyen F komplex normált tér. Egy $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ leképezés *primitív függvényének* nevezünk minden olyan $g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvényt, amelyre $Dg \subseteq f$. Az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ leképezés *globális primitív függvényének* nevezzük az f minden olyan g primitív függvényét, amelyre $Dom(g) = Dom(f)$.

Legyen F komplex normált tér. Egy $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ leképezésnek sok primitív függvénye létezhet, de ha a $Dom(f)$ halmaz topologikus belseje üres, akkor az üres függvény az f egyetlen primitív függvénye. Az $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ függvénynek csakis akkor létezhet globális primitív függvénye, ha $Dom(f)$ nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben, de a következő pontban látni fogjuk, hogy van olyan $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelynek nem létezik globális primitív függvénye. Ha $Dom(f)$ összefüggő nyílt halmaz, akkor az f bármely két globális primitív függvénye csak egy additív konstansban különbözik (VII. fejezet, 4. pont).

Jelölés. Ha $a, b \in \mathbb{C}$, akkor $\gamma_{[a,b]}$ jelöli a

$$[0, 1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto a + t(b - a)$$

leképezést.

Legyenek $a, b \in \mathbb{C}$ rögzítettek, F komplex Banach-tér, és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amelyre $[a, b] \subseteq Dom(f)$. Ekkor az $f \circ \gamma_{[a,b]} : [0, 1] \to F$ leképezés folytonos függvény, hiszen $\gamma_{[a,b]}$ olyan $\mathbb{C}$-ben haladó folytonos ív, amelyre $Im(\gamma_{[a,b]}) = [a, b] \subseteq Dom(f)$. Ezért az $f \circ \gamma_{[a,b]}$ függvény integrálható a $\mu_{\mathbb{R}}$ egydimenziós Lebesgue-mérték szerint (X. fejezet, 1. pont), így értelmes a következő definíció.

Definíció. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény. Ekkor minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén, ha $[a, b] \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]} f := (b - a) \int\limits_{\mathbb{R}} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} \, d\mu_{\mathbb{R}},$$

és ezt az F-beli vektort az f függvény $[a, b]$ *szakasz menti integráljának* nevezzük.

Természetesen a definíció feltételei mellett írhatjuk azt, hogy

$$\int\limits_{[a,b]} f = (b - a) \int\limits_{[0,1]} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) \, d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= (b - a) \int\limits_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) \, d\mu_{\mathbb{R}} = (b - a) \int_0^1 \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) \, d\mu_{\mathbb{R}},$$

mert az $\mathbb{R}$ minden véges (sőt megszámlálható) részhalmaza nullhalmaz az egydimenziós Lebesgue-mérték szerint. A következő állításban összefoglaljuk a szakasz menti integrál számunkra fontos tulajdonságait.

Állítás. Legyen F komplex Banach-tér.
a) Ha $f, g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvények, $\lambda \in \mathbb{C}$, és $a, b \in \mathbb{C}$ olyan pontok, amelyekre $[a, b] \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]} (f+g) = \int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[a,b]} g,$$

$$\int\limits_{[a,b]} (\lambda.f) = \lambda. \int\limits_{[a,b]} f,$$

$$\left\| \int\limits_{[a,b]} f \right\| \leq |b-a| \sup_{z \in [a,b]} \|f(z)\|.$$

b) Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény és $a, b \in \mathbb{C}$ olyan pontok, hogy $[a, b] \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{[b,a]} f = - \int\limits_{[a,b]} f,$$

és minden $c \in [a, b]$ esetén

$$\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_{[a,c]} f + \int\limits_{[c,b]} f.$$

c) Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, $g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ primitív függvénye f-nek, és $a, b \in \mathbb{C}$ olyan pontok, amelyekre $[a, b] \subseteq Dom(g)$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]} f = g(b) - g(a).$$

Bizonyítás. a) Legyenek $f, g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvények, $\lambda \in \mathbb{C}$, és $a, b \in \mathbb{C}$ olyan pontok, amelyekre $[a, b] \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$. Nyilvánvaló. hogy $(f+g) \circ \gamma_{[a,b]} = f \circ \gamma_{[a,b]} + g \circ \gamma_{[a,b]}$ és $(\lambda.f) \circ \gamma_{[a,b]} = \lambda.(f \circ \gamma_{[a,b]})$, ezért

$$\left((f+g) \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} = \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} + \left(g \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ},$$
$$\left((\lambda.f) \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} = \lambda. \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ},$$

tehát az integrál linearitásából és a szakasz menti integrál definíciójából kapjuk, hogy

$$\int\limits_{[a,b]} (f+g) = \int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[a,b]} g,$$

$$\int\limits_{[a,b]} (\lambda.f) = \lambda. \int\limits_{[a,b]} f.$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\| \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} \| \leq \chi_{[0,1]} \cdot \sup_{z\in[a,b]} \|f(z)\|,$$

amiből következik, hogy

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| = |b-a| \left\| \int_{\mathbb{R}} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} d\mu_{\mathbb{R}} \right\| \leq |b-a| \int_{\mathbb{R}} \left\| \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ} \right\| d\mu_{\mathbb{R}} \leq$$

$$\leq |b-a| \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]} d\mu_{\mathbb{R}} \right) \sup_{z\in[a,b]} \|f(z)\| = |b-a| \sup_{z\in[a,b]} \|f(z)\|.$$

b) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény és $a, b \in \mathbb{C}$ olyan pontok, amelyekre $[a,b] \subseteq Dom(f)$. Vezessük be a

$$\sigma :]0,1[\to]0,1[; \quad t \mapsto 1-t$$

leképezést, amely olyan C^1-diffeomorfizmus, amelyre $\gamma_{[b,a]} \circ \sigma = \gamma_{[a,b]}$ és $D\sigma = -1$ a $]0,1[$ halmazon. Ezért a helyettesítéses integrálás tétele alapján

$$\int_{[b,a]} f = (a-b) \int_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[b,a]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = -(b-a) \int_{]0,1[} \left(\left(f \circ \gamma_{[b,a]}\right) \circ \sigma\right) |D\sigma| d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= -(b-a) \int_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = -\int_{[a,b]} f.$$

Legyen $c \in [a,b]$ rögzített pont. Ha $c = a$, akkor

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,a]} f + \int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Ha $c = b$, akkor

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Tegyük fel, hogy $c \neq a$ és $c \neq b$. Legyen

$$\lambda := \frac{c-a}{b-a};$$

ekkor $\lambda \in]0,1[$ és $c = a + \lambda(b-a)$. Tekintsük a

$$\sigma_0 :]0,1[\to]0,\lambda[; \quad t \mapsto \lambda t,$$
$$\sigma_1 :]0,1[\to]\lambda,1[; \quad t \mapsto \lambda + (1-\lambda)t$$

leképezéseket, amelyek nyilvánvalóan C^1-diffeomorfizmusok, és fennállnak a következő összefüggések

$$\gamma_{[a,b]} \circ \sigma_0 = \gamma_{[a,c]}, \quad D\sigma_0 = \lambda,$$
$$\gamma_{[a,b]} \circ \sigma_1 = \gamma_{[c,b]}, \quad D\sigma_1 = 1 - \lambda.$$

Ezért a helyettesítéses integrálás tétele alapján

$$\int\limits_{]0,\lambda[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]0,1[} \left(\left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) \circ \sigma_0\right) (D\sigma_0) d\mu_{\mathbb{R}} =$$
$$= \lambda . \int\limits_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[a,c]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = \frac{1}{b-a} \int\limits_{[a,c]} f,$$

valamint

$$\int\limits_{]\lambda[,1} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]0,1[} \left(\left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) \circ \sigma_1\right) (D\sigma_1) d\mu_{\mathbb{R}} =$$
$$= (1-\lambda) . \int\limits_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[c,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = \frac{1}{b-a} \int\limits_{[c,b]} f.$$

Ebből az integrál additivitása alapján összeadással kapjuk, hogy

$$\int\limits_{[a,b]} f = (b-a) \int\limits_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} =$$
$$= (b-a) \int\limits_{]0,\lambda[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} + (b-a) \int\limits_{]\lambda,1[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{[a,c]} f + \int\limits_{[c,b]} f.$$

c) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, $g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ primitív függvénye f-nek, és $a, b \in \mathbb{C}$ olyan pontok, amelyekre $[a,b] \subseteq Dom(g)$. A függvénykompozíció differenciálásának tétele alapján

$$D\left(g \circ \gamma_{[a,b]}\right) = (b-a) . \left((Dg) \circ \gamma_{[a,b]}\right) = (b-a) . \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)$$

a $]0,1[$ intervallumon. Továbbá a

$$\left(D\left(g \circ \gamma_{[a,b]}\right)\right)^{\circ} : \mathbb{R} \to F$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható, mert a $\{0,1\}$ halmazon kívül (amely $\mu_{\mathbb{R}}$-nullhalmaz) egyenlő a $(b-a)\left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)^{\circ}$ függvénnyel. Ezért az általánosított Newton-Leibniz-tétel alapján

$$\int\limits_{[a,b]} f = (b-a) \int\limits_{]0,1[} \left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right) d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{]0,1[} \left((b-a)\left(f \circ \gamma_{[a,b]}\right)\right) d\mu_{\mathbb{R}} =$$
$$= \int\limits_{]0,1[} D\left(g \circ \gamma_{[a,b]}\right) \, d\mu_{\mathbb{R}} = \lim_{1} \left(g \circ \gamma_{[a,b]}\right) - \lim_{0} \left(g \circ \gamma_{[a,b]}\right) = g(b) - g(a)$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, akkor az előző állítás b) pontja ekvivalens azzal, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ esetén, ha $c \in [a, b] \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0.$$

Valóban, ebből triviálisan következik a b)-ben szereplő mindkét egyenlőség, továbbá a b)-ben bizonyított egyenlőségekből ez következik, mert

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = \int\limits_{[a,b]} f - \int\limits_{[c,b]} f - \int\limits_{[a,c]} f = \int\limits_{[a,b]} f - \left(\int\limits_{[a,c]} f + \int\limits_{[c,b]} f \right) = 0.$$

Azonban vigyázni kell arra, hogy ha F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, és $a, b, c \in \mathbb{C}$ olyan pontok, hogy $[a, b], [b, c], [c, a] \subseteq Dom(f)$, de $c \notin [a, b]$, akkor lehetséges az, hogy

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f \neq 0$$

teljesül (**1**. gyakorlat).

Jelölés. Ha $a, b, c \in \mathbb{C}$, akkor

$$\mathbf{T}(a, b, c) := \{ \ \alpha a + \beta b + \gamma c \mid ((\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1]^3) \wedge (\alpha + \beta + \gamma = 1) \ \},$$

$$\mathbf{L}(a, b, c) := |b - a| + |c - b| + |a - c|,$$

és a $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq \mathbb{C}$ halmazt $\{a, b, c\}$ *csúcspontú háromszögnek*, és az $\mathbf{L}(a, b, c) \in \mathbb{R}_+$ számot a $\mathbf{T}(a, b, c)$ háromszög *kerületének* nevezzük.

Megjegyzések. 1) Ha $a, b, c \in \mathbb{C}$, akkor a $\mathbf{T}(a, b, c)$ halmaz *kompakt* és *konvex* $\mathbb{C}$-ben. Valóban, a $\mathbf{T}(a, b, c)$ halmaz konvexitása nyilvánvaló, míg a kompaktsága abból következik, hogy $\mathbf{T}(a, b, c)$ korlátos és zárt $\mathbb{C}$-ben.

2) Létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ esetén

$$diam(\mathbf{T}(a, b, c)) \leq C\mathbf{L}(a, b, c)$$

teljesül, ahol $diam(\mathbf{T}(a, b, c))$ a $\mathbf{T}(a, b, c)$ halmaz átmérője az *euklidészi metrika* szerint. Valóban, ha $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma') \in [0, 1]^3$ olyanok, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 1 = \alpha' + \beta' + \gamma'$, akkor könnyen látható, hogy

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c) - (\alpha' a + \beta' b + \gamma' c) = (\alpha - \alpha')(a - b) + (\gamma' - \gamma)(b - c),$$

ezért $\alpha - \alpha', \gamma' - \gamma \in [-1, 1]$ miatt

$$|(\alpha a + \beta b + \gamma c) - (\alpha' a + \beta' b + \gamma' c)| \leq |a - b| + |b - c| \leq \mathbf{L}(a, b, c),$$

következésképpen $diam(\mathbf{T}(a, b, c)) \leq \mathbf{L}(a, b, c)$ teljesül.

Tétel. (*A Newton-Leibniz-tétel komplex formája.*) Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, és $U \subseteq Dom(f)$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f-nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq U$ esetén

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0.$$

Továbbá, ha teljesül ez az integrális feltétel, és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az

$$U \to F; \quad z \mapsto \int\limits_{[c,z]} f$$

függvény U-n értelmezett primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás. Legyen $g : U \to F$ primitív függvénye f-nek, és $a, b, c \in U$ olyan pontok, hogy $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq U$. Ekkor $[a, b], [b, c], [c, a] \subseteq U = Dom(g)$, így az előző állítás c) pontja szerint

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = (g(b) - g(a)) + (g(c) - g(b)) + (g(a) - b(c)) = 0.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $a, b, c \in U$ pontra, $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq U$ esetén

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0.$$

Legyen $c \in U$ csillagcentrum, és értelmezzük a

$$g : U \to F; \quad z \mapsto \int\limits_{[c,z]} f$$

függvényt. Meg fogjuk mutatni, hogy $z \in U$ esetén a g függvény $\mathbb{C}$-differenciálható a z pontban és $(Dg)(z) = f(z)$.

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(z; \mathbb{C}) \subseteq U$, és vegyünk tetszőlges $z' \in B_r(z; \mathbb{C})$ pontot. Ekkor a $B_r(z; \mathbb{C})$ halmaz konvexitása miatt $[a, z''] \subseteq B_r(z; \mathbb{C}) \subseteq U$, következésképpen

$$T(c, z, z') = \bigcup_{z'' \in [z, z']} [c, z''] \subseteq U,$$

hiszen c csillagcentruma U-nak. A hipotézisből kapjuk, hogy

$$\int_{[c,z]} f + \int_{[z,z']} f + \int_{[z',c]} f = 0,$$

tehát a g definíciója alapján

$$g(z') - g(z) = \int_{[z,z']} f.$$

Ebből a szakasz menti integrál tulajdonságait alkalmazva adódik, hogy

$$g(z') - g(z) - (z' - z).f(z) = \int_{[z,z']} f - \int_{[z,z']} f(z) = \int_{[z,z']} (f - f(z)),$$

tehát

$$\|g(z') - g(z) - (z' - z).f(z)\| = \left\| \int_{[z,z']} (f - f(z)) \right\| \leq |z' - z| \sup_{z'' \in [z,z']} \|f(z'') - f(z)\|.$$

Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta < r$ és minden $z'' \in B_\delta(z; \mathbb{C})$ esetén $\|f(z'') - f(z)\| < \varepsilon$. Ezért az előző egyenlőtlenség alapján $z'' \in B_\delta(z; \mathbb{C}) \setminus \{z\}$ esetén

$$\left\| \frac{g(z') - g(z) - (z' - z).f(z)}{|z' - z|} \right\| \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a g függvény $\mathbb{C}$-differenciálható a z pontban és $(Dg)(z) = f(z)$. Tehát a g függvény U-n értelmezett primitív függvénye f-nek. ■

A következő tétel kapcsolatot teremt a Newton-Leibniz-tétel komplex formájában szereplő integrális feltétel és a függvény $\mathbb{C}$-differenciálhatósága között.

Tétel. (*Goursat-lemma.*) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amely a $Dom(f)$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq Dom(f)$ esetén

$$\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f = 0.$$

Bizonyítás. (I) A bizonyítás első részében azt mutatjuk meg, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{C}$ olyan pontok, hogy $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq Dom(f)$ és az f függvény a $\mathbf{T}(a, b, c)$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, akkor

$$\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f = 0.$$

Ehhez vezessük be az

$$M := \left\| \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f \right\|$$

számot; tehát azt kell igazolni, hogy $M = 0$. Rekurzióval igazoljuk olyan $\mathbb{C}^3$-ban haladó $((a_n, b_n, c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre teljesülnek a következők:

- $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c)$;
- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{T}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \subseteq \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n), \quad \mathbf{L}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}(a_n, b_n, c_n);$$

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{M}{4^n} \leq \left\| \int_{[a_n,b_n]} f + \int_{[b_n,c_n]} f + \int_{[c_n,a_n]} f \right\|.$$

Az (a_0, b_0, c_0) pont (egyértelműen) megválasztható. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $((a_k, b_k, c_k))_{0\leq k\leq n}$ olyan rendszer $\mathbb{C}^3$-ban, hogy

- $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c)$;
- minden $k < n$ természetes számra esetén

$$\mathbf{T}(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) \subseteq \mathbf{T}(a_k, b_k, c_k), \quad \mathbf{L}(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}(a_k, b_k, c_k);$$

- minden $k \leq n$ természetes számra

$$\frac{M}{4^k} \leq \left\| \int_{[a_k,b_k]} f + \int_{[b_k,c_k]} f + \int_{[c_k,a_k]} f \right\|.$$

Vezessük be a

$$a' := \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad b' := \frac{1}{2}(a_n + c_n), \quad c' := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

pontokat. Nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{T}(a_n, c', b')$, $\mathbf{T}(b_n, a', c')$, $\mathbf{T}(c_n, b', a')$ és $\mathbf{T}(a', b', c')$ háromszögek részhalmazai a $\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n)$ háromszögnek, valamint $\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n) \subseteq \mathbf{T}(a, b, c) \subseteq Dom(f)$, így képezhetők a következő vektorok

$$z_0 := \int_{[a',b']} f + \int_{[b',c']} f + \int_{[c',a']} f, \quad z_1 := \int_{[a_n,c']} f + \int_{[c',b']} f + \int_{[b',a_n]} f,$$

$$z_2 := \int_{[b_n,a']} f + \int_{[a',c']} f + \int_{[c',b_n]} f, \quad z_3 := \int_{[c_n,b']} f + \int_{[b',a']} f + \int_{[a',c_n]} f.$$

Ekkor a szakasz menti integrál tulajdonságait, valamint a $c' \in [a_n, b_n]$, $a' \in [b_n, c_n]$ és $b' \in [c_n, a_n]$ feltételeket kihasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = \\
&= \left(\int_{[a',b']} f + \int_{[b',c']} f + \int_{[c',a']} f \right) + \left(\int_{[a_n,c']} f + \int_{[c',b']} f + \int_{[b',a_n]} f \right) + \\
&+ \left(\int_{[b_n,a']} f + \int_{[a',c']} f + \int_{[c',b_n]} f \right) + \left(\int_{[c_n,b']} f + \int_{[b',a']} f + \int_{[a',c_n]} f \right) = \\
&= \left(\int_{[a',b']} f + \int_{[b',a']} f \right) + \left(\int_{[b',c']} f + \int_{[c',b']} f \right) + \left(\int_{[c',a']} f + \int_{[a',c']} f \right) + \\
&+ \left(\int_{[a_n,c']} f + \int_{[c',b_n]} f \right) + \left(\int_{[b_n,a']} f + \int_{[a',c_n]} f \right) + \left(\int_{[c_n,b']} f + \int_{[b',a_n]} f \right) = \\
&= \int_{[a_n,b_n]} f + \int_{[b_n,c_n]} f + \int_{[c_n,a_n]} f.
\end{aligned}$$

A hipotézis szerint

$$\frac{M}{4^n} \leq \left\| \int_{[a_n,b_n]} f + \int_{[b_n,c_n]} f + \int_{[c_n,a_n]} f \right\| = \|z_0 + z_1 + z_2 + z_3\| \leq \sum_{j=0}^{3} \|z_j\|,$$

következésképpen van olyan $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, hogy

$$\frac{M}{4^{n+1}} \leq \|z_j\|.$$

Legyen j a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz legkisebb ilyen tulajdonságú eleme, és vezessük be az $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \in \mathbb{C}^3$ elemet úgy, hogy

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) := \begin{cases} (a', b', c') & \text{, ha } j = 0; \\ (a_n, c', b') & \text{, ha } j = 1; \\ (b_n, a', c') & \text{, ha } j = 2; \\ (c_n, b', a') & \text{, ha } j = 3; \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{L}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}(a_n, b_n, c_n),$$

továbbá $\mathbf{T}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \subseteq \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n)$ triviálisan igaz, és a j szám választása szerint

$$\frac{M}{4^{n+1}} \leq \left\| \int_{[a_{n+1},b_{n+1}]} f + \int_{[b_{n+1},c_{n+1}]} f + \int_{[c_{n+1},a_{n+1}]} f \right\|,$$

vagyis a $\mathbb{C}^3$-ban haladó $((a_k, b_k, c_k))_{0 \leq k \leq n+1}$ rendszer olyan, hogy
- $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c)$;
- minden $k < n+1$ természetes számra esetén

$$\mathbf{T}(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) \subseteq \mathbf{T}(a_k, b_k, c_k), \quad \mathbf{L}(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}(a_k, b_k, c_k);$$

- minden $k \leq n+1$ természetes számra

$$\frac{M}{4^k} \leq \left\| \int\limits_{[a_k,b_k]} f + \int\limits_{[b_k,c_k]} f + \int\limits_{[c_k,a_k]} f \right\|.$$

Tehát a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétel alkalmazásával kapjuk olyan $\mathbb{C}^3$-ban haladó $((a_n, b_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre teljesülnek az előírt feltételek. Az alábbiakban adottnak tekintünk egy ilyen sorozatot. Rögzítünk továbbá egy olyan $C \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ esetén $diam(\mathbf{T}(a, b, c')) \leq C\mathbf{L}(a', b', c')$.

A $(\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó, és minden tagja nem üres kompakt halmaz $\mathbb{C}$-ben, ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n) \neq \emptyset.$$

Ha z és z' elemei ennek a metszethalmaznak, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|z - z'| \leq diam(\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n)) \leq C\mathbf{L}(a_n, b_n, c_n) = C\frac{\mathbf{L}(a, b, c)}{2^n},$$

és itt jobb oldal 0-hoz tart, ha $n \to \infty$, ezért $z = z'$. Tehát egyértelműen létezik olyan $z \in \mathbb{C}$ pont, amelyre

$$\{z\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n) \subseteq \mathbf{T}(a, b, c).$$

Ugyanakkor $p \notin \mathbf{T}(a, b, c)$, tehát $z \neq p$, vagyis az f függvény $\mathbb{C}$-differenciálható a z pontban. Az

$$f(z) + (Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z) : \mathbb{C} \to F$$

függvénynek létezik globális primitív függvénye; például az

$$f(z)id_{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}(Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z)^2 : \mathbb{C} \to F$$

függvény ilyen, ezért minden $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ esetén

$$\int\limits_{[a',b']} (f(z) + (Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z)) + \int\limits_{[b',c']} (f(z) + (Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z)) +$$
$$+ \int\limits_{[c',a']} (f(z) + (Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z)) = 0.$$

Vezessük be a

$$g := f - f(z) - (Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z) : Dom(f) \to F$$

függvényt. Az előzőek alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{[a_n,b_n]} g + \int_{[b_n,c_n]} g + \int_{[c_n,a_n]} g = \int_{[a_n,b_n]} f + \int_{[b_n,c_n]} f + \int_{[c_n,a_n]} f.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az f függvény z pontbeli $\mathbb{C}$-differenciálhatósága alapján vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $B_\delta(z;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$ és minden $z' \in B_\delta(z;\mathbb{C})$ esetén

$$\|f(z') - f(z) - (Df)(z)(z' - z)\| \leq \varepsilon|z' - z|.$$

Tekintettel arra, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $z \in \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n)$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} diam\,(\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n)) = 0;$$

vehetünk olyan $\mathbb{N} \ni N$-t hogy minden $n > N$ természetes számra $\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n) \subseteq B_\delta(z;\mathbb{C})$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor

$$\frac{M}{4^n} \leq \left\| \int_{[a_n,b_n]} f + \int_{[b_n,c_n]} f + \int_{[c_n,a_n]} f \right\| = \left\| \int_{[a_n,b_n]} g + \int_{[b_n,c_n]} g + \int_{[c_n,a_n]} g \right\| \leq$$

$$\leq |b_n - a_n| \sup_{z'\in[a_n,b_n]} \|g(z')\| + |c_n - b_n| \sup_{z'\in[b_n,c_n]} \|g(z')\| + |a_n - c_n| \sup_{z'\in[c_n,a_n]} \|g(z')\| \leq$$

$$\leq (|b_n - a_n| + |c_n - b_n| + |a_n - c_n|) \sup_{z'\in[a_n,b_n]\cup[b_n,c_n]\cup[a_n,c_n]} \|g(z')\| =$$

$$= \mathbf{L}(a_n, b_n, c_n) \sup_{z'\in[a_n,b_n]\cup[b_n,c_n]\cup[a_n,c_n]} \|f(z') - f(z) - (Df)(z)(z' - z)\| \leq$$

$$\leq \frac{\mathbf{L}(a, b, c)}{2^n} \sup_{z'\in\mathbf{T}(a_n,b_n,c_n)} \|f(z') - f(z) - (Df)(z)(z' - z)\| \leq$$

$$\leq \frac{\mathbf{L}(a, b, c)}{2^n} \sup_{z'\in\mathbf{T}(a_n,b_n,c_n)} (\varepsilon|z' - z|) \leq \varepsilon\frac{\mathbf{L}(a, b, c)}{2^n} diam\,(\mathbf{T}(a_n, b_n, c_n)) \leq$$

$$\leq \varepsilon\frac{\mathbf{L}(a, b, c)}{2^n} C\mathbf{L}(a_n, b_n, c_n) = \varepsilon\frac{\mathbf{L}(a, b, c)^2}{4^n} C.$$

Tehát fennáll az

$$M \leq \varepsilon\mathbf{L}(a, b, c)^2 C$$

egyenlőtlenség, és itt $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, ezért $M = 0$.

(II) Most legyenek $a, b, c \in \mathbb{C}$ olyan pontok, hogy $\mathbf{T}(a, b, c) \subseteq Dom(f)$ és f a $\mathbf{T}(a, b, c) \setminus \{a\}$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_n \in]0, 1[$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$b_n := a + \varepsilon_n(c - a), \quad c_n := a + \varepsilon_n(b - a).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $c_n \in [a,b]$ és $b_n \in [c,a]$, ezért

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = \left(\int\limits_{[a,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,b]} f \right) + \int\limits_{[b,c]} f + \left(\int\limits_{[c,b_n]} f + \int\limits_{[b_n,a]} f \right) =$$

$$= \left(\int\limits_{[a,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,b_n]} f + \int\limits_{[b_n,a]} f \right) + \left(\int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,b]} f \right) +$$

$$+ \left(\int\limits_{[c,b_n]} f + \int\limits_{[b_n,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,c]} f \right)$$

Nyilvánvaló, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{T}(b,c,c_n), \mathbf{T}(c,b_n,c_n) \subseteq Dom(f) \setminus \{a\}$, tehát az f függvény e háromszögek minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, így az (I) alapján

$$\int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,b]} f = 0 = \int\limits_{[c,b_n]} f + \int\limits_{[b_n,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,c]} f,$$

amiből következik, hogy

$$\left\| \int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f \right\| = \left\| \int\limits_{[a,c_n]} f + \int\limits_{[c_n,b_n]} f + \int\limits_{[b_n,a]} f \right\| \leq$$

$$\leq |c_n - a| \sup_{z\in[a,c_n]} \|f(z)\| + |b_n - c_n| \sup_{z\in[c_n,b_n]} \|f(z)\| + |a - b_n| \sup_{z\in[b_n,a]} \|f(z) \leq$$

$$\leq \varepsilon_n \mathbf{L}(a,b,c) \sup_{z\in[a,c_n]\cup[c_n,b_n]\cup[b_n,a]} \|f(z)\| \leq \varepsilon_n \mathbf{L}(a,b,c) \sup_{z\in\mathbf{T}(a,b,c)} \|f(z)\|,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy a definíció alapján $\mathbf{L}(a,c_n,b_n) = \varepsilon_n \mathbf{L}(a,b,c)$, továbbá $\mathbf{T}(a,c_n,b_n) \subseteq \mathbf{T}(a,b,c)$. Az f függvény folytonos a $\mathbf{T}(a,b,c)$ halmazon, hiszen az a pontban is folytonos, ezért $\sup\limits_{z\in\mathbf{T}(a,b,c)} \|f(z)\| < +\infty$. Ebből és a $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ feltételből következik, hogy

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0.$$

(III) Végül legyenek $a,b,c \in \mathbb{C}$ olyan pontok, hogy $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq Dom(f)$, és az f függvény a $\mathbf{T}(a,b,c)$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve. Legyen $p \in \mathbf{T}(a,b,c)$ olyan pont, hogy f a $\mathbf{T}(a,b,c) \setminus \{p\}$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható. (Nem zárjuk ki, hogy f a p pontban is $\mathbb{C}$-differenciálható, de nem követeljük meg. Ugyanakkor a hipotézis szerint f folytonos a p pontban.) Ekkor

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = \left(\int\limits_{[p,a]} f + \int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,p]} f \right) +$$
$$+ \left(\int\limits_{[p,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,p]} f \right) + \left(\int\limits_{[p,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f + \int\limits_{[a,p]} f \right),$$

és az f függvény $\mathbb{C}$-differenciálható a $\mathbf{T}(p,a,b)\setminus\{p\}$, $\mathbf{T}(p,b,c)\setminus\{p\}$ és $\mathbf{T}(p,c,a)\setminus\{p\}$ halmazokon, tehát a (II) alapján az egyenlőség jobb oldalán zárójelek között álló vektorok nullák, vagyis

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0$$

teljesül. ■

Következmény. Ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amely a $Dom(f)$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve, akkor minden $U \subseteq Dom(f)$ nyílt csillaghalmazhoz létezik f-nek U-n értelmezett primitív függvénye.

Bizonyítás. A Newton-Leibniz-tétel komplex formája és a Goursat-lemma alapján nyilvánvaló. ■

Következmény. Ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amely a $Dom(f)$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve, akkor a $Dom(f)$ minden belső pontjának van olyan nyílt környezete, hogy létezik f-nek ezen a környezeten értelmezett primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $z \in Int(Dom(f))$, és a z-nek vegyük olyan U nyílt környezetét, hogy $U \subseteq Dom(f)$ és U *konvex.* Ha $a, b, c \in U$ tetszőleges olyan pontok, hogy $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq U$, akkor a Goursat-lemma alapján

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0.$$

Ezért a Newton-Leibniz-tétel komplex formája miatt létezik f-nek olyan primitív függvénye, amely az U halmazon értelmezett. ■

Gyakorlatok

1. Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és értelmezzük a következő leképezést

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto (a + ic)\mathfrak{Re}(z) + (b + id)\mathfrak{Im}(z).$$

Ez a függvény $\mathbb{R}$-analitikus és

$$\int\limits_{[-1,1]} f + \int\limits_{[1,i]} f + \int\limits_{[i,-1]} f = -(b + c) + i(a - d),$$

tehát a bal oldalon álló szám pontosan akkor 0, ha $a = d$ és $c = -b$.

2. (*Komplex logaritmusfüggvény.*) Értelmezzük az $\Omega := \{z \in \mathbb{C} | -z \notin \mathbb{R}_+\}$ halmazt, amely nyílt csillaghalmaz $\mathbb{C}$-ben.

a) Létezik egyetlen olyan $Log : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amely primitív függvénye az $1/id_{\mathbb{C}}$ függvénynek és eleget tesz a $Log(1) = 0$ egyenlőségnek. (Ezt a Log függvényt nevezzük *komplex logaritmusfüggvénynek.*) A Log függvényre fennáll a

$$\lim_{z \to 0} \frac{Log(1 + z)}{z} = 1$$

egyenlőség.

b) Az $Exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény injektív a $H := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) \in] - \pi, \pi[\}$ halmazon, továbbá $Im(Log) = H$ és

$$Log = (Exp|_H)^{-1}.$$

c) Fennáll a $Log|_{\mathbb{R}+} = log$ egyenlőség, vagyis a komplex logaritmusfüggvény a valós logaritmusfüggvény holomorf kiterjesztése.

d) Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olyanok, hogy $\mathfrak{Re}(z_1) > 0$ és $\mathfrak{Re}(z_2) > 0$, akkor $z_1, z_2, z_1 z_2 \in Dom(Log)$ és

$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2).$$

Ha $z_1, z_2 \in Dom(Log)$ és $z_1 z_2 \in Dom(Log)$, akkor létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy

$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2\pi i k.$$

e) A $B_1(1, \mathbb{C})$ gömbön fennáll a

$$Log = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (id_{\mathbb{C}} - 1)^k$$

függvényegyenlőség.

f) Vezessük be a

$$Dom(Log) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad (z, \alpha) \mapsto z^{\alpha} := Exp(\alpha Log(z))$$

komplex hatványozás-függvényt, és vizsgáljuk meg, hogy ez a holomorf függvény milyen algebrai tulajdonságokkal rendelkezik?

(*Útmutatás.* a) A Goursat-lemma után álló első következmény alapján nyilvánvaló, hiszen az Ω nyílt halmaz csillaghalmaz (minden szigorúan pozitív szám csillagcentrum). A Log függvény a definíció alapján $\mathbb{C}$-differenciálható az 1 pontban és

$$1 = (D(Log))(1) = \lim_{z \to 0} \frac{Log(1+z) - Log(1)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{Log(1+z)}{z}.$$

b) Egyszerűen igazolható, hogy az $Exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény injektív a $H := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) \in]-\pi, \pi[\}$ halmazon, továbbá $Exp\langle H \rangle = \Omega = Dom(Log)$. Ugyanakkor, a Log függvény definíciója alapján $D(Log \circ Exp - id_H) = 0$ és a $Log \circ Exp - id_H$ függvény a 0-hoz 0-t rendel, ezért a H halmaz összefüggősége miatt $Log \circ (Exp|_H) = id_H$. Ebből következik, hogy $Log = (Exp|_H)^{-1}$.

c) A b) állításból és a valós logaritmusfüggvény definíciójából következik.

d) Rögzített $z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z_2) > 0$ ponthoz tekintsük a $z \mapsto Log(zz_2)$ és $z \mapsto Log(z) + Log(z_2)$ függvényeket a $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(z) > 0\}$ halmazon. Világos, hogy ez a két holomorf függvény olyan primitív függvénye $1/id_{\mathbb{C}}$-nek, amelyek az 1-hez ugyanazt az értéket rendelik, ezért ezek a függvények egyenlők. Ezért minden $z_1 \in \mathbb{C}$ pontra, ha $\mathfrak{Re}(z_1) > 0$, akkor $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2)$.

Ha $z_1, z_2 \in Dom(Log)$ olyanok, hogy $z_1 z_2 \in Dom(Log)$, akkor $Exp \circ Log = id_{Dom(Log)}$ miatt $Exp\,(Log(z_1 z_2) - Log(z_1) - Log(z_2)) = 1$, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2\pi i k$.

e) A definíció és a Newton-Leibniz-tétel komplex formája szerint minden $z \in Dom(Log)$ esetén

$$Log(z) = \int\limits_{[1,z]} \frac{1}{id_{\mathbb{C}}} = (z-1) \int\limits_{[0,1]} \frac{1}{1 + t(z-1)} \, d\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

hiszen 1 csillagcentruma a $Dom(Log)$ halmaznak. Ha $z \in B_1(1; \mathbb{C})$, akkor

$$\frac{1}{1 + id_{[0,1]}(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k id_{[0,1]}^k,$$

továbbá a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k (z-1)^k id_{[0,1]}^k$ függvénysor normálisan konvergens a $[0,1]$ intervallumon, ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{1}{1 + t(z-1)} \, d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int\limits_{[0,1]} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k id_{[0,1]}^k \right) d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \int\limits_{[0,1]} id_{[0,1]}^k \, d\mu_{\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \int\limits_0^1 id_{\mathbb{R}}^k \, d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z-1)^k$$

amiből következik, hogy fennáll a

$$Log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k$$

egyenlőség.)

3. (*Numerikus szorzatok.*) Legyen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ komplex számok sorozata. Emlékeztetünk arra, hogy a $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozathoz asszociált *végtelen szorzatnak* nevezzük és a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ szimbólummal jelöljük azt a $\mathbb{C}$-ben haladó sorozatot, amely a 0-hoz az 1 számot rendeli, és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-hez a $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$ véges szorzatot rendeli (II. fejezet, 4. pont). Továbbá, azt mondjuk, hogy a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat *konvergens*, ha ez a sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben és a határértéke nem nulla. Ha a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben, de a határértéke 0, akkor azt mondjuk, hogy a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat *nullához divergál.* Nyilvánvaló, hogy ha van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $z_m = 0$, akkor minden $n > m$ természetes számra $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 0$, tehát a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat nullához divergál. Ezért a végtelen szorzatok konvergencia-vizsgálata során csak olyan számsorozatokhoz asszociált végtelen szorzatokat tekintünk, amelyek minden tagja nem nulla komplex szám.

a) Ha a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens, akkor $\lim_{k\to\infty} z_k = 1$. (Ez a numerikus végtelen szorzatok konvergenciájának természetes *szükséges feltétele.*) Azonban létezik olyan $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *valós* számsorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $z_k > 0$ és $\lim_{k\to\infty} z_k = 1$ teljesül, de a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat nem konvergens.

b) A $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra

$$\left| 1 - \frac{\prod_{k=0}^{m-1} z_k}{\prod_{k=0}^{n-1} z_k} \right| < \varepsilon.$$

(Ez a végtelen numerikus szorzatok konvergenciájának *Cauchy-kritériuma*).

c) A $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq m$ természetes számra $z_k \in Dom(Log)$ és a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq m} Log(z_k)$$

sor konvergens $\mathbb{C}$-ben. Továbbá, ha a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens és $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k \geq m$ természetes számra $z_k \in Dom(Log)$, akkor

$$\prod_{k=0}^{\infty} z_k = \left(\prod_{k=0}^{m-1} z_k\right) Exp\left(\sum_{k=m}^{\infty} Log(z_k)\right)$$

teljesül, ahol $m = 0$ esetén $\prod_{k=0}^{m-1} z_k := 1$.

d) Ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}(z_k - 1)$ sor abszolút konvergens $\mathbb{C}$-ben, akkor a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens. Speciálisan, ha $z \in \mathbb{C}$ és $\mathfrak{Re}(z) > 1$, akkor a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1 + \frac{1}{(k+1)^z}\right), \quad \prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1 - \frac{1}{(k+2)^z}\right)$$

végtelen szorzatok konvergensek. Ugyanakkor a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1 + \frac{(-1)^k)}{k+1}\right)$$

végtelen szorzat konvergens, de a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\left(1 + \frac{(-1)^k}{k+1}\right) - 1\right)$$

numerikus sor nem abszolút konvergens $\mathbb{C}$-ben.

(*Útmutatás.* Legyen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan komplex számsorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $z_k \neq 0$, és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re legyen $p_n := \prod_{k=0}^{n-1} z_k$, valamint $p_0 := 1$.

a) Ha a $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens, akkor létezik a $p := \lim_{n\to\infty} p_n$ határérték és $p \neq 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$|p - p_n| < |p|\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2}.$$

Ha $n \in |N$ és $n > N$, akkor

$$|p| - |p_n| \leq ||p| - |p_n|| \leq |p - p_n| < |p|\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2},$$

amiből következik, hogy

$$|p|\frac{2}{\varepsilon + 2} < |p_n|.$$

Ez azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$|1 - z_n| = \left|1 - \frac{p_{n+1}}{p_n}\right| \leq \frac{|p_n - p| + |p - p_{n+1}|}{|p_n|} < \frac{2|p|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2}}{|p|\frac{2}{\varepsilon+2}} = \varepsilon,$$

ezért $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 1$.

Nyilvánvaló, hogy a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

végtelen szorzat divergens, mert teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k+1}\right) = n+1,$$

ugyanakkor természetesen

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k+1}\right) = 1,$$

így a végtelen szorzatok konvergenciájának természetes szükséges feltétele *nem elégséges* feltétel.

b) Tegyük fel, hogy a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens, tehát létezik a $p := \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ határérték és $p \neq 0$. Legyen $N' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N'$ természetes számra $|p_n| > |p|/2$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N'' \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N''$ természetes számra $|p_n - p_m| < \varepsilon|p|/2$. Ekkor $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > \max(N', N'')$ esetén

$$\left| 1 - \frac{p_m}{p_n} \right| = \frac{|p_n - p_m|}{|p_n|} < \frac{\varepsilon|p|/2}{|p|/2} = \varepsilon.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra

$$\left| 1 - \frac{p_m}{p_n} \right| < \varepsilon.$$

Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n > N_1$ természetes számra

$$\left| 1 - \frac{p_m}{p_n} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ha $m \in \mathbb{N}$ és $m > N_1$, akkor $||p_{N_1}| - |p_m|| \leq |p_{N_1} - p_m| < |p_{N_1}|/2$, tehát $|p_{N_1}|/2 < |p_m| < 3|p_{N_1}|/2$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $m, n > N_2$ természetes számra

$$\left| 1 - \frac{p_m}{p_n} \right| < \varepsilon \frac{3|p_{N_1}|}{2},$$

akkor minden $m, n > \max(N_1, N_2)$ természetes számra

$$|p_n - p_m| = \left| 1 - \frac{p_m}{p_n} \right| |p_n| < \frac{\varepsilon}{3|p_{N_1}|/2} \frac{3|p_{N_1}|}{2} = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így konvergens $\mathbb{C}$-ben. Továbbá,

$$\left|\lim_{n\to\infty} p_n\right| = \lim_{n\to\infty} |p_n| \geq |p_{N_1}|/2 > 0,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$, így a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens.

c) Legyen $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k \geq m$ természetes számra $z_k \in Dom(Log)$ és a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq m} Log(z_k)$$

sor konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $Exp \circ Log = id_{Dom(Log)}$ alapján

$$Exp\left(\sum_{k=m}^{m+n-1} Log(z_k)\right) = \frac{p_{m+n}}{p_m},$$

tehát az Exp függvény folytonossága miatt a $(p_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, így a $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ugyanakkor

$$0 \neq Exp\left(\sum_{k=m}^{\infty} Log(z_k)\right) = \lim_{n\to\infty} Exp\left(\sum_{k=m}^{m+n-1} Log(z_k)\right) =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} p_{m+n}\right)/p_m = \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right)/p_m,$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$, így a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergens. Az a) szerint $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 1$, és 1 belső pontja $Dom(Log)$-nak, ezért van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq m$ természetes számra $z_k \in Dom(Log)$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$s_{m,n} := \sum_{k=m}^{m+n-1} Log(z_k),$$

és $s_{m,0} := 0$. A b) alapján vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy $N > m$ és minden $k, n \geq N$ természetes számra

$$\left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| < \frac{1}{2},$$

következésképpen $p_n/p_k \in Dom(Log)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor

$$Exp(s_{m,N} - s_{m,n}) = \frac{Exp(s_{m,N})}{Exp(s_{m,n})} = \frac{\prod\limits_{k=m}^{m+N-1} z_k}{\prod\limits_{k=m}^{m+n-1} z_k} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{m+N-1} z_k}{\prod\limits_{k=0}^{m+n-1} z_k} = \frac{p_{m+N}}{p_{m+n}},$$

tehát

$$Exp\left(Log\left(\frac{p_{m+n}}{p_{m+N}}\right) - s_{m,n} + s_{m,N}\right) = 1.$$

Ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-hez van olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy

$$Log\left(\frac{p_{m+n}}{p_{m+N}}\right) - s_{m,n} + s_{m,N} = 2\pi i k.$$

Tehát *kiválaszthatunk* olyan $(k_n)_{n\in\mathbb{N};\ n>N}$ rendszert $\mathbb{Z}$-ben, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$Log\left(\frac{p_{m+n}}{p_{m+N}}\right) = s_{m,n} - s_{m,N} + 2\pi i k_n$$

teljesüljön. A $\prod_{k\in\mathbb{N}} z_k$ végtelen szorzat konvergenciája folytán a $(p_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$\left| 1 - \frac{p_{m+n}}{p_{m+N}} \right| < \frac{1}{2},$$

ezért teljesül az, hogy

$$\lim_{n\to\infty} Log\left(\frac{p_{m+n}}{p_{m+N}}\right) \in \overline{B}_{1/2}(1;\mathbb{C}) \subseteq Dom(Log).$$

Tehát a *Log* függvény folytonossága miatt létezik a

$$\lim_{n\to\infty} Log\left(\frac{p_{m+n}}{p_{m+N}}\right)$$

határérték, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} (s_{m,n} - s_{m,N} + 2\pi i k_n)$ határérték is. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} &((s_{m,n+1} - s_{m,N} + 2\pi i k_{n+1}) - (s_{m,n} - s_{m,N} + 2\pi i k_n)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} (Log(z_{m+n}) + 2\pi i(k_{n+1} - k_n)) . \end{aligned}$$

Az a) alapján $\lim_{k\to\infty} z_k = 1$, ezért $\lim_{n\to\infty} Log(z_{m+n}) = 1$. Ebből kapjuk, hogy $\lim_{k\to\infty} (k_{n+1} - k_n) = 0$, tehát van olyan $N' > N$ természetes szám, hogy minden $n > N'$ természetes számra $k_{n+1} = k_n$. Ezért az $(s_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens $\mathbb{C}$-ben, ami éppen azt jelenti, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq m} Log(z_k)$$

sor konvergens $\mathbb{C}$-ben.)

4. Legyen $\mathscr{T}$ azon $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ pontok halmaza, amelyekre $|b-a|+|c-b|+|a-c|>0$ (vagyis $a\neq b$ vagy $b\neq c$ vagy $c\neq a$). Mutassuk meg, hogy

$$\sup_{(a,b,c)\in\mathscr{T}}\frac{diam(\mathbf{T}(a,b,c))}{\mathbf{L}(a,b,c)}=\frac{1}{2}.$$

5. (*A szakasz menti integrál általánosítása.*) Legyen E normált tér és F Banach-tér. Ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény (E feletti *operátormező*) és $a,b\in E$ olyan pontok, hogy $[a,b]\subseteq Dom(\omega)$, akkor a

$$[0,1]\to F;\quad t\mapsto(\omega(a+t.(b-a)))\,(b-a)$$

függvény folytonos, ezért jól értelmezett az

$$\int\limits_{[a,b]}\omega:=\int\limits_{[0,1]}(\omega(a+t.(b-a)))\,(b-a)d\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

vektor; ezt nevezzük az ω *operátormező integráljának az* $[a,b]$ *szakasz mentén.* Az $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ operátormező *primitív függvényének* nevezünk minden olyan $f : E\rightarrowtail F$ differenciálható függvényt, amelyre $Df\subseteq\omega$ teljesül. Az ω *globális primitív függvényének* nevezzük azokat a primitív függvényeit, amelyek definíciós tartománya egyenlő $Dom(\omega)$-val. Azt mondjuk, hogy az $\omega : E\rightarrowtail\mathscr{L}(E;F)$ operátormező *egzakt*, ha létezik ω-nak globális primitív függvénye.

a) Ha $\omega : E\rightarrowtail\mathscr{L}(E;F)$ függvény, akkor legyen $d\omega : E\rightarrowtail\mathscr{L}_2^a(E^2;F)$ az a leképezés, amelyre $Dom(d\omega):=Dom(D\omega)$, és minden $\mathfrak{a}\in Dom(d\omega)$ és $x,x'\in E$ esetén

$$((d\omega)(\mathfrak{a}))\,(x,x'):=\frac{1}{2}\left((((D\omega)(\mathfrak{a}))\,(x))\,(x')-(((D\omega)(\mathfrak{a}))\,(x'))\,(x)\right).$$

Azt mondjuk, hogy az $\omega : E\rightarrowtail\mathscr{L}(E;F)$ operátormező *zárt*, ha ω differenciálható függvény és $d\omega=0$ (VII. fejezet, 3. pont, 5. példa). Mutassuk meg, hogy minden differenciálható egzakt operátormező zárt, azonban zárt operátormező nem szükségképpen egzakt.

b) Legyen F komplex Banach-tér és $f:\mathbb{C}\rightarrowtail F$ folytonos függvény. Ekkor az

$$\omega_f : Dom(f)\to\mathscr{L}(\mathbb{C};F);\quad z\mapsto(z'\mapsto z'.f(z))$$

függvény folytonos, és ha $a,b\in\mathbb{C}$ olyan pontok, hogy $[a,b]\subseteq Dom(\omega_f)$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]}\omega_f=\int\limits_{[a,b]}f,$$

tehát az operátormezők imént bevezetett szakasz menti integrálja a korábban bevezetett szakasz menti integrál-fogalomnak általánosítása. Egy $\mathbb{C}\rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor primitív függvénye f-nek, ha primitív függvénye az ω_f operátormezőnek. Továbbá, ha f holomorf, akkor ω_f szükségképpen zárt.

c) Tegyük fel, hogy E normált tér $\mathbb{K}$ felett, és legyen $\mathfrak{g} : E \times E \to \mathbb{K}$ olyan szimmetrikus, folytonos bilineáris funkcionál, amelyre az $E \to E'$; $x \mapsto \mathfrak{g}(x, \cdot)$ lineáris operátor bijekció. Ha $\zeta : E \rightarrowtail E$ folytonos függvény (vagyis E feletti *vektormező*), akkor az

$$\omega_{\mathfrak{g},\zeta} : Dom(\zeta) \to E'; \quad x \mapsto \mathfrak{g}(\zeta(z), \cdot)$$

kovektormező folytonos, és ha $a, b \in E$ olyan pontok, hogy $[a, b] \subseteq Dom(\omega_{\mathfrak{g},\zeta})$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]} \omega_{\mathfrak{g},\zeta} := \int\limits_{[0,1]} (\omega_{\mathfrak{g},\zeta}(a + t.(b-a)))\,(b-a)\; d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$
$$= \int\limits_{[0,1]} \mathfrak{g}(\zeta(a + t.(b-a)), b-a)\; d\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Ezt a $\mathbb{K}$-beli elemet a ζ vektormező $\mathfrak{g}$ szerinti *munkájának* nevezzük az $[a, b]$ szakasz mentén, és ezt a

$$(\mathfrak{g}) \int\limits_{[a,b]} \zeta$$

szimbólummal is jelöljük. Egy $V : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvényt a $\zeta : E \rightarrowtail E$ vektormező $\mathfrak{g}$-*potenciáljának* nevezünk, ha V differenciálható függvény, és $grad_{\mathfrak{g}} V \subseteq \zeta$ (VII. fejezet, 3. pont, 3. példa). Azt mondjuk, hogy a $\zeta : E \rightarrowtail E$ vektormező *potenciálos* ($\mathfrak{g}$ szerint), ha létezik ζ-nak olyan $\mathfrak{g}$-potenciálja, amelynek definíciós tartománya egyenlő a $Dom(\zeta)$ halmazzal. Mutassuk meg, hogy ha $\zeta : E \rightarrowtail E$ vektormező, akkor

(i) ζ pontosan akkor differenciálható, ha az $\omega_{\mathfrak{g},\zeta}$ kovektormező differenciálható;

(ii) a $V : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor $\mathfrak{g}$-potenciálja ζ-nak, ha V primitív függvénye az $\omega_{\mathfrak{g},\zeta}$ kovektormezőnek;

(iii) az $\omega_{\mathfrak{g},\zeta}$ kovektormező pontosan akkor zárt, ha ζ differenciálható és minden $\mathfrak{a} \in Dom(\zeta)$, valamint minden $x, x' \in E$ esetén

$$\mathfrak{g}(((D\zeta)(\mathfrak{a}))\,(x), x') = \mathfrak{g}(((D\zeta)(\mathfrak{a}))\,(x'), x)$$

teljesül, vagyis minden $\mathfrak{a} \in Dom(\zeta)$ pontra a $(D\zeta)(\mathfrak{a}) : E \to E$ lineáris operátor $\mathfrak{g}$-szimmetrikus;

(iv) ζ pontosan akkor potenciálos $\mathfrak{g}$ szerint, ha az $\omega_{\mathfrak{g},\zeta}$ kovektormező egzakt.

6. (*Az általánosított szakasz menti integrál tulajdonságai.*) Legyen E normált tér és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett.

a) Ha $\omega, \omega' : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E; F)$ folytonos függvények, $\lambda \in \mathbb{K}$, és $a, b \in E$ olyan pontok, amelyekre $[a,b] \subseteq Dom(\omega) \cap Dom(\omega')$, akkor

$$\int_{[a,b]} (\omega + \omega') = \int_{[a,b]} \omega + \int_{[a,b]} \omega',$$

$$\int_{[a,b]} (\lambda.\omega) = \lambda. \int_{[a,b]} \omega,$$

$$\left\| \int_{[a,b]} \omega \right\| \leq \|b-a\| \sup_{x\in[a,b]} \|\omega(x)\|.$$

b) Ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény és $a,b \in E$ olyan pontok, amelyekre $[a,b] \subseteq Dom(\omega)$, akkor

$$\int_{[b,a]} \omega = - \int_{[a,b]} \omega,$$

és minden $c \in [a,b]$ esetén

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_{[a,c]} \omega + \int_{[c,b]} \omega.$$

c) Ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény, $g : E \rightarrowtail F$ primitív függvénye f-nek, és $a,b \in E$ olyan pontok, amelyekre $[a,b] \subseteq Dom(\omega)$, akkor

$$\int_{[a,b]} \omega = g(b) - g(a).$$

d) Legyen $u : E \times E \to F$ folytonos bilineáris operátor, és

$$\omega_u : E \to \mathscr{L}(E;F); \quad x \mapsto u(x,\cdot).$$

Ekkor minden $a,b \in E$ esetén

$$\int_{[a,b]} \omega_u = \frac{1}{2}(u(b,b) - u(a,a)) + \frac{1}{2}(u(a,b) - u(b,a)).$$

7. (*A Newton-Leibniz-tétel általánosított formája.*) Legyen E normált tér és minden $a,b,c \in E$ esetén

$$\mathbf{T}(a,b,c) := \{ \alpha a + \beta b + \gamma c \mid ((\alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^3) \wedge (\alpha+\beta+\gamma = 1) \}.$$

Legyen F Banach-tér, $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény, és $U \subseteq Dom(\omega)$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik ω-nak az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a,b,c \in U$ pontra, $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq U$ esetén

$$\int_{[a,b]} \omega + \int_{[b,c]} \omega + \int_{[c,a]} \omega = 0.$$

Továbbá, ha teljesül ez az integrális feltétel, és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az

$$U \to F; \quad z \mapsto \int\limits_{[c,z]} \omega$$

függvény U-n értelmezett primitív függvénye ω-nak.

8. (*A Goursat-lemma általánosítása.*) Legyen E normált tér, és minden $a, b, c \in E$ esetén

$$\mathbf{L}(a,b,c) := \|b-a\| + \|c-b\| + \|a-c\|.$$

Létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a, b, c \in E$ esetén

$$diam(\mathbf{T}(a,b,c)) \leq C \cdot \mathbf{L}(a,b,c).$$

Továbbá, ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ olyan folytonos függvény, amely a $Dom(\omega)$ halmaz minden pontjában differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve, és $d\omega = 0$, akkor minden $a, b, c \in E$ pontra, $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq Dom(\omega)$ esetén

$$\int\limits_{[a,b]} \omega + \int\limits_{[b,c]} \omega + \int\limits_{[c,a]} \omega = 0.$$

(*Útmutatás.* A bizonyításnak ugyanaz az elve, mint az egyváltozós függvényekre vonatkozó Goursat-lemma esetében. Tehát a $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq Dom(\omega)$ feltevés mellett a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva igazoljuk olyan E^3-ban haladó $((a_n, b_n, c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy

- $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c)$;
- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{T}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \subseteq \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n), \quad \mathbf{L}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}(a_n, b_n, c_n);$$

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{M}{4^n} \leq \left\| \int\limits_{[a_n,b_n]} \omega + \int\limits_{[b_n,c_n]} \omega + \int\limits_{[c_n,a_n]} \omega \right\|,$$

ahol bevezettük az

$$M := \left\| \int\limits_{[a,b]} \omega + \int\limits_{[b,c]} \omega + \int\limits_{[c,a]} \omega \right\|$$

számot. Itt is kapjuk egyetlen olyan $z \in E$ létezését, amelyre

$$\{z\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{T}(a_n, b_n, c_n).$$

De most az ottani $f(z) + (Df)(z)(id_{\mathbb{C}} - z) : \mathbb{C} \to F$ függvény helyett az

$$\omega(z) + ((D\omega)(z)) \circ (id_E - z) : E \to \mathscr{L}(E;F)$$

operátormezőt képezzük, és észrevesszük, hogy az

$$E \to F; \quad x \mapsto (\omega(z))(x) + \frac{1}{2}(((D\omega)(z))(x-z))(x-z)$$

függvény az E-n differenciálható, és minden $x \in E$ pontban a deriváltja egyenlő az

$$(\omega(z))(x) + ((D\omega)(z))(x-z) + ((d\omega)(z))(x-z, \cdot)$$

operátorral, tehát $(d\omega)(z) = 0$ esetén a deriváltfüggvénye egyenlő az $\omega(z) + ((D\omega)(z)) \circ (id_E - z)$ függvénnyel. A hipotézis szerint $(d\omega)(z) = 0$, ezért az $\omega(z) + ((D\omega)(z)) \circ (id_E - z)$ függvénynek létezik primitív függvénye. Ezután képezzük a

$$g := \omega - \omega(z) - ((D\omega)(z)) \circ (id_E - z) : Dom(\omega) \to \mathscr{L}(E;F)$$

leképezést, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int\limits_{[a_n,b_n]} g + \int\limits_{[b_n,c_n]} g + \int\limits_{[c_n,a_n]} g = \int\limits_{[a_n,b_n]} \omega + \int\limits_{[b_n,c_n]} \omega + \int\limits_{[c_n,a_n]} \omega$$

teljesül. A bizonyítást ugyanúgy fejezzük be, mint korábban, de itt az általánosított szakasz menti integrál **6**. gyakorlatban megfogalmazott tulajdonságait kell alkalmazni.)

9. Legyen E normált tér, F Banach-tér, és $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ olyan folytonos függvény, amely a $Dom(\omega)$ halmaz minden pontjában differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve, és $d\omega = 0$. Ekkor a $Dom(\omega)$ minden belső pontjának van olyan nyílt környezete, hogy létezik ω-nak ezen a környezeten értelmezett primitív függvénye.

3. Komplex vonalintegrál

Definíció. Legyen E normált tér. Azt mondjuk, hogy az E-ben haladó γ folytonos ív *szakaszonként C^1-osztályú*, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$ és $(t_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $Dom(\gamma) = [t_0, t_n]$, és minden $k < n$ természetes számra a γ függvény folytonosan differenciálható a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon, és a $D\gamma$ függvénynek létezik t_k-ban jobboldali és t_{k+1}-ben baloldali határértéke.

Lemma. Ha γ az E normált térben haladó szakaszonkét C^1-osztályú ív, akkor a

$$\|D\gamma\| : Dom(D\gamma) \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \|(D\gamma)(t)\|$$

függvény 0-val vett kiterjesztése $\mathbb{R}$-re integrálható a Lebesgue-mérték szerint. Ha F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, és γ olyan $\mathbb{C}$-ben haladó szakaszonkét C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$, akkor az

$$(f \circ \gamma)(D\gamma) : Dom(D\gamma) \to F; \quad t \mapsto f(\gamma(t))(D\gamma)(t)$$

függvény 0-val vett kiterjesztése $\mathbb{R}$-re integrálható a Lebesgue-mérték szerint (vagyis az $(f \circ \gamma)(D\gamma)$ függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható a $Dom(D\gamma)$ halmazon).

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(t_k)_{0 \le k \le n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $Dom(\gamma) = [t_0, t_n]$, és minden $k < n$ természetes számra a γ függvény folytonosan differenciálható a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon, és a $D\gamma$ függvénynek létezik t_k-ban jobboldali és t_{k+1}-ben baloldali határértéke. Nyilvánvaló, hogy

$$\|D\gamma\|^\circ = \sum_{k=0}^{n-1} \|(D\gamma)|_{]t_k, t_{k+1}[}\|^\circ$$

teljesül az $\mathbb{R} \setminus \{t_k | k \in n+1\}$ halmazon, tehát $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt. Minden $k < n$ természetes számra $\|(D\gamma)|_{]t_k, t_{k+1}[}\|^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, mert a $\|(D\gamma)|_{]t_k, t_{k+1}[}\| :]t_k, t_{k+1}[\to \mathbb{R}$ függvény folytonos és létezik határértéke a t_k és t_{k+1} pontokban (X. fejezet, 1. pont). Ezért a $\|D\gamma\|^\circ$ függvény integrálható a Lebesgue-mérték szerint.

Most tegyük fel, hogy $E := \mathbb{C}$, továbbá F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amelyre $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$. Ekkor

$$((f \circ \gamma)(D\gamma))^\circ = \sum_{k=0}^{n-1} \left(((f \circ \gamma)(D\gamma))\,|_{]t_k, t_{k+1}[} \right)^\circ$$

teljesül az $\mathbb{R} \setminus \{t_k | k \in n+1\}$ halmazon, tehát $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt. Minden $k < n$ természetes számra $\left(((f \circ \gamma)(D\gamma))\,|_{]t_k, t_{k+1}[} \right)^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, mert a $((f \circ \gamma)(D\gamma))\,|_{]t_k, t_{k+1}[} :]t_k, t_{k+1}[\to F$ függvény folytonos és létezik határértéke a t_k és t_{k+1} pontokban (X. fejezet, 1. pont). Ezért a $\|D\gamma\|^\circ$ függvény integrálható a Lebesgue-mérték szerint. $\blacksquare$

Definíció. Ha γ az E normált térben haladó szakaszonkét C^1-osztályú ív, akkor

$$\mathbf{L}(\gamma) := \int_{\mathbb{R}} \|D\gamma\|^\circ \, d\mu_{\mathbb{R}},$$

és ezt a számot a γ ív *hosszának* nevezzük. Ha F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, és γ olyan $\mathbb{C}$-ben haladó szakaszonkét C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int_\gamma f := \int_{\mathbb{R}} ((f \circ \gamma)(D\gamma))^\circ \, d\mu_{\mathbb{R}},$$

és ezt az F-beli vektort az f függvény γ ív menti *komplex vonalintegráljának* (vagy egyszerüen γ menti integráljának) nevezzük; továbbá, ha a γ ív zárt, akkor az f függvény γ menti vonalintegrálját a

$$\oint_\gamma f$$

szimbólummal is jelöljük.

Megjegyezzük, hogy az előző definíció feltételei mellett az f függvény γ menti integrálját az

$$\int_\gamma f(z) \, dz \quad \text{vagy} \quad \oint_\gamma f(z) \, dz$$

szimbólummal is jelöljük, leginkább akkor, ha explicit formulánk van az f függvény értékeire.

A következő állításban összefoglaljuk a komplex vonalintegrál számunkra fontos tulajdonságait.

Állítás. Legyen F komplex Banach-tér.
a) Ha $f, g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvények, $\lambda \in \mathbb{C}$, és γ olyan $\mathbb{C}$-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f) \cap Dom(g)$, akkor

$$\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g,$$

$$\int_\gamma (\lambda.f) = \lambda. \int_\gamma f,$$

$$\left\| \int_\gamma f \right\| \leq \mathbf{L}(\gamma) \sup_{z \in Im(\gamma)} \|f(z)\|.$$

b) Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, $g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ primitív függvénye f-nek, és γ olyan $\mathbb{C}$-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int_\gamma f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ azok a pontok, amelyekre $Dom(\gamma) = [a, b]$.

c) Legyenek $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $a' \leq b'$, és $\sigma : [a', b'] \to [a, b]$ olyan szigorúan monoton növő folytonos függvény, hogy a $\sigma|_{]a',b'[} :]a', b'[\to]a, b[$ függvény C^1-diffeomorfizmus, valamint $D\sigma$-nak létezik határértéke a'-ben és b'-ben. Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor a $\gamma \circ \sigma$ függvény is szakaszonként C^1-osztályú ív, és ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{\gamma\circ\sigma} f = \int\limits_{\gamma} f.$$

d) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek minden tagja $U \to F$ folytonos függvény. Ha ez a függvénysorozat *lokálisan egyenletesen konvergens* az U halmazon, akkor minden U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú γ ívre

$$\int\limits_{\gamma} \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n$$

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor *lokálisan egyenletesen konvergens* az U halmazon (például *normálisan konvergens az U halmazon*), akkor minden U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú γ ívre a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\gamma} f_n$$

vektorsor abszolút konvergens, és

$$\int\limits_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n.$$

Bizonyítás. a) Nyilvánvaló, hogy $(f + g) \circ \gamma = f \circ \gamma + g \circ \gamma$ és $(\lambda.f)\circ = \lambda.(f \circ \gamma)$, ezért

$$((f + g) \circ \gamma)^\circ = (f \circ \gamma)^\circ + (g \circ \gamma)^\circ,$$
$$((\lambda.f)\circ)^\circ = \lambda.(f \circ \gamma)^\circ,$$

tehát az integrál linearitásából és a komplex vonalintegrál definíciójából kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\gamma} (f + g) = \int\limits_{\gamma} f + \int\limits_{\gamma} g,$$

$$\int\limits_{\gamma} (\lambda.f) = \lambda. \int\limits_{\gamma} f.$$

Továbbá, ha h jelöli a $Dom(D\gamma) \to F$; $t \mapsto f(\gamma(t)).(D\gamma)(t)$ függvény 0-val való kiterjesztését $\mathbb{R}$-re, akkor nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{R} \ni t$-re

$$\|h(t)\| \leq |D\gamma|^\circ(t) \sup_{t'\in Dom(\gamma)} \|f(\gamma(t'))\| = |D\gamma|^\circ(t) \sup_{z\in Im(\gamma)} \|f(z)\|,$$

tehát

$$\left\|\int\limits_{\gamma} f\right\| = \left\|\int\limits_{\mathbb{R}} h\ d\mu_{\mathbb{R}}\right\| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \|h\|\ d\mu_{\mathbb{R}} \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |D\gamma|^{\circ}\ d\mu_{\mathbb{R}}\right) \sup_{z\in Im(\gamma)} \|f(z)\| =$$

$$= \mathbf{L}(\gamma) \sup_{z\in Im(\gamma)} \|f(z)\|,$$

amivel az a) állítást igazoltuk.

b) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $Dom(\gamma) = [t_0, t_n]$, és minden $k < n$ természetes számra a γ függvény folytonosan differenciálható a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon, és a $D\gamma$ függvénynek létezik t_k-ban jobboldali és t_{k+1}-ben baloldali határértéke. Legyen $k < n$ rögzített természetes szám. Ekkor a $(g \circ \gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[} :\to F$ függvény folytonosan differenciálható és a $D((g \circ \gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[}) = (f \circ \gamma).(D\gamma)$ a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon. Ebből látszik, hogy a $D((g\circ\gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[})$ deriváltfüggvénynek létezik t_k-ban jobboldali és t_{k+1}-ben baloldali határértéke, így $\left(D((g \circ \gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[})\right)^{\circ} \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ (X. fejezet, 1. pont, 5. megjegyzés). Ezért a Newton-Leibniz-tétel X. fejezet, 2. pontbeli általánosítását alkalmazva

$$\int\limits_{]t_k,t_{k+1}[} (f \circ \gamma)(D\gamma)\ d\mu_{\mathbb{R}} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(D((g \circ \gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[})\right)^{\circ}\ d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \lim_{t_{k+1}}((g \circ \gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[}) - \lim_{t_k}((g \circ \gamma)|_{]t_k,t_{k+1}[}) = g(\gamma(t_{k+1})) - g(\gamma(t_k))$$

adódik. Ebből kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\gamma} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{]t_k,t_{k+1}[} (f \circ \gamma)(D\gamma)\ d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(g(\gamma(t_{k+1})) - g(\gamma(t_k))) = g(\gamma(t_n)) - g(\gamma(t_0)) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ azok a számok, amelyekre $Dom(\gamma) = [a, b]$.

c) Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ szakaszonként C^1-osztályú ív. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $Dom(\gamma) = [t_0, t_n]$, és minden $k < n$ természetes számra a γ függvény folytonosan differenciálható a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon, és a $D\gamma$ függvénynek létezik t_k-ban jobboldali és t_{k+1}-ben baloldali határértéke. Ekkor $(\sigma^{-1}(t_k))_{0\leq k\leq n}$ olyan szigorúan monoton növő rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $Dom(\gamma\circ\sigma) = [a', b'] = [\sigma^{-1}(t_0), \sigma^{-1}(t_n)]$, és minden $k < n$ természetes számra a $\gamma \circ \sigma$ függvény folytonosan differenciálható a $]\sigma^{-1}(t_k), \sigma^{-1}(t_{k+1})[$ intervallumon, továbbá a $D(\gamma \circ \sigma) = ((D\gamma) \circ \sigma).(D\sigma)$ deriváltfüggvénynek létezik $\sigma^{-1}(t_k)$-ban jobboldali és $\sigma^{-1}(t_{k+1})$-ben baloldali határértéke, tehát $\gamma \circ \sigma$ szakaszonkénmt C^1-osztályú ív.

Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$. Nyilvánvaló, hogy minden $k < n$ természetes számra az $(f \circ \gamma)(D\gamma)$ függény leszűkítése a

$]t_k, t_{k+1}[$ intervallumra folytonos és korlátos, tehát Lebesgue-integrálható, továbbá a $\sigma|_{]\sigma^{-1}(t_k),\sigma^{-1}(t_{k+1})[} :]\sigma^{-1}(t_k), \sigma^{-1}(t_{k+1})[\to]t_k, t_{k+1}[$ függvény C^1-diffeomorfizmus, így a helyettesítéses integrálás tétele alapján az $(((f \circ \gamma)(D\gamma)) \circ \sigma)(D\sigma)$ függvény Lebesgue-integrálható a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon és

$$\int_{]\sigma^{-1}(t_k),\sigma^{-1}(t_{k+1})[} (((f \circ \gamma)(D\gamma)) \circ \sigma)(D\sigma)\ d\mu_{\mathbb{R}} = \int_{]t_k,t_{k+1}[} (f \circ \gamma)(D\gamma)\ d\mu_{\mathbb{R}},$$

amiből következik, hogy

$$\int_{]t_k,t_{k+1}[} (f \circ \gamma)(D\gamma)\ d\mu_{\mathbb{R}} = \int_{]\sigma^{-1}(t_k),\sigma^{-1}(t_{k+1})[} (f \circ (\gamma \circ \sigma))(D(\gamma \circ \sigma))\ d\mu_{\mathbb{R}}.$$

Ebből k szerinti összegzéssel kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma\circ\sigma} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{]\sigma^{-1}(t_k),\sigma^{-1}(t_{k+1})[} (f \circ (\gamma \circ \sigma))(D(\gamma \circ \sigma))\ d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{]t_k,t_{k+1}[} (f \circ \gamma)(D\gamma)\ d\mu_{\mathbb{R}} = \int_{\gamma} f.$$

d) Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor ez a függvénysorozat az U minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens, továbbá az $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény folytonos az U halmazon. Tehát ha γ tetszőleges szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $Im(\gamma)$ kompakt halmazon, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in Im(\gamma)} \|f_n(z) - f(z)\| = 0$. Ezért $n \in \mathbb{N}$ esetén az a) alapján

$$\left\| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right\| = \left\| \int_{\gamma} (f_n - f) \right\| \leq \mathbf{L}(\gamma) \sup_{z\in Im(\gamma)} \|f_n(z) - f(z)\|,$$

tehát $\int\limits_{\gamma} f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n$.

Ha a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, és γ egy U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in Im(\gamma)} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) - f(z) \right\| = 0,$$

ahol $f := \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$. Ekkor az a) alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma} f_k - \int_{\gamma} f \right\| = \left\| \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k - f \right) \right\| \leq \mathbf{L}(\gamma) \sup_{z\in Im(\gamma)} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) - f(z) \right\|,$$

tehát $\displaystyle\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma f_k.$

Ha a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ függvénysor az U minden kompakt részhalmazán normálisan konvergens és γ egy U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{z\in Im(\gamma)} \|f_k(z)\|$ numerikus sor konvergens, és az a) alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\left\| \int_\gamma f_k \right\| \leq \mathbf{L}(\gamma) \sup_{z\in Im(\gamma)} \|f_k(z)\|,$$

így a majoráns kritérium szerint a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\gamma f_k$ vektorsor abszolút konvergens az F Banach-térben. ■

Példák (*komplex vonalintegrálokra*).

1) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(z_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$. Jelölje γ azt a $[0,1] \to \mathbb{C}$ függvényt, amelyre $\gamma(1) := z_n$, és minden $t \in [0,1[$ esetén

$$\gamma(t) := z_k + (nt-k)(z_{k+1}-z_k),$$

ahol $0 \leq k < n$ az az egyértelműen meghatározott természetes szám, amelyre $t \in [k/n, (k+1)/n[$. Könnyen belátható, hogy γ szakszonként C^1-osztályú ív, és

$$Im(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n-1} [z_k, z_{k+1}].$$

Ha F komplex Banach-tér, és $f{:}\mathbb{C}\rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int_\gamma f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[z_k,z_{k+1}]} f.$$

Ebből következik, hogy a komplex vonalintegrál a szakasz menti integrál általánosítása. Az ilyen típusú íveket *törtvonal-íveknek* vagy *poligonális íveknek* nevezzük; ezek értékkészletei a *törtvonalak* vagy *poligonok.* A törtvonal-ívek mentén vett komplex vonalintegrálokat *törtvonal-integráloknak* vagy *poligonális integráloknak* nevezzük.

2) Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{U}$ és $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Ekkor a

$$[0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \mathfrak{a} + (wR)Exp(2\pi imt)$$

függvényt a $\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}$ szimbólummal jelöljük. Világos, hogy $\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}$ olyan $\mathbb{C}$-ben haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amelyre

$$Im(\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}) = \{\ z \in \mathbb{C} \mid |z-\mathfrak{a}| = R\ \}.$$

A $\gamma_{\mathfrak{a},R,1,1}$ ívet általában a rövidebb $\gamma_{\mathfrak{a},R}$ szimbólummal jelöljük. A $\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}$ alakú íveket *köríveknek* nevezzük; ezek értékkészletei a *körvonalak*. A körívek mentén vett komplex vonalintegrálokat *körintegráloknak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $Dom(D\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}) =]0,1[$ és minden $t \in]0,1[$ esetén

$$(D\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m})(t) = (2\pi imwR)Exp(2\pi imt),$$

ezért ha F komplex Banach-tér, és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, hogy $\{z \in \mathbb{C} | |z - \mathfrak{a}| = R\} \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}} f = (2\pi imwR) \int\limits_{]0,1[} f\left(\mathfrak{a} + (wR)Exp(2\pi imt)\right) Exp(2\pi imt) d\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Definíció. Legyen γ $\mathbb{C}$-ben haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív. Ekkor az

$$Ind_\gamma : \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z}$$

függvényt a γ ív *indexfüggvényének* nevezzük és $z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ esetén az $Ind_\gamma(z)$ számot a z pont γ szerinti *indexének* nevezzük.

Természetesen a definíció értelmes, mert $z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ esetén az

$$\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z} : \mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$$

függvény folytonos, és $Im(\gamma)$ részhalmaza $\mathbb{C} \setminus \{z\}$-nek.

Példa. (*Körív indexfüggvénye.*) Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{U}$ és $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ekkor

$$Dom(Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}}) = \{\ z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathfrak{a}| \neq R\ \},$$

és $z \in \mathbb{C}$, $|z - \mathfrak{a}| \neq R$ esetén

$$Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}}(z) = \begin{cases} m & , \text{ha } |z - \mathfrak{a}| < R, \\ 0 & , \text{ha } |z - \mathfrak{a}| > R \end{cases}.$$

Speciálisan, teljesül az, hogy

$$Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R}}(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } |z - \mathfrak{a}| < R, \\ 0 & , \text{ha } |z - \mathfrak{a}| > R \end{cases}.$$

Legyen ugyanis $z \in Dom(\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m})$ rögzített, tehát $z \in \mathbb{C}$ és $|z - \mathfrak{a}| \neq R$. Ekkor

$$Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}} \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{]0,1[} \frac{1}{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}(t) - z} (D\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m})(t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{]0,1[} \frac{1}{\mathfrak{a} + RwExp(2\pi imt) - z} (2\pi imRw)Exp(2\pi imt)\ d\mu_R(t) =$$

$$= m \int\limits_{]0,1[} \frac{RwExp(2\pi imt)}{\mathfrak{a} + RwExp(2\pi imt) - z}\ d\mu_R(t).$$

Ha $|z - \mathfrak{a}| < R$, akkor $\left|\frac{z-\mathfrak{a}}{Rw}\right| < 1$, tehát

$$Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}}(z) = m \int\limits_{]0,1[} \frac{1}{1 - \left(\frac{z-\mathfrak{a}}{Rw}\right) Exp(-2\pi imt)}\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= m \int\limits_{]0,1[} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathfrak{a}}{Rw}\right)^k Exp(-2\pi imkt)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathfrak{a}}{Rw}\right)^k \int\limits_{]0,1[} Exp(-2\pi imkt)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = m.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{z-\mathfrak{a}}{Rw}\right)^k Exp \circ (-(2\pi imk).id_{\mathbb{R}})$ függvénysor az egész $\mathbb{R}$-en *normálisan konvergens* a $\left|\frac{z-\mathfrak{a}}{Rw}\right| < 1$ egyenlőtlenség miatt, ezért az integrálás és a szummázás sorrendje felcserélhető, továbbá minden $\mathbb{N} \ni k$-ra az elemi Newton-Leibniz formula alapján

$$\int\limits_{]0,1[} Exp(-2\pi imkt)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \delta_{k,0}$$

teljesül.

Ha viszont $|z - \mathfrak{a}| > R$, akkor $\left|\frac{Rw}{z-\mathfrak{a}}\right| < 1$, tehát

$$Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}}(z) = -\frac{m}{z-\mathfrak{a}} \int\limits_{]0,1[} \frac{RwExp(2\pi imt)}{1 - \left(\frac{Rw}{z-\mathfrak{a}}\right) Exp(2\pi imt)}\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= -\frac{m}{z-\mathfrak{a}} \int\limits_{]0,1[} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Rw}{z-\mathfrak{a}}\right)^k Exp(2\pi mkt)\right) RwExp(2\pi imt)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= -m \int\limits_{]0,1[} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Rw}{z-\mathfrak{a}}\right)^{k+1} Exp(2\pi m(k+1)t)\right) d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= -m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Rw}{z - \mathfrak{a}} \right)^{k+1} \int\limits_{]0,1[} Exp(2\pi m(k+1)t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = 0.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{Rw}{z - \mathfrak{a}} \right)^{k+1} Exp \circ ((2\pi i m(k+1)).id_{\mathbb{R}})$ függvénysor az egész $\mathbb{R}$-en *normálisan konvergens* az $\left| \frac{Rw}{z - \mathfrak{a}} \right| < 1$ egyenlőtlenség miatt, ezért az integrálás és a szummázás sorrendje felcserélhető, továbbá minden $\mathbb{N} \ni k$-ra az elemi Newton-Leibniz formula alapján

$$\int\limits_{]0,1[} Exp(-2\pi i m(k+1)t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = 0$$

teljesül.

Állítás. Ha γ $\mathbb{C}$-ben haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor Ind_γ olyan folytonos függvény, hogy $Im(Ind_\gamma) \subseteq \mathbb{Z}$, (tehát a $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ halmaz minden pontjának γ szerinti indexe *egész szám*) továbbá minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $Im(\gamma) \subseteq \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$, akkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$ pontra $Ind_\gamma(z) = 0$.

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy $Im(Ind_\gamma) \subseteq \mathbb{Z}$.

A γ ív szakaszonként C^1-osztályú, ezért vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan $(t_k)_{0 \le k \le n}$ szigorúan monoton növő rendszert $\mathbb{R}$-ben, hogy $Dom(\gamma) = [t_0, t_n]$, és minden $k < n$ természetes számra a γ függvény folytonosan differenciálható a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon, és a $D\gamma$ deriváltfüggvénynek létezik t_k-ban jobboldali és t_{k+1}-ben baloldali határértéke. Legyen $z \in Dom(Ind_\gamma) = \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ rögzített pont. Az index definíciója szerint

$$(2\pi i) Ind_\gamma(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{D\gamma}{\gamma - z} \right)^{\circ} d\mu_{\mathbb{R}},$$

és a $\left(\frac{D\gamma}{\gamma - z} \right)^{\circ} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható, tehát lokálisan is $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható (X. fejezet, 2. pont). Tekintsük most a

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{D\gamma}{\gamma - z} \right)^{\circ} (s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s)$$

függvényt. A Newton-Leibniz tétel (X. fejezet, 2. pont) szerint Φ folytonos függvény, és $D\Phi = \left(\frac{D\gamma}{\gamma - z} \right)^{\circ}$ teljesül azon pontok halmazán, ahol a $\left(\frac{D\gamma}{\gamma - z} \right)^{\circ}$ függvény folytonos. Speciálisan; $\bigcup\limits_{k \in n}]t_k, t_{k+1}[\subseteq Dom(D\Phi)$, és $t \in \bigcup\limits_{k \in n}]t_k, t_{k+1}[$ esetén $(D\Phi)(t) = \frac{(D\gamma)(t)}{\gamma(t) - z}$. Továbbá nyilvánvaló, hogy $\Phi(t_0) = 0$ és $\Phi(t_n) = (2\pi i) Ind_\gamma(z)$. Tekintsük most az

$$g := \frac{Exp \circ \Phi}{\gamma - z} : Dom(\gamma) \to \mathbb{C}$$

folytonos függvényt. Ez a függvény differenciálható az $\bigcup_{k\in n}]t_k, t_{k+1}[$ halmazon, és $t \in \bigcup_{k\in n}]t_k, t_{k+1}[$ esetén

$$(Dg)(t) = \frac{Exp(\Phi(t))(D\Phi)(t)(\gamma(t)-z) - Exp(\Phi(t))(D\gamma)(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0,$$

hiszen $(D\Phi)(t)(\gamma(t)-z) = (D\gamma)(t)$. Ebből következik, hogy minden $k < n$ természetes számra a g függvény a $]t_k, t_{k+1}[$ intervallumon állandó. Ugyanakkor g mindegyik t_k osztópontban is folytonos, ezért a g függvény a $[t_0, t_n] = Dom(\gamma)$ intervallumon állandó. Ebből következik, hogy

$$\frac{Exp\left((2\pi i)Ind_\gamma(z)\right)}{\gamma(t_n)-z} = \frac{\Phi(t_n)}{\gamma(t_n)-z} = \frac{\Phi(t_0)}{\gamma(t_0)-z} = \frac{Exp(0)}{\gamma(t_0)-z} = \frac{1}{\gamma(t_0)-z},$$

vagyis fennáll az

$$Exp\left((2\pi i)Ind_\gamma(z)\right) = \frac{\gamma(t_n)-z}{\gamma(t_0)-z}$$

egyenlőség. A γ ív zártsága folytán $\gamma(t_0) = \gamma(t_n)$, tehát $Exp\left((2\pi i)Ind_\gamma(z)\right) = 1$, így $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(II) Megmutatjuk, hogy az $Ind_\gamma : \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \to \mathbb{C}$ függvény folytonos. Ehhez legyen $z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ rögzített pont, és $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$-ban, amely z-hez konvergál. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(z;\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$, továbbá legyen $N \in \mathbb{N}$ olysn, hogy minden $n > N$ természetes számra $z_n \in B_r(z;\mathbb{C})$. Nyilvánvaló, hogy a $\left(\left(\frac{D\gamma}{\gamma - z_n}\right)^\circ\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathbb{R}$-en pontonként konvergens és $\left(\frac{D\gamma}{\gamma - z}\right)^\circ = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{D\gamma}{\gamma - z_n}\right)^\circ$. Ugyanakkor minden $n > N$ természetes számra és $Dom(\gamma) \ni t$-re $|\gamma(t) - z_n| \geq r$, ezért

$$\left|\left(\frac{D\gamma}{\gamma - z_n}\right)^\circ\right| \leq \frac{1}{r}\left(\sup_{t\in Dom(D\gamma)}\right)\chi_{Dom(\gamma)} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}}).$$

Ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$Ind_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{D\gamma}{\gamma - z}\right)^\circ d\mu_{\mathbb{R}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{D\gamma}{\gamma - z_n}\right)^\circ d\mu_{\mathbb{R}} = \lim_{n\to\infty} Ind_\gamma(z_n)$$

teljesül, ami az átviteli elv alapján azt jelenti, hogy Ind_γ folytonos a z pontban.

(III) Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $Im(\gamma) \subseteq \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$. Ha $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$, akkor minden $Im(\gamma) \ni z'$-re $|z' - z| \geq ||z'| - |z|| \geq |z| - |z'| \geq |z| - R$, ezért

$$|Ind_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z}\right| \leq \frac{\mathbf{L}(\gamma)}{2\pi}\sup_{z'\in Im(\gamma)}\frac{1}{|z'-z|} \leq \frac{\mathbf{L}(\gamma)}{2\pi}\frac{1}{|z| - R}.$$

Ez azt mutatja, hogy az $R' := R + \dfrac{\mathbf{L}(\gamma)}{2\pi}$ szám olyan, hogy $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_{R'}(0;\mathbb{C})$ esetén $|Ind_\gamma(z)| < 1$, ezért $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ miatt $Ind_\gamma(z) = 0$. Könnyen látható, hogy a $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$ halmaz (ívszerűen) összefüggő, ezért az Ind_γ függvény folytonossága miatt $Ind_\gamma\langle\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})\rangle$ is összefüggő halmaz $\mathbb{C}$-ben. Ugyanakkor $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$, ezért az Ind_γ függvény a $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$ halmazon állandó. De $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{R'}(0;\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})$, és az előzőek szerint Ind_γ a $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{R'}(0;\mathbb{C})$ halmazon azonosan 0. ezért $Ind_\gamma\langle\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0;\mathbb{C})\rangle = \{0\}$. ■

Az állításból következik, hogy az Ind_γ függvény a $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ halmaz minden összefüggő komponensén *állandó*.

Gyakorlatok

1. Legyen E normált tér, $n \in \mathbb{N}$ és $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq n}$ olyan rendszer, amelynek minden tagja E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív. Feltesszük, hogy minden $k < n$ természetes számra a γ_k ív végpontja egyenlő a γ_{k+1} ív kezdőpontjával. Minden $k \leq n$ természetes számra legyenek $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ azok a pontok, amelyekre $Dom(\gamma_k) = [a_k, b_k]$. Értelmezzük azt a $\gamma : [0,1] \to E$ függvényt, amelyre $\gamma(1) = \gamma_n(b_n)$ és minden $t \in [0,1[$ esetén

$$\gamma(t) := \gamma_k(a_k + (nt - k)(b_k - a_k)),$$

ahol $k < n$ az az egyértelműen meghatározott természetes szám, amelyre $t \in [k/n, (k+1)/n[$. Ekkor γ E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív és

$$Im(\gamma) = \bigcup_{k=0}^{n} Im(\gamma_k).$$

Ezt a γ ívet az $\bigoplus\limits_{k=0}^{n} \gamma_k$ szimbólummal jelöljük. Ha $E := \mathbb{C}$, F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amelyre $Im\left(\bigoplus\limits_{k=0}^{n} \gamma_k\right) \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{\bigoplus\limits_{k=0}^{n} \gamma_k} f = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f.$$

2. (*A vonalintegrál általánosítása.*) Legyen E normált tér és F Banach-tér. Ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény (vagyis E feletti *operátormező*) és γ olyan E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, amelyre $Im(\gamma) \subseteq Dom(\omega)$, akkor az

$$(\omega \circ \gamma)(D\gamma) : Dom(\gamma) \to F; \quad t \mapsto \omega(\gamma(t))((D\gamma)(t))$$

függvény 0-val vett kiterjesztése $\mathbb{R}$-re integrálható a Lebesgue-mérték szerint; ekkor az

$$\int\limits_{\gamma} \omega := \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\omega(\gamma(t))((D\gamma)(t))\right)^{\circ} \, d\mu_{\mathbb{R}}$$

F-beli vektort az ω operátormező γ menti *vonalintegráljának* nevezzük.

a) Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $f : \mathbb{K} \rightarrowtail F$ folytonos függvény. Ekkor az

$$\omega_f : Dom(f) \to \mathscr{L}(\mathbb{K};F); \quad z \mapsto (z' \mapsto z'.f(z))$$

függvény folytonos, és ha γ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó folytonos ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(f) = Dom(\omega_f)$, akkor

$$\int\limits_{\gamma} \omega_f = \int\limits_{Dom(D\gamma)} f(\gamma(t))(D\gamma)(t) \, d\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

tehát $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ esetén

$$\int_\gamma \omega_f = \int_\gamma f,$$

vagyis az az operátormezők imént bevezetett vonalintegrálja a komplex vonalintegrál általánosítása.

b) Tegyük fel, hogy E normált tér $\mathbb{K}$ felett, és legyen $\mathfrak{g} : E \times E \to \mathbb{K}$ olyan szimmetrikus, folytonos bilineáris funkcionál, amelyre az $E \to E'$; $x \mapsto \mathfrak{g}(x, \cdot)$ lineáris operátor bijekció. Ha $\zeta : E \rightarrowtail E$ folytonos függvény (vagyis E feletti *vektormező*), akkor az

$$\omega_{\mathfrak{g},\zeta} : Dom(\zeta) \to E'; \quad x \mapsto \mathfrak{g}(\zeta(x), \cdot)$$

kovektormező folytonos, és ha γ olyan E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(\zeta) = Dom(\omega_{\mathfrak{g},\zeta})$, akkor

$$\int_\gamma \omega_{\mathfrak{g},\zeta} = \int_{Dom(D\gamma)} \mathfrak{g}(\zeta(\gamma(t)), (D\gamma)(t))\, d\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Ezt az F-beli vektort a ζ vektormező $\mathfrak{g}$ szerinti *munkájának* nevezzük a γ ív mentén, és ezt a

$$(\mathfrak{g}) \int_\gamma \zeta$$

szimbólummal is jelöljük.

3. (*Az általános vonalintegrál tulajdonságai.*) Legyen E normált tér és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett.

a) Ha $\omega, \omega' : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E; F)$ folytonos függvények, $\lambda \in \mathbb{K}$, és γ olyan E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(\omega)$, akkor

$$\int_\gamma (\omega + \omega') = \int_\gamma \omega + \int_\gamma \omega',$$

$$\int_\gamma (\lambda.\omega) = \lambda. \int_\gamma \omega,$$

$$\left\| \int_\gamma \omega \right\| \leq \mathbf{L}(\gamma) \sup_{x \in Im(\gamma)} \|\omega(x)\|.$$

Ha $\mathfrak{g} : E \times E \to \mathbb{K}$ olyan szimmetrikus, folytonos bilineáris funkcionál, amelyre az $E \to E'$; $x \mapsto \mathfrak{g}(x, \cdot)$ lineáris operátor bijekció, továbbá $\zeta : E \rightarrowtail E$ folytonos függvény, és γ olyan E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(\omega)$, akkor

$$\left\| (\mathfrak{g}) \int_\gamma \zeta \right\| \leq \|\mathfrak{g}\| \mathbf{L}(\gamma) \sup_{x \in Im(\gamma)} \|\zeta(x)\|.$$

b) Ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény, $g : E \rightarrowtail F$ primitív függvénye ω-nak, és γ olyan E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(g)$, akkor

$$\int_\gamma \omega = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ azok a pontok, amelyekre $Dom(\gamma) = [a, b]$.

c) Legyenek $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $a' \leq b'$, és $\sigma : [a', b'] \to [a, b]$ olyan szigorúan monoton növő folytonos függvény, hogy a $\sigma|_{]a',b'[} :]a', b'[\to]a, b[$ függvény C^1-diffeomorfizmus, valamint $D\sigma$-nak létezik határértéke a'-ben és b'-ben. Ha $\gamma : [a, b] \to E$ szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor a $\gamma \circ \sigma$ függvény is E-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, és ha $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ olyan folytonos függvény, hogy $Im(\gamma) \subseteq Dom(\omega)$, akkor

$$\int_{\gamma\circ\sigma} \omega = \int_\gamma \omega.$$

d) Legyen $U \subseteq E$ és $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek minden tagja $U \to \mathscr{L}(E;F)$ folytonos függvény. Ha ez a függvénysorozat *lokálisan egyenletesen konvergens* az U halmazon, akkor minden U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú γ ívre

$$\int_\gamma \left(\lim_{n\to\infty} \omega_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \omega_n$$

Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega_n$ függvénysor *lokálisan egyenletesen konvergens* az U halmazon (például *normálisan konvergens az U halmazon*), akkor minden U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú γ ívre a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\gamma \omega_n$$

vektorsor abszolút konvergens, és

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \omega_n.$$

4. Cauchy integráltétele

Definíció. Legyen M metrikus tér. Azt mondjuk, hogy a $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to M$ zárt folytonos ívek *kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ folytonos függvény, hogy $Im(H) \subseteq U$, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$.

Definíció. Legyen M metrikus tér. Egy $U \subseteq M$ halmazt *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha U ívszerűen összefüggő halmaz, és minden U-ban haladó, $[0,1]$ intervallumon értelmezett, zárt folytonos ív konturhomotóp az U halmazban egy $[0,1] \to U$ konstansfüggvénnyel. Az M metrikus teret *egyszeresen összefüggőnek* nevezzük, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

Szemléletesen az mondható, hogy az $U \subseteq M$ halmaz egyszeres összefüggősége azt jelenti, hogy U ívszerűen összefüggő és minden U-ban haladó zárt folytonos ív egy U-beli pontba deformálható folytonosan, U-ban haladó zárt folytonos íveken keresztül.

Az egyszeres összefüggőség nyilvánvalóan topologikus tulajdonság. Megjegyezzük, hogy az általános topológiában megadható a folytonos függvények homotópiájának, és a metrikus (sőt topologikus) terek egyszeres összefüggőségének általánosítása (**3**. és **5**. gyakorlatok).

Példák. 1) Ha E normált tér, akkor minden $U \subseteq E$ csillaghalmaz (így minden konvex halmaz is) egyszeresen összefüggő. Valóban, ha $c \in U$ csillagcentruma U-nak, és $\gamma : [0,1] \to E$ olyan zárt folytonos ív, hogy $Im(\gamma) \subseteq U$, akkor a

$$H : [0,1] \times [0,1] \to E; \quad (p,t) \mapsto pc + (1-p)\gamma(t)$$

függvény folytonos, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma(t)$, $H(1,t) = c$, és minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$, mert $\gamma(0) = \gamma(1)$, továbbá $Im(H) = \bigcup\limits_{t \in [0,1]} [c, \gamma(t)] \subseteq U$, mert a γ ív U-ban halad és c csillagcentruma U-nak.

2) Legyenek $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{U}$ és $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ekkor a a $\gamma_{\mathfrak{a},R,1,m}$ és $\gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}$ és ívek kontúrhomotópok minden olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazban, amelyre $\{z \in \mathbb{C} || z - \mathfrak{a}| = R\} \subseteq U$. Valóban, létezik olyan $\theta \in [0,1[$, hogy $w = Exp(2\pi i\theta)$, és ekkor a

$$H : [0,1] \times [0,1] \to E; \quad (p,t) \mapsto \mathfrak{a} + R \cdot Exp(2\pi i(p\theta + mt))$$

függvény folytonos, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_{\mathfrak{a},R,1,m}(t)$, $H(1,t) = \gamma_{\mathfrak{a},R,w,m}(t)$, és minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$, továbbá $Im(H) = \{z \in \mathbb{C} || z - \mathfrak{a}| = R\} \subseteq U$.

Tétel. (*Cauchy intergáltétele.*) Legyen F komplex Banach-tér, és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, hogy $Dom(f)$ nyílt halmaz és minden $z \in Dom(f)$ esetén van olyan g primitív függvénye f-nek, amelyre $z \in Dom(g)$. Ha $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ívek, amelyek kontúrhomotópok $Dom(f)$-ben, akkor

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Bizonyítás. Legyen $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, hogy $Im(H) \subseteq Dom(f)$, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$.

Az f-re vonatkozó hipotézis alapján az $Im(H)$ kompakt halmaznak van olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése, hogy minden $i \in I$ esetén $\Omega_i \subseteq Dom(f)$ és létezik f-nek Ω_i-n értelmezett primitív függvénye. A Lebesgue-lemma szerint van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in Im(H)$ esetén létezik olyan $i \in I$, hogy $B_r(z;\mathbb{C}) \subseteq \Omega_i$. Tehát az r szám olyan, hogy minden $Im(H) \ni z$-re f-nek létezik a $B_r(z;\mathbb{C})$ gömbön értelmezett primitív függvénye.

Most a Heine-tételt alkalmazzuk, vagyis kihasználjuk a H egyenletes folytonosságát. Tehát az r-hez veszünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy minden $(p,t),(p',t') \in [0,1]\times[0,1]$ esetén, ha $\max(|p'-p|,|t'-t|) < \delta$, akkor $|H(p',t') - H(p,t)| < r$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan szám, amelyre $n > 1/\delta$, vagyis $1/n < \delta$. Minden $j,k \leq n$ természetes számra legyen $p_j := j/n$ és $t_k := k/n$.

Minden $j \leq n$ természetes számra értelmezzük a $\Gamma_j : [0,1] \to \mathbb{C}$ függvényt úgy, hogy $\Gamma_0 := \gamma_0$, $\Gamma_n := \gamma_1$, és $0 < j < n$ esetén Γ_j a $(H(p_j,t_k))_{0\leq k\leq n}$ rendszer által meghatározott törtvonal-ív. Megmutatjuk, hogy minden $j \leq n$ természetes számra Γ_j olyan $Dom(f)$-ben haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amelyre minden $k < n$ természetes szám esetében $\Gamma_j\langle[t_k,t_{k+1}]\rangle \subseteq B_r(H(p_j,t_k);\mathbb{C})$.

A definíció szerint $\Gamma_0 := \gamma_0$, tehát Γ_0 olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amely $Dom(f)$-ben halad. Ha $k < n$ tetszőleges természetes szám, akkor $t \in [t_k,t_{k+1}]$ esetén $|t - t_k| \leq 1/n < \delta$, tehát

$$|\Gamma_0(t) - H(p_0,t_k)| = |\gamma_0(t) - H(0,t_k)| = |H(0,t) - H(0,t_k)| < r,$$

vagyis $\Gamma_0(t) \in B_r(H(p_0,t_k);\mathbb{C})$.

A definíció szerint $\Gamma_n := \gamma_1$, tehát Γ_n olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amely $Dom(f)$-ben halad. Ha $k < n$ tetszőleges természetes szám, akkor $t \in [t_k,t_{k+1}]$ esetén $|t - t_k| \leq 1/n < \delta$, tehát

$$|\Gamma_n(t) - H(p_n,t_k)| = |\gamma_1(t) - H(1,t_k)| = |H(1,t) - H(1,t_k)| < r,$$

vagyis $\Gamma_n(t) \in B_r(H(p_n,t_k);\mathbb{C})$.

Legyen $0 < j < n$ tetszőleges természetes szám. Ekkor a definíció szerint Γ_j a $(H(p_j,t_k))_{0\leq k\leq n}$ rendszer által meghatározott törtvonal-ív, tehát szakaszonként C^1-osztályú ív, továbbá zárt is, mert $\Gamma_j(0) := H(p_j,t_0) = H(p_j,0) = H(p_j,1) = H(p_j,t_n) =: \Gamma_j(1)$. Legyen $k < n$ természetes szám, és $t \in [t_k,t_{k+1}]$, azaz $k/n \leq t \leq (k+1)/n$. Ekkor $|t_{k+1} - t_k| = 1/n < \delta$ és $0 \leq nt - k \leq 1$, így a Γ_j definíciója alapján

$$\begin{aligned}|\Gamma_j(t) - H(p_j,t_k)| &= |H(p_j,t_k) + (nt-k)(H(p_j,t_{k+1}) - H(p_j,t_k)) - H(p_j,t_k)| = \\ &= (nt-k)|H(p_j,t_{k+1}) - H(p_j,t_k)| \leq |H(p_j,t_{k+1}) - H(p_j,t_k)| < r,\end{aligned}$$

vagyis $\Gamma_j(t) \in B_r(H(p_j,t_k);\mathbb{C})$. Ebből látható az is, hogy

$$Im(\Gamma_j) = \bigcup_{k\in n} \Gamma_j\langle[t_k,t_{k+1}]\rangle \subseteq \bigcup_{k\in n} B_r(H(p_j,t_k);\mathbb{C}) \subseteq Dom(f),$$

vagyis Γ_j is a $Dom(f)$ halmazban halad.
Most megmutatjuk, hogy minden $j < n$ természetes számra

$$\int_{\Gamma_j} f = \int_{\Gamma_{j+1}} f$$

teljesül. Ha ez így volna, akkor a bizonyítás kész van, hiszen akkor

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\Gamma_0} f + \sum_{j\in n}\left(\int_{\Gamma_{j+1}} f - \int_{\Gamma_j} f\right) = \int_{\Gamma_n} f = \int_{\gamma_1} f.$$

A bizonyításhoz bevezetünk egyszerűsített jelöléseket. Minden $j,k \leq n$ természetes számra legyen $z_{j,k} := H(p_j,t_k)$ és $B_{j,k} := B_r(z_{j,k};\mathbb{C})$, továbbá jelöljön $g_{j,k}$ egy olyan $B_{j,k} \to F$ holomorf függvényt, amely primitív függvénye f-nek, azaz $Dg_{j,k} = f$ a $B_{j,k}$ gömbön.
Ha $j \leq n$ természetes szám, akkor minden $k < n$ természetes számra a $\Gamma_j|_{[t_k,t_{k+1}]}$ ív $B_{j,k}$-ban halad, amelyen $g_{j,k}$ primitív függvénye f-nek, következésképpen

$$\int_{\Gamma_j} f = \sum_{k\in n} \int_{\Gamma_j|_{[t_k,t_{k+1}]}} f = \sum_{k\in n} \left(g_{j,k}(\Gamma_j(t_{k+1})) - g_{j,k}(\Gamma_j(t_k))\right) =$$
$$= \sum_{k\in n} \left(g_{j,k}(z_{j,k+1}) - g_{j,k}(z_{j,k})\right).$$

Legyen most $j < n$ rögzített természetes szám és

$$\Delta_j := \int_{\Gamma_{j+1}} f - \int_{\Gamma_j} f =$$
$$= \sum_{k\in n} \left(g_{j+1,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j+1,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j,k+1}) + g_{j,k}(z_{j,k})\right).$$

Minden $k \leq n$ természetes számra a $g_{j+1,k} - g_{j,k} : B_{j+1,k} \cap B_{j,k} \to F$ függvény holomorf, és $D(g_{j+1,k} - g_{j,k}) = 0$ a definíciós tartományán, továbbá ez a definíciós tartomány összefüggő (sőt konvex) halmaz; ezért a $g_{j+1,k} - g_{j,k}$ függvény *állandó*. Ugyanakkor $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ esetén $z_{j+1,k+1} \in B_{j+1,k} \cap B_{j,k}$. Valóban, a (p_{j+1},t_{k+1}) és (p_{j+1},t_k) pontok távolsága $[0,1] \times [0,1]$-ben a max-metrika szerint éppen $1/n$, tehát δ-nál kisebb, így $|H(p_{j+1},t_{k+1}) - H(p_{j+1},t_k)| < r$, tehát $z_{j+1,k+1} := H(p_{j+1},t_{k+1}) \in B_r(H(p_{j+1},t_k);\mathbb{C}) =: B_{j+1,k}$. Hasonlóan; a (p_{j+1},t_{k+1}) és (p_j,t_k) pontok távolsága $[0,1] \times [0,1]$-ben a max-metrika szerint éppen $1/n$, tehát δ-nál kisebb, így $|H(p_{j+1},t_{k+1}) - H(p_j,t_k)| < r$, tehát $z_{j+1,k+1} := H(p_{j+1},t_{k+1}) \in$

$B_r(H(p_j,t_k);\mathbb{C}) =: B_{j,k}$. Ez azt jelenti, hogy $z_{j+1,k+1} \in B_{j+1,k} \cap B_{j,k}$. Teljesen hasonó érveléssel kapjuk, hogy $z_{j+1,k} \in B_{j+1,k} \cap B_{j,k}$ is teljesül, ezért

$$g_{j+1,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) = g_{j+1,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j+1,k}),$$

amiből átrendezéssel adódik, hogy

$$g_{j+1,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j+1,k}(z_{j+1,k}) = g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j+1,k}).$$

Ezt behelyettesítjük a Δ_j-t kifejező formulába, tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \sum_{k\in n}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j,k+1}) + g_{j,k}(z_{j,k})\right) = \\ &= \sum_{k\in n}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j,k+1})\right) - \sum_{k\in n}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j,k})\right).\end{aligned}$$

Ha $0 < k < n$ természetes szám, akkor $|t_k - t_{k-1}| = 1/n < \delta$ és $|p_{j+1} - p_j| = 1/n < \delta$ miatt $z_{j,k}, z_{j+1,k} \in B_{j,k} \cap B_{j,k-1}$, és a $B_{j,k} \cap B_{j,k-1}$ halmaz nyílt és összefüggő, továbbá ezen a halmazon $Dg_{j,k} = f = Dg_{j,k-1}$, tehát a $g_{j,k} - g_{j,k-1}$ függvény állandó, így

$$g_{j,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k-1}(z_{j+1,k}) = g_{j,k}(z_{j,k}) - g_{j,k-1}(z_{j,k}),$$

amiből átrendezéssel adódik, hogy

$$g_{j,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j,k}) = g_{j,k-1}(z_{j+1,k}) - g_{j,k-1}(z_{j,k}).$$

Ezt behelyettesítjük a Δ_j-t kifejező formulába, tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j,k+1}) + g_{j,k}(z_{j,k})\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j,k+1})\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k}) - g_{j,k}(z_{j,k})\right) - \\ &\qquad - \left(g_{j,0}(z_{j+1,0}) - g_{j,0}(z_{j,0})\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j,k+1})\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(g_{j,k-1}(z_{j+1,k}) - g_{j,k-1}(z_{j,k})\right) - \\ &\qquad - \left(g_{j,0}(z_{j+1,0}) - g_{j,0}(z_{j,0})\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j,k+1})\right) - \sum_{k=0}^{n-2}\left(g_{j,k}(z_{j+1,k+1}) - g_{j,k}(z_{j,k+1})\right) - \\ &\qquad - \left(g_{j,0}(z_{j+1,0}) - g_{j,0}(z_{j,0})\right) = \\ &= \left(g_{j,n-1}(z_{j+1,n}) - g_{j,n-1}(z_{j,n})\right) - \left(g_{j,0}(z_{j+1,0}) - g_{j,0}(z_{j,0})\right).\end{aligned}$$

De $z_{j+1,n} := H(p_{j+1},1) = H(p_{j+1},0) =: z_{j+1,0}$ és $z_{j,n} := H(p_j,1) = H(p_j,0) = z_{j,0}$, így az írható, hogy

$$\Delta_j = \left(g_{j,n-1} - g_{j,0}\right)(z_{j+1,0}) - \left(g_{j,n-1} - g_{j,0}\right)(z_{j,0}).$$

A $B_{j,0} \cap B_{j,n-1}$ halmaz nyílt és összefüggő, továbbá ezen a halmazon $Dg_{j,0} = f = Dg_{j,n-1}$, így a $g_{j,n-1} - g_{j,0}$ függvény állandó ezen a halmazon. Ugyanakkor $z_{j,0} \in B_{j,0} \cap B_{j,n-1}$, mert $z_{j,0}$ a $B_{j,0}$ gömb középpontja, így $z_{j,0} \in B_{j,0}$, továbbá $z_{j,0} = z_{j,n}$ és $|t_{n-1} - t_n| = 1/n < \delta$, tehát $|H(p_j, t_{n-1}) - H(p_j, t_n)| < r$, azaz $z_{j,0} = z_{j,n} := H(p_j, t_n) \in B_r(H(p_j, t_{n-1}); \mathbb{C}) = B_{j,n-1}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $z_{j+1,0} = z_{j+1,n}$ miatt $z_{j+1,0} \in B_{j,0} \cap B_{j,n-1}$. Ezért

$$(g_{j,n-1} - g_{j,0})(z_{j+1,0}) = (g_{j,n-1} - g_{j,0})(z_{j,0}),$$

vagyis $\Delta_j = 0$. ■

Tétel. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amely a $Dom(f)$ minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha γ zárt szakaszonként C^1-osztályú ív, és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, amelyre $Im(\gamma) \subseteq U \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int_\gamma f = 0.$$

(*Cauchy első integrálformulája.*)

Bizonyítás. Ha γ konstansfüggvény, akkor az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $Dom(\gamma) = [a, b]$. Legyen $\sigma : [0, 1] \to [a, b]$; $t \mapsto a + t(b - a)$. Ekkor σ olyan szigorúan monoton növő függvény, amely $]0, 1[$ és $]a, b[$ között C^1-diffeomorfizmus, továbbá a deriváltfüggvényének van határértéke a-ban és b-ben. Ezért $\gamma \circ \sigma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ szintén zárt szakaszonként C^1-osztályú ív és

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\sigma} f.$$

Ha U olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, amelyre $Im(\gamma) \subseteq U \subseteq Dom(f)$, akkor $Im(\gamma) = Im(\gamma \circ \sigma)$ miatt a $\gamma \circ \sigma$ ív az U halmazban halad, így annak egyszeres összefüggősége miatt van olyan $c \in U$, hogy $\gamma \circ \sigma$ kontúrhomotóp a $\gamma_c : [0, 1] \to \mathbb{C}$; $t \mapsto c$ konstans ívvel az U halmazban. Az $f|_U : U \to F$ függvény nyílt halmazon értelmezett, és a 2. pont utolsó állítása szerint a definíciós tartománya minden pontjának van olyan környezete, amelyen létezik neki primitív függvénye. Ezért a Cauchy-integráltételt alkalmazva az $f|_U$ függvényre kapjuk, hogy

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\sigma} f = \int_{\gamma\circ\sigma} f|_U = \int_{\gamma_c} f|_U = 0$$

teljesül. ■

Következmény. Ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan holomorf függvény, amelyre $Dom(f)$ egyszeresen összefüggő halmaz, akkor minden $Dom(f)$-ben haladó γ zárt szakaszonként C^1-osztályú ívre

$$\int_\gamma f = 0.$$

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

Tétel. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Ha $U \subseteq Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és γ tetszőleges U-ban haladó zárt szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor minden $z \in U \setminus Im(\gamma)$ esetén

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}.$$

(*Cauchy második integrálformulája.*)

Bizonyítás. Legyen $z \in U \setminus Im(\gamma)$ rögzített pont, és értelmezzük azt a $g : U \to F$ függvényt, amelyre minden $z' \in U$ és $z' \neq z$ esetén

$$g(z') := \frac{f(z') - f(z)}{z' - z},$$

ugyanakkor $g(z) := (Df)(z)$. Az f függvény a z pontban $\mathbb{C}$ differenciálható, ezért g-nek z-ben létezik határártéke és az megegyezik $g(z)$-vel, vagyis g folytonos a z pontban. Ugyanakkor g az $U \setminus \{z\}$ halmaz minden pontjában nyilvánvalóan $\mathbb{C}$-differenciálható, hiszen ezen a halmazon

$$g = \frac{f - f(z)}{id_{\mathbb{C}} - z}$$

teljesül. Ezért Cauchy első integrálformuláját g-re alkalmazva kapjuk, hogy ha γ egy U-ban haladó zárt szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor

$$0 = \int\limits_\gamma g = \int\limits_\gamma \frac{f - f(z)}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_\gamma \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} - \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_\gamma \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} - f(z)\int\limits_\gamma \frac{1}{id_{\mathbb{C}} - z}$$

teljesül, amit átrendezve és $1/2\pi i$-vel szorozva, az index definíciója alapján kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. ■

Láthatjuk, hogy Cauchy első integrálformulája a Cauchy-integráltétel, a Goursat-lemma és a Newton-Leibniz-tétel komplex formájának összeillesztéséből adódik, míg a második integrálformula Cauchy első integrálformulájának és az indexfüggvény definíciójának közvetlen következménye.

A következő állítás Cauchy második integrálformulájának speciális esete körívekre.

Következmény. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, akkor minden $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}.$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, amelyre $r < R$ és $B_R(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$. Valóban, ha $Dom(f) = \mathbb{C}$, akkor ez triviális, míg $Dom(f) \neq \mathbb{C}$ esetén van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\{z \in \mathbb{C} | dist_{\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})}(z) < \varepsilon\} \cap \{z \in \mathbb{C} | dist_{\mathbb{C}\setminus Dom(f)}(z) < \varepsilon\} = \emptyset.$$

Nyilvánvaló, hogy $\{z \in \mathbb{C} | dist_{\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})}(z) < \varepsilon\} = B_{r+\varepsilon}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$, ezért $R := r + \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r < R$ és $B_R(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$.

Most a $\gamma_{\mathfrak{a},r}$ körívre és az $U := B_R(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra alkalmazva Cauchy második integrálformuláját kapjuk, hogy minden $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén

$$f(z) = f(z) Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z},$$

hiszen ha $|z - \mathfrak{a}| < r$, akkor $Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(z) = 1$. ■

Gyakorlatok

1. Legyen M metrikus tér és $U \subseteq M$. Ha $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$ olyan zárt folytonos ívek M-ben, hogy γ_0 és γ_1 kontúrhomotópok az U halmazban, valamint γ_1 és γ_2 kontúrhomotópok az U halmazban, akkor a γ_0 és γ_1 ívek is kontúrhomotópok az U halmazban. (Ez *a kontúrhomotópia tranzitivitásának* tétele.)

(*Útmutatás.* Legyenek $H_1, H_2 : [0,1] \times [0,1] \to M$ olyan folytonos függvények, hogy $Im(H_1), Im(H_2) \subseteq U$, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H_1(0,t) = \gamma_0(t)$, $H_1(1,t) = \gamma_1(t) = H_2(0,t)$, $H_2(1,t) = \gamma_2(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H_1(p,0) = H_1(p,1)$ és $H_2(p,0) = H_2(p,1)$. Ekkor a

$$H : [0,1] \times [0,1] \to M; \quad (p,t) \mapsto \begin{cases} H_1(2p,t) & ; \text{ha } p \leq 1/2; \\ H_2(2p-1,t) & ; \text{ha } p > 1/2 \end{cases}$$

függvény olyan, hogy $Im(H) \subseteq Im(H_1) \cup Im(H_2) \subseteq U$, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) := H_1(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) := H_2(1,t) = \gamma_2(t)$, valamint minden $[0,1/2] \ni p$-re $H(p,0) := H_1(2p,0) = H_1(2p,1) =: H(p,1)$ és $[1/2,1] \ni p$-re $H(p,0) := H_2(2p-1,0) = H_2(2p-1,1) =: H(p,1)$. Ugyanakkor H folytonos is, mert az $F_1 := [0,1/2] \times [0,1]$ és $F_2 := [1/2,1] \times [0,1]$ halmazok zártak $[0,1] \times [0,1]$-ben, és $[0,1] \times [0,1] = F_1 \cup F_2$, továbbá H leszűkítése az F_1 és F_2 halmazokra folytonos (mert folytonos függvények kompozíciói), tehát elegendő az V. fejezet, 7. pontjának, **2**. gyakorlatára hivatkozni. Ezért a γ_0 és γ_1 ívek is kontúrhomotópok az U halmazban.)

2. Legyenek $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $r < R$ és $|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| < R - r$. Ekkor a $\gamma_{\mathfrak{a},R}$ és $\gamma_{\mathfrak{b},r}$ ívek kontúrhomotópok a $\overline{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazban.

(*Útmutatás.* Először könnyen beláthatjuk, hogy a $\gamma_{\mathfrak{a},R}$ és $\gamma_{\mathfrak{a},r}$ ívek kontúrhomotópok a $\overline{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazban, majd igazolhatjuk, hogy a $\gamma_{\mathfrak{a},r}$ és $\gamma_{\mathfrak{b},r}$ ívek kontúrhomotópok a $\overline{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazban. Ezután alkalmazzuk a kontúrhomotópia tranzitivitását (**1**. gyakorlat).)

3. Legyenek M és M' mertikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f_0, f_1 : M \to M'$ *függvények homotópok*, ha létezik olyan $H : [0,1] \times M \to M'$ folytonos függvény, hogy minden $x \in M$ esetén $H(0,x) = f_0(x)$ és $H(1,x) = f_1(x)$. Azt mondjuk, hogy az M és M' *metrikus terek homotópok* ha léteznek olyan $f : M \to M'$ és $g : M' \to M$ függvények, hogy a $g \circ f$ és id_M függvények homotópok, valamint az $f \circ g$ és $id_{M'}$ függvények homotópok.

a) Függvények és metrikus terek homotópiája topologikus tulajdonság. Homeomorf metrikus terek homotópok, de léteznek nem homeomorf homotóp metrikus terek.

b) Ha $f_0, f_1, f_2 : M \to M'$ függvények, és f_0 és f_1 homotópok, valamint f_1 és f_2 homotópok, akkor az f_0 és f_2 függvények is homotópok. (Ez a *függvényhomotópia tranzitivitása.*) Ha M'' is metrikus tér, és az $f_0, f_1 : M \to M'$ függvények homotópok, és a $g_0, g_1 : M' \to M''$ függvények homotópok, akkor a $g_0 \circ f_0$ és $g_1 \circ f_1$ függvények is homotópok.

c) Minden metrikus tér homotóp önmagával (vagyis a homotópia *reflexív*). Ha az M és M' metrikus terek homotópok, akkor az M' és M metrikus terek homotópok (vagyis a homotópia *szimmetrikus*). Ha az M és M' metrikus terek homotópok, valamint az M' és M'' metrikus terek homotópok, akkor az M és M'' metrikus terek homotópok (vagyis a homotópia *tranzitív*).

d) Az M metrikus teret *összehúzhatónak* nevezzük, ha az id_M függvény homotóp egy $M \to M$ konstansfüggvénnyel. Ha M metrikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) M összehúzható.

(ii) M homotóp valamely egypontú metrikus térrel, vagyis egy olyannal, amelynek az alaphalmaza egy elemű.

(iii) Minden M' metrikus térre, bármely két $M' \to M$ folytonos függvény homotóp egymással.

e) Ha E normált tér és $M \subseteq E$ csillaghalmaz, akkor az M metrikus altér összehúzható.

(*Útmutatás.* b) Legyenek $f_0, f_1, f_2 : M \to M'$ függvények, és tegyük fel, hogy f_0 és f_1 homotópok, valamint f_1 és f_2 homotópok. Legyenek $H_1, H_2 : [0,1] \times M \to M'$ olyan folytonos függvények, amelyekre minden $x \in M$ esetén $H_1(0,x) = f_0(x)$, $H_1(1,x) = f_1(x) = H_2(0,x)$ és $H_2(1,x) = f_2(x)$. Ekkor a

$$H : [0,1] \times M \to M'; \quad (p,t) \mapsto \begin{cases} H_1(2p,t) & ; \text{ha } p \leq 1/2; \\ H_2(2p-1,t) & ; \text{ha } p > 1/2 \end{cases}$$

függvény olyan, hogy minden $x \in M$ esetén $H(0,x) := H_1(0,x) = f_0(x)$ és $H(1,x) := H_2(1,x) = f_2(x)$, ezért ha H folytonos volna, akkor f_0 és f_2 homotópok volnának. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $F_1 := [0,1/2] \times M$ és $F_2 := [1/2,1] \times M$ olyan zárt halmazok $[0,1] \times M$-ben, hogy $[0,1] \times M = F_1 \cup F_2$ és $H|_{F_1}$, $H|_{F_2}$ folytonos függvények (mert folytonos függvények kompozíciói), tehát az V. fejezet, 7. pont, **2**. gyakorlat szerint H folytonos.

Legyenek M, M' és M'' metrikus terek és $f_0, f_1 : M \to M'$, valamint $g_0, g_1 : M' \to M''$ függvények. Legyen $H' : [0,1] \times M \to M'$ olyan folytonos függvény, hogy minden $x \in M$ esetén $H'(0,x) = f_0(x)$ és $H'(1,x) = f_1(x)$. Legyen továbbá $H'' : [0,1] \times M' \to M''$ olyan folytonos függvény, hogy minden $x' \in M'$ esetén $H''(0,x') = g_0(x')$ és $H''(1,x') = g_1(x')$. Ekkor a

$$H : [0,1] \times M \to M''; \quad x \mapsto H''(p, H'(p,x))$$

függvény folytonos, és minden $x \in M$ esetén $H(0,x) := H''(0, H'(0,x)) := g_0(f_0(x))$ és $H(1,x) := H''(1, H'(1,x)) := g_1(f_1(x))$, így a $g_0 \circ f_0$ és $g_1 \circ f_1$ függvények homotópok.

d) Ha M összehúzható metrikus tér, és $c \in M$ olyan pont, hogy id_M homotóp a c értékű $M \to M$ konstansfüggvénnyel, akkor az egyetlen $f : M \to \{c\}$ függvény és a $g : \{c\} \to M;\ x \mapsto c$ függvény olyan, hogy mindkettő folytonos, és $g \circ f$ egyenlő a c értékű $M \to M$ konstansfüggvénnyel (tehát $g \circ f$ és id_M homotópok), ugyanakkor $f \circ g = id_{\{c\}}$ (tehát $f \circ g$ és $id_{\{c\}}$) homotópok), ami azt jelenti, hogy az M és $\{c\}$ metrikus terek homotópok. Ezért (i)$\Rightarrow$(ii) teljesül.

A (ii)$\Rightarrow$(iii) bizonyításához legyen P olyan egypontú metrikus tér, hogy M homotóp P-vel. Jelölje p a P egyetlen elemét, és legyenek $f : M \to P$, $g : P \to M$ olyan folytonos függvények, hogy $g \circ f$ és id_M homotópok, valamint $f \circ g$ és id_P homotópok.

Legyen M' tetszőleges metrikus tér, és $h_0, h_1 : M' \to M$ tetszőleges folytonos függvények. Ekkor h_0 és h_0 homotópok, valamint $g \circ f$ és id_M homotópok, így a b) szerint a $g \circ f \circ h_0$ és $id_M \circ h_0 = h_0$ függvények is homotópok. Továbbá h_1 és h_1 homotópok, valamint $g \circ f$ és id_M homotópok, így a b) szerint a $g \circ f \circ h_1$ és $id_M \circ h_1 = h_1$ függvények is homotópok. De $g \circ f \circ h_0 = g \circ f \circ h_1$, hiszen mindkét függvény egyenlő a $g(p)$ értékű $M' \to M$ konstansfüggvénnyel, ezért a függvényhomotópia tranzitivitása folytán h_0 és h_1 homotópok.

A (iii)⇒(i) implikáció nyilvánvalóan igaz, mert ha $c \in M$ tetszőleges pont és f a c értékű $M \to M$ konstansfüggvény, akkor a (iii) alapján f homotóp az id_M függvénnyel, tehát M összehúzható.

e) Legyen M csillaghalmaz az E normált térben és $c \in M$ csillagcentrum. Ha M' metrikus tér és $f : M' \to M$ folytonos függvény, akkor a

$$H : [0,1] \times M \to M; \quad (p, x) \mapsto pc + (1-p)f(x)$$

függvény folytonos, és minden $x \in M'$ esetén $H(0, x) := f(x)$ és $H(1, x) := c$, vagyis f homotóp a c értékű $M' \to M$ konstansfüggvénnyel. Ebből következik, hogy bármely két $M' \to M$ folyonos függvény homotóp egymással, tehát a c) szerint M összehúzható metrikus tér.)

4. Jelölje $\boldsymbol{S}_1$ a 0 középpontú, 1 sugarú körvonalat $\mathbb{R}^2$-ben, és lássuk el $\boldsymbol{S}_1$-t az $\mathbb{R}^2$ feletti euklidészi metrika leszűkítésével. Értelmezzük az

$$\mathbf{e} : [0,1] \to \boldsymbol{S}_1; \quad t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

függvényt.

a) Az $\mathbf{e}|_{]0,1[}$ függvény homeomorfizmus $]0,1[$ és $\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$ között.

b) Ha $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $]0,1[$-ben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{e}(t_n) = (1,0)$ az $\boldsymbol{S}_1$ metrikus térben, akkor minden $C \subseteq]0,1[$ kompakt halmazhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $t_n \notin C$.

c) Ha M metrikus tér, akkor minden $\gamma : [0,1] \to M$ zárt folytonos ívhez létezik egyetlen olyan $\tilde{\gamma} : \boldsymbol{S}_1 \to M$ folytonos függvény, hogy $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mathbf{e}$.

d) Legyen M metrikus tér, $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to M$ zárt folytonos ívek, és jelölje $\tilde{\gamma}_0$ (illetve $\tilde{\gamma}_1$) azt az $\boldsymbol{S}_1 \to M$ folytonos függvényt, amelyre $\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0 \circ \mathbf{e}$ (illetve $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1 \circ \mathbf{e}$). A γ_0 és γ_1 ívek pontosan kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban, ha a $\tilde{\gamma}_0 : \boldsymbol{S}_1 \to U$ és $\tilde{\gamma}_1 : \boldsymbol{S}_1 \to U$ függvények homotópok. (Ez azt mutatja, hogy a kontúrhomotópia a függvényhomotópia fogalmának speciális esete.)

(*Útmutatás.* a) A valós trigonometrikus függvények tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{e}|_{]0,1[}$ függvény folytonos bijekció a $]0,1[$ nyílt intervallum és $\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$ között. Az $\mathbf{e}|_{]0,1[}$ függvény inverzének folytonossága azon múlik, hogy minden $t, t' \in]0,1[$ esetén

$$\|\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t')\|^2 = (\cos(2\pi t) - \cos(2\pi t'))^2 + (\sin(2\pi t) - \sin(2\pi t'))^2 = 4\sin^2(\pi(t - t')),$$

ahol $\|\cdot\|$ jelöli az euklidészi normát $\mathbb{R}^2$ felett, tehát

$$\|\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t')\| = 2|\sin(\pi(t - t'))|.$$

Ebből, és a sin függvény tulajdonságaiból könnyen kapjuk, hogy ha $t \in]0,1[$ és $\delta \in]0, \min(t, 1-t)[$, akkor

$$\mathbf{e}\langle]t-\delta, t+\delta[\rangle = (\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}) \cap B_{2\sin(\pi\delta)}(\mathbf{e}(t); d_{\|\cdot\|}),$$

tehát a t pont minden $]0,1[$-beli környezetének $\mathbf{e}$ által létesített képe az $\mathbf{e}(t)$ pontnak környezete az $\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$ metrikus térben, azaz $\mathbf{e}|_{]0,1[}$ *nyílt* leképezés, így $\mathbf{e}|_{]0,1[}^{-1}$ folytonos.

b) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $]0,1[$-ben, amelyre $\lim_{n\to\infty} \mathbf{e}(t_n) = (1,0)$ az $\boldsymbol{S}_1$ metrikus térben, de $C \subseteq]0,1[$ olyan kompakt halmaz, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén létezik $n > N$ természetes szám, amelyre $t_n \in C$. Ekkor egyszerű rekurzióval értelmezhetünk olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $t_{\sigma(m)} \in C$. A C kompaktsága miatt létezik olyan $t \in C$, és olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} t_{\sigma(\sigma'(n))} = t$. Az $\mathbf{e}$ függvény folytonos, ezért $\lim_{n\to\infty} \mathbf{e}(t_{(\sigma\circ\sigma')(n)}) = \mathbf{e}(t)$, ugyanakkor $t \in C \subseteq]0,1[$, így $\mathbf{e}(t) \neq (1,0)$. Azonban $\sigma \circ \sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, ezért $\lim_{n\to\infty} \mathbf{e}(t_{(\sigma\circ\sigma')(n)}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{e}(t_n) = (1,0)$, ami ellentmondás.

c) Ha $\gamma : [0,1] \to M$ zárt folytonos ív, akkor az a) szerint a

$$\gamma \circ \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1} : \boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\} \to M$$

függvény folytonos. Ha ennek létezne határértéke az $(1,0)$ pontban, és $\tilde{\gamma}$ jelölné ennek folytonos kiterjesztését $\boldsymbol{S}_1$-re, akkor $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mathbf{e}$ teljesülne. Ezért elegendő a $\lim_{(1,0)} \left(\gamma \circ \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}\right)$ határérték létezését vizsgálni. (Megjegyezzük, hogy itt nem alkalmazható a függvénykompozíció határértékének tétele, mert az $\left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}$ függvénynek nincs határértéke az $(1,0)$ pontban.) Legyen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$-ban, amelyre $\lim_{n\to\infty} z_n = (1,0)$. Jelölje d az M metrikáját, és legyen $x := \gamma(0) = \gamma(1)$. Vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. A γ függvény folyonos 0-ban és 1-ben, valamint ezeken a helyeken ugyanazt az x értéket veszi föl, ezért ε-hoz létezik olyan $\delta \in]0,1/2[$ valós szám, hogy minden $t \in [0,\delta[$ esetén $d(\gamma(t), x) = d(\gamma(t), \gamma(0)) < \varepsilon$, valamint minden $t \in]1-\delta, 1]$ esetén $d(\gamma(t), x) = d(\gamma(t), \gamma(1)) < \varepsilon$. Tehát minden $t \in [0,\delta[\cup]1-\delta, 1]$ esetén $d(\gamma(t), x) < \varepsilon$. A b) alapján a $[\delta, 1-\delta] \subseteq]0,1[$ kompakt halmazhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $t_n \notin [\delta, 1-\delta]$, ahol $t_n \in]0,1[$ az a pont, amelyre $\mathbf{e}(t_n) = z_n$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $d(\gamma \circ \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}(z_n), x) = d(\gamma(t_n), x) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy a $\gamma \circ \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}$ függvénynek létezik határértéke $(1,0)$-ban (és egyenlő x-szel). Ezzel igazoltuk olyan $\tilde{\gamma} : \boldsymbol{S}_1 \to M$ folytonos függvény létezését, amelyre $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mathbf{e}$. A $\tilde{\gamma}$ egyértelműsége abból következik, hogy ha $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mathbf{e}$, akkor $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}$ szükségképpen teljesül az $\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$ halmazon, és ez a halmaz sűrű $\boldsymbol{S}_1$-ben, és $\tilde{\gamma}$ folytonos.

d) Tegyük fel, hogy a $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to M$ zárt folytonos ívek kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban. Legyen $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ olyan folytonos függvény, hogy $Im(H) \subseteq U$, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $[0,1] \ni p$-re $H(p,0) = H(p,1)$. Értelmezzük a következő függvényt

$$\tilde{H} : [0,1] \times \boldsymbol{S}_1 \to M; \quad (p,z) \mapsto \begin{cases} H(p, \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}(z)) & ; \text{ha } z \neq (1,0), \\ H(p,0) & ; \text{ha } z = (1,0). \end{cases}$$

Erre teljesül az, hogy $z \in \boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$ esetén $\tilde{H}(0,z) = H(0, \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}(z)) = \gamma_0(\left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}(z)) = \tilde{\gamma}_0(z)$, és hasonlóan $\tilde{H}(1,z) = \tilde{\gamma}_1(z)$. Továbbá - a definíció szerint - $\tilde{H}(0,(1,0)) = H(0,0) = \gamma_0(0) = \tilde{\gamma}_0(\mathbf{e}(0)) = \tilde{\gamma}_0((1,0))$, és hasonlóan $\tilde{H}(1,(1,0)) = H(1,0) = \gamma_1(0) = \tilde{\gamma}_1(\mathbf{e}(0)) = \tilde{\gamma}_1((1,0))$. Világos továbbá, hogy $Im(\tilde{H}) \subseteq Im(H) \subseteq U$, így a $\tilde{\gamma}_0 : \boldsymbol{S}_1 \to U$ és $\tilde{\gamma}_1 : \boldsymbol{S}_1 \to U$ folytonos függvények homotopikusságának bizonyításához elegendő azt igazolni, hogy a $\tilde{H}$ függvény folytonos. A $[0,1] \times (\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\})$ halmaz nyílt a $[0,1] \times \boldsymbol{S}_1$ szorzattérben, és ezen a nyílt halmazon $\tilde{H}$ folytonos, mert megegyezik a H folytonos függvény és a

$$[0,1] \times (\boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}) \to [0,1]\times]0,1[; \quad (p,z) \mapsto \left(p, \left(\mathbf{e}|_{]0,1[}\right)^{-1}(z)\right)$$

folytonos függvény kompozíciójával. Ezért elég azt igazolni, hogy minden $p \in [0,1]$ esetén $\tilde{H}$ folytonos a $(p,(1,0))$ pontban. Ehhez legyen $p \in [0,1]$ rögzített, és $((p_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $[0,1] \times \boldsymbol{S}_1$-ben, amely konvergál a $(p,(1,0))$ ponthoz. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $t_n \in [0,1]$ olyan, hogy $\mathbf{e}(t_n) = z_n$. A H függvény folytonos a $(p,0)$ és $(p,1)$ pontokban, és ezekben ugyanazt az értéket veszi föl. Ezért ha d jelöli az M metrikáját, akkor az ε-hoz vehetünk olyan $\delta \in]0,1/2[$ valós számot, hogy minden $(p',t') \in [0,1] \times [0,1]$ esetén, ha $|p'-p| < \delta$ és $t \in [0,\delta[\cup]1-\delta,1]$, akkor $d(H(p',t'),H(p,0)) < \varepsilon$. Továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ teljesül $[0,1]$-ben, ezért létezik olyan $N_\delta \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_\delta$ természetes számra $|p_n - p| < \delta$. Értelmezzük most az $A := \{n \in \mathbb{N} | z_n \neq (1,0)\}$ halmazt. Ha A véges, akkor létezik olyan $N_A \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_A$ természetes számra $n \notin A$, vagyis $z_n = (1,0)$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N_\delta, N_A)$ esetén $|p_n - p| < \delta$ és $\tilde{H}(p_n, z_n) = H(p,0)$, ezért $d(\tilde{H}(p_n,z_n), \tilde{H}(p,(1,0))) = d(H(p_n,0),H(p,0)) < \varepsilon$, amiből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} d(\tilde{H}(p_n,z_n),\tilde{H}(p,(1,0))) = 0$. Tegyük fel, hogy A végtelen; ekkor (egyértelműen) létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to A$ szigorúan monoton növő függvény, amely bijekció. A $(t_{\sigma(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}(t_{\sigma(m)}) = z_{\sigma(m)} \in \boldsymbol{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$, és $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{e}(t_{\sigma(m)}) = (1,0)$ az $\boldsymbol{S}_1$ metrikus térben, ezért a b) alapján a $[\delta, 1-\delta] \subseteq]0,1[$ kompakt halmazhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N$ természetes számra $t_{\sigma(m)} \notin [\delta,1-\delta]$, tehát $t_{\sigma(m)} \in [0,\delta[\cup]1-\delta,1]$. Ezért $n \in \mathbb{N}$ és $n > \max(N_\delta, N)$ esetén

- ha $n \notin A$, akkor $|p_n - p| < \delta$ és $z_n = (1,0)$, tehát $d(\tilde{H}(p_n,z_n),\tilde{H}(p,(1,0))) = d(H(p_n,0),H(p,0)) < \varepsilon$;

- ha $n \in A$, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $n = \sigma(m)$, tehát $t_n = t_{\sigma(m)} \in [0,\delta[\cup]1-\delta,1]$ miatt $d(\tilde{H}(p_n,z_n),\tilde{H}(p,(1,0))) = d(H(p_n,t_n),H(p,0)) < \varepsilon$.

Ez azt jelenti, hogy végtelen A esetében is $\lim\limits_{n\to\infty} d(\tilde{H}(p_n,z_n),\tilde{H}(p,(1,0))) = 0$ teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy $\tilde{H}$ folytonos.

Megfordítva; tegyük fel, hogy a $\tilde{\gamma}_0 : \boldsymbol{S}_1 \to U$ és $\tilde{\gamma}_1 : \boldsymbol{S}_1 \to U$ folytonos függvények homotópok. Legyen $\tilde{H} : [0,1] \times \boldsymbol{S}_1 \to U$ olyan folytonos függvény, hogy minden $z \in \boldsymbol{S}_1$ esetén $\tilde{H}(0,z) = \tilde{\gamma}_0(z)$ és $\tilde{H}(1,z) = \tilde{\gamma}_1(z)$. Ekkor a

$$H : [0,1] \times [0,1] \to M; \quad (p,t) \mapsto \tilde{H}(p,\mathbf{e}(t))$$

függvény nyilvánvalóan folytonos, és minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \tilde{H}(0,\mathbf{e}(t)) = \tilde{\gamma}_0(\mathbf{e}(t)) = \gamma_0(t)$, és $H(1,t) = \tilde{H}(1,\mathbf{e}(t)) = \tilde{\gamma}_1(\mathbf{e}(t)) = \gamma_1(t)$. Továbbá, minden

$p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = \tilde{H}(p, \mathbf{e}(0)) = \tilde{H}(p, \mathbf{e}(1)) = H(p,1)$, tehát a γ_0 és γ_1 ívek kontúrhomotópok az U halmazban.)

5. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\boldsymbol{B}_k$ (illetve $\boldsymbol{S}_k$) az euklidészi norma szerinti 0 középpontú, 1 sugarú zárt gömböt (illetve gömbfelületet) $\mathbb{R}^k$-ban (illetve $\mathbb{R}^{k+1}$-ben). Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\boldsymbol{B}_k$ (illetve $\boldsymbol{S}_k$) halmazt ellátjuk az $\mathbb{R}^k$ (illetve $\mathbb{R}^{k+1}$) feletti euklidészi metrika leszűkítésével, tehát ez kompakt metrikus tér. Világos, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{S}_k$ metrikus altere $\boldsymbol{B}_{k+1}$-nek. Az M metrikus teret *k-aszferikusnak* nevezzük, ha $k \in \mathbb{N}$, és minden $\boldsymbol{S}_k \to M$ folytonos függvény kiterjeszthető $\boldsymbol{B}_{k+1} \to M$ folytonos függvénnyé. Az M metrikus terek *n-szeresen összefüggőnek* nevezzük, ha $n \in \mathbb{N}$ és M minden $k \leq n$ természetes számra k-aszferikus.

a) A k-aszferikusság és az n-szeres összefüggőség topologikus tulajdonságok.

b) Tegyük fel, hogy M metrikus tér, $k \in \mathbb{N}$ és $f : \boldsymbol{S}_k \to M$ folytonos függvény. Az f függvény pontosan akkor homotóp egy $\boldsymbol{S}_k \to M$ konstansfüggvénnyel, ha kiterjeszthető $\boldsymbol{B}_{k+1} \to M$ folytonos függvénnyé.

c) Összehúzható metrikus tér minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szeresen összefüggő.

d) A 0-szorosan összefüggő (vagyis 0-aszferikus) metrikus terek azonosak az ívszerűen összefüggő metrikus terekkel. Metrikus tér pontosan akkor egyszeresen összefüggő, ha 1-szeresen összefüggő, vagyis a most bevezetett 1-szeres összefüggőség-fogalom megegyezik a korábbi egyszeres összefüggőséggel.

(*Útmutatás.* b) Legyen M metrikus tér, $k \in \mathbb{N}$ és $f : \boldsymbol{S}_k \to M$ folytonos függvény. Ha $\tilde{f} : \boldsymbol{B}_{k+1} \to M$ folytonos kiterjesztése f-nek, akkor a

$$H : [0,1] \times \boldsymbol{S}_k \to M; \quad (p,x) \mapsto \tilde{f}((1-p)x)$$

függvény folytonos, és minden $x \in \boldsymbol{S}_k$ esetén $H(0,x) = \tilde{f}(x) = f(x)$, valamint $H(1,x) = \tilde{f}(0)$, vagyis az f függvény homotóp az $\tilde{f}(0)$ értékű $\boldsymbol{S}_k \to M$ konstansfüggvénnyel.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az f függvény homotóp a $c \in M$ értékű $\boldsymbol{S}_k \to M$ konstansfüggvénnyel. Legyen $H : [0,1] \times \boldsymbol{S}_k \to M$ olyan folytonos függvény, amelyre minden $x \in \boldsymbol{S}_k$ esetén $H(0,x) = f(x)$ és $H(1,x) = c$. Értelmezzük a következő függvényt:

$$\tilde{f} : \boldsymbol{B}_{k+1} \to M; \quad x \mapsto \begin{cases} H(2(1-\|x\|), x/\|x\|) & ; \text{ha } \|x\| \geq 1/2; \\ c & ; \text{ha } \|x\| < 1/2, \end{cases}$$

ahol $\|\cdot\|$ jelöli az euklidészi normát $\mathbb{R}^{k+1}$ felett. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{f}$ az f kiterjesztése, hiszen $x \in \boldsymbol{S}_k$ esetén $\|x\| = 1$, tehát $\tilde{f}(x) = H(0,x) = f(x)$. Továbbá, az $\tilde{f}$ függvény folytonos, mert a leszűkítése a $\overline{B}_{1/2}(0)$ és $\boldsymbol{B}_{k+1} \setminus B_{1/2}(0)$ zárt halmazokra folytonos, így elég az V. fejezet, 7. pont, **2**. gyakorlat eredményét alkalmazni.)

6. Cauchy első integrálformulájának alkalmazásával igazoljuk a következő egyenlőségeket:

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{0\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\pi}e^{\pm i\pi/4}, \quad \int_{0\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_{0\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$\int_{0}^{\to+\infty} e^{\pm ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pm i\pi/4}, \quad \int_{0}^{\to+\infty} cos(x^2)dx = \int_{0}^{\to+\infty} sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

(A két utóbbi összefüggést *Fresnel-formulának* nevezzük.) Mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $\beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 - i\beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

(*Útmutatás.* (I) legyenek $r, R \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $r < R$, és értelmezzük a következő függvényt:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} r + 4t(R-r) & ; \text{ha } t \in [0, 1/4[\\ Re^{\pi i(4t-1)/2} & ; \text{ha } t \in [1/4, 1/2[\\ i(R + (4t-2)(r-R)) & ; \text{ha } t \in [1/2, 3/4[\\ re^{2\pi i(1-t)} & ; \text{ha } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Ez a függvény zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív $\mathbb{C}$-ben, és nyilvánvaló, hogy $Im(\gamma) \subseteq U$, ahol $U := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(ze^{-i\pi/4}) > 0\}$. Az U halmaz nyílt és konvex (ez egy nyílt félsík), továbbá $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ebből Cauchy első integrálformuláját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

Ezt a vonalintegrált négy speciális vonalintegrál összegére bontva, és alkalmas helyettesítéses integrálásokat végrehajtva kapjuk, hogy

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_r^R \frac{e^{-x}}{x}dx - i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{i\theta}}d\theta + i\int_0^{\pi/2} e^{ire^{i\theta}}d\theta.$$

Ebből következik, hogy

$$\int_r^R \frac{\sin(x)}{x}dx = \mathfrak{Im}\left(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx\right) =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\cos(R\cos(\theta))d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta))d\theta,$$

ugyanakkor

$$\int_r^R \frac{\cos(x)}{x}dx = \mathfrak{Re}\left(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx\right) = \int_r^R \frac{e^{-x}}{x}dx +$$

$$+\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\sin(R\cos(\theta))d\theta - \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin(\theta)}\sin(r\cos(\theta))d\theta.$$

A Lebesgue-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\cos(R\cos(\theta))d\theta = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\sin(R\cos(\theta))d\theta = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta))d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{r\to 0}\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin(\theta)}\sin(r\cos(\theta))d\theta = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\int_{0\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx := \lim_{r\to 0;\ R\to+\infty}\int_r^R \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

amiből a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

határérték *létezésének* ismeretében kapjuk az első formulát.

(II) Legyen $R \in \mathbb{R}^+$, és értelmezzük következő függvényeket

$$\gamma_\pm : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} 3Rt & ;\text{ ha } t \in [0,1/3[\\ Re^{\pm i\pi(3t-1)/4} & ;\text{ ha } t \in [1/3,2/3[\\ 3R(1-t)e^{\pm i\pi/4} & ;\text{ ha } t \in [2/3,1], \end{cases}$$

amelyek $\mathbb{C}$-ben haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú ívek. Cauchy első integrálformuláját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma_\pm} e^{\pm iz^2}dz = 0.$$

Ezeket a vonalintegrálokat három speciális vonalintegrál összegére bontva, és alkalmas helyettesítéses integrálásokat végrehajtva kapjuk, hogy

$$\int_0^R e^{\pm ix^2}dx = \mp iR\int_0^{\pi/4} e^{\pm iR^2e^{\pm 2i\theta}}e^{\pm i\theta}d\theta + e^{\pm i\pi/4}\int_0^R e^{\pm ix^2e^{\pm i\pi/2}}dx =$$

$$= \mp iR\int_0^{\pi/4} e^{\pm i(R^2\cos(2\theta)+\theta)}e^{-R^2\sin(2\theta)}d\theta + e^{\pm i\pi/4}\int_0^R e^{-x^2}dx.$$

Ha $t \in [0, \pi/2]$, akkor $\sin(t) \geq (2/\pi)t$, ezért

$$\left| \mp iR \int_0^{\pi/4} e^{\pm i(R^2 \cos(2\theta)+\theta)} e^{-R^2 \sin(2\theta)} d\theta \right| \leq$$

$$\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin(2\theta)} d\theta \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 (4/\pi)\theta} d\theta = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1 - e^{-R^2}}{R} \right),$$

így fennáll az

$$\lim_{R \to +\infty} \left(\mp iR \int_0^{\pi/4} e^{\pm i(R^2 \cos(2\theta)+\theta)} e^{-R^2 \sin(2\theta)} d\theta \right) = 0$$

egyenlőség. Ugyanakkor a X. fejezet, 3. pont, **4**. gyakorlat szerint tudjuk, hogy

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

amiből következik, hogy

$$\int_0^{\to +\infty} e^{\pm ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pm i\pi/4}.$$

Ebből a Fresnel-formulák azonnal származtathatók.

(III) Ha $r, R \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $r < R$, akkor egyszerű helyettesítéses integrálással kapjuk, hogy

$$\int_r^R \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{R}} e^{\pm it^2} dt.$$

Ebből látszik, hogy

$$\int_{0\leftarrow}^{\to +\infty} \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{r \to 0;\ R \to +\infty} \int_r^R \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= 2 \int_{0\leftarrow}^{\to +\infty} e^{\pm it^2} dt = 2 \int_0^{\to +\infty} e^{\pm it^2} dt = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4},$$

amiből az is következik, hogy

$$\int_{0\leftarrow}^{\to +\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_{0\leftarrow}^{\to +\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(IV) Megmutatjuk, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $\beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 - i\beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Ehhez először megjegyezzük, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 - i\beta x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\left(x + i\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}} dx = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\left(x + i\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} dx,$$

ezért elegendő az itt álló utolsó integrált meghatározni. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, és értelmezzük a következő függvényt:

$$\gamma_r : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} r(8t-1) & ; \text{ha } t \in [0, 1/4[\\ r + i\frac{\beta}{2\alpha}(4t-1) & ; \text{ha } t \in [1/4, 1/2[\\ i\frac{\beta}{2\alpha} + r(5-8t) & ; \text{ha } t \in [1/2, 3/4[\\ -r + i\frac{\beta}{2\alpha}4(1-t) & ; \text{ha } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Ekkor γ_r zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív $\mathbb{C}$-ben, így Cauchy első integrálformulája szerint

$$\int_{\gamma} e^{-\alpha z^2} dz = 0.$$

Ezt a vonalintegrált négy speciális vonalintegrál összegére bontva, és alkalmas helyettesítéses integrálásokat végrehajtva kapjuk, hogy

$$\int_{-r}^{r} e^{-\alpha\left(x+i\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} dx = \int_{-r}^{r} e^{-\alpha x^2} dx + i\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha\left(r+i\frac{\beta}{2\alpha}t\right)^2} dt - i\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha\left(-r+i\frac{\beta}{2\alpha}t\right)^2} dt.$$

A X. fejezet, 3. pont, **4**. gyakorlat szerint

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Ugyanakkor minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\left| e^{-\alpha\left(\pm r + i\frac{\beta}{2\alpha}t\right)^2} \right| \le e^{-\alpha r^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}t^2},$$

következésképpen

$$\lim_{r\to+\infty} e^{-\alpha\left(\pm r+i\frac{\beta}{2\alpha}t\right)^2} = 0,$$

és a $\chi_{[0,1]}.e^{\frac{\beta}{2\alpha} id_{\mathbb{R}}^2}$ függvény (r-ben) közös integrálható majoráns, így a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^1 e^{-\alpha\left(\pm r+i\frac{\beta}{2\alpha}t\right)^2} dt = 0,$$

amiből következik az

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\left(x+i\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

egyenlőség.)

7. (*A Cauchy integráltétel általánosítása.*) Legyen E normált tér, F Banach-tér és $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ olyan folytonos E feletti operátormező, amelyre $Dom(\omega)$ nyílt halmaz, és a $Dom(\omega)$ minden pontjának van olyan környezete, amelyen létezik ω-nak primitív függvénye. Ha $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to E$ olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ívek, amelyek kontúrhomotópok a $Dom(\omega)$ halmazban, akkor

$$\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega.$$

(*Útmutatás.* Kövessük a Cauchy integráltétel bizonyításának gondolatmenetét!)

8. (*Cauchy első integrálformulájának általánosítása.*) Legyen E normált tér, F Banach-tér és $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ olyan folytonos E feletti operátormező, amely a $Dom(\omega)$ minden pontjában differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $d\omega = 0$ és γ olyan E-ben haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amelyhez létezik olyan $U \subseteq E$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, hogy $Im(\gamma) \subseteq U \subseteq Dom(\omega)$, akkor

$$\int\limits_{\gamma} \omega = 0.$$

(*Útmutatás.* A 2. pont **9**. gyakorlatának eredményét alkalmazva kapjuk, hogy ω-ra teljesülnek a **7**. gyakorlatban megkövetelt feltételek. Ezután ugyanúgy bizonyíthatunk, mint az első Cauchy integrálformula esetében.)

5. A Cauchy integráltétel elemi következményei

Definíció. Legyen F komplex Banach-tér. Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, és γ egy $Dom(f)$-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, akkor az f függvény γ szerinti *Cauchy-transzformáltjának* nevezzük a

$$\mathbf{C}_\gamma(f) : \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \to F; \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}$$

leképezést.

A definíció természetesen értelmes, mert $z \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ esetén

$$\frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} : Dom(f) \setminus \{z\} \to F$$

olyan folytonos függvény, amelynek definíciós tartománya tartalmazza az $Im(\gamma)$ halmazt. Figyeljük meg, hogy a Cauchy-transzformált definíciójában lényegtelen a γ ív zártsága.

Állítás. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ folytonos függvény, és γ egy $Dom(f)$-ben haladó szakaszonként C^1-osztályú ív.

a) A $\mathbf{C}_\gamma(f) : \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \to F$ Cauchy-transzformált $\mathbb{C}$-analitikus függvény.

b) Minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ esetén a $\mathbf{C}_\gamma(f)$ Cauchy-transzformált $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $dist_{Im(\gamma)}(\mathfrak{a})$ számnál.

c) Minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ esetén az $\mathfrak{a}$ középpontú, $dist_{Im(\gamma)}$ sugarú nyílt körlapon a $\mathbf{C}_\gamma(f)$ Cauchy-transzformált egyenlő a saját $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának összegfüggvényével.

d) Minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(D^k \mathbf{C}_\gamma(f)\right)(\mathfrak{a}) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ rözített pont és $R := dist_{Im(\gamma)}(\mathfrak{a})$. Ekkor $B_R(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \cap Im(\gamma)$, és ha $z \in B_R(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ és $z' \in Im(\gamma)$, akkor

$$\frac{f(z')}{z' - z} = \frac{f(z')}{(z' - \mathfrak{a}) - (z - \mathfrak{a})} = \frac{f(z')}{z' - \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{z - a}{z' - a}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(z')}{(z' - \mathfrak{a})^{k+1}} (z - \mathfrak{a})^k,$$

mert $|z - \mathfrak{a}| < R \leq |z' - \mathfrak{a}|$, tehát $|(z - a)/(z' - \mathfrak{a})| < 1$. Tehát minden $z \in B_R(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ esetén

$$\frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}} (z - \mathfrak{a})^k$$

teljesül az $Im(\gamma)$ halmazon. Továbbá, minden $z \in B_R(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ esetén a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}} (z - \mathfrak{a})^k$$

függvénysor *normálisan* (ezért *egyenletesen* is) konvergens az $Im(\gamma)$ halmazon, mert ha $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sup_{z' \in Im(\gamma)} \left\| \frac{f(z')}{(z' - \mathfrak{a})^{k+1}} (z - \mathfrak{a})^k \right\| = \sup_{z' \in Im(\gamma)} \left\| \frac{f(z')}{z' - \mathfrak{a}} \right\| \left| \frac{z - \mathfrak{a}}{z' - \mathfrak{a}} \right|^k \leq$$
$$\leq \frac{1}{R} \left(\sup_{z' \in Im(\gamma)} \|f(z')\| \right) \left(\frac{|z - \mathfrak{a}|}{R} \right)^k,$$

és $|z - \mathfrak{a}|/R < 1$. Ebből következik, hogy $z \in B_R(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ esetén a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (z - \mathfrak{a})^k \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}}$$

vektorsor abszolút konvergens az F Banach térben, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} (z - \mathfrak{a})^k \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}} = \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} (z - \mathfrak{a})^k \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}} \right)$$
$$= \int_\gamma \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}} =: 2\pi i \left(\mathbf{C}_\gamma(f) \right)(z).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}}$$

hatványfüggvény-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az R számnál, és az összegfüggvénye egyenlő $\mathbf{C}_\gamma(f)$-fel a $B_R(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ halmazon. Tehát a $\mathbf{C}_\gamma(f)$ Cauchy-transzformált az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathbb{C}$-analitikus, és a VII. fejezet 10. pontjának eredményei alapján kapjuk, hogy a $\mathbf{C}_\gamma(f)$ függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sora *egyenlő* a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}}$$

hatványfüggvény-sorral, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(D^k \mathbf{C}_\gamma(f) \right)(\mathfrak{a}) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}}$$

teljesül. ∎

Tétel. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Ekkor az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus, és minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén az f függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az $r_{\mathfrak{a}} := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)\}$ számnál. Továbbá, ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának összegfüggvénye egyenlő f-fel a $B_{r_{\mathfrak{a}}}(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ halmazon, és ha $r \in \mathbb{R}^+$, $r < r_{\mathfrak{a}}$, valamint $k \in \mathbb{N}$, akkor minden $z \in B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ esetén

$$(D^k f)(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - z)^{k+1}}.$$

Bizonyítás. Cauchy második integrálformulájának következménye szerint, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, akkor $f = \mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)$ a $B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ halmazon. Ezért az előző állításból kapjuk, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathbb{C}$-analitikus, és $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f) = \mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f))$ miatt az f függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $dist_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(\mathfrak{a}) = r$ számnál, így $r_{\mathfrak{a}}$-nál is nagyobb-egyenlő. Továbbá, a $\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)$ függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának összegfüggvénye egyenlő $\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)$-fel a $B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ halmazon, következésképpen az f függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának összegfüggvénye egyenlő f-fel a $B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ halmazon. Ezért az f függvény $\mathfrak{a}$ centrumú Taylor-sorának összegfüggvénye egyenlő f-fel a $B_{r_{\mathfrak{a}}}(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ halmazon is. Végül, az előző állítás végén álló integrálformula szerint, ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, $k \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, akkor minden $z \in B_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ esetén

$$(D^k f)(z) = (D^k(\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)))(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - z)^{k+1}}$$

teljesül. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy létezik olyan $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, amely $\mathbb{C}$-differenciálható a 0 pontban, de a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmaz egyetlen pontjában sem folytonos; például, ha E jelöli a racionális valós és képzetes részű komplex számok halmazát (azaz $E := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$), akkor a $\chi_E.id_{\mathbb{C}}^2$ függvény ilyen. Tehát *egyetlen pontban* a $\mathbb{C}$-differenciálhatóság ugyanúgy gyenge feltétel, mint az $\mathbb{R}$-differenciálhatóság. Ha azonban a függvény a pont *valamely környezetének* minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, akkor az előző tétel alapján az adott pontban $\mathbb{C}$-analitikus is. Ennek az állításnak az analógja valós változós függvényekre egyáltalán nem igaz.

A következő állítás előtt emlékeztetünk arra, hogy egy M metrikus tér A részhalmazát *diszkrétnek* nevezzük, ha minden $\mathfrak{a} \in A$ pontnak van olyan U környezete M-ben, amelyre $A \cap (U \setminus \{\mathfrak{a}\}) = \emptyset$. Vigyázunk arra, hogy a zártság és a diszkrétség *logikailag független* fogalmak, tehát diszkrét halmaz nem feltételenül zárt, és zárt halmaz nem feltétlenül diszkrét.

Állítás. (*A megszüntethető szingularitások tétele.*) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan függvény, amelyre $Dom(f)$ nyílt halmaz. Ha létezik olyan $A \subseteq Dom(f)$ diszkrét halmaz, hogy f a $Dom(f) \setminus A$ minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, és az A minden pontjában folytonos, akkor f holomorf függvény, tehát f az A halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in A$, és vegyük $\mathfrak{a}$-nak olyan U nyílt konvex (például gömbi) környezetét $\mathbb{C}$-ben, amelyre $A \cap (U \setminus \{\mathfrak{a}\}) = \emptyset$ és $U \subseteq Dom(f)$. Ilyen környezet azért létezik, mert A diszkrét és $Dom(f)$ nyílt. Ekkor az $f|_U$ függvény az $U \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmaz minden pontjában $\mathbb{C}$ differenciálható, mert $U \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f) \setminus A$, és az $\mathfrak{a}$ pontban folytonos. Ezért a Newton-Leibniz tétel komplex formája és a Goursat-lemma alapján létezik olyan $g : U \to F$ holomorf függvény, hogy $f|_U = Dg$. De g *kétszer* $\mathbb{C}$-differenciálható az U halmazon, így $f|_U$ holomorf függvény, vagyis $f|_U$ az $\mathfrak{a}$ pontban is $\mathbb{C}$-differenciálható. Ebből a differenciálhatóság lokalitása alapján kapjuk, hogy f az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathbb{C}$-differenciálható. ■

Állítás. Ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik f-nek U-n értelmezett primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $c \in U$ rözített pont. Az U halmaz nyílt és összefüggő $\mathbb{C}$-ben, így az V. fejezet 10. pontjának eredményei szerint minden $z \in U$ esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer U-ban, hogy $z_0 = c$, $z_n = z$, és minden $k < n$ természetes számra $[z_k, z_{k+1}] \subseteq U$; tehát a $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer által meghatározott törtvonal-ív U-ban halad, valamint összeköti a c és z pontokat.

Tehát minden $z \in U$ ponthoz létezik olyan U-ban haladó γ szakaszonként C^1-osztályú ív, amely a c és z pontokat összeköti. Jelölje minden $z \in U$ esetén Γ_z a c és z pontokat összekötő, $[0,1]$ intervallumon értelmezett, U-ban haladó, szakaszonként C^1-osztályú ívek nem üres halmazát. A kiválasztási axióma szerint $\prod\limits_{z \in U} \Gamma_z \neq \emptyset$.

Legyen $(\gamma_z)_{z \in U}$ eleme ennek a szorzathalmaznak, és képezzük a

$$g : U \to F; \quad z \mapsto \int\limits_{\gamma_z} f$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy g holomorf, és minden $z \in U$ esetén $(Dg)(z) = f(z)$, vagyis g az f-nek U-n értelmezett primitív függvénye.

Legyen $z \in U$ rögzített pont, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, amelyre $\overline{B}_r(z; \mathbb{C}) \setminus U$. Ha $z' \in B_r(z; \mathbb{C})$, akkor a

$$\gamma_{z,z'} : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_z(3t) & ; \text{ha } t \in [0, 1/3[, \\ z + (3t-1)(z'-z) & ; \text{ha } t \in [1/3, 2/3[, \\ \gamma_{z'}(3(1-t)) & ; \text{ha } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

függvény olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma_{z,z'}) = Im(\gamma_z) \cup Im(\gamma_{z'}) \cup [z, z'] \subseteq U$, tehát Cauchy első integrálformulája szerint

$$0 = \int\limits_{\gamma_{z,z'}} f = \int\limits_{\gamma_z} f + \int\limits_{[z,z']} f - \int\limits_{\gamma_{z'}} f,$$

amiből következik, hogy

$$g(z') - g(z) - (z'-z).f(z) = \int\limits_{\gamma_{z'}} f - \int\limits_{\gamma_z} f - (z'-z).f(z) =$$

$$= \int\limits_{[z,z']} f - \int\limits_{[z,z']} f(z) = \int\limits_{[z,z']} (f - f(z)).$$

Tehát minden $z' \in B_r(z;\mathbb{C})$ esetén

$$\|g(z') - g(z) - (z'-z).f(z)\| = \left\| \int\limits_{[z,z']} (f - f(z)) \right\| \leq |z'-z| \sup_{z'' \in [z,z']} \|f(z'')\|.$$

Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta < r$ és minden $z'' \in B_\delta(z;\mathbb{C})$ esetén $\|f(z'') - f(z)\| < \varepsilon$. Ezért az előző egyenlőtlenség alapján $z'' \in B_\delta(z;\mathbb{C}) \setminus \{z\}$ esetén

$$\left\| \frac{g(z') - g(z) - (z'-z).f(z)}{|z'-z|} \right\| \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a g függvény $\mathbb{C}$-differenciálható a z pontban és $(Dg)(z) = f(z)$. Tehát a g függvény U-n értelmezett primitív függvénye f-nek. ■

A következő állítás azért érdekes, mert a holomorfitás, tehát egy differenciális tulajdonság *integrális* jellemzését adja. Ugyanakkor azt is megmutatja, hogy Cauchy első integrálformulájának teljesülése nemcsak szükséges, hanem *elégséges* is egy nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény holomorfitásához.

Tétel. (*Morera tétele.*) Ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan folytonos függvény, amelyre $Dom(f)$ nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) Az f függvény holomorf.

(ii) Minden $U \subseteq Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra, és minden U-ban haladó zárt, szakaszonként C^1-osztályú γ ívre

$$\int\limits_\gamma f = 0.$$

(iii) Minden $a, b, c \in Dom(f)$ esetén, ha $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0.$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Cauchy első integrálformulájából következik.

(ii)⇒(iii) Legyenek $a, b, c \in Dom(f)$ olyan pontok, hogy $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq Dom(f)$. Elég azt igazolni, hogy létezik olyan U egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, amelyre $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq U \subseteq Dom(f)$, hiszen akkor a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} a + 3t(b-a) & ; \text{ha } t \in [0, 1/3[, \\ b + (3t-1)(c-b) & ; \text{ha } t \in [1/3, 2/3[, \\ c + (3t-2)(a-c) & ; \text{ha } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

ív zárt, szakaszonként C^1-osztályú, és $Im(\gamma) = [a,b] \cup [a,b] \cup [a,b]$ miatt U-ban halad, így a (ii) alapján

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = \int\limits_{\gamma} f = 0$$

teljesülne.

Egy ilyen tulajdonságú U halmaz előállításához először megjegyezzük, hogy a $\mathbf{T}(a,b,c)$ halmaz kompakt és részhalmaza a $Dom(f)$ nyílt halmaznak, így ha $Dom(f) \neq \mathbb{C}$ (természetesen csak ez az eset érdekes), akkor van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\{z \in \mathbb{C} \mid dist_{\mathbf{T}(a,b,c)}(z) < \varepsilon\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid dist_{\mathbb{C}\setminus Dom(f)}(z) < \varepsilon\} = \emptyset$$

(V. fejezet, 8. pont, **1**. gyakorlat). Legyen $z := (a+b+c)/3$ és a $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot válasszuk meg úgy, hogy $(|a-z| + |b-z| + |c-z|)\delta < \varepsilon$ teljesüljön. Ha most

$$a_\delta := z + (1+\delta)(a-z), \quad b_\delta := z + (1+\delta)(b-z), \quad c_\delta := z + (1+\delta)(c-z),$$

akkor minden $z' \in \mathbf{T}(a_\delta, b_\delta, c_\delta)$ esetén $dist_{\mathbf{T}(a,b,c)}(z') < \varepsilon$ teljesül, mert léteznek olyan $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ valós zámok, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 1$ és $z' = \alpha a_\delta + \beta b_\delta + \gamma c_\delta$, tehát $\alpha a + \beta b + \gamma c \in \mathbf{T}(a,b,c)$ miatt

$$\begin{aligned} dist_{\mathbf{T}(a,b,c)}(z') \leq |z' - (\alpha a + \beta b + \gamma c)| = |(\alpha a + \beta b + \gamma c) - z|\delta = \\ = |\alpha(a-z) + \beta(b-z) + \gamma(c-z)|\delta \leq (|a-z| + |b-z| + |c-z|)\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{T}(a_\delta, b_\delta, c_\delta) \subseteq Dom(f)$, és könnyen látható, hogy

$$\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq Int(\mathbf{T}(a_\delta, b_\delta, c_\delta)),$$

továbbá az $U := Int(\mathbf{T}(a_\delta, b_\delta, c_\delta))$ nyílt háromszög konvex, tehát egyszeresen összefüggő.

(iii)⇒(i) Legyen $z \in Dom(f)$ és V a z-nek olyan környezete, amely nyílt és konvex (például gömbi környezet), továbbá $V \subseteq Dom(f)$. A V konvexitása miatt minden $a,b,c \in V$ esetén $\mathbf{T}(a,b,c) \subseteq V \subseteq Dom(f)$, ezért a (iii) alapján

$$\int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f = 0,$$

így a Newton-Leibniz-tétel komplex formája szerint f-nek létezik V-n értelmezett primitív függvénye, vagyis van olyan $g : V \to F$ holomorf függvény, hogy $Dg \subseteq f$. A g holomorf függvény *kétszer* is $\mathbb{C}$-differenciálható (sőt $\mathbb{C}$-analitikus), ezért f a V minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, vagyis f holomorf. ■

Állítás. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén

$$\|(D^n f)(z)\| \leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{|z-\mathfrak{a}|}{r}\right)^{n+1}} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|f(z')\|$$

teljesül. (*Cauchy-egyenlőtlenség.*)

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy Cauchy második integrálformulája szerint minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén

$$(D^n f)(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it}) 2\pi i r e^{2\pi it}}{(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} - z)^{n+1}} d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$

$$= \frac{n!}{r^n} \int_0^1 \frac{f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it}) e^{-2\pi int}}{\left(1 - \left(\frac{z - \mathfrak{a}}{r}\right) e^{-2\pi it}\right)^{n+1}} d\mu_{\mathbb{R}}(t),$$

amiből következik, hogy

$$\|(D^n f)(z)\| \leq \frac{n!}{r^n} \int_0^1 \frac{\|f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it})\|}{\left|1 - \left(\frac{z - \mathfrak{a}}{r}\right) e^{-2\pi it}\right|^{n+1}} d\mu_{\mathbb{R}}(t) \leq$$

$$\leq \frac{n!}{r^n} \left(\sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z' - \mathfrak{a}| = r} \|f(z')\| \right) \int_0^1 \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{z - \mathfrak{a}}{r}\right) e^{-2\pi it}\right|^{n+1}} d\mu_{\mathbb{R}}(t).$$

Ha $w \in \mathbb{C}$ és $|w| \leq 1$, akkor $|1 - w| \geq 1 - |w| \geq 0$, ezért minden $t \in [0, 1]$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \ni z$-re

$$\frac{1}{\left|1 - \left(\frac{z - \mathfrak{a}}{r}\right) e^{-2\pi it}\right|^{n+1}} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{|z - \mathfrak{a}|}{r}\right)^{n+1}},$$

amiből a fentiek alapján következik, hogy

$$\|(D^n f)(z)\| \leq \frac{n!}{r^n} \left(\sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z' - \mathfrak{a}| = r} \|f(z')\| \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{|z - \mathfrak{a}|}{r}\right)^{n+1}},$$

amit bizonyítani kellett. ■

Az előző állítás feltételei mellett minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén

$$\|(D^n f)(\mathfrak{a})\| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z' - \mathfrak{a}| = r} \|f(z')\|$$

is teljesül. Gyakran ezt az egyenlőtlenséget nevezik *Cauchy-egyenlőtlenségnek.*

A következő állítás megfogalmazása előtt emlékeztetünk arra, hogy ha F vektortér a K test felett, akkor egy $P : K \to F$ leképezést (legfeljebb n-ed fokú, egyváltozós) *polinomiális függvénynek* nevezünk, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, $(c_k)_{0\leq k\leq n} \in F^{n+1}$ és $\mathfrak{a} \in K$, hogy $P = \sum_{k=0}^{n} c_k.(id_K - \mathfrak{a})^k$.

Tétel. (*Liouville-tétel.*) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \to F$ holomorf függvény. Tegyük fel, hogy létezik olyan $P : \mathbb{C} \to F$ legfeljebb n-ed fokú polinomiális függvény és létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $|z| > R$, akkor $\|f(z)\| \leq \|P(z)\|$ teljesül. Ekkor f is legfeljebb n-ed fokú polinomiális függvény.

Bizonyítás. Legyen $(c_k)_{0\leq k\leq n} \in F^{n+1}$ és $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $P = \sum_{k=0}^{n} c_k.(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k$, továbbá rögzítsünk olyan $R \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $|z| > R$, akkor $\|f(z)\| \leq \|P(z)\|$.
Ha $r \in]|\mathfrak{a}| + R, \to [$ és $z' \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z' - \mathfrak{a}| = r$, akkor $|z'| \geq r - |\mathfrak{a}| > R$, ezért a Cauchy-egyenlőtlenség alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|f(z')\| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|P(z')\| \leq$$
$$\leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \sum_{j=0}^{n} \|c_j\| |z' - \mathfrak{a}|^j = \frac{k!}{r^k} \sum_{j=0}^{n} \|c_j\| r^j = k! \sum_{j=0}^{n} \|c_j\| r^{j-k}.$$

Ebből következik, hogy $k > n$ esetén

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \lim_{r\to\infty} \left(k! \sum_{j=0}^{n} \|c_j\| r^{j-k} \right) = 0,$$

vagyis $(D^k f)(\mathfrak{a}) = 0$. Ugyanakkor az f függvény egyenlő a saját $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sorának összegfüggvényével az egész $\mathbb{C}$-n, így

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}.\,(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!}.\,(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k\,,$$

tehát f legfeljebb n-ed fokú polinomiális függvény. ■

Következmény. Ha F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \to F$ *korlátos* holomorf függvény, akkor f állandó.

Bizonyítás. Az állítás a Liouville-tétel $n = 0$-ra vonatkozó speciális esete. ■

Következmény. (*Az algebra alaptétele.*) Ha $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinomiális függvény, akkor létezik olyan $z \in \mathbb{C}$, hogy $P(z) = 0$.

Bizonyítás. Indirekt bizonyunk, tehát feltesszük, hogy $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan legalább elsőfokú polinomiális függvény, amelynek nincs gyöke. Ekkor az $1/P$ reciprok-függvény az *egész* $\mathbb{C}$-n értelmezett holomorf függvény. Az V. fejezet 8. pontjában igazoltuk, hogy bármely $C \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{C} \ni z$-re, ha $|z| > R$, akkor $|P(z)| > C$. Rögzítve egy $C \in \mathbb{R}^+$ számot, és választva ehhez egy ilyen tulajdonságú $\mathbb{R}^+ \ni R$-t; azt kapjuk, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $|z| > R$, akkor $|1/P(z)| < 1/C$. Ugyanakkor a $|P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és seholsem nulla, ezért a Weierstrass-féle minimum-elv alapján van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy a $\overline{B}_R(0;\mathbb{C})$ kompakt gömb minden z pontjában $|P(z)| > c$. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{C} \ni z$-re $|1/P(z)| \leq \max(1/C, 1/c)$, vagyis az $1/P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény korlátos. A Liouville-tétel alapján $1/P$ konstansfüggvény, ami természetesen nem igaz. ■

Állítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz, F komplex Banach-tér, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : \Omega \to F$ holomorf függvény. Ha ez a függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon, akkor a $\lim\limits_{k\to\infty} f_k : \Omega \to F$ limeszfüggvény szintén holomorf, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $(D^n f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens Ω-n, valamint $D^n\left(\lim\limits_{k\to\infty} f_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty}(D^n f_k)$.

Bizonyítás. Legyen $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_k$. Az V. fejezet 11. pontjának eredményei szerint f *folytonos* függvény, továbbá az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az Ω minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.

Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ rögzített pont, és vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$. Ha $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$, akkor az

$$\left(\frac{f_k}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens az $Im(\gamma_{\mathfrak{a},r})$ köríven, mert ha $z' \in Im(\gamma_{\mathfrak{a},r})$, vagyis $|z' - \mathfrak{a}| = r$, akkor $|z' - z| \geq |z' - \mathfrak{a}| - |z - \mathfrak{a}| = r - |z - \mathfrak{a}|$, tehát

$$\sup_{z'\in Im(\gamma_{\mathfrak{a},r})} \left\| \frac{f_k(z')}{z' - \mathfrak{a}} - \frac{f(z')}{z' - \mathfrak{a}} \right\| \leq \frac{\sup\limits_{z'\in Im(\gamma_{\mathfrak{a},r})} \|f_k(z') - f(z')\|}{r - |z - \mathfrak{a}|},$$

és itt a jobb oldal 0-hoz tart, ha $k \to \infty$. Ezért a vonalintegrál tulajdonságai szerint minden $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén

$$\left(\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)\right)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f_k}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}} = \lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f_k)\right)(z),$$

ami azt jelenti, hogy a $\left(\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *pontonként* konvergál a $\mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)$ függvényhez a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra f_k holomorf függvény, így Cauchy második integrálformulája szerint $f_k = \mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f_k)$ a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon. Továbbá, az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon pontonként konvergál f-hez, az f definíciója alapján, ezért $f = \mathbf{C}_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(f)$ teljesül a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$. Ebből a Cauchy-transzformáltak analitikussági tulajdonságainak ismeretében kapjuk, hogy f analitikus a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ gömb minden pontjában. Ezzel megmutattuk, hogy f holomorf függvény.

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{a} \in \Omega$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$, akkor a $(D^n f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $D^n f$-hez a

$B_{r'}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon, ha $r' < r$. Valóban, legyen $r' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r' < r$ és $z \in B_{r'}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$. A Cauchy-egyenlőtlenség szerint minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\|(D^n f_k)(z) - (D^n f)(z)\| \leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{|z-\mathfrak{a}|}{r}\right)^{n+1}} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|f_k(z') - f(z')\| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{r'}{r}\right)^{n+1}} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|f_k(z') - f(z')\|,$$

amiből következik, hogy

$$\sup_{z \in B_{r'}(\mathfrak{a};\mathbb{C})} \|(D^n f_k)(z) - (D^n f)(z)\| \leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{r'}{r}\right)^{n+1}} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|f_k(z') - f(z')\|.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=r} \|f_k(z') - f(z')\| = 0,$$

a $(D^n f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $D^n f$-hez a $B_{r'}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon. Ezzel megmutattuk, hogy a $(D^n f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens Ω-n, valamint $D^n\left(\lim\limits_{k \to \infty} f_k\right) = \lim\limits_{k \to \infty} (D^n f_k)$. ■

Gyakorlatok

1. a) A Cauchy-integráltétel *ekvivalens* a következő állítással: ha F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ívek, amelyek kontúrhomotópok a $Dom(f)$ halmazban, akkor

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

b) Az első Cauchy integrálformulára vonatkozó tétel *ekvivalens* a következő állítással: ha F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és γ olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív $\mathbb{C}$-ben, amelyhez létezik $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz úgy, hogy $Im(\gamma) \subseteq U \subseteq Dom(f)$, akkor

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

(*Útmutatás.* a) A Cauchy-integráltételben az f függvényre azt tesszük fel, hogy $Dom(f)$ nyílt halmaz és minden $z \in Dom(f)$ ponthoz létezik f-nek olyan g primitív függvénye, hogy $z \in Dom(f)$. Ez a feltevés ekvivalens az f holomorfitásával, mert minden $\mathbb{C}$-differenciálható függvény kétszer is $\mathbb{C}$-differenciálható.

b) Az első Cauchy-integrálformuláról szóló tételben az f függvényre azt tesszük fel, hogy f folytonos és a $Dom(f)$ minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható, legfeljebb egy pontot kivéve. Legyen f ilyen függvény, és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ olyan pont, hogy f folytonos $\mathfrak{a}$-ban és a $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ minden pontjában $\mathbb{C}$-differenciálható. Legyen γ olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amelyhez létezik olyan $U \subseteq Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyítl halmaz, hogy $Im(\gamma) \subseteq U$. Ha $\mathfrak{a} \notin U$, akkor $U \subseteq Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ miatt az $f|_U$ függvény holomorf. Ha $\mathfrak{a} \in U$, akkor a megszüntethető szingularitások tétele szerint f az $\mathfrak{a}$ pontban is $\mathbb{C}$-differenciálható, tehát az $f|_U$ függvény holomorf. Ezért az $f|_U : U \to F$ holomorf függvényre alkalmazva a b)-ben megfogalmazott állítást kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} (f|_U) = 0$$

teljesül.)

2. Legyen F komplex Banach-tér és $f : [0,1] \times [0,1] \to F$ folytonos függvény. Ekkor

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t))dt = -i \int_{\gamma_{0,1}} \frac{1}{z} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz.$$

Ennek, és a második Cauchy integrálformulának alkalmazásával igazoljuk, hogy minden $\varepsilon \in [0,1[$ esetén

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varepsilon\cos(t) + \varepsilon^2}\, dt = \frac{2\pi}{1-\varepsilon^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon\cos(t))^2}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

(*Útmutatás.* Bebizonyítjuk az utolsó formulát. Teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2\varepsilon\cos(t)+\varepsilon^2}\, dt = -i \int_{\gamma_{0,1}} \frac{1/z}{(1+\varepsilon(z+z^{-1})/2)^2} dz =$$

$$= -\frac{4i}{\varepsilon^2} \int_{\gamma_{0,1}} \frac{z}{(z^2+(2/\varepsilon)z+1)^2} dz = -\frac{4i}{\varepsilon^2} \int_{\gamma_{0,1}} \frac{id_{\mathbb{C}}}{(id_{\mathbb{C}}-z_+)^2(id_{\mathbb{C}}-z_-)^2},$$

ahol bevezettük a

$$z_\pm := \frac{-1 \mp \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

jelölést. Könnyen látható, hogy $z_+ \in B_1(0;\mathbb{C})$ és $z_- \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0;\mathbb{C})}$, ezért az $id_{\mathbb{C}}/(id_{\mathbb{C}} - z_-)^2 : \mathbb{C} \setminus \{z_-\} \to \mathbb{C}$ függvény definíciós tartománya tartalmazza a $\overline{B_1(0;\mathbb{C})}$ gömböt, így Cauchy második integrálformuláját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\left(D\left(\frac{id_{\mathbb{C}}}{(id_{\mathbb{C}}-z_-)^2}\right)\right)(z_+) = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\gamma_{0,1}} \frac{id_{\mathbb{C}}}{(id_{\mathbb{C}}-z_+)^2(id_{\mathbb{C}}-z_-)^2}.$$

Egyszerű számolással adódik, hogy itt a bal oldal egyenlő a

$$\frac{z_- + z_+}{(z_- - z_+)^2} = \frac{\varepsilon^2/4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

számmal.)

3. (*A Cauchy-transzformáció általánosítása.*) Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan mértéktér, hogy $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ *korlátos* komplex mérték, és T σ-véges $\mathscr{R}$ szerint. Legyen továbbá $g : T \to \mathbb{C}$ tetszőleges θ-mérhető függvény. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{(g-z)^{k+1}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, \theta),$$

továbbá az

$$f_{\theta,g} : \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \int_T \frac{1}{g(t)-z}\, d\theta(t)$$

függvényre teljesülnek a következők.

- Az $f_{\theta,g}$ függvény $\mathbb{C}$-analitikus.

- Minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}$ esetén az $f_{\theta,g}$ függvény $\mathfrak{a}$ középpontú Taylor-sorának konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $r := dist_{\overline{Im(g)}}(\mathfrak{a})$ számnál, és $f_{\theta,g}$ egyenlő a Taylor-sor összegfüggvényével a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon.

- Minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(D^k f_{\theta,g})(\mathfrak{a}) = k! \int_T \frac{1}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t).$$

(*Útmutatás.* Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\frac{1}{(g-z)^{k+1}} : T \to \mathbb{C}$$

függvény θ-mérhető és korlátos, ezért θ-integrálható, hiszen θ korlátos mérték (IX. fejezet, 9. pont). Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}$. Ha $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$, akkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{(z-\mathfrak{a})^k}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{r} () \left(\frac{|z-\mathfrak{a}|}{r} \right)^k$$

és $|z-\mathfrak{a}|/r < 1$, következésképpen a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(z-\mathfrak{a})^k}{(g-\mathfrak{a})^{k+1}}$$

függvénysor normálisan konvergens a T halmazon, és θ korlátos mérték, így

$$\begin{aligned} f_{\theta,g}(z) &:= \int_T \frac{1}{g(t)-z}\, d\theta(t) = \int_T \frac{1}{(g(t)-\mathfrak{a})-(z-\mathfrak{a})}\, d\theta(t) = \\ &= \int_T \left(\frac{1}{g(t)-\mathfrak{a}} \right) \left(\frac{1}{1-(z-\mathfrak{a})/(g(t)-\mathfrak{a})} \right) d\theta(t) = \\ &= \int_T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-\mathfrak{a})^k}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \frac{(z-\mathfrak{a})^k}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z-\mathfrak{a})^k \int_T \frac{1}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t). \end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k \int_T \frac{1}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t)$$

függvénysor a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ gömb minden pontjában konvergens, és az összegfüggvénye egyenlő $f_{\theta,g}$-vel ezen a halmazon. Ezért $f_{\theta,g}$ az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathbb{C}$-analitikus és

$$\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f_{\theta,g}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k \int_T \frac{1}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t),$$

vagyis a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f_{\theta,g})$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $\sup\{r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{Im(g)}\}$ számnál, ami egyenlő $dist_{\overline{Im(g)}}(\mathfrak{a})$-val, és a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f_{\theta,g})$ összegfüggvénye egyenlő $f_{\theta,g}$-vel az $\mathfrak{a}$ centrumú, $dist_{\overline{Im(g)}}(\mathfrak{a})$ sugarú nyílt gömbön. Ebből kiolvasható, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$(D^k f_{\theta,g})(\mathfrak{a}) = k! \int_T \frac{1}{(g(t)-\mathfrak{a})^{k+1}}\, d\theta(t)$$

teljesül.)

4. (*A paraméteres integrálfüggvények holomorfitása.*) Legyen F komplex Banach-tér, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $(T, \mathscr{R}, \theta)$ komplex mértéktér, és $(f_t)_{t \in T}$ olyan függvényrendszer, hogy minden $t \in T$ esetén $f_t : \Omega \to F$ holomorf függvény. Tegyük fel, hogy minden $\Omega \ni z$-re a $T \to F;\ t \mapsto f_t(z)$ függvény θ-integrálható, tehát az $\int\limits_T f_t\ d\theta(t)$ paraméteres integrálfüggvény definíciós tartománya egyenlő Ω-val. Ha minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ pontnak létezik olyan V környezete $\mathbb{C}$-ben, hogy $V \subseteq \Omega$ és

$$\int^* \sup_{z \in V} \|f_t(z)\|\ d|\theta|(t) < +\infty,$$

akkor az $\int\limits_T f_t\ d\theta(t)$ függvény holomorf, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$D^n \left(\int\limits_T f_t\ d\theta(t) \right) = \int\limits_T (D^n f_t) d\theta(t).$$

(*Útmutatás.* Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ rögzített pont. A feltevés szerint van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq \Omega$ és

$$\int^* \sup_{z \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})} \|f_t(z)\|\ d|\theta|(t) < +\infty.$$

Vezessük be a

$$h : T \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad t \mapsto \frac{4}{r} \sup_{z \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})} \|f_t(z)\|$$

függvényt, amelyre az előzőek alapján

$$\int^* h\ d|\theta| < +\infty$$

teljesül. Ha $t \in T$, akkor $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq \Omega = Dom(f_t)$ miatt az f_t függvényre felírható a Cauchy-egyenlőtlenség, amely szerint minden $z \in B_{r/2}(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$ esetén

$$\|(Df_t)(z)\| \leq \frac{1}{r} \frac{1}{(1 - |z - \mathfrak{a}|/r)^2} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z' - \mathfrak{a}| = r} \|f(z')\| \leq \frac{4}{r} \sup_{z \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})} \|f_t(z)\| =: h(t).$$

Ezért a paraméteres integrálfüggvények differenciálhatóságának tétele (IX. fejezet, 8. pont) alapján az $\int\limits_T f_t\ d\theta(t)$ paraméteres integrálfüggvény $\mathbb{C}$-differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (figyelembe véve a IX. fejezet, 8. pont, **6**. gyakorlat eredményét), továbbá a $T \to F;\ t \mapsto (Df_t)(\mathfrak{a})$ függvény θ-integrálható, és

$$\left(D \left(\int\limits_T f_t\ d\theta(t) \right) \right) (\mathfrak{a}) = \int\limits_T (Df_t)(\mathfrak{a})\ d\theta(t).$$

Ebből kiindulva, n szerinti teljes indukcióval bizonyíthatunk a magasabb rendű deriváltakra.)

5. Az $f := 1/\left(1 + id_{\mathbb{R}}^2\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\mathbb{R}$-analitikus és $\mathbf{T}_0(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k id_{\mathbb{R}}^{2k}$, tehát az f függvény 0 kezdőpontú Taylor-sorának konvergencia-sugara 1, ami nem nagyobb-egyenlő a $\sup\{r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B}_r(0;\mathbb{R}) \subseteq Dom(f)\} = +\infty$ számnál. Tehát a Taylor-sorfejtés maximalitása általában nem igaz valós analitikus függvényekre. Vizsgáljuk meg a 0 középpontú Taylor-sorfejtés maximalitását az $1/(1 + id_{\mathbb{C}}^2) : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre!

6. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Minden $U \subseteq Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n : U \to F$ holomorf függvény és $D^n f_n \subseteq f$.

(*Útmutatás.* Elemi rekurziót alkalmazhatunk olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat létezésének bizonyításához, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to F$ holomorf függvény, $f_0 := f$ az U halmazon, és ha $n > 0$, akkor $Df_n = f_{n-1}$. Ehhez felhasználható az, hogy egy holomorf függvénynek a definíciós tartománya által tartalmazott egyszeresen összefüggő nyílt halmazon létezik primitív függvénye.)

7. (*A szigorú lokális maximum elve.*) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Ekkor az $\|f\| : Dom(f) \to \mathbb{R}_+$ függvénynek a $Dom(f)$ halmaz egyetlen pontjában sincs *szigorú* lokális maximuma.

(*Útmutatás.* Azt kell megmutatni, hogy ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, akkor az $\mathfrak{a}$ pont minden V környezetéhez létezik olyan $z \in (V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f)$, amelyre $\|f(\mathfrak{a})\| \leq \|f(z)\|$. Ez így van, mert ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq V \cap Dom(f)$, akkor a Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$\|f(\mathfrak{a})\| \leq \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z' - \mathfrak{a}| = r} \|f(z')\|,$$

tehát az $\|f\|$ függvény folytonossága és a $\{z' \in \mathbb{C} | |z' - \mathfrak{a}| = r\}$ körvonal kompaktsága miatt létezik olyan $z \in \mathbb{C}$, hogy $|z - \mathfrak{a}| = r$ és

$$\sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z' - \mathfrak{a}| = r} \|f(z')\| = \|f(z)\|,$$

így a $z \in (V \setminus \{\mathfrak{a}\}) \cap Dom(f)$ pontra $\|f(\mathfrak{a})\| \leq \|f(z)\|$ teljesül.)

8. Adjunk példát olyan F komplex Banach-térre és olyan $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvényre, amely nem konstansfüggvény, de létezik az $\|f\| : Dom(f) \to \mathbb{R}_+$ függvénynek a $Dom(f)$ halmaz valamely pontjában (*nem szigorú*) lokális maximuma. Tudunk-e ilyen példát adni $dim(F) = 1$ esetén?

(*Útmutatás.* Legyen $F := \mathbb{C}^2$ a max-normával ellátva, $u \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|\mathfrak{a}| = 1$, továbbá értelmezzük az

$$f : B_1(0;\mathbb{C}) \to F; \quad z \mapsto (z, u)$$

függvényt. Ekkor f nem állandó holomorf függvény, de minden $z \in B_1(0;\mathbb{C})$ esetén $\|f(z)\| = \max(|z|, |u|) = 1$, vagyis az $\|f\|$ függvénynek a $Dom(f)$ *minden pontjában* lokális maximuma van. Ha $dim(F) = 1$, akkor a **10**. gyakorlat szerint ilyen függvény nem létezik.)

9. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény, $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$. Ekkor fennáll a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|(D^k f)(\mathfrak{a})|}{k!} \right)^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\mathfrak{a} + re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

egyenlőség.

(**Megjegyzés**. Ha F komplex Hilbert-tér (XII. fejezet, 5. pont), $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, akkor fennáll a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|(D^k f)(\mathfrak{a})\|}{k!} \right)^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(\mathfrak{a} + re^{i\theta})\|^2 \, d\theta$$

egyenlőség.)

(*Útmutatás.* Legyen $z \in \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C})$; ekkor a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} (z - \mathfrak{a})^k, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\overline{(D^k f)(\mathfrak{a})}}{k!} (\overline{z} - \overline{\mathfrak{a}})^k$$

numerikus sorok abszolút konvergensek, ezért ezek Cauchy-szorzata is abszolút konvergens és

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} (z - \mathfrak{a})^j (\overline{z} - \overline{\mathfrak{a}})^{k-j} \right).$$

Ebből következik, hogy minden $\theta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|f(\mathfrak{a} + re^{i\theta})\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} e^{-i(k-2j)\theta} \right),$$

továbbá a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} r^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} e^{-i(k-2j).id_{\mathbb{R}}} \right)$$

függvénysor pontonként abszolút konvergens $\mathbb{R}$-en. Megmutatjuk, hogy ez a függvénysor *normálisan konvergens* $\mathbb{R}$-en. Valóban, jelölje R az f függvény $\mathfrak{a}$ középpontú Taylor-sorának konvergencia-sugarát, és legyen $\rho \in]r, R[$ rögzített szám. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén minden $\mathbb{R} \ni \theta$-ra

$$r^k \left| \sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} e^{-i(k-2j)\theta} \right| =$$

$$= \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \left| \sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \rho^j \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} \rho^{k-j} e^{-i(k-2j)\theta} \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \left| \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \rho^j \right| \left| \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} \rho^{k-j} \right| = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \left(\sum_{j=0}^{k} \left| \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \rho^j \right| \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \rho^j \right| \right)^2 ,$$

tehát minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left(r^k \left| \sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} e^{-i(k-2j)\theta} \right| \right) \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \rho^j \right| \right)^2 .$$

Ebből $r/rho \in]0, 1[$ miatt kapjuk, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} r^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} e^{-i(k-2j).id_{\mathbb{R}}} \right)$$

függvénysor normálisan konvergens $\mathbb{R}$-en, és az előzőek alapján

$$\|f(\mathfrak{a} + re^{i.id_{\mathbb{R}}})\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} e^{-i(k-2j).id_{\mathbb{R}}} \right).$$

Ezért a Lebesgue-tétel alkalmazásával

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\mathfrak{a} + re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-2j)\theta} d\theta \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(\mathfrak{a})}{j!} \frac{\overline{(D^{k-j} f)(\mathfrak{a})}}{(k-j)!} \delta_{2j,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|(D^k f)(\mathfrak{a})|}{k!} \right)^2 r^{2k}$$

adódik.)

10. (*A lokális maximum elve.*) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$. Ha f nem állandó az $\mathfrak{a}$ valamely környezetén, akkor az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma $\mathfrak{a}$-ban, vagyis a $\mathfrak{a}$ minden környezetében van olyan $z \in Dom(f)$ pont, amelyre $|f(z)| > |f(\mathfrak{a})|$.

(*Útmutatás.* Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény és $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ olyan pont, amelyben $|f|$-nek lokális maximuma van. Megmutatjuk, hogy $|f|$ az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén állandó. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$

és minden $z \in \overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén $|f(z)| \leq |f(\mathfrak{a})|$. Ekkor minden $\theta \in [0, 2\pi]$ esetén $|f(\mathfrak{a} + re^{i\theta})| \leq |f(\mathfrak{a})|$, tehát a **9**. gyakorlat alapján

$$|f(\mathfrak{a})|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|(D^k f)(\mathfrak{a})|}{k!} \right)^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\mathfrak{a} + re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\mathfrak{a})|^2 d\theta = |f(\mathfrak{a})|^2.$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|(D^k f)(\mathfrak{a})|}{k!} \right)^2 r^{2k} = 0,$$

tehát minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $(D^k f)(\mathfrak{a}) = 0$, vagyis

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} \right) (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k = f(\mathfrak{a})$$

teljesül a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon.)

11. (*Holomorf függvény gyökei.*) Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény és

$$N_f := \{z \in Dom(f) \mid f(z) = 0\},$$

vagyis N_f az f gyökeinek halmaza. Ha $Dom(f)$ összefüggő és f nem azonosan 0, akkor teljesülnek a következők.

a) Az N_f halmaz diszkrét, tehát minden pontja izolált.

b) Minden $\mathfrak{a} \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $m \in \mathbb{N}^+$ és olyan $g : Dom(f) \to F$ holomorf függvény, hogy $g(\mathfrak{a}) \neq 0$ és minden $Dom(f) \ni z$-re $f(z) = (z - \mathfrak{a})^m g(z)$ (ezt az m számot nevezzük az $\mathfrak{a}$ gyök *multiplicitásának*).

c) Az N_f halmaz *megszámlálható*.

(*Útmutatás.* Ha az $\mathfrak{a} \in N_f$ pont nem volna izolált pontja N_f-nek, akkor létezne olyan N_f-ben haladó injektív sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál; ekkor az f függvény $\mathbb{C}$-analitikussága és $Dom(f)$ összefüggősége következtében f azonosan nulla volna (VII. fejezet, 10. pont, **9**. gyakorlat). Ezzel az a) állítást igazoltuk.

A b) bizonyításához legyen $\mathfrak{a} \in N_f$ rögzítve. Van olyan $k \in \mathbb{N}^+$, hogy $(D^k f)(\mathfrak{a}) \neq 0$, különben az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli $\mathbb{C}$-analitikussága és $f(\mathfrak{a}) = 0$ folytán létezne $fraka$-nak olyan környezete, amely részhalmaza N_f-nek, ami az a) miatt lehetetlen. Ezért jól értelmezett az $m := \min\{k \in \mathbb{N}^+ | (D^k f)(\mathfrak{a}) \neq 0\}$ természetes szám, így létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan környezete, amelyen

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} \right) (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} \right) (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k =$$

$$= (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} \right) (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k-m}$$

teljesül. Értelmezzük a

$$g : Dom(f) \to F; \quad z \mapsto \begin{cases} f(z)/(z-\mathfrak{a})^m & ; \text{ha } z \neq \mathfrak{a}, \\ (D^m f)(\mathfrak{a})/m! & ; \text{ha } z = \mathfrak{a} \end{cases}$$

függvényt. Az előzőek alapján g folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban, és $\mathbb{C}$-differenciálható a $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmaz minden pontjában, ezért a megszüntethető szingularitások tétele alapján g holomorf. (Ez egyébként látszik abból is, hogy fennáll a

$$g = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{(D^k f)(\mathfrak{a})}{k!} \right) (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k-m}$$

egyenlőség az $\mathfrak{a}$ valamely környezetén, ezért g az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathbb{C}$-analitikus.) Továbbá, $g(\mathfrak{a}) \neq 0$ és minden $z \in Dom(f)$ esetén $f(z) = (z-\mathfrak{a})^m g(z)$. Ha $g' : Dom(f) \to F$ szintén olyan holomorf függvény, hogy $g'(\mathfrak{a}) \neq 0$ és minden $Dom(f) \ni z$-re $f(z) = (z-\mathfrak{a})^m g'(z)$, akkor $m' < m$ esetén a $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon $(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{m-m'} g = g'$, így $g'(\mathfrak{a}) = \lim_{\mathfrak{a}} g' = 0$, ami nem igaz; és hasonlóan $m < m'$ is lehetetlen, így $m = m'$, és akkor szükségképpen $g = g'$. Ezzel a b) állítást is igazoltuk.

A c) bizonyításához vegyünk a $\mathbb{C}$ kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy $Dom(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (II. fejezet, 2. pont, **5**. gyakorlat). Ekkor $N_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (K_n \cap N_f)$, így az N_f megszámlálhatóságának bizonyításához elég volna azt megmutatni, hogy minden $K \subseteq Dom(f)$ kompakt halmazra $K \cap N_f$ *véges*. Ez viszont a Bolzano-Weierstrass-tétel és az N_f diszkrétsége miatt nyilvánvaló, hiszen ha $K \cap N_f$ végtelen volna, akkor létezne olyan ebben haladó injektív sorozat, amely a K valamely pontjához konvergálna; de egy ilyen limeszpont az f folytonossága miatt gyöke volna f-nek, így nem lehetne izolált pontja N_f-nek, ami ellentmond az a) állításnak.)

12. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha $U \subseteq Dom(f)$ olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, hogy minden $U \ni z$-re $f(z) \neq 0$, vagyis f-nek nincs gyöke U-ban, akkor létezik olyan $g : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelyre $f = Exp \circ g$ az U halmazon.

(*Útmutatás.* A $(Df)/f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény holomorf, és a definíciós tartománya tartalmazza U-t, tehát az U egyszeres összefüggősége következtében létezik olyan $h : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $(Df)/f = Dh$ az U halmazon. Ekkor

$$D\left(\frac{Exp \circ h}{f}\right) = \frac{(f(Dh) - Df)(Exp \circ h)}{f^2} = 0$$

az U halmazon, így az U összefüggősége folytán az $(Exp \circ h)/f$ függvény állandó, tehát létezik olyan $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hogy $Exp \circ h = cf$ az U halmazon. Ha $b \in \mathbb{C}$ olyan szám, hogy $c = Exp(b)$, akkor a $g := h - b$ függvény eleget tesz a követelményeknek.)

13. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és F komplex Banach-tér. Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{C} \setminus D \to F$ olyan holomorf függvények, hogy az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke, továbbá $\sup_{z\in\mathbb{C}\setminus D} \|f(z) - g(z)\| < +\infty$

(vagyis az $f-g$ függvény korlátos), és $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D}\|f(z)-g(z)\|=0$. Ekkor fennáll az $f=g$ egyenlőség.

(*Útmutatás.* Jelölje h az $f-g$ függvény holomorf kiterjesztését $\mathbb{C}$-re. A megszüntethető szingularitások tétele alapján $h:\mathbb{C}\to F$ holomorf függvény, és az $f-g$ korlátossága miatt korlátos is. A Liouville-tételt alkalmazva kapjuk, hogy h konstansfüggvény. Az $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}}\|h(z)\|\leq\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D}\|f(z)-g(z)\|=0$ feltétel alapján $h=0$, így $f=g$.)

14. (*Riemann-féle zéta-függvény.*) Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{k^{id_{\mathbb{C}}}}$$

függvénysor normálisan konvergens minden $\{z\in\mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z)\geq\alpha\}$ alakú halmazon, ahol $\alpha>1$ tetszőleges valós szám. Igazoljuk, hogy

$$\zeta:\{z\in\mathbb{C}\mid\mathfrak{Re}(z)>1\}\to\mathbb{C};\quad z\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$$

függvény (amit *Riemann-féle zéta-függvénynek* nevezünk) holomorf. Jelölje $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ azt a szigorúan monoton növő sorozatot $\mathbb{N}$-ben, amelyre $\{p_k|k\in\mathbb{N}\}$ egyenlő a prímszámok halmazával. Bizonyítsuk be, hogy minden $z\in\mathbb{C}$ esetén, ha $\mathfrak{Re}(z)>1$, akkor a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-p_k^{-z}}$$

végtelen szorzat konvergens, és fennáll a

$$\zeta(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-z}}$$

egyenlőség. Ebből vezessük le, hogy a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-p_k^{-1}}$$

végtelen szorzat, valamint a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{p_k}$$

sor divergens, továbbá minden $z\in\mathbb{C}$ esetén, ha $\mathfrak{Re}(z)>1$, akkor $\zeta(z)\neq 0$, vagyis ζ-nak *nincs gyöke* a $\{z\in\mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z)>1\}$ halmazban.

Igazoljuk továbbá, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{id_{\mathbb{C}}}}$$

függvénysor egyenletesen konvergens az $\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 0\}$ nyílt félsík minden kompakt részhalmazán, ezért jól értelmezett a

$$\zeta_a : \{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

függvény. Bizonyítsuk be, hogy a ζ_a függvény holomorf és minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $\mathfrak{Re}(z) > 1$, akkor

$$\zeta(z) = \frac{\zeta_a(z)}{1 - 2^{1-z}},$$

következésképpen a

$$\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{\zeta_a(z)}{1 - 2^{1-z}}$$

függvény holomorf kiterjesztése a ζ függvénynek a $\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 0\}\setminus\{1\}$ halmazra. Ezt a kiterjesztést is *Riemann-féle zeta-függvénynek* nevezzük, és ζ-val jelöljük. Igazoljuk, hogy $\zeta_a(1) = log(2)$ és

$$\lim_{z \to 1} ((z-1)\zeta(z)) = 1.$$

(**Megjegyzés**. A ζ függvénnyel kapcsolatos kapcsolatos az a Riemann-tól származó, máig sem bizonyított sejtés, hogy minden gyöke rajta van a $\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) = 1/2\}$ egyenesen.)

(*Útmutatás.* Legyen $\alpha > 1$ rögzített valós szám. Ha $k \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\sup_{z \in \mathbb{C};\ \mathfrak{Re}(z) \geq \alpha} \left| \frac{1}{k^z} \right| = \sup_{z \in \mathbb{C};\ \mathfrak{Re}(z) \geq \alpha} \frac{1}{k^{\mathfrak{Re}(z)}} = \frac{1}{k^\alpha},$$

és tudjuk, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

hiperharmonikus sor $\alpha > 1$ miatt konvergens (II. fejezet, 4. pont), így a majoráns kritérium alapján a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{k^{id_{\mathbb{C}}}}$$

függvénysor normálisan konvergens a $\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) \geq \alpha\}$ halmazon. Másfelől, minden $K \subseteq \{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 1\}$ kompakt halmazhoz van olyan $\alpha > 1$ valós szám, hogy $K \subseteq \{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) \geq \alpha\}$, így ez a függvénysor normálisan konvergens a $\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 1\}$ halmaz minden kompakt részhalmazán. Minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $k^{-id_{\mathbb{C}}} = Exp \circ (-id_{\mathbb{C}}.log(k))$, ezért az $k^{-id_{\mathbb{C}}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény holomorf, így a holomorf függvények lokálisan egyenletes limeszének holomorfitása miatt a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{id_{\mathbb{C}}}}$$

összegfüggvény értelmezve van és holomorf a $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(z) > 1\}$ halmazon. Megmutatjuk, hogy $z \in \mathbb{C}$ és $\mathfrak{Re}(z) > 1$ esetén a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$$

végtelen szorzat konvergens, és fennáll a

$$\zeta(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$$

egyenlőség. Ha $z \in \mathbb{C}$ és $\mathfrak{Re}(z) > 1$, akkor a

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$$

végtelen szorzat konvergenciája következik a XI. fejezet, 2. pont, **2**. gyakorlatából és abból a nyilvánvaló tényből, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{p_k^z - 1}$$

sor abszolút konvergens. Legyen most $z \in \mathbb{C}$ olyan szám, amelyre $\mathfrak{Re}(z) > 1$. Ha $k \in \mathbb{N}^+$, akkor $|p_k^{-z}| < 1$, tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{zj}} \right) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{p_k^{zj}} \right) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;m)} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p_k^{z\sigma(k)}} \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(n;m)} \left(\prod_{k=0}^{n-1} p_k^{\sigma(k)} \right)^{-z} =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j\in A_{m,n}} \frac{1}{j^z},$$

ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$A_{m,n} := \{ \prod_{k=0}^{n-1} p_k^{\sigma(k)} \mid \sigma \in \mathscr{F}(n;m) \}.$$

Ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| \zeta(z) - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - p_k^{-1}} \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \zeta(z) - \sum_{j\in A_{m,n}} \frac{1}{j^z} \right| =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^z} - \sum_{j\in A_{m,n}} \frac{1}{j^z} \right| \right).$$

Megmutatjuk, hogy $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén minden $\mathbb{N} \setminus A_{m,n} \ni j$-re $j \geq \min(2^m, p_n)$. Valóban, ha $j \in \mathbb{N} \setminus A_{m,n}$, akkor $j > 1$, és az $A_{m,n}$ halmaz értelmezése alapján

- vagy létezik olyan $k \geq n$ természetes szám, hogy p_k prímosztója j-nek: ekkor $p_n \leq p_k \leq j$;

- vagy a j mindegyik prímosztója eleme a $\{p_k | k \in n\}$ halmaznak, de létezik olyan $k \in n$ és olyan $q \geq m$ természetes szám, hogy p_k^q osztója j-nek: ekkor $2^m = p_0^m \leq p_k^q \leq j$.

Ebből következik, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, akkor minden $k > \max(A_{m,n})$ természetes számra

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^z} - \sum_{j \in A_{m,n}} \frac{1}{j^z} \right| = \left| \sum_{j \in k;\ j \notin A_{m,n}} \frac{1}{j^z} \right| \leq \sum_{j \in k;\ j \notin A_{m,n}} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}} \leq \sum_{j=\min(2^m, p_n)}^{\infty} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}},$$

ezért fennáll a

$$\lim_{k \to \infty} \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^z} - \sum_{j \in A_{m,n}} \frac{1}{j^z} \right| \leq \sum_{j=\min(2^m, p_n)}^{\infty} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}}$$

egyenlőtlenség. Nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{j=\min(2^m, p_n)}^{\infty} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}} = \sum_{j=p_n}^{\infty} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}},$$

amiből következik, hogy

$$\left| \zeta(z) - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} \right| = \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{k \to \infty} \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^z} - \sum_{j \in A_{m,n}} \frac{1}{j^z} \right| \right) \leq \sum_{j=p_n}^{\infty} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}},$$

ezért fennáll a

$$\zeta(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$$

egyenlőség is, hiszen

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=p_n}^{\infty} \frac{1}{j^{\mathfrak{Re}(z)}} = 0.$$

Legyen most $z \in \mathbb{C}$ olyan szám, amelyre $\mathfrak{Re}(z) > 0$. A feltételes konvergencia Abel-kritériumának (II. fejezet, 4. pont) alkalmazásával megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

sor konvergens $\mathbb{C}$-ben, és minden $\mathbb{N}^+ \ni m$-re teljesül a

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z} \right| \leq \frac{|z|}{\mathfrak{Re}(z)} \frac{1}{m^{\mathfrak{Re}(z)}}$$

egyenlőtlenség. Ehhez legyen minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_k := k^{-z}$ és $b_k := (-1)^{k-1}$. Nyilvánvaló, hogy a $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos részletösszegű, és $\mathfrak{Re}(z) > 0$ miatt az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ sorozat korlátos változású is, mert ha $k \in \mathbb{N}^+$, akkor a Newton-Leibniz-formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\frac{1}{k^z} - \frac{1}{(k+1)^z} = z \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{t^{z+1}} dt,$$

amiből következik, hogy

$$\left| \frac{1}{k^z} - \frac{1}{(k+1)^z} \right| \le |z| \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{t^{\mathfrak{Re}(z)+1}} dt,$$

így minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén, ha $n > m$, akkor

$$\sum_{k=m}^{n-1} \left| \frac{1}{k^z} - \frac{1}{(k+1)^z} \right| \le |z| \sum_{k=m}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{t^{\mathfrak{Re}(z)+1}} dt = |z| \int\limits_m^n \frac{1}{t^{\mathfrak{Re}(z)+1}} dt \le$$

$$\le |z| \int\limits_{[m,\to[} \frac{1}{t^{\mathfrak{Re}(z)+1}} dt = \frac{|z|}{\mathfrak{Re}(z)} \frac{1}{m^{\mathfrak{Re}(z)}}$$

(X. fejezet, 2. pont, **14**. gyakorlat). Ez nemcsak azt mutatja, hogy az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ sorozat korlátos változású, hanem az is kiderül belőle, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni m$-re

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left| \frac{1}{k^z} - \frac{1}{(k+1)^z} \right| \le \frac{|z|}{\mathfrak{Re}(z)} \frac{1}{m^{\mathfrak{Re}(z)}}.$$

Ezért a feltételes konvergencia Abel-kritériuma szerint a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\ge 1} a_k b_k = \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\ge 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

sor konvergens, és minden $\mathbb{N}^+ \ni m$-re

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z} \right| \le \left(\sum_{k=m}^{\infty} \left| \frac{1}{k^z} - \frac{1}{(k+1)^z} \right| \right) \sup_{n\in\mathbb{N};\ n\ge m} \left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-1} \right| \le \frac{|z|}{\mathfrak{Re}(z)} \frac{1}{m^{\mathfrak{Re}(z)}}.$$

Ebből már következik, hogy a

$$\zeta_a : \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

függvény jól értelmezett. Legyen $K \subseteq \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(z) > 0\}$ nem üres kompakt halmaz. A $\mathfrak{Re}$ függvény folytonos és szigorúan pozitív a K halmazon, ezért a Weierstrass-féle minimum-elv alapján létezik olyan $C_(K) \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $z \in$

K esetén $\mathfrak{Re}(z) \geq C_-(K)$. Ugyanakkor K korlátos, ezért van olyan $C_+(K) \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $z \in K$ esetén $|z| \leq C_+(K)$. Ilymódon minden $m > 1$ természetes számra

$$\sup_{z\in K}\left|\zeta_a(z) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^z}\right| = \sup_{z\in K}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^z}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in K}\left(\frac{|z|}{\mathfrak{Re}(z)}\frac{1}{m^{\mathfrak{Re}(z)}}\right) \leq \frac{C_+(K)}{C_-(K)}\frac{1}{m^{C_-(K)}},$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{z\in K}\left|\zeta_a(z) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^z}\right|\right) = 0,$$

vagyis a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{id_{\mathbb{C}}}}$$

függvénysor egyenletesen konvergens a K halmazon. Ezért ez a függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens a $\{z \in \mathbb{C}|\mathfrak{Re}(z) > 0\}$ nyílt halmazon, így ismét a holomorf függvények lokálisan egyenletes limeszének holomorfitása alapján a ζ_a függvény holomorf.

Legyen most $z \in \mathbb{C}$ olyan szám, amelyre $\mathfrak{Re}(z) > 1$. Ekkor

$$\sum_{j\in\mathbb{N};\ j\geq 1}\frac{1}{(2j)^z},\quad \sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2j+1)^z}$$

(abszolút) konvergens sorok, ezért

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^z}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j)^z} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(2j+1)^z}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j)^z} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^z} = \frac{1}{2^z}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^z} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^z},$$

amiből következik, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^z}.$$

Ugyanakkor teljesülnek a következő egyenlőségek is

$$\zeta_a(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^z} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^z}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j)^z} + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(2j+1)^z}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j)^z} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^z} =$$

$$= -\frac{1}{2^z}\zeta(z) + \left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = \left(1 - \frac{1}{2^{z-1}}\right)\zeta(z),$$

tehát igaz a

$$\zeta(z) = \frac{\zeta_a(z)}{1 - 2^{1-z}}$$

egyenlőség is. Jelölje ζ a

$$\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{\zeta_a(z)}{1 - 2^{1-z}}$$

kiterjesztett függvényt is. A ζ_a leképezés az 1-ben folytonos, és a X. fejezet, 2. pont, **3**. gyakorlat szerint

$$\zeta_a(1) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = log(2),$$

tehát $\lim\limits_{z \to 1} \zeta_a(z) = \zeta_a(1) = log(2)$. Ugyanakkor teljesül a

$$\lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{1 - 2^{1-z}} \right) = \frac{1}{log(2)}$$

elemi határérték-egyenlőség is, ezért $\lim\limits_{z \to 1}((z-1)\zeta(z)) = 1$.)

15. Bizonyítsuk be a következőket.

a) Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ esetén

$$\frac{\pi^2}{Sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2},$$

és minden $\mathbb{C} \ni z$-re, ha $z - (1/2) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, akkor

$$\frac{\pi^2}{Cos^2(\pi z)} = \frac{4}{(2z-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-k-\frac{1}{2})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k-\frac{1}{2})^2}.$$

b) Minden $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ esetén

$$Ctg(\pi z) = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2},$$

és minden $\mathbb{C} \ni z$-re, ha $z - (1/2) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, akkor

$$Tg(\pi z) = \frac{2z}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

c) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $0 < |z| < \pi$, akkor

$$Ctg(z) = \frac{1}{z} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k-1},$$

ahol ζ a Riemann-féle zéta-függvény (**14**. gyakorlat).

d) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $0 < |z| < \pi$, akkor

$$\frac{1}{Exp(z) - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} B_k z^{2k-1},$$

ahol $k \in \mathbb{N}^+$ esetén, definíció szerint:

$$B_k := \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

az ún. k-adik *Bernoulli-szám.*

(*Útmutatás.* Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ és $H_r := \{z \in \mathbb{C} | -r \leq \mathfrak{Re}(z) \leq r\}$. Könnyen látható, hogy $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq 2r$ esetén fennáll a

$$\sup_{z \in \{0\} \cup (H_r \setminus \mathbb{Z})} \left| \frac{1}{z \pm k} \right| \leq \sup_{z \in \{0\} \cup (H_r \setminus \mathbb{Z})} \left| \frac{1}{\mathfrak{Re}(z) \pm k} \right| \leq \sup_{z \in \{0\} \cup (H_r \setminus \mathbb{Z})} \frac{1}{k - |\mathfrak{Re}(z)|} \leq \frac{2}{k}$$

egyenlőtlenség. Ha $C \subseteq \{0\} \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ nem üres kompakt halmaz, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $C \subseteq H_r$, és akkor $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2r$ esetén az iménti egyenlőtlenségek alapján

$$\sup_{z \in C} \left| \frac{1}{z \pm k} \right| \leq \frac{2}{k},$$

míg $k \in \mathbb{N}$ és $1 \leq k < 2r$ esetén

$$\sup_{z \in C} \left| \frac{1}{z \pm k} \right| \leq \frac{1}{dist_C(\pm k)} < +\infty$$

teljesül. Ebből következik, hogy a

$$\sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{1}{(id_{\mathbb{C}} - k)^2}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{1}{(id_{\mathbb{C}} + k)^2}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} \frac{1}{id_{\mathbb{C}}^2 - k^2}$$

függvénysorok *normálisan konvergensek* a $\{0\} \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ nyílt halmaz minden nem üres kompakt részhalmazán, ezért lokálisan egyenletesen konvergensek, így ezek összegfüggvényei a $\{0\} \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ halmazon értelmezett *holomorf* függvények.

Az a) bizonyításához értelmezzük az

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}; \quad z \mapsto \frac{\pi^2}{Sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$$

függvényt. Ez holomorf, és könnyen látható, hogy minden $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \ni z$-re és $\mathbb{Z} \ni n$-re $f(z+n) = f(z)$. Ezért, ha f-nek létezik határértéke 0-ban, és ha f a $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | 0 \leq \mathfrak{Re}(z) < 1\}$ halmazon korlátos, akkor f-nek a $\mathbb{Z}$ minden pontjában létezik határértéke, és f korlátos a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon. Az f-nek létezik határértéke a 0 pontban, mert minden $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ esetén

$$\frac{\pi^2}{Sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{Sin(\pi z)}{\pi z}\right) \left(1 + \frac{Sin(\pi z)}{\pi z}\right) \left(\frac{\pi z}{Sin(\pi z)}\right)^2,$$

következésképpen a

$$\lim_{z\to 0}\frac{Sin(\pi z)}{\pi z}=1,\quad \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{Sin(\pi z)}{\pi z}\right)\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

elemi határérték-egyenlőségek alapján

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi^2}{Sin^2(\pi z)}-\frac{1}{z^2}\right)=\frac{\pi^2}{3},$$

továbbá világos, hogy

$$\lim_{z\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z\pm k)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

hiszen a

$$\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1}\frac{1}{(id_{\mathbb{C}}-k)^2},\qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1}\frac{1}{(id_{\mathbb{C}}+k)^2}$$

függvénysorok a 0 valamely környezetén egyenletesen konvergensek. Az könnyen ellenőrizhető, hogy az f függvény korlátos a $\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}|0\leq \mathfrak{Re}(z)<1\}$ halmazon. Ha $t\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor

$$f(it)=-\frac{\pi^2}{sh^2(\pi t)}+\frac{1}{t^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(t+ik)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(t-ik)^2}$$

és itt a két első tag 0-hoz tart, ha t tart $+\infty$-hez, ugyanakkor

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(t\pm ik)^2}=0$$

is teljesül, ezért $\lim\limits_{t\to+\infty}f(it)=0$, következésképpen $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}|f(z)|=0$. A **13.** gyakorlat szerint $f=0$ a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ halmazon, ami azt jelenti, hogy az a) első formulája teljesül. Az a) második formulája az elsőből nyerhető, ha abban a z helyére a $z-(1/2)$ számot helyettesítjük.

A b) első formuláját szintén a **13.** gyakorlat eredményének felhasználásával igazolhatjuk, ha azt az

$$f:\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z};\quad z\mapsto Ctg(\pi z)-\frac{1}{\pi z},$$

$$f:\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z};\quad z\mapsto 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-k^2}$$

függvényekre alkalmazzuk. A b) második formulája az elsőből nyerhető.

A c)-ben szereplő formula szintén a b) első formulájából származtatható, mert $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < \pi$ esetén $z/\pi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, így a b) alapján

$$Ctg(z) = Ctg\left(\pi \frac{z}{\pi}\right) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 z^2} \left(\frac{1}{1-(z/(\pi k))^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 z^2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\pi^{2j}} \frac{1}{k^{2j}}\right) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\pi^{2j+2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j+2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - 2z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}\zeta(2j+2)}{\pi^{2j+2}} = \frac{1}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k-1},$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $0 < |z| < \pi$ miatt minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-ra $|z/(\pi k)| < 1$, és a két sorösszegzés a diszkrét Lebesgue-Fubini-tétel alapján felcserélhető (VII. fejezet, 10. pont).

Végül, ha $z \in \mathbb{C}$ és $0 < |z| < \pi$, akkor $0 < |z/2| < \pi$ és

$$\frac{1}{Exp(z)-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} Ctg\left(\frac{z}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} Ctg\left(\frac{iz}{2}\right)$$

teljesül, ezért a d) bizonyításához elég a c)-t alkalmazni.)

16. Mutassuk meg, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $\zeta(2k)/\pi^{2k} \in \mathbb{Q}$, ahol ζ a Riemann-féle zéta-függvény (**14**. gyakorlat), és fennállnak a következő egyenlőségek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30},$$

ahol $k \in \mathbb{N}^+$ esetén B_k a k-adik Bernoulli-szám (**15**. gyakorlat).

17. Legyenek E és F normált terek $\mathbb{K}$ felett, valamint $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Ha $\mathfrak{a} \in Int(Dom(f))$ olyan pont, hogy minden $u \in F'$ funkcionálra az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, akkor f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

(**Megjegyzés**. Figyeljük meg, hogy itt E és F *valós* normált terek is lehetnek, vagyis ennek az állításnak az érvényessége független a $\mathbb{K}$ számtest választásától. Az állítás bizonyításában felhasználjuk a *Banach-Steinhaus-tételt*, amit majd a XII. fejezet 3. pontjában igazolunk.)

(*Útmutatás.* Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $Dom(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ben, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál. Ha $u \in F'$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$u\left(\frac{f(x_n)-f(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right) = \frac{(u\circ f)(x_n)-(u\circ f)(\mathfrak{a})-(D(u\circ f))(\mathfrak{a})(x_n-\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|} +$$

$$+(D(u\circ f))(\mathfrak{a})\left(\frac{x_n-\mathfrak{a}}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right),$$

és az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatósága miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(u\circ f)(x_n) - (u\circ f)(\mathfrak{a}) - (D(u\circ f))(\mathfrak{a})(x_n - \mathfrak{a})}{\|x_n - \mathfrak{a}\|} = 0,$$

továbbá $(D(u \circ f))(\mathfrak{a}) \in E'$, így

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| (D(u\circ f))(\mathfrak{a}) \left(\frac{x_n - \mathfrak{a}}{\|x_n - \mathfrak{a}\|} \right) \right| \le \|(D(u\circ f))(\mathfrak{a})\| < +\infty.$$

Tehát ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $y_n := (f(x_n) - f(\mathfrak{a}))/\|x_n - \mathfrak{a}\|$, akkor az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, hogy minden $F' \ni u$-ra az $(u(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos $\mathbb{K}$-ban. Ezért az F''-ban haladó $(j_F(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat *pontonként korlátos*, és F' a funkcionálnormával ellátva Banach-tér, ezért a *Banach-Steinhaus-tétel* (XII. fejezet, 3. pont) alapján $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|j_F(y_n)\| < +\infty$. A *Hahn-Banach-tételből* (VI. fejezet, 2. pont) következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|j_F(y_n)\| = \|y_n\|$, tehát az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos az F normált térben. Ebből következik olyan $C \in \mathbb{R}^+$ létezése, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f(x_n) - f(\mathfrak{a})\| \le C\|x_n - \mathfrak{a}\|$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\mathfrak{a})$, így f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.)

18. Legyenek E és F normált terek $\mathbb{K}$ felett. Minden $f : E \to F$ függvényre, $\mathbb{N}^+ \ni n$-re és $(x_k)_{k\in n} \in E^n$ rendszerre értelmezzük a

$$\Delta_{(x_k)_{k\in n}} f : E \to F; \quad x \mapsto \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{n+|\varepsilon|} f\left(x + \sum_{k\in n} \varepsilon_k x_k \right)$$

függvényt, ahol $\varepsilon \in \{0,1\}^n$ esetén $|\varepsilon| := \sum\limits_{k\in n} \varepsilon_k$. Bizonyítsuk be a következőket.

a) Ha $f : E \to F$ függvény és $x_0, x_1 \in E$, akkor minden $E \ni x$-re

$$(\Delta_{(x_0)} f)(x) = f(x + x_0) - f(x),$$
$$(\Delta_{(x_0,x_1)} f)(x) = f(x + x_0 + x_1) - f(x + x_0) - f(x + x_1) + f(x)$$

teljesül.

b) Ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m < n$, $(x_k)_{k\in n} \in E^n$ és $f : E \to F$ függvény, akkor

$$(\Delta_{(x_k)_{k\in n}} f)(x) = \left(\Delta_{(x_k)_{k\in m}} \left(\Delta_{(x_k)_{k\in n-m}} f\right)\right)(x).$$

c) Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : E \to F$ olyan *folytonos* függvény, hogy minden $(x_k)_{k\in n+1} \in E^{n+1}$ esetén

$$\Delta_{(x_k)_{k\in n+1}} f = 0,$$

továbbá minden $k \le n$ természetes számra és $E \ni x$-re $f(kx) = k^n f(x)$, akkor az

$$u : E^n \to F; \quad (x_k)_{k\in n} \mapsto \frac{1}{n!} \left(\Delta_{(x_k)_{k\in n}} f\right)(0)$$

függvény olyan *szimmetrikus folytonos valós n-lineáris operátor* (vagy ami ugyanaz: $u \in \mathscr{L}_n^s(E_{\mathbb{R}}^n; F_{\mathbb{R}})$), amelyre minden $x \in E$ esetén

$$f(x) = u(x^{[n]})$$

teljesül. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, és f-re még az is igaz, hogy minden $\mathbb{C} \ni z$-ra és $E \ni x$-re $f(z.x) = z^n.f(x)$, akkor $u \in \mathscr{L}_n^s(E^n; F)$ is teljesül, vagyis u szimmetrikus folytonos *komplex* n-lineáris operátor.

(*Útmutatás.* a) A definíció alapján triviális.

b) A definícióból nyilvánvalóan következik, ha felhasználjuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy $m, n \in \mathbb{N}^+$ és $m < n$ esetén a

$$\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m \times \{0,1\}^{n-m}; \quad (\varepsilon_k)_{k\in n} \mapsto ((\varepsilon_k)_{k\in m}, (\varepsilon_{m+k})_{k\in n-m})$$

leképezés bijekció, továbbá, ha $(\varepsilon_k)_{k\in n} \in \{0,1\}^n$, akkor $|(\varepsilon_k)_{k\in n}| = |(\varepsilon_k)_{k\in m}| + |(\varepsilon_{m+k})_{k\in n-m}|$.

c) A definícióból triviálisan következik, mert minden $\sigma : n \to n$ bijekcióra a

$$\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n; \quad (\varepsilon_k)_{k\in n} \mapsto (\varepsilon_{\sigma(k)})_{k\in n}$$

leképezés bijkeció.

d) Először megmutatjuk, hogy $x \in E$ esetén $f(x) = u(x^{[n]})$. Valóban

$$u(x^{[n]}) = \frac{1}{n!}\left(\Delta_{x^{[n]}} f\right)(0) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{n+|\varepsilon|} f\left(0 + \sum_{k\in n} \varepsilon_k x\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} f\left(\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k\right) x\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} \left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k\right)^n f(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} |\varepsilon|^n\right) f(x).$$

Ugyanakkor a

$$\{0,1\}^n \to \mathscr{P}(n); \quad \varepsilon \mapsto \{k \in n | \varepsilon_k = 1\}$$

leképezés bijekció, tehát

$$\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} |\varepsilon|^n = \sum_{H\in\mathscr{P}(n)} (-1)^{Card(H)} (Card(H))^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{H\in\mathscr{P}(n);\ Card(H)=k} (-1)^{Card(H)} (Card(H))^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} (-1)^{n-k} (n-k)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^n = (-1)^n n!,$$

ahol felhasználtuk az I. fejezet, 3. pont, **15.** gyakorlat eredményét. Ebből következik, hogy $u(x^{[n]}) = f(x)$.

Ha $(\mathfrak{a}_k)_{k\in n}, (x_k)_{k\in n} \in E^n$, akkor

$$\left(\Delta_{(x_k)_{k\in n}} f\right)(0) - \left(\Delta_{(\mathfrak{a}_k)_{k\in n}} f\right)(0) =$$
$$= \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} (-1)^{n+|\varepsilon|} \left(f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k x_k\right) - f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k \mathfrak{a}_k\right)\right),$$

amiből nyilvánvalóan adódik a

$$\|u((x_k)_{k\in n}) - u((\mathfrak{a}_k)_{k\in n})\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} \left\| f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k x_k\right) - f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k \mathfrak{a}_k\right)\right\| \leq$$
$$\leq \frac{2^n}{n!} \max_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} \left\| f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k x_k\right) - f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k \mathfrak{a}_k\right)\right\|$$

egyenlőtlenség. Ebből látható, hogy az f függvény folytonossága maga után vonja az u folytonosságát.

A c) alapján az u leképezés szimmetrikus, ezért az u valós n-linearitása ekvivalens azzal, hogy minden $E^n \ni \mathfrak{a}$-ra az $u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}}$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris. Azt tudjuk, hogy az $u\circ in_{n-1,\mathfrak{a}} : E \to F$ leképezés folytonos, ezért a VI. fejezet, 1. pont, **17**. gyakorlat a) része szerint az $\mathbb{R}$-linearitása ekvivalens az *additivitásával*. Ha $x \in E$, akkor az $(x_k)_{k\in n} := in_{n-1,\mathfrak{a}}(x) \in E^n$ rendszerre teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(x) = u((x_k)_{k\in n}) = \frac{1}{n!} \left(\Delta_{(x_k)_{k\in n}} f\right)(0) =$$
$$= \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{n+|\varepsilon|}}{n!} f\left(\sum_{k\in n} \varepsilon_k x_k\right) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} \frac{(-1)^{n+|\varepsilon|}}{n!} f\left(\varepsilon_{n-1} x + \sum_{k\in n-1} \varepsilon_k \mathfrak{a}_k\right) =$$
$$= \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n;\ \varepsilon_{n-1}=1} \frac{(-1)^{n+|\varepsilon|}}{n!} f\left(x + \sum_{k\in n-1} \varepsilon_k \mathfrak{a}_k\right) +$$
$$+ \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n;\ \varepsilon_{n-1}=0} \frac{(-1)^{n+|\varepsilon|}}{n!} f\left(\sum_{k\in n-1} \varepsilon_k \mathfrak{a}_k\right) =$$
$$= \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \frac{(-1)^{n+|\varepsilon'|+1}}{n!} f\left(x + \sum_{k\in n-1} \varepsilon'_k \mathfrak{a}_k\right) +$$
$$+ \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \frac{(-1)^{n+|\varepsilon'|}}{n!} f\left(\sum_{k\in n-1} \varepsilon'_k \mathfrak{a}_k\right) =$$
$$= \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \frac{(-1)^{n-1+|\varepsilon'|}}{n!} f\left(x + \sum_{k\in n-1} \varepsilon'_k \mathfrak{a}_k\right) -$$
$$- \sum_{\varepsilon'\in\{0,1\}^{n-1}} \frac{(-1)^{n-1+|\varepsilon'|}}{n!} f\left(\sum_{k\in n-1} \varepsilon'_k \mathfrak{a}_k\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\Delta_{(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1}} f\right)(x) - \left(\Delta_{(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1}} f\right)(0)\right),$$

ami azt jelenti, hogy

$$u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}}(\cdot) = \frac{1}{n}\left(\left(\Delta_{(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1}} f\right)(\cdot) - \left(\Delta_{(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1}} f\right)(0)\right).$$

Tehát ha $x_0, x_1 \in E$, akkor a b) alapján

$$\Delta_{(x_0,x_1)}(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}}) = \frac{1}{n}\Delta_{(x_0,x_1)}\left(\Delta_{(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1}} f\right) = \frac{1}{n}\Delta_{(x_k)_{k\in n+1}} f,$$

ahol $(x_k)_{k\in n+1} \in E^{n+1}$ az a rendszer, amelyre $2 \le k < n+1$ esetén $x_k := \mathfrak{a}_{k-2}$. Ezért az f-re vonatkozó hipotézis alapján minden $x_0, x_1 \in E$ vektorra $\Delta_{(x_0,x_1)}(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}}) = 0$, továbbá az $u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}}$-ra imént levezetett formulából látható, hogy $(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(0) = 0$. Tehát az a) alapján minden $x_0, x_1 \in E$ esetén

$$0 = \left(\Delta_{(x_0,x_1)}(u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})\right)(0) =$$
$$= (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(x_0 + x_1) - (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(x_0) - (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(x_1) + (u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}})(0),$$

vagyis $u \circ in_{n-1,\mathfrak{a}}$ additív.

Ha minden $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in E$ esetén $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$, akkor minden $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in E$ esetén $u((\lambda x)^{[n]}) = \lambda^n u(x^{[n]})$, tehát a XI. fejezet, 1. pont, **5**. gyakorlat szerint u komplex n-lineáris operátor.)

19. (*Hartogs-tétel.*) Ha F komplex Banach-tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{C}^n \rightarrowtail F$ olyan függvény, hogy $Dom(f)$ nyílt halmaz, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) Az f függvény holomorf.

(ii) Az f függvény folytonos, és f-nek a $Dom(f)$ minden pontjában minden $n \ni k$-ra létezik $\mathbf{v}_k$ irányú $\mathbb{C}$-deriváltja, ahol $(\mathbf{v}_k)_{k\in n}$ a kanonikus bázis $\mathbb{C}^n$-ben.

(ii′) Az f függvény folytonos és $Dom(f) \subseteq \bigcap\limits_{k\in n} Dom(\partial_k f)$.

(iii) Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.

(*Útmutatás.* Az (i)⇒(ii) és (iii)⇒(i) következtetések nyilvánvalóak, továbbá (ii) és (ii′) a VII. fejezet 2. pontjának utolsó állítása szerint ekvivalensek. Ezért csak a (ii)⇒(iii) következtetést kell bizonyítani.

Legyen $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\prod\limits_{k\in n} \overline{B}_r(\mathfrak{a}_k;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$ és f *korlátos* a $\prod\limits_{k\in n} \overline{B}_r(\mathfrak{a}_k;\mathbb{C})$ halmazon. Ilyen r szám létezik, mert a (ii) szerint f az $\mathfrak{a}$ pontban folytonos és $\mathfrak{a}$ belső pontja $Dom(f)$-nek.

Most n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $\mathbf{z} := (z_k)_{k\in n} \in (B_r(0;\mathbb{C}))^n$ esetén a

$$[0,1]^n \to F; \quad (t_k)_{k\in n} \mapsto \frac{f\left(\mathfrak{a} + r\sum\limits_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right)}{\prod\limits_{k\in n}\left(1 - \dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}$$

folytonos függvényre fennáll a

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) = \int\limits_{[0,1]^n} \frac{f\left(\mathfrak{a} + r\sum\limits_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right)}{\prod\limits_{k\in n}\left(1 - \dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}\, d\mu_n((t_k)_{k\in n})$$

egyenlőség.

Ha $n=1$, akkor a (ii) alapján f holomorf, és $z_0 \in B_r(0;\mathbb{C})$ esetén Cauchy második integrálformulája szerint

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) = f(\mathfrak{a}+z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,r}} \frac{f(\mathfrak{a}+z')}{z'-z_0}\, dz' = \int\limits_{[0,1]} \frac{f(\mathfrak{a}+re^{2\pi i t_0})}{1-\dfrac{z_0}{r}e^{-2\pi i t_0}}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t_0),$$

ami azonos a bizonyítandó integrálformulával $n=1$ esetében.

Tegyük fel, hogy $n>1$, és az állítás igaz minden n-nél kisebb dimenzió esetében. Legyen $\mathbf{z} := (z_k)_{k\in n} \in (B_r(0;\mathbb{C}))^n$ rögzítve, és értelmezzük azt az $\tilde{f} : \mathbb{C}^{n-1} \rightarrowtail F$ függvényt, amelyre

$$Dom(\tilde{f}) := \{(z'_k)_{k\in n-1} \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \sum_{k\in n-1} z'_k\mathbf{v}_k + (\mathfrak{a}_{n-1}+z_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} \in Dom(f)\},$$

és minden $(z'_k)_{k\in n-1} \in Dom(\tilde{f})$ esetén

$$\tilde{f}((z'_k)_{k\in n-1}) := f\left(\sum_{k\in n-1} z'_k\mathbf{v}_k + (\mathfrak{a}_{n-1}+z_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}\right).$$

Könnyen látható, hogy $Dom(\tilde{f})$ nyílt halmaz $\mathbb{C}^{n-1}$-ben, és az f-re vonatkozó (ii) feltétel alapján az $\tilde{f} : \mathbb{C}^{n-1} \rightarrowtail F$ függvény folytonos és a definíciós tartományának minden pontjában, minden $k \in n-1$ esetén az $\tilde{\mathbf{v}}_k$ irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható, ahol $(\tilde{\mathbf{v}}_k)_{k\in n-1}$ a kanonikus bázis $\mathbb{C}^{n-1}$-ben. Továbbá, $(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1} \in Dom(\tilde{f})$, sőt $\prod\limits_{k\in n-1} \overline{B}_r(\mathfrak{a}_k;\mathbb{C}) \subseteq Dom(\tilde{f})$ is teljesül. Ezért az indukciós hipotézis alkalmazható az $\tilde{f}$ függvényre, az $(\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1} \in Dom(\tilde{f})$ pontra és a $(z_k)_{k\in n-1} \in (B_r(0;\mathbb{C}))^{n-1}$ elemre, vagyis

$$\tilde{f}((\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1} + (z_k)_{k\in n-1}) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \frac{\tilde{f}\left((\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1} + r\sum\limits_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\tilde{\mathbf{v}}_k\right)}{\prod\limits_{k\in n-1}\left(1-\dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}\, d\mu_{n-1}((t_k)_{k\in n-1}).$$

Ugyanakkor a definíció szerint

$$\tilde{f}((\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1} + (z_k)_{k\in n-1}) = \tilde{f}((\mathfrak{a}_k + z_k)_{k\in n-1}) =$$

$$= f\left(\sum_{k\in n-1} (\mathfrak{a}_k+z_k)\mathbf{v}_k + (\mathfrak{a}_{n-1}+z_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}\right) = f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}),$$

továbbá minden $(t_k)_{k\in n-1} \in [0,1]^{n-1}$ esetén

$$\tilde{f}\left((\mathfrak{a}_k)_{k\in n-1} + r\sum_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\tilde{\mathbf{v}}_k\right) = \tilde{f}\left((\mathfrak{a}_k + re^{2\pi i t_k})_{k\in n-1}\right) =$$
$$= f\left(\sum_{k\in n-1}(\mathfrak{a}_k + re^{2\pi i t_k})\mathbf{v}_k + (\mathfrak{a}_{n-1} + z_{n-1})\mathbf{v}_{n-1}\right) =$$
$$= f\left(\mathfrak{a} + r\sum_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + z_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}\right),$$

amiből következik, hogy

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) = \int\limits_{[0,1]^n} \frac{f\left(\mathfrak{a} + r\sum\limits_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + z_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}\right)}{\prod\limits_{k\in n}\left(1 - \frac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}\, d\mu_n((t_k)_{k\in n}).$$

Legyen most $(t_k)_{k\in n-1} \in [0,1]^{n-1}$ rögzítve, és értelmezzük azt a $g : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ függvényt, amelyre

$$Dom(g) := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{a} + r\sum_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + z\mathbf{v}_{n-1} \in Dom(f)\},$$

és minden $z \in Dom(g)$ esetén

$$g(z) := f\left(\mathfrak{a} + r\sum_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + z\mathbf{v}_{n-1}\right).$$

Ekkor az f-re vonatkozó hipotézis alapján g holomorf függvény, és $\overline{B}_r(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(g)$, valamint $z_{n-1} \in B_r(0;\mathbb{C})$, ezért Cauchy második integrálformulája szerint

$$f\left(\mathfrak{a} + r\sum_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + z_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}\right) =$$
$$= g(z_{n-1}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,r}} \frac{g(z)}{z - z_{n-1}}\, dz = \int\limits_{[0,1]} \frac{g\left(re^{2\pi i t_{n-1}}\right)}{1 - \frac{z_{n-1}}{r}e^{-2\pi i t_{n-1}}}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t_{n-1}) =$$
$$= \int\limits_{[0,1]} \frac{f\left(\mathfrak{a} + r\sum\limits_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + re^{2\pi i t_{n-1}}\mathbf{v}_{n-1}\right)}{1 - \frac{z_{n-1}}{r}e^{-2\pi i t_{n-1}}}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t_{n-1}).$$

Ebből a Lebesgue-Fubini-tétel alkalmazásával következik, hogy

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \frac{\displaystyle\int\limits_{[0,1]} \frac{f\left(\mathfrak{a}+r\sum\limits_{k\in n-1} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k + re^{2\pi i t_{n-1}}\mathbf{v}_{n-1}\right)}{1-\dfrac{z_{n-1}}{r}e^{-2\pi i t_{n-1}}}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t_{n-1})}{\prod\limits_{k\in n-1}\left(1-\dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}\, d\mu_{n-1}((t_k)_{k\in n-1})$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{n-1}} \left(\int\limits_{[0,1]} \frac{f\left(\mathfrak{a}+r\sum\limits_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right)}{\prod\limits_{k\in n}\left(1-\dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t_{n-1})\right) d\mu_{n-1}((t_k)_{k\in n-1}) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^n} \frac{f\left(\mathfrak{a}+r\sum\limits_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right)}{\prod\limits_{k\in n}\left(1-\dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)}\, d\mu_n((t_k)_{k\in n}).$$

Ezzel a teljes indukciót végrehajtottuk.

Legyen most $\mathbf{z} := (z_k)_{k\in n} \in (B_r(0;\mathbb{C}))^n$ rögzítve. Minden $k\in n$ esetén $|z_k| < r$, ezért minden $[0,1]^n \ni (t_k)_{k\in n}$-re

$$\frac{1}{\prod\limits_{k\in n}\left(1-\dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}\right)} = \prod_{k\in n}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z_k}{r}e^{-2\pi i t_k}}\right) = \prod_{k\in n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_k^m}{r^m}e^{-2\pi i m t_k}\right),$$

és minden $n\ni k$-ra a $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}}\dfrac{z_k^m}{r^m}e^{-2\pi i m t_k}$ geometriai sor abszolút konvergens. Ezért a VI. fejezet, 3. pont, **12**. gyakorlat szerint minden $(t_k)_{k\in n}\in[0,1]^n$ esetén a

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m}\left(\prod_{k\in n}\frac{z_k^{\alpha_k}}{r^{\alpha_k}}e^{-2\pi i\alpha_k t_k}\right)\right)$$

numerikus sor is abszolút konvergens, és

$$\prod_{k\in n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_k^m}{r^m}e^{-2\pi i m t_k}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m}\left(\prod_{k\in n}\frac{z_k^{\alpha_k}}{r^{\alpha_k}}e^{-2\pi i\alpha_k t_k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{r^m}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m}\mathbf{z}^{\alpha}e^{-2\pi i(\alpha|\mathbf{t})}\right),$$

ahol $\alpha\in\mathbb{N}^n$ esetén $|\alpha|_1 := \sum\limits_{k\in n}\alpha_k$, és $(\alpha|\mathbf{t}) := \sum\limits_{k\in n}\alpha_k t_k$, valamint $\mathbf{z}^{\alpha} := \prod\limits_{k\in n} z_k^{\alpha_k}$. Ez azt jelenti, hogy

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) = \int\limits_{[0,1]^n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{r^m}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m}\mathbf{z}^{\alpha}e^{-2\pi i(\alpha|\mathbf{t})}\right) f\left(\mathfrak{a}+r\sum_{k\in n}e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right)\, d\mu_n(\mathbf{t}).$$

Megmutatjuk, hogy itt az integrálás és az összegzés sorrendje felcserélhető. Ehhez elég azt igazolni, hogy az integrandus-függvény olyan függvénysor összegfüggvénye, amely a $[0,1]^n$ halmazon normálisan konvergens. Valóban, ha $m \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^n} \left\| \frac{1}{r^m} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \mathbf{z}^\alpha e^{-2\pi i(\alpha|\mathbf{t})} f\left(\mathfrak{a} + r\sum_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right)\right\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n\ |\alpha|_1=m} \left|\frac{\mathbf{z}^\alpha}{r^m}\right|\right) \sup_{\mathbf{x}\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(\mathbf{x})\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{\|\mathbf{z}\|_\infty}{r}\right)^m Card(\{\alpha\in\mathbb{N}^n \,|\, |\alpha|_1 = m\}) \sup_{\mathbf{x}\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(\mathbf{x})\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{\|\mathbf{z}\|_\infty}{r}\right)^m Card(\{\alpha\in\mathbb{N}^n \,|\, |\alpha|_\infty \leq m\}) \sup_{\mathbf{x}\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(\mathbf{x})\|,$$

ahol $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esetén $|\alpha|_\infty := \max_{k\in n} \alpha_k$. Nyilvánvaló, hogy $m \in \mathbb{N}$ esetén $Card(\{\alpha \in \mathbb{N}^n \,|\, |\alpha|_\infty \leq m\}) = (m+1)^n$, és $\|\mathbf{z}\|_\infty < r$ miatt a

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|\mathbf{z}\|_\infty}{r}\right)^m (m+1)^n$$

numerikus sor konvergens, így a szóbanforgó függvénysor normálisan konvergens a $[0,1]^n$ halmazon.

Felcserélve az integrálás és a sorösszegzés sorrendjét, azt kapjuk, hogy

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r^m} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \mathbf{z}^\alpha \int\limits_{[0,1]^n} e^{-2\pi i(\alpha|\mathbf{t})} f\left(\mathfrak{a}+r\sum_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right) \, d\mu_n(\mathbf{t}).$$

Minden $m \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esetén, ha $|\alpha|_1 = m$, akkor értelmezzük a

$$c_{m,\alpha} := \frac{1}{r^m} \int\limits_{[0,1]^n} e^{-2\pi i(\alpha|\mathbf{t})} f\left(\mathfrak{a}+r\sum_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right) \, d\mu_n(\mathbf{t}) \ \in \ F$$

vektort. Vezessük be továbbá minden $\mathbb{N} \ni m$-re a

$$p_m : \mathbb{C}^m \to F; \quad \mathbf{z} \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \mathbf{z}^\alpha c_{m,\alpha}$$

függvényt. Az imént bizonyítottak szerint minden $\mathbf{z} \in (B_r(0;\mathbb{C}))^n$ esetén fennáll az

$$f(\mathfrak{a}+\mathbf{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(\mathbf{z})$$

egyenlőség.

Most megmutatjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $u_m \in \mathscr{L}^s_m((\mathbb{C}^n)^m; F)$ szimmetrikus multilineáris operátor, hogy minden $\mathbb{C}^n \ni \mathbf{z}$-re $p_m(\mathbf{z}) = u_m(\mathbf{z}^{[m]})$ teljesül. Ehhez legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzítve, és értelmezzük a

$$\tau_m : \mathscr{F}(m; n) \to \mathbb{N}^n; \quad \sigma \mapsto (Card(\overset{-1}{\sigma}\langle\{k\}\rangle))_{k\in n}$$

leképzést. Nyilvánvaló, hogy ha $\sigma \in \mathscr{F}(m; n)$, akkor $Im(\sigma) \subseteq n$ miatt $m = \bigcup_{k\in n} \overset{-1}{\sigma}\langle\{k\}\rangle$, és ez diszjunkt unió, tehát $m = \sum_{k\in n} Card(\overset{-1}{\sigma}\langle\{k\}\rangle) = |\tau_m(\sigma)|_1$. Ezért $Im(\tau_m) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{N}^n \| \alpha|_1 = m\}$, ugyanakkor minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexhez, $|\alpha|_1 = m$ esetén könnyen magadható olyan $\sigma : m \to n$ függvény, amelyre $\tau_m(\sigma) = \alpha$; tehát $Im(\tau_m) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \| \alpha|_1 = m\}$ teljesül. Most értelmezzük az

$$u'_m : (\mathbb{C}^n)^m \to F; \quad (\mathbf{z}_k)_{k\in m} \mapsto \sum_{\sigma\in\mathscr{F}(m;n)} \frac{c_{m,\tau_m(\sigma)}}{Card(\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\tau_m(\sigma)\}\rangle)} \left(\prod_{k\in m} pr_{\sigma(k)}(\mathbf{z}_k)\right)$$

leképezést, ahol $j \in n$ esetén $pr_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ a j-edik projekció-függvény. Nyilvánvaló, hogy $u'_m \in \mathscr{L}_m((\mathbb{C}^n)^m; F)$, és minden $(\mathbf{z}_k)_{k\in m} \in (\mathbb{C}^n)^m$ esetén

$$u'_m((\mathbf{z}_k)_{k\in m}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \sum_{\sigma\in\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle} \frac{c_{m,\tau_m(\sigma)}}{Card(\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\tau_m(\sigma)\}\rangle)} \left(\prod_{k\in m} pr_{\sigma(k)}(\mathbf{z}_k)\right) =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \frac{c_{m,\alpha}}{Card(\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle)} \sum_{\sigma\in\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle} \left(\prod_{k\in m} pr_{\sigma(k)}(\mathbf{z}_k)\right),$$

hiszen $\mathscr{F}(m; n) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle$, és itt diszjunkt unió áll. Világos, hogy ha $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha|_1 = m$ és $\sigma \in \overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle$, akkor $\prod_{k\in m} pr_{\sigma(k)}(\mathbf{z}_k) = \mathbf{z}^\alpha$, következésképpen

$$u'_m(\mathbf{z}^{[m]}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \frac{c_{m,\alpha}}{Card(\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle)} \sum_{\sigma\in\overset{-1}{\tau_m}\langle\{\alpha\}\rangle} \mathbf{z}^\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \mathbf{z}^\alpha c_{m,\alpha} =: p_m(\mathbf{z}).$$

Ebből következik, hogy az $u'_m \in \mathscr{L}_m((\mathbb{C}^n)^m; F)$ m-lineáris operátor *szimmetrizáltja*, amit u_m fog jelölni; olyan lesz, hogy $u_m \in \mathscr{L}^s_m((\mathbb{C}^n)^m; F)$ és minden $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ esetén $u_m(\mathbf{z}^{[m]}) = p_m(\mathbf{z})$ (VI. fejezet, 3. pont). Azt is tudjuk, hogy u_m ezekkel a tulajdonságokkal egyértelműen van meghatározva.

Látjuk tehát, hogy minden $\mathbf{z} \in (B_r(0; \mathbb{C}))^n$ esetén fennáll az

$$f(\mathfrak{a} + \mathbf{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(\mathbf{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\mathbf{z}^{[m]})$$

egyenlőség, és $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^s_m((\mathbb{C}^n)^m;F)$. A bizonyítás utolsó lépéseként megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m \circ (id_{\mathbb{C}^n} - \mathfrak{a})^{[m]}$$

hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb 0-nál. Ha ez igaz, akkor f egyenlő ennek a hatványfüggvény-sornak az összegfüggvényével az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén, tehát f analitikus az $\mathfrak{a}$ pontban.

Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. A definíciók alapján, a VI. fejezet, 3. pont, **14**. gyakorlat jelöléseit alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|u_m\|_* := \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n;\ \|\mathbf{z}\|_\infty\le 1} \|u_m(\mathbf{z}^{[m]})\| = \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n;\ \|\mathbf{z}\|_\infty\le 1} p_m(\mathbf{z}) =$$

$$= \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n;\ \|\mathbf{z}\|_\infty\le 1} \left\| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \mathbf{z}^\alpha c_{m,\alpha} \right\| \le$$

$$\le \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n;\ \|\mathbf{z}\|_\infty\le 1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} |\mathbf{z}^\alpha| \|c_{m,\alpha}\| =$$

$$= \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n;\ \|\mathbf{z}\|_\infty\le 1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n;\ |\alpha|_1=m} \frac{|\mathbf{z}^\alpha|}{r^m} \left\| \int_{[0,1]^n} e^{-2\pi i(\alpha|\mathbf{t})} f\left(\mathfrak{a} + r\sum_{k\in n} e^{2\pi i t_k}\mathbf{v}_k\right) d\mu_n(\mathbf{t}) \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{r^m} Card(\{\alpha\in\mathbb{N}^n \| \alpha|_\infty \le m\}) \sup_{\mathbf{x}\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(\mathbf{x})\| \le \frac{(m+1)^n}{r^m} \sup_{\mathbf{x}\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(\mathbf{x})\|.$$

Ugyanakkor a VI. fejezet, 3. pont, **14**. gyakorlat szerint

$$\|u_m\| \le \frac{(2m)^m}{m!} \|u_m\|_*,$$

következésképpen

$$\|u_m\|^{1/m} \le \frac{2m}{\sqrt[m]{m!}} \frac{(m+1)^{n/m}}{r} \left(\sup_{\mathbf{x}\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(\mathbf{x})\| \right)^{1/m},$$

tehát a X. fejezet, 2. pont, **12**. gyakorlat szerint $\limsup_{m\to\infty} \|u_m\|^{1/m} \le \dfrac{2e}{r}$, vagyis a $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m \circ (id_{\mathbb{C}^n} - \mathfrak{a})^{[m]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az $\dfrac{r}{2e}$ számnál.)

20. Legyen E komplex normált tér, F komplex Banach-tér, és $f : E \rightarrowtail F$ olyan függvény, hogy $Dom(f)$ nyílt halmaz. A következő állítások ekvivalensek.

(i) Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.

(ii) Az f függvény végtelenszer $\mathbb{C}$-differenciálható.

(iii) Az f függvény holomorf.

(iv) Minden $u \in F'$ funkcionálra az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény holomorf, vagyis f *skalárisan holomorf*.

(v) Az f függvény folytonos, és létezik olyan $H \subseteq F'$ halmaz, hogy minden $u \in H$ funkcionálra az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény holomorf, továbbá minden $z \in F \setminus \{0\}$ vektorhoz létezik olyan $u \in H$, hogy $u(z) \neq 0$.

(vi) Az f függvény a definíciós tartományának minden pontjában minden irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható, és f *lokálisan korlátos*, vagyis minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontnak van olyan U környezete E-ben, amelyre $f\langle U\rangle$ korlátos halmaz F-ben.

Ha E véges dimenziós, akkor (vi) ekvivalens a következő állítással.

(vi′) Az f függvény folytonos, és létezik olyan $(e_i)_{i\in I}$ algebrai bázis E-ben, hogy f a $Dom(f)$ minden pontjában minden $I \ni i$-re az e_i irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható.

Ha F véges dimenziós, akkor (iv) ekvivalens a következő állítással.

(iv′) Létezik olyan $(u_i)_{i\in I}$ algebrai bázis F'-ben, hogy minden $I \ni i$-re az $u_i \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény holomorf.

(*Útmutatás.* (i)⇒(ii)⇒(iii) triviális. A (iii)⇒(iv) következtetés azért igaz, mert holomorf függvények kompozíciója holomorf. Ezért csak a (iv)⇒(v), (v)⇒(vi) és (vi)⇒(i) implikációkat kell igazolni.

(iv)⇒(v) A Hahn-Banach-tételből következik, hogy minden $z \in F \setminus \{0\}$ vektorhoz létezik olyan $u \in F'$, amelyre $u(z) \neq 0$ (VI. fejezet, 2. pont). Ezért a (iv)⇒(v) bizonyításához elég azt megmutatni, hogy a (iv) hipotézise mellett f folytonos is: ez pedig a **17**. gyakorlat szerint igaz.

(v)⇒(vi) Az (v) szerint f folytonos, tehát lokálisan korlátos, így csak azt kell igazolni, hogy az (v) hipotézise mellett minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $\mathbf{e} \in E \setminus \{0\}$ esetén az

$$f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}} : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{a} + z\mathbf{e} \in Dom(f)\} \to F; \quad z \mapsto f(\mathfrak{a} + z\mathbf{e})$$

függvény a 0-ban $\mathbb{C}$-differenciálható. Legyenek tehát $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $\mathbf{e} \in E \setminus \{0\}$ rögzítettek, továbbá $H \subseteq F'$ olyan halmaz, hogy minden $H \ni u$-ra az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény holomorf, valamint minden $z \in F \setminus \{0\}$ esetén van olyan $u \in H$, hogy $u(z) \neq 0$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$; ekkor $\rho \in]0, r/\|e\|[$ esetén $B_\rho(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}})$. Ha $u \in H$, akkor az $u \circ f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}} : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény holomorf, mert ez megegyezik az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{C}$ és $\mathbb{C} \to E;\ z \mapsto \mathfrak{a} + z\mathbf{e}$ holomorf függvények kompozíciójával. Cauchy első integrálformulájából következik, hogy ha γ zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, és $Im(\gamma) \subseteq B_\rho(0;\mathbb{C})$, akkor minden $u \in H$ esetén

$$0 = \int\limits_\gamma (u \circ f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}}) = u\left(\int\limits_\gamma f\right),$$

ezért a H-ra vonatkozó hipotézis alapján

$$\int\limits_\gamma f = 0$$

is teljesül. Az $f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}}|_{B_\rho(0;\mathbb{C})} : B_\rho(0;\mathbb{C}) \to F$ folytonos függvényre alkalmazva a Morera-tételt kapjuk, hogy $f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}}|_{B_\rho(0;\mathbb{C})}$ holomorf függvény, tehát $f_{\mathfrak{a},\mathbf{e}}$ a 0 pontban

$\mathbb{C}$-differenciálható. Ezzel megmutattuk, hogy az f függvény a $Dom(f)$ minden pontjában, minden irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható.

(vi)$\Rightarrow$(i) Minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $x \in E$ esetén jelölje $f_{\mathfrak{a},x}$ azt a $\mathbb{C} \rightarrowtail F$ függvényt, amelyre $Dom(f_{\mathfrak{a},x}) := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{a} + zx \in Dom(f)\}$, és minden $Dom(f_{\mathfrak{a},x}) \ni z$-re $f_{\mathfrak{a},x}(z) := f(\mathfrak{a} + zx)$. A (vi) feltétele szerint minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $x \in E$ esetén az $f_{\mathfrak{a},x} : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ függvény *holomorf*, mert a $Dom(f)$ nyíltsága miatt a $Dom(f_{\mathfrak{a},x}) \subseteq \mathbb{C}$ halmaz nyílt, és minden $z \in Dom(f_{\mathfrak{a},x})$ pontra $\mathfrak{a} + zx \in Dom(f)$, továbbá f az $\mathfrak{a} + zx$ pontban az x irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható, vagyis létezik a

$$\lim_{z' \to 0} \frac{f((\mathfrak{a} + zx) + z'x) - f(\mathfrak{a} + zx)}{z'}$$

határérték, ami azzal ekvivalens, hogy létezik a

$$\lim_{z' \to 0} \frac{f_{\mathfrak{a},x}(z + z') - f_{\mathfrak{a},x}(z)}{z'}$$

határérték, azaz $f_{\mathfrak{a},x}$ a z pontban $\mathbb{C}$-differenciálható.

Most megmutatjuk, hogy a (vi) feltételei mellett f *folytonos* függvény. Ehhez legyen $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ rögzítve, és a (vi) alapján vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$, és $f\langle \overline{B}_r(\mathfrak{a}) \rangle$ korlátos halmaz F-ben, vagyis $\sup\limits_{x \in \overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x)\| < +\infty$.

Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat , amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál; azt kell megmutatni, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\mathfrak{a})$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $v_n := \dfrac{x_n - \mathfrak{a}}{\|x_n - \mathfrak{a}\|}$. A $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$ feltételből következik, hogy $\overline{B}_r(0; \mathbb{C}) \subseteq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} Dom(f_{\mathfrak{a},v_n})$, továbbá minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $f_{\mathfrak{a},v_n}$ függvény holomorf. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ rögzített; ekkor az $f_{\mathfrak{a},v_n}$ függvényre alkalmazva Cauchy második integrálformuláját kapjuk, hogy minden $z \in B_r(0; \mathbb{C})$ esetén

$$f(\mathfrak{a} + zv_n) = f_{\mathfrak{a},v_n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{0,r}} \frac{f_{\mathfrak{a},v_n}}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_0^1 \frac{f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} v_n)}{1 - \dfrac{z}{r} e^{-2\pi it}} \, dt.$$

Speciálisan: $\|x_n - \mathfrak{a}\| \in B_r(0; \mathbb{C})$, tehát

$$f(\mathfrak{a}) = f_{\mathfrak{a},v_n}(0) = \int\limits_0^1 f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} v_n) \, dt,$$

$$f(x_n) = f_{\mathfrak{a},v_n}(\|x_n - \mathfrak{a}\|) = \int\limits_0^1 \frac{f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} v_n)}{1 - \dfrac{\|x_n - \mathfrak{a}\|}{r} e^{-2\pi it}} \, dt.$$

Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x_n) - f(\mathfrak{a}) = \int\limits_0^1 \frac{f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} v_n)}{1 - \dfrac{\|x_n - \mathfrak{a}\|}{r} e^{-2\pi it}} \, dt - \int\limits_0^1 f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} v_n) \, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{f(\mathfrak{a} + re^{2\pi it} v_n)}{1 - \dfrac{\|x_n - \mathfrak{a}\|}{r} e^{-2\pi it}} \right) \frac{\|x_n - \mathfrak{a}\|}{r} e^{-2\pi it} \, dt.$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $B_r(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{a}\}$-ban halad és $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, ezért van olyan $\rho \in]0,r[$ valós szám, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|x_n-\mathfrak{a}\|\le\rho$. Ezért minden $t\in[0,1]$ esetén

$$\left\|\left(\frac{f(\mathfrak{a}+re^{2\pi it}v_n)}{1-\dfrac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r}e^{-2\pi it}}\right)\frac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r}e^{-2\pi it}\right\|\le\frac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r\left(1-\dfrac{\rho}{r}\right)}\sup_{x\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})}\|f(x)\|,$$

tehát teljesül az, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left\|\left(\frac{f(\mathfrak{a}+re^{2\pi it}v_n)}{1-\dfrac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r}e^{-2\pi it}}\right)\frac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r}e^{-2\pi it}\right\|\right)=0.$$

Ebből a Lebesgue-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(\frac{f(\mathfrak{a}+re^{2\pi it}v_n)}{1-\dfrac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r}e^{-2\pi it}}\right)\frac{\|x_n-\mathfrak{a}\|}{r}e^{-2\pi it}\,dt=0,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\mathfrak{a})$, vagyis f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Legyen most $\mathfrak{a}\in Dom(f)$ rögzített pont, és minden $m\in\mathbb{N}$ számra értelmezzük a

$$p_{\mathfrak{a},m}:E\to F;\quad x\mapsto\frac{1}{m!}(D^mf_{\mathfrak{a},x})(0)$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy $m\in\mathbb{N}$ esetén létezik egyetlen olyan $u_{\mathfrak{a},m}\in\mathscr{L}^s_m(E^m;F)$, hogy minden $E\ni x$-re $p_{\mathfrak{a},m}(x)=u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]})$. A **18**. gyakorlat d) pontja alapján ehhez elegendő azt igazolni, hogy $p_{\mathfrak{a},m}$ folytonos, és minden $(x_k)_{k\in m+1}\in E^{m+1}$ esetén $\Delta_{(x_k)_{k\in m+1}}p_{\mathfrak{a},m}=0$, továbbá minden $x\in E$ és $\lambda\in\mathbb{C}$ esetén $p_{\mathfrak{a},m}(\lambda x)=\lambda^mp_{\mathfrak{a},m}(x)$.

A $p_{\mathfrak{a},m}$ függvény folytonosságának bizonyításához először vegyünk olyan $r\in\mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\overline{B}_r(\mathfrak{a})\subseteq Dom(f)$ és $\sup\limits_{x\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})}\|f(x)\|<+\infty$, továbbá legyen $x\in E$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, amely x-hez konvergál. Létezik olyan $M\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\|x_n\|<M$ és $\|x\|<M$. Ha $\rho\in]0,r/M[$ tetszőleges valós szám, akkor $\overline{B}_\rho(0;\mathbb{C})\subseteq Dom(f_{\mathfrak{a},x})\cap\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}Dom(f_{\mathfrak{a},x_n})$, ezért minden $n\in\mathbb{N}$ esetén Cauchy második integrálformulája szerint

$$p_{\mathfrak{a},m}(x_n):=\frac{1}{m!}(D^mf_{\mathfrak{a},x_n})(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,\rho}}\frac{f_{\mathfrak{a},x_n}}{id_{\mathbb{C}}^{m+1}}=\frac{1}{\rho^m}\int_0^1 f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi it}x_n)e^{-2\pi imt}\,dt,$$

és hasonlóan

$$p_{\mathfrak{a},m}(x):=\frac{1}{m!}(D^mf_{\mathfrak{a},x})(0)=\frac{1}{\rho^m}\int_0^1 f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi it}x)e^{-2\pi imt}\,dt$$

is teljesül. Az f folytonossága miatt minden $t \in [0,1]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi i t}x_n)e^{-2\pi i m t}\right) = f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi i t}x)e^{-2\pi i m t},$$

továbbá természetesen minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\sup_{t\in[0,1]} \|f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi i t}x_n)e^{-2\pi i m t}\| \leq \sup_{x\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x)\|,$$

ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi i t}x_n)e^{-2\pi i m t}\,dt = \int_0^1 f(\mathfrak{a}+\rho e^{2\pi i t}x)e^{-2\pi i m t}\,dt,$$

amiből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\mathfrak{a},m}(x_n) = p_{\mathfrak{a},m}(x)$, vagyis $p_{\mathfrak{a},m}$ folytonos az x pontban.

Legyen $(x_k)_{k\in m+1} \in E^{m+1}$ rögzített; megmutatjuk, hogy $\Delta_{(x_k)_{k\in m+1}}p_{\mathfrak{a},m} = 0$. Ehhez legyen $x \in E$ is rögzített; ekkor a **18**. gyakorlatban bevezetett definíció alapján

$$\left(\Delta_{(x_k)_{k\in m+1}}p_{\mathfrak{a},m}\right)(x) := \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{m+1}} (-1)^{m+1+|\varepsilon|_1} p_{\mathfrak{a},m}\left(x+\sum_{k\in m+1}\varepsilon_k x_k\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{m+1}} (-1)^{|\varepsilon|_1}\left(D^m f_{\mathfrak{a},x+\sum\limits_{k\in m+1}\varepsilon_k x_k}\right)(0).$$

Jelölje $g : \mathbb{C}^{m+2} \rightarrowtail F$ azt a függvényt, amelyre

$$Dom(g) := \{(z_k)_{k\in m+2} \in \mathbb{C}^{m+2} \mid \mathfrak{a}+\sum_{k\in m+1} z_k x_k + z_{m+1}x \in Dom(f)\},$$

és minden $(z_k)_{k\in m+2} \in Dom(g)$ esetén

$$g((z_k)_{k\in m+2}) := f\left(\mathfrak{a}+\sum_{k\in m+1} z_k x_k + z_{m+1}x\right).$$

Legyen továbbá $\varepsilon \in \{0,1\}^{m+1}$ esetén $\overline{\varepsilon} \in \{0,1\}^{m+2}$ az a rendszer, amelynek k-adik komponense: $\overline{\varepsilon}_k := \varepsilon_k$, ha $k \in m+1$, és $\overline{\varepsilon}_{m+1} := 1$. Vezessük be minden $\varepsilon \in \{0,1\}^{m+1}$ esetén a

$$h_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{m+2};\quad z \mapsto z\overline{\varepsilon}$$

függvényt. Nyilvánvaló, hogy minden $\varepsilon \in \{0,1\}^{m+1}$ esetén

$$f_{\mathfrak{a},x+\sum\limits_{k\in m+1}\varepsilon_k x_k} = g \circ h_\varepsilon.$$

Az f folytonossága miatt a g függvény folytonos, és $Dom(f)$ nyíltsága következtében $Dom(g)$ nyílt. Azonkívül g a $Dom(g)$ minden pontjában minden $k \in m+2$ esetén a v_k irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható, ahol $(v_k)_{k\in m+2}$ a kanonikus bázis $\mathbb{C}^{m+2}$-ben. Ez nyilvánvalóan következik a g definíciójából és abból, hogy f a $Dom(f)$ minden pontjában minden irány mentén $\mathbb{C}$-differenciálható. Ezért a Hartogs-tétel (**19**. gyakorlat) alapján g *végtelenszer* $\mathbb{C}$-differenciálható. Továbbá, $\varepsilon \in \{0,1\}^{m+1}$ esetén h_ε is végtelenszer $\mathbb{C}$-differenciálható, így

$$\left(D^m f_{\mathfrak{a}, x + \sum\limits_{k\in m+1} \varepsilon_k x_k}\right)(0) = (D^m(g\circ h_\varepsilon))(0) = ((D^m g)(0))\left(\overline{\varepsilon}^{[m]}\right) =$$
$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{m+2};\ |\alpha|_1=m} \frac{m!}{\alpha!}(\partial^\alpha g)(0) \prod_{k\in m+2} \overline{\varepsilon}_k^{\alpha_k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{m+2};\ |\alpha|_1=m} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha g)(0) \prod_{k\in m+1} \varepsilon_k^{\alpha_k}$$

Ezért írhatjuk, hogy

$$\left(\Delta_{(x_k)_{k\in m+1}} p_{\mathfrak{a},m}\right)(x) =$$
$$= (-1)^{m+1} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{m+1}} (-1)^{|\varepsilon|_1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{m+2};\ |\alpha|_1=m} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha g)(0) \prod_{k\in m+1} \varepsilon_k^{\alpha_k} =$$
$$= (-1)^{m+1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{m+2};\ |\alpha|_1=m} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha g)(0) \left(\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{m+1}} (-1)^{|\varepsilon|_1} \prod_{k\in m+1} \varepsilon_k^{\alpha_k}\right),$$

így a $\left(\Delta_{(x_k)_{k\in m+1}} p_{\mathfrak{a},m}\right)(x) = 0$ egyenlőség érvényessége azon múlik, hogy minden $\alpha \in \mathbb{N}^{m+2}$ multiindexre, $|\alpha|_1 = m$ esetén

$$\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{m+1}} (-1)^{|\varepsilon|_1} \prod_{k\in m+1} \varepsilon_k^{\alpha_k} = 0$$

teljesül, ami elemi úton igazolható.

Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in E$; megmutatjuk, hogy $p_{\mathfrak{a},m}(\lambda x) = \lambda^m p_{\mathfrak{a},m}(x)$. Valóban, az $f_{\mathfrak{a},\lambda x} : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény egyenlő az $f_{\mathfrak{a},x} : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ és $\mathbb{C} \to E;\ z \mapsto \lambda z$ holomorf függvények kompozíciójával, ezért a függvénykompozíció differenciálási szabályának alkalmazásával nyerjük, hogy minden $z \in Dom(f_{\mathfrak{a},\lambda x})$ esetén $(D^m f_{\mathfrak{a},\lambda x})(z) = \lambda^m (D^m f_{\mathfrak{a},x})(z)$, ezért

$$p_{\mathfrak{a},m}(\lambda x) = \frac{1}{m!}(D^m f_{\mathfrak{a},\lambda x})(0) = \frac{1}{m!}\lambda^m (D^m f_{\mathfrak{a},x})(z) = \lambda^m p_{\mathfrak{a},m}(x).$$

Tehát $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén vehetjük azt az $(u_{\mathfrak{a},m})_{m\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{L}^s_m(E^m;F)$ rendszert, amelyre minden $x \in E$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén $u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]}) = p_{\mathfrak{a},m}(x)$. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén a $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} u_m \circ (id_E - \mathfrak{a})^{[m]}$ hatványfüggvény-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb 0-nál, és az összegfüggvénye egyenlő f-fel az $\mathfrak{a}$ valamely környezetén.

Legyen tehát $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ rögzítve; először alsó becslést adunk a $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m \circ (id_E - \mathfrak{a})^{[m]}$ hatványfüggvény-sor konvergencia-sugarára. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$ és $\sup_{x\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x)\| < +\infty$. Legyen $\rho \in]0, r[$ és $x \in E$ olyan, hogy $\|x\| \leq 1$. Ekkor $\overline{B}_\rho(0; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f_{\mathfrak{a},x})$ és $f_{\mathfrak{a},x} : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, tehát Cauchy második integrálformulája szerint minden $\mathbb{N} \ni m$-re

$$\|u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]})\| = \|p_{\mathfrak{a},m}(x)\| = \frac{1}{m!}\|(D^m f_{\mathfrak{a},m})(0)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{0,\rho}} \frac{f_{\mathfrak{a},m}}{id_{\mathbb{C}}^{m+1}} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z|=\rho} \left\| \frac{f_{\mathfrak{a},m}}{id_{\mathbb{C}}^{m+1}} \right\| \leq \frac{1}{\rho^m} \sup_{x'\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x')\|,$$

ezért fennáll az

$$\|u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]})\| \leq \frac{1}{r^m} \sup_{x'\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x')\|$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy $m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{m!}{(2m)^m}\|u_{\mathfrak{a},m}\| \leq \|u_{\mathfrak{a},m}\|_* := \sup_{x\in E;\ \|x\|\leq 1} \|u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]})\| \leq \frac{1}{r^m} \sup_{x'\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x')\|$$

(VI. fejezet, 3. pont, **14**. gyakorlat), tehát

$$\|u_{\mathfrak{a},m}\|^{1/m} \leq \frac{2m}{\sqrt[m]{m!}} \frac{1}{r} \left(\sup_{x'\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x')\| \right)^{1/m}.$$

A X. fejezet, 2. pont, **12**. gyakorlat szerint $\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\sqrt[m]{m!}} = e$, továbbá $\limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{x'\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x')\| \right)^{1/m} \leq 1$, ezért

$$\limsup_{m\to\infty} \|u_{\mathfrak{a},m}\|^{1/m} \leq \frac{2e}{r},$$

tehát a $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m \circ (id_E - \mathfrak{a})^{[m]}$ hatványfüggvény-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő $\frac{r}{2e}$-nél. (Megjegyezzük, hogy ez a konvergencia-sugár $\frac{r}{e}$-nél is nagyobb-egyenlő, de itt csak az a lényeg, hogy *nagyobb* 0-nál.)

Legyen most $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ rögzítve, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$, valamint $\sup_{x\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x)\| < +\infty$. Legyen $x \in B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{0\}$ szintén rögzített vektor; megmutatjuk, hogy a $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m \circ (id_E - \mathfrak{a})^{[m]}$ hatványfüggvény-sor az $\mathfrak{a} + x$ pontban konvergens, és az összege egyenlő $f(\mathfrak{a} + x)$-szel. Ez már azt jelenti, hogy az f

függvény az $\mathfrak{a}$ pontban $\mathbb{C}$-analitikus. (Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{a}+x$ nem feltétlenül eleme a szóbanforgó hatványfüggvény *abszolútkonvergencia-tartományának*, de ha x-et úgy választjuk meg, hogy $\|x\| < \dfrac{r}{2e}$ legyen, akkor igen.)

Legyen $\rho \in]1, r/\|x\|[$ tetszőleges valós szám. Ekkor $1 \in B_\rho(0;\mathbb{C}) \subseteq \overline{B}_\rho(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f_{\mathfrak{a},x})$, ezért Cauchy második integrálformulája szerint

$$f(\mathfrak{a}+x) = f_{\mathfrak{a},x}(1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,\rho}} \frac{f_{\mathfrak{a},x}}{id_{\mathbb{C}}-1}.$$

Ugyanakkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sum_{m=0}^{n-1} u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]}) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(D^m f_{\mathfrak{a},x})(0)}{m!} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,\rho}} \frac{f_{\mathfrak{a},x}}{id_{\mathbb{C}}^{m+1}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,\rho}} \left(1-\frac{1}{id_{\mathbb{C}}^n}\right)\left(\frac{f_{\mathfrak{a},x}}{id_{\mathbb{C}}-1}\right),$$

következésképpen

$$f(\mathfrak{a}+x) - \sum_{m=0}^{n-1} u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,\rho}} \frac{1}{id_{\mathbb{C}}^n}\left(\frac{f_{\mathfrak{a},x}}{id_{\mathbb{C}}-1}\right).$$

Az $\left(\dfrac{1}{id_{\mathbb{C}}^n}\left(\dfrac{f_{\mathfrak{a},x}}{id_{\mathbb{C}}-1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál 0-hoz az $Im(\gamma_{0,\rho})$ halmazon, mert $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sup_{z\in\mathbb{C};\ |z|=\rho} \left\|\frac{1}{z^n}\left(\frac{f_{\mathfrak{a},x}(z)}{z-1}\right)\right\| = \frac{1}{\rho^n}\sup_{z\in\mathbb{C};\ |z|=\rho} \frac{\|f(\mathfrak{a}+zx)\|}{|z-1|} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\rho^n}\left(\frac{1}{\rho-1}\right)\sup_{x'\in\overline{B}_r(\mathfrak{a})} \|f(x')\|,$$

és $\rho > 1$. Ezért teljesül az, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,\rho}} \frac{1}{id_{\mathbb{C}}^n}\left(\frac{f_{\mathfrak{a},x}}{id_{\mathbb{C}}-1}\right) = 0,$$

vagyis a $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{\mathfrak{a},m}(x^{[m]})$ sor konvergens F-ben és az összege egyenlő $f(\mathfrak{a}+x)$-szel.)

21. Legyen E komplex normált tér, F komplex Banach-tér, és $f : E \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Ha $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$, akkor az f függvény $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sora pontonként abszolút konvergens a $B_r(\mathfrak{a})$ gömbön, és az összegfüggvénye egyenlő f-fel ezen a halmazon.

(**Megjegyzés**. Azonban *nem állítjuk* azt (ami egyváltozós függvényekre igaz), hogy az f függvény $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sorának Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az r számnál. Csak annyi igaz, hogy a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor Cauchy-féle konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $\dfrac{\rho}{e}$ számnál, ahol $\rho \in]0, r[$ olyan valós szám, amelyre f korlátos a $\overline{B}_{\rho}(\mathfrak{a})$ gömbön.)

(*Útmutatás*. Legyen $x \in B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ rögzített pont, és tekintsük az

$$f_x : B_{r/\|x-\mathfrak{a}\|}(0;\mathbb{C}) \to F; \quad z \mapsto f(\mathfrak{a} + z(x-\mathfrak{a}))$$

függvényt. Világos, hogy az $f_x : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ függvény holomorf, ezért $\mathbb{C}$-analitikus is, és a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f_x)$ Taylor-sor konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az $r/\|x-\mathfrak{a}\|$ számnál, valamint ennek a Taylor-sornak az összegfüggvénye egyenlő f_x-szel a $B_{r/\|x-\mathfrak{a}\|}(0;\mathbb{C})$ gömbön. A **20**. gyakorlat szerint f az $\mathfrak{a}$-ban végtelenszer $\mathbb{C}$-differenciálható, ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(D^k f_x)(0) = ((D^k f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})$, tehát a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{k!}((D^k f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]}) id_{\mathbb{C}}^k$ függvénysor pontonként abszolút konvergens a $B_{r/\|x-\mathfrak{a}\|}(0;\mathbb{C})$ gömbön, és minden $B_{r/\|x-\mathfrak{a}\|}(0;\mathbb{C}) \ni z$-re

$$f(\mathfrak{a} + z(x-\mathfrak{a})) = f_x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(D^k f_x)(0) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((D^k f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]}) z^k.$$

Speciálisan, $r/\|x-\mathfrak{a}\| > 1$ miatt a $z := 1$ pontra $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}((D^k f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$ Taylor-sor pontonként abszolút konvergens a $B_r(\mathfrak{a})$ gömbön, és az összegfüggvénye egyenlő f-fel ezen a halmazon.)

22. (*Cauchy-féle maximum-elv*). Legyen $E \neq \{0\}$ komplex normált tér, F komplex Banach-tér és $\Omega \subseteq E$ nem üres korlátos nyílt halmaz. Ha $f : \overline{\Omega} \to F$ olyan folytonos függvény, hogy az $f|_{\Omega}$ függvény holomorf, akkor

$$\sup_{x\in\Omega} \|f(x)\| = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x)\| = \sup_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|.$$

Mutassuk meg, hogy ha Ω nem korlátos, akkor ezek az egyenlőségek nem feltétlenül igazak, még akkor sem, ha $E = \mathbb{C}$.

(**Megjegyzés**. Ha E végtelen dimenziós, akkor $\overline{\Omega}$ nem kompakt (V. fejezet, 5. pont, **6**. gyakorlat), ezért f nem szükségképpen korlátos, így lehetséges az, hogy mindhárom szám $+\infty$. Ha E véges dimenziós, akkor $Fr(\Omega)$ nem üres kompakt halmaz E-ben, ezért a Weierstrass-féle maximum-elv alapján az $\|f\|$ függvény fölveszi maximális értékét az $Fr(\Omega)$ halmazon, és az állítás szerint a maximális értéke megegyezik az $\|f\|$ függvény $\overline{\Omega}$ halmazon felvett maximális értékével; ezért nevezik ezt a tételt *maximum-elvnek*. Habár az állítás nem korlátos Ω-ra általában nem igaz, de bizonyos ($\|f\|$ növekedésére vonatkozó) feltételek teljesülése biztosíthatja az állítás érvényességét. Az ilyen típusú tételeket nevezzük *Phragmen-Lindelöf-tételeknek.*)

(*Útmutatás*. Először megjegyezzük, hogy a $\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\| = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x)\|$ egyenlőség még akkor is igaz, ha $f|_{\Omega}$ nem holomorf függvény (de f folytonos), hiszen $\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\| \leq$

$\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x)\|$ triviálisan igaz, ugyanakkor $\mathfrak{a} \in \overline{\Omega}$ esetén van olyan $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Ω-ban, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál, és akkor

$$\|f(\mathfrak{a})\| = \lim_{n\to\infty} \|f(\mathfrak{a}_n)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f(\mathfrak{a}_n)\| \leq \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|,$$

tehát $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x)\| \leq \sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\|$.

Világos továbbá, hogy $Fr(\Omega) \subseteq \overline{\Omega}$ miatt $\sup\limits_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\| \leq \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x)\|$, ezért csak a $\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\| \leq \sup\limits_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|$ egyenlőtlenséget kell bizonyítani. Ennek bizonyítását három lépésben hajtjuk végre.

(I) Tegyük fel, hogy $E := \mathbb{C}$ és Ω összefüggő. Legyen $M := \sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\|$ és $\Omega' := \{x \in \Omega | \|f(x)\| = M\}$. Az f folytonossága miatt Ω' zárt az Ω metrikus altérben. Ha $\mathfrak{a} \in \Omega'$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq \Omega$, akkor minden $\rho \in]0,r[$ valós számra Cauchy második integrálformulája szerint

$$M = \|f(\mathfrak{a})\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},\rho}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}} \right\| = \left\| \int\limits_0^1 f(\mathfrak{a} + \rho e^{2\pi i t}) dt \right\| \leq \int\limits_0^1 \|f(\mathfrak{a} + \rho e^{2\pi i t})\| dt,$$

vagyis $\int\limits_0^1 \big(\|f(\mathfrak{a} + \rho e^{2\pi i t})\| - M\big)\, dt \geq 0$. Az M szám definíciója alapján az itt álló integrandus mindenütt kisebb-egyenlő 0-nál, ezért $\int\limits_0^1 \big(\|f(\mathfrak{a} + \rho e^{2\pi i t})\| - M\big)\, dt = 0$.

Ebből következik, hogy minden $t \in [0,1]$ esetén $\|f(\mathfrak{a} + \rho e^{2\pi i t})\| = M$. Ezért $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq \Omega'$, vagyis Ω' nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben. Az Ω halmaz összefüggő, ezért $\Omega' = \emptyset$ vagy $\Omega' = \Omega$. Ugyanakkor az $\overline{\Omega}$ halmaz nem üres és kompakt, ezért a Weierstass-féle maximum-elv és az $\|f\|$ függvény folytonossága miatt létezik olyan $\mathfrak{a} \in \overline{\Omega}$, hogy $\|f(\mathfrak{a})\| = M$. Ha $\Omega' = \emptyset$, akkor $\mathfrak{a} \notin \Omega$, tehát $\mathfrak{a} \in \overline{\Omega} \setminus \Omega =: Fr(\Omega)$, ezért

$$\sup_{x\in\Omega} \|f(x)\| = \|f(\mathfrak{a})\| \leq \sup_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|,$$

és a bizonyítás kész. Ha viszont $\Omega' = \Omega$, akkor $\|f\|$ konstansfüggvény Ω-n, ezért az $\|f\|$ folytonossága miatt $\|f\|$ konstansfüggvény az $\overline{\Omega}$ halmazon is, ezért $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x)\| = \sup\limits_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|$.

(II) Legyen most $E := \mathbb{C}$, de Ω nem feltétlenül összefüggő. Minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ esetén legyen $\Omega(\mathfrak{a})$ az $\mathfrak{a}$ pontot tartalmazó és Ω által tartalmazott összefüggő nyílt halmazok uniója. Ekkor $\mathfrak{a} \in \Omega$ esetén $\Omega(\mathfrak{a})$ nem üres, nyílt, korlátos, összefüggő halmaz $\mathbb{C}$-ben (V. fejezet, 10. pont). Továbbá, ha $\mathfrak{a} \in \Omega$, akkor $Fr(\Omega(\mathfrak{a})) \subseteq Fr(\Omega)$, mert $x \in Fr(\Omega(\mathfrak{a}))$ esetén $x \in \overline{\Omega(\mathfrak{a})} \subseteq \overline{\Omega}$, valamint $x \notin \Omega$, különben létezne olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x;\mathbb{C}) \subseteq \Omega$, és ekkor $B_r(x;\mathbb{C}) \cup \Omega(\mathfrak{a})$ olyan összefüggő nyílt halmaz volna, amelynek eleme az $\mathfrak{a}$ és amely részhalmaza Ω-nak, tehát $B_r(x;\mathbb{C}) \subseteq \Omega(\mathfrak{a})$ teljesülne, ami $x \in Fr(\Omega(\mathfrak{a}))$ miatt lehetetlen. Ha most $\mathfrak{a} \in \Omega$ tetszőleges, akkor az (I) állítást alkalmazhatjuk az $f|_{\overline{\Omega(a)}}$ holomorf függvényre, tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|f(\mathfrak{a})\| &= \|(f|_{\overline{\Omega(a)}})(\mathfrak{a})\| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega(\mathfrak{a})}} \|(f|_{\overline{\Omega(a)}})(x)\| = \\ &= \sup_{x\in Fr(\Omega(\mathfrak{a}))} \|(f|_{\overline{\Omega(a)}})(x)\| \leq \sup_{x\in Fr(\Omega)} \|(f(x)\|,\end{aligned}$$

következésképpen $\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\| \leq \sup\limits_{x\in Fr(\Omega)} \|(f(x)\|$, amit bizonyítani kellett.

(III) Áttérve az általános esetre; legyen $\mathbf{e} \in E \setminus \{0\}$ rögzített vektor és $\mathfrak{a} \in \Omega$. Vezessük be az $\Omega_{\mathfrak{a}} := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{a} + z\mathbf{e} \in \Omega\}$ halmazt, valamint az

$$f_{\mathfrak{a}} : \overline{\Omega_{\mathfrak{a}}} \to F; \quad z \mapsto f(\mathfrak{a} + z\mathbf{e})$$

függvényt. A definíció jó, mert minden $z \in \overline{\Omega_{\mathfrak{a}}}$ esetén $\mathfrak{a} + z\mathbf{e} \in \overline{\Omega} =: Dom(f)$. Világos, hogy $f_{\mathfrak{a}}|_{\Omega_{\mathfrak{a}}}$ holomorf függvény, továbbá $\Omega_{\mathfrak{a}}$ nem üres korlátos nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben. Ezért a (II) alapján

$$\|f(\mathfrak{a})\| = \|f_{\mathfrak{a}}(0)\| \leq \sup_{z\in\overline{\Omega_{\mathfrak{a}}}} \|f_{\mathfrak{a}}(z)\| = \sup_{z\in Fr(\Omega_{\mathfrak{a}})} \|f_{\mathfrak{a}}(z)\|.$$

Az $Fr(\Omega_{\mathfrak{a}})$ halmaz nem üres és kompakt $\mathbb{C}$-ben, ezért van olyan $z_{\mathfrak{a}} \in Fr(\Omega_{\mathfrak{a}})$, hogy

$$\|f(\mathfrak{a} + z_{\mathfrak{a}}\mathbf{e})\| = \|f_{\mathfrak{a}}(z_{\mathfrak{a}})\| = \sup_{z\in Fr(\Omega_{\mathfrak{a}})} \|f_{\mathfrak{a}}(z)\|,$$

vagyis teljesül az, hogy $\|f(\mathfrak{a})\| \leq \|f(\mathfrak{a} + z_{\mathfrak{a}}\mathbf{e})\|$. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{a} + z_{\mathfrak{a}}\mathbf{e} \in Fr(\Omega)$. Valóban, léteznek olyan $z_{\mathfrak{a}}$-hoz konvergáló $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok $\mathbb{C}$-ben, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n \in \Omega_{\mathfrak{a}}$ és $z'_n \in \mathbb{C}\setminus\Omega_{\mathfrak{a}}$. Ekkor $\mathfrak{a} \in \overline{\Omega}$, hiszen $\mathfrak{a} = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{a} + z_n\mathbf{e})$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathfrak{a} + z_n\mathbf{e} \in \Omega$. Ugyanakkor $\mathfrak{a} \in E \setminus \Omega$ is igaz, mert $\mathfrak{a} = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{a} + z'_n\mathbf{e})$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} + z'_n\mathbf{e} \in E \setminus \Omega = \overline{E \setminus \Omega}$. Tehát $\|f(\mathfrak{a})\| \leq \|f(\mathfrak{a} + z_{\mathfrak{a}}\mathbf{e})\| \leq \sup\limits_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|$, amit bizonyítani kellett.)

23. (*Általános Cauchy-egyenlőtlenség.*) Legyen $E \neq \{0\}$ komplex normált tér, F komplex Banach-tér és $\Omega \subseteq E$ nem üres korlátos nyílt halmaz. Ha $f : \overline{\Omega} \to F$ olyan folytonos függvény, hogy az $f|_{\Omega}$ függvény holomorf, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ és $\mathfrak{a} \in \Omega$ esetén

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \left(\frac{k}{dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a})}\right)^k \sup_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|.$$

Speciálisan, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \left(\frac{k}{r}\right)^k \sup_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\|$$

teljesül.

(**Megjegyzések**. 1) A jobb oldalon álló formula értelmes, mert $dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) > 0$, hiszen ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, akkor $dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) \geq dist_{E\setminus\Omega}(\mathfrak{a}) \geq r$, vagyis $dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) > 0$. Továbbá, $k = 0$ esetén a $0^0 := 1$ konvenció alapján az $\|f(\mathfrak{a})\| \leq \sup\limits_{x\in Fr(\Omega)} \|f(x)\|$ egyenlőtlenségről van szó, ami a **22**. gyakorlat szerint igaz.

2) Ha E végtelen dimenziós, akkor az $\mathfrak{a}$ középpontú r sugarú gömbfelület nem kompakt halmaz, ezért lehetséges az, hogy $\sup\limits_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\| = +\infty$.

3) Ha $E = \mathbb{C}$, akkor az egyváltozós függvényekre vonatkozó Cauchy-egyenlőtlenség alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \left(\frac{k!}{r^k}\right) \sup_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\|$$

is teljesül, ami finomabb becslés annál, amelyet itt felírtunk, mert ha $k \geq 2$, akkor $k! < k^k$.

(*Útmutatás.* Először megmutatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \left(\frac{k}{r}\right)^k \sup_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\|$$

teljesül. Ehhez minden $x \in B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ esetén tekintsük a

$$f_x : B_{r/\|x-\mathfrak{a}\|}(0;\mathbb{C}) \to F; \quad z \mapsto f(\mathfrak{a} + z(x-\mathfrak{a}))$$

holomorf függvényt. A **20**. gyakorlat szerint f végtelenszer $\mathbb{C}$-differenciálható, így ha $k \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor $(D^k f_x)(0) = ((D^k f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})$. Ha $x \in B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor $r/\|x-\mathfrak{a}\| > 1$ miatt $\overline{B}_1(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f_x)$, így felírva a Cauchy-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|((D^k f)(\mathfrak{a}))((x-\mathfrak{a})^{[k]})\| = \|(D^k f_x)(0)\| \leq k! \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z|=1} \|f_x(z)\| =$$
$$= k! \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z|=1} \|f(\mathfrak{a} + z(x-\mathfrak{a}))\|$$

teljesül. Legyen $e \in E$ olyan vektor, amelyre $0 < \|e\| \leq 1$. Ha $\rho \in]0, r[$ tetszőleges valós szám, akkor az $x := \mathfrak{a} + \rho e \in B_r(\mathfrak{a}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra felírva az előző egyenlőtlenséget kapjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho^k \|((D^k f)(\mathfrak{a}))(e^{[k]})\| = \|((D^k f)(\mathfrak{a}))((\rho e)^{[k]})\| \leq$$
$$\leq k! \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z|=1} \|f(\mathfrak{a} + z\rho e)\| \leq k! \sup_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|\leq\rho} \|f(x)\|.$$

Ebből következik, hogy $\rho \in]0, r[$, $e \in E$, $\|e\| \leq 1$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|((D^k f)(\mathfrak{a}))(e^{[k]})\| \leq \frac{k!}{\rho^k} \sup_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|\leq\rho} \|f(x)\| \leq \frac{k!}{\rho^k} \sup_{x\in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|\leq r} \|f(x)\|,$$

amiből $\rho \to r$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\|((D^k f)(\mathfrak{a}))(e^{[k]})\| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{x \in E;\ \|x-\mathfrak{a}\| \leq r} \|f(x)\| = \frac{k!}{r^k} \sup_{x \in\ E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\|,$$

ahol felhasználtuk a Cauchy-féle maximum-elvet (**22**. gyakorlat) az $f|_{\overline{B}_r(\mathfrak{a})}$ folytonos függvényre. Ebből következik, hogy $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{k!}{k^k}\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \|(D^k f)(\mathfrak{a})\|_* := \sup_{e \in E;\ \|e\| \leq 1} \|((D^k f)(\mathfrak{a}))(e^{[m]})\| \leq$$
$$\leq \frac{k!}{r^k} \sup_{x \in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\|$$

(VI. fejezet, 3. pont, **14**. gyakorlat), tehát

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \left(\frac{k}{r}\right)^k \sup_{x \in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\|.$$

Legyen $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a} \in \Omega$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r < dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a})$. Ekkor $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, mert $x \in E \setminus \Omega$ esetén az $[\mathfrak{a}, x]$ szakasz összefüggő halmaz, tehát az V. fejezet 10. pontjának eredményei alapján van olyan $z \in Fr(\Omega)$, hogy $z \in [\mathfrak{a}, x]$; ekkor $\|x - \mathfrak{a}\| = \|x - z\| + \|z - \mathfrak{a}\| \geq \|x - z\| + dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) > r$, vagyis $x \in E \setminus \overline{B}_r(\mathfrak{a})$. Ezért az imént bizonyított egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\|(D^k f)(\mathfrak{a})\| \leq \left(\frac{k}{r}\right)^k \sup_{x' \in E;\ \|x-\mathfrak{a}\|=r} \|f(x)\| \leq$$
$$\leq \left(\frac{k}{r}\right)^k \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\| = \left(\frac{k}{r}\right)^k \sup_{x \in Fr(\Omega)} \|f(x)\|$$

adódik, ahol felhasználtuk a Cauchy-féle maximum-elvet.)

24. (*Weierstrass konvergencia-tétele.*) Legyen E komplex normált tér, F komplex Banach-tér és $\Omega \subseteq E$ nem üres korlátos nyílt halmaz. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : \overline{\Omega} \to F$ olyan folytonos függvény, hogy $f_n|_\Omega$ holomorf. Ha $Fr(\Omega) \subseteq Dom(\lim\limits_{n \to \infty} f_n)$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $Fr(\Omega)$ halmazon, akkor teljesülnek a következők.

a) $Dom(\lim\limits_{n \to \infty} f_n) = \overline{\Omega}$.

b) Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\overline{\Omega}$ halmazon.

c) A $\lim\limits_{n \to \infty} f_n : \overline{\Omega} \to F$ függvény folytonos és az $\left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n\right)|_\Omega$ függvény holomorf.

d) Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $D^k\left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n\right) = \lim\limits_{n \to \infty} (D^k f_n)$.

e) Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(D^k f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az Ω halmazon.

Igazoljuk konkrét példával, hogy az állítás nem feltétlenül igaz, ha Ω nem korlátos.

(*Útmutatás.* Az állítás triviálisan igaz, ha $E = \{0\}$, ezért feltesszük, hogy $E \neq \{0\}$. Vezessük be az $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ jelölést, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A feltevés szerint van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sup_{x\in Fr(\Omega)} \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor az $f_m - f_n : \overline{\Omega} \to F$ függvény folytonos és az $(f_m - f_n)|_\Omega : \Omega \to F$ függvény holomorf, így $m, n > N$ esetén a Cauchy-féle maximum-elv (**20**. gyakorlat) alapján minden $\mathfrak{a} \in \Omega$ pontra

$$\|f_m(\mathfrak{a}) - f_n(\mathfrak{a})\| \le \sup_{x\in\Omega} \|f_m(x) - f_n(x)\| = \sup_{x\in Fr(\Omega)} \|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon,$$

tehát $(f_n(\mathfrak{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az F Banach-térben, így a) igaz. Az is látható, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$\sup_{\mathfrak{a}\in\Omega} \|f(\mathfrak{a}) - f_n(\mathfrak{a})\| \le \sup_{\mathfrak{a}\in\Omega} \Big(\lim_{m\to\infty} \|f_m(\mathfrak{a}) - f_n(\mathfrak{a})\|\Big) \le \varepsilon,$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az Ω halmazon, így az $\overline{\Omega} = \Omega \cup Fr(\Omega)$ halmazon is egyenletesen konvergens, vagyis b) teljesül. Ezért az V. fejezet 11. pontjának eredményei alapján f folytonos függvény.

Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r < dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a})$. Ekkor $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, és minden $x \in \overline{B}_r(\mathfrak{a})$ pontra $dist_{Fr(\Omega)}(x) \ge dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) - r$, mert $x' \in Fr(\Omega)$ esetén $\|x' - x\| + r > \|x' - x\| + \|x - \mathfrak{a}\| \ge \|x' - \mathfrak{a}\| \ge dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a})$, tehát $\|x' - x\| > dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) - r$, így $dist_{Fr(\Omega)}(x) = \inf_{x'\in Fr(\Omega)} \|x' - x\| \ge dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) - r$.

Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $f_m - f_n : \overline{\Omega} \to F$ folytonos függvény és az $(f_m - f_n)|_\Omega : \Omega \to F$ függvény holomorf, tehát a **20**. gyakorlat szerint végtelenszer $\mathbb{C}$-differenciálható, így az általános Cauchy-egyenlőtlenség **21** alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in B_r(\mathfrak{a})} \|(D^k(f_m - f_n))(x)\| \le \\
&\le \sup_{x\in B_r(\mathfrak{a})} \left(\left(\frac{k}{dist_{Fr(\Omega)}(x)}\right)^k \sup_{x'\in Fr(\Omega)} \|(f_m - f_n)(x')\|\right) \le \\
&\le \left(\frac{k}{dist_{Fr(\Omega)}(\mathfrak{a}) - r}\right)^k \sup_{x'\in Fr(\Omega)} \|f_m(x') - f_n(x')\|.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy minden $\Omega \ni \mathfrak{a}$-ra és $\mathbb{N} \ni k$-ra $((D^k f_n)(\mathfrak{a})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $\mathscr{L}_k(E^k; F)$ Banach-térben, vagyis minden $\mathbb{N} \ni k$-ra a $(D^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat pontonként konvergens az Ω halmazon. Ugyanakkor minden $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a} \in \Omega$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in B_r(\mathfrak{a})} \left\|\lim_{m\to\infty} (D^k f_m)(x) - (D^k f_n)(x)\right\| \le \\
&\le \left(\frac{k}{dist_{Fr(\Omega)}(a) - r}\right)^k \sup_{x'\in Fr(\Omega)} \|f(x') - f_n(x')\|,
\end{aligned}$$

tehát a $(D^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deriváltfüggvény-sorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon. Ebből a VII. fejezet 6. pontjának utolsó tétele alapján kapjuk a c), d) és e) állításokat.)

25. Legyen E komplex normált tér, F komplex Banach-tér és $\Omega \subseteq E$ (nem feltétlenül korlátos) nyílt halmaz. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : \Omega \to F$ holomorf függvény, továbbá az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *lokálisan egyenletesen konvergens* az Ω halmazon, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n : \Omega \to F$ függvény is holomorf, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $D^k\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} D^k f_n$, továbbá a $(D^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon.

(*Útmutatás.* Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\overline{B}_r(\mathfrak{a})$ halmazon. A Weierstrass-féle konvergencia-tételt (**24**. gyakorlat) alkalmazva az $\left(f_n|_{\overline{B}_r(\mathfrak{a})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra kapjuk, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ függvény holomorf a $B_r(\mathfrak{a})$ nem üres, korlátos és nyílt halmazon, továbbá minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $D^k\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} (D^k f_n)$ a $B_r(\mathfrak{a})$ halmazon, valamint a $(D^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens $B_r(\mathfrak{a})$ halmazon.)

26. (*Holomorf függvények terei.*) Legyen E komplex normált tér, F komplex Banach-tér és $\Omega \subseteq E$ (nem feltétlenül korlátos) nyílt halmaz.

a) Jelölje $\mathscr{H}^b(\Omega; F)$ az $\Omega \to F$ korlátos holomorf függvények halmazát. Ekkor $\mathscr{H}^b(\Omega; F)$ sup-normában zárt lineáris altere az $\Omega{\to}F$ korlátos folytonos függvények $\mathscr{C}^b(\Omega; F)$ terének, így $\mathscr{H}^b(\Omega; F)$ a sup-normával ellátva Banach-tér.

b) Jelölje $\mathscr{H}^b(\overline{\Omega}; F)$ azon $f \in \mathscr{C}^b(\overline{\Omega}; F)$ függvények halmazát, amelyekre $f|_\Omega$ holomorf. Ekkor $\mathscr{H}^b(\overline{\Omega}; F)$ sup-normában zárt lineáris altere $\mathscr{C}^b(\overline{\Omega}; F)$-nek, így $\mathscr{H}^b(\overline{\Omega}; F)$ a sup-normával ellátva Banach-tér.

c) Legyen $m \in \mathbb{N}$ és jelölje $\mathscr{H}^b_m(\Omega; F)$ azon $\Omega \to F$ holomorf függvények halmazát, amelyekre minden $k \le m$ természetes számra $D^k f$ korlátos függvény. Ekkor a

$$\mathscr{H}^b_m(\Omega; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in\Omega} \|(D^k f)(x)\|$$

leképezés olyan norma $\mathscr{H}^b_m(\Omega; F)$ felett, amellyel $\mathscr{H}^b_m(\Omega; F)$ Banach-tér.

d) Legyen $m \in \mathbb{N}$ és jelölje $\mathscr{H}^b_m(\overline{\Omega}; F)$ azon $\overline{\Omega} \to F$ korlátos folytonos függvények halmazát, amelyekre $f|_\Omega$ holomorf, és minden $k \le m$ természetes számra $D^k\left(f|_\Omega\right)$ korlátos függvény. Ekkor a

$$\mathscr{H}^b_m(\overline{\Omega}; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in\Omega} \|(D^k f)(x)\|$$

leképezés olyan norma $\mathscr{H}^b_m(\overline{\Omega}; F)$ felett, amellyel $\mathscr{H}^b_m(\overline{\Omega}; F)$ Banach-tér.

(*Útmutatás.* a) Tudjuk, hogy az $\Omega \to F$ korlátos, *folytonos* függvények $\mathscr{C}^b(\Omega; F)$ tere a sup-normával ellátva Banach-tér (V. fejezet, 11. pont), ezért ha $f \in \mathscr{C}^b(\Omega; F)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{H}^b(\Omega; F)$-ben, amely az f-hez konvergál a sup-norma szerint, akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egyenletesen konvergens* az Ω halmazon (így *lokálisan egyenletesen konvergens* is), tehát a **25**. gyakorlat szerint $f \in \mathscr{H}^b(\Omega; F)$, ami azt jelenti, hogy $\mathscr{H}^b(\Omega; F)$ a sup-norma szerint *zárt* $\mathscr{C}^b(\Omega; F)$-ben, tehát teljes is.)

27. Legyen E normált tér, F Banach-tér és $\omega : E \rightarrowtail \mathscr{L}(E;F)$ differenciálható operátormező E felett. Legyen $U \subseteq Dom(\omega)$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz. Az ω pontosan akkor zárt az U halmazon, ha egzakt az U halmazon.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy ω zárt az U halmazon, és legyen $c \in U$ rözített pont. Az U halmaz nyílt és összefüggő E-ben, így az V. fejezet 10. pontjának eredményei szerint (a kiválasztási axióma alkalmazásával) vehetünk olyan $(\gamma_x)_{x\in U}$ rendszert, hogy minden $U \ni x$-re γ_x olyan U-ban haladó szakaszonként C^1-osztályú ív, amely a c és x pontokat összeköti. Képezzük a

$$g : U \to F; \quad x \mapsto \int\limits_{\gamma_x} \omega$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy g differenciálható függvény, és minden $x \in U$ esetén $(Dg)(x) = \omega(x)$.

Legyen $x \in U$ rögzített pont, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, amelyre $\overline{B}_r(x) \subseteq U$. Ha $x' \in B_r(x)$, akkor a

$$\gamma_{x,x'} : [0,1] \to E; \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_x(3t) & ; \text{ha } t \in [0,1/3[, \\ x + (3t-1)(x'-x) & ; \text{ha } t \in [1/3,2/3[, \\ \gamma_{x'}(3(1-t)) & ; \text{ha } t \in [2/3,1] \end{cases}$$

függvény olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\gamma_{x,x'}) = Im(\gamma_x) \cup Im(\gamma_{x'}) \cup [x,x'] \subseteq U$, tehát Cauchy első integrálformulája szerint

$$0 = \int\limits_{\gamma_{x,x'}} \omega = \int\limits_{\gamma_x} \omega + \int\limits_{[x,x']} \omega - \int\limits_{\gamma_{x'}} \omega,$$

amiből következik, hogy

$$g(x') - g(x) - \omega(x)(x'-x) = \int\limits_{\gamma_{x'}} f - \int\limits_{\gamma_x} f - \omega(x)(x'-x) =$$
$$= \int\limits_{[x,x']} \omega - \int\limits_{[x,x']} \omega(x) = \int\limits_{[x,x']} (\omega - \omega(x)).$$

Tehát minden $x' \in B_r(x)$ esetén

$$\|g(x') - g(x) - \omega(x)(x'-x)\| = \left\| \int\limits_{[x,x']} (\omega - \omega(x)) \right\| \leq \|x'-x\| \sup_{x''\in[x,x']} \|f(x'')\|.$$

Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor az ω függvény x pontbeli folytonossága miatt van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta < r$ és minden $x'' \in B_\delta(x)$ esetén $\|\omega(x'') - \omega(x)\| < \varepsilon$. Ezért az előző egyenlőtlenség alapján $x'' \in B_\delta(x)$ esetén

$$\|g(x') - g(x) - \omega(x)(x'-x)\| \leq \varepsilon\|x'-x\|,$$

ami azt jelenti, hogy a g függvény differenciálható az x pontban és $(Dg)(x) = \omega(x)$.)

28. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $X : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ olyan differenciálható függvény, hogy $Dom(X)$ egyszeresen összefüggő. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) Minden $j, k < n$ természetes számra $\partial_j X_k = \partial_k X_j$, ahol $k \in n$ esetén $X_k := pr_k \circ X$.

(ii) Létezik olyan $V : Dom(X) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy minden $k < n$ természetes számra $X_k = \partial_k V$.

Ebből következik, hogy az $\mathbb{R}^n$ minden egyszeresen összefüggő nyílt részhalmaza *primitív* (1. pont, **4**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* Az (i) feltétel ekvivalens azzal, hogy az

$$\omega_{X,\mathfrak{g}} : Dom(X) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}); \quad x \mapsto \mathfrak{g}(X(x), \cdot)$$

differenciálható kovektormező zárt (azaz $d\omega_{X,\mathfrak{g}} = 0$), ahol $\mathfrak{g}$ az euklidészi skalárszorzás $\mathbb{R}^n$ felett. Ugyanakkor (ii) azzal ekvivalens, hogy az $\omega_{X,\mathfrak{g}}$ kovektormező egzakt. Ezért $Dom(X)$ egyszeres összefüggősége és a **27**. gyakorlat alapján (i) és (ii) ekvivalensek.)

29. (*Egzakt differenciálegyenletek.*) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és legyenek $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ha $U \subseteq \Omega$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és minden $(x, y) \in U$ esetén

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

akkor a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ dfferenciálegyenletnek létezik U-n értelmezett első integrálja (VII fejezet, 12. pont, **4**. gyakorlat). Ha $U \subseteq \Omega$ nyílt csillaghalmaz és $(x_0, y_0) \in U$ csillagcsentruma U-nak, akkor az

$$U \mapsto \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto$$

$$\mapsto (x - x_0) \int_0^1 P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))dt +$$

$$+ (y - y_0) \int_0^1 Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))dt$$

függvény első integrálja a $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ dfferenciálegyenletnek.

(*Útmutatás.* Tekintsük a

$$(P, Q) : U \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$$

vektormezőt. Erre a **28**. gyakorlat (i) feltétele teljesül, ezért van olyan $V : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy minden $(x, y) \in U$ esetén

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = P(x, y); \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = Q(x, y),$$

vagyis V első integrálja a $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ differenciálegyenletnek. Ha $U \subseteq \Omega$ nyílt csillaghalmaz és $(x_0, y_0) \in U$ csillagcentruma U-nak, akkor a 2. pont **7**. gyakorlata szerint az

$$U \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto (\mathfrak{g}) \int\limits_{[(x_0,y_0),(x,y)]} (P,Q)$$

függvény primitív függvénye a (P,Q) vektormezőnek, azaz U-n értelmezett első integrálja a $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ differenciálegyenletnek, ahol $\mathfrak{g}$ az euklidészi skalárszorzás $\mathbb{R}^2$ felett.)

30. (*Schwarz-lemma.*) Legyen F komplex Banach-tér, $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \to F$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén $\|f(z) - f(\mathfrak{a})\| \leq C$. Ekkor minden $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \ni z$-re

$$\|f(z) - f(\mathfrak{a})\| \leq C\frac{|z-\mathfrak{a}|}{r}$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $s \in]0, r[$ tetszőleges valós szám, és értelmezzük a

$$g_s : \overline{B}_s(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \to F; \quad z \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\mathfrak{a})}{z - \mathfrak{a}} & ; \text{ha } z \neq \mathfrak{a} \\ (Df)(\mathfrak{a}) & ; \text{ha } z = \mathfrak{a} \end{cases}$$

leképezést. A megszüntethető szingularitások tétele alapján $g_s|_{B_s(\mathfrak{a};\mathbb{C})}$ holomorf függvény, és természetesen folytonos a $\overline{B}_s(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ gömbön. Ezért a Cauchy-féle maximum-elvet (**22**. gyakorlat) alkalmazva a g_s függvényre kapjuk, hogy minden $z \in \overline{B}_s(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ pontra

$$\left\|\frac{f(z) - f(\mathfrak{a})}{z - \mathfrak{a}}\right\| = \|g_s(z)\| \leq \sup_{z' \in \overline{B}_s(\mathfrak{a};\mathbb{C})} \|g_s(z')\| = \sup_{z' \in Fr(B_s(\mathfrak{a};\mathbb{C}))} \|g_s(z')\| =$$
$$= \sup_{z' \in Fr(B_s(\mathfrak{a};\mathbb{C}))} \left\|\frac{f(z') - f(\mathfrak{a})}{z' - \mathfrak{a}}\right\| = \frac{1}{s} \sup_{z' \in Fr(B_s(\mathfrak{a};\mathbb{C}))} \|f(z') - f(\mathfrak{a})\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{s} \sup_{z' \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})} \|f(z') - f(\mathfrak{a})\| \leq \frac{1}{s}C.$$

Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $0 < r_n < r$ és $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$. Ha $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $0 < |z - \mathfrak{a}| < r_n$, vagyis $z \in \overline{B}_{r_n}(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$; ekkor az előzőek szerint

$$\left\|\frac{f(z) - f(\mathfrak{a})}{z - \mathfrak{a}}\right\| \leq \frac{1}{r_n}C$$

teljesül minden $n > N$ természetes számra, amiből következik a bizonyítandó egyenlőtlenség.)

6. Laurent-sorfejtés és meromorf függvények

Jelölés. Ha $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, $R_1, R_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$ és $R_1 \leq R_2$, akkor

$$C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a}) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - \mathfrak{a}| < R_2\},$$

és ezt a halmazt $\mathfrak{a}$ centrumú, R_1 belső és R_2 külső sugarú *nyílt körgyűrűnek* nevezzük.

Tétel. (*Laurent-tétel.*) Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, valamint $R_-, R_+ \in \overline{\mathbb{R}}_+$ olyanok, hogy $R_- < R_+$ és $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$. Ekkor egyértelműen létezik olyan F-ben haladó $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ rendszer, amelyre minden $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $R_- < R_1 < R_2 < R_+$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{-k}$$

függvénysorok *normálisan konvergensek* a $\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$ halmazon, és a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűn fennáll a

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{-k}$$

egyenlőség. Ha γ tetszőleges olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amely a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$-ban halad, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$Ind_\gamma(\mathfrak{a}) c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f}{(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{n+1}}.$$

Bizonyítás. (*Egzisztencia.*) Rögzítsünk olyan $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ számokat, amelyekre $R_- < R_1 < R_2 < R_+$, és legyen $z \in C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$. Válasszunk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $r < \min(R_2 - |z - \mathfrak{a}|, |z - \mathfrak{a}| - R_1)$[; ekkor $\overline{B}_r(z; \mathbb{C}) \subseteq C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$. Megmutatjuk, hogy

$$\int\limits_{\gamma_{z,r}} \frac{f}{id_\mathbb{C} - z} = \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{id_\mathbb{C} - z} - \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{id_\mathbb{C} - z}.$$

Ehhez minden $p \in [0, 1]$ valós számra legyen $\rho := |z - \mathfrak{a}|$ és

$$w_\pm(p) := \frac{z - \mathfrak{a}}{|z - \mathfrak{a}|} e^{\mp i\pi p},$$

továbbá értelmezzük azt a

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$$

függvényt, amelyre minden $(p,t) \in [0,1] \times [0,1]$ esetén

$$H(p,t) := \begin{cases} \mathfrak{a} + R_1 w_-(p) e^{2\pi i(8t)(1-p)} & ; \ t \in [0, 1/8[, \\ (1-(8t-1))(\mathfrak{a}+R_1 w_+(p)) + (8t-1)(\mathfrak{a}+(\rho-r)w_+(p)) & ; \ t \in [1/8, 2/8[, \\ \mathfrak{a} + \rho w_+(p) - r w_+(p) e^{\pi i(8t-2)} & ; \ t \in [2/8, 3/8[, \\ (1-(8t-3))(\mathfrak{a}+(\rho+r)w_+(p)) + (8t-3)(\mathfrak{a}+R_2 w_+(p)) & ; \ t \in [3/8, 4/8[, \\ \mathfrak{a} + R_2 w_+(p) e^{-2\pi i(8t-4)(1-p)} & ; \ t \in [4/8, 5/8[, \\ (1-(8t-5))(\mathfrak{a}+R_2 w_-(p)) + (8t-5)(\mathfrak{a}+(\rho+r)w_-(p)) & ; \ t \in [5/8, 6/8[, \\ \mathfrak{a} + \rho w_-(p) + r w_-(p) e^{\pi i(8t-6)} & ; \ t \in [6/8, 7/8[, \\ (1-(8t-7))(\mathfrak{a}+(\rho-r)w_-(p)) + (8t-7)(\mathfrak{a}+R_1 w_-(p)) & ; \ t \in [7/8, 1]. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy minden $k < 8$ természetes számra a H leszűkítése a $[k/8, (k+1)/8]$ intervallumra folytonos, ezért H folytonos függvény (V. fejezet, 7. pont, **2**. gyakorlat), továbbá

$$Im(H) \subseteq \{z' \in \mathbb{C} \mid (z' \neq z) \wedge (R_1 \leq |z' - \mathfrak{a}| \leq R_2)\} \subseteq Dom(f) \setminus \{z\}.$$

Minden $p \in [0,1]$ esetén a $H(p,\cdot) : [0,1] \to \mathbb{C}$ függvény zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, ezért a $H(0,\cdot)$ és $H(1,\cdot)$ ívek kontúrhomotópok a $Dom(f) \setminus \{z\}$ halmazban, ami egyenlő az $f/(id_{\mathbb{C}} - z)$ holomorf függvény definíciós tartományával. Tehát Cauchy integráltétele alapján

$$\int\limits_{H(0,\cdot)} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{H(1,\cdot)} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}.$$

Egyszerű helyettesítéses integrálásokkal nyerjük, hogy

$$\int\limits_{H(0,\cdot)} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1,w_+(0),1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} + \int\limits_{\gamma_{z,r,w_+(0),1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} + \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2,w_+(0),-1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} =$$

$$= \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} + \int\limits_{\gamma_{z,r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} - \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = .$$

Hasonlóan látható, hogy ha $z' := 2\mathfrak{a} - z$, akkor

$$\int\limits_{H(1,\cdot)} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{\gamma_{z',r,w_+(1),1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{\gamma_{z',r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = 0,$$

mert a $\gamma_{z',r}$ ív kontúrhomotóp a $Dom(f) \setminus \{z\}$ halmazban a z' értékű $[0,1] \to \mathbb{C}$ konstansfüggvénnyel. Ezzel megmutattuk, hogy

$$\int\limits_{\gamma_{z,r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} - \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}.$$

Ezt az egyenlőséget beszorozva $1/(2\pi i)$-vel, és kihasználva azt, hogy $\overline{B}_r(z;\mathbb{C}) \subseteq C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f) \setminus \{z\}$; a második Cauchy integrálformula alapján kapjuk, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{z,r}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}.$$

Tehát megmutattuk, hogy ha $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $R_- < R_1 < R_2 < R_+$, akkor minden $z \in C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$ esetén

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z}.$$

Legyenek most $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ olyan számok, amelyekre $R_- < R_1 < R_2 < R_+$. Ekkor minden $z \in C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (z-\mathfrak{a})^k \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}}$$

függvénysor *normálisan konvergens* az $Im(\gamma_{\mathfrak{a},R_2})$ halmazon, mert minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R_2} \left\| (z-\mathfrak{a})^k \frac{f(z')}{(z'-\mathfrak{a})^{k+1}} \right\| =$$
$$= \left(\frac{|z-\mathfrak{a}|}{R_2}\right)^k \left(\frac{1}{R_2}\right) \left(\sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R_2} \|f(z')\|\right),$$

és $|z-\mathfrak{a}| < R_2$ miatt a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{|z-\mathfrak{a}|}{R_2}\right)^k$$

numerikus sor konvergens. Ezért

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \sum_{k=0}^{\infty} (z-\mathfrak{a})^k \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}} \right) (z-\mathfrak{a})^k,$$

teljesül és az itt álló vektorsorok abszolút konvergensek az F Banach-térben.

Ugyanakkor, minden $z \in C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (z-\mathfrak{a})^{-k-1} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}}$$

függvénysor *normálisan konvergens* az $Im(\gamma_{\mathfrak{a},R_1})$ halmazon, mert minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R_1} \left\| (z-\mathfrak{a})^{-k-1}\frac{f(z')}{(z'-\mathfrak{a})^{-k}} \right\| =$$
$$= \left(\frac{R_1}{|z-\mathfrak{a}|}\right)^k \left(\frac{1}{|z-\mathfrak{a}|}\right) \left(\sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R_1} \|f(z')\|\right),$$

és $R_1 < |z-\mathfrak{a}|$ miatt a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{R_1}{|z-\mathfrak{a}|}\right)^k$$

numerikus sor konvergens. Ezért

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{id_{\mathbb{C}}-z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \sum_{k=0}^{\infty}(z-\mathfrak{a})^{-k-1}\frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}}\right)(z-\mathfrak{a})^{-k-1} =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k+1}}\right)(z-\mathfrak{a})^{-k},$$

teljesül és az itt álló vektorsorok abszolút konvergensek az F Banach-térben. Tehát minden $z \in C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$ esetén

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R_2}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k+1}}\right)(z-\mathfrak{a})^{k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R_1}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k+1}}\right)(z-\mathfrak{a})^{-k}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha $R, R' \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $R_- < R < R' < R_+$, akkor a $\gamma_{\mathfrak{a},R}$ és $\gamma_{\mathfrak{a},R'}$ ívek kontúrhomotópok a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűben, ezért minden $\mathbb{Z} \ni k$-ra

$$\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k+1}} = \int_{\gamma_{\mathfrak{a},R'}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k+1}}.$$

Tehát jól értelmezett az a $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ rendszer F-ben, amelyre minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$c_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\mathfrak{a},R}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k+1}},$$

ahol $R \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, amelyre $R_- < R < R_+$.

Ha $z \in C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$, akkor vehetünk olyan $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ számokat, amelyekre $R_- < R_1 < |z - a| < R_2 < R_+$, vagyis $z \in C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})$, így az előzőek alapján

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-\mathfrak{a})^{-k},$$

és ezek a sorösszegek F-ben haladó abszolút konvergens sorok összegei. Ebből következik, hogy a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűn fennáll a

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}$$

függvény-egyenlőség.

Most igazoljuk, hogy ha $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $R_- < R_1 \leq R_2 < R_+$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$ halmazon. Tekintettel arra, hogy

$$\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})} = \overline{B}_{R_2}(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \cap (\mathbb{C} \setminus B_{R_1}(\mathfrak{a};\mathbb{C})),$$

elég azt igazolni, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k$ hatványsor normálisan konvergens a $\overline{B}_{R_2}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ gönbön, és a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}$ függvénysor normálisan konvergens a $\mathbb{C} \setminus B_{R_1}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon.

A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k$ hatványsor normálisan konvergens a $\overline{B}_{R_2}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ gönbön, mert ha $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $R_2 < R < R_+$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{z\in\overline{B}_{R_2}(\mathfrak{a};\mathbb{C})} \|c_k(z-\mathfrak{a})^k\| \leq R_2^k\|c_k\| = R_2^k \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k+1}} \right\| \leq$$

$$\leq R_2^k \frac{1}{2\pi} \mathbf{L}(\gamma_{\mathfrak{a},R}) \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R} \frac{\|f(z')\|}{|z'-\mathfrak{a}|^{k+1}} = \left(\frac{R_2}{R}\right)^k \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R} \|f(z')\|,$$

és $R_2 < R$ miatt a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{R_2}{R}\right)^k$$

numerikus sor konvergens.

A $\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}$ függvénysor normálisan konvergens a $\mathbb{C} \setminus B_{R_1}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon, mert ha $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $R_- < R < R_1$, akkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sup_{z\in\mathbb{C}\setminus B_{R_1}(\mathfrak{a};\mathbb{C})} \|c_{-k}(z-\mathfrak{a})^{-k}\| \leq R_1^{-k}\|c_{-k}\| = R_1^{-k}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},R}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k+1}}\right\| \leq$$

$$\leq R_1^{-k}\frac{1}{2\pi}\mathbf{L}(\gamma_{\mathfrak{a},R}) \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R} \frac{\|f(z')\|}{|z'-\mathfrak{a}|^{-k+1}} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^k \sup_{z'\in\mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R} \|f(z')\|,$$

és $R < R_1$ miatt a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{R}{R_1}\right)^k$$

numerikus sor konvergens.

(*Unicitás.*) Legyen $(c'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ szintén olyan F-ben haladó rendszer, hogy minden $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $R_- < R_1 < R_2 < R_+$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c'_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c'_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$ halmazon, és a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűn fennáll a

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}$$

egyenlőség. Legyen γ tetszőleges olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amely a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűben halad. Az $Im(\gamma)$ halmaz kompakt és része a $C_{R_-,R_+}(\mathfrak{a})$ nyílt halmaznak, ezért léteznek olyan $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ számok, amelyekre $R_- < R_1 < R_2 < R_+$ és $Im(\gamma) \subseteq \overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$. A hipotézis szerint a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c'_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c'_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$ halmazon, ezért minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c'_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k-n-1}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c'_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k-n-1}$$

függvénysorok is normálisan konvergensek a $\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$ halmazon, így az $Im(\gamma)$ halmazon is normálisan konvergensek, és fennáll az

$$\frac{f}{(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{k-n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{-k-n-1}$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{Z} \ni n$-re:

$$\int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma c'_k (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k-n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma c'_{-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k-n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c'_k \delta_{k,n} 2\pi i Ind_\gamma(\mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{-k} \delta_{-k,n} 2\pi i Ind_\gamma(\mathfrak{a}) = 2\pi i Ind_\gamma(\mathfrak{a}) c'_n,$$

hiszen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ esetén

$$(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m = D\left(\frac{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{m+1}}{m+1}\right),$$

vagyis $(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m$-nek létezik primitív függvénye $\mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}\}$, így

$$\int_\gamma (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m = 0;$$

ugyanakkor az index definíciója szerint

$$\int_\gamma (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-1} = 2\pi i Ind_\gamma(\mathfrak{a}),$$

tehát minden $\mathbb{Z} \ni m$-re

$$\int_\gamma (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m = \delta_{m,-1} 2\pi i Ind_\gamma(\mathfrak{a}).$$

Speciálisan, ha $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $R_1 < R < R_2$, akkor $\gamma := \gamma_{\mathfrak{a},R}$ vaálasztással kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$c'_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\mathfrak{a},R}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{n+1}}$$

hiszen $Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},R}}(\mathfrak{a}) = 1$. Ez azt jelenti, hogy $(c'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *ugyanaz* a $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ rendszer, amelyet az egzisztencia bizonyításában értelmeztünk, tehát a $(c'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ rendszer egyértelműen van meghatározva. Egyidejűleg az is látható, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$Ind_\gamma(\mathfrak{a}) c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{n+1}}$$

teljesül. ■

Definíció. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete $\mathbb{C}$-ben, hogy $V \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$. Legyen

$$r(\mathfrak{a}) := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)\}.$$

Ekkor $C_{0,r(\mathfrak{a})} \subseteq Dom(f)$, tehát a Laurent-tétel alapján egyértelműen létezik olyan $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ rendszer F-ben, hogy minden $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < R_1 < R_2 < r(\mathfrak{a})$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{R_1,R_2}(\mathfrak{a})}$ halmazon, és a $C_{0,r(\mathfrak{a})}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűn fennáll a

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}$$

egyenlőség. Ekkor a

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k, \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}\right)$$

függvénysor-párt az f függvény *Laurent-sorfejtésének* nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban. Továbbá, a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k$ hatványfüggvény-sort az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Laurent-sorfejtése *reguláris részének*, míg a $\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}$ függvénysort az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Laurent-sorfejtése *főrészének* nevezzük. A $c_1 \in F$ vektort az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli *reziduumának* nevezzük és a $Res_{\mathfrak{a}}(f)$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$Res_{\mathfrak{a}}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} f,$$

ahol $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$.

A következő állítás megmutatja, hogy a Laurent-sorfejtés a Taylor-sorfejtés általánosítása.

Állítás. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, $\mathfrak{a} \in Dom(f)$, és

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k, \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}\right)$$

az f függvény Laurent-sorfejtése az $\mathfrak{a}$ pontban. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_k = 0$ és a Laurent-sorfejtés reguláris része *egyenlő* $\mathbf{T}_{\mathfrak{a}}(f)$-fel, vagyis az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sorával.

Bizonyítás. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$. Ekkor $Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(\mathfrak{a}) = 1$ miatt minden $\mathbb{Z} \ni k$-ra

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k+1}},$$

következésképpen $k > 0$ esetén

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} f(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k-1} = 0,$$

hiszen az $f(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{k-1}$ függvény holomorf $Dom(f)$-en, és $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$. ■

A szerint, hogy egy holomorf függvény adott pontbeli Laurent-sorfejtésének főrésze milyen speciális tulajdonságokkal rendelkezik; a következő fogalmakat vezetjük be.

Definíció. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete $\mathbb{C}$-ben, hogy $V \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$. Legyen

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k, \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} \right)$$

az f függvény Laurent-sorfejtése az $\mathfrak{a}$ pontban.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény az $\mathfrak{a}$ pontban *reguláris*, ha minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_{-k} = 0$ (vagyis a Laurent-sorfejtés főrésze eltűnik).

- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $\mathfrak{a}$ pontban *m-ed rendű pólusa* van, ha $m \in \mathbb{N}^+$, $c_{-m} \neq 0$, és minden $k > m$ természetes számra $c_{-k} = 0$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $\mathfrak{a}$ pontban *legfeljebb m-ed rendű pólusa* van, ha $m \in \mathbb{N}^+$, és minden $k > m$ természetes számra $c_{-k} = 0$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $\mathfrak{a}$ pontban *lényeges szingularitása* van, ha a $\{k \in \mathbb{N}^+ | c_{-k} \neq 0\}$ halmaz végtelen.

Definíció. Legyen F komplex Banach-tér. Egy $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvényt *meromorfnak* nevezünk, ha létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $D \subseteq \Omega$ diszkrét zárt halmaz, hogy $Dom(f) = \Omega \setminus D$, és az f függvénynek a D minden pontjában pólusa van.

Ha például $f : \mathbb{C} \to F$ holomorf függvény és $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nem nulla polinomiális függvény, akkor az f/Q függvény meromorf, mert $Dom(f/Q) = Dom(f) \setminus (Dom(f) \cap [Q = 0])$ és $Dom(f) \cap [Q = 0]$ halmaz véges (tehát diszkrét és zárt), továbbá minden $\mathfrak{a} \in Dom(f) \cap [Q = 0]$ az f/Q függvénynek m-ed rendű pólusa van, ha az $\mathfrak{a}$ pont m-szeres multiplicitású gyöke Q-nak. További páldát látunk meromorf függvényekre az **1**. gyakorlatban.

Tétel. (*Reziduum-tétel.*) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény. Tegyük fel, hogy $U \subseteq \mathbb{C}$ olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, és $A \subseteq U$ olyan véges halmaz, hogy $U \setminus A \subseteq Dom(f)$, és f-nek az A minden pontjában pólusa van (vagyis az $f|_{U\setminus A}$ függvény meromorf). Ha γ olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amely $U \setminus A$-ban halad, akkor

$$\int\limits_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in A} Ind_{\gamma}(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(f)$$

teljesül.

Bizonyítás. Minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén legyen

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\mathfrak{a},k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k, \sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} c_{\mathfrak{a},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} \right)$$

az f függvény Laurent-sorfejtése az $\mathfrak{a}$ pontban. A feltevés szerint minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén van olyan $n(\mathfrak{a}) \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > n(\mathfrak{a})$ természetes számra $c_{\mathfrak{a},-k} = 0$. értelmezzük most azt a $g : U \to F$ függvényt, amely $U \setminus A$-n egyenlő az

$$f - \sum_{\mathfrak{a} \in A} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{a})} c_{\mathfrak{a},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} \right)$$

függvénnyel, és minden $A \ni \mathfrak{a}$-ra

$$g(\mathfrak{a}) := c_{\mathfrak{a},0} - \sum_{\mathfrak{b} \in A \setminus \{\mathfrak{a}\}} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{b})} c_{\mathfrak{b},-k} (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^{-k} \right).$$

Ekkor g az $U \setminus A$ halmazon holomorf és az A minden pontjában folytonos, mert minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete, hogy a $V \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_{\mathfrak{a},k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{n(\mathfrak{a})} c_{\mathfrak{a},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}$$

teljesül, tehát

$$\lim_{\mathfrak{a}} g = \lim_{\mathfrak{a}} \left(f - \sum_{\mathfrak{b} \in A} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{b})} c_{\mathfrak{b},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{b})^{-k} \right) \right) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{a}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{\mathfrak{a},k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{n(\mathfrak{a})} c_{\mathfrak{a},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} - \sum_{\mathfrak{b} \in A} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{b})} c_{\mathfrak{b},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{b})^{-k} \right) \right) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{a}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{\mathfrak{a},k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k - \sum_{\mathfrak{b} \in A \setminus \{\mathfrak{a}\}} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{b})} c_{\mathfrak{b},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{b})^{-k} \right) \right) =$$

$$= c_{\mathfrak{a},0} - \sum_{\mathfrak{b} \in A \setminus \{\mathfrak{a}\}} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{b})} c_{\mathfrak{b},-k} (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^{-k} \right) =: g(\mathfrak{a}).$$

Ezért a megszüntethető szingularitások tétele alapján g holomorf a U halmazon, és U egyszeresen összefüggő, így Cauchy első integrálformuláját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma} g = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \left(\sum_{\mathfrak{a}\in A} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{a})} c_{\mathfrak{a},-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} \right) \right) = \sum_{\mathfrak{a}\in A} \left(\sum_{k=1}^{n(\mathfrak{a})} c_{\mathfrak{a},-k} \int_\gamma (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} \right).$$

De $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\int_\gamma (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} = 0,$$

mert

$$(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k} = D\left(\frac{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k+1}}{-k+1} \right),$$

vagyis $(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-k}$-nak létezik primitív függvénye a $\mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon. Ezért a reziduumok értelmezése alapján kapjuk, hogy

$$\int_\gamma f = \sum_{\mathfrak{a}\in A} c_{\mathfrak{a},-1} \int_\gamma (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{-1} = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in A} Ind_\gamma(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(f)$$

teljesül. ■

Gyakorlatok

1. Ha $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény, és $Dom(f)$ összefüggő halmaz, akkor az $1/f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ reciprok-függvény meromorf.

(*Útmutatás.* Jelölje N_f az f függvény gyökeinek halmazát, tehát $N_f := \{z \in Dom(f) | f(z) = 0\}$. Az f holomorf függvény nem azonosan 0 és $Dom(f)$ összefüggő, ezért az 5. pont, **11**. gyakorlat szerint az N_f minden eleme izolált pontja N_f-nek. Továbbá, $Dom(1/f) = Dom(f) \setminus N_f$, és $\mathfrak{a} \in N_f$ esetén egyértelműen létezik olyan $m_\mathfrak{a} \in \mathbb{N}^+$ és $g_\mathfrak{a} : Dom(f) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g_\mathfrak{a}(\mathfrak{a}) \neq 0$ és $f = (id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{m_\mathfrak{a}} g_\mathfrak{a}$. Legyen $\mathfrak{a} \in N_f$ rögzített és $r_\mathfrak{a}$ az a legnagyobb elem $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban, amelyre $B_{r_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(1/f)$. Ekkor $1/f = (id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{-m_\mathfrak{a}}(1/g_\mathfrak{a})$ a $B_{r_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, tehát

$$\frac{1}{f} = (id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{-m_\mathfrak{a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k(1/g_\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})}{k!}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_\mathfrak{a}-1} \frac{(D^k(1/g_\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})}{k!}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{k-m_\mathfrak{a}} + \sum_{k=m_\mathfrak{a}}^{\infty} \frac{(D^k(1/g_\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})}{k!}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{k-m_\mathfrak{a}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m_\mathfrak{a}} \frac{(D^{m_\mathfrak{a}-j}(1/g_\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})}{(m_\mathfrak{a} - j)!}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(D^{m_\mathfrak{a}+j}(1/g_\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})}{(m_\mathfrak{a} + j)!}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{j}$$

teljesül a $B_{r_\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, amiből látható, hogy $1/f$-nek $\mathfrak{a}$-ban legfeljebb $m_\mathfrak{a}$-ad rendű pólusa van.)

2. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete $\mathbb{C}$-ben, hogy $V \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$. Legyen

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k (id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^k, \sum_{k \in \mathbb{N};\ k \geq 1} c_{-k}(id_\mathbb{C} - \mathfrak{a})^{-k} \right)$$

az f függvény Laurent-sorfejtése az $\mathfrak{a}$ pontban, és

$$r(\mathfrak{a}) := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | \overline{B}_r(\mathfrak{a}; \mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)\}.$$

Ekkor minden $\mathbb{Z} \ni n$-re és $]0, r(\mathfrak{a})[\ni r$-re

$$\|c_n\| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\|.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek alkalmazásával igazoljuk a következő kijelentéseket!

a) Az f függvény pontosan akkor reguláris az $\mathfrak{a}$ pontban, ha létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan U környezete, hogy az $f\langle U \rangle$ halmaz *korlátos* F-ben. (Ez az állítás is a *megszüntethető szingularitások* tételkörébe tartozik.)

b) Az f függvénynek pontosan akkor van n-ed rendű pólusa $\mathfrak{a}$-ban (ahol $n \in \mathbb{N}^+$), ha léteznek olyan $r \in]0, r(\mathfrak{a})[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $0 < |z - \mathfrak{a}| \leq r$, akkor

$$\frac{C_1}{|z-\mathfrak{a}|^n} \leq \|f(z)\| \leq \frac{C_2}{|z-\mathfrak{a}|^n}.$$

(Ilyenkor azt mondjuk, hogy az f és $\dfrac{1}{|id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}|^n}$ függvények az $\mathfrak{a}$ pontban *ekvivalensek.*)

c) Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az $\mathfrak{a}$ pontban, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $C_\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $\delta_\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $\delta_\alpha \leq r(\mathfrak{a})$ és minden $]0, \delta_\alpha[\ni r$-re

$$\frac{C_\alpha}{r^\alpha} \leq \sup_{z \in \mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\|,$$

amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy $r \to 0$ esetén az $\sup\limits_{z \in \mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\|$ kifejezés gyorsabban tart $+\infty$-hez, mint az $1/r$ bármelyik pozitív exponensű hatványa.

(*Útmutatás.* Ha $r \in]0, r(\mathfrak{a})[$, akkor a Laurent-tétel alapján minden $\mathbb{Z} \ni n$-re

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{n+1}},$$

amiből következik, hogy

$$\|c_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \mathbf{L}(\gamma_{\mathfrak{a},r}) \sup_{z \in Im(\gamma_{\mathfrak{a},r})} \frac{\|f(z)\|}{|(z-\mathfrak{a})^{n+1}|} = \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\|.$$

a) Ha $\rho \in]0, r(\mathfrak{a})[$ olyan valós szám, hogy $\sup\limits_{z \in B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}} \|f(z)\| < +\infty$, akkor minden $r \in]0, \rho[$ valós számra és $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\|c_{-n}\| \leq r^n \sup_{z \in \mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\| \leq r^n \sup_{z \in B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}} \|f(z)\|,$$

ezért $n > 0$ esetén

$$\|c_{-n}\| \leq \lim_{r \to 0} \left(r^n \sup_{z \in B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}} \|f(z)\| \right) = 0,$$

így $c_{-n} = 0$, vagyis f reguláris az $\mathfrak{a}$ pontban. Megfordítva, ha f reguláris az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor a Laurent-tétel alapján $\lim\limits_{\mathfrak{a}} f$ létezik, ezért f korlátos az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén.

b) Ha f-nek n-ed rendű pólusa van az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor a Laurent-tétel alapján a $B_{r(\mathfrak{a})}(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon fennáll az

$$\|(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f - c_{-n}\| \leq |id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}|^n \left\| \sum_{k=0}^{\infty} c_k (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} c_{-k} (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{n-k} \right\|$$

egyenlőtlenség, és a jobb oldalon álló függvénynek az $\mathfrak{a}$ pontban 0 a határértéke, ezért

$$\lim_{\mathfrak{a}}((id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^n f) = c_{-n} \neq 0.$$

Ebből következik olyan $r \in]0, r(\mathfrak{a})[$ valós szám és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ számok létezése, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ pontra, ha $0 < |z-\mathfrak{a}| \leq r$, akkor

$$\frac{C_1}{|z-\mathfrak{a}|^n} \leq \|f(z)\| \leq \frac{C_2}{|z-\mathfrak{a}|^n}.$$

Megfordítva; legyenek $r, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ ilyen tulajdonságú számok. Ekkor minden $k > n$ természetes számra és $]0, r] \ni \rho$-ra

$$\|c_{-k}\| = \rho^k \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=\rho} \|f(z)\| = \rho^{k-n} \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=\rho} \|(z-\mathfrak{a})^n f(z)\| \leq \rho^{k-n} C_2,$$

ezért $\|c_{-k}\| \leq \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{k-n}C_2\right) = 0$. Ezért a Laurent-tétel alapján a $B_{r(\mathfrak{a})}(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon fennáll az

$$(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^n f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{n+k} + c_{-n} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{-k}(id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^{n-k}$$

egyenlőség. Ebből látható, hogy $\lim_{\mathfrak{a}}((id_{\mathbb{C}}-\mathfrak{a})^n f) = c_{-n}$, ezért $c_{-n} \neq 0$, hiszen a feltevés szerint

$$\inf_{z\in\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})\setminus\{\mathfrak{a}\}} (|z-\mathfrak{a}|^n \|f(z)\|) \geq C_1 > 0.$$

Ezért f-nek az $\mathfrak{a}$ pontban n-ed rendű pólusa van.

c) Tegyük fel, hogy f-nek lényeges szingularitása van $\mathfrak{a}$-ban, és legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $m \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $c_{-m} \neq 0$ és $m > \alpha$. Ha $r \in]0, \min(r(\mathfrak{a}), 1)[$ tetszőleges valós szám, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\|c_{-m}\|}{r^\alpha} &\leq \left(\frac{1}{r^\alpha}\right)\left(\frac{1}{r^{-m}}\right) \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\| = \\ &= r^{m-\alpha} \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\| \leq \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\|,\end{aligned}$$

tehát $C_\alpha := \|c_{-m}\| \in \mathbb{R}^+$ és $\delta_\alpha := \min(r(\mathfrak{a}), 1)$ olyan számok, amelyek létezését állítottuk. Megfordítva; tegyük fel, hogy f-nek nincs lényeges lényeges szingularitása $\mathfrak{a}$-ban. Ekkor van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m$ természetes számra $c_{-n} = 0$. Ha $r \in]0, r(\mathfrak{a})[$ tetszőleges valós szám, akkor $z \in \mathbb{C}$, $|z-\mathfrak{a}| = r$ esetén

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-\mathfrak{a})^k + \sum_{k=0}^{m} c_{-k}(z-\mathfrak{a})^{-k},$$

ezért fennáll az

$$\|f(z)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|c_k\| r^k + \sum_{k=0}^{m} \|c_{-k}\| r^{-k}$$

egyenlőtlenség, vagyis minden $\alpha > m$ valós számra

$$r^\alpha \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|c_k\| r^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{m} \|c_{-k}\| r^{\alpha-k}.$$

Itt a jobb oldal $\alpha > m$ esetén 0-hoz tart, ha r tart 0-hoz, így ekkor

$$\lim_{r\to 0} \left(r^\alpha \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\| \right) = 0,$$

következésképpen *van olyan* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (ti. bármely $\alpha > m$ valós szám ilyen), hogy *nem létezik* olyan $C \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $r \in]0, \min(r(\mathfrak{a}), 1)[$ valós szám esetében

$$\frac{C}{r^\alpha} \leq \sup_{z\in\mathbb{C};\ |z-\mathfrak{a}|=r} \|f(z)\|$$

teljesül.)

3. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbb{C} \ni \mathfrak{a}$-ra az

$$Exp \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}} \right) : \mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{C}$$

függvénynek lényeges szingularitása van az $\mathfrak{a}$ pontban. Igazoljuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{C}$ *véges* halmazhoz létezik olyan $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelynek az A minden pontjában lényeges szingularitása van. Milyen tulajdonságú $A \subseteq \mathbb{C}$ *végtelen* halmazokhoz létezik olyan $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelynek az A minden pontjában lényeges szingularitása van?

(*Útmutatás.* A $\mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon

$$Exp \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k}$$

teljesül, tehát a bal oldalon álló függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Laurent-sorfejtésének főrésze a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} \frac{1}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^k}$ függvénysor.)

4. (*Weierstrass tétele a lényeges szingularitásokról.*) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ holomorf függvény és $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete $\mathbb{C}$-ben, hogy $V \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$. Ha f-nek lényeges szingularitása van az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor az $\mathfrak{a}$ minden U környezetére $\overline{f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle} = \mathbb{C}$.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük az $\mathfrak{a}$ pont olyan U környezetének létezését, hogy $\overline{f\langle U \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle} \neq \mathbb{C}$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq U$ és $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$, továbbá legyen $\mathfrak{c} \in \mathbb{C} \setminus \overline{f\langle B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}\rangle}$ rögzített pont. Ekkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $z \in \mathbb{C}$ és $0 < |z - \mathfrak{a}| < r$ esetén fennáll az $|f(z) - \mathfrak{c}| \geq \varepsilon$ egyenlőtlenség, így az $\dfrac{1}{f - \mathfrak{c}}$ holomorf függvény értelmezve van a $C_{0,r}(\mathfrak{a})$ körgyűrűn, és *korlátos* ezen a halmazon. A **2**. gyakorlat a) pontja szerint az $\frac{1}{f-\mathfrak{c}}$ függvény az $\mathfrak{a}$ pontban reguláris; jelölje g ennek a függvénynek holomorf kiterjesztését a $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ gömbre. A $B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmaz összefüggő és g nem konstansfüggvény, ezért $g(\mathfrak{a}) = 0$ esetén az 5. pont **11**. gyakorlat szerint létezik olyan $m \in \mathbb{N}$ és olyan $h : B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g = (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m h$ és $h(\mathfrak{a}) \neq 0$. Ha $g(\mathfrak{a}) \neq 0$, akkor ismét írható, hogy $g = (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m h$, ahol $m := 0$ és $h := g$, így $h(\mathfrak{a}) \neq 0$. Tehát vehetünk olyan $m \in \mathbb{N}$ számot és $h : B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ holomorf függvényt, amelyre $g = (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m h$ és $h(\mathfrak{a}) \neq 0$. Ekkor $z \in \mathbb{C}$ és $0 < |z - \mathfrak{a}| < r$ esetén $\frac{1}{f(z)-\mathfrak{c}} = (z-\mathfrak{a})^m h(z)$, ezért $h(z) \neq 0$ és $f(z) - \mathfrak{c} = (z - \mathfrak{a})^{-m} \frac{1}{h(z)}$. Léteznek olyan $\rho \in]0, r[$ és $C \in \mathbb{R}^+$ valós számok, hogy minden $z \in B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ pontra $|h(z)| \geq C$. Ekkor minden $z \in B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ pontra $|f(z) - \mathfrak{c}| \leq \frac{1}{C} \frac{1}{|z-\mathfrak{a}|^m}$ teljesül, tehát a **2**. gyakorlat a) és b) pontja szerint: ha $m = 0$, akkor f reguláris az $\mathfrak{a}$ pontban, és ha $m > 0$, akkor f-nek legfeljebb m-ed rendű pólusa van az $\mathfrak{a}$ pontban; ami ellentmond annak, hogy f-nek lényeges szingularitása van $\mathfrak{a}$-ban.)

5. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelynek létezik olyan V környezete $\mathbb{C}$-ben, hogy $V \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$. Ha az f függvénynek n-ed rendű pólusa van az $\mathfrak{a}$ pontban, akkor

$$Res_{\mathfrak{a}}(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\mathfrak{a}} \left(D^{n-1}\left((id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f\right)\right).$$

(*Útmutatás.* A **2**. gyakorlat b) pontja alapján az $(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f$ holomorf függvény korlátos az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén, így ugyanazon gyakorlat a) pontja szerint reguláris $\mathfrak{a}$-ban. Jelölje g azt a $\mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvényt, amelyre $Dom(g) := Dom(f) \cup \{\mathfrak{a}\}$, és g megegyezik az $(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f$ függvénnyel a $Dom(f)$ halmazon. Ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f)$, akkor a reziduum értelmezése és Cauchy második integrálformulája szerint

$$Res_{\mathfrak{a}}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{g}{(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^{(n-1)+1}} = \frac{1}{(n-1)!} (D^{n-1} g)(\mathfrak{a}) =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{\mathfrak{a}} (D^{n-1} g) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\mathfrak{a}} (D^{n-1}((id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f)),$$

hiszen $D^{n-1} g$ folytonos függvény (sőt holomorf), és g megegyezik az $(id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^n f$ függvénnyel a $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ halmazon, tehát elég a határérték lokalitásának elvét alkalmazni.)

6. Legyen F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, és $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinomiális függvény. Ha az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pont m-szeres multiplicitású gyöke $\mathbb{Q}$-nak és $Q_{\mathfrak{a}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ az a polinomiális függvény, amelyre $Q = (id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a})^m Q_{\mathfrak{a}}$, akkor fennáll a

$$Res_{\mathfrak{a}}(f/Q) = \frac{D^{m-1}(f/Q_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{a})}{(m-1)!}$$

egyenlőség.
(*Útmutatás.* Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \setminus \{\mathfrak{a}\} \subseteq Dom(f/Q)$. A $Q_\mathfrak{a}$ függvény definíciója és Cauchy második integraformulája szerint

$$Res_\mathfrak{a}(f/Q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f/Q_\mathfrak{a}}{(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^m} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} \frac{f/Q_\mathfrak{a}}{(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^{(m-1)+1}} = \frac{(D^{m-1}(f/Q_\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})}{(m-1)!}$$

teljesül.)

7. (*Reziduum a végtelen távoli pontban.*) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan holomorf függvény, amelyhez létezik olyan $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt halmaz, hogy $\mathbb{C} \setminus K \subseteq Dom(f)$. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ ponthoz egyértelműen létezik olyan F-ben haladó $(c_{\mathfrak{a},k})_{k\in\mathbb{Z}}$ rendszer, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $\mathbb{C} \setminus B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_{\mathfrak{a},k}(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1} c_{\mathfrak{a},-k}(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^{-k}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,+\infty}(\mathfrak{a})}$ halmazon és

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_{\mathfrak{a},k}(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\mathfrak{a},-k}(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^{-k}$$

teljesül a $C_{r,+\infty}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűn. Továbbá, ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\mathbb{C}\setminus B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, és γ tetszőleges olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív, amely $C_{r,+\infty}(\mathfrak{a})$-ben halad, akkor minden $\mathbb{Z} \ni n$-re

$$Ind_\gamma(\mathfrak{a})c_{\mathfrak{a},n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f}{(id_\mathbb{C}-\mathfrak{a})^{n+1}}.$$

Mutassuk meg, hogy a $c_{\mathfrak{a},-1} \in F$ vektor az $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ pont választásától *független.* (A $-c_{\mathfrak{a},-1}$ vektort az f függvény *reziduumának* nevezzük a *végtelen távoli pontban*, és a $Res_\infty(f)$ szimbólummal jelöljük. Tehát a definíció szerint

$$Res_\infty(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} f,$$

ahol $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\mathbb{C} \setminus B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$.
(*Útmutatás.* Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ esetén $R(\mathfrak{a}) := \inf\{r \in \mathbb{R}^+ | \mathbb{C} \setminus B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)\}$. Ekkor minden $\mathbb{C} \ni \mathfrak{a}$-ra $C_{R(\mathfrak{a}),+\infty}(\mathfrak{a}) \subseteq Dom(f)$, tehát elég a Laurent-tételt alkalmazni az f függvényre és a $C_{R(\mathfrak{a}),+\infty}(\mathfrak{a})$ nyílt körgyűrűre.)

8. Ha F komplex Banach-tér, $A \subseteq \mathbb{C}$ véges halmaz, és $f : \mathbb{C} \setminus A \to F$ meromorf függvény, akkor

$$Res_\infty(f) + \sum_{\mathfrak{a}\in A} Res_\mathfrak{a}(f) = 0.$$

(*Útmutatás.* A feltevés szerint f-nek az A minden pontjában pólusa van, és $\mathbb{C}$ olyan egyszeresen összefüggő halmaz, amelyre $\mathbb{C} \setminus A \subseteq Dom(f)$, ezért a reziduum-tétel alapján minden $\mathbb{C} \setminus A$-ban haladó γ zárt, szakaszonként C^1-osztályú ívre

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in A} Ind_\gamma(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(f).$$

Ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $A \subseteq B_r(0;\mathbb{C})$, akkor $\mathbb{C} \setminus B_r(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$, tehát a $Res_\infty(f)$ vektor definíciója szerint

$$Res_\infty(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\mathfrak{a},r}} f = -\sum_{\mathfrak{a}\in A} Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(f) = -\sum_{\mathfrak{a}\in A} Res_{\mathfrak{a}}(f),$$

mert minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén $Ind_{\gamma_{\mathfrak{a},r}}(\mathfrak{a}) = 1$.)

9. (*Mittag-Leffler-tétel.*) Legyen F komplex Banach-tér, $(\mathfrak{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan injektív sorozat $\mathbb{C}$-ben, hogy $\{\mathfrak{a}_k | k \in \mathbb{N}\}$ diszkrét zárt halmaz $\mathbb{C}$-ben, és $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $P_k : \mathbb{C} \to F$ polinomiális vektorfüggvény. Ekkor létezik olyan $f : \mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}_k | k \in \mathbb{N}\} \to F$ meromorf függvény, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az f függvény $\mathfrak{a}_k$ pontbeli Laurent-sorfejtése főrészének összegfüggvénye egyenlő a $P_k \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}}\right)$ függvénnyel.

(*Útmutatás.* Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ olyan pont, amelyre $\mathfrak{a} \notin \{\mathfrak{a}_k | k \in \mathbb{N}\}$. Vegyünk olyan $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor a $P_k \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}_k}\right)$ függvény holomorf a $\mathfrak{a}$ hözéppontú, $|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}|$ sugarú nyílt gömbön, ezért létezik olyan $Q_k : \mathbb{C} \to F$ polinomiális függvény, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha $|z - \mathfrak{a}| \leq \frac{1}{2}|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}|$, akkor $\left\| P_k\left(\frac{1}{z - \mathfrak{a}_k}\right) - Q_k(z) \right\| < \varepsilon_k$. Kiválasztva egy ilyen $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvényrendszert, képezzük a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(P_k \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}_k}\right) - Q_k \right)$ függvénysort, és legyen f ennek az összegfüggvénye. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(P_k \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}_k}\right) - Q_k \right)$ függvénysor normálisan konvergál a $\mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz minden kompakt részhalmazán, tehát $Dom(f) = \mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{a}_k | k \in \mathbb{N}\}$, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra az f függvény $\mathfrak{a}_k$ pontbeli Laurent-sorfejtése főrészének összegfüggvénye egyenlő a $P_k \circ \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}_k}\right)$ függvénnyel.)

10. (*Jordan-lemma.*) Legyen $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{U}$ és $\alpha \in [0, \pi/2]$; ekkor a

$$Sect(\mathfrak{a}, w, \alpha) = \{\mathfrak{a} + rwe^{it} \mid (r \in \mathbb{R}_+) \wedge (t \in [-\alpha, \alpha])\}$$

halmazt $\mathfrak{a}$ *csúcspontú, w irányú, α félnyílásszögű szektornak* nevezzük. Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ olyan holomorf függvény, amelyhez van olyan $r_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $Sect(\mathfrak{a}, w, \alpha) \setminus B_{r_0}(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)$. Legyen minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\gamma_r : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \mathfrak{a} + rwe^{it}.$$

Ha $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor minden $r \geq r_0$ valós számra

$$\left\| \int_{\gamma_r} f(z)e^{-\lambda \overline{w} z}\, dz \right\| \leq \pi \left(\sup_{z \in Im(\gamma_r)} \|f(z)\| \right) |e^{-\lambda \overline{w} \mathfrak{a}}| \left(\frac{1 - e^{-\lambda r}}{\lambda} \right)$$

teljesül. Speciálisan, ha

$$\lim_{r \to +\infty} \left(\sup_{z \in Im(\gamma_r)} \|f(z)\| \right) = 0,$$

akkor minden $\mathbb{R}^+ \ni \lambda$-ra

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{-\lambda \overline{w} z}\, dz = 0.$$

(**Megjegyzés**. Az eredeti Jordan-lemmában az $\mathfrak{a} := 0$, $w := i$, $\alpha := \pi/2$ speciális esetről van szó, tehát ekkor $Sect(0, i, \pi/2) = \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Re}(z) \geq 0\}$ a zárt felső félsík $\mathbb{C}$-ben. Ebben a speciális esetben az f-re vonatkozó feltevések mellett minden $r \geq r_0$ valós számra és $\mathbb{R}^+ \ni \lambda$-ra

$$\left\| \int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z} dz \right\| \leq \pi \left(\sup_{z \in Im(\gamma_r)} \|f(z)\| \right) \left(\frac{1 - e^{-\lambda r}}{\lambda} \right) \leq \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) \left(\sup_{z \in Im(\gamma_r)} \|f(z)\| \right)$$

teljesül.)

(*Útmutatás*. Legyen $r \geq r_0$ valós szám és $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{-\lambda \overline{w} z} dz = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\mathfrak{a} + rwe^{it}) rwie^{it} e^{-\lambda \overline{w}(\mathfrak{a} + rwe^{it})} dt =$$

$$= rwie^{-\lambda \overline{w} \mathfrak{a}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\mathfrak{a} + rwe^{it}) e^{it} e^{-\lambda r e^{it}} dt.$$

Ebből következik, hogy

$$\left\| \int_{\gamma_r} f(z)e^{-\lambda \overline{w} z}\, dz \right\| \leq r|e^{-\lambda \overline{w} \mathfrak{a}}| \int_{-\alpha}^{\alpha} \|f(\mathfrak{a} + rwe^{it})\| e^{-\lambda r \cos(t)} dt \leq$$

$$\leq r \left(\sup_{z \in Im(\gamma_r)} \|f(z)\| \right) |e^{-\lambda \overline{w} \mathfrak{a}}| | \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\lambda r \cos(t)} dt.$$

Ezért elég azt megmutatni, hogy

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\lambda r \cos(t)} dt \leq \pi \left(\frac{1 - e^{-\lambda r}}{\lambda r} \right),$$

ami könnyen megkapható, ha figyelembe vesszük, hogy $t \in [0, \pi/2]$ esetén $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$, tehát

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\lambda r \cos(t)} dt = 2 \int_{0}^{\alpha} e^{-\lambda r \cos(t)} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\pi/2} e^{-\lambda r \sin(t)} dt \leq$$

$$\leq 2 \int_{0}^{\pi/2} e^{-\lambda r \left(\frac{2}{\pi} t\right)} dt = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1-e^{-\lambda r}}{\lambda r}\right)$$

teljesül.)

11. (*A reziduum-tétel alkalmazása racionális törtfüggvények integrálására I.*) Legyen F komplex Banach-tér, $P : \mathbb{C} \to F$ polinomiális vektorfüggvény, és $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomiális függvény. Ha Q-nak nincs valós gyöke és $deg(Q) \geq deg(P) + 2$, akkor a P/Q függvény $\mathbb{R}$-re vett leszűkítése integrálható a Lebesue-mérték szerint és

$$\int_{\mathbb{R}} (P(x)/Q(x))\, dx = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a} \in \mathbb{C};\ Q(\mathfrak{a})=0,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})>0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) =$$

$$= -2\pi i \sum_{\mathfrak{a} \in \mathbb{C};\ Q(\mathfrak{a})=0,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})<0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q).$$

Ennek, és a **6**. gyakorlat alkalmazásával igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a}.$$

(*Útmutatás.* Legyen $N_Q^+ := \{z \in \mathbb{C} | (Q(z) = 0) \wedge (\mathfrak{Im}(z) > 0)\}$ és $N_Q^- := \{z \in \mathbb{C} | (Q(z) = 0) \wedge (\mathfrak{Im}(z) < 0)\}$. A Q-nak nincs valós gyöke, ezért $N_Q^+ \cup N_Q^-$ egyenlő a Q gyökeinek halmazával. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $N_Q^+ \cup N_Q^- \subseteq B_r(0; \mathbb{C})$, és értelmezzük a

$$\Gamma_r^{\pm} : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} r(4t-1) & ; \text{ha } t \in [0, 1/2], \\ re^{\pm i\pi(2t-1)} & ; \text{ha } t \in]1/2, 1] \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor Γ_r^+ és Γ_r^- olyan zárt, szakaszonként C^1-osztályú ívek, amelyek a P/Q függvény definíciós tartományában haladnak, továbbá az $U^+ := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) > \max_{\mathfrak{a} \in N_Q^+} \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})$ és $U^- := \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) < \min_{\mathfrak{a} \in N_Q^+} \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})$ halmazok olyan nyílt konvex (tehát egyszeresen összefüggő) halmazok, hogy

$$Im(\Gamma_r^{\pm}) \subseteq U^{\pm} \setminus N_Q^{\pm} \subseteq Dom(P/Q).$$

Ezért a reziduum-tétel alkalmazható a P/Q meromorf függvényre és a $\Gamma_r^{\pm}$ ívekre:

$$\int\limits_{\Gamma_r^{\pm}} \frac{P}{Q} = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q^{\pm}} Ind_{\Gamma_r^{\pm}}(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) = \pm 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q^{\pm}} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q),$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $\mathfrak{a} \in N_Q^{\pm}$ esetén $Ind_{\Gamma_r^{\pm}}(\mathfrak{a}) = \pm 1$, mert létezik olyan ($\mathfrak{a}$-tól függő) $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy a $\Gamma_r^{\pm}$ ív kontúrhomotóp a $\gamma_{\mathfrak{a},\rho,1,\pm 1}$ körívvel az $\dfrac{1}{id_{\mathbb{C}} - \mathfrak{a}}$ függvény definíciós tartományában. Továbbá, könnyen látható, hogy

$$\int\limits_{\Gamma_r^{\pm}} \frac{P}{Q} = \int\limits_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int\limits_{\gamma_r^{\pm}} \frac{P}{Q},$$

ahol bevezettük a $\gamma_r^{\pm} : [0,1] \to \mathbb{C};\ t \mapsto re^{\pm i\pi t}$ félkörív-függvényeket. Ez azt jelenti, hogy ha $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, amelyre $N_Q^+ \cup N_Q^- \subseteq B_r(0;\mathbb{C})$, akkor

$$\int\limits_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\int\limits_{\gamma_r^{\pm}} \frac{P}{Q} \pm 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q^{\pm}} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q).$$

A $deg(Q) \geq 2$ feltétel alapján létezik olyan $Q_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomiális függvény, hogy $Q = id_{\mathbb{C}}^2 Q_0$, és ekkor $deg(P) + 2 \leq deg(Q)$ miatt $deg(P) \leq deg(Q_0)$. Ebből látható, hogy ha $r_0 \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $N_Q^+ \cup N_Q^- \subseteq B_{r_0}(0;\mathbb{C})$, akkor P/Q_0 korlátos a $\mathbb{C} \setminus B_{r_0}(0;\mathbb{C})$ halmazon, tehát minden $r \geq r_0$ valós számra

$$\sup_{z\in Im(\gamma_r^{\pm})} \left\| \frac{P(z)}{Q(z)} \right\| = \frac{1}{r^2} \left\| \frac{P(z)}{Q_0(z)} \right\| \leq \frac{1}{r^2} \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus B_{r_0}(0;\mathbb{C})} \left\| \frac{P(z)}{Q_0(z)} \right\|,$$

vagyis fennáll a

$$\lim_{r\to+\infty} \left(\sup_{z\in Im(\gamma_r^{\pm})} \left\| \frac{P(z)}{Q(z)} \right\| \right) = 0$$

egyenlőség. Ezért a P/Q függvényre alkalmazható a Jordan lemma (**10**. gyakorlat), tehát $\lim\limits_{r\to+\infty} \int\limits_{\gamma_r^{\pm}} \dfrac{P}{Q} = 0$.)

12. (*A reziduum-tétel alkalmazása racionális törtfüggvények integrálására II.*) Legyen F komplex Banach-tér, $P : \mathbb{C} \to F$ polinomiális vektorfüggvény, és $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomiális függvény. Tegyük fel, hogy $deg(P) + 1 \leq deg(Q)$ és a Q minden valós gyöke egyszeres multiplicitású. Minden $\varepsilon, r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $K_{\varepsilon,r}$ azon $x \in \mathbb{R}$ pontok halmaza, amelyekre $|x| \leq r$ és a Q minden $\mathfrak{a}$ valós gyökére

$|x - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon$. Ha N_Q jelöli a Q gyökeinek halmazát, akkor fennállnak a

$$\lim_{(\varepsilon,r)\to(0,+\infty)} \int_{K_{\varepsilon,r}} (P(x)/Q(x))\, dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})>0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) + \pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})=0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) + \pi i Res_{\infty}(P/Q) =$$

$$-2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})<0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) - \pi i \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})=0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) - \pi i Res_{\infty}(P/Q) =$$

$$= \pi i \left(\sum_{\mathfrak{a}\in N_Q,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})>0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) - \sum_{\mathfrak{a}\in N_Q,\ \mathfrak{Im}(\mathfrak{a})<0} Res_{\mathfrak{a}}(P/Q) \right)$$

egyenlőségek.

13. Legyen F komplex Banach-tér. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to F$ függvénynek létezik olyan $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holmorf kiterjesztése és létezik olyan $A \subseteq \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ véges halmaz, hogy $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) \geq 0\} \setminus A \subseteq Dom(\tilde{f})$, és $\tilde{f}$-nak az A egyetlen pontjában sincs lényeges szingularitása, valamint

$$\lim_{r\to+\infty} \left(\sup_{t\in[-\pi/2,\pi/2]} \|\tilde{f}(re^{it})\| \right) = 0.$$

Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a}\in A} Res_{\mathfrak{a}}(\tilde{f}.e^{i\lambda id_{\mathbb{C}}}).$$

Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(ax)}{b^2 + x^2} dx = \pi i Res_{ib} \left(\frac{e^{iaid_{\mathbb{C}}}}{b^2 + id_{\mathbb{C}}^2} \right) = \frac{\pi e^{-ab}}{2b},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(ax)}{b^2 + x^2} dx = \pi Res_{ib} \left(\frac{e^{iaid_{\mathbb{C}}} id_{\mathbb{C}}}{b^2 + id_{\mathbb{C}}^2} \right) = \frac{\pi e^{-ab}}{2},$$

(*Útmutatás.* Az A halmaz korlátos $\mathbb{C}$-ben, ezért van olyan $r_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $A \subseteq B_{r_0}(0;\mathbb{C})$. Ekkor $\{z \in \mathbb{C} | \frac{Im}{(} z) \geq 0\} \setminus B_{r_0}(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(\tilde{f})$, tehát a Jordan-lemmát (**10**. gyakorlat) alkalmazva az *toldef* függvényre és a $Sect(0, i, \pi/2)$ szektorra kapjuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)e^{i\lambda z} dz = 0,$$

ahol γ_r jelöli a $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$; $t \mapsto re^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$ félkörív-függvényt. Legyen $r \geq r_0$ rögzített valós szám, és értelmezzük a

$$\Gamma_r : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} (4t-1)r & ; \text{ha } t \in [0, 1/2[, \\ re^{i\pi(2t-1)} & ; \text{ha } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

függvényt. Ekkor Γ_r olyan zárt. szakaszonként C^1-osztályú ív, hogy $Im(\Gamma_r) \subseteq Dom(\tilde{f}) \setminus A$. Létezik továbbá olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő (sőt konvex) nyílt halmaz, hogy $Im(\Gamma_r) \subseteq U \setminus A \subseteq Dom(\tilde{f}) \setminus A$. Ezért a reziduum-tétel alapján minden $\mathbb{R}^+ \ni \lambda$-ra

$$\int_{\Gamma_r} \tilde{f}(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a} \in A} Ind_{\Gamma_r}(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(\tilde{f}e^{i\lambda id_{\mathbb{C}}}).$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\int_{\Gamma_r} \tilde{f}(z)e^{i\lambda z}dz = \int_{-r}^{r} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)e^{i\lambda z}dz,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\int_{-r}^{r} f(x)e^{i\lambda x}dx = -\int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)e^{i\lambda z}dz + 2\pi i \sum_{\mathfrak{a} \in A} Ind_{\Gamma_r}(\mathfrak{a}) Res_{\mathfrak{a}}(\tilde{f}e^{i\lambda id_{\mathbb{C}}}).$$

Az itt szereplő összeg r-től független, mert minden $A \ni \mathfrak{a}$-ra $Ind_{\Gamma_r}(\mathfrak{a}) = 1$, és a Jordan-lemma (**10**. gyakorlat) szerint $\lim\limits_{r \to +\infty} \int\limits_{\gamma_r} \tilde{f}(z)e^{i\lambda z}dz = 0$, ezért létezik a

$\lim\limits_{r \to +\infty} \int\limits_{-r}^{r} f(x)e^{i\lambda x}dx$ határérték, és teljesül a bizonyítandó egyenlőség.)

14. Legyen F komplex Banach-tér. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to F$ függvénynek létezik olyan $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf kiterjesztése és létezik olyan $A \subseteq \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ véges halmaz, hogy $\{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) \geq 0\} \setminus A \subseteq Dom(\tilde{f})$, és $\tilde{f}$-nak az A minden pontjában pólusa van, továbbá léteznek olyan $C, R, \alpha \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $Dom(\tilde{f}) \ni z$-re

$$\|\tilde{f}(z)\| \leq \frac{C}{|z|^\alpha}$$

teljesül, ha $|z| \geq R$ és $\mathfrak{Im}(z) \geq 0$. Ekkor f folytonos és

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a} \in A} Res_{\mathfrak{a}}(\tilde{f}).$$

Ennek alkalmazásával mutassuk meg, hogy minden $n \geq 2$ természetes számra

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{\pi}{4^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-2} \binom{n+k}{n-k}.$$

(*Útmutatás.* Legyen $r_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $A \subseteq B_{r_0}(0;\mathbb{C})$, és rögzítsünk egy $r > \max(R, r_0)$ valós számot. Tekintsük a

$$\gamma_r : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} (4t-1)r & ; \text{ha } t \in [0, 1/2[, \\ re^{i\pi(2t-1)} & ; \text{ha } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

függvény, ami zárt, szakaszonként C^1-osztályú ív. Könnyen belátható olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz létezése, amelyre $A \cup Im(\gamma_r) \subseteq U$ és $U \setminus A \subseteq Dom(\tilde{f})$. Ezért a reziduum-tétel alapján

$$\int_{\gamma_r} \tilde{f} = 2\pi i \sum_{\mathfrak{a} \in A} Res_{\mathfrak{a}}(\tilde{f}),$$

ugyanakkor könnyen látható, hogy

$$\int_{\gamma_r} \tilde{f} = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \pi i r \int_0^1 \tilde{f}(re^{\pi i t})e^{\pi i t}dt.$$

Az $\tilde{f}$ függény tulajdonságai alapján

$$\left\| r \int_0^1 \tilde{f}(re^{\pi i t})e^{\pi i t}dt \right\| \leq r \int_0^1 \|\tilde{f}(re^{\pi i t})\|dt \leq r \int_0^1 \frac{C}{r^\alpha}dt = \frac{C}{r^{\alpha+1}},$$

tehát $\alpha > 1$ miatt $\lim\limits_{r\to+\infty} \left(r \int_0^1 \tilde{f}(re^{\pi i t})e^{\pi i t}dt \right) = 0.$)

XII. A FUNKCIONÁLANALÍZIS ELEMEI

A *funkcionálanalízis* (a legelemibb szinten) a normált terek között ható lineáris operátorok elmélete. Ennek az elméletnek bizonyos részeivel korábban foglalkoztunk. A VI. fejezetben érintettünk néhány alapfogalmat normált terek között ható *folytonos* lineáris és multilineáris operátorokkal kapcsolatban. Szó volt az *operátornormáról*, a *Neumann-sorokról*, normált tér *topologikus duálisáról* és *biduálisáról*, valamint a funkcionálanalízis egyik legfontosabb tételéről: a *Hahn-Banach-tételről.* Ezekre már a differenciál- és integrálelmélet kellően általános szintű tárgyalásához is szükség volt, amit a VII., VIII. és IX. fejezetben láthattunk.

Az első pontban a normált téren értelmezett folytonos lineáris operátorok *spektrumával* és *rezolvens függvényével* foglalkozunk. A kvantummechanikában egy valós értékű fizikai mennyiség adekvát matematikai modellje bizonyos feltételeknek eleget tevő lineáris operátor (*önadjungált operátor Hilbert-térben*), amelynek spektruma modellezi a szóbanforgó fizikai mennyiség lehetséges értékeinek halmazát. Az operátorok spektruma sok esetben szétvágható két olyan részre, amelyek közül az egyik diszkrét halmaz (vagyis minden pontja izolált), míg a másik intervallum (azaz "folytonos" halmaz). Ez tükrözi azt a megfigyelt jelenséget, hogy bizonyos valós kvantummechanikai mennyiségek értékhalmaza diszkrét és folytonos részt egyaránt tartalmazhat; például egy kölcsönható proton-elektron rendszerben az elektron energiája ilyen tulajdonságú fizikai mennyiség. Másfelől, a spektrum fogalma teljesen klasszikus feladatok megoldása szempontjából is lényeges. A klasszikus fizika számos problémája vezet ún. *sajátérték-feladatok* megoldásához; például a deformálható testek mechanikájában, vagy a klasszikus mechanikai- és elektromágneses hullámjelenségek területén találkozunk ilyen problémákkal. Ilyenkor rendszerint bizonyos integrál- vagy differenciáloperátorok spektrumának meghatározására van szükség. A gyakorlatok között bemutatjuk a *Fredholm-* és *Volterra-típusú integráloperátorokat*, és az ezekkel kapcsolatos sajátérték-probléma megoldását. Látjuk majd, hogy ebben döntő jelentőségű lesz a *teljesen folytonos* lineáris operátorok spektrális tulajdonságainak ismerete.

Itt hangsúlyozzuk, hogy az alkalmazások megkövetelik a *nem folytonos* lineáris operátorok spektrálelméletének kidolgozását is. Az első pontban csak a folytonos lineáris operátorok spektrális tulajdonságaival foglalkozunk.

Ezután a funkcionálanalízis négy, alapvetően fontos tételét tárgyaljuk: *Banach egyenletes korlátosság tételét*, a *Banach-Steinhaus-tételt*, *Banach nyíltleképezés tételét*, és a *zártgráf-tételt.* Ezek alapjául két olyan nemtriviális állítás szolgál, amelyek tisztán metrikus terekre vonatkoznak; az egyik a *Baire-féle kategóriatétel*, a másik pedig egy olyan állítás, amely mertikus terek között ható folytonos függvények egy speciális tulajdonságáról szól. A Baire-féle kategóriatételnek egészen meghökkentő következményei vannak a metrikus terek elméletében is, a funkcionálanalízistől függetlenül. Ezt jól szemléltetik a második ponthoz tartozó gyakorlatok. A harmadik pontban bizonyított Banach-féle egyenletes korlátosság tételt és a Banach-Steinhaus-tételt nagyon gyakran alkalmazzuk a funkcionálanalízis állításainak bizonyításában, de érdekes alkalmazásai vannak a klasszikus analízisben is, amint azt a gyakorlatok is mutatják. Például a korlátos numerikus sorozatok tere felett *általánosított határték-fogalmakat* lehet bevezetni, a Banach-Steinhaus-tétel felhasználásával. A Banach-féle nyíltleképezés-tételnek legfontosabb következménye az, hogy Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció automatikusan homeomorfizmus, tehát az inverze folytonos. Ennek alkalmazásával a funkcionálanalízis jó néhány tételének a feltétel-rendszere egyszerűsíthető. Másfelől, a zártgráf-tétel szinte triviálisan következik Banach nyíltleképezés-tételéből, és sok lineáris operátor folytonossága könnyen bizonyítható a zártgráf-tétel alkalmazásával.

Az ötödik pontban vezetjük be a *prehilbert-terek* és a *Hilbert-terek* fogalmát. Látni fogjuk, hogy ezek annyiban speciális normált terek (illetve Banach-terek), amennyiben a normájuk eleget tesz az elemi síkgeometriából jól ismert *paralelogramma-egyenlőségnek*. Kiderül, hogy ezek a normák éppen azok, amelyek *skalárszorzásból* származtathatók. Prehilbert-terek esetében bevezethető a vektortok merőlegességének (*ortogonalitásának*) fogalma, és valós prehilbert-térben értelmezhető a nem nulla vektorok által bezárt *szög*. Rámutatunk a prehilbert-terek teljes és konvex részhalmazainak egy speciális tulajdonságára, amelyből le tudjuk vezetni a Hilbert-terek elemi elméletének két legfontosabb tételét: a *Riesz-féle felbontási tételt* és a *Riesz-féle reprezentációs tételt*. Az utóbbi nagyon erős egzisztencia-tétel, ezért igen fontos alkalmazásai vannak a végtelen dimenziós lineáris egyenletek megoldásában.

Prehilbert-terekben lehetséges *ortogonális sorozatokat* és *ortogonális sorokat* értelmezni. Ezek általános tulajdonságaival foglalkozunk a hatodik pontban, különös hangsúllyal az ortogonális sorok konvergenciájára. A *klasszikus Fourier-sorok*, illetve az *ortogonális polinomok szerinti sorfejtések* speciális esetei az *absztrakt Fourier-soroknak*. A klasszikus ortogonális polinomok előállítása szempontjából fontos a *Gram-Schmidt-ortogonalizáció*. Értelmezzük és jellemezzük az *ortogonális bázissorozatokat*, és megmutatjuk, hogy az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozattér a $\|\cdot\|_2$ normával ellátva lényegében az egyetlen végtelen dimenziós *szeparábilis* Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett. A gyakorlatok között megvizsgáljuk a klasszikus egyváltozós Fourier-sorok *pontonkénti konvergenciájának* problémáját, és bebizonyítjuk a *Fourier-transzformációval* kapcsolatos legfontosabb állítást: a *Plancherel-tételt*.

A hetedik pontban a Riesz-féle reprezentációs tétel alkalmazásával értelmezzük a Hilbert-terek között ható folytonos lineáris operátorok *adjungáltját*, és megvizsgáljuk az adjungálás nevezetes tulajdonságait. Az adjungálás segítségével speciális operátor-típusokat értelmezhetünk; ezek között a legfontosabbak az *önadjungált*, a *normális* és az *unitér* operátorok. Megmutatjuk, hogy folytonos önadjungált operátor spektruma része a valós számok halmazának, és a maradékspektruma üres.

Befejezéképpen megvizsgálunk néhány általános problémát a Hilbert-terek nem folytonos lineáris operátorainak elméletéből. Bevezetjük a sűrűn értelmezett lineáris operátorok adjungáltjának, és ezzel együtt a nem folytonos lineáris operátorok önadjungáltságának fogalmát. Bebizonyítjuk, hogy egy Hilbert-térben sűrűn értelmezett önadjungált operátor pontosan akkor folytonos, ha mindenütt értelmezett. Megmutatjuk továbbá, hogy a kvantummechanika jól ismert *Heisenberg-féle felcserélései relációjának* kielégíthetőségével kapcsolatban milyen problémák jelentkeznek, és hogy e problémák megoldhatósága szempontjából miért fontos nem folytonos önadjungált operátorokkal foglalkozni. A nem folytonos operátorok elméletéből néhány egyszerűbb tétel megtalálható a gyakorlatok anyagában, de a mélyebb eredmények származtatásához nélkülözhetetlen a metrikus terek elméletének és az funkcionálanalízisnek továbbfejlesztése.

A funkcionálanalízis magasabb szintű megértéséhez feltétlenül szükséges az *általános topológia*, valamint a *topologikus vektorterek* elméletének bizonyos mélységű ismerete. A függelékben megtalálhatók azok a legelemibb fogalmak és tények az általános topológiából, amelyeket ismerni kell. A későbbi XIV. és XV. fejezetek tartalmazzák a topologikus vektorterekkel kapcsolatos minimális tudnivalókat. A felsőbb szintű funkcionálanalízis bizonyos eredményeit a *normált algebrákat*, illetve a *harmonikus analízis* elemeit bemutató XVI. és XVII. fejezetben tárgyaljuk.

Irodalomjegyzék

1. L. Schwartz, *Analyse mathématique*, Hermann, Paris, 1967.

2. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Co., New-York, 1973.

3. Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

4. Riesz F.-Szőkefalvi-Nagy B., *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

5. Kato T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Sprinder-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.

6. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan Company., New-York, 1966.

7. Г. Е. Шилов, *Математический анализ, Функции одного переменного*, Наука, Москва, 1970.

8. Л. В. Канторович- Г. П. Акилов, *Функциональнй анализ*, Наука, Москва, 1977.

9. А. Н. Колмогоров- С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа,*, Наука, Москва, 1974.

10. Н. И. Ахийезер- И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, изд. "Вища щкола" ХГУ, Харьков, 1977.

1. Folytonos lineáris operátor spektruma

Definíció. Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett és $u \in \mathscr{L}(E)$. Ekkor

$$Sp(u) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda.id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)\},$$

továbbá ezt a halmazt az u operátor *spektrumának*, a $\mathbb{K} \setminus Sp(u)$ halmazt az u operátor *rezolvens halmazának*, és a

$$\mathbb{K} \setminus Sp(u) \to \mathbf{GL}(E); \quad \lambda \mapsto R(u, \lambda) := (\lambda.id_E - u)^{-1}$$

leképezést az u operátor *rezolvens függvényének* nevezzük.

Lemma. Legyen E Banach-tér, F normált tér, és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ injektív operátor. Ha az $u^{-1} : Im(u) \to F$ operátor folytonos, akkor $Im(u)$ zárt lineáris altér F-ben.

Bizonyítás. Az $u^{-1} : Im(u) \to F$ operátor folytonossága miatt létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in Im(u)$ esetén $\|u^{-1}(y)\| \leq C\|y\|$, tehát minden $E \ni x$-re $\|x\| \leq C\|u(x)\|$. Legyen $y \in \overline{Im(u)}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $Im(u)$-ban, hogy $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Egyértelműen létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat E-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $u(x_n) = y_n$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re $\|x_m - x_n\| \leq C\|u(x_m - x_n)\| = C\|y_m - y_n\|$, ezért $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben. Az E teljessége folytán létezik olyan $x \in E$, hogy $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, tehát az u folytonossága és az átviteli elv alapján $u(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. Ezért $y \in Im(u)$, ami azt jelenti, hogy $Im(u)$ zárt lineáris altér F-ben. ■

Állítás. Ha E Banach-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$, akkor $u \in \mathbf{GL}(E)$ ekvivalens azzal, hogy u injektív, $Im(u)$ sűrű F-ben, és u^{-1} folytonos.

Bizonyítás. Azt kell igazolni, hogy ha u injektív, $Im(u)$ sűrű F-ben, és u^{-1} folytonos, akkor $Im(u) = E$. Ez viszont az előző lemma alapján nyilvánvaló, mert $Im(u)$ zárt és sűrű F-ben. ■

Definíció. Legyen E normált tér és $\mathscr{L}(E)$.
- Az u operátor *pontspektrumának* nevezzük az

$$Sp_s(u) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda.id_E - u \text{ nem injektív}\}$$

halmazt. Az $Sp_s(u)$ halmaz elemeit az u *sajátértékeinek* nevezzük.
- Az u operátor *folytonos spektrumának* nevezzük az

$$Sp_c(u) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda.id_E - u \text{ injektív és } \overline{Im(\lambda.id_E - u)} = E \text{ és } (\lambda.id_E - u)^{-1} \text{ nem folytonos}\}$$

halmazt.

- Az u operátor *maradékspektrumának* nevezzük az

$$Sp_r(u) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda.id_E - u \text{ injektív és } \overline{Im(\lambda.id_E - u)} = E\}$$

halmazt.

Állítás. Legyen E normált tér és $u \in \mathscr{L}(E)$. Ekkor

$$Sp_s(u) \cup Sp_c(u) \cup Sp_r(u) \subseteq Sp(u),$$

és a bal oldalon álló halmazok páronként diszjunktak. Ha E Banach-tér, akkor

$$Sp_s(u) \cup Sp_c(u) \cup Sp_r(u) = Sp(u).$$

Ha E véges dimenziós, akkor $Sp(u) = Sp_s(u)$, tehát $Sp_c(u) = Sp_r(u) = \emptyset$ és $Sp(u)$ véges halmaz.

Bizonyítás. Ha $\lambda \in Sp_s(u)$, akkor $\lambda id_E - u$ nem injektív, így $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$. Ha $\lambda \in Sp_c(u)$, akkor a $\lambda id_E - u$ operátor injektív, de az inverze nem folytonos, így $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$. Ha $\lambda \in Sp_r(u)$, akkor a $\lambda id_E - u$ operátor injektív, de nem szürjektív (sőt az értékkészlete még csak nem is sűrű), ezért $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$. Tehát $\lambda \in Sp_s(u) \cup Sp_c(u) \cup Sp_r(u)$ esetén $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$, vagyis $\lambda \in Sp(u)$. A definícióból látható, hogy az $Sp_s(u)$, $Sp_c(u)$ és $Sp_r(u)$ halmazok páronként diszjunktak.

Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus (Sp_s(u) \cup Sp_c(u) \cup Sp_r(u))$ teljesül, akkor $\lambda \notin Sp_s(u)$ miatt $\lambda id_E - u$ *injektív*, és $\lambda \notin Sp_r(u)$ miatt $Im(\lambda id_E - u)$ *sűrű* lineáris altere E-nek, valamint $\lambda \notin Sp_c(u)$ miatt $(\lambda id_E - u)^{-1}$ *folytonos*. Tehát ha E Banach-tér, akkor az előző állítás alapján $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, vagyis $\lambda \notin Sp(u)$, ami azt jelenti, hogy ekkor $Sp(u) \subseteq Sp_s(u) \cup Sp_c(u) \cup Sp_r(u) = Sp(u)$.

Ha E véges dimenziós, akkor $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda id_E - u$ nem injektív, azaz $\lambda \in Sp_s(u)$. Továbbá ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a $\lambda id_E - u$ operátor pontosan akkor nem injektív, ha $\det(\lambda id_E - u) = 0$. Ez azt jelenti, hogy az u operátor sajátértékei megegyeznek a $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$; $\lambda \mapsto \det(\lambda id_E - u)$ polinomiális függvény gyökeivel, és ennek a függvénynek a gyökhalmaza legfeljebb $dim(E)$ számosságú, így $Sp_s(u)$ véges halmaz. ■

Végtelen dimenziós Banach-tér felett létezhet olyan u folytonos lineáris operátor, hogy az $Sp_s(u) = \emptyset$, $Sp_c(u) = \emptyset$ és $Sp_r(u) = \emptyset$ egyenlőségek bármelyike teljesül, sőt ezek közül bármely kettő is teljesíthető. Még véges dimenziós *valós* Banach-tér esetében is előfordulhat az, hogy $Sp(u) = \emptyset$ (**2.** gyakorlat). Azonban *véges dimenziós komplex* E normált tér esetében, ha $E \neq \{0\}$, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E)$ operátorra az algebra alaptétele szerint $Sp(u) \neq \emptyset$. Később látni fogjuk, hogy ez az állítás végtelen dimenziós komplex normált terek folytonos lineáris operátoraira is igaz.

Definíció. Ha E normált tér, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E)$ esetén

$$\rho(u) := \inf_{n \in \mathbb{N}^+} \|u^n\|^{1/n},$$

és a $\rho(u)$ számot az u operátor *spektrálsugarának* nevezzük. Ha E normált tér, akkor az $u \in \mathscr{L}(E)$ operátort *kvázinilpotensnek* nevezzük, ha $\rho(u) = 0$.

Ha E normált tér és $u \in \mathscr{L}(E)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|u^n\| \leq \|u\|^n$, következésképpen $\rho(u) \leq \|u\|$. Azonban itt általában nincs egyenlőség; például, ha $u := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$, akkor $u^2 = 0$, ezért $\rho(u) = 0$, ugyanakkor $u \neq 0$ miatt $\|u\| > 0$ bármely $\mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ feletti normára.

Az is könnyen látható, hogy ha E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $u \in \mathscr{L}(E)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\rho(\lambda u) = |\lambda|\rho(u)$, hiszen

$$\rho(\lambda.u) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|(\lambda.u)^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(|\lambda|\|u^n\|^{1/n}\right) = |\lambda| \inf_{n\in\mathbb{N}} \|u^n\|^{1/n} = |\lambda|\rho(u).$$

Állítás. Ha E normált tér és $u \in \mathscr{L}(E)$, akkor az $(\|u^n\|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és

$$\rho(u) = \lim_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n}.$$

Bizonyítás. Ha létezik olyan $m \in \mathbb{N}^+$, hogy $u^m = 0$, akkor minden $n \geq m$ természetes számra $u^n = u^{n-m} \circ u^m = 0$, tehát $\rho(u) = 0$ és természetes az $(\|u^n\|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat 0-hoz konvergál, vagyis az állítás igaz. Ezért feltehető, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $u^n \neq 0$, vagyis $\|u^n\| > 0$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_n := \|u^n\|$; ekkor $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ olyan sorozat $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_{m+n} \leq c_m c_n$. Ezért a II. fejezet, 3. pont, **10**. gyakorlat eredménye alapján a $(c_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és $\lim_{n\to\infty} c_n^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}^+} c_n^{1/n}$. ■

Az előző állításból következik, hogy ha E normált tér és $m \in \mathbb{N}^+$, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E)$ esetén $\rho(u^m) = \rho(u)^m$, hiszen

$$\begin{aligned}\rho(u^m) = \lim_{n\to\infty} \|(u^m)^n\|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\|(u^{mn}\|^{1/(mn)}\right)^m = \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \|(u^{mn}\|^{1/(mn)}\right)^m = \rho(u)^m.\end{aligned}$$

A spektrálsugár legfontosabb tulajdonságát fogalmazza meg a következő állítás.

Állítás. Legyen E normált tér és $u \in \mathscr{L}(E)$. Ha $\rho(u) < 1$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u^k$ operátorsor abszolút konvergens az $\mathscr{L}(E)$ feletti operátornorma szerint, és ha E Banach-tér, akkor $id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k = (id_E - u)^{-1}.$$

Bizonyítás. Legyen $r \in]\rho(u), 1[$ rögzített valós szám. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $k>n$ természetes számra $\|u^k\|^{1/k}<r$, vagyis $\|u^k\|<r^k$. Az $r \in]0, 1[$ feltétel

miatt, a majoráns kritérium alapján a $\sum_{k\in\mathbb{N}} u^k$ operátorsor abszolút konvergens az $\mathscr{L}(E)$ feletti operátornorma szerint. Ha E Banach-tér, akkor képezhető a $\sum_{k=0}^{\infty} u^k$ operátorsor-összeg. Ezután a bizonyítást ugyanúgy lehet befejezni, mint a VI. fejezet 1. pontjában megfogalmazott analóg állítás esetében. ■

Tétel. Legyen E Banach-tér $\mathbb{K}$-felett és $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| > \rho(u)$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{u^k}{\lambda^k}$ operátorsor abszolút konvergens az $\mathscr{L}(E)$ feletti operátornorma szerint, és $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, valamint $R(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{\lambda^k}$.

b) Az $Sp(u)$ halmaz kompakt $\mathbb{K}$-ban és $Sp(u) \subseteq \overline{B}_{\rho(u)}(0;\mathbb{K})$.

c) Az $R(u,\cdot) : \mathbb{K} \setminus Sp(u) \to \mathscr{L}(E)$ rezolvens-függvény $\mathbb{K}$-analitikus és végtelenben eltűnő, vagyis minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $C \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz, hogy $\mathbb{K} \setminus C \subseteq Dom(R(u,\cdot))$ és minden $\mathbb{K} \setminus C \ni \lambda$-ra $\|R(u,\lambda)\| < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $\lambda\in\mathbb{K}$ és $|\lambda|>\rho(u)$. Ekkor a $\lambda^{-1}u\in\mathscr{L}(E)$ operátorra $\rho(\lambda^{-1}u) = |\lambda|^{-1}\rho(u)<1$, tehát az előző állításból kapjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{u^k}{\lambda^k}$ operátorsor abszolút konvergens az $\mathscr{L}(E)$ feletti operátornorma szerint, és $\lambda id_E - u = \lambda(id_E - \lambda^{-1}u) \in \mathbf{GL}(E)$, valamint

$$R(u,\lambda) := (\lambda id_E - u)^{-1} = \lambda^{-1}(id_E - \lambda^{-1}u)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{\lambda^k}.$$

Ebből következik a), és látható, hogy $\mathbb{K} \setminus \overline{B}_{\rho(u)}(0;\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus Sp(u)$, tehát $Sp(u) \subseteq \overline{B}_{\rho(u)}(0;\mathbb{K})$, így $Sp(u)$ korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban.

Az $Sp(u)$ kompaktságához elegendő azt igazolni, hogy $Sp(u)$ zárt, vagyis $\mathbb{K} \setminus Sp(u)$ nyílt $\mathbb{K}$-ban. Ehhez legyen $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus Sp(u)$ rögzített pont, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre $r \leq \frac{1}{\|(\lambda_0 id_E - u)^{-1}\|}$. Ha $\lambda \in B_r(\lambda_0;\mathbb{K})$, akkor $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|(\lambda_0 id_E - u)^{-1}\|}$, ezért

$$\|(\lambda id_E - u) - (\lambda_0 id_E - u)\| = |\lambda - \lambda_0|\|id_E\| \leq |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 id_E - u)^{-1}\|},$$

így $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$. (Itt azt használtuk ki, hogy ha E Banach-tér és $v_0 \in \mathbf{GL}(E)$, továbbá $v \in \mathscr{L}(E)$ olyan, hogy $\|v - v_0\| < \frac{1}{\|v_0^{-1}\|}$, akkor $v \in \mathbf{GL}(E)$.) Tehát $B_r(\lambda_0;\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus Sp(u)$, így λ_0 belső pontja az u rezolvens-halmazának. Ezzel igazoltuk az $Sp(u)$ zártságát, tehát a b) állítást igazoltuk, ugyanakkor az is látható, hogy $\lambda \in B_r(\lambda_0;\mathbb{K})$ esetén $\| - (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 id_E - u)^{-1}\| < 1$, ezért

$$(\lambda id_E - u)^{-1} = ((\lambda - \lambda_0)id_E + (\lambda_0 id_E - u))^{-1} =$$

$$= (id_E - (-(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 id_E - u)^{-1}))^{-1}(\lambda_0 id_E - u)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \lambda_0)^k ((\lambda_0 id_E - u)^{-1})^k \right) (\lambda_0 id_E - u)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \lambda_0)^k ((\lambda_0 id_E - u)^{-1})^{k+1},$$

továbbá az itt álló operátorsor-összegek abszolút konvergens sorok összegei. Tehát $B_r(\lambda_0; \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus Sp(u)$, és az u rezolvens-függvénye ezen a halmazon egyenlő a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k (id_{\mathbb{K}} - \lambda_0)^k ((\lambda_0 id_E - u)^{-1})^{k+1}$$

hatványfüggvény-sor összegfüggvényével. Látjuk, hogy ez a hatványfuggvény-sor *abszolút konvergens* a $B_r(\lambda_0; \mathbb{K})$ gömbön, ezért az egyváltozós hatványfüggvény-sorokra vonatkozó Cauchy-Hadamard-tétel alapján (V. fejezet, 11. pont) a konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő r-nél. Ez azt jelenti, hogy az u rezolvens-függvénye $\mathbb{K}$-analitikus a λ_0 pontban. Ezért már csak azt kell iagzolni, hogy az u rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő.

Legyenek $r, R \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan számok, amelyekre $R > r > \rho(u)$, és legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $\|u^k\| < r^k$. Ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq R$ esetén az a) alapján

$$\|R(u, \lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|u^k\|}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\|u^k\|}{|\lambda|^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\|u^k\|}{|\lambda|^k} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\|u^k\|}{R^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} \right) = \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\|u^k\|}{R^k} + \left(\frac{r}{R}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{r}{R}} \right) \right).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$C(r, R) := \sum_{k=0}^{N} \frac{\|u^k\|}{R^k} + \left(\frac{r}{R}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{r}{R}} \right)$$

számra teljesül az, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K} \setminus B_R(0; \mathbb{K})$ esetén

$$\|R(u, \lambda)\| \leq \frac{C(r, R)}{|\lambda|}.$$

Ebből látható, hogy az u rezolvens-függvénye a végtelenben eltűnő, amivel a c) állítást is igazoltuk. ■

Lemma. Legyen E normált tér és $\widehat{E}$ az E teljes burka. Ha $u \in \mathscr{L}(E)$ és $\widehat{u}$ jelöli az u folytonos lineáris kiterjesztését $\widehat{E}$-re, akkor $Sp(\widehat{u}) \subseteq Sp(u)$.

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy $v \in \mathbf{GL}(E)$ esetén $\widehat{v} \in \mathbf{GL}(\widehat{E})$. Ez valóban így van, mert a $v \in \mathbf{GL}(E)$ feltétel miatt van olyan $w \in \mathbf{GL}(E)$, hogy $v \circ w = w \circ v = id_E$, ezért $\widehat{v} \circ \widehat{w} = \widehat{w} \circ \widehat{v} = id_{\widehat{E}}$, így $\widehat{v} \in \mathbf{GL}(\widehat{E})$. ■

Tétel. Ha E nem nulla dimenziós komplex normált tér, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E)$ esetén $Sp(u) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy E teljes. Tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{L}(E)$ operátor spektruma üres. Ekkor $Dom(u, \cdot) = \mathbb{C}$, vagyis $R(u, \cdot) : \mathbb{C} \to \mathscr{L}(E)$ holomorf függvény, és ez végtelenben eltűnő, így korlátos is. A Liouville-tétel alapján $R(u, \cdot)$ konstansfüggvény, és a végtelenben eltűnés miatt $R(u, \cdot)$ az azonosan 0 függvény. De $R(u, \cdot)$ értékei $\mathbf{GL}(E)$-ben vannak, ezért $0 \in \mathbf{GL}(E)$, amiből azonnal következik, hogy $E = \{0\}$. Tehát ha E nem nulla dimenziós, akkor minden $u \in \mathscr{L}(E)$ esetén $Sp(u) \neq \emptyset$.

Legyen most E tetszőleges nem nulla dimenziós komplex normált tér, és $\widehat{E}$ az E teljes burka. Ekkor $\widehat{E}$ nem nulla dimenziós komplex Banach-tér, tehát ha $u \in \mathscr{L}(E)$ és $\widehat{u}$ jelöli az u folytonos lineáris kiterjesztését, akkor az előző lemma szerint $\emptyset \neq Sp(\widehat{u}) \subseteq Sp(u)$. ∎

Azonban még *véges dimenziós* valós Banach-téren is létezhet olyan lineáris operátor, amelynek a spektruma üres (**2**. gyakorlat).

Tétel. Ha E komplex Banach-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$, akkor

$$\rho(u) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ \mid Sp(u) \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{C})\}$$

(*a spektrálsugár minimalitása*).

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $Sp(u) \subseteq \overline{B}_\rho(0; \mathbb{C})$, ezért azt kell megmutatni, hogy ha $r \in \mathbb{R}_+$ olyan, amelyre $Sp(u) \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{C})$, akkor $\rho(u) \leq r$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az $r \in \mathbb{R}_+$ számra $Sp(u) \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{C})$, de $r < \rho(u)$. Legyen $R \in]r, \rho(u)[$ rögzített szám, és tekintsük az

$$f : B_{1/R}(0; \mathbb{C}) \to \mathscr{L}(E); \quad \boldsymbol{z} \mapsto \begin{cases} R(u, z^{-1}) & ; \text{ha } z \neq 0, \\ 0 & ; \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvényt, ami jól értelmezett, mert ha $z \in \mathbb{C}$ és $0 < |z| < 1/R$, akkor $z^{-1} \in \mathbb{C} \setminus B_R(0; \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0; \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus Sp(u)$. Az f függvény a $B_{1/R}(0; \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ halmazon holomorf, mert ezen a halmazon két $\mathbb{C}$-differenciálható függvény kompozíciójaként állítható elő.

Ha $z \in \mathbb{C}$ és $0 < |z| < 1/\rho(u)$, akkor $|z^{-1}| > \rho(u)$, tehát a $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k u^k$ operátorsor abszolút konvergens az $\mathscr{L}(E)$ feletti operátornorma szerint, és $z^{-1} id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, valamint

$$f(z) := R(u, z^{-1}) = \left(z^{-1} id_E - u\right)^{-1} = z \sum_{k=0}^{\infty} z^k u^k.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum_{k \in \mathbb{N}} id_{\mathbb{C}}^{k+1} u^k$ hatványfüggvény-sor összegfüggvénye értelmezve van a $B_{1/\rho(u)}(0; \mathbb{C})$ gömbön, és $f(0) := 0$ miatt $f = \sum_{k=0}^{\infty} id_{\mathbb{C}}^{k+1} u^k$ ezen a halmazon.

Világos, hogy a $\sum_{k \in \mathbb{N}} id_{\mathbb{C}}^{k+1} u^k$ hatványfüggvény-sor konvergencia-sugara egyenlő a

$$\frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \|u^{k-1}\|^{1/k}} = \frac{1}{\rho(u)}$$

számmal. Tehát az f függvény a 0 pontban $\mathbb{C}$-analitikus, és az $\sum_{k\in\mathbb{N}} id_{\mathbb{C}}^{k+1}u^k$ hatványfüggvény-sor megegyezik az f függvény 0 pontbeli Taylor-sorával. A holomorf függvények Taylor-sorfejtésének maximalitási tulajdonságából adódik, hogy az f függvény 0 pontbeli Taylor-sorának konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $\sup\{s \in \mathbb{R}_+ | \overline{B}_s(0;\mathbb{C}) \subseteq Dom(f)\} = 1/R$ számnál. Tehát $1/R \leq 1/\rho(u)$, holott $R < \rho(u)$, ami ellentmondás. ■

Az előző tétel érvényessége szempontjából egészen lényeges, hogy E *komplex* Banach-tér legyen (**2**. gyakorlat).

Gyakorlatok

1. Legyen E valós vektortér, és jelölje $E_{\mathbb{C}}$ az E komplexifikációját (IV. fejezet, 1. pont, **7**. gyakorlat), tehát $E_{\mathbb{C}}$ alaphalmaza az $E \times E$ szorzathalmaz, és ezen a lineáris műveletek a következők: minden $(x, y), (x', y') \in E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'),$$
$$\lambda.(x, y) := (\mathfrak{Re}(\lambda)x - \mathfrak{Im}(\lambda)y, \mathfrak{Im}(\lambda)x + \mathfrak{Re}(\lambda)y).$$

a) Minden $u : E \to E$ lineáris operátorra az

$$u_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}; \quad (x, y) \mapsto (u(x), u(y))$$

leképezés $\mathbb{C}$-lineáris operátor, és u pontosan akkor injektív (illetve szürjektív), ha $u_{\mathbb{C}}$ injektív (illetve szürjektív).

b) Legyen $\|\cdot\|$ norma az E valós vektortér felett. Ekkor a

$$\|\cdot\|_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x \cos(t) - y \sin(t)\|$$

leképezés olyan *norma* az $E_{\mathbb{C}}$ komplex vektortér felett, amelyre teljesül az, hogy minden $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ esetén

$$\max(\|x\|, \|y\|) \leq \|(x, y)\|_{\mathbb{C}} \leq 2 \max(\|x\|, \|y\|).$$

Az $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ komplex normált teret az $(E, \|\cdot\|)$ *valós normált tér komplexifikációjának* nevezzük. Az $\mathbb{R}$-en a $\|\cdot\|$ euklidészi abszolútérték-függvényt véve normaként, $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ azonos a $\mathbb{C}$ feletti euklidészi abszolútérték-függvénnyel. Az $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ komplex normált tér pontosan akkor teljes, ha az $(E, \|\cdot\|)$ valós normált tér teljes.

c) Legyen $\|\cdot\|$ norma az E valós vektortér felett. Az $u : E \to E$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos a $\|\cdot\|$ szerint, ha $u_{\mathbb{C}}$ folytonos a $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ szerint; és ha u folytonos, akkor $\|u\| = \|u_{\mathbb{C}}\|$. Ha $u : E \to E$ lineáris operátor, akkor $Im(u)$ pontosan akkor sűrű E-ben a $\|\cdot\|$ szerint, ha $u_{\mathbb{C}}$ sűrű $E_{\mathbb{C}}$-ben a $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ szerint.

d) Legyen $\|\cdot\|$ norma az E valós vektortér felett. Ha $u : E \to E$ lineáris operátor, akkor $u \in \mathbf{GL}(E)$ ekvivalens azzal, hogy $u_{\mathbb{C}} \in \mathbf{GL}(E_{\mathbb{C}})$. Ha $u : E \to E$ folytonos lineáris operátor, akkor

$$\mathbb{R} \cap Sp(u_{\mathbb{C}}) = Sp(u),$$
$$\mathbb{R} \cap Sp_s(u_{\mathbb{C}}) = Sp_s(u), \quad \mathbb{R} \cap Sp_c(u_{\mathbb{C}}) = Sp_c(u), \quad \mathbb{R} \cap Sp_r(u_{\mathbb{C}}) = Sp_r(u).$$

(Azonban $Sp(u_{\mathbb{C}})$-nek általában léteznek nem valós elemei is.)

(*Útmutatás.* b) A norma-tulajdonságokat illetően csak az nem nyilvánvaló, hogy $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$-re (NO_{II}) teljesül. Ennek bizonyításához legyen $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ és $a, b \in \mathbb{R}$. Feltehetjük, hogy $a \neq 0$ vagy $b \neq 0$, tehát létezik olyan $t_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ekkor

$$\|(a+ib)(x,y)\|_{\mathbb{C}} = \|(ax-by, bx+ay)\|_{\mathbb{C}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(ax-by)\cos(t)-(bx+ay)\sin(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(a\cos(t) - b\sin(t))x - (b\cos(t) + a\sin(t))y\| =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(\cos(t_0)\cos(t) - \sin(t_0)\sin(t))x - (\sin(t_0)\cos(t) + \cos(t_0)\sin(t))y\| =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x\cos(t+t_0) - y\sin(t+t_0)\| = \sqrt{a^2+b^2}\|(x,y)\|_{\mathbb{C}} = |a+ib|\|(x,y)\|_{\mathbb{C}},$$

vagyis $\|(a+ib)(x,y)\|_{\mathbb{C}} = |a+ib|\|(x,y)\|_{\mathbb{C}}$.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$ és $t \in \mathbb{R}$, akkor $\|x\cos(t) - y\sin(t)\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x\|, \|y\|)$, így $\|(x,y)\|_{\mathbb{C}} \leq 2\max(\|x\|, \|y\|)$. Ugyanakkor, $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$ esetén $\|x\| = \|x\cos(0) - y\sin(0)\| \leq \|(x,y)\|_{\mathbb{C}}$ és $\|y\| = \|x\cos(\pi/2) - y\sin(\pi/2)\| \leq \|(x,y)\|_{\mathbb{C}}$, így $\max(\|x\|, \|y\|) \leq \|(x,y)\|_{\mathbb{C}}$ is teljesül.

Az iménti egyenlőtlenségekből következik, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok E-ben, akkor az $E_{\mathbb{C}}$-ben haladó $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens (illetve Cauchy-sorozat) a $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ szerint, ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindketten konvergensek (illetve Cauchy-sorozatok) E-ben a $\|\cdot\|$ szerint. Továbbá, ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens E-ben haladó sorozatok, akkor

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$$

teljesül $E_{\mathbb{C}}$-ben $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ szerint. Ebből azonnal következik, hogy az $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ komplex normált tér pontosan akkor teljes, ha az $(E, \|\cdot\|)$ valós normált tér teljes.

c) Legyen $u : E \to E$ folytonos lineáris operátor. Ha $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$, akkor

$$\|u_{\mathbb{C}}(x,y)\|_{\mathbb{C}} = \|(u(x), u(y))\|_{\mathbb{C}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(x)\cos(t) - u(y)\sin(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(x\cos(t) - y\sin(t))\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u\|\|x\cos(t) - y\sin(t)\| = \|u\|\|(x,y)\|_{\mathbb{C}},$$

tehát $u_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ folytonos és $\|u_{\mathbb{C}}\| \leq \|u\|$. Ha $x \in E$ és $\|x\| \leq 1$, akkor $\|(x,0)\|_{\mathbb{C}} = \|x\| \leq 1$, tehát

$$\|u(x)\| = \|(u(x), 0)\|_{\mathbb{C}} = \|u_{\mathbb{C}}(x,0)\|_{\mathbb{C}} \leq \|u_{\mathbb{C}}\|,$$

így $\|u\| \leq \|u_{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}}$.

Ha $u : E \to E$ lineáris operátor, akkor a definícióból következik, hogy $Im(u_{\mathbb{C}}) = Im(u) \times Im(u)$, így $Im(u_{\mathbb{C}})$ sűrűsége $E_{\mathbb{C}}$-ben ekvivalens az $Im(u)$ altér E-beli sűrűségével.

d) Legyen $u : E \to E$ lineáris operátor. Ha $u \in \mathbf{GL}(E)$, akkor $u^{-1} : E \to E$ folytonos lineáris operátor és

$$u_{\mathbb{C}} \circ (u^{-1})_{\mathbb{C}} = (u \circ u^{-1})_{\mathbb{C}} = (id_E)_{\mathbb{C}} = id_{E_{\mathbb{C}}} = (u^{-1} \circ u)_{\mathbb{C}} = (u^{-1})_{\mathbb{C}} \circ u_{\mathbb{C}},$$

tehát $u_{\mathbb{C}} \in \mathbf{GL}(E_{\mathbb{C}})$ és $(u_{\mathbb{C}})^{-1} = (u^{-1})_{\mathbb{C}}$. Megfordítva, legyen $u_{\mathbb{C}} \in \mathbf{GL}(E_{\mathbb{C}})$. Ekkor a $v := (u_{\mathbb{C}})^{-1} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ lineáris operátor folytonos és $u_{\mathbb{C}} \circ v = id_{E_{\mathbb{C}}} = v \circ u_{\mathbb{C}}$. Világos, hogy az

$$j_1 : E \to E_{\mathbb{C}}; \quad x \mapsto (x, 0)$$

$$p_1 : E_{\mathbb{C}} \to E; \quad (x, y) \mapsto x$$

leképezések folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátorok, ezért a $p_1 \circ v \circ j_1 : E \to E$ leképezés folytonos lineáris operátor, és könnyen ellenőrizhető, hogy

$$u \circ (p_1 \circ v \circ j_1) = id_E = (p_1 \circ v \circ j_1) \circ u,$$

tehát $u \in \mathbf{GL}(E)$.

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \notin Sp(u)$ azzal ekvivalens, hogy $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, vagyis $\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}} = (\lambda id_E - u)_{\mathbb{C}} \in \mathbf{GL}(E_{\mathbb{C}})$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R} \setminus Sp(u) = \mathbb{R} \setminus Sp(u_{\mathbb{C}})$, vagyis $\mathbb{R} \cap Sp(u_{\mathbb{C}}) = Sp(u)$.

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az a) alapján a $\lambda id_E - u$ operátor pontosan akkor nem injektív (azaz $\lambda \in Sp_s(u)$), ha a $\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}}$ operátor nem injektív (azaz $\lambda \in Sp_s(u_{\mathbb{C}})$). Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R} \setminus Sp_s(u) = \mathbb{R} \setminus Sp_s(u_{\mathbb{C}})$, vagyis $\mathbb{R} \cap Sp_s(u_{\mathbb{C}}) = Sp_s(u)$.

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az a) alapján a $\lambda id_E - u$ operátor pontosan akkor injektív, ha a $\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}}$ operátor injektív, és a c) szerint $Im(\lambda id_E - u)$ pontosan akkor nem sűrű E-ben, ha $Im(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})$ nem sűrű $E_{\mathbb{C}}$-ben. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R} \setminus Sp_r(u) = \mathbb{R} \setminus Sp_r(u_{\mathbb{C}})$, vagyis $\mathbb{R} \cap Sp_r(u_{\mathbb{C}}) = Sp_r(u)$.

Legyen $\lambda \in Sp_c(u)$. Ekkor $\lambda id_E - u$ injektív, $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű E-ben, és az $(\lambda id_E - u)^{-1} : Im(\lambda id_E - u) \to E$ operátor nem folytonos. Ekkor az a) szerint $\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}}$ injektív, és a c) szerint $Im(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})$ sűrű $E_{\mathbb{C}}$-ben. Ha a $(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})^{-1} : Im((\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})) \to E_{\mathbb{C}}$ operátor folytonos volna, akkor létezne olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ esetén

$$\|((\lambda id_E - u)(x), (\lambda id_E - u)(y))\|_{\mathbb{C}} = \|(\lambda id_E - u)_{\mathbb{C}}(x, y)\|_{\mathbb{C}} \geq C\|(x, y)\|_C.$$

Ekkor minden $E \ni x$-re

$$\|(\lambda id_E - u)(x)\| = \|(\lambda id_E - u)_{\mathbb{C}}(x, y\mathbf{0})\|_{\mathbb{C}} \geq C\|(x, y)\|_C = C\|x\|$$

teljesülne, tehát a $(\lambda id_E - u)^{-1}$ operátor folytonos lenne. Ezért $(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})^{-1}$ nem folytonos, így $\lambda \in \mathbb{R} \cap Sp_c(u_{\mathbb{C}})$.

Megfordítva, legyen $\lambda \in \mathbb{R} \cap Sp_c(u_{\mathbb{C}})$. Ekkor $\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}}$ injektív, $Im(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})$ sűrű $E_{\mathbb{C}}$-ben, és a $(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})^{-1} : Im(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}}) \to E_{\mathbb{C}}$ operátor nem folytonos. Ekkor az a) szerint $\lambda id_E - u$ injektív, és a c) alapján $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű E-ben. Ha a $(\lambda id_E - u)^{-1} : Im(\lambda id_E - u) \to E$ operátor folytonos lenne, akkor létezne olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in E$ esetén

$$\|(\lambda id_E - u)(x)\| \geq C\|x\|.$$

Ekkor minden $E_{\mathbb{C}} \ni (x, y)$-ra

$$\|(\lambda id_E - u)_{\mathbb{C}}(x, y)\|_{\mathbb{C}} = \|((\lambda id_E - u)(x), (\lambda id_E - u)(y))\|_{\mathbb{C}} \geq$$

$$\geq \max(\|(\lambda id_E - u)(x)\|, \|(\lambda id_E - u)(y)\|) \geq C \max(\|x\|, \|y\|) \geq \frac{C}{2}\|(x,y)\|_{\mathbb{C}},$$

tehát a $(\lambda id_{E_{\mathbb{C}}} - u_{\mathbb{C}})^{-1}$ operátor folytonos lenne. Ezért $(\lambda id_E - u)^{-1}$ nem folytonos, így $\lambda \in Sp_c(u)$.)

2. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ valós vektorteret az euklidészi normával ellátva, és legyen $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ az a lineáris operátor, amelynek mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor $Sp(u) = \emptyset$ és természetesen $\min\{r \in \mathbb{R}_+ | Sp(u) \subseteq \overline{B}_r(0;\mathbb{R})\} = 0 < 1 = \rho(u) = \|u\|$. Ugyanakkor $Sp(u_{\mathbb{C}}) = \{-i, i\} = Sp_s(u_{\mathbb{C}})$.

3. Ha E normált tér és $u, v \in \mathscr{L}(E)$, akkor

$$\{0\} \cup Sp(v \circ u) = \{0\} \cup Sp(u \circ v)$$

(*Jacobson-lemma*). Igaz-e az $Sp(v \circ u) = Sp(u \circ v)$ egyenlőség?

(*Útmutatás.* Legyen $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $\lambda \notin Sp(u \circ v)$. Ekkor a $w := (\lambda id_E - u \circ v)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ operátorra

$$(id_E + v \circ w \circ u) \circ (\lambda id_E - v \circ u) = (\lambda id_E - v \circ u) \circ (id_E + v \circ w \circ u) = \lambda id_E$$

teljesül, tehát $\lambda id_E - v \circ u \in \mathbf{GL}(E)$, vagyis $\lambda \notin Sp(v \circ u)$. Ebből következik, hogy $\{0\} \cup Sp(v \circ u) = \{0\} \cup Sp(u \circ v)$.

Legyen $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, és az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozatteret lássuk el a $\|\cdot\|_p$ normával. Legyen $u : l^p_{\mathbb{K}} \to l^p_{\mathbb{K}}$ az a leképezés, amelyre $\mathbf{s} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $u(\mathbf{s})(n) := \mathbf{s}(n+1)$. Továbbá legyen $v : l^p_{\mathbb{K}} \to l^p_{\mathbb{K}}$ az a leképezés, amelyre $\mathbf{s} \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $v(\mathbf{s})(n) := \mathbf{s}(n-1)$ és $v(\mathbf{s})(0) := 0$. Ekkor $u, v \in \mathscr{L}(l^p_{\mathbb{K}})$ és $u \circ v = id_{l^p_{\mathbb{K}}}$, tehát $0 \notin Sp(u \circ v)$. Ugyanakkor $v \circ u$ nem injektív, tehát $0 \in Sp(v \circ u)$.)

4. Legyen E normált tér és $u \in \mathscr{L}(E)$. Ha $\lambda, \sigma \in \mathbb{K} \setminus Sp(u)$, akkor

$$R(u, \sigma) - R(u, \lambda) = (\lambda - \sigma) R(u, \sigma) \circ R(u, \lambda)$$

(*rezolvens-egyenlet*). Ebből következik, hogy az $\{R(u,\lambda) | \lambda \in \mathbb{K} \setminus Sp(u)\}$ operátorhalmaz *kommutatív*, és ha az $R(u,\cdot)$ rezolvens-függvény a $\lambda \in Int(\mathbb{K} \setminus Sp(u))$ pontban folytonos, akkor $R(u,\cdot)$ a λ pontban *erősen differenciálható*, és $(DR(u,\cdot))(\lambda) = -R(u,\lambda)^2$ (még akkor is, ha E nem Banach-tér).

5. Ha E normált tér és $u, v \in \mathscr{L}(E)$, akkor $\rho(u \circ v) = \rho(v \circ u)$.

(*Útmutatás.* Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $(u \circ v)^n = u \circ (v \circ u)^{n-1} \circ v$.)

6. Adjunk példát olyan E (szükségképpen nem teljes) normált térre, hogy létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E)$, amelyre u injektív, $\overline{Im(u)} = E$ és $u^{-1} : Im(u) \to E$ folytonos, de $u \notin \mathbf{GL}(E)$, azaz $Im(u) \neq E$.

(*Útmutatás.* Legyen $E := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ és E normája a $\|\cdot\|_\infty$ sup-norma. Értelmezzük azt az $u : E \to E$ leképezést, amelyre $\mathbf{s} \in E$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$u(\mathbf{s})(n) := \begin{cases} 2\mathbf{s}(0) & ; \text{ha } n = 0, \\ 2\mathbf{s}(n) + \mathbf{s}(n-1) & ; \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Ekkor $u \in \mathscr{L}(E)$, és u injektív, továbbá

$$Im(u) = \{\mathbf{s}' \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} | \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k \mathbf{s}'(k) = 0\} = Ker(f),$$

ahol $f : E \to \mathbb{K}$ az a lineáris funkcionál, amelyre $\mathbf{s}' \in E$ esetén

$$f(\mathbf{s}') := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k \mathbf{s}'(k).$$

Az f funkcionál nem nulla és nem folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ szerint, ezért $Ker(f)$ nem zárt és sűrű altér E-ben. Tehát u *nem szürjektív*, így $u \notin \mathbf{GL}(E)$, de $\overline{Im(u)} = E$, és könnyen látható, hogy az $u^{-1} : Im(u) \to E$ operátor folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ szerint.)

7. Legyen $E := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ és az E felett a $\|\cdot\|_\infty$ normát vesszük normaként. Értelmezzük azt az $u : E \to E$ leképezést, amelyre $\mathbf{s} \in E$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$(u(\mathbf{s}))(n) := \begin{cases} \mathbf{s}(0) & ; \text{ha } n = 0 \\ \mathbf{s}(n) - \mathbf{s}(n-1) & ; \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Ekkor $u \in \mathscr{L}(E)$, és teljesülnek a következők.

a) $Sp(u) = \mathbb{K}$, tehát az u rezolvens halmaza üres, és a spektruma nem korlátos halmaz.

b) $Sp_s(u) = \emptyset$.

c) $Sp_r(u) = B_1(1; \mathbb{K})$.

d) $Sp_c(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} | |\lambda - 1| = 1\}$.

e) Minden $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{B}_1(1; \mathbb{K})$ pontra a $\lambda id_E - u$ operátor injektív, $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű E-ben, és $(\lambda id_E - u)^{-1}$ folytonos, de $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$.

(*Útmutatás.* Könnyen látható, hogy minden *lambda* $\in \mathbb{K}$ esetén a $\lambda id_E - u$ operátor injektív; ebből azonnal következik a b) állítás. Továbbá, minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra egyszerűen kiszámítható a $\lambda id_E - u$ operátor inverze, és azt kapjuk, hogy $Dom((\lambda id_E - u)^{-1}) = Im(\lambda id_E - u) = Ker(f_\lambda)$, ahol $f_\lambda : E \to \mathbb{K}$ az a lineáris funkcionál, amelyre minden $\mathbf{s}' \in E$ esetén

$$f_\lambda(\mathbf{s}') := \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda)^k \mathbf{s}'(k),$$

továbbá, ha $\lambda \neq 1$, akkor minden $Dom((\lambda id_E - u)^{-1}) \ni \mathbf{s}'$-re

$$(\lambda id_E - u)^{-1}(\mathbf{s}') = \left(\frac{(-1)^n}{(\lambda - 1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (1 - \lambda)^k \mathbf{s}'(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ha $\lambda \in B_1(1; \mathbb{K})$, akkor az f_λ lineáris funkcionál folytonos, ezért $\lambda \in Sp_r(u)$, és a $\lambda = 1$ esetet külön kezelve kapjuk, hogy $1 \in Sp_r(u)$ is teljesül, így $B_1(1; \mathbb{K}) \subseteq Sp_r(u)$.

Ha $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\overline{B}_1(1;\mathbb{K})$, akkor az f_λ lineáris funkcionál nem folytonos. Valóban, legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}_n \in E$ az a sorozat, amelyre $k \in \mathbb{N}$ és $k > n$ esetén $\mathbf{s}_n(k) = 0$, ugyanakkor minden $k \leq n$ természetes számra $\mathbf{s}_n(k) = 1$. Ekkor az $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos E-ben, de könnyen látható, hogy az $(f_\lambda(\mathbf{s}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos $\mathbb{K}$-ban. Ezért $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{B}_1(1;\mathbb{K})$ esetén a $\lambda id_E - u$ operátor injektív, és $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű valódi altér E-ben. Ugyanakkor a $(\lambda id_E - u)^{-1}$ operátor *folytonos*, mert ha $\mathbf{s}' \in Dom((\lambda id_E - u)^{-1})$, akkor

$$\|(\lambda id_E - u)^{-1}(\mathbf{s}')\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda - 1| - 1}\|\mathbf{s}'\|_\infty.$$

Azonban $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\overline{B}_1(1;\mathbb{K})$ esetén $(\lambda id_E - u)^{-1} \notin \mathbf{GL}(E)$, mert $Im((\lambda id_E - u)^{-1}) \neq E$. Ebből kapjuk az e) állítást.

Végül legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|\lambda - 1| = 1$. Ekkor az f_λ lineáris funkcionál nem folytonos. Valóban, legyen $z := \lambda - 1$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}_n \in E$ az az elem, amelyre $k \in \mathbb{N}$ és $k > n$ esetén $\mathbf{s}_n(k) = 0$, ugyanakkor minden $k \leq n$ természetes számra $\mathbf{s}_n(k) = \overline{z}$. Ekkor az $(\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos E-ben, de minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_\lambda(\mathbf{s}_n) = n + 1$, tehát az $(f_\lambda(\mathbf{s}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos $\mathbb{K}$-ban. Ezért ismét azt kapjuk, hogy a $\lambda id_E - u$ operátor injektív, és $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű valódi altér E-ben. Azonban ekkor a $(\lambda id_E - u)^{-1}$ operátor *nem folytonos*. Ha ugyanis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{s}'_n \in E$ az az elem, amelyre minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\mathbf{s}'_n(k) := \begin{cases} \mathbf{0} & ; \text{ha } k = 0, \\ \overline{z}^k & ; \text{ha } 1 \leq k \leq n, \\ -\overline{z}^k z^{-n} & ; \text{ha } n+1 \leq k \leq 2n, \\ \mathbf{0} & ; \text{ha } k > 2n, \end{cases}$$

akkor az $Im(\lambda id_E - u)$-ban haladó $(\mathbf{s}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, de minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|(\lambda id_E - u)^{-1}(\mathbf{s}'_n)\|_\infty \geq n$, vagyis az $(f_\lambda(\mathbf{s}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos $\mathbb{K}$-ban. Ezért ebben az esetben $\lambda \in Sp_c(u)$. Ebből, és az előzőekből már következik a), c) és d) is.)

8. Legyen $p \geq 1$ valós szám, $\mathbf{s} \in l^\infty_\mathbb{K}$, és értelmezzük az

$$u_\mathbf{s} : l^p_\mathbb{K} \to l^p_\mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}'$$

lineáris operátort (VI. fejezet, 1. pont, **7**. gyakorlat). Az $l^p_\mathbb{K}$ sorozatteret ellátjuk a $\|\cdot\|_p$ normával. Ekkor $u_{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{L}(l^p_\mathbb{K})$ és teljesülnek a következők.

a) $Sp(u_{\boldsymbol{s}}) = \overline{Im(\boldsymbol{s})}$.

b) $Sp_s(u_{\boldsymbol{s}}) = Im(\boldsymbol{s})$.

c) $Sp_c(u_{\boldsymbol{s}}) = \overline{Im(\boldsymbol{s})} \setminus Im(\boldsymbol{s})$.

d) $Sp_r(u_{\boldsymbol{s}}) = \emptyset$.

e) $\rho(u_{\boldsymbol{s}}) = \|\boldsymbol{s}\|_\infty = \|u_{\boldsymbol{s}}\|$.

(*Útmutatás.* Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbf{e}_n \in l^p_\mathbb{K}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\boldsymbol{s}_n(m) = \delta_{m,n}$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $u_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{e}_n) := \boldsymbol{s} \cdot \mathbf{e}_n = \boldsymbol{s}(n)\mathbf{e}_n$, tehát $\boldsymbol{s}(n) \in Sp_s(u_{\boldsymbol{s}})$. Ez azt jelenti, hogy $Im(\boldsymbol{s}) \subseteq Sp_s(u_{\boldsymbol{s}}) \subseteq Sp(u_{\boldsymbol{s}})$, így $Sp(u_{\boldsymbol{s}})$ zártsága miatt $\overline{Im(\boldsymbol{s})} \subseteq Sp(u_{\boldsymbol{s}})$.

Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{Im(\mathbf{s})}$, és vegyünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $B_\varepsilon(\lambda;\mathbb{K}) \cap Im(\mathbf{s}) = \emptyset$, vagyis minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|\mathbf{s}(n) - \lambda| \geq \varepsilon$. Ekkor $\mathbf{s}' \in Ker(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})$ esetén $(\lambda - \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{s}' = 0$ és a $\lambda - \boldsymbol{s}$ sorozat értékkészletében nincs benne a 0, így $\boldsymbol{s}' = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}}$ injektív operátor. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\lambda - \boldsymbol{s}(n))\mathbf{e}_n = (\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})(\mathbf{e}_n) \in Im(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})$, ezért $\{\mathbf{e}_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Im(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})$. Ugyanakkor tudjuk, hogy az $\{\mathbf{e}_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz lineáris burka sűrű $l^p_{\mathbb{K}}$-ban (V. fejezet, 3. pont, **3**. gyakorlat), következésképpen $Im(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})$ is sűrű $l^p_{\mathbb{K}}$-ban. Könnyen látható, hogy $\boldsymbol{s}' \in l^p_{\mathbb{K}}$ esetén

$$\left\| (\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{s}') \right\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda - \boldsymbol{s}(k)|^p |\boldsymbol{s}'(k)|^p \right)^{1/p} \geq \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{s}'(k)|^p \right)^{1/p} = \varepsilon \|\boldsymbol{s}'\|_p,$$

ezért a $(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})^{-1}$ operátor folytonos. Ebből következik, hogy $\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}} \in \mathbf{GL}(l^p_{\mathbb{K}})$, vagyis $\lambda \in \mathbb{K} \setminus Sp(u_{\boldsymbol{s}})$. Ezzel beláttuk, hogy $Sp(u_{\boldsymbol{s}}) \subseteq \overline{Im(u_{\boldsymbol{s}})}$, tehát az előzőek figyelembe vételével kapjuk, hogy $Sp(u_{\boldsymbol{s}}) = \overline{Im(u_{\boldsymbol{s}})}$.

Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus Im(\boldsymbol{s})$, akkor az iménti érvelés alapján látható, hogy a $\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}}$ operátor injektív, ezért $\lambda \notin Sp_s(u_{\boldsymbol{s}})$. Ebből következik, hogy $Sp_s(u_{\boldsymbol{s}}) \subseteq Im(\boldsymbol{s})$, tehát az előzőek alapján $Sp_s(u_{\boldsymbol{s}}) = Im(\boldsymbol{s})$. Ezzel az a) és b) állításokat igazoltuk.

Most már nyilvánvaló, hogy ha d) teljesül, vagyis $Sp_r(u_{\boldsymbol{s}}) = \emptyset$, akkor c) is igaz (hiszen $l^p_{\mathbb{K}}$ Banach-tér). Ha $\lambda \in Im(\boldsymbol{s})$, akkor a b) szerint $\lambda \in Sp_s(u_{\boldsymbol{s}})$, ezért $\lambda \notin Sp_r(u_{\boldsymbol{s}})$. Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus Im(\boldsymbol{s})$, akkor a fentiekhez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $\{\mathbf{e}_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq Im(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})$, tehát $Im(\lambda id_{l^p_{\mathbb{K}}} - u_{\boldsymbol{s}})$ sűrű $l^p_{\mathbb{K}}$-ban, ezért $\lambda \notin Sp_r(u_{\boldsymbol{s}})$. Ez azt jelenti, hogy $Sp_r(u_{\boldsymbol{s}}) = \emptyset$, tehát d) és c) igaz.

Végül könnyen látható, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $u^n_{\boldsymbol{s}} = u_{\boldsymbol{s}^n}$, ezért a VI. fejezet, 1. pont, **7**. gyakorlat eredménye alapján $\|u^n_{\boldsymbol{s}}\| = \|u_{\boldsymbol{s}^n}\| = \|\boldsymbol{s}^n\|_\infty = \|\boldsymbol{s}\|^n_\infty$, tehát $\rho(u_{\boldsymbol{s}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \|u^n_{\boldsymbol{s}}\|^{1/n} = \|\boldsymbol{s}\|_\infty$.)

9. Legyen T kompakt metrikus tér, és a $T \to \mathbb{K}$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ vektorterét lássuk el a sup-normával. Legyen $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ és értelmezzük az

$$u_f : \mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{K}); \quad g \mapsto f \cdot g$$

lineáris operátort. Ekkor $u_f \in \mathscr{L}(\mathscr{C}(T;\mathbb{K}))$ és teljesülnek a következők.

a) $Sp(u_f) = Im(f)$.

b) $Sp_s(u_f) = \{\lambda \in \mathbb{K} | Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle) \neq \emptyset\}$.

c) $Sp_r(u_f) = \{\lambda \in Im(f) | Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle) = \emptyset\}$.

d) $Sp_c(u_f) = \emptyset$.

e) $\rho(u_f) = \sup\limits_{t\in T} |f(t)| = \|u_f\|$.

(*Útmutatás.* Könnyen látható, hogy $u_f \in \mathscr{L}(\mathscr{C}(T;\mathbb{K}))$ és $\|u_f\| = \sup\limits_{t\in T} |f(t)|$. Az is nyilvánvaló, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $u^n_f = u_{f^n}$, ezért $\rho(u_f) = \lim\limits_{n\to\infty} \|u^n_f\|^{1/n} = \sup\limits_{t\in T} |f(t)|$, amivel e)-t igazoltuk.

a) Legyen $\lambda \in Im(f)$ és $t \in T$ olyan, hogy $f(t) = \lambda$. Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ben haladó, monoton fogyó zérussorozat. Létezik olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$-ban, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $Im(g_n) \subseteq [0,1]$, $g_n(t) = 1$ és $[g_n \neq 0] \subseteq B_{r_n}(t)$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $t' \in T$, akkor

- $t' \in B_{r_n}(t)$ esetén

$$|((\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g_n))(t')| = |(\lambda - f(t'))g_n(t')| \leq |f(t) - f(t')|\chi_{B_{r_n}(t)}(t');$$

- $t' \notin B_{r_n}(t)$ esetén $((\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g_n))(t') = 0$.

Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g_n)\| \leq \sup_{t'\in B_{r_n}(t)} |f(t) - f(t')|.$$

Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor az f függvény t pontbeli folytonossága miatt van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t' \in B_r(t)$ esetén $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$. Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $r_N < r$, tehát minden $n > N$ természetes számra és $t' \in B_{r_n}(t)$ pontra $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$, vagyis $\|(\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g_n)\| \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} (\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g_n) = 0$ a $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ Banach-térben. Ezért a $\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f$ operátornak még folytonos balinverze sem létezhet, hiszen ha volna ilyen, akkor $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ teljesülne $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint, holott minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|g_n\| = 1$. Tehát $\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f \notin \mathbf{GL}(\mathscr{C}(T;\mathbb{K}))$, azaz $\lambda \in Sp(u_f)$. Ezzel igazoltuk az $Im(f) \subseteq Sp(u_f)$ összefüggést.

Megfordítva, ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus Im(f)$, akkor az $Im(f) \subseteq \mathbb{K}$ halmaz kompaktsága miatt a

$$v_\lambda : \mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{K}); \quad g \mapsto \frac{g}{\lambda - f}$$

leképezés olyan folytonos lineáris operátor, hogy

$$v_\lambda \circ (\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f) = (\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f) \circ v_\lambda = id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})},$$

tehát $\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f \in \mathbf{GL}(\mathscr{C}(T;\mathbb{K}))$, azaz $\lambda \in \mathbb{K} \setminus Sp(u_f)$. Ezért $Sp(u_f) \subseteq Im(f)$ is teljesül, amivel az a) állítást igazoltuk.

b) Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle) \neq \emptyset$, és legyen $t \in Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle)$ rögzített pont. Létezik olyan $g \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$, hogy $Im(g) \subseteq [0,1]$, $g(t) = 1$ és $[g \neq 0] \subseteq Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle)$. Ekkor $(\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g) = (\lambda - f) \cdot g = 0$, tehát $\lambda \in Sp_s(u_f)$.

Megfordítva, legyen $\lambda \in Sp_s(u_f)$ és $g \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ olyan, hogy $g \neq 0$ és $u_f(g) = \lambda g$. Ekkor $(\lambda - f) \cdot g = 0$, és van olyan $t \in T$, hogy $g(t) \neq 0$. A g függvény t pontbeli folytonossága alapján létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $t' \in V$ esetén $g(t') \neq 0$. Ebből $(\lambda - f) \cdot g = 0$ miatt következik, hogy $V \subseteq [f = \lambda]$, vagyis $V \subseteq \overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle$, így $Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle) \neq \emptyset$.

c) Legyen $\lambda \in Im(f)$ olyan, hogy $Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle) = \emptyset$, és vegyünk olyan $t \in T$ pontot, amelyre $f(t) = \lambda$. Képezzük az

$$\varepsilon_t : \mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}; \quad g \mapsto g(t)$$

leképezést, amely nem nulla folytonos lineáris funkcionál $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ felett. Minden $g \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ esetén

$$\varepsilon_t((\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)(g)) = \varepsilon_t((\lambda - f)\cdot g) = (\lambda - f(t))g(t) = 0,$$

tehát $Im(\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f) \subseteq Ker(\varepsilon_t)$, ugyanakkor $Ker(\varepsilon_t)$ zárt valódi altere $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$-nak. Ebből következik, hogy az $Im(\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f)$ altér nem sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$-ban. Továbbá, a b) alapján $\lambda \notin Sp_s(u_f)$, vagyis a $\lambda id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{K})} - u_f$ operátor injektív. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \in Sp_r(u_f)$, vagyis $\{\lambda \in Im(f) | Int(\overset{-1}{f}\langle\{\lambda\}\rangle) = \emptyset\} \subseteq Sp_r(u_f)$. Ebből a tartalmazásból, az a)-ból és b)-ből adódik, hogy itt egyenlőség áll.

d) Az a), b) és c) állítások nyilvánvaló következménye.)

10. Minden $T \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmazhoz létezik olyan E Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és olyan $u \in \mathscr{L}(E)$, hogy $Sp(u) = T$ és $Sp_c(T) = \emptyset$. Ha T-nek nincs izolált pontja, akkor E és u megválasztható úgy, hogy $Sp(u) = T = Sp_r(u)$ és $Sp_c(u) = Sp_s(u) = \emptyset$ teljesül.

(*Útmutatás.* Tekintsük a $T \to \mathbb{K}$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ terét a sup-normával ellátva, és legyen $u : \mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{K});\ g \mapsto id_T g$. A **9**. gyakorlat szerint $Sp(u) = Im(id_T) = T$ és $Sp_c(u) = \emptyset$, továbbá

$$Sp_s(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} | Int(\overset{-1}{id_T}\langle\{\lambda\}\rangle) \neq \emptyset\} = \{\lambda \in \mathbb{K} | Int(\{\lambda\}) \neq \emptyset\},$$

ahol Int a T kompakt altér szerinti belsőrész-képzés. Tehát ha T nem tartalmaz izolált pontot, akkor szükségképpen $Sp_s(u) = \emptyset$.)

11. Legyen T tetszőleges metrikus tér, és a $T \to \mathbb{K}$ korlátos folytonos függvények $\mathscr{C}^b(T;\mathbb{K})$ vektorterét ellátjuk a sup-normával. Legyen $f \in \mathscr{C}^b(T;\mathbb{K})$ és értelmezzük az

$$u_f : \mathscr{C}^b(T;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}^b(T;\mathbb{K}); \quad g \mapsto f \cdot g$$

lineáris operátort. Hogyan módosulnak a **9**. gyakorlat eredményei az u_f operátor spektrumát illetően?

12. Ha E normált tér, akkor egy $u \in \mathscr{L}(E)$ operátort

- *nilpotensnek* nevezünk, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $u^n = 0$;
- *kvázinilpotensnek* nevezünk, ha $\rho(u) = 0$.

Nyilvánvaló, hogy minden nilpotens operátor kvázinilpotens.

a) Adjunk példát olyan E Banach-térre és $u \in \mathscr{L}(E)$ operátorra, hogy u kvázinilpotens, de nem nilpotens! Van-e ilyen operátor véges dimenziós E esetében?

b) Adjunk példát olyan E Banach-térre és $u \in \mathscr{L}(E)$ operátorra, hogy u nem kvázinilpotens, de létezik nilpotens operátoroknak olyan sorozata $\mathscr{L}(E)$-ben, amely u-hoz konvergál az operátornorma szerint!

c) Mutassuk meg, hogy ha E normált tér, akkor a $\rho : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ spektrálsugár-függvény *felülről félig folytonos* (V. fejezet, 8. pont, **4**. gyakorlat), de van olyan E Banach-tér, hogy ρ nem folytonos az operátornorma szerint!

(*Útmutatás.* Tekintsük az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozatteret a $\|\cdot\|_2$ normával ellátva, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbf{e}_n \in l^2_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\boldsymbol{s}_n(m) = \delta_{m,n}$. Legyen

$\boldsymbol{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ rögzített sorozat. A sűrű altéren folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tételének alkalmazásával könnyen belátható, hogy létezik egyetlen olyan $v_{\boldsymbol{s}} \in \mathscr{L}(l^2_{\mathbb{K}})$ operátor, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $v_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{e}_n) = \boldsymbol{s}(n)\mathbf{e}_{n+1}$. Erre a $v_{\boldsymbol{s}}$ operátorra teljesül az, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\|v_{\boldsymbol{s}}^n\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(m+k)|.$$

Ebből látható, hogy ha $0 \notin Im(\boldsymbol{s})$, akkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\|v_{\boldsymbol{s}}^n\| \geq \prod_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(k)| > 0$, tehát $v_{\boldsymbol{s}}$ *nem nilpotens* operátor. Az is nyilvánvaló hogy $v_{\boldsymbol{s}}$ pontosan akkor kvázinilpotens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(m+k)| \right)^{1/n} \right) = 0.$$

a) Most megadunk olyan $\boldsymbol{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozatot, amelyre a $v_{\boldsymbol{s}}$ operátor kvázinilpotens, de nem nilpotens. Ehhez vegyünk egy $\alpha \in]0,1[$ valós számot, és legyen $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\boldsymbol{s}(m) := \alpha^m$. Ekkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(m+k)| \right)^{1/n} = \alpha^{(n-1)/2},$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(m+k)| \right)^{1/n} \right) = 0$, ugyanakkor $0 \notin Im(\boldsymbol{s})$, ezért az $\boldsymbol{s}$ sorozat megfelelő.

b) Legyenek $\sigma, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ azok az egyértelműen meghatározott sorozatok, amelyekre $\sigma(0) = 0 = \tau(0)$, és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $n = 2^{\sigma(n)}\tau(n)$ és $\tau(n)$ páratlan (tehát minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\sigma(n)$ az a legnagyobb természetes szám, amelyre $2^{\sigma(n)}$ osztója n-nek, és $\tau(n) := \dfrac{n}{2^{\sigma(n)}}$). Legyen ismét $\alpha \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, és $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\boldsymbol{s}(m) := \alpha^{\sigma(m)}$. Megmutatjuk, hogy a $v_{\boldsymbol{s}}$ operátor nem kvázinilpotens. Valóban, ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(m+k)| \right)^{1/n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^{\sigma(m+k)} \right)^{1/n} = \alpha^{\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(m+k)}.$$

A j természetes szám szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \sigma(2^j + k) = 2^j - 1,$$

ezért minden $r \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{2^r-1} \sigma(k) = \frac{1}{2^r} \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} \sigma(2^j + k) \right) = \frac{1}{2^r} \sum_{j=0}^{r-1} (2^j - 1) =$$

$$= \frac{2^r - r - 1}{2^r} = 1 - \frac{r+1}{2^r} \leq 1.$$

Ebből $\alpha \in]0,1[$ alapján kapjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni r$-re

$$\|v_{\boldsymbol{s}}^{2^r}\|^{1/2^r} = \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{2^r-1} |\boldsymbol{s}(m+k)|\right)^{1/2^r} \geq \left(\prod_{k=0}^{2^r-1} |\boldsymbol{s}(k)|\right)^{1/2^r} = \alpha^{\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{2^r-1}\sigma(k)} \geq \alpha,$$

következésképpen fennáll a

$$\rho(v_{\boldsymbol{s}}) = \lim_{r\to\infty} \|v_{\boldsymbol{s}}^{2^r}\|^{1/2^r} \geq \alpha > 0$$

egyenlőtlenség, tehát $v_{\boldsymbol{s}}$ nem kvázinilpotens (itt még nem lényeges az, hogy $\alpha < 1$). Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\boldsymbol{s}_n \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{s}_n(m) := \begin{cases} \boldsymbol{s}(m) & ; \text{ha } n \neq \sigma(m), \\ 0 & ; \text{ha } n = \sigma(m). \end{cases}$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|v_{\boldsymbol{s}} - v_{\boldsymbol{s}_n}\| = \|v_{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_n}\| = \|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_n\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(m) - \boldsymbol{s}_n(m)| = \alpha^n,$$

tehát $\alpha < 1$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} v_{\boldsymbol{s}_n} = v_{\boldsymbol{s}}$ az operátornorma szerint.

Megmutatjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $v_{\boldsymbol{s}_n}^{2^{n+1}} = 0$, tehát $v_{\boldsymbol{s}_n}$ nilpotens operátor. Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített; ekkor a $v_{\boldsymbol{s}_n}^{2^{n+1}} = 0$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$0 = \|v_{\boldsymbol{s}_n}^{2^{n+1}}\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{2^{n+1}-1} |\boldsymbol{s}_n(m+k)|,$$

ami azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-hez létezik olyan $k < 2^{n+1}$ természetes szám, amelyre $|\boldsymbol{s}_n(m+k)| = 0$, vagyis (az $\boldsymbol{s}_n$ és $\boldsymbol{s}$ definíciója szerint) fennáll a $\sigma(m+k) = n$ egyenlőség. Legyen $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges.

- Ha $\sigma(m) > n$, akkor $m + 2^n = 2^{\sigma(m)}\tau(m) + 2^n = 2^n(2^{\sigma(m)-n}\tau(m) + 1)$, és $2^{\sigma(m)-n}\tau(m) + 1$ páratlan szám, így $\sigma(m + 2^n) = n$, vagyis $k := 2^n < 2^{n+1}$ olyan természetes szám, hogy fennáll a $\sigma(m + k) = n$ egyenlőség.

- Ha $\sigma(m) = n$, akkor $k := 0 < 2^{n+1}$ olyan természetes szám, hogy fennáll a $\sigma(m + k) = n$ egyenlőség.

- Ha $\sigma(m) < n$, akkor legyen $p := \min\{j \in \mathbb{N} | (j \text{ páratlan }) \wedge (2^n j > m))\}$, és $k := 2^n p - m$. Ekkor $m + k = 2^n p$ és p páratlan, tehát $\sigma(m + k) = n$. Ugyanakkor $p = 1$ esetén $k = 2^n - m \leq 2^n < 2^{n+1}$, míg $p \geq 3$ esetén $p - 2$ páratlan, tehát a p minimalitása folytán $2^n(p - 2) \leq m$, így $k = 2^n p - m \leq 2^{n+1}$, sőt $k < 2^{n+1}$ is igaz, különben $2^{n+1} = 2^n p - m$ teljesülne, azaz $m = 2^n(p - 2)$, tehát $\sigma(m) = n$ teljesülne, holott $\sigma(n) < n$. Tehát $k < 2^{n+1}$ olyan természetes szám, hogy fennáll a $\sigma(m + k) = n$ egyenlőség.

c) Minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re legyen

$$\rho_n : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}_+; \quad u \mapsto \|u^n\|^{1/n}.$$

Ekkor ρ_n operátornormában folytonos függvény, és $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$, ezért a $\rho : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ spektrálsugár-függvény felülről félig folytonos. A b) alapján $E := l^2_{\mathbb{K}}$ esetén ρ nem folytonos az operátornorma szerint.)

13. Legyen E vektortér a K test felett. Egy $u : E \to E$ lineáris operátor *sajátértékének* nevezünk minden olyan $\lambda \in K$ elemet, amelyhez létezik olyan $x \in E \setminus \{0\}$, hogy $u(x) = \lambda x$ teljesül (vagyis a $\lambda id_E - u$ operátor nem injektív). Legyen $u : E \to E$ lineáris operátor, $S(u)$ az u sajátértékeinek halmaza, és minden $\lambda \in S(u)$ esetén $E_\lambda(u) := \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ $(= Ker(\lambda id_E - u))$, amit a λ sajátértékhez tartozó *sajátaltérnek* nevezünk.

a) Legyen $(\lambda_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres *injektív* rendszer $S(u)$-ban, és $(x_i)_{i\in I}$ olyan rendszer E-ben, amelyre minden $i \in I$ esetén $x_i \in E_{\lambda_i}(u) \setminus \{0\}$. Ekkor az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer lineárisan független E-ben.

b) Ha $\lambda, \lambda' \in S(u)$ és $\lambda \neq \lambda'$, akkor $E_\lambda(u) \cap E_{\lambda'}(u) = \{0\}$.

c) Minden $\lambda \in S(u)$ esetén $E_\lambda(u) \cap \sum\limits_{\lambda' \in S(u)\setminus\{\lambda\}} E_{\lambda'}(u) = \{0\}$.

(*Útmutatás.* a) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer lineárisan összefügg E-ben, vagyis létezik olyan $S \subseteq I$ nem üres véges halmaz, hogy az $(x_i)_{i\in S}$ rendszer lineárisan összefüggő. Jelölje $\mathfrak{S}$ azon $S \subseteq I$ véges halmazok halmaza, amelyekre az $(x_i)_{i\in S}$ rendszer lineárisan összefüggő, és legyen $n := \min\{Card(S) | S \in \mathfrak{S}\}$. Legyen $S \in \mathfrak{S}$ olyan halmaz, amelyre $n = Card(S)$, és vegyünk olyan $(\alpha_i)_{i\in S}$ rendszert K-ban, amelyre $\sum\limits_{i\in S} \alpha_i x_i = 0$ és van olyan $i \in S$, hogy $\alpha_i \neq 0$. Rögzítsünk olyan $j \in S$ elemet, amelyre $\alpha_j \neq 0$, és legyen $S' := S\setminus\{j\}$, valamint minden $S \ni i$-re $\alpha'_i := \alpha_i/\alpha_j$. Ekkor $x_j = -\sum\limits_{i\in S'} \alpha'_i x_i$, így $x_j \neq 0$ miatt van olyan $i \in S'$, hogy $\alpha'_i \neq 0$. Továbbá

$$-\sum_{i\in S'} (\lambda_j \alpha'_i) x_i = \lambda_j x_j = u(x_j) = -\sum_{i\in S'} \alpha'_i u(x_i) = -\sum_{i\in S'} (\alpha'_i \lambda_i) x_i,$$

tehát $\sum\limits_{i\in S'} \alpha'_i (\lambda_i - \lambda_j) x_i = 0$. A $(\lambda_i)_{i\in I}$ rendszer injektivitása miatt minden $S' \ni i$-re $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, és van olyan $i \in S'$, hogy $\alpha'_i \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy az $(x_i)_{i\in S'}$ rendszer lineárisan összefüggő, ami $Card(S') = n - 1$ miatt ellentmond az n szám minimalitásának.

b) Ha $\lambda, \lambda' \in S(u)$ és $\lambda \neq \lambda'$, akkor $x \in E_\lambda \cap E_{\lambda'}$ esetén $\lambda x = u(x) = \lambda' x$, tehát $(\lambda - \lambda')x = 0$, ezért $x = 0$.

c) Legyen $\lambda \in S(u)$ és $x \in E_\lambda(u) \cap \sum\limits_{\lambda' \in S(u)\setminus\{\lambda\}} E_{\lambda'}(u)$. Ekkor van olyan $S \subseteq S(u)\setminus\{\lambda\}$ véges halmaz és olyan $(x_{\lambda'})_{\lambda' \in S}$ rendszer, hogy $x = \sum\limits_{\lambda' \in S} x_{\lambda'}$ és minden $S \ni \lambda'$-re $x_{\lambda'} \in E_{\lambda'}(u)$. Legyen $x_\lambda := x$, és tekintsük az $(x_{\lambda'})_{\lambda' \in S\cup\{\lambda\}}$ rendszert, amely az előzőek szerint lineárisan összefüggő és a b) alapján nyilvánvalóan injektív. Ha $x \neq 0$ volna, akkor S megválasztható lenne úgy, hogy minden $\lambda' \in S$ esetén $x_{\lambda'} \neq 0$, tehát az a) alapján az $(x_{\lambda'})_{\lambda' \in S \cup \{\lambda\}}$ rendszer lineárisan független lenne. Ezért $x = 0$.)

14. Legyen E Banach-tér és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbf{GL}(E)$-ben, amely konvergens az operátornorma szerint. A $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ operátor pontosan akkor eleme $\mathbf{GL}(E)$-nek, ha az $(u_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat operátornormában korlátos.

(*Útmutatás.* Ha a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ operátor eleme $\mathbf{GL}(E)$-nek, akkor a $\mathbf{GL}(E)$-beli inverzió operátornorma szerinti folytonossága miatt az $(u_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right)^{-1}$-hoz az operátornormában, tehát az $(u_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szükségképpen korlátos az operátornorma szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $(u_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, és legyen $u := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Ekkor természetesen $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n^{-1} \circ (u_n - u)) = 0$ is teljesül az operátornorma szerint, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{-1} \circ u = id_E$. Létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\|u_n^{-1} \circ u - id_E\| < 1$, tehát $u_n^{-1} \circ u \in \mathbf{GL}(E)$, így az $u = u_n \circ (u_n^{-1} \circ u)$ operátor is eleme $\mathbf{GL}(E)$-nek.)

15. Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett és $u \in \mathscr{L}(E)$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az u operátor *általánosított sajátértékének* nevezzük, ha létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat E-ben, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ és

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n - u(x_n)) = 0.$$

a) Az u operátor minden sajátéréke általánosított sajátérték, és ha λ általánosított sajátértéke az u operátornak, akkor van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *korlátos* sorozat E-ben, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n - u(x_n)) = 0$.

b) Az u operátor minden általánosított sajátértéke eleme $Sp(u)$-nak.

c) Ha E Banach-tér, akkor az $Fr(Sp(u))$ halmaz minden eleme általánosított sajátértéke az u operátornak.

d) Adjunk példát olyan E Banach-térre és $u \in \mathscr{L}(E)$ operátorra, hogy u-nak van olyan általánosított sajátértéke, amely nem sajátérték.

(*Útmutatás.* a) Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ általánosított sajátérértéke az u operátornak, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n - u(x_n)) = 0$. Létezik olyan $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő sorozat $\mathbb{N}$-ben, hogy $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_{\sigma(n)}\|$. Ekkor az $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_{\sigma(n)}\| > 0$, továbbá természetesen $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_{\sigma(n)} - u(x_{\sigma(n)})) = 0$ is teljesül.

b) Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ általánosított sajátérértéke az u operátornak; megmutatjuk, hogy $\lambda \in Sp(u)$. Ha nem így volna, akkor $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$ teljesülne, ugyanakkor létezne olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat E-ben, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n - u(x_n)) = 0$. Ekkor $0 = (\lambda id_E - u)^{-1}\left(\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n - u(x_n))\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ami $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ miatt lehetetlen.

c) Tegyük fel, hogy E Banach-tér, és legyen $\lambda \in Fr(Sp(u))$, tehát az $Sp(u)$ zártsága miatt $\lambda \in Sp(u)$ és $\lambda \notin Int(Sp(u))$. Ekkor létezik olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{K} \setminus Sp(u)$-ban, hogy $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$. A feltevés alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$\lambda_n id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, és természetesen $\lambda id_E - u = \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n id_E - u)$ az operátornorma szerint. Tekintettel arra, hogy $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$, a **14** gyakorlat szerint a $((\lambda_n id_E - u)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat nem lehet korlátos az operátornormában. Ezért létezik olyan $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő sorozat $\mathbb{N}$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|(\lambda_{\sigma(n)} id_E - u)^{-1}\| > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\|(\lambda_{\sigma(n)} id_E - u)^{-1}\|} = 0$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$v_n := \frac{(\lambda_{\sigma(n)} id_E - u)^{-1}}{\|(\lambda_{\sigma(n)} id_E - u)^{-1}\|}.$$

Nyilvánvaló hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|(\lambda id_E - u)\circ v_n\| \leq \|((\lambda id_E - u) - (\lambda_{\sigma(n)} id_E - u))\circ v_n\| + \|(\lambda_{\sigma(n)} id_E - u)\circ v_n\| =$$

$$= |\lambda - \lambda_{\sigma(n)}|\|v_n\| + \frac{1}{\|(\lambda_{\sigma(n)} id_E - u)^{-1}\|},$$

ezért $\lim\limits_{n\to\infty}((\lambda id_E - u)\circ v_n) = 0$ az operátornorma szerint. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\|v_n\| = 1$, ezért van olyan $y \in E$, hogy $\|y\| = 1$ és $\|v_n(y)\| > 1/2$. Ezért kiválasztható olyan E-ben haladó $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|y_n\| = 1$ és $\|v_n(y_n)\| > 1/2$. Ha tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n := v_n(y_n)$, akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|v_n(y_n)\| \geq 1/2 > 0$, és $0 = \lim\limits_{n\to\infty}((\lambda id_E - u)\circ v_n)(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda id_E - u)(x_n)$, tehát λ általánosított sajátértéke u-nak.

d) Legyen $\boldsymbol{s}$ olyan sorozat, amelyre $Im(\boldsymbol{s}) = \mathbb{Q}\cap]0,1[$. Legyen $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, és az $l^p_{\mathbb{R}}$ sorozatteret lássuk el a $\|\cdot\|_p$ normával. Értelmezzük az

$$u_{\boldsymbol{s}} : l^p_{\mathbb{R}} \to l^p_{\mathbb{R}}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}'$$

lineáris operátort. Erről a **8.** gyakorlat eredményei alapján tudjuk, hogy $Sp(u_{\boldsymbol{s}}) = \overline{Im(\boldsymbol{s})} = [0,1]$, és $Sp_s(\boldsymbol{s}) = Im(\boldsymbol{s}) = \mathbb{Q}\cap]0,1[$. A c) szerint az $Fr(Sp(u_{\boldsymbol{s}})) = \{0,1\}$ halmaz elemei az $u_{\boldsymbol{s}}$-nek általánosított sajátértékei, de ezek nincsenek benne $\mathbb{Q}\cap]0,1[$-ben, tehát nem sajátértékek.)

16. (*Teljesen folytonos operátorok.*) Legyenek E és F normált terek. Az $u : E \to F$ lineáris operátort *teljesen folytonosnak* nevezzük, ha minden $B \subseteq E$ korlátos halmazra $u\langle B\rangle \subseteq F$ teljesen korlátos halmaz (V. fejezet, 5. pont).

a) Minden teljesen folytonos lineáris operátor folytonos, és ha E végtelen dimenziós normált tér, akkor az id_E operátor nem teljesen folytonos. Ha E véges dimenziós, akkor minden $E \to F$ folytonos lineáris operátor teljesen folytonos.

b) Ha $u : E \to F$ lineáris operátor, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) Az u operátor teljesen folytonos.

(ii) Létezik a 0 vektornak olyan V környezete E-ben, amelyre $u\langle V\rangle \subseteq F$ teljesen korlátos halmaz.

(iii) Minden E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozatra, $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$-nek létezik Cauchy-részsorozata.

Ha F Banach-tér, akkor ezek ekvivalensek a következő állítással.

(iv) Létezik a 0 vektornak olyan V környezete E-ben, amelyre $u\langle V\rangle \subseteq F$ relatív kompakt halmaz.

(Megjegyezzük, hogy a (iv) feltételnek eleget tevő operátorokat *kompakt operátoroknak* nevezzük.

c) Ha M metrikus tér, akkor egy $H \subseteq M$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $H_\varepsilon \subseteq M$ teljesen korlátos (de nem feltétlenül véges) halmaz, amelyre $H \subseteq \bigcup_{x\in H_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$. Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy az $E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátorok halmaza operátornormában zárt $\mathscr{L}(E;F)$-ben.

d) Ha M és M' metrikus terek, valamint $f : M \to M'$ egyenletesen folytonos függvény, akkor minden $H \subseteq M$ teljesen korlátos halmazra $f\langle H\rangle \subseteq M'$ teljesen korlátos halmaz. Ennek alkalmazásával igazoljuk, hogy ha E_1 és F_1 normált terek, $v \in \mathscr{L}(E_1;E)$ és $w \in \mathscr{L}(F;F_1)$, akkor minden $u : E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátorra $w \circ u \circ v : E_1 \to F_1$ teljesen folytonos operátor. Továbbá, az $E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátorok halmaza lineáris altere $\mathscr{L}(E;F)$-nek.

e) Ha E valós normált tér, akkor egy $u : E \to E$ lineáris operátor pontosan akkor teljesen folytonos, ha az $u_\mathbb{C} : E_\mathbb{C} \to E_\mathbb{C}$ operátor teljesen folytonos (**1**. gyakorlat).

(*Útmutatás.* a) Minden teljesen korlátos halmaz korlátos, és normált terek között egy lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha minden korlátos halmazt korlátos halmazra képez le. Ezért minden teljesen folytonos lineáris operátor folytonos.

b) (i)⇒(ii) Nyilvánvaló, mert normált térben a 0-nak létezik korlátos környezete.

(ii)⇒(iii) Legyen V olyan környezete E-ben a 0-nak, hogy $u\langle V\rangle \subseteq F$ teljesen korlátos halmaz, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges korlátos sorozat E-ben. Legyenek $r, C \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $B_r(0) \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|x_n\| \leq C$. Ekkor bármely $\lambda \in]0, r/C[$ valós szám olyan, hogy a $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat V-ben halad, tehát a $(\lambda u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az $u\langle V\rangle$ teljesen korlátos halmazban halad, ezért a teljesen korlátos halmazok Hausdorff-féle jellemzése (V. fejezet, 9. pont, *Hausdorff-tétel*) alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $(\lambda u(x_{\sigma(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben. Ekkor természetesen is $(u(x_{\sigma(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ is Cauchy-sorozat F-ben.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy (i) nem teljesül, tehát van olyan $B \subseteq E$ korlátos halmaz, hogy $u\langle B\rangle \subseteq F$ nem teljesen korlátos halmaz. A teljesen korlátos halmazok Hausdorff-féle jellemzése (V. fejezet, 9. pont, *Hausdorff-tétel*) alapján van olyan $u\langle B\rangle$-ben haladó $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelynek nincs Cauchy-részsorozata. Ha $\boldsymbol{s} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} (\overset{-1}{u}\langle\{y_n\}\rangle \cap B)$ tetszőleges elem, akkor $\boldsymbol{s}$ olyan b-ben haladó (tehát korlátos) sorozat, hogy az $u \circ \boldsymbol{s}$ sorozatnak nincs Cauchy-részsorozata, tehát (iii) nem igaz.

Teljes metrikus térben a teljesen korlátos halmazok megegyeznek a relatív korlátos halmazokkal (V. fejezet, 5. pont, **2**. gyakorlat), ezért F teljessége esetén (iv) és (ii) ekvivalensek.

c) Legyen M metrikus tér és $H \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $H_\varepsilon \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz, amelyre $H \subseteq \bigcup_{x\in H_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$. Megmutatjuk, hogy H teljesen korlátos halmaz.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és az $\varepsilon/4$ számhoz legyen $H_{\varepsilon/4} \subseteq H$ olyan teljesen korlátos halmaz, amelyre $H \subseteq \bigcup_{x \in H_{\varepsilon/4}} B_{\varepsilon/4}(x)$. A $H_{\varepsilon/4}$ halmaz teljesen korlátos, ezért van olyan $S \subseteq H_{\varepsilon/4}$ véges halmaz, hogy $H_{\varepsilon/4} \subseteq \bigcup_{x \in S} B_{\varepsilon/4}(x)$. Ha $x \in H$, akkor van olyan $x' \in H_{\varepsilon/4}$, hogy $x \in B_{\varepsilon/4}(x')$, és az x'-höz van olyan $x'' \in S$, hogy $x' \in B_{\varepsilon/4}(x'')$; ekkor

$$d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') < 2(\varepsilon/4) = \varepsilon/2,$$

tehát $x \in \bigcup_{x'' \in S} B_{\varepsilon/2}(x'')$. Ez azt jelenti, hogy $H \subseteq \bigcup_{x'' \in S} B_{\varepsilon/2}(x'')$, de az S véges halmaz nem szükségképpen része H-nak. Legyen $H' := \{x' \in S | H \cap B_{\varepsilon/2}(x') \neq \emptyset\}$ és rögzítsünk egy $f \in \bigcup_{x' \in H'} (H \cap B_{\varepsilon/2}(x'))$ függvényt. Ha $x \in H$, akkor van olyan $x' \in S$, hogy $x \in B_{\varepsilon/2}(x')$, tehát $x' \in H'$, így

$$d(x, f(x')) \leq d(x, x') + d(x', f(x')) < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $Im(f) \subseteq H$ olyan véges halmaz, amelyre

$$H \subseteq \bigcup_{x' \in H'} B_\varepsilon(f(x')) = \bigcup_{x'' \in Im(f)} B_\varepsilon(x''),$$

vagyis H teljesen korlátos halmaz.

Legyen $u \in \mathscr{L}(E; F)$ olyan operátor, amely eleme az $E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátorok halmaza operátornorma szerinti lezártjának. Legyen $B \subseteq E$ korlátos halmaz; azt kell igazolni, hogy $u\langle B\rangle$ teljesen korlátos halmaz F-ben. Az előzőek alapján ehhez elegendő azt igazolni, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $H_\varepsilon \subseteq u\langle B\rangle$ teljesen korlátos halmaz, amelyre $u\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{x \in H_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B \subseteq \overline{B}_r(0)$, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vehetünk olyan $v : E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátort, amelyre $\|v - u\| < \varepsilon/r$. Ekkor $x \in B$ esetén

$$\|v(x) - u(x)\| \leq \|v - u\|\|x\| < (\varepsilon/r)r = \varepsilon,$$

vagyis $u(x) \in B_\varepsilon(v(x))$. Ebből következik, hogy $u\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{x \in v\langle B\rangle} B_\varepsilon(v(x))$, ugyanakkor $v\langle B\rangle$ teljesen korlátos halmaz F-ben, tehát a $H := v\langle B\rangle$ választás megfelelő.

d) Legyenek (M, d), (M', d') metrikus terek, $f : M \to M'$ egyenletesen folytonos függvény, és $H \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre minden $x_1, x_2 \in M$ esetén, ha $d(x_1, x_2) < \delta$, akkor $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. A δ-hoz legyen $S \subseteq H$ olyan véges halmaz, amelyre $H \subseteq \bigcup_{x \in S} B_\delta(x; d)$. Ha $x \in H$, akkor van olyan $x' \in S$, hogy $x \in B_\delta(x'; d)$, tehát $d(x, x') < \delta$, így $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$, vagyis $f(x) \in B_\varepsilon(f(x'); d')$. Ebből következik, hogy $f\langle S\rangle \subseteq f\langle H\rangle$ olyan véges halmaz, amelyre

$$f\langle H\rangle \subseteq \bigcup_{x \in S} B_\varepsilon(f(x); d') = \bigcup_{y \in f\langle S\rangle} B_\varepsilon(y; d'),$$

vagyis $f\langle H\rangle$ teljesen korlátos halmaz M'-ben.

Legyenek E_1 és F_1 normált terek, $v \in \mathscr{L}(E_1; E)$, $w \in \mathscr{L}(F; F_1)$, és $u : E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátor. Legyen $B \subseteq E_1$ korlátos halmaz. Ekkor $v\langle B\rangle \subseteq E$ korlátos halmaz, ezért az u teljes folytonossága miatt az $u\langle v\langle B\rangle\rangle \subseteq F$ halmaz teljesen korlátos. Ugyanakkor a $w : F \to F_1$ függvény egyenletesen folytonos, így az iméntiek szerint a $(w \circ u \circ v)\langle B\rangle = w\langle u\langle v\langle B\rangle\rangle\rangle$ halmaz teljesen korlátos F_1-ben. Ez azt jelenti, hogy $w \circ u \circ v : E_1 \to F_1$ teljesen folytonos lineáris operátor.

Ha H_1 és H_2 teljesen korlátos halmazok F-ben, akkor a $H_1 + H_2 := \{y_1 + y_2 | (y_1 \in H_1) \wedge (y_2 \in H_2)\}$ halmaz is teljesen korlátos. Valóban, a $H_1 \times H_2$ halmaz teljesen korlátos az $F \times F$ szorzattérben (V. fejezet, 5. pont, **3**. gyakorlat), és az $s : F \times F \to F$ összeadás-függvény egyenletesen folytonos, így a $H_1 + H_2 = s\langle H_1 \times H_2\rangle$ halmaz teljesen korlátos. Ha $u_1, u_2 : E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátorok, akkor $u_1 + u_2$ is teljesen folytonos, mert ha $B \subseteq E$ korlátos halmaz, akkor $(u_1 + u_2)\langle B\rangle \subseteq u_1\langle B\rangle + u_2\langle B\rangle$, és az előzőek szerint $u_1\langle B\rangle + u_2\langle B\rangle$ teljesen korlátos halmaz, így $(u_1+u_2)\langle B\rangle$ is teljesen korlátos, hiszen teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos.

Ha $H \subseteq F$ teljesen korlátos halmaz és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor a $\lambda H := \{\lambda x | x \in H\}$ halmaz is teljesen korlátos, mert a $h_\lambda : F \to F;\ y \mapsto \lambda y$ függvény egyenletesen folytonos és $\lambda H = h_\lambda\langle H\rangle$. Ebből következik, hogy ha $u : E \to F$ teljesen folytonos lineáris operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor λu is teljesen folytonos, mert ha $B \subseteq E$ korlátos halmaz, akkor $(\lambda u)\langle B\rangle = \lambda u\langle B\rangle$ is teljesen korlátos halmaz.

e) Legyen E valós normált tér, $u : E \to E$ teljesen folytonos lineáris operátor, és $B \subseteq E_{\mathbb{C}}$ korlátos halmaz. Az **1**. gyakorlat b) pontja szerint minden $E_{\mathbb{C}} \ni (x, y)$-ra $\max(\|x\|, \|y\|) \leq \|(x, y)\|_{\mathbb{C}} \leq 2\max(\|x\|, \|y\|)$, ezért léteznek olyan $B_1, B_2 \subseteq E$ korlátos halmazok, hogy $B \subseteq B_1 \times B_2$. Ekkor

$$u_{\mathbb{C}}\langle B\rangle \subseteq u_{\mathbb{C}}\langle B_1 \times B_2\rangle = u\langle B_1\rangle \times u\langle B_2\rangle,$$

és az u teljes folytonossága miatt az $u\langle B_1\rangle$ és $u\langle B_2\rangle$ halmazok teljesen korlátosak E-ben. De teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos, ezért elég azt igazolni az E bármely két teljesen korlátos részhalmazának szorzata teljesen korlátos $E_{\mathbb{C}}$-ben a $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ szerint. Ez viszont a $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$-re imént felírt egynlőtlenségekből, és az V. fejezet, 5. pont, **3**. gyakorlat eredményéből következik.)

17. Legyen E normált tér.

a) Ha $H \subseteq E$ zárt lineáris altér és $H \neq E$, akkor minden $r \in]0, 1[$ valós számhoz létezik olyan $x \in E$, hogy $\|x\| = 1$ és $dist_H(x) > r$.

b) Az E vektortér pontosan akkor véges dimenziós, ha a zárt egységgömb teljesen korlátos halmaz E-ben.

(*Útmutatás.* a) Legyen $y \in E \setminus H$ rögzített vektor. Ekkor $dist_H(y) > 0$, különben a H zártsága miatt $y \in \overline{H} = H$ teljesülne. Ha $r \in]0, 1[$ tetszőleges valós szám, akkor $\frac{1}{r} dist_H(y) > \inf_{x' \in H} \|x' - y\|$, tehát létezik olyan $x_r \in F$, hogy $\|x_r - y\| < \frac{1}{r} dist_H(y)$. Ha $x := \frac{x_r - y}{\|x_r - y\|}$, akkor $\|x\| = 1$ és minden $H \ni x'$-re nyilvánvalóan $x_r - \|x_r - y\| x' \in H$, tehát

$$\|x - x'\| = \left\| \frac{x_r - y}{\|x_r - y\|} - x' \right\| = \frac{\|x_r - y - \|x_r - y\| x'\|}{\|x_r - y\|} =$$

$$= \frac{\|(x_r - \|x_r - y\|x') - y\|}{\|x_r - y\|} > \frac{dist_H(y)}{\frac{1}{r} dist_H(y)} = r.$$

b) Ha E véges dimenziós, akkor az E zárt egységgömbje kompakt, ezért teljesen korlátos.

Tegyük fel, hogy E végtelen dimenziós. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_n\| = 1$ és ha H_n jelöli az $\{x_k | k \in n\}$ halmaz által generált lineáris alteret E-ben, akkor $dist_{H_n}(x_n) > 1/2$.

Legyen $x_0 \in E$ tetszőleges olyan vektor, amelyre $\|x_0\| = 1$; ekkor $H_0 = \{0\}$, tehát $dist_{H_0}(x_0) = 1 > 1/2$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $(x_k)_{k\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $k < n$ természetes számra $\|x_k\| = 1$ és $dist_{H_k}(x_k) > 1/2$, ahol H_k az $\{x_j | j \in k\}$ halmaz által generált lineáris altér E-ben. Jelölje H_n az $\{x_j | j \in n\}$ halmaz által generált lineáris alteret E-ben. A H_n halmaz véges dimenziós lineáris altér, tehát $H_n \neq E$ és H_n zárt, így az a) szerint van olyan $x_n \in E$, amelyre $\|x_n\| = 1$ és $dist_{H_n}(x_n) > 1/2$. Ekkor az $(x_k)_{k\in n+1}$ rendszer olyan, hogy minden $k < n + 1$ természetes számra $\|x_k\| = 1$ és $dist_{H_k}(x_k) > 1/2$.

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_n\| = 1$ és ha H_n jelöli az $\{x_k | k \in n\}$ halmaz által generált lineáris alteret E-ben, akkor $dist_{H_n}(x_n) > 1/2$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor $x_m \in H_n$, tehát $\|x_n - x_m\| \geq dist_{H_n}(x_n) > 1/2$. Ezért az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat, így a teljesen korlátos halmazokat jellemző Hausdorff-tétel alapján az E zárt egységgömbje nem teljesen korlátos halmaz.)

18. (*Teljesen folytonos lineáris operátor spektruma.*) Legyen E Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $u \in \mathscr{L}(E)$ teljesen folytonos operátor.

a) Az u operátor minden 0-tól különböző általánosított sajátértéke az u-nak sajátértéke.

b) Minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $\mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(0; \mathbb{K})$ halmaz az u-nak csak véges sok sajátértékét tartalmazhatja.

c) Minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0; \mathbb{K})$ halmaz véges, és minden eleme sajátértéke u-nak.

d) $Sp(u)$ megszámlálható halmaz, $Sp(u) \setminus \{0\}$ minden eleme sajátérték, és $\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$ esetén a λ-hoz tartozó sajátaltér (tehát az $\{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ halmaz) véges dimenziós. Továbbá, $\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$ esetén λ izolált pontja $Sp(u)$-nak.

e) (*Fredholm-alternatíva.*) Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a két következő eset közül pontosan az egyik teljesül.

(I) Minden $E \ni y$-hoz létezik egyetlen olyan $x \in E$, hogy $x - \lambda u(x) = y$.

(II) Létezik olyan $x \in E$, hogy $x \neq 0$ és $x - \lambda u(x) = 0$.

(*Útmutatás.* a) Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ nem nulla általánosított sajátértéke u-nak, és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan korlátos sorozat E-ben, amelyre $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ és $\lim_{n\to\infty} (\lambda id_E - u)(x_n) = 0$ (**15**. gyakorlat a) pontja). Ekkor az $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos, ezért az u teljes folytonossága miatt az $\{u(x_n) | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz teljesen korlátos. A teljesen korlátos halmazok Hausdorff-féle jellemzése (V. fejezet, 9. pont, *Hausdorff-tétel*) alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $(u(x_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben, tehát az E teljessége miatt konvergens. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_{\sigma(n)} = \lambda^{-1}(\lambda id_E - u)(x_{\sigma(n)}) + \lambda^{-1}u(x_{\sigma(n)}),$$

és $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda id_E - u)(x_{\sigma(n)}) = 0$. Ezért az $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens E-ben; legyen $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_{\sigma(n)}$. Ekkor $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|x_{\sigma(n)}\| \geq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| > 0$, tehát $x \neq 0$. Ugyanakkor $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda id_E - u)(x_{\sigma(n)}) = 0$, amiből következik, hogy $(\lambda id_E - u)(x) = 0$, tehát λ sajátértéke u-nak.

b) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük olyan $r \in \mathbb{R}^+$ létezését, amelyre a $\mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{K})$ halmaz az u-nak végtelen sok sajátértékét tartalmazza. Legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan *injektív* sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén λ_n sajátértéke u-nak és $|\lambda_n| > r$. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $u(x_n) = \lambda_n u(x_n)$ és $x_n \neq 0$. A **13**. gyakorlat szerint az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat lineárisan független. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re jelölje H_n az $\{x_k | k \in n\}$ halmaz által generált n-dimenziós lineáris alteret E-ben. Világos, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $u\langle H_n\rangle \subseteq H_n$, hiszen ha $x \in H_n$, akkor van olyan $(\alpha_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$, hogy $x = \sum\limits_{k\in n}\alpha_k x_k$, tehát $u(x) = \sum\limits_{k\in n}\alpha_k\lambda_k x_k \in H_n$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor H_n zárt lineáris altere a H_{n+1} normált altérnek (mert H_n véges dimenziós), és $x_n \in H_{n+1} \setminus H_n$. A **17**. gyakorlat a) pontja szerint létezik olyan $y_n \in H_{n+1}$, hogy $\|y_n\| = 1$ és $dist_{H_n}(y_n) > 1/2$. Ezért kiválasztható olyan E-ben haladó $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|y_n\| = 1$ és $dist_{H_n}(y_n) > 1/2$.

Megmutatjuk, hogy az $(u(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs Cauchy-részsorzata, ami ellentmond annak, hogy u teljesen folytonos. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $H_{n+1} = \mathbb{K}x_n \oplus H_n$, ezért egyértelműen létezik olyan $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{K}$-ban, hogy $z_n := y_n - \alpha_n x_n \in H_n$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$u(y_n) = u(z_n + \alpha_n x_n) = u(z_n) + \alpha_n\lambda_n x_n =$$

$$= u(z_n) + \lambda_n(y_n - z_n) = \lambda_n y_n - (\lambda_n id_E - u)(z_n).$$

Tehát $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$ esetén

$$\|u(y_n) - u(y_m)\| = \|\lambda_n y_n - ((\lambda_n id_E - u)(z_n) + u(y_m))\| =$$

$$= |\lambda_n| \left\|y_n - \lambda_n^{-1}((\lambda_n id_E - u)(z_n) + u(y_m))\right\| > \frac{1}{2}|\lambda_n| > \frac{1}{2}r,$$

mert $y_m \in H_{m+1}$ miatt $u(y_m) \in H_{m+1} \subseteq H_n$, és $(\lambda_n id_E - u)(z_n) \in H_n$. Ebből látható, hogy az $(u(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs Cauchy-részsorzata.

c) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ rögzített szám. Először a $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ esetre bizonyítjuk, hogy az $Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ halmaz véges, és minden eleme sajátértéke u-nak. A **15**. gyakorlat c) pontja alapján az $Fr(Sp(u)) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ halmaz minden pontja általánosított sajátértéke u-nak, tehát az a) szerint sajátértéke is az u-nak, vagyis $Fr(Sp(u)) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C}) \subseteq Sp_s(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$. A b) alapján $Sp_s(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ véges halmaz, ezért a $H := Fr(Sp(u)) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ halmaz is véges. Megmutatjuk, hogy $Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C}) \subseteq$

H. Ezt indirekt bizonyjuk, tehát feltesszük, hogy $\lambda \in Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ és $\lambda \notin H$. A H halmaz végessége alapján egyszerű geometriai megfontolásokkal igazolható olyan $z \in \mathbb{C}$ létezése, amelyre $|z| = 1$ és az $L := \lambda + \mathbb{R}z \subseteq \mathbb{C}$ egyenes nem metszi a $H \cup \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ halmazt. Az $L \cap Sp(u)$ halmaz kompakt $\mathbb{C}$-ben és nem üres, mert $\lambda \in L \cap Sp(u)$, ezért a Weierstrass-féle maximum-elv alapján létezik olyan $\lambda_0 \in L \cap Sp(u)$, hogy

$$|\lambda_0 - \lambda| = \sup_{\lambda' \in L \cap Sp(u)} |\lambda' - \lambda|.$$

Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$ az a szám, amelyre $\lambda_0 = \lambda + t_0 z$. Ha $t_0 \neq 0$, akkor $\lambda_0 \in Fr(Sp(u))$, mert ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_0 + sign(t_0)\varepsilon_n z) = \lambda_0$, ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n-re$

$$|\lambda_0 + sign(t_0)\varepsilon_n z - \lambda| = (1+\varepsilon_n)|\lambda_0 - \lambda| > |\lambda_0 - \lambda|,$$

tehát $\lambda_0 + sign(t_0)\varepsilon_n z \notin Sp(u)$. Ha $t_0 = 0$, akkor $\lambda_0 = \lambda$ és $L \cap Sp(u) = \{\lambda_0\}$, tehát ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_0 + \varepsilon_n z) = \lambda_0$, ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\lambda_0 + \varepsilon_n z \notin Sp(u)$, így ekkor is teljesül az, hogy $\lambda_0 \in Fr(Sp(u))$. Tehát $\lambda_0 \in Fr(Sp(u))$ és $\lambda_0 \in L \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$, vagyis $\lambda_0 \in H$, ami $H \cap L = \emptyset$ miatt lehetetlen.

Legyen most $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Ekkor az **1**. gyakorlat e) pontja szerint $u_{\mathbb{C}}$ teljesen folytonos lineáris operátor az $E_{\mathbb{C}}$ komplex Banach-tér felett, ezért az előzőek alapján az $Sp(u_{\mathbb{C}}) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C})$ halmaz véges és minden eleme sajátértéke $u_{\mathbb{C}}$-nek. Az **1**. gyakorlat alapján $Sp(u) = \mathbb{R} \cap Sp(u_{\mathbb{C}})$, ezért az $Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{R})$ halmaz is véges. Ugyancsak az **1**. gyakorlat szerint az u sajátértékei megegyeznek az $u_{\mathbb{C}}$ valós sajátértékeivel, ezért az $Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{R})$ halmaz minden eleme sajátértéke u-nak.

d) Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. A c) szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Sp(u) \setminus \overline{B}_{r_n}(0;\mathbb{K})$ véges halmaz és $Sp(u) \setminus \overline{B}_{r_n}(0;\mathbb{K}) = Sp_s(u) \setminus \overline{B}_{r_n}(0;\mathbb{K})$. Ezért

$$Sp(u) \setminus \{0\} = Sp(u) \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(0;\mathbb{K}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Sp(u) \setminus \overline{B}_{r_n}(0;\mathbb{K})\big) =$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(Sp_s(u) \setminus \overline{B}_{r_n}(0;\mathbb{K})\big) = Sp_s(u) \setminus \{0\},$$

és $Sp(u) \setminus \{0\}$ megszámlálható, mert véges halmazok sorozatának az uniója. Ha $\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$, akkor van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda \in Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{K})$, és $Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{K})$ véges halmaz, tehát van olyan V környezete λ-nak $\mathbb{K}$-ban, hogy $V \subseteq \mathbb{K} \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{K})$ és $V \cap (Sp(u) \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{K})) = \{\lambda\}$; ekkor $V \cap Sp(u) = \{\lambda\}$, vagyis λ izolált pontja az u spektrumának.

Legyen $\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$; ekkor az $E_\lambda(u) := \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ sajátaltér véges dimenziós. Ha ugyananis $B \subseteq E_\lambda(u)$ korlátos halmaz, akkor $u\langle B\rangle \subseteq E$ teljesen korlátos, ugyanakkor $u\langle B\rangle = \lambda B$, ezért B is teljesen korlátos halmaz. Speciálisan, az $E_\lambda(u)$ zárt egységgömbje is teljesen korlátos E-ben, így az $E_\lambda(u)$ normált altérben is teljesen korlátos, tehát a **17**. gyakorlat b) pontja szerint $E_\lambda(u)$ véges dimenziós.

e) Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$. Ha $\lambda = 0$, akkor $id_E - \lambda u = id_E$, tehát (I) teljesül. Ha $\lambda \neq 0$ és $1/\lambda \notin Sp(u)$, akkor $(1/\lambda)id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, ezért $id_E - \lambda u \in \mathbf{GL}(E)$, így

(I) teljesül. Ha $\lambda \neq 0$ és $1/\lambda \in Sp(u)$, akkor a d) szerint $1/\lambda \in Sp_s(u)$, tehát (II) teljesül.)

19. Legyen X metrikus tér, Y kompakt metrikus tér, F normált tér, és $f : X \times Y \to F$ folytonos függvény. Az $Y \to F$ folytonos függvények $\mathscr{C}(Y;F)$ terét ellátjuk a sup-normával. Ekkor a

$$X \to \mathscr{C}(Y;F); \quad x \mapsto f(x,\cdot)$$

függvény folytonos.

(*Útmutatás.* Az állítás nyilvánvalóan igaz, ha $Y = \emptyset$, ezért feltesszük, hogy $Y \neq \emptyset$. Legyen $x_0 \in X$ rögzített pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $y \in Y$ esetén az f függvény folytonos a (x_0, y) pontban, ezért létezik az x_0-nak olyan U_y környezete X-ben és létezik az y-nak olyan V_y környezete Y-ban, hogy

$$(\forall\ (x, y') \in U_y \times V_y) : \ \|f(x, y') - f(x_0, y)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kiválasztunk ilyen tulajdonságú $(U_y)_{y\in Y}$ és $(V_y)_{y\in Y}$ környezet-rendszereket. Ekkor $Y = \bigcup\limits_{y\in Y} V_y$, tehát az Y kompaktsága folytán van olyan $H \subseteq Y$ véges halmaz, hogy $Y = \bigcup\limits_{y\in H} V_y$. Ha $H = \emptyset$, akkor $Y = \emptyset$ volna, ezért $H \neq \emptyset$. Legyen $U := \bigcap\limits_{y\in H} U_y$; ez az x_0-nak környezete X-ben. Ha $x \in U$ és $y \in Y$, akkor van olyan $z \in H$, hogy $y \in V_z$, tehát $(x, y) \in U \times V_z \subseteq U_z \times V_z$, ezért $\|f(x, y) - f(x_0, z)\| < \varepsilon/2$; ugyanakkor $(x_0, y) \in U_z \times V_z$ is teljesül, tehát $\|f(x_0, y) - f(x_0, z)\| < \varepsilon/2$, amiből következik, hogy $\|f(x, y) - f(x_0, y)\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$\sup_{(x,y)\in U\times Y} \|f(x, y) - f(x_0, y)\| \leq \varepsilon$$

teljesül, vagyis $x \in U$ esetén $|||f(x,\cdot) - f(x_0,\cdot)|||_Y \leq \varepsilon$.)

20. (*Fredholm-féle integráloperátor.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $T \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz. A $T \to \mathbb{K}$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ terét ellátjuk a sup-normával, és legyen $\mathscr{K} : T \times T \to \mathbb{K}$ folytonos függvény.

a) Minden $x \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ és $t \in T$ esetén a

$$T \to \mathbb{K}; \quad s \mapsto \mathscr{K}(t, s)x(s)$$

függvény folytonos, és a

$$T \to \mathbb{K}; \quad t \mapsto \int\limits_T \mathscr{K}(t, s)x(s)\ d\mu_n(s)$$

függvény is folytonos. Továbbá, ha $F_{\mathscr{K}}$ jelöli azt a $\mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ leképezést, amely minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \ni x$-hez hozzárendeli a $T \to \mathbb{K};\ s \mapsto \int\limits_T \mathscr{K}(t, s)x(s)\ d\mu_n(s)$ függvényt, akkor $F_{\mathscr{K}}$ teljesen folytonos lineáris operátor a $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ Banach-tér felett. (Ezt az $F_{\mathscr{K}}$ operátort a $\mathscr{K}$ *magfüggvény* által meghatározott *Fredholm-féle integráloperátornak* nevezzük.)

(*Fredholm-alternatíva.*) Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a két következő eset közül pontosan az egyik teljesül.

(I) Minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \ni y$-hoz létezik egyetlen olyan $x \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$, hogy minden $T \ni t$-re

$$x(t) - \lambda \int\limits_T \mathscr{K}(t,s)x(s)\ d\mu_n(s) = y(t).$$

(II) Létezik olyan $x \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$, hogy $x \neq 0$ és minden $T \ni t$-re

$$x(t) - \lambda \int\limits_T \mathscr{K}(t,s)x(s)\ d\mu_n(s) = 0.$$

(**Megjegyzés**. Ha $\mu_n^*(T) = 0$, akkor természetesen *minden* $\mathscr{K} : T \times T \to \mathbb{K}$ folytonos függvényre $F_{\mathscr{K}} = 0$; ez az eset nem érdekes. Ezért az érdektelen eset kiszűrése céljából a T halmazt rendszerint $\overline{\Omega}$ alakúnak választjuk, ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres relatív kompakt nyílt halmaz.)

(*Útmutatás.* a) Legyen $x \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ és $t \in T$ rögzített. Ha $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat T-ben, amely t-hez konvergál, akkor a

$$T \times T \to \mathbb{K}; \quad (t',s) \mapsto \mathscr{K}(t',s)x(s)$$

függvény folytonossága miatt a $((\mathscr{K}(t_k,\cdot)x(\cdot))^\circ)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $\mathbb{R}^n$-en a $(\mathscr{K}(t,\cdot)x(\cdot))^\circ$ függvényhez, és e függvénysorozat minden tagját a μ_n-integrálható $\left(\sup\limits_{(t',s')\in T\times T} |\mathscr{K}(t',s')|\right)\|x\|\chi_T$ függvény sup-normában majorálja, ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_T \mathscr{K}(t_k,s)x(s)\ d\mu_n(s) = \int\limits_T \mathscr{K}(t,s)x(s)\ d\mu_n(s),$$

ami azt jelenti, hogy a

$$T \to \mathbb{K}; \quad t \mapsto \int\limits_T \mathscr{K}(t,s)x(s)\ d\mu_n(s)$$

függvény folytonos.

Ha $x \in \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$, akkor minden $t \in T$ esetén

$$|F_{\mathscr{K}}(x)(t)| \leq \int\limits_T |\mathscr{K}(t,s)||x(s)|\ d\mu_n(s) \leq \left(\sup_{(t',s')\in T\times T} |\mathscr{K}(t',s')|\right)\mu_n^*(T)\|x\|,$$

ezért $\|F_{\mathscr{K}}\| \leq C\|x\|$, ahol $C := \left(\sup\limits_{(t',s')\in T\times T} |\mathscr{K}(t',s')|\right)\mu_n^*(T)$, így az $F_{\mathscr{K}} : \mathscr{C}(T;\mathbb{K}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ leképezés folytonos lineáris operátor.

Megmutatjuk, hogy $F_{\mathscr{K}}$ teljesen folytonos. Legyen ehhez $B \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ korlátos halmaz; azt kell igazolni, hogy $F_{\mathscr{K}}\langle B\rangle \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ teljesen korlátos halmaz. Az előzőek alapján minden $t \in T$ esetén $\sup\limits_{x\in B} |F_{\mathscr{K}}(x)(t)| \leq \sup\limits_{x\in B} \|F_{\mathscr{K}}(x)\| < +\infty$, vagyis az $\{F_{\mathscr{K}}(x)(t)|x \in B\} \subseteq \mathbb{K}$ halmaz korlátos, tehát teljesen korlátos $\mathbb{K}$-ban. Ezért az Ascoli-tétel (V. fejezet, 11. pont, **11**. gyakorlat) alapján elég volna azt megmutatni, hogy az $F_{\mathscr{K}}\langle B\rangle$ függvényhalmaz *ekvifolytonos*. Legyen $t_0 \in T$ rögzített pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varepsilon'\mu_n^*(T)\left(\sup\limits_{x\in B}\|x\|\right) < \varepsilon$. A **19**. gyakorlat eredményét alkalmazva kapjuk a t_0-nak olyan V környezetét T-ben, hogy minden $t \in V$ és $s \in T$ esetén $|\mathscr{K}(t,s) - \mathscr{K}(t_0,s)| < \varepsilon'$. Ekkor $t \in V$ és $x \in B$ esetén

$$|F_{\mathscr{K}}(x)(t) - F_{\mathscr{K}}(x)(t_0)| \leq \int\limits_T |\mathscr{K}(t,s) - \mathscr{K}(t_0,s)||x(s)|d\mu_n(s) \leq$$

$$\leq \varepsilon'\mu_n^*(T)\left(\sup_{x\in B}\|x\|\right) < \varepsilon,$$

tehát az $F_{\mathscr{K}}\langle B\rangle$ függvényhalmaz ekvifolytonos a t_0 pontban.)

21. (*Volterra-féle integráloperátor.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és

$$\mathscr{K} : \{(t,s) \in [a,b] \times [a,b] | s \leq t\} \to \mathbb{K}$$

folytonos függvény.

a) Minden $x \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ és $t \in [a,b]$ esetén az

$$[a,t] \to \mathbb{K}; \quad s \mapsto \mathscr{K}(t,s)x(s)$$

függvény folytonos és az

$$[a,b] \to \mathbb{K}; \quad t \mapsto \int\limits_a^t \mathscr{K}(t,s)x(s)\ ds$$

függvény is folytonos. Továbbá, ha $V_{\mathscr{K}}$ jelöli azt a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}) \to \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ leképezést, amely minden $x \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ függvényhez hozzárendeli az $[a,b] \to \mathbb{K}$; $t \mapsto \int\limits_a^t \mathscr{K}(t,s)x(s)\ ds$ függvényt, akkor $V_{\mathscr{K}}$ olyan teljesen folytonos lineáris operátor a sup-normával ellátott $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ Banach-tér felett, hogy $Sp(V_{\mathscr{K}}) = \{0\}$. (Ezt az $V_{\mathscr{K}}$ operátort a $\mathscr{K}$ *magfüggvény* által meghatározott *Volterra-féle integráloperátornak* nevezzük.)

b) Minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $y \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$, hogy minden $t \in [a,b]$ pontra

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^t \mathscr{K}(t,s)x(s)\ ds = y(t).$$

(*Útmutatás.* a) Legyen $x \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$. Ha $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $[a,b]$-ben, amely a $t \in [a,b]$ ponthoz konvergál, akkor $\mathscr{K}$ folytonossága miatt a $\left(\chi_{[a,t_k]}(\mathscr{K}()t,\cdot)x(\cdot))^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a $\mathbb{R}\setminus\{t\}$ halmazon (tehát $\mu_\mathbb{R}$-majdnem mindenütt) a $\chi_{[a,t]}(\mathscr{K}()t,\cdot)x(\cdot))^\circ$ függvényhez, és e függvénysorozat minden tagját a $\mu_\mathbb{R}$-integrálható $(\sup|\mathscr{K}|)\|x\|\chi_{[a,b]}$ függvény sup-normában majorálja, ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{[a,t_k]}\mathscr{K}(t_k,s)x(s)\;d\mu_\mathbb{R}(s)=\int\limits_{[a,t]}\mathscr{K}(t_k,s)x(s)\;d\mu_\mathbb{R}(s),$$

ami azt jelenti, hogy az

$$[a,b]\to\mathbb{K};\quad t\mapsto\int\limits_a^t\mathscr{K}(t,s)x(s)\;ds$$

függvény folytonos.

A $V_\mathscr{K}$ operátor folytonossága hasonlóan látható be, mint a **20**. gyakorlat a) pontjában. A $V_\mathscr{K}$ operátor teljes folytonosságának bizonyítása is ugyanúgy történhet, miután a $\mathscr{K}$ függvényt folytonosan kiterjesztjük az $[a,b]\times[a,b]$ téglára a Tietze-tétellel (**TOP**, 2. pont), és erre a kiterjesztésre alkalmazzuk a **19**. gyakorlat eredményét.

Legyen $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$; megmutatjuk, hogy $\lambda\notin Sp(u)$. Indirekt bizonyítunk, tehat feltesszük, hogy $\lambda\in Sp(u)$, tehát a **18**. gyakorlat d) pontja szerint $\lambda\in Sp_s(u)$, így van olyan $x_0\in\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$, hogy $x_0\neq 0$ és $V_\mathscr{K}(x_0)=\lambda x_0$. Legyen $t_0:=\sup\{t\in[a,b]|[a,t]\subseteq\overset{-1}{x_0}\langle\{0\}\rangle\}$. Az x_0 függvény folytonossága miatt $x_0(t_0)=0$ is teljesül, és $t_0<b$, különben $x_0=0$ lenne. Ha $\delta\in]0,b-t_0[$ tetszőleges valós szám, akkor létezik olyan $t\in]t_0,t_0+\delta[$, hogy $x_0(t)\neq 0$, különben $[a,t]\subseteq\overset{-1}{x_0}\langle\{0\}\rangle$, ami $t_0<t$ és a t_0 definíciója alapján lehetetlen. Legyen $\delta\in]0,b-t_0[$ rögzített. A Weierstrass-féle maximum-elv alapján van olyan $t_\delta\in[t_0,t_0+\delta]$, hogy $|x_0(t_\delta)|=\sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x_0(t)|>0$; ekkor

$$|\lambda|\left(\sup_{t\in[t_0,t_0+\delta]}|x_0(t)|\right)=|\lambda||x_0(t_\delta)|=|V_\mathscr{K}(x_0)(t_0)|\leq\int\limits_{[a,t_\delta]}|\mathscr{K}(t_\delta,s)||x_0(s)|\;d\mu_\mathbb{R}(s)=$$

$$=\int\limits_{[t_0,t_\delta]}|\mathscr{K}(t_\delta,s)||x_0(s)|\;d\mu_\mathbb{R}(s)\leq(\sup|\mathscr{K}|)\left(\sup_{t\in[t_0,t_\delta]}|x_0(t)|\right)(t_\delta-t_0)\leq$$

$$\leq(\sup|\mathscr{K}|)\left(\sup_{t\in[t_0,t_\delta]}|x_0(t)|\right)\delta,$$

ezért $|\lambda|\leq(\sup|\mathscr{K}|)\delta$ teljesül minden $\delta\in]0,b-t_0[$ számra, ami ellentmond annak, hogy $\lambda\neq 0$.

Ezzel megmutattuk, hogy $Sp(V_\mathscr{K})\subseteq\{0\}$. Ugyanakkor a $V_\mathscr{K}$ operátor nem eleme $\mathbf{GL}(\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}))$-nak, hiszen még csak nem is szürjektív, mert minden $y\in Im(V_\mathscr{K})$

esetén $y(a) = 0$. Ezért $0 \in Sp(V_{\mathscr{K}})$, amivel az $Sp(V_{\mathscr{K}}) = \{0\}$ egyenlőséget igazoltuk.

b) Ha $\lambda = 0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Ha $\lambda \neq 0$, akkor az a) alapján $1/\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{K} \setminus Sp(V_{\mathscr{K}})$, vagyis az $1/\lambda$ szám eleme a $V_{\mathscr{K}}$ operátor rezolvens halmazának, így $(1/\lambda) id_{\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})} - V_{\mathscr{K}} \in \mathbf{GL}(\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}))$, tehát $id_{\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})} - \lambda V_{\mathscr{K}} \in \mathbf{GL}(\mathscr{C}([a,b];\mathbb{K}))$ is teljesül, amiből következik, hogy minden $y \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{K})$, hogy $x - \lambda V_{\mathscr{K}}(x) = y$.)

2. Baire-féle kategóriatétel

Definíció. Legyen M metrikus tér és $H \subseteq M$.

– A H halmazt *sehol sem sűrűnek* nevezzük, ha $Int(\overline{H}) = \emptyset$.

– A H halmazt *első kategóriájúnak* nevezzük, ha H előáll az M megszámlálható sok sehol sem sűrű részhalmazának uniójaként.

– A H halmazt *második kategóriájúnak* nevezzük, ha nem első kategóriájú (vagyis H nem áll elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként).

Megjegyzések. 1) Sehol sem sűrű (illetve első kategóriájú) halmaz minden részhalmaza is sehol sem sűrű (illetve első kategóriájú). Egy halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha a lezártja sehol sem sűrű. Első kategóriájú halmazok *megszámlálható* rendszerének az uniója szintén első kategóriájú. Ezek az állítások a definícióból nyilvánvalóan következnek.

2) Ha M metrikus tér, akkor egy $H \subseteq M$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $M \setminus \overline{H}$ halmaz sűrű M-ben. Valóban, $Int(\overline{H}) = M \setminus \overline{(M \setminus \overline{H})}$, ezért H sehol sem sűrűsége (azaz $Int(\overline{H}) = \emptyset$) ekvivalens azzal, hogy $\overline{(M \setminus \overline{H})} = M$ (azaz $M \setminus \overline{H}$ sűrű).

3) *Véges* sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű. Ezt elegendő két sehol sem sűrű halmaz uniójára igazolni. Legyen M metrikus tér és legyenek $H_1, H_2 \subseteq M$ sehol sem sűrű halmazok. Azt kell megmutatni, hogy az $M \setminus \overline{H_1 \cup H_2}$ halmaz sűrű M-ben, vagyis $\overline{H_1 \cup H_2} = \overline{H_1} \cup \overline{H_2}$ és a de-Morgan egyenlőség alapján azt, hogy $(M \setminus \overline{H_1}) \cap (M \setminus \overline{H_2})$ sűrű halmaz. Ennek bizonyításához legyen $x \in M$ és V nyílt környezete M-nek. A H_1 halmaz sehol sem sűrű, ezért $M \setminus \overline{H_1}$ sűrű M-ben, tehát $(M \setminus \overline{H_1}) \cap V \neq \emptyset$; legyen $x' \in (M \setminus \overline{H_1}) \cap V$. Az $(M \setminus \overline{H_1}) \cap V$ halmaz nyílt környezete x'-nek, ugyanakkor H_2 sehol sem sűrű, tehát $M \setminus \overline{H_2}$ sűrű M-ben, így $(M \setminus \overline{H_2}) \cap (M \setminus \overline{H_1}) \cap V \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $(M \setminus \overline{H_1} \cup \overline{H_2}) \cap V \neq \emptyset$, így $M \setminus \overline{H_1 \cup H_2}$ sűrű halmaz, vagyis $H_1 \cup H_2$ sehol sem sűrű.

4) *Megszámlálhatóan végtelen* sok sehol sem sűrű halmaz uniója nem szükségképpen sehol sem sűrű (csak első kategóriájú). Például $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint minden egy elemű halmaz sehol sem sűrű (**1**. gyakorlat), így $\mathbb{Q}$ első kategóriájú halmaz, de természetesen $\mathbb{Q}$ nem sehol sem sűrű $\mathbb{R}$-ben.

5) Ha M metrikus tér, akkor egy $H \subseteq M$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az M *zárt* sehol sem sűrű részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $H \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Valóban, ha H első kategóriájú, és $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sehol sem sűrű halmazok olyan sorozata, hogy $H = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, akkor a $(\overline{H_n})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat mindegyik tagja sehol sem sűrű zárt halmaz, továbbá $H \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{H_n}$. Megfordítva, ha $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az M zárt sem sűrű részhalmazainak olyan sorozata, hogy $H \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, akkor $H = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (H \cap F_n)$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $F_n \cap H$ sehol sem sűrű halmaz, tehát H első kategóriájú.

Tétel. (*Baire-féle kategóriatétel.*) Teljes metrikus tér minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.

Bizonyítás. Legyen M teljes metrikus tér, $\Omega \subseteq M$ nem üres nyílt halmaz, és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az M zárt sehol sem sűrű részhalmazainak tetszőleges sorozata. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, így Ω nem lehet első kategóriájú.

Először megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\bigcup_{k=0}^{n} F_k$ sehol sem sűrű zárt halmaz, vagyis $Int\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = \emptyset$, így $\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n} F_k \neq \emptyset$, különben $\emptyset \neq \Omega \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} F_k$ teljesülne, tehát $Int\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) \neq \emptyset$ igaz volna.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva igazoljuk olyan $M \times \mathbb{R}^+$-ban haladó $((x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre

$$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \Omega \setminus F_0,$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\overline{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} F_k,$$

valamint $r_{n+1} < \dfrac{r_n}{2}$ teljesül.

Az $\Omega \setminus F_0$ halmaz nyílt és nem üres, így van olyan $x_0 \in M$ és $r_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \Omega \setminus F_0$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $((x_m, r_m))_{0\leq m\leq n}$ olyan rendszer $M \times \mathbb{R}^+$-ban, hogy $\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \Omega \setminus F_0$, és minden $0<m<n$ természetes számra $\overline{B}_{r_{m+1}}(x_{m+1}) \subseteq B_{r_m}(x_m) \setminus \bigcup_{k=0}^{m+1} F_k$, valamint minden $m < n$ természetes számra $r_{m+1} < \dfrac{r_m}{2}$. Ekkor $\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} F_k \neq \emptyset$ és ez nyílt halmaz, így van olyan $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\overline{B}_r(x) \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} F_k$. Legyen $x_{n+1} := x$ és $r_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, amelyre $r_{n+1} < \min(r, r_n/2)$. Ekkor az $((x_m, r_m))_{0\leq m\leq n+1}$ rendszer $M \times \mathbb{R}^+$-ben halad, és minden $m < n+1$ természetes számra $\overline{B}_{r_{m+1}}(x_{m+1}) \subseteq B_{r_m}(x_m) \setminus \bigcup_{k=0}^{m+1} F_k$, valamint minden $m < n$ természetes számra $r_{m+1} < \dfrac{r_m}{2}$. Ezért a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele szerint vehetünk olyan $M \times \mathbb{R}^+$-ban haladó $((x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely rendelkezik az előírt tulajdonságokkal.

Könnyen látható, hogy $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$ esetén $x_n \in \overline{B}_{r_n}(x_n) \subseteq \overline{B}_{r_m}(x_m)$, így d-vel jelölve az M feletti metrikát; $d(x_m, x_n) \leq r_m$ teljesül. Ebből látszik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re $d(x_m, x_n) \leq r_{\min(m,n)}$. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $r_n < \dfrac{r_0}{2^n}$, vagyis az $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat 0-hoz tart $\mathbb{R}$-ben. Ezért $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M-ben, így vehetjük azt az $x \in M$ pontot, amelyre $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor az $(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat az $\overline{B}_{r_m}(x_m)$ zárt halmazban halad, ezért

$x = \lim_{n\to\infty} x_{m+n} \in \overline{B}_{r_m}(x_m)$. Tehát minden $\mathbb{N} \ni m$-re $x \in \overline{B}_{r_m}(x_m)$, ugyanakkor $\overline{B}_{r_m}(x_m) \cap \bigcup_{k=0}^{m} F_k = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $x \in \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ teljesül. ■

A Baire-féle kategóriatételből következik, hogy ha M nem üres teljes metrikus tér és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az M zárt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy F_n belseje nem üres, hiszen ha nem így volna, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re F_n sehol sem sűrű volna, tehát M első kategóriájú halmaz lenne M-ben, holott M nem üres nyílt halmaz az M teljes metrikus térben.

A Baire-féle kategóriatétel szerint egy metrikus tér teljessége *elégséges* ahhoz, hogy benne minden nem üres nyílt halmaz második kategóriájú legyen; azonban a teljesség *nem szükséges* ehhez (**5**. gyakorlat).

A Baire-féle kategóriatétel itt bizonyított alakja a metrikus terek elméletéhez tartozik, és abban számos alkalmazása van, amit a gyakorlatok jól illusztrálnak. Most alkalmazni fogjuk a tétel a normált terek elméletében. Ehhez először emlékeztetünk arra, hogy a $\mathbb{K}$ feletti E vektortér H részhalmazát *elnyelőnek* nevezzük, ha minden $x \in E$ esetén létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \alpha.H$ (VI. fejezet, 2. pont, 4. példa). Világos, hogy normált térben a 0 vektor minden zárt gömbi környezete *zárt*, *konvex* és *elnyelő* halmaz; azonban létezik olyan normált tér, amelyben van olyan zárt, konvex és elnyelő halmaz, amely nem környezete a 0-nak. Azonban Banach-terek esetében ez lehetetlen; ezt mutatja a következő tétel.

Tétel. Banach-térben minden zárt, konvex és elnyelő halmaz a 0-nak környezete.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha T olyan konvex halmaz az E vektortérben, hogy $0 \in T$, akkor minden $\alpha \in [0,1]$ valós számra $\alpha.T \subseteq T$, hiszen minden $x \in T$ pontra $\alpha x = (1-\alpha)0 + \alpha x \in T$. Továbbá, ha T olyan konvex halmaz az E vektortérben, hogy $0 \in T$, akkor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $0 \leq \alpha < \beta$ esetén $\alpha.T \subseteq \beta.T$ teljesül, mert az előzőek szerint $(\alpha/\beta).T \subseteq T$, így $\alpha.T = \beta.((\alpha/\beta).T) \subseteq \beta.T$.

Legyen most E Banach-tér és $T \subseteq E$ zárt, konvex és elnyelő halmaz. Feltesszük, hogy T *szimmetrikus* is, vagyis $-T \subseteq T$ teljesül. Az általános eset bizonyítását majd visszavezetjük erre a speciális esetre.

Fennáll az $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} n.T$ egyenlőség, hiszen $x \in E$ esetén van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \alpha.T$, hiszen T elnyelő, így véve bármely $n > \alpha$ természetes számot: $x \in \alpha.T \subseteq n.T$ teljesül. A Baire-féle kategóriatétel szerint van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $n.T$ nem sehol sem sűrű halmaz, vagyis $Int(\overline{n.T}) \neq \emptyset$. Az $E \to E$; $x \mapsto n.x$ leképezés (lineáris) homeomorfizmus, ezért $Int(\overline{n.T}) = n.Int(\overline{T})$. Ebből következik, hogy $Int(\overline{T}) \neq \emptyset$; legyen $x \in Int(\overline{T}) = Int(T)$ rögzített pont, és vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $B_r(x) \subseteq T$.

Ekkor a T szimmetrikussága miatt $B_r(-x) \subseteq T$ is igaz, mert ha $y \in B_r(-x)$, akkor $r > \|y - (-x)\| = \|x - (-y)\|$, vagyis $-y \in B_r(x) \subseteq T$, így $y \in -T \subseteq T$. Ha most $y \in B_r(0)$, akkor $y + x \in B_r(x) \subseteq T$ és $y - x \in B_r(-x) \subseteq T$, tehát a T konvexitása folytán $y = \frac{1}{2}(y+x) + \frac{1}{2}(y-x) \in T$. Ez azt jelenti, hogy $B_r(0) \subseteq T$, tehát T környezete a 0-nak.

Ha a $T \subseteq E$ halmaz zárt, konvex és elnyelő, de nem feltétlenül szimmetrikus, akkor vegyük a $T \cap (-T)$ halmazt, amely nyilvánvalóan zárt, konvex és szimmetrikus. Ha ez elnyelő is volna, akkor az előzőek alapján környezete lenne a 0 vektornak, és akkor T még inkább környezete lenne 0-nak. Tehát elég azt igazolni, hogy a $T \cap (-T)$ halmaz elnyelő. Ehhez legyen $x \in E$ rögzített vektor. A T halmaz elnyelő, így x-hez van olyan $\alpha_+ \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \alpha_+.T$, ugyanakkor a $-x$ vektorhoz van olyan $\alpha_- \in \mathbb{R}^+$, hogy $-x \in \alpha_-.T$. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, amelyre $\alpha > \max(\alpha_+, \alpha_-)$. Ekkor $\alpha_+.T \subseteq \alpha.T$ és $\alpha_-.T \subseteq \alpha.T$ miatt $x, -x \in \alpha.T$. Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{1}{\alpha}x \in T$ és $\dfrac{1}{\alpha}(-x) \in T$, azaz $\dfrac{1}{\alpha}x \in -T$. Tehát $\dfrac{1}{\alpha}x \in T \cap (-T)$, azaz $x \in \alpha.(T \cap (-T))$, így $T \cap (-T)$ elnyelő halmaz. ■

Gyakorlatok

1. Ha M metrikus tér, akkor $x \in M$ esetén az $\{x\}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha x nem izolált pontja M-bek. Ha az M nem üres metrikus tér teljes és nincs izolált pontja, akkor az M halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy $M \neq \emptyset$ és M teljes. Világos, hogy $M = \bigcup_{x \in M} \{x\}$, tehát ha az M halmaz megszámlálható volna, akkor a Baire-féle kategóriatétel alapján volna olyan $x \in M$, hogy $\{x\}$ nem sehol sem sűrű, vagyis x izolált pontja M-nek.)

2. Az irracionális számok halmaza nem állítható elő megszámlálható sok $\mathbb{R}$-beli zárt halmaz uniójaként.

(*Útmutatás.* Ha létezne $\mathbb{R}$-ben zárt halmazoknak olyan $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, akkor $\mathbb{R} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \right)$, tehát a Baire-féle kategóriatétel alapján létezne olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $Int(F_n) \neq \emptyset$, ezért $Int(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, ami nem igaz.)

3. Ha E normált tér és $F \subseteq E$ olyan zárt lineáris altér, hogy $F \neq E$, akkor F sehol sem sűrű halmaz E-ben. Ha E végtelen dimenziós Banach-tér, akkor nem létezik olyan $B \subseteq E$ megszámlálható halmaz, hogy az E minden eleme előáll véges B-ben haladó rendszer lineáris kombinációjaként.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az E végtelen dimenziós Banach-térben létezik olyan B megszámlálható halmaz, amelyre az E minden eleme előáll véges B-ben haladó rendszer lineáris kombinációjaként. Ekkor B nem véges, különben E véges dimenziós lenne. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to B$ bijekció. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n := \{\sum_{k \in n} \lambda_k \sigma(k) \mid (\lambda_k)_{k \in n} \in \mathbb{K}^n\}.$$

Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén F_n az E-nek n-dimenziós lineáris altere, így F_n zárt E-ben, és a hipotézis szerint $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $F_n \neq E$, ezért F_n sehol sem sűrű E-ben, így E első kategóriájú halmaz, ami ellentmond a Baire-féle kategóriatételnek.)

4. A $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ vektortér felett egyáltalán nem létezik olyan norma, amellyel ellátva $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ Banach-tér volna.

(*Útmutatás.* Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n := \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \mid (\forall\ k \in \mathbb{N}) : \ (k > n) \Rightarrow (\boldsymbol{s}(k) = 0)\}.$$

Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re F_n véges dimenziós lineáris altere $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-nek és $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Ha volna olyan norma $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ felett, amellyel $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ Banach-tér, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén F_n zárt lineáris altere $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-nek és $F_n \neq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, tehát a **3**. gyakorlat szerint $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ első kategóriájú halmaz lenne, ami ellentmond a Baire-féle kategóriatételnek.)

5. Legyen M a $\mathbb{Q} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ és $\{(1/n, k/n) \in \mathbb{R}^2 | (n \in \mathbb{N}^+) \wedge (k \in \mathbb{Z})\}$ halmazok uniója. Az M halmazt ellátjuk az $\mathbb{R}^2$ feletti euklidészi metrika leszűkítésével. Ekkor M nem teljes metrikus tér, de az M minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.

(*Útmutatás.* Jellemezzük a sehol sem sűrű halmazokat ebben a metrikus térben!)

6. Értelmezzük a következő függvényhalmazt:

$$E := \{\ f \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}) \mid (\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in [0, \delta[) :\ f(t) = 0\ \},$$

amely nyilvánvalóan lineáris altere a $[0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ terének. Az E valós vektorteret ellátjuk a sup-normával. Ekkor a

$$T := \left\{\ f \in E \,\middle|\, (\forall\ m \in \mathbb{N}^+) :\ \left| f\left(\frac{1}{m}\right)\right| \leq \frac{1}{m}\ \right\}$$

halmaz olyan szimmetrikus, zárt, konvex és elnyelő részhalmaza E-nek, amely *nem környezete* a $0 \in E$ vektornak az E normált térben. Továbbá; az E halmaz első kategóriájú az E metrikus térben. (Természetesen E nem Banach-tér.)

(*Útmutatás.* Megmutatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor a $B_r(0)$ gömb nem részhalmaza T-nek. Legyen tehát $r \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re értelmezzük a következő függvényt:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & ; \text{ha } t \in [0, \frac{1}{3n}[, \\ 6t - \dfrac{2}{n} & ; \text{ha } t \in [\frac{1}{3n}, \frac{1}{2n}[, \\ \dfrac{1}{n} & ; \text{ha } t \in [\frac{1}{2n}, 1]. \end{cases}$$

Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f_n \in E$, és ha $n > \dfrac{1}{r}$, akkor $f_n \in B_r(0)$; ugyanakkor minden $m \in \left]n, \dfrac{5n}{2}\right[$ természetes számra $f_n\left(\dfrac{1}{m}\right) > \dfrac{1}{m}$, tehát $f_n \notin T$. Ezért $B_r(0)$ nem részhalmaza T-nek, vagyis T nem környezete a 0-nak E-ben.

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós zérussorozat a $]0,1]$ intervallumban, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_n := \{f \in E | (\forall\ t \in [0, \varepsilon_n]) :\ f(t) = 0\}.$$

Ekkor $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E valódi zárt lineáris altereinek olyan sorozata, amelyre $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, ezért E első kategóriájú halmaz.)

7. Ha M teljes metrikus tér és $H \subseteq M$ első kategóriájú halmaz, akkor $Int(H) = \emptyset$ és $M \setminus H$ sűrű halmaz M-ben.

(*Útmutatás.* Tudjuk, hogy $\overline{M \setminus H} = M \setminus Int(M \setminus (M \setminus H)) = M \setminus Int(H)$, tehát $M \setminus H$ pontosan akkor sűrű M-ben, ha $Int(H) = \emptyset$. Ha $Int(H) \neq \emptyset$, akkor a Baire-féle kategóriatétel szerint $Int(H)$ második kategóriájú halmaz, ezért H nem lehet első kategóriájú.)

8. Legyenek (M, d) és (M', d') metrikus terek. Minden $f : M \to M'$ függvényre vezessük be az

$$\omega_f : M \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \inf_{V \in \mathscr{T}_d(x)} (diam_{d'}(f\langle V \rangle))$$

leképezést, amit az f *ingadozás-függvényének* nevezünk.

a) Az $f : M \to M'$ függvény pontosan akkor folytonos az $\mathfrak{a} \in M$ pontban, ha $\omega_f(\mathfrak{a}) = 0$; vagyis az f szakadási pontjainak halmaza egyenlő az $\{x \in M | \omega_f(x) > 0\}$ halmazzal.

b) Ha $f : M \to M'$ tetszőleges függvény, akkor az $\omega_f : M \to \mathbb{R}_+$ függvény felülről félig folytonos (V. fejezet, 8. pont, **4**. gyakorlat).

c) Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n : M \to M'$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az M halmazon. Ekkor a $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ pontonkénti limeszfüggvény szakadási pontjainak halmaza *első kategóriájú* halmaz M-ben, és ha az (M, d) metrikus tér teljes, akkor a $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ függvény folytonossági pontjainak halmaza *sűrű* M-ben.

d) A $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirichlet-függvény nem állítható elő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények sorozatának pontonkénti limeszfüggvényeként, de létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknek olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy $\chi_{\mathbb{Q}} = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re f_n előállítható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények sorozatának pontonkénti limeszfüggvényeként.

(*Útmutatás.* a) Tegyük fel, hogy f folytonos az $\mathfrak{a} \in M$ pontban. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete, hogy $f\langle V \rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); d')$; ekkor $x_1, x_2 \in V$ esetén

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d'(f(x_1), f(\mathfrak{a})) + d'(f(\mathfrak{a}), f(x_2)) < 2\varepsilon,$$

vagyis $\omega_f(\mathfrak{a}) \leq diam_{d'}(f\langle V \rangle) \leq 2\varepsilon$. Ebből következik, hogy $\omega_f(\mathfrak{a}) = 0$.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{a} \in M$ olyan, hogy $\omega_f(\mathfrak{a}) = 0$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $\omega_f(\mathfrak{a}) < \varepsilon$, tehát létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V környezete M-ben, amelyre $diam_{d'}(f\langle V \rangle) < \varepsilon$; ekkor $x \in V$ esetén $d'(f(x), f(\mathfrak{a})) \leq diam_{d'}(f\langle V \rangle) < \varepsilon$, vagyis $f\langle V \rangle \subseteq B_\varepsilon(f(\mathfrak{a}); d')$. Ez azt jelenti, hogy f folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

b) Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $\mathfrak{a} \in [\omega_f < c]$. Ekkor $\omega_f(\mathfrak{a}) < c$, tehát van olyan V környezete $\mathfrak{a}$-nak M-ben, hogy $diam_{d'}(f\langle V \rangle) < c$. Legyen $\Omega \subseteq M$ olyan nyílt halmaz, hogy $\mathfrak{a} \in \Omega \subseteq V$. Ha $x \in \Omega$, akkor Ω környezete x-nek M-ben, ezért

$$\omega_f(x) \leq diam_{d'}(f\langle \Omega \rangle) \leq diam_{d'}(f\langle V \rangle) < c,$$

vagyis $x \in [\omega_f < c]$, azaz $\Omega \subseteq [\omega_f < c]$. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{a} \in Int([\omega_f < c])$, vagyis $[\omega_f < c]$ nyílt halmaz M-ben, tehát ω_f felülről félig folytonos függvény.

c) Legyen $f := \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, valamint minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra és $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$F_n(\varepsilon) := \bigcap_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ p,q \geq n} \{x \in M \mid d'(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon' \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, akkor az $[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')$ halmaz sehol sem sűrű, vagyis $Int\left(\overline{[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')}\right) = \emptyset$. Tegyük fel ugyanis, hogy $n \in \mathbb{N}$

és $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')$ *nem* sehol sem sűrű, vagyis létezik olyan $\Omega \subseteq \overline{[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')}$ halmaz, amely nyílt és nem üres; bebizonyítjuk, hogy ekkor $\varepsilon' > \dfrac{\varepsilon}{3}$. Minden $p, q \in \mathbb{N}$ számra $\{x \in M | d'(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon'\}$ zárt halmaz M-ben, ezért $F_n(\varepsilon')$ is zárt halmaz M-ben, tehát $\Omega \subseteq \overline{[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')} \subseteq \overline{F_n(\varepsilon')} = F_n(\varepsilon')$. Ez azt jelenti, hogy $x \in \Omega$ esetén minden $p, q \in \mathbb{N}$ számra, ha $p, q \geq n$, akkor $d'(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon'$, ezért

$$d'(f(x), f_n(x)) = \lim_{p \to \infty} d'(f_p(x), f_n(x)) \leq \varepsilon'.$$

Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ rögzített pont. Az f_n függvény folytonos $\mathfrak{a}$-ban, tehát az a) alapján $\omega_{f_n}(\mathfrak{a}) = 0$, így az ε'-höz létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V *nyílt* környezete, amelyre $diam_{d'}(f_n\langle V \rangle) \leq \varepsilon'$, azaz minden $x_1, x_2 \in V$ eetén $d'(f_n(x_1), f_n(x_2)) \leq \varepsilon'$. Tehát ha $x_1, x_2 \in V \cap \Omega$, akkor

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d'(f(x_1), f_n(x_1)) + d'(f_n(x_1), f_n(x_2)) + d'(f_n(x_2), f(x_2)) \leq 3\varepsilon',$$

tehát $diam_{d'}(f\langle V \cap \Omega \rangle) \leq 3\varepsilon'$, így minden $x \in V \cap \Omega$ esetén $V \cap \Omega \in \mathscr{T}_d(\mathfrak{a})$ miatt

$$\omega_f(x) \leq diam_{d'}(f\langle V \cap \Omega \rangle) \leq 3\varepsilon'.$$

Ugyanakkor $\mathfrak{a} \in V \cap \Omega \subseteq \overline{[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')} \subseteq \overline{[\omega_f > \varepsilon]}$ és $V \cap \Omega$ nyílt halmaz, tehát $V \cap \Omega \cap [\omega_f > \varepsilon] \neq \emptyset$. Ha $x \in V \cap \Omega \cap [\omega_f > \varepsilon]$, akkor

$$\varepsilon < \omega_f(x) \leq 3\varepsilon',$$

tehát $\varepsilon < 3\varepsilon'$. Ezzel megmutattuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon' \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, akkor az $[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')$ halmaz sehol sem sűrű M-ben.

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített és $\varepsilon' \in]0, \varepsilon/3]$ tetszőleges valós szám. Minden $x \in M$ esetén $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat M'-ben, ezért ε'-höz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $p, q \in \mathbb{N}$ számra, ha $p, q \geq n$, akkor $d'(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon'$, így $x \in F_n(\varepsilon')$. Ez azt jelenti, hogy $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(\varepsilon')$, így $[\omega_f > \varepsilon] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon'))$, és az előzőekben láttuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $[\omega_f > \varepsilon] \cap F_n(\varepsilon')$ halmaz sehol sem sűrű M-ben. Ezért az $[\omega_f > \varepsilon]$ halmaz első kategóriájú M-ben.

Legyen most $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges zárussorozat $\mathbb{R}^+$-ban. Ekkor $[\omega_f > 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\omega_f > \varepsilon_n]$, és az imént bizonyitottuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $[\omega_f > \varepsilon_n$ halmaz első kategóriájú M-ben, ezért az $[\omega_f > 0]$ halmaz is első kategóriájú M-ben.

Ha (M, d) teljes metrikus tér, akkor az f folytonossági pontjai halmazának (vagyis az $[\omega_f = 0]$ halmaznak) az M-re vonatkozó komplementuma első kategóriájú, tehát a **7**. gyakorlat eredménye szerint az f folytonossági pontjainak halmaza sűrű M-ben.

d) A Dirichlet-függvény sehol sem folytonos, ezért a c) miatt nem állítható elő folytonos függvények sorozatának pontonkénti limeszfüggvényeként. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto |\cos(\pi n! x)|^m.$$

Könnyen látható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $(f_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az $\mathbb{R}$ halmazon, és $\chi_{\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{m\to\infty} f_{m,n}\Big)$.)

9. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Jelölje H azon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát, amelyekhez létezik olyan $t \in [a, b[$, hogy

$$\sup_{t'\in]t,b]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right| < +\infty.$$

Ekkor H *első kategóriájú* halmaz az $[a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények sup-normával ellátott Banach-terében. Létezik olyan $[a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely az $[a, b[$ intervallum egyetlen pontjában sem differenciálható jobbról.

(*Útmutatás.* Ha a H halmaz első kategóriájú volna a $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ Banach-térben, akkor $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})\setminus H$ nem üres (sőt sűrű a sup-norma szerint), és $f \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})\setminus H$ esetén minden $t \in [a, b[$ esetén

$$\sup_{t'\in]t,b]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right| = +\infty,$$

tehát f-nek t-ben nem létezhet jobboldali deriváltja, különben létezne olyan $\delta \in]0, b - t[$ valós szám, hogy

$$\sup_{t'\in]t,t+\delta]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right| < +\infty,$$

ugyanakkor a

$$[t + \delta, b] \to \mathbb{R}; \quad t' \mapsto \frac{f(t')-f(t)}{t'-t}$$

függvény folytonos a $[t + \delta, b]$ kompakt intervallumon, így korlátos is, tehát

$$\sup_{t'\in]t,b]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right| \le \max\left(\sup_{t'\in]t,t+\delta]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right|, \sup_{t'\in]t+\delta,b]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right|\right) < +\infty$$

is teljesülne.

Megmutatjuk, hogy H első kategóriájú a sup-normával ellátott $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ Banach-térben. Legyen N az $\dfrac{1}{b-a}$ szám egész része, és minden $n > N$ természetes számra legyen

$$H_n := \{f \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R}) \mid (\exists\, t \in [a, b - \frac{1}{n}]) : \sup_{t'\in]t,b]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right| \le n\}.$$

Ha $f \in H$, akkor létezik olyan $t \in [a, b[$, hogy

$$\sup_{t'\in]t,b]}\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right| < +\infty,$$

tehát van olyan $n > N$ természetes szám, hogy $t \leq b - \frac{1}{n}$, és $\sup_{t' \in]t,b]} \left| \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \right| \leq n$, vagyis $f \in H_n$. Ez azt jelenti, hogy $H \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N},\ n > N} H_n$, így elég azt igazolni, hogy minden $n > N$ természetes számra H_n sehol sem sűrű.

Legyen $n > N$ rögzített természetes szám. Először megmutatjuk, hogy H_n zárt a sup-norma szerint. Ehhez legyen $f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ és $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat H_n-ben, amely egyenletesen (vagyis a sup-normában) konvergál f-hez. Létezik olyan $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat az $\left[a, b - \frac{1}{n}\right]$ intervallumban, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\sup_{t' \in]t_k,b]} \left| \frac{f_k(t') - f_k(t_k)}{t' - t_k} \right| \leq n$. A Bolzano-Weierstrass-tétel szerint van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény és $t \in \left[a, b - \frac{1}{n}\right]$ pont, hogy $t = \lim_{k \to \infty} t_{\sigma(k)}$. Legyen $t' \in]t,b]$ rögzített pont. Van olyan $k(t') \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > k(t')$ természetes számra $t' \in]t_{\sigma(k)}, b]$, ezért $\left| \frac{f_{\sigma(k)}(t') - f_{\sigma(k)}(t_{\sigma(k)})}{t' - t_{\sigma(k)}} \right| \leq n$, következésképpen

$$|f(t') - f(t)| \leq |f(t') - f_{\sigma(k)}(t')| + |f_{\sigma(k)}(t') - f_{\sigma(k)}(t_{\sigma(k)})| + |f_{\sigma(k)}(t_{\sigma(k)}) - f(t_{\sigma(k)})| +$$

$$+ |f(t_{\sigma(k)}) - f(t)| \leq \|f - f_{\sigma(k)}\| + n|t' - t_{\sigma(k)}| + \|f_{\sigma(k)} - f\| + |f(t_{\sigma(k)}) - f(t)|.$$

Itt a jobb oldal határértéke $k \to \infty$ esetén $n|t' - t|$, ezért $\left| \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \right| \leq n$, vagyis $f \in H_n$.

Ezért elég azt megmutatni, hogy $Int(H_n) \neq \emptyset$, vagyis a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R}) \setminus H_n$ halmaz sűrű $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint. Ehhez legyen $f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ rögzített függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Olyan $f' \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ függvényt keresünk, amelyre $f' \notin H_n$ és $\|f - f'\| < \varepsilon$. Az f egyenletes folytonosságát kihasználva veszünk olyan $m \in \mathbb{N}^+$ számot és olyan $(t_k)_{0 \leq k \leq m}$ szigorúan monoton növő rendszert az $[a,b]$ intervallumban, amelyre $t_0 = a$, $t_m = b$, valamint minden $k < m$ természetes számra és minden $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$ pontra $|f(t') - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Legyen $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $k \leq m$ természetes számra $h(t_k) := f(t_k)$, és ha $k < m$, valamint $t \in]t_k, t_{k+1}[$, akkor

$$h(t) := f(t_k) + \left(\frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right) (t - t_k).$$

Világos, hogy $h \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ és $\|f - h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, hiszen $t \in [a,b] \setminus \{t_k | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k < m)\}$ esetén létezik egyetlen olyan $k < m$ természetes szám, amelyre $t \in]t_k, t_{k+1}[$, tehát

$$|f(t) - h(t)| = \left| f(t) - f(t_k) - \left(\frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right) (t - t_k) \right| \leq$$

$$\leq |f(t) - f(t_k)| + |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \left(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \right) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Továbbá, a $C := \max_{k\in\mathbb{N},\ k<m} \left|\frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k}\right|$ számra teljesül az, hogy minden $t \in [a, b] \setminus \{t_k | (k \in \mathbb{N}) \wedge (0 < k < m)\}$ pontban h differenciálható és $|(Dh)(t)| \leq C$. Legyen most $g \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ olyan szakaszonként lineáris függvény, hogy $\|g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, és az $[a, b]$ minden olyan t pontjában, ahol g differenciálható fennáll a $|(Dg)(t)| > C + n$ egyenlőtlenség. Könnyen látható, hogy ekkor az $f' := h + g$ függvényre $f' \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R}) \setminus H_n$ és $\|f - f'\| < \varepsilon$ teljesül.)

3. Banach-Steinhaus-tétel

Ebben a pontban normált terek között ható folytonos lineáris operátorok sorozatainak *pontonkénti* konvergenciájával folgalkozunk.

Állítás. Legyenek E és F normált terek, $u \in \mathscr{L}(E;F)$, és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}(E;F)$-ben, hogy létezik olyan $D \subseteq E$ halmaz, hogy a D lineáris burka sűrű E-ben és $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ a D halmazon. Ha $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$ (vagyis az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat operátornormában korlátos), akkor $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, vagyis az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként konvergens az E halmazon.

Bizonyítás. Jelölje E_0 a D halmaz lineáris burkát. Nyilvánvaló, hogy minden $x \in E_0$ esetén $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$, és a hipotézis szerint E_0 sűrű lineáris altere E-nek. Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre $C > \|u\| + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ teljesül.

Rögzítsünk egy $x \in E$ pontot; megmutatjuk, hogy $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és az E_0 sűrűségét kihasználva vegyünk olyan $x \in E_0$ vektort, amelyre $\|x - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$. Ekkor az $u(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0)$ egyenlőség miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|u_n(x_0) - u(x_0)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha most $n > N$ tetszőleges természetes szám, akkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek

$$\begin{aligned}
\|u_n(x) - u(x)\| &\le \|u_n(x) - u_n(x_0)\| + \|u_n(x_0) - u(x_0)\| + \|u(x_0) - u(x)\| \le \\
&\le \|u_n\|\|x - x_0\| + \|u_n(x_0) - u(x_0)\| + \|u\|\|x_0 - x\| \le \\
&\le \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \|u_m\| + \|u\|\right) \|x - x_0\| + \|u_n(x_0) - u(x_0)\| < C\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

amiből következik az állítás. ■

Tétel. (*Banach egyenletes korlátosság tétele.*) Legyen E Banach-tér, F normált tér, és $H \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ olyan operátorhalmaz, amelyre minden $x \in E$ esetén az $\{u(x) | u \in H\} \subseteq F$ halmaz korlátos F-ben (amit úgy fejezünk ki, hogy a H operátorhalmaz *pontonként korlátos*). Ekkor H az operátornormában is korlátos, vagyis $\sup\limits_{u\in H} \|u\| < +\infty$.

Bizonyítás. Természetesen feltehetjük, hogy $H \neq \emptyset$. Legyen

$$T := \bigcap_{u\in H} \overset{-1}{u}\langle \overline{B}_1(0)\rangle.$$

Minden $u \in H$ esetén $u : E \to F$ folytonos függvény, és $\overline{B}_1(0) \subseteq F$ zárt halmaz, ezért $\overset{-1}{u}\langle \overline{B}_1(0)\rangle$ zárt halmaz E-ben, így T is zárt halmaz. Minden $u \in H$ esetén $u : E \to F$ lineáris függvény, és $\overline{B}_1(0) \subseteq F$ konvex halmaz F-ben, ezért $\overset{-1}{u}\langle \overline{B}_1(0)\rangle$ konvex halmaz E-ben, így T is konvex halmaz. Ha $x \in E$, akkor az $\{u(x) | u \in H\} \subseteq F$ halmaz korlátos F-ben, tehát van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, amelyre minden $H \ni u$-ra $\|u(x)\| \leq \alpha$, vagyis $\|u((1/\alpha)x)\| \leq 1$, azaz $(1/\alpha)x \in \overset{-1}{u}\langle \overline{B}_1(0)\rangle$; ez azt jelenti, hogy $(1/\alpha)x \in T$, azaz $x \in \alpha.T$.

Tehát a T halmaz zárt, konvex és elnyelő az E Banach-térben, ezért T környezete a 0 vektornak, vagyis vehetünk olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\overline{B}_r(0) \subseteq T$. Ekkor $u \in H$ és $x \in \overline{B}_1(0)$ esetén $rx \in \overline{B}_r(0) \subseteq T \subseteq \overset{-1}{u}\langle \overline{B}_1(0)\rangle$, így $\|u(rx)\| \leq 1$, tehát $\|u(x)\| \leq \dfrac{1}{r}$. Ebből következik, hogy minden $H \ni u$-ra $\|u\| := \sup\limits_{x \in \overline{B}_1(0)} \|u(x)\| \leq \dfrac{1}{r}$, tehát $\sup\limits_{u \in H} \|u\| \leq \dfrac{1}{r} < +\infty$. ■

Tétel. (*Banach-Steinhaus-tétel.*) Legyen E Banach-tér, F normált tér, és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}(E;F)$-ben, amely pontonként konvergens az E halmazon. Legyen $u := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

a) Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat operátornormában korlátos, vagyis $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$.

b) $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$.

c) Az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat az E minden relatív kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. a) Az $\{u_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ operátorhalmaz pontonként korlátos, mert minden $x \in E$ esetén, a hipotézis alapján, az $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, tehát az $\{u_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos F-ben. Ezért Banach egyenletes korlátosság tétele alapján az $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ operátorhalmaz korlátos az operátornorma szerint, vagyis $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$.

b) Legyen $x \in E$; ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|u_n(x)\| \leq \|u_n\|\|x\|$, ezért

$$\|u(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} u_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n(x)\| = \limsup_{n\to\infty} \|u_n(x)\| \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|\|x\| = \left(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|\right) \|x\|.$$

Az a) szerint $\liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$, ezért az u lineáris operátor folytonos és $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Azt kell igazolni, hogy ha $K \subseteq E$ kompakt halmaz, akkor az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens a K halmazon. Ehhez legyen $C \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre $C \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$, és vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot.

Minden $x \in K$ esetén az u operátor folytonos x-ben, ezért van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u\langle B_\delta(x)\rangle \subseteq B_{\varepsilon/3}(u(x))$; továbbá világos, hogy ekkor minden $\delta' \in]0,\delta[$ számra $u\langle B_{\delta'}(x)\rangle \subseteq B_{\varepsilon/3}(u(x))$ teljesül. Ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(\delta_x)_{x\in K}$ rendszert $\mathbb{R}^+$-ban, hogy minden $K \ni x$-re $\delta_x < \dfrac{\varepsilon}{3C}$ és $u\langle B_{\delta_x}(x)\rangle \subseteq B_{\varepsilon/3}(u(x))$. Ekkor természetesen $K \subseteq \bigcup\limits_{x\in K} B_{\delta_x}(x)$, és K kompakt, így van olyan $A \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} B_{\delta_a}(a)$. Ha $a \in A$, akkor $u(a) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(a)$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra

$\|u_n(a)-u(a)\| < \varepsilon/3$. Tehát kiválaszthatunk olyan $(N_a)_{a\in A}$ rendszert $\mathbb{N}$-ben, hogy minden $a \in A$ esetén, minden $n > N$ természetes számra $\|u_n(a) - u(a)\| < \varepsilon/3$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan természetes szám, amelyre minden $a \in A$ esetén $N_a \leq N$ teljesül.

Megmutatjuk, hogy minden $n > N$ természetes számra és minden $K \ni x$-re $\|u_n(x) - u(x)\| < \varepsilon$. Valóban, legyen $n > N$ természetes szám és $x \in K$. Ekkor $K \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} B_{\delta_a}(a)$ miatt vehetünk olyan $a \in A$ pontot, amelyre $x \in B_{\delta_a}(a)$, vagyis $\|x - a\| < \delta_a$. Világos, hogy ekkor $\|u(x) - u(a)\| < \varepsilon/3$ és $n > N \geq N_a$ miatt $\|u_n(a) - u(a)\| < \varepsilon/3$, valamint $\delta_a < \dfrac{\varepsilon}{3C}$, így érvényesek a következő egyenlőtlenségek

$$\|u_n(x) - u(x)\| \leq \|u_n(x) - u_n(a)\| + \|u_n(a) - u(a)\| + \|u(a) - u(x)\| <$$
$$< \|u_n\|\|x - a\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq C\delta_a + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy a $K \subseteq E$ kompakt halmazra

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in K)(\forall n \in \mathbb{N}):\ (n > N \Rightarrow \|u_n(x) - u(x)\| < \varepsilon)$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens a K halmazon. ■

A Banach-Steinhaus-tétel feltételei mellett az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat nem szükségképpen konvergál a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ folytonos lineáris operátorhoz az *operátornorma* szerint (**6**. gyakorlat). A tétel c) pontja mindössze azt állítja, hogy az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat csak az E *relatív kompakt* részhalmazain konvergál egyenletesen, de a *korlátos* halmazokon már nem szükségképpen egyenletesen konvergens. Még az is előfordulhat, hogy az $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat *nem konvergens*, bár a tétel a) pontja szerint *korlátos*; ilyen esetben biztos az, hogy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens az operátornorma szerint. Azonban véges dimenziós indulási tér esetében igaz a következő állítás.

Következmény. Legyen E véges dimenziós normált tér és F normált tér. Az $\mathscr{L}(E;F)$-ben haladó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat akkor és csak akkor konvergens pontonként az E halmazon, ha konvergens az operátornorma szerint.

Bizonyítás. A $\overline{B}_1(0)$ gömb E-ben korlátos és zárt, így kompakt, mert E véges dimenziós. Ezért a Banach-Steinhaus-tétel alapján az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat a $\overline{B}_1(0)$ gömbön is egyenletesen konvergens, ami éppen azt jelenti, hogy konvergens az operátornorma szerint. ■

Megjegyezzük még, hogy a Banach-Steinhaus-tétel b) pontjában felírt $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$ összefüggésben szigorú egyenlőtlenség is lehetséges (**6**. gyakorlat).

Gyakorlatok

1. Legyenek E és F normált terek, valamint $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}(E;F)$-ben, amely pontonként konvergens az E halmazon. Jelölje u az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonkénti limeszfüggvényét. Ha $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\| < +\infty$, akkor teljesülnek a Banach-Steinhaus-tételben megfogalmazott a), b) és c) állítások. (Tehát itt nem az E teljességét, hanem az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat operátornorma szerinti korlátosságát tesszük fel.)

(*Útmutatás.* Figyeljük meg, hogy a Banach-Steinhaus-tétel bizonyításában hol, és hogyan használtuk fel az E teljességét!)

2. Legyen E Banach-tér, F normált tér, és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}(E;F)$-ben, amely pontonként konvergens az E halmazon. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat E-ben, akkor

$$\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} u_n(x_n).$$

(*Útmutatás.* Legyen $u := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ és $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. A Banach-Steinhaus-tétel alapján $u \in \mathscr{L}(E;F)$, és $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\| < +\infty$. Az átviteli elvből következik, hogy $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$, tehát tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|x_n - x\| < \varepsilon$ és $\|u_n(x) - u(x)\| < \varepsilon$, így

$$\begin{aligned}\|u_n(x_n) - u(x)\| &\le \|u_n(x_n) - u_n(x)\| + \|u_n(x) - u(x)\| < \\ &< \|u_n\|\|x_n - x\| + \varepsilon \le (C+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_n)$.)

3. Legyen $\boldsymbol{s}$ egy $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat.

a) $\boldsymbol{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ pontosan akkor teljesül, ha minden $\boldsymbol{s}' \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k)$ sor konvergens.

b) Ha $p, q \in [1, \to[$ olyan valós számok, hogy $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, akkor $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ ekvivalens azzal, hogy minden $\boldsymbol{s}' \in l^p_{\mathbb{K}}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k)$ sor konvergens.

(*Útmutatás.* a) A majoráns kritérium alapján az $\boldsymbol{s} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ feltételből még az is következik, hogy minden $\boldsymbol{s}' \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k)$ sor *abszolút* konvergens. Az elégségesség bizonyításához legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$u_n : l^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k).$$

Ekkor $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\left(l^1_{\mathbb{K}}\right)'$-ben, amely az $\boldsymbol{s}$-re vonatkozó feltevés alapján pontonkénk konvergens az $l^1_{\mathbb{K}}$ halmazon, így az egyenletes korlátosság tétele szerint

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty$. Ugyanakkor könnyen látható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|u_n\| = \max\limits_{0\le k\le n} |\boldsymbol{s}(k)|$, ami azt jelenti, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{s}(n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\max_{0\le k\le n} |\boldsymbol{s}(k)| \right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| < +\infty,$$

vagyis az $\boldsymbol{s}$ sorozat korlátos.

b) Az elemi Hölder-egyenlőtlenség alapján az $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ feltételből még az is következik, hogy minden $\boldsymbol{s}' \in l^p_{\mathbb{K}}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k)$ sor *abszolút* konvergens. Az elégségességet pontosan ugyanúgy bizonyítjuk, mint az a) pontban, felhasználva azt, hogy most a VI. fejezet, 1. pont, **6**. gyakorlat alapján minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\|u_n\| = \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(k)|^q \right)^{1/q}$$

teljesül.)

4. Legyenek $p, q \in [1, \to [$ olyan valós számok, hogy $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, és minden $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén

$$u_{\boldsymbol{s}} : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k).$$

Tudjuk, hogy $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\boldsymbol{s}} \in (l^p_{\mathbb{K}})'$, és az

$$l^q_{\mathbb{K}} \to (l^p_{\mathbb{K}})'; \quad \boldsymbol{s} \mapsto u_{\boldsymbol{s}}$$

leképezés *lineáris izometria* (VI. fejezet, 1. pont, **6**. gyakorlat). Mutassuk meg, hogy ez a leképezés szürjektív, vagyis minden $u \in (l^p_{\mathbb{K}})'$ funkcionálhoz van olyan $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$, hogy $u_{\boldsymbol{s}} = u$. (Ez azt jelenti, hogy az $l^q_{\mathbb{K}}$ normált sorozattér kitüntetett módon - a fenti lineáris izometria által - azonosul az $(l^p_{\mathbb{K}})'$ duális térrel, tehát írható, hogy $(l^p_{\mathbb{K}})' = l^q_{\mathbb{K}}$.) Igazoljuk, hogy minden $p \in]1, \to [$ valós számra az $l^p_{\mathbb{K}}$ Banach-tér reflexív.

(*Útmutatás.* Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $\mathbf{e}_n$ az az elem $l^p_{\mathbb{K}}$-ban, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n(m) = \delta_{m,n}$. Legyen $u \in (l^p_{\mathbb{K}})'$ rögzített, és $\boldsymbol{s}$ az a sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\boldsymbol{s}(n) := u(\mathbf{e}_n)$. Megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ és $u = u_{\boldsymbol{s}}$.

Az nyilvánvaló, hogy ha $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$ teljesülne, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $u(\mathbf{e}_n) = \boldsymbol{s}(n) = u_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{e}_n)$, így $u = u_{\boldsymbol{s}}$ az $\{\mathbf{e}_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált lineáris altéren (azaz $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-en), ami sűrű $l^p_{\mathbb{K}}$-ban, tehát az u és $u_{\boldsymbol{s}}$ folytonossága miatt $u = u_{\boldsymbol{s}}$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\boldsymbol{s}_n$ az a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\boldsymbol{s}_n(m) := \boldsymbol{s}(m)$, ha $m < n$, és $\boldsymbol{s}_n(m) := 0$, ha $m \ge n$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\boldsymbol{s}_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq l^q_{\mathbb{K}}$, tehát a VI. fejezet, 1. pont, **6**. gyakorlat szerint $u_{\boldsymbol{s}_n} \in (l^p_{\mathbb{K}})'$ és $\|u_{\boldsymbol{s}_n}\| = \|\boldsymbol{s}_n\|_q = \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(k)|^q \right)^{1/q}$. Ha $\boldsymbol{s}' \in l^p_{\mathbb{K}}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$u_{\boldsymbol{s}_n}(\boldsymbol{s}') = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}_n(k)\boldsymbol{s}'(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k) = \sum_{k=0}^{n-1} u(\mathbf{e}_k)\boldsymbol{s}'(k) = u\left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k \right),$$

ugyanakkor $\boldsymbol{s}' = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k$ az $l^p_{\mathbb{K}}$-ban $\|\cdot\|_p$ szerint, tehát az u folytonossága miatt $\lim_{k\to\infty} u\left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k\right)$ létezik. Ez azt jelenti, hogy az $(u_{\boldsymbol{s}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat pontonként konvergens az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattéren. Ezért Banach egyenletes korlátosság tétele alapján $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_{\boldsymbol{s}_n}\| < +\infty$, vagyis

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\boldsymbol{s}(k)|^q\right)^{1/q} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{s}_n\|_q < +\infty,$$

tehát $\boldsymbol{s} \in l^q_{\mathbb{K}}$.)

5. Jelölje $c_{\mathbb{K},0}$ a $\mathbb{K}$-ban haladó *zérussorozatok* vektorterét a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva.
a) Mutassuk meg, hogy $c_{\mathbb{K},0}$ egyenlő a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ altér $\|\cdot\|_\infty$ szerinti lezártjával $l^1_{\mathbb{K}}$-ban.
b) Legyen minden $l^1_{\mathbb{K}} \ni \boldsymbol{s}$-re

$$u_{\boldsymbol{s}} : c_{\mathbb{K},0} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k).$$

Bizonyítsuk be, hogy $\boldsymbol{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén $u_{\boldsymbol{s}} \in (c_{\mathbb{K},0})'$, és az

$$l^1_{\mathbb{K}} \to (c_{\mathbb{K},0})'; \quad \boldsymbol{s} \mapsto u_{\boldsymbol{s}}$$

leképezés izometrikus lineáris *bijekció* (természetesen $l^1_{\mathbb{K}}$ felett $\|\cdot\|_1$ normát, és a $(c_{\mathbb{K},0})'$ duális tér felett a funkcionálnormát véve normaként).

(*Útmutatás.* a) Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $\mathbf{e}_n$ az a sorozat, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n(m) = \delta_{m,n}$. Megmutatjuk, hogy minden $\boldsymbol{s} \in c_{\mathbb{K},0}$ sorozatra a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k$ sor konvergens $c_{\mathbb{K},0}$-ban a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint és $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k = \boldsymbol{s}$; ebből már következik, hogy $c_{\mathbb{K},0}$ része a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ altér $\|\cdot\|_\infty$ szerinti lezártjának $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ban. Valóban, minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\|\boldsymbol{s} - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k\right\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|\boldsymbol{s}(m) - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k(m)\right| = \sup_{m\in\mathbb{N},\ m\geq n} |\boldsymbol{s}(m)|,$$

tehát ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim(\boldsymbol{s}) = 0$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}(m)| < \varepsilon$, így minden $n > N$ természetes számra

$$\left\|\boldsymbol{s} - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k\right\|_\infty \leq \varepsilon,$$

vagyis a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k$ sor konvergens $c_{\mathbb{K},0}$-ban a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint és $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k = \boldsymbol{s}$.

Megmutatjuk, hogy a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ altér $\|\cdot\|_\infty$ szerinti lezártja $l^\infty_\mathbb{K}$-ban része $c_{\mathbb{K},0}$-nak. Legyen ugyanis $(\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-ben és legyen $\boldsymbol{s}\in l^\infty_\mathbb{K}$ olyan sorozat, hogy $\boldsymbol{s}=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{s}_n$ a $\|\cdot\|_\infty$ szerint; azt kell igazolni, hogy $\lim(\boldsymbol{s})=0$. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ rögzített. Létezik olyan $n\in\mathbb{N}$, hogy $\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_n\|_\infty<\varepsilon/2$. Természetesen $\lim(\boldsymbol{s}_n)=0$, ezért van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $m>N$ természetes számra $|\boldsymbol{s}_n(m)|<\varepsilon/2$. Ekkor minden $m>N$ természetes számra

$$|\boldsymbol{s}(m)|\le|\boldsymbol{s}(m)-\boldsymbol{s}_n(m)|+|\boldsymbol{s}_n(m)|\le\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_n\|_\infty+|\boldsymbol{s}_n(m)|<2(\varepsilon/2)=\varepsilon,$$

tehát $\lim(\boldsymbol{s})=0$.

b) Az, hogy $\boldsymbol{s}\in l^1_\mathbb{K}$ esetén az $u_{\boldsymbol{s}}:c_{\mathbb{K},0}\to\mathbb{K}$ lineáris funkcionál a $\|\cdot\|_\infty$ szerint folytonos és $\|u_{\boldsymbol{s}}\|=\|\boldsymbol{s}\|_1$, ugyanúgy bizonyítható, mint a VI. fejezet, 1. pont, **5.** gyakorlatban. Legyen $u\in(c_{\mathbb{K},0})'$; megmutatjuk, hogy az $\boldsymbol{s}:=(u(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sorozat eleme $l^1_\mathbb{K}$-nak és $u_{\boldsymbol{s}}=u$. Ehhez legyen minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén $\boldsymbol{s}_n:=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{s}(k)\mathbf{e}_k$, valamint $\boldsymbol{s}_0:=0$. Minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\boldsymbol{s}_n\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, ezért $u_{\boldsymbol{s}_n}\in(c_{\mathbb{K},0})'$ és $\|u_{\boldsymbol{s}_n}\|=\|\boldsymbol{s}_n\|_1=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|\boldsymbol{s}(k)|$, ha $n>0$. Ha $\boldsymbol{s}'\in c_{\mathbb{K},0}$, akkor $n\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$u_{\boldsymbol{s}_n}(\boldsymbol{s}')=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}_n(k)\boldsymbol{s}'(k)=\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k)=\sum_{k=0}^{n-1}u(\mathbf{e}_k)\boldsymbol{s}'(k)=u\left(\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k\right),$$

és az a) bizonyítása alapján a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k$ sor konvergens $c_{\mathbb{K},0}$-ban a $\|\cdot\|_\infty$ szerint és $\boldsymbol{s}'=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k$. Ugyanakkor u folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ szerint, ezért az $\left(u\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{s}'(k)\mathbf{e}_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ számsorozat konvergens. Ez azt jelenti, hogy az $(u_{\boldsymbol{s}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat pontonként konvergens a $c_{\mathbb{K},0}$ halmazon. Az a) alapján $c_{\mathbb{K},0}$ Banach-tér a $\|\cdot\|_\infty$ normával, ezért Banach egyenletes korlátosság tétele szerint

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+}\sum_{k=0}^{n-1}|\boldsymbol{s}(k)|=\sup_{n\in\mathbb{N}^+}\|u_{\boldsymbol{s}_n}\|<+\infty.$$

Ezért $\boldsymbol{s}\in l^1_\mathbb{K}$, tehát jól értelmezett az $u_{\boldsymbol{s}}:c_{\mathbb{K},0}\to\mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amely az u-val együtt folytonos $\|\cdot\|_\infty$ szerint, és nyilvánvalóan $u=u_{\boldsymbol{s}}$ a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ altéren, amely viszont sűrű $c_{\mathbb{K},0}$-ban a $\|\cdot\|_\infty$ szerint, így $u_{\boldsymbol{s}}=u$ teljesül.)

6. Adjunk példát olyan E Banach-térre, és olyan E'-ben haladó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, amely pontonként konvergens, de $\left\|\lim\limits_{n\to\infty}u_n\right\|<\liminf\limits_{n\to\infty}\|u_n\|$.

(*Útmutatás.* Tekintsük a $\mathbb{K}$-ban haladó zérussorozatok $c_{\mathbb{K},0}$ terét a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva, és legyen minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $u_n:c_{\mathbb{K},0}\to\mathbb{K}$; $\boldsymbol{s}\mapsto\boldsymbol{s}(n)$. Ekkor minden $\mathbb{N}\ni n$-re $\|u_n\|=1$ és $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.)

7. Jelölje $c_{\mathbb{K}}$ a $\mathbb{K}$-ban haladó *konvergens sorozatok* vektorterét a $\|\cdot\|_\infty$ normával ellátva.

a) Mutassuk meg, hogy $c_{\mathbb{K}}$ zárt lineáris altere $l^\infty_{\mathbb{K}}$-nak a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint.

b) Legyen minden $\boldsymbol{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ esetén

$$u_{\boldsymbol{s}} : c_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{s}(k)\boldsymbol{s}'(k).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $l^1_{\mathbb{K}} \ni \boldsymbol{s}$-re $u_{\boldsymbol{s}} \in (c_{\mathbb{K}})'$, és az

$$l^1_{\mathbb{K}} \to (c_{\mathbb{K}})'; \quad \boldsymbol{s} \mapsto u_{\boldsymbol{s}}$$

leképezés *lineáris izometria*, de a

$$\lim : c_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \lim(\boldsymbol{s}')$$

leképezés olyan eleme $(c_{\mathbb{K}})'$-nek, amelyhez *nem létezik* olyan $\boldsymbol{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$, hogy $u_{\boldsymbol{s}} = \lim$.

c) Minden $(\lambda, \boldsymbol{s}) \in \mathbb{K} \times l^1_{\mathbb{K}}$ párra az

$$u_{(\lambda,\boldsymbol{s})} : c_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \boldsymbol{s}' \mapsto \lambda.\lim(\boldsymbol{s}') + u_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{s}' - \lim(\boldsymbol{s}'))$$

leképezés eleme $(c_{\mathbb{K}})'$-nek, és a

$$\mathbb{K} \times l^1_{\mathbb{K}} \to (c_{\mathbb{K}})'; \quad (\lambda, \boldsymbol{s}) \mapsto u_{(\lambda,\boldsymbol{s})}$$

leképezés *lineáris bijekció.*

(*Útmutatás.* a) Nyilvánvaló, hogy $c_{\mathbb{K}} = c_{\mathbb{K},0} \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ az azonosan 1 sorozat, ezért a VI. fejezet, 1. pont, **11**. gyakorlat eredménye alapján $c_{\mathbb{K}}$ zárt $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ban a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint, hiszen az **5**. gyakorlat szerint $c_{\mathbb{K},0}$ is zárt $l^\infty_{\mathbb{K}}$-ban a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint.

b) Kövessük ugyanazt a gondolatmenetet, mint a VI. fejezet, 1. pont, **5**. gyakorlat állításának bizonyításában! Ha $\boldsymbol{s} \in l^1_{\mathbb{K}}$ olyan sorozat lenne, hogy $\lim = u_{\boldsymbol{s}}$, akkor $c_{\mathbb{K},0} \subseteq Ker(u_{\boldsymbol{s}})$, vagyis az $u_{\boldsymbol{s}}$ leszűkítése $c_{\mathbb{K},0}$-ra a 0 funkcionál, így az **5**. gyakorlat b) pontja szerint $\boldsymbol{s} = 0$, ami lehetetlen.)

8. (*Általánosított határértékek.*) Egy $u : l^\infty_{\mathbb{K}} \rightarrowtail \mathbb{K}$ leképezést *limeszoperációnak* nevezünk, ha $Dom(u)$ olyan lineáris altere $l^\infty_{\mathbb{K}}$-nak, amely tartalmazza a $\mathbb{K}$-ban haladó konvergens sorozatok halmazát, és $u : Dom(u) \to \mathbb{K}$ olyan $\mathbb{K}$-lineáris funkcionál, amely folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint, és minden $\boldsymbol{s} \in c_K$ sorozatra $u(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s})$, vagyis u a sup-norma szerint folytonos lineáris kiterjesztése a $\lim : c_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$; $\boldsymbol{s} \mapsto \lim(\boldsymbol{s})$ funkcionálnak. Azt mondjuk, hogy az $u : l^\infty_{\mathbb{K}} \rightarrowtail \mathbb{K}$ limeszoperáció *nemtriviális*, ha $u \neq \lim$, vagyis a $\mathbb{K}$-ban haladó konvergens sorozatok $c_{\mathbb{K}}$ halmaza valódi részhalmaza $Dom(u)$-nak.

a) Legyen $C\lim : l^\infty_{\mathbb{K}} \rightarrowtail \mathbb{K}$ az a leképezés, amelyre

$$Dom(C\lim) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty_{\mathbb{K}} \mid \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens sorozat } \mathbb{K}\text{-ban}\},$$

és $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Dom(C\lim)$ esetén

$$(C\lim)\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Mutassuk meg, hogy ez a $C\lim$ leképezés nemtriviális limeszoperáció. A $C\lim$ funkcionált *Cesáro-féle limeszoperációnak* nevezzük.

b) Legyen $\mathbf{t} = (t_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, és jelölje $(\mathbf{t})\lim : l^\infty_{\mathbb{K}} \rightarrowtail \mathbb{K}$ azt a leképezést, amelyre $Dom((\mathbf{t})\lim)$ azon $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozatok halmaza, amelyekre minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}x_k$ sor konvergens és a $\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, valamint $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Dom((\mathbf{t})\lim)$ esetén

$$((\mathbf{t})\lim)((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k.$$

Bizonyítsuk be, hogy $Dom((\mathbf{t})\lim)$ lineáris altere $l^\infty_{\mathbb{K}}$-nak, és $(\mathbf{t})\lim$ lineáris funkcionál, továbbá $(\mathbf{t})\lim$ pontosan akkor limeszoperáció, ha $\mathbf{t}$-re teljesülnek a következők.

(i) Minden $\mathbb{N} \ni j$-re a $\sum_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}$ sor abszolút konvergens, és $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}| < +\infty$.

(ii) A $\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k} = 1$.

(iii) Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\lim_{j\to\infty} t_{j,k} = 0$.

(Ezt az állítást nevezzük *Toeplitz-tételnek.*) Ha $\mathbf{t}$-re teljesülnek az (i), (ii) és (iii) feltételek, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{t}$ *Toeplitz-mátrix.* Adjuk meg azokat a $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ Toeplitz-mátrixokat, amelyekre $(\mathbf{t})\lim$ egyenlő lim-mel, illetve $C\lim$-mel.

c) Legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $\mathbb{R}_+$-ban, hogy $p_0 > 0$. Készítsük el azt a $\mathbf{t} = (t_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ függvényt, amelyre $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ esetén

$$t_{m,n} := \begin{cases} \dfrac{p_{m-n}}{\sum\limits_{k=0}^{m} p_k} & ;\text{ ha } m \geq n \\ 0 & ;\text{ ha } m < n. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbf{t}$ pontosan akkor Toeplitz-mátrix, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k} = 0.$$

d) Nem létezik olyan $\mathbf{t}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ Toeplitz-mátrix, amelyre $Dom((\mathbf{t})\lim) = l^\infty_{\mathbb{K}}$. (Tehát a VI. fejezet, 2. pont, **11**. gyakorlatban értelmezett Banach-limesz olyan limeszoperáció, amely semmilyen $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ Toeplitz-mátrixra nem egyezik meg a $(\mathbf{t})\lim$ limeszoperációval.)

(*Útmutatás.* a) Közvetlenül és könnyen belátható, de a b)-nek is következménye.

b) Tegyük fel, hogy $\mathbf{t} = (t_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ Toeplitz-mátrix; megmutatjuk, hogy $(\mathbf{t})\lim$ limeszoperáció. Triviális az, hogy $Dom((\mathbf{t})\lim)$ lineáris altere $l^\infty_{\mathbb{K}}$-nak, és $(\mathbf{t})\lim : Dom((\mathbf{t})\lim) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, tehát csak azt kell igazolni, hogy $\lim \subseteq (\mathbf{t})\lim$ és minden $\boldsymbol{s} \in c_{\mathbb{K}}$ esetén $((\mathbf{t})\lim)(\boldsymbol{s}) = \lim(\boldsymbol{s})$.

Az (i) első feltétele miatt $j \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \in l^1_{\mathbb{K}}$, ezért minden $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozatra a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}x_k$ sor abszolút konvergens. Ezért elegendő azt megmutatni, hogy ha $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K}}$, akkor a $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Ehhez minden $j \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük az

$$u_j : c_{\mathbb{K},0} \to \mathbb{K};\quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k$$

leképezést. Az **5**. gyakorlat b) pontja szerint minden $\mathbb{N} \ni j$-re $u_j \in (c_{\mathbb{K},0})'$ és $\|u_j\| = \|(t_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}|t_{j,k}|$, tehát az (i) második feltétele alapján $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\|u_j\| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}|t_{j,k}| < +\infty$. Legyen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > n$ természetes számra $x_k = 0$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni j$-re

$$u_j((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k = \sum_{k=0}^{n} t_{j,k}x_k,$$

ezért a (iii) feltétel alapján $\lim\limits_{j\to\infty} u_j((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat $(c_{\mathbb{K},0})'$-ben halad, korlátos a funkcionálnorma szerint, és pontonként konvergál a 0 funkcionálhoz a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq c_{\mathbb{K},0}$ altéren, amely az **5**. gyakorlat a) pontja szerint sűrű $c_{\mathbb{K},0}$-ban. Ezért az $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat pontonként konvergál 0-hoz az egész $c_{\mathbb{K},0}$ téren.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K},0}$ esetén a $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\right)_{j\in\mathbb{N}} = (u_j((x_k)_{k\in\mathbb{N}}))_{j\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens és $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k = 0$. Ha most $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K}}$ tetszőleges és $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, akkor $(x_k - x)_{k\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K},0}$, tehát a $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}(x_k - x)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}(x_k - x) = 0$, továbbá a (ii) feltétel alapján a $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x = x$, ezért a $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k = x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Ez azt jelenti, hogy $(\mathbf{t})\lim$ limeszoperáció.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{t} = (t_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ olyan rendszer, amelyre $(\mathbf{t})\lim$ limeszoperáció; megmutatjuk, hogy ekkor $\mathbf{t}$ Toeplitz-mátrix. Jelölje $\mathbf{1}$ az azonosan 1 sorozatot, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbf{e}_n$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\mathbf{e}_n(m) = \delta_{m,n}$. Ekkor $\mathbf{1} \in c_{\mathbb{K}} \subseteq Dom((\mathbf{t})\lim)$, ezért minden $j \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}$ sor abszolút konvergens és $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k} = ((\mathbf{t})\lim)(\mathbf{1}) = \lim(\mathbf{1}) = 1$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{t}$-re az (i) feltétel első fele és a (ii) feltétel teljesül. Továbbá, minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \in l^1_{\mathbb{K}}$ miatt jól értelmezett az

$$u_j : c_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k} x_k$$

lineáris funkcionál és $\|u_j\| = \|(t_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}|$. A $c_{\mathbb{K}} \subseteq Dom((\mathbf{t})\lim)$ feltétel alapján a $(c_{\mathbb{K}})'$-ben haladó $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat pontonként konvergens, és a pontonkénti limeszfüggvénye megegyezik a $(\mathbf{t})\lim$ limeszoperáció $c_{\mathbb{K}}$-ra vett leszűkítésével. Banach egyenletes korlátosság tétele alapján $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\| < +\infty$, így teljesül az (i) feltétel második fele is. Végül, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_k \in c_{\mathbb{K}} \subseteq Dom((\mathbf{t})\lim)$, tehát $(\mathbf{t})\lim(\mathbf{e}_k) = \lim(\mathbf{e}_k) = 0$, ugyanakkor $(\mathbf{t})\lim(\mathbf{e}_k) = \lim\limits_{j\to\infty} t_{j,k}$, tehát (iii) is teljesül.

d) Legyen $\mathbf{t} = (t_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ Toeplitz-mátrix. Ekkor könnyen igazolható olyan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozat létezése, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $x_k \in \{0,1\}$ és a $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{j,k} x_k\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat *nem konvergens*, ezért $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \notin Dom((\mathbf{t})\lim)$.)

4. Banach nyíltleképezés tétele

Lemma. Legyenek E és F normált terek, valamint $u \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan, hogy $Im(u)$ második kategóriájú halmaz F-ben. Ekkor a $0 \in E$ vektor minden W környezetére $\overline{u\langle W\rangle}$ a $0 \in F$ vektornak környezete.

Bizonyítás. Legyen W tetszőleges környezete a $0 \in E$ vektornak, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(0) \subseteq W$. Minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $k.B_r(0) = B_{kr}(0)$, ezért $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^+} k.B_r(0)$. Ebből következik, hogy

$$Im(u) = u\langle \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+} k.B_r(0)\rangle = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+} u\langle k.B_r(0)\rangle = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+} k.u\langle B_r(0)\rangle.$$

A feltevés szerint $Im(u)$ második kategóriájú halmaz F-ben, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}^+$, hogy $k.u\langle B_r(0)\rangle$ nem sehol sem sűrű halmaz, azaz

$$\emptyset \neq Int\left(\overline{k.u\langle B_r(0)\rangle}\right) = k.Int(\overline{u\langle B_r(0)\rangle})$$

ahol kihasználtuk, hogy az $F \to F;\ y \mapsto k.y$ leképezés homeomorfimus. Ezért $Int(\overline{u\langle B_r(0)\rangle}) \neq \emptyset$; legyen $y \in Int(\overline{u\langle B_r(0)\rangle})$ és $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_R(y) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$. Nyilvánvaló, hogy az $\overline{u\langle B_r(0)\rangle}$ halmaz szimmetrikus és konvex, ezért ha $y' \in B_R(0)$, akkor $y + y' \in B_R(y) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$ és $-y + y' \in B_R(-y) = -B_R(y) \subseteq -\overline{u\langle B_r(0)\rangle} \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, amiből következik, hogy

$$y' = \frac{1}{2}(y + y') + \frac{1}{2}(-y + y') \in \overline{u\langle B_r(0)\rangle}.$$

Ez azt jelenti, hogy $B_R(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle u\langle W\rangle}$, tehát $\overline{u\langle W\rangle}$ a $0 \in F$ vektornak környezete. ■

Lemma. Legyen E teljes metrikus tér, F metrikus tér, és $f : E \to F$ olyan folytonos függvény, hogy

$$(\forall r \in \mathbb{R}^+)(\exists s \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in E):\ B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}.$$

Ha $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy minden $E \ni x$-re $B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}$, akkor minden $r' > r$ valós számra

$$(\forall x \in E):\ B_s(f(x)) \subseteq f\langle B_{r'}(x)\rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy minden $E \ni x$-re $B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}$, és rögzítsünk egy $r' > r$ valós számot, valamint egy $x_0 \in E$ pontot. Azt kell megmutatni, hogy $B_s(f(x_0)) \subseteq f\langle B_{r'}(x_0)\rangle$. Ehhez válasszunk egy $y \in B_s(f(x_0))$ pontot. Olyan $x \in B_{r'}(x_0)$ elemet keresünk, amelyre $f(x) = y$ teljesül.

Legyen $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ olyan rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} r_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és $r_1 = r$, valamint $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < r'$. Az f függvényre vonatkozó hipotézis alapján minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-hoz létezik olyan $s_k \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $E \ni x'$-re $B_{s_k}(f(x')) \subseteq \overline{f\langle B_{r_k}(x')\rangle}$. Ezért *kiválaszthatunk* olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ rendszert, hogy $s_1 = s$, $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$ és minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-ra és minden $E \ni x'$-re $B_{s_k}(f(x')) \subseteq \overline{f\langle B_{r_k}(x')\rangle}$.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával igazoljuk olyan E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ rendszer létezését, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$.

Az $x_1 \in E$ pontot úgy kell megválasztani, hogy $x_1 \in B_{r_1}(x_0) = B_r(x_0)$ valamint $f(x_1) \in B_{s_2}(y)$ teljesüljön. Ilyen választás lehetséges, mert $y \in B_s(f(x_0)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x_0)\rangle}$ és $B_{s_2}(y)$ az y-nak környezete, tehát

$$B_{s_2}(y) \cap f\langle B_r(x_0)\rangle \neq \emptyset,$$

így létezik olyan $x_1 \in B_r(x_0)$, hogy $f(x_1) \in B_{s_2}(y)$.

Tegyük most fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{1\le k\le n}$ olyan rendszer E-ben, hogy minden $1 \le k \le n$ természetes számra $x_k \in B_{r_k}(x_{k-1})$ és $f(x_k) \in B_{s_{k+1}}(y)$. Olyan $x_{n+1} \in B_{r_{n+1}}(x_n)$ pontot keresünk, amelyre $f(x_{n+1}) \in B_{s_{n+2}}(y)$. Ha x_{n+1} ilyen pont volna, akkor $f(x_{n+1}) \in B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle$ teljesülne, tehát

$$B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset.$$

Megfordítva, ha $B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$, akkor $\overset{-1}{f}\langle B_{s_{n+2}}(y)\rangle \cap B_{r_{n+1}}(x_n) \neq \emptyset$, és e halmaz bármely x elemére $f(x) \in B_{s_{n+2}}(y)$ és $x \in B_{r_{n+1}}(x_n)$ teljesülne, tehát az $x_{n+1} := x$ választás megfelelő volna. Tehát azt kell igazolni, hogy $B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$. A $B_{s_{n+2}}(y)$ gömb környezete y-nak, ezért elég volna azt igazolni, hogy $y \in \overline{f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle}$. Ez viszont igaz, mert $B_{s_{n+1}}(f(x_n)) \subseteq \overline{f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle}$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$, vagyis $y \in B_{s_{n+1}}(f(x_n))$.

Legyen tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ olyan E-ben haladó rendszer, amelyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor d-vel jelölve az E feletti metrikát kapjuk, hogy

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{k=m+1}^{n} d(x_{k-1}, x_k) < \sum_{k=m+1}^{n} r_k < \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k,$$

amiből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{k=\min(m,n)}^{\infty} r_k.$$

A $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} r_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ezért $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k = 0$. Ebből adódik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ Cauchy-sorozat E-ben. Az E metrikus tér teljessége folytán az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens E-ben; legyen $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $d(x_0, x_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} r_k$, ezért $d(x_0, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} r_k < r'$, vagyis $x \in B_{r'}(x_0)$. Az f függvény folytonos, ezért $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$, és $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, így $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Ezzel az előírt tulajdonságú x pont létezését igazoltuk. ■

Tétel. (*Banach nyíltleképezés tétele.*) Legyenek E és F Banach-terek, valamint $u \in \mathscr{L}(E;F)$. A következő állítások ekvivalensek.

(i) u nyílt leképezés.

(ii) u szürjektív leképezés.

(iii) $Im(u)$ második kategóriájú részhalmaza F-nek.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha u nyílt leképezés, akkor $Im(u)$ környezete a 0-nak F-ben, ezért elnyelő halmaz. Ugyanakkor az $Im(u)$ halmaz zárt a skalárokkal vett szorzásra nézve, ezért $Im(u) = F$.

(ii)⇒(iii) A Baire-féle kategóriatétel szerint F második kategóriájú részhalmaza az F Banach-térnek.

(iii)⇒(i) A (iii) hipotézis, és az első lemma alapján a $0 \in E$ vektor minden W környezetére az $\overline{u\langle W\rangle}$ halmaz környezete a $0 \in F$ vektornak. Ezért minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-hez van olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$. Ha $r, s \in \mathbb{R}^+$ ilyen tulajdonságú számok, akkor az u additivitása folytán minden $x \in E$ esetén

$$\begin{aligned}B_s(u(x)) = u(x) + B_s(0) \subseteq u(x) + \overline{u\langle B_r(0)\rangle} = \overline{u(x) + u\langle B_r(0)\rangle} = \\ = \overline{u\langle x + B_r(0)\rangle} = \overline{u\langle B_r(x)\rangle},\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk azt, hogy bármely $y \in F$ esetén az $F \to F$; $y' \mapsto y + y'$ leképezés homeomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy az E és F teljes metrikus terek között ható u folytonos függvényre teljesül a második lemma hipotézise. Tehát az előzőek és a második lemma alapján kapjuk, hogy $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, akkor minden $r' > r$ valós számra és $E \ni x$-re $B_s(u(x)) \subseteq u\langle B_{r'}(x)\rangle$.

Legyen most $\Omega \subseteq E$ tetszőleges nyílt halmaz és $x \in \Omega$. Legyen $r' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_{r'}(x) \subseteq \Omega$, és rögzítsünk egy $r \in]0, r'[$ valós számot. Az előzőek alapján van olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, ezért $B_s(u(x)) \subseteq u\langle B_{r'}(x)\rangle \subseteq u\langle \Omega\rangle$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $u\langle\Omega\rangle$ nyílt részhalmaza F-nek, vagyis (i) igaz. ■

Következmény. Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció szükségképpen homeomorfizmus, tehát az inverze is folytonos.

Bizonyítás. Egy ilyen operátor szürjektív, tehát Banach nyíltleképezés tétele alapján nyílt leképezés, ami azzal ekvivalens, hogy az inverze folytonos. ■

Tétel. (*Zártgráf-tétel.*) Legyenek E és F Banach-terek, valamint $u : E \to F$ lineáris operátor. Ha u gráfja zárt halmaz az $E \times F$ normált szorzattérben, akkor u folytonos.

Bizonyítás. Legyen $G := \{(x, u(x)) \in E \times F | x \in E\}$, tehát G az u operátor gráfja. Ez lineáris altere az $E \times F$ szorzattérnek, és a hipotézis alapján zárt a szorzatnorma szerint. Az E és F normált terek teljesek, tehát az $E \times F$ normált szorzattér is teljes, így G a szorzatnorma leszűkítésével ellátva Banach-tér. Értelmezzük a következő lineáris operátorokat

$$v : E \to G; \quad x \mapsto (x, u(x)),$$
$$w : G \to F; \quad (x, y) \mapsto y.$$

Ekkor $u = w \circ v$, ezért u folytonosságához elegendő a v és w operátorok folytonossága. A w függvény nyilvánvalóan folytonos, mert a $pr_2 : E \times F \to F$ projekció folytonos és $w := pr_2|_G$. A v operátor nyilvánvalóan lineáris bijekció és v^{-1} folytonos, mert a $pr_1 : E \times F \to E$ projekció folytonos és $v^{-1} = pr_1|G$. Banach nyíltleképezés tételének előző következményét alkalmazva kapjuk, hogy a $v^{-1} : G \to E$ operátor lineáris homeomorfizmus, ezért v folytonos. ■

Gyakorlatok

1. Azt mondjuk, hogy az E valós vagy komplex vektortér feletti $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák *összehasonlíthatók*, ha létezik olyan $C_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\|\cdot\|_2 \leq C_1\|\cdot\|_1$, *vagy* létezik olyan $C_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\|\cdot\|_1 \leq C_2\|\cdot\|_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ összehasonlítható normák az E valós vagy komplex vektortér felett, és E a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normákkal ellátva Banach-tér, akkor a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek.

(*Útmutatás.* Jelölje E_1 (illetve E_2) az E vektorteret a $\|\cdot\|_1$ (illetve $\|\cdot\|_2$) normával ellátva. Ekkor E_1 és E_2 Banach-terek, továbbá a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák összehasonlíthatósága miatt az $id_E : E_1 \to E_2$ operátor, *vagy* az $id_E : E_2 \to E_1$ operátor folytonos. Bármelyik esetben a Banach nyíltleképezés-tétel alapján id_E lineáris homeomorfizmus E_1 és E_2 között, ezért a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek.)

2. Legyen E normált tér, F Banach-tér, és $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér. Azt mondjuk, hogy az $\mathscr{L}(E;F)$-ben haladó $(u_t)_{t\in T}$ rendszer *θ-integrálható*, ha minden $x \in E$ esetén a $T \to F;\ t \mapsto u_t(x)$ függvény θ-integrálható, vagyis eleme $\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$-nak. Ha az $(u_t)_{t\in T}$ rendszer θ-integrálható, akkor az

$$\int_T u_t\, d\theta(t) : E \to F; \quad x \mapsto \int_T u_t(x)\, d\theta(t)$$

leképezést az $(u_t)_{t\in T}$ rendszer *θ-integráljának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $\int_T u_t\, d\theta(t)$ függvény lineáris operátor. Mutassuk meg, hogy ha E is Banach-tér és $(u_t)_{t\in T}$ egy $\mathscr{L}(E;F)$-ben haladó θ-integrálható rendszer, akkor $\int_T u_t\, d\theta(t) \in \mathscr{L}(E;F)$, vagyis az $\int_T u_t\, d\theta(t)$ operátor *folytonos.*

(*Útmutatás.* Értelmezzük az

$$u_\theta : E \to L^1_F(T, \mathscr{R}, \theta); \quad x \mapsto (t \mapsto u_t(x))^\bullet$$

lineáris operátort, továbbá jelölje $I_{\theta,F}$ az $L^1_F(T, \mathscr{R}, \theta) \to F$ θ-szerinti integrált. Tudjuk, hogy $L^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ Banach-tér a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ normával, és az $I_{\theta,F}$ lineáris operátor folytonos. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\int_T u_t\, d\theta(t) = I_{\theta,F} \circ u_\theta,$$

ezért elég azt igazolni, hogy az u_θ lineáris operátor folytonos. A zártgráf-tétel alapján elegendő azt megmutatni, hogy az u_θ gráfja zárt az $E \times L^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ normált szorzattérben.

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben és $(x, \xi) \in E \times L^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan pár, hogy $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ az E normája szerint és $\xi = \lim_{n\to\infty} u_\theta(x_n)$ az $L^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ feletti

$\|\cdot\|_{\theta,1}$ norma szerint. Azt kell bizonyítani, hogy $u_\theta(x) = \xi$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : T \to F;\ t \mapsto u_t(x_n)$; ekkor $f_n \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$, és az u_θ definíciója alapján $u_\theta(x_n) = f_n^\bullet$. Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ olyan, hogy $\xi = f^\bullet$. A hipotézis alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez $\mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$-ban a $\|\cdot\|_{\theta,1}$ félnorma szerint. A Riesz-Fischer tétel alapján létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy az $(f_{\sigma(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat θ-majdnem mindenütt konvergál f-hez. Tehát θ-majdnem minden $T \ni t$-re

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_{\sigma(m)}(t) = \lim_{m\to\infty} u_t(x_{\sigma(m)})$$

az F normája szerint, ugyanakkor $t \in T$ esetén $u_t \in \mathscr{L}(E; F)$ és $x = \lim_{m\to\infty} x_{\sigma(m)}$, tehát

$$\lim_{m\to\infty} u_t(x_{\sigma(m)}) = u_t(x).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $g : T \to F;\ t \mapsto u_t(x)$, akkor $g \in \mathscr{L}^1_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és θ-majdnem minden $T \ni t$-re $g(t) = f(t)$. Ezért $g^\bullet = f^\bullet = \xi$, továbbá a definíció szerint $u_\theta(x) = g^\bullet$, tehát $u_\theta(x) = \xi$.)

5. Hilbert-terek

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\| \cdot \|_2$ olyan norma $\mathbb{K}^n$ felett, hogy minden $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$$

teljesül; ez egyszerű *aritmetikai számolással* belátható. Ugyanakkor minden $p \geq 1$ valós számra; ha $p \neq 2$, akkor a $\mathbb{K}^n$ feletti $\| \cdot \|_p$ norma olyan, hogy léteznek $x, y \in \mathbb{K}^n$ elemek, amelyekre

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 \neq 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2.$$

Az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozattér felett a $\| \cdot \|_2$ norma olyan, hogy minden $x, y \in l^2_{\mathbb{K}}$ esetén

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$$

teljesül; ez egyszerű *sorösszegzéssel* belátható. Ugyanakkor minden $p \geq 1$ valós számra; ha $p \neq 2$, akkor az $l^p_{\mathbb{K}}$ sorozattér feletti $\| \cdot \|_p$ norma olyan, hogy léteznek $x, y \in l^p_{\mathbb{K}}$ elemek, amelyekre

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 \neq 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2.$$

Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, akkor az $L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ vektortér felett a $\| \cdot \|_{\theta,2}$ norma olyan, hogy minden $x, y \in L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ esetén

$$\|x+y\|_{\theta,2}^2 + \|x-y\|_{\theta,2}^2 = 2\|x\|_{\theta,2}^2 + 2\|y\|_{\theta,2}^2$$

teljesül; ez egyszerű *integrálással* belátható.

A fenti példák mutatják, hogy tartalmas a következő definíció.

Definíció. Az E normált teret *prehilbert-térnek* nevezzük, ha minden $x, y \in E$ esetén teljesül a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

paralelogramma-egyenlőség. Az E normált teret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha E teljes prehilbert-tér.

Tehát a prehilbert-terek (illetve Hilbert-terek) speciális normált (illetve Banach-) terek, amelyek pontosan annyiban speciálisak, hogy a normájukra teljesül a paralelogramma-egyenlőség. A $\mathbb{K}^n$ és $l^2_{\mathbb{K}}$ vektorterek a $\| \cdot \|_2$ normával ellátva Hilbert-terek. Ugyanez igaz az $L^2_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ alakú vektorterekre, amelyek felett természetesen a $\| \cdot \|_{\theta,2}$ normát vesszük normaként.

Ha E prehilbert-tér és $F \subseteq E$ lineáris altér, akkor az F normált altér nyilvánvalóan szintén prehilbert-tér. Ez azt mutatja, hogy sok nem teljes prehilbert-tér létezik; például minden Hilbert-tér mindegyik *nem zárt* lineáris altere, az altérnormával ellátva prehilbert-tér, de nem teljes, tehát nem Hilbert-tér.

A következő definícióban bevezetünk egy függvénytípust, amelynek segítségével könnyen előállíthatunk prehilbert-tereket.

Definíció. Ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor egy $\mathbf{b} : E \times E \to \mathbb{K}$ függvényt E feletti *skalárszorzásnak* nevezünk, ha teljesülnek a következők:
- minden $y \in E$ esetén a $\mathbf{b}(\cdot, y) : E \to \mathbb{K}$ parciális függvény $\mathbb{K}$-lineáris;
- minden $x, y \in E$ esetén $\overline{\mathbf{b}(x, y)} = \mathbf{b}(y, x)$;
- minden $x \in E$ esetén $\mathbf{b}(x, x) \in \mathbb{R}_+$, és $\mathbf{b}(x, x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.

Ha $\mathbf{b}$ skalárszorzás E felett, akkor az $x, y \in E$ vektorokat $\mathbf{b}$-*ortogonálisaknak* vagy $\mathbf{b}$-*merőlegeseknek* nevezzük, ha $\mathbf{b}(x, y) = 0$; továbbá, minden $H \subseteq E$ halmazra a

$$H^\perp := \{y \in E \mid (\forall x \in H) : \ \mathbf{b}(x, y) = 0\}$$

halmazt a H halmaz $\mathbf{b}$-*ortogonális komplementerének* nevezzük.

Megjegyzések. Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett.
1) Ha $\mathbf{b}$ skalárszorzás E felett, akkor minden $x \in E$ vektorra a $\mathbf{b}(x, \cdot) : E \to \mathbb{K}$ parciális függvény olyan, hogy minden $y, y_1, y_2 \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\mathbf{b}(x, y_1 + y_2) = \mathbf{b}(x, y_1) + \mathbf{b}(x, y_2),$$
$$\mathbf{b}(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\mathbf{b}(x, y).$$

Ez azonnal következik abból, hogy $\mathbf{b}(x, \cdot) = \overline{\mathbf{b}(\cdot, x)}$, és a $\mathbf{b}(\cdot, x)$ funkcionál $\mathbb{K}$-lineáris. Az ilyen tulajdonságú $E \to \mathbb{K}$ leképezéseket *konjugált-lineáris funkcionáloknak* nevezzük.
2) Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor egy $\mathbf{b} : E \times E \to \mathbb{R}$ leképezés pontosan akkor skalárszorzás E felett, ha $\mathbf{b}$ pozitív definit, szimmetrikus bilineáris funkcionál E felett.
3) Legyen $\mathbf{b}$ skalárszorzás E felett. Minden $H \subseteq E$ halmazra $H^\perp$ lineáris altere E-nek, mert ha $H \neq \emptyset$, akkor

$$H^\perp = \bigcap_{y \in H} Ker(\mathbf{b}(\cdot, y)),$$

továbbá nyilvánvalóan $\emptyset^\perp = E$. Az is világos, hogy ha $H \subseteq E$, akkor $H \subseteq (H^\perp)^\perp$ (a $(H^\perp)^\perp$ halmazt rendszerint a $H^{\perp\perp}$ szimbólummal jelöljük). Továbbá, ha $H_1, H_2 \subseteq E$, akkor $H_1 \subseteq H_2$ esetén $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$.
4) Legyen $\mathbf{b}$ skalárszorzás E felett. Ekkor minden $H \subseteq E$ esetén $H^\perp = (H^{\perp\perp})^\perp$, mert a 3) alapján $H \subseteq H^{\perp\perp}$ miatt $(H^{\perp\perp})^\perp \subseteq H^\perp$, ugyanakkor szintén a 3) alapján $H^\perp \subseteq (H^\perp)^{\perp\perp}$, és nyilvánvaló, hogy $(H^{\perp\perp})^\perp = (H^\perp)^{\perp\perp}$.

A továbbiakban a skalárszorzás-függvényekre az absztrakt jelölési konvenciót alkalmazzuk, tehát minden skalárszorzást ugyanazzal a $(\cdot|\cdot)$ szimbólummal jelölünk, ha ez nem okoz félreértést.

Állítás. Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzás E felett. Ekkor a

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \sqrt{(x|x)}$$

leképezés olyan norma E felett, amelyre teljesül a paralelogramma-egyenlőség, és minden $x, y \in E$ esetén fennáll a

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

(*Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség*). Továbbá,

– ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor minden $E \ni x, y$-ra

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2);$$

– ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor minden $E \ni x, y$-ra

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

teljesül (*polarizációs formulák*).

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az itt értelmezett $\|\cdot\|$ függvényre (NO_I) és (NO_{II}) teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség bizonyítása előtt a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenséget igazoljuk. Ehhez legyenek $x, y \in E$ rögzítettek, és tegyük fel, hogy $(x|y) \neq 0$. Értelmezzük a

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+; \quad \lambda \mapsto (x + \lambda y | x + \lambda y)$$

leképezést. A skalárszorzás tulajdonságai szerint minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra

$$P(\lambda) = (x|x) + \lambda(y|x) + \overline{\lambda}(x|y) + |\lambda|^2(y|y) = \|x\|^2 + \lambda(y|x) + \overline{\lambda(y|x)} + |\lambda|^2\|y\|^2 = \\ = \|x\|^2 + 2\mathfrak{Re}(\lambda(y|x)) + |\lambda|^2\|y\|^2.$$

Ebből következik, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq P\left(t\frac{(x|y)}{|(x|y)|}\right) = \|x\|^2 + 2\mathfrak{Re}\left(t\frac{(x|y)}{|(x|y)|}(y|x)\right) + t^2\left|\frac{(x|y)}{|(x|y)|}\right|^2\|y\|^2 = \\ = \|x\|^2 + 2t|(x|y)| + t^2\|y\|^2,$$

tehát az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \|x\|^2 + 2t|(x|y)| + t^2\|y\|^2$$

leképezés olyan másodfokú valós polinomiális függvény, amely mindenütt pozitív értéket vesz föl, így a diszkriminánsa kisebb-egyenlő 0-nál, vagyis $4|(x|y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$. Ebből azonnal kapjuk a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenséget.

Ha $x, y \in E$, akkor a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = \\ = \|x\|^2 + 2\mathfrak{Re}(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \leq \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

tehát $\|\cdot\|$-ra (NO_{III}) is teljesül.

Ez a norma eleget tesz a paralelogramma-egyenlőségnek, mert $x, y \in E$ esetén

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y|x+y) + (x-y|x-y) =$$
$$= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) + (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y) =$$
$$= 2(x|x) + 2(y|y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Végül, a polarizációs formulák triviális következményei a skalárszorzás algebrai tulajdonságainak és a $\|\cdot\|$ definíciójának. ■

Definíció. Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzás E felett, akkor a

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \sqrt{(x|x)}$$

leképezést a $(\cdot|\cdot)$ *skalárszorzás által generált normának* nevezzük.

A polarizációs formulákból látható, hogy ha E normált tér, akkor *legfeljebb egy* olyan skalárszorzás létezik az E felett, amely az E normáját generálja. A következő tétel teljes jellemzást ad azokra a normákra, amelyek skalárszorzásból származtathatók.

Tétel. Az E normált pontosan akkor prehilbert-tér, ha létezik olyan E feletti skalárszorzás, amely az E normáját generálja.

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy E *valós* prehilbert-tér. Értelmezzük az

$$(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

leképezést. Nyilvánvalóan azt kell megmutatni, hogy $(\cdot|\cdot)$ olyan skalárszorzás E felett, amely az E normáját generálja.

Világos, hogy a $\|\cdot\|$-ra vonatkozó (NO_I) és (NO_{II}) miatt minden $E \ni x$-re $\|x\|^2 = (x|x)$ teljesül, tehát elég azt igazolni, hogy $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzás E felett. Ebből az (NO_I) alapján kapjuk, hogy $x \in E$ esetén $(x|x) \in \mathbb{R}_+$ és $(x|x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$. Az (NO_{II}) alapján a $(\cdot|\cdot)$ függvény szimmetrikus, így csak az szorul bizonyításra, hogy minden $E \ni y$-ra az $(\cdot|y) : E \to \mathbb{R}$ parciális függvény lineáris.

Legyen $y \in E$ rögzített. Vegyünk tetszőleges $x_1, x_2 \in E$ vektorokat, és írjuk fel a paralelogramma-egyenlőséget az $x_1 + y$ és x_2, valamint az x_1 és $x_2 - y$ vektorokra:

$$\|x_1 + y + x_2\|^2 + \|x_1 + y - x_2\|^2 = 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2,$$

$$\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2 - y\|^2.$$

Ezekből következik, hogy

$$4(x_1 + x_2|y) := \|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 =$$

$$= -\|x_1 + y - x_2\|^2 + 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 + \|x_1 - x_2 + y\|^2 - 2\|x_1\|^2 - 2\|x_2 - y\|^2 =$$

$$= \|x_1 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - 2\|x_1\|^2 + \left(\|x_1 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2\right).$$

A paralelogramma-egyenlőség alapján

$$\|x_1+y\|^2-\|x_2-y\|^2=-\|x_1-y\|^2+2\|x_1\|^2+2\|y\|^2+\|x_2+y\|^2-2\|x_2\|^2-2\|y\|^2,$$

amit az előző egyenlőségbe helyettesítve

$$4(x_1+x_2|y)=\|x_1+y\|^2-\|x_1-y\|^2+\|x_2+y\|^2-\|x_2-y\|^2=:4(x_1|y)+4(x_2|y)$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy a $(\cdot|y):E\to\mathbb{R}$ parciális függvény *additív.*

Megmutatjuk, hogy $y\in E$ esetén a $(\cdot|y):E\to\mathbb{R}$ parciális függvény *folytonos* a $\|\cdot\|$ szerint. Valóban, legyen $x\in E$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, amely x-hez konvergál a $\|\cdot\|$ szerint. Ekkor minden $\mathbb{N}\ni n$-re

$$|(x_n|y)-(x|y)|=|(x_n|y)+(-x|y)|=|(x_n-y|y)|=\frac{1}{4}|\|x_n-x+y\|^2-\|x_n-x-y\|^2|,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy az $(\cdot|y):E\to\mathbb{R}$ függvény additivitása miatt $(-x|y)=-(x|y)$, hiszen $(-x|y)+(x|y)=(-x+x|y)=(0|y)=0$. Tudjuk, hogy a $\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}$ függvény folytonos a $\|\cdot\|$ szerint, és a feltevés alapján $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x+y)=y$ és $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x-y)=-y$ a $\|\cdot\|$ szerint, így

$$\lim_{n\to\infty}|(x_n|y)-(x|y)|=\frac{1}{4}|\|y\|^2-\|-y\|^2|=0.$$

Tehát $y\in E$ esetén a $(\cdot|y):E\to\mathbb{R}$ parciális függvény additív és folytonos a $\|\cdot\|$ szerint. Ebből a VI. fejezet, 1. pont. **17**. gyakorlat a) része alapján következik, hogy minden $E\ni y$-ra a $(\cdot|y):E\to\mathbb{R}$ parciális függvény lineáris.

(II) Tegyük most fel, hogy E *komplex* prehilbert-tér. Az E *alatt fekvő* $E_\mathbb{R}$ valós normált tér nyilvánvalóan valós prehilbert-tér, ezért az (I) alapján létezik olyan $(\cdot|\cdot)_\mathbb{R}:E_\mathbb{R}\times E_\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ skalárszorzás az $E_\mathbb{R}$ valós vektortér felett (vagyis olyan pozitív definit szimmetrikus bilineáris funkcionál $E_\mathbb{R}$ felett), amelyre minden $x\in E$ esetén $\|x\|^2=(x|x)_\mathbb{R}$ teljesül. Világos, hogy minden $E\ni x,y$-ra

$$(x|y)_\mathbb{R}=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

Értelmezzük a

$$(\cdot|\cdot):E\times E\to\mathbb{C};\quad (x,y)\mapsto(x|y)_\mathbb{R}+i(x|iy)_\mathbb{R}$$

leképezést. Könnyen látható, hogy minden $E\ni x,y$-ra $(x|iy)_\mathbb{R}=-(y|ix)_\mathbb{R}$ és $(ix|iy)_\mathbb{R}=(x|y)_\mathbb{R}$, mert

$$\begin{aligned}4(x|iy)_\mathbb{R}&=\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2=\|i(-ix+y)\|^2-\|i(-ix-y)\|^2=\\&=\|y-ix\|^2-\|y+ix\|^2=-4(y|ix)_\mathbb{R},\end{aligned}$$

$$4(ix|iy)_\mathbb{R}=\|ix+iy\|^2-\|ix-iy\|^2=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4(x|y)_\mathbb{R}.$$

Ebből következik, hogy minden $E \ni x$-re $(x|ix)_{\mathbb{R}} = 0$, így

$$(x|x) := (x|x)_{\mathbb{R}} + i(x|ix)_{\mathbb{R}} = (x|x)_{\mathbb{R}} = \|x\|^2.$$

Tehát elég azt igazolni, hogy a $(\cdot|\cdot)$ függvényre teljesül az, hogy minden $E \ni y$-ra a $(\cdot|y) : E \to \mathbb{C}$ parciális függvény $\mathbb{C}$-lineáris, és minden $E \ni x, y$-ra $\overline{(x|y)} = (y|x)$.

Legyen $y \in E$ rögzített. Az $(\cdot|y) : E \to \mathbb{C}$ parciális függvény $\mathbb{R}$-lineáris, mert a $(\cdot|y)_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ és $(\cdot|iy)_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ függvények $\mathbb{R}$-lineárisak, és a definíció szerint $(\cdot|y) = (\cdot|y)_{\mathbb{R}} + i(\cdot|iy)_{\mathbb{R}}$. Ha $x \in E$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}((\alpha+i\beta)x|y) &:= ((\alpha+i\beta)x|y)_{\mathbb{R}} + i((\alpha+i\beta)x|iy)_{\mathbb{R}} = \\ &= \alpha(x|y)_{\mathbb{R}} + \beta(ix|y)_{\mathbb{R}} + i\alpha(x|iy)_{\mathbb{R}} + \beta i(ix|iy)_{\mathbb{R}} = \\ &= \alpha(x|y)_{\mathbb{R}} - \beta(x|iy)_{\mathbb{R}} + i\alpha(x|iy)_{\mathbb{R}} + \beta i(x|y)_{\mathbb{R}} = \\ &= (\alpha+i\beta)(x|y)_{\mathbb{R}} + (\alpha+i\beta)i(x|iy)_{\mathbb{R}} = (\alpha+i\beta)(x|y).\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $(\cdot|y) : E \to \mathbb{C}$ parciális függvény $\mathbb{C}$-lineáris.

Végül, ha $x, y \in E$, akkor a $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}}$ függvény szimmetrikussága és $(x|y)_{\mathbb{R}}, (x|iy)_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ miatt

$$\overline{(x|y)} := (x|y)_{\mathbb{R}} - i(x|iy)_{\mathbb{R}} = (y|x)_{\mathbb{R}} - i(iy|x)_{\mathbb{R}} = (y|x)_{\mathbb{R}} + i(y|ix)_{\mathbb{R}} = (y|x)$$

tehát a $(\cdot|\cdot)$ függvény skalárszorzás E felett. ■

Tehát a prehilbert-tereket úgy is lehetséges (és szokás) értelmezni, mint olyan $(E, (\cdot|\cdot))$ párok, amelyekre E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ skalárszorzás E felett.

Állítás. Ha E és F prehilbert-terek és $u : E \to F$ lineáris operátor, akkor u pontosan akkor izometria (a skalárszorzások által generált normák szerint), ha minden $E \ni x, y$-ra $(u(x)|u(y)) = (x|y)$ teljesül (vagyis u *skalárszorzás-tartó*).

Bizonyítás. Ha u skalárszorzás-tartó, akkor nyilvánvalóan izometria, mert minden $x \in E$ esetén

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|x) = \|x\|^2,$$

tehát $\|u(x)\| = \|x\|$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy u izometria. Ha E és F *valós* prehilbert-terek, akkor a polarizációs formula szerint minden $E \ni x, y$-ra

$$\begin{gathered}4(u(x)|u(y)) = \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2 = \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 = \\ = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 4(x|y),\end{gathered}$$

tehát $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. Ha E és F *komplex* prehilbert-terek, akkor a polarizációs formula szerint minden $E \ni x, y$-ra

$$\begin{gathered}4(u(x)|u(y)) = \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2 + i\|u(x)+iu(y)\|^2 - i\|u(x)-iu(y)\|^2 = \\ = \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 + i\|u(x+iy)\|^2 - i\|u(x-iy)\|^2 = \\ = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4(x|y),\end{gathered}$$

tehát $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. ■

Definíció. Ha E valós prehilbert-tér és $x, y \in E$ nem nulla vektorok, akkor az

$$\text{Arccos}\left(\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$$

számot az x és y vektorok által *bezárt szögnek* nevezzük, ahol

$$\text{Arccos} := \left(cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

Ha tehát E valós prehilbert-tér, $x, y \in E$ nem nulla vektorok, továbbá θ jelöli az x és y vektorok által bezárt szöget, akkor az elemi geometriából ismert

$$(x|y) = \|x\|\|y\|cos(\theta)$$

formula valójában a θ szög *definíciója* (a $\theta \in [0, \pi]$ mellékfeltétellel együtt).

A prehilbert- (illetve Hilbert-) terek speciális normált (illetve Banach-terek), ezért várható, hogy ezekre sok olyan különleges állítás igaz, amely tetszőleges normált- (illetve Banach-) terekre nem igaz. Most megfogalmazzuk a prehilbert-terek egyik legfontosabb speciális tulajdonságát.

Állítás. Legyen E prehilbert-tér és $H \subseteq E$ nem üres, teljes, konvex halmaz. Ekkor minden $x \in E$ esetén létezik egyetlen olyan $x_H \in H$, hogy $\|x - x_H\| = dist_H(x)$. Ha $x \in E$, akkor erre az x_H vektorra teljesül az, hogy minden $H \ni y$-ra $\mathfrak{Re}(y - x_H|x - x_H) \leq 0$.

Bizonyítás. Legyen $x \in E$ rögzített vektor. Ekkor $dist_H(x) := \inf_{y \in H} \|y - x\|$ miatt vehetünk olyan H-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre $dist_H(x) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén az $x_m - x$ és $x_n - x$ vektorokra felírva a paralelogramma-egyenlőséget kapjuk, hogy

$$4\ dist_H(x)^2 + \|x_m - x_n\|^2 \leq 4\left\|\frac{x_m + x_n}{2} - x\right\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 =$$
$$= \|(x_m - x) + (x_n - x)\|^2 + \|(x_m - x) - (x_n - x)\|^2 = 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy a H konvexitása és $x_m, x_n \in H$ miatt $\dfrac{x_m + x_n}{2} \in H$, ezért $dist_H(x) \leq \left\|\dfrac{x_m + x_n}{2} - x\right\|$. Tehát minden $\mathbb{N} \ni m.n$-re

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - 4\ dist_H(x)^2,$$

és itt a jobb oldal 0-hoz tart, ha m és n tart végtelenhez. Ebből következik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így a H teljessége miatt egyértelműen létezik az az $x_H \in H$ vektor, amelyre $x_H = \lim_{n\to\infty} x_n$. Nyilvánvaló, hogy

$$\|x_H - x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = dist_H(x).$$

Ha $x'_H \in H$ szintén olyan, hogy $\|x'_H - x\| = dist_H(x)$, akkor az $x_H - x$ és $x'_H - x$ vektorokra felírva a paralelogramma-egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\|x_H - x'_H\|^2 = \|(x_H - x) - (x'_H - x)\|^2 =$$

$$= -\|(x_H - x) + (x'_H - x)\|^2 + 2\|x_H - x\|^2 + 2\|x'_H - x\|^2 =$$

$$= -4\left\|\frac{x_H + x'_H}{2} - x\right\|^2 + 4\ dist_H(x) \leq 0,$$

hiszen a H konvexitása és $x_H, x'_H \in H$ miatt $\frac{x_H + x'_H}{2} \in H$, ezért $dist_H(x) \leq \left\|\frac{x_H + x'_H}{2} - x\right\|$. Ezzel az adott tulajdonságú x_H pont egyértelmű létezését igazoltuk.

Legyen most $x \in E$ és $x_H \in H$ az a pont, amelyre $\|x_H - x\| = dist_H(x)$, továbbá rögzítsünk egy $y \in H$ pontot. Minden $\alpha \in [0,1]$ valós számra, a H konvexitása miatt $(1-\alpha)x_H + \alpha y \in H$, ezért

$$\|x_H - x\|^2 \leq \|(1-\alpha)x_H + \alpha y - x\|^2 = \|\alpha(y - x_H) - (x - x_H)\|^2 =$$

$$= \alpha^2\|y - x_H\|^2 - 2\alpha\mathfrak{Re}(y - x_H|x - x_H) + \|x_H - x\|^2.$$

Ebből kapjuk, hogy minden $\alpha \in]0,1]$ valós számra

$$\mathfrak{Re}(y - x_H|x - x_H) \leq \frac{\alpha}{2}\|y - x_H\|^2,$$

így α-val 0-hoz tartva $\mathfrak{Re}(y - x_H|x - x_H) \leq 0$ adódik. ■

Definíció. Ha E prehilbert-tér és $H \subseteq E$ nem üres teljes konvex halmaz, akkor P_H jelöli azt az $E \to E$ függvényt, amely minden $x \in E$ vektorhoz azt az $x_H \in H$ vektort rendeli, amelyre $\|x - x_H\| = dist_H(x)$.

Tétel. (*Riesz-féle felbontási tétel.*) Ha E prehilbert-tér és $H \subseteq E$ teljes lineáris altér, akkor

$$E = H \oplus H^{\perp},$$

$$H = H^{\perp\perp}$$

teljesül, továbbá a $P_H : E \to E$ leképezés olyan folytonos lineáris operátor, amelyre $P_H \circ P_H = P_H$, $H = Im(P_H)$ és $H^{\perp} = Ker(P_H)$.

Bizonyítás. Legyen $x \in E$ rögzített vektor. Nyilvánvaló, hogy legfeljebb egy olyan $(x_1, x_2) \in H \times H^{\perp}$ pár létezhet, amelyre $x = x_1 + x_2$, hiszen ha $(x'_1, x'_2) \in H \times H^{\perp}$ is ilyen pár, akkor $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$ és $x_1 - x'_1 \in H$, valamint $x'_2 - x_2 \in H^{\perp}$, így $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 = 0$, vagyis $x_1 = x'_1$ és $x_2 = x'_2$. Világos továbbá, hogy $x = P_H(x) + (x - P_H(x))$ és $P_H(x) \in H$, ezért ha $x - P_H(x) \in H^{\perp}$, akkor igazoltuk a $E = H \oplus H^{\perp}$ egyenlőséget.

Az $x - P_H(x) \in H^{\perp}$ összefüggés bizonyításoz először megjegyezzük, hogy az előző állítás szerint minden $y \in H$ esetén $\mathfrak{Re}(y - P_H(x)|x - P_H(x)) \leq 0$. Ha $y \in H$, akkor $P_H(x) \in H$ miatt $P_H(x) + y \in H + H \subseteq H$ is igaz, így az iménti egyenlőtlenségben az y helyére a $P_H(x) + y$ vektort helyettesítve kapjuk, hogy $\mathfrak{Re}(y|x-P_H(x)) \leq 0$. Ha $y \in H$, akkor $-y \in -H \subseteq H$, tehát $\mathfrak{Re}(-y|x-P_H(x)) \leq 0$, vagyis $\mathfrak{Re}(y|x - P_H(x)) \geq 0$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy minden $H \ni y$-ra $\mathfrak{Re}(y|x - P_H(x)) = 0$. Ha E *valós* prehilbert-tér, akkor ebből kapjuk, hogy minden $y \in H$ esetén $(y|x - P_H(x)) = \mathfrak{Re}(y|x - P_H(x)) = 0$, vagyis $x - P_H(x) \in H^{\perp}$. Ha E *komplex* prehilbert-tér, akkor minden $y \in H$ esetén $iy \in iH \subseteq H$, tehát $-\mathfrak{Im}(y|x - P_H(x)) = \mathfrak{Re}(i(y|x - P_H(x))) = \mathfrak{Re}(iy|x - P_H(x)) = 0$, azaz $\mathfrak{Im}(y|x - P_H(x)) = 0$ is teljesül, ami azt jelenti, hogy $x - P_H(x) \in H^{\perp}$.

Ha $x \in H^{\perp\perp}$, akkor $x - P_H(x) \in H^{\perp\perp}$, hiszen $P_H(x) \in H \subseteq H^{\perp\perp}$ és $H^{\perp\perp}$ lineáris altér E-ben. Ugyanakkor $x - P_H(x) \in H^{\perp}$, ezért $x - P_H(x) = 0$, vagyis $x = P_H(x) \in H$. Ez azt jelenti, hogy $H^{\perp\perp} \subseteq H$ is igaz, így $H = H^{\perp\perp}$.

Ha $x \in E$, akkor $\|x - P_H(x)\| = dist_H(x)$ miatt $P_H(x) = x$ azzal ekvivalens, hogy $dist_H(x) = 0$, vagyis $x \in \overline{H}$. A H altér teljes, ezért zárt is, tehát $x \in E$ esetén $P_H(x) = x$ ekvivalens azzal, hogy $x \in H$. Ebből látható, hogy $Im(P_H) = H$, továbbá, ha $x \in E$, akkor $P_H(x) \in H$ miatt $P_H(P_H(x)) = P_H(x)$ teljesül, vagyis fennáll a $P_H \circ P_H = P_H$ egyenlőség. Ha $x \in Ker(P_H)$, akkor $x = x - P_H(x) \in H^{\perp}$, tehát $Ker(P_H) \subseteq H^{\perp}$. Megfordítva, ha $x \in H^{\perp}$, akkor $x = 0 + x$ és $x = P_H(x) + (x - P_H(x))$ az x két olyan előállítása összeg alakban, amelyekre $0, P_H(x) \in H$ és $x, x - P_H(x) \in H^{\perp}$, ezért $0 = P_H(x)$ és $x = x - P_H(x)$, vagyis $x \in Ker(P_H)$ is igaz. Ezzel igazoltuk a $Ker(P_H) = H^{\perp}$ egyenlőséget is.

A P_H függvény additív, mert ha $x_1, x_2 \in E$, akkor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (P_H(x_1) + P_H(x_2)) + ((x_1 - P_H(x_1)) + (x_2 - P_H(x_2))) = \\ &= P_H(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2 - P_H(x_1 + x_2)), \end{aligned}$$

és $P_H(x_1) + P_H(x_2), P_H(x_1 + x_2) \in H$, valamint $(x_1 - P_H(x_1)) + (x_2 - P_H(x_2)), x_1 + x_2 - P_H(x_1 + x_2) \in H^{\perp}$, ezért $P_H(x_1) + P_H(x_2) = P_H(x_1 + x_2)$. Ha $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\lambda x = \lambda P_H(x) + \lambda(x - P_H(x)) = P_H(\lambda x) + (\lambda x - P_H(\lambda x)),$$

és $\lambda P_H(x), P_H(\lambda x) \in H$, valamint $\lambda(x - P_H(x)), \lambda x - P_H(\lambda x) \in H^{\perp}$, ezért $P_H(\lambda x) = \lambda P_H(x)$.

Végül, a P_H lineáris operátor folytonos is (sőt norma-nem-növelő), mert ha $x \in E$, akkor $P_H(x) \perp x - P_H(x)$ miatt

$$\|x\|^2 = \|P_H(x) + (x - P_H(x))\|^2 = \|P_H(x)\|^2 + \|x - P_H(x)\|^2 \geq \|P_H(x)\|^2,$$

vagyis $\|P_H(x)\| \leq \|x\|$. ■

Ha E Hilbert-tér, akkor egy $H \subseteq E$ halmaz pontosan akkor teljes, ha zárt; ezért minden $H \subseteq E$ *zárt lineáris altér* esetében

$$E = H \oplus H^{\perp},$$

$$H = H^{\perp\perp}$$

teljesül, és $P_H \in \mathscr{L}(E)$ olyan operátor, hogy $P_H \circ P_H = P_H$, $H = Im(P_H)$ és $H^{\perp} = Ker(P_H)$. De ha E *nem teljes* prehilbert-tér, akkor létezhet olyan

$H \subseteq E$ zárt lineáris altér, hogy $H \neq E$ és $H^\perp = \{0\}$, tehát $H \oplus H^\perp \neq E$ és $H^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E \neq H$ (**7.** gyakorlat).

Következmény. Ha E Hilbert-tér és $A \subseteq E$, akkor $A^{\perp\perp}$ egyenlő az A által generált zárt lineáris altérrel, továbbá minden $H \subseteq E$ lineáris altérre

$$H^\perp = \{0\} \ \Leftrightarrow \ H^{\perp\perp} = E \ \Leftrightarrow \ \overline{H} = E$$

teljesül.

Bizonyítás. Az $A^{\perp\perp}$ halmaz olyan zárt lineáris altér E-ben, amely tartalmazza az A halmazt, ezért csak azt kell igazolni, hogy ha $H \subseteq E$ olyan zárt lineáris altér, amelyre $A \subseteq H$, akkor $A^{\perp\perp} \subseteq H$ is teljesül. Ez viszont igaz, mert $A \subseteq H$ miatt $A^{\perp\perp} \subseteq H^{\perp\perp}$, és a Riesz-féle felbontási tétel alapján $H^{\perp\perp} = H$, hiszen H zárt lineáris altér az E teljes normált térben, vagyis a H altér teljes is.

Ha $H \subseteq E$ lineáris altér, akkor természetesen $\overline{H}$ egyenlő a H által generált zárt lineáris altérrel, ezért az előzőeket alkalmazva kapjuk, hogy $H^{\perp\perp} = \overline{H}$, így a $\overline{H} = E$ és $H^{\perp\perp} = E$ egyenlőségek ekvivalensek. Továbbá, $H^\perp = \{0\}$ esetén $H^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$, és megfordítva, ha $H^{\perp\perp} = E$, akkor a 4) megjegyzés alapján $H^\perp = (H^\perp)^{\perp\perp} = (H^{\perp\perp})^\perp = E^\perp = \{0\}$. ■

Most megmutatjuk, hogy prehilbert-térnek szoros kapcsolata van a saját topologikus duálisával.

Állítás. Ha E prehilbert-tér, akkor minden $x \in E$ esetén $(\cdot|x) \in E'$, és a

$$J_E : E \to E'; \quad x \mapsto (\cdot|x)$$

leképezés konjugált-lineáris izometria, tehát minden $E \ni x$-re

$$\|x\| = \sup_{y \in E;\ \|y\| \leq 1} |(y|x)|.$$

Bizonyítás. A skalárszorzás tulajdonságai alapján minden $E \ni x$-re a $(\cdot|x) : E \to \mathbb{K}$ parciális függvény lineáris funkcionál, és a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség szerint folytonos is, mert minden $y \in E$ esetén $|(\cdot, x)(y)| = |(y|x)| \leq \|x\|\|y\|$. Ebből még az is látszik, hogy $x \in E$ esetén $\|(\cdot|x)\| \leq \|x\|$. Itt valójában egyenlőség áll, mert ha $x \in E$ és $x \neq 0$, akkor $\dfrac{x}{\|x\|} \in E$ egységvektor, így a funkcionálnorma értelmezése alapján

$$\|(\cdot|x)\| \geq \left|(\cdot|x)\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \left|\left(\frac{x}{\|x\|}\,\middle|\, x\right)\right| = \|x\|.$$

Tehát a $J_E : E \to E'$; $x \mapsto (\cdot|x)$ leképezés izometria, amelynek a konjugált-linearitása azonnal következik az E' feletti lineáris műveletek definíciójából, és abból, hogy minden $y \in E$ esetén az $(y|\cdot) : E \to \mathbb{K}$ parciális függvény konjugált-lineáris funkcionál. ■

Definíció. Ha E prehilbert-tér, akkor a

$$J_E : E \to E'; \quad x \mapsto (\cdot|x)$$

függvényt az E és E' közötti *kanonikus leképezésnek* nevezzük.

Tehát egy prehilbert-tér és a topologikus duálisa közötti kanonikus leképezés konjugált-lineáris izometria, ezért szükségképpen injektív is. Azonban ez a leképezés általában nem szürjektív; erről szól a következő tétel.

Tétel. (*Riesz-féle reprezentációs tétel.*) Az E prehilbert-tér pontosan akkor Hilbert-tér, ha a $J_E : E \to E'$ kanonikus leképezés szürjektív, tehát ha minden $f \in E'$ funkcionálhoz létezik olyan $x \in E$, hogy minden $E \ni y$-ra $f(y) = (y|x)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy J_E függvény szürjektív, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben. Ekkor a J_E izometrikussága miatt $(J_E(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E'-ben, ugyanakkor E' teljes, tehát van olyan $f \in E'$, hogy a $(J_E(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat f-hez konvergál a funkcionálnorma szerint, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \|J_E(x_n) - f\| = 0$. A J_E szürjektivitása miatt van olyan $x \in E$, hogy $J_E(x) = f$. Ugyanakkor J_E izometria is, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|J_E(x_n) - f\| = \|J_E(x_n) - J_E(x)\| = \|x_n - x\|$, tehát az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál x-hez E-ben. Ez azt jelenti, hogy E Hilbert-tér.

Megfordítva, tegyük fel, hogy E Hilbert-tér, és legyen $f \in E'$. Olyan $x \in E$ vektort keresünk, amelyre $J_E(x) = f$, vagyis minden $E \ni y$-ra $f(y) = (y|x)$. Természetesen $f \neq 0$ feltehető.

Az E teljessége és a Riesz-féle felbontási tétel szerint $E = Ker(f) \oplus (Ker(f))^{\perp}$, ezért $(Ker(f))^{\perp} \neq \{0\}$, különben $E = Ker(f)$, azaz $f = 0$ teljesülne. Legyen $z \in (Ker(f))^{\perp}$ rögzített nem 0 vektor; természetesen ekkor $z \notin Ker(f)$, vagyis $f(z) \neq 0$. Ha $y \in E$ tetszőleges, akkor nyilvánvalóan $y - \dfrac{f(y)}{f(z)}z \in Ker(f)$, ezért $\left(y - \dfrac{f(y)}{f(z)}z \,\middle|\, z\right) = 0$. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in E$ esetén $(y|z) = \dfrac{f(y)}{f(z)}\|z\|^2$, tehát az $x := \dfrac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}z$ vektorra $f(y) = (y|x) = J_E(x)(y)$ teljesül, vagy ami ugyanaz $f = J_E(x)$. ■

Emlékeztetünk arra, hogy ha E normált tér, akkor létezik egy kitüntetett $j_E : E \to E''$ lineáris izometria (VI. fejezet, 1. és 2. pont). Megmutatjuk, hogy ha E Hilbert-tér, akkor ez az operátor két kitüntetett konjugált-lineáris izometria kompozíciójaként áll elő.

Következmény. Ha E Hilbert-tér, akkor E' a funkcionálnormával ellátva szintén Hilbert-tér, és $j_E = J_{E'} \circ J_E$. Minden Hilbert-tér reflexív Banach-tér.

Bizonyítás. Ha E Hilbert-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján a J_E operátor konjugált-lineáris izometrikus bijekció, tehát $f, g \in E'$ esetén léteznek olyan $x, y \in E$, amelyekre $f = J_E(x)$ és $g = J_E(y)$, így

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = \|J_E(x) + J_E(y)\|^2 + \|J_E(x) - J_E(y)\|^2 =$$

$$= \|J_E(x+y)\|^2 + \|J_E(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 =$$

$$= 2\|J_E(x)\|^2 + 2\|J_E(y)\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

ami azt jelenti, hogy az E' feletti funkcionálnormára teljesül a paralelogramma-egyenlőség. Ugyanakkor E' mindig teljes, még akkor is ha E nem teljes normált tér. Ezért ha E Hilbert-tér, akkor E' a funkcionálnormával ellátva szintén Hilbert-tér. Jelölje $(\cdot|\cdot)'$ az az E' feletti skalárszorzást, amely az E' feletti funkcionálnormát generálja. Ha $x \in E$ és $f \in E'$, akkor a definíciók szerint

$$((J_{E'} \circ J_E)(x))(f) = (J_{E'}(J_E(x)))(f) = (f|J_E(x))' = (J_E(J_E^{-1}(f))|J_E(x))' =$$

$$= (x|J_E^{-1}(f)) = J_E(J_E^{-1}(f))(x) = f(x) = (j_E(x))(f)$$

teljesül, ahol kihasználtuk, hogy a $J_E : E \to E'$ konjugált-lineáris izometriára minden $x_1, x_2 \in E$ esetén fennáll a $(J_E(x_1)|J_E(x_2))' = (x_2|x_1)$ egyenlőség (**12**. gyakorlat).

Ezzel megmutattuk, hogy $j_E = J_{E'} \circ J_E$ teljesül, és a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint J_E és J'_E mindketten szürjektívek, ezért j_E is az, vagyis E reflexív Banach-tér. ■

Azonban léteznek olyan reflexív Banach-terek, amelyek nem Hilbert-terek; például minden *véges dimenziós* normált tér reflexív Banach-tér, de nem szükségképpen Hilbert-tér. Természetesen olyan *végtelen dimenziós* reflexív Banach-tereket is meg lehet adni, amelyek normájára nem teljesül a paralelogramma-egyenlőség (XII. fejezet, 3. pont, **4**. gyakorlat).

Gyakorlatok

1. Ha $(T, \mathscr{R}, \theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér és F Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor $L^2_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ a $\|\cdot\|_{\theta,2}$ normával ellátva Hilbert-tér. Írjuk fel azt az $L^2_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ feletti skalárszorzást, amely a $\|\cdot\|_{\theta,2}$ normát generálja.

(*Útmutatás.* Ha $\xi, \eta \in L^2_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $f \in \xi$, $g \in \eta$, akkor

$$\|\xi+\eta\|^2_{\theta,2}+\|\xi-\eta\|^2_{\theta,2} = \|f+g\|^2_{\theta,2}+\|f-g\|^2_{\theta,2} = \int_T \|f+g\|^2 \, d|\theta| + \int_T \|f-g\|^2 \, d|\theta| =$$

$$= \int_T \left(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right) \, d|\theta| = \int_T \left(2\|f\|^2 + 2\|g\|^2\right) \, d|\theta| =$$

$$= 2\int_T \|f\|^2 \, d|\theta| + 2\int_T \|g\|^2 \, d|\theta| = 2\|f\|^2_{\theta,2} + 2\|g\|^2_{\theta,2} = 2\|\xi\|^2_{\theta,2} + 2\|\eta\|^2_{\theta,2},$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $f, g \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ miatt $\|f+g\|^2, \|f-g\|^2, \|f\|^2, \|g\|^2 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, és az integrál lineáris operátor. Tehát a $\|\cdot\|_{\theta,2}$ normára teljesül a paralelogramma-egyenlőség, továbbá a Riesz-Fischer tétel szerint $L^2_F(T, \mathscr{R}, \theta)$ a $\|\cdot\|_{\theta,2}$ normával ellátva Banach-tér. Továbbá, az $(f|g) : T \to \mathbb{K};\ t \mapsto (f(t)|g(t))$ függvény eleme $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$-nak, tehát jól értelmezett az $\int_T (f|g) \, d|\theta|$ integrál, és ez csak a ξ és η ekvivalencia-osztályoktól függ. Ebből könnyen kapható, hogy $(\xi|\eta) = \int_T (f|g) \, d|\theta|$.)

2. Minden valós vagy komplex vektortér felett *létezik* olyan norma, amelyre teljesül a paralelogramma-egyenlőség.

(*Útmutatás.* Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és B algebrai bázishalmaz E-ben (IV. fejezet, 1. pont, **2**. gyakorlat). Ekkor a

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^{(B)} \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \left(\sum_{b \in B} |f(b)|^2\right)^{1/2}$$

függvény olyan norma a $\mathbb{K}^{(B)}$ vektortér felett, amelyre teljesül a paralelogramma-egyenlőség. Ha $u : \mathbb{K}^{(B)} \to E$ a kanonikus lineáris bijekció (IV. fejezet, 1. pont, **1**. és **2**. gyakorlatok), akkor a $\|\cdot\| \circ u^{-1} : E \to \mathbb{R}_+$ leképezés olyan norma E felett, amelyre teljesül a paralelogramma-egyenlőség.)

3. Ha E prehilbert-tér $\mathbb{K}$ felett és $x, y \in E$, akkor az $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy $y = \lambda x$ vagy $x = \lambda y$.

(*Útmutatás.* Ha $x \neq 0$ és $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$, akkor $y = \dfrac{(y|x)}{\|x\|^2}x$, ami azonnal belátható az $\left\|y - \dfrac{(y|x)}{\|x\|^2}x\right\|^2$ szám értékének meghatározásával.)

4. Legyen E komplex prehilbert-tér, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és $z \in \mathbb{C}$ olyan szám, hogy $z^n = 1$ és minden $k < n$ természetes számra $z^k \neq 1$ (például $z := Exp(2\pi i/n)$). Ekkor $x, y \in E$ esetén teljesül az

$$(x|y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \|x + z^k y\|^2$$

általánosított polarizációs formula.

(*Útmutatás.* Teljesülnek a $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$ egyenőségek!)

5. Legyen E prehilbert-tér és $H \subseteq E$ tetszőleges halmaz. Ha $x \in E$ és $x' \in H$ olyan vektorok, hogy minden $H \ni y$-ra $\mathfrak{Re}(y - x'|x - x') \leq 0$, akkor $\|x - x'\| = dist_H(x)$.

(*Útmutatás.* Legyen $y \in H$ tetszőleges, és írjuk fel a paralelogramma-egyenlőséget az $y - x'$ és $x - x'$ vektorokra:

$$\|(y - x') + (x - x')\|^2 + \|(y - x') - (x - x')\|^2 = 2\|y - x'\|^2 + 2\|x - x'\|^2.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\|y - x'\|^2 + 2\mathfrak{Re}(y - x'|x - x') + \|x - x'\|^2 + \|y - x\|^2 = 2\|y - x'\|^2 + 2\|x - x'\|^2,$$

vagyis $2\mathfrak{Re}(y-x'|x-x')+\|y-x\|^2 = \|y-x'\|^2+\|x-x'\|^2$. Ekkor $\mathfrak{Re}(y-x'|x-x') \leq 0$ miatt

$$\|y - x\|^2 \geq 2\mathfrak{Re}(y - x'|x - x') + \|y - x\|^2 = \|y - x'\|^2 + \|x - x'\|^2 \geq \|x - x'\|^2,$$

tehát $\|y-x\| \geq \|x-x'\|$. Ebből következik, hogy $dist_H(x) := \inf_{y \in H} \|y-x\| \geq \|x-x'\|$. Ezért $\|x' - x\| = dist_H(x)$, hiszen $x' \in H$ miatt $\|x - x'\| \geq dist_H(x)$ is igaz.)

6. Legyen E prehilbert-tér, és $H \subseteq E$ olyan halmaz, amelyre $H - H \subseteq H$, vagyis minden $x_1, x_2 \in H$ esetén $x_1 - x_2 \in H$. Ha $x \in E$ és $x' \in H$ olyan vektorok, hogy $x - x' \in H^{\perp}$, akkor $\|x - x'\| = dist_H(x)$.

(*Útmutatás.* A feltevés szerint $x' \in H$, ezért $\|x - x'\| \geq dist_H(x)$. Ha $y \in H$ tetszőleges, akkor $x - y = (x' - y) + (x - x')$, valamint $x' - y \in H - H \subseteq H$ és $x - x' \in H^{\perp}$, tehát

$$\|x - y\|^2 = \|x' - y\|^2 + \|x - x'\|^2 \geq \|x - x'\|^2,$$

így $\|x - y\| \geq \|x - x'\|$, következésképpen $dist_H(x) := \inf_{y \in H} \|x - y\| \geq \|x - x'\|$.)

7. Legyen $E := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, és lássuk el E-t a $\|\cdot\|_2$ normával; ekkor E nem teljes prehilbert-tér. Legyen $\mathbf{c} \in l^2_{\mathbb{K}}$ olyan sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mathbf{c}(k) \neq 0$ (például legyen minden $\boldsymbol{c} := (1/(k+1))_{k \in \mathbb{N}}$). Értelmezzük az

$$f_{\mathbf{c}} : E \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}(k)\mathbf{s}(k)$$

lineáris funkcionált. Itt minden $E \ni \mathbf{s}$-re *véges összeg* áll. Bizonyítsuk be a következőket.

a) Az $f_{\mathbf{c}}$ leképezés nem nulla folytonos lineáris funkcionál E felett.

b) $(Ker(f_{\mathbf{c}}))^{\perp} = \{0\}$.

c) $Ker(f_{\mathbf{c}}) \oplus (Ker(f_{\mathbf{c}}))^{\perp} \neq E$, és $(Ker(f_{\mathbf{c}}))^{\perp\perp} \neq Ker(f_{\mathbf{c}})$. A $Ker(f_{\mathbf{c}})$ halmaz nem teljes, zárt lineáris altér E-ben.

d) Nem létezik olyan $x \in E$, hogy $f_{\mathbf{c}} = J_E(x)$, vagyis $f_{\mathbf{c}} \in E' \setminus Im(J_E)$.

(*Útmutatás.* a) Az általánosított Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenségből (IV. fejezet, 1. pont) következik, hogy $\boldsymbol{s} \in E$ esetén $|f_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{s})| \leq \|\mathbf{c}\|_2 \|\boldsymbol{s}\|_2$, tehát $f_{\mathbf{c}}$ folytonos lineáris funkcionál, és világos, hogy $f_{\mathbf{c}} \neq 0$.

b) Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbf{e}_k \in E$ az az elem, amelyre minden $\mathbb{N} \ni j$-re $\mathbf{e}_k(j) = \delta_{j,k}$. Könnyen látható, hogy $j, k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{c}(j)^{-1}\mathbf{e}_j - \mathbf{c}(k)^{-1}\mathbf{e}_k \in Ker(f_{\mathbf{c}})$, tehát ha $\boldsymbol{s} \in (Ker(f_{\mathbf{c}}))^{\perp}$, akkor minden $\mathbb{N} \ni j, k$-ra $0 = (\mathbf{c}(j)^{-1}\mathbf{e}_j - \mathbf{c}(k)^{-1}\mathbf{e}_k|\boldsymbol{s}) = \mathbf{c}(j)^{-1}\overline{\boldsymbol{s}(j)} - \mathbf{c}(k)^{-1}\overline{\boldsymbol{s}(k)}$. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\overline{\boldsymbol{s}(k)} = \lambda\mathbf{c}(k)$, azaz $\overline{\mathbf{s}} = \lambda\mathbf{c}$. Ugyanakkor $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mathbf{c}(k) \neq 0$, ezért $\lambda = 0$, így $\mathbf{s} = 0$.

d) Ha $\boldsymbol{s} \in E$ olyan volna, hogy $f_{\mathbf{s}} = J_E(\boldsymbol{s})$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{c}(k) = f_{\mathbf{c}}(\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_k|\boldsymbol{s}) = \overline{\boldsymbol{s}(k)}$ teljesülne, ami lehetetlen, mert $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\boldsymbol{s}(k) \neq 0$.)

8. Legyen E prehilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat E-ben, és $x \in E$. Tekintsük a következő állításokat.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ az E normált térben.

(ii) Minden $E \ni y$-ra $\lim\limits_{n\to\infty}(y|x_n) = (y|x)$ a $\mathbb{K}$-ban, és $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ az $\mathbb{R}$-ben.

(iii) Minden $E \ni y$-ra $\lim\limits_{n\to\infty}(y|x_n) = (y|x)$ a $\mathbb{K}$-ban.

Mutassuk meg, hogy (i)$\Leftrightarrow$(ii) és (ii)$\Rightarrow$(iii). Ha E véges dimenziós, akkor (i), (ii) és (iii) ekvivalensek. Ha E végtelen dimenziós, akkor az x vektor és az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat megválasztható úgy, hogy (iii) teljesül, de (i) nem.

(*Útmutatás.* Az (i)$\Leftrightarrow$(ii) és (ii)$\Leftrightarrow$(iii) következtetések nyilvánvalóan igazak. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\mathfrak{Re}(x|x_n),$$
ezért ha (ii) teljesül, akkor a jobb oldal 0-hoz tart, ha n tart végtelenhez, tehát (i) is igaz. Ha E véges dimenziós, és $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált bázis E-ben (XII. fejezet, 6. pont), akkor a (iii) teljesülése esetén minden $I \ni i$-re $\lim\limits_{n\to\infty}(e_i|x_n) = (e_i|x)$, így $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n|e_i) = (x|e_i)$ is teljesül, ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n = \sum\limits_{i\in I}(x_n|e_i)e_i$, tehát (i) is igaz. Ha E végtelen dimenziós, akkor létezik E-ben $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat (XII. fejezet, 6. pont), így minden $y \in E$ vektorra $\lim\limits_{k\to\infty}(e_k|y) = 0$, hiszen a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}|(y|e_k)|^2$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Ugyanakkor az $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz az E normája szerint.)

9. Legyen E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, hogy minden $E \ni y$-ra az $((y|x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos E-ben, és létezik egyetlen olyan $x \in E$, amelyre minden $y \in E$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}(y|x_n) = (y|x)$.

(*Útmutatás.* A feltevés szerint a $(J_E(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat pontonként konvergens az E halmazon, ezért a Banach-Steinhaus-tétel alapján az $u := \lim\limits_{n\to\infty} J_E(x_n)$ funkcionál folytonos, és fennállnak a $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|J_E(x_n)\| < +\infty$ összefüggések, vagyis az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos az E normája szerint. A Riesz-féle reprezentációs tétel alapján létezik olyan $x \in E$, hogy $u = J_E(x)$. Ekkor x olyan elem, hogy minden $y \in E$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}(y|x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} J_E(x_n)(y) = u(y) = J_E(x)(y) = (y|x)$. Ha $x' \in E$ szintén olyan vektor, hogy minden $E \ni y$-ra $\lim\limits_{n\to\infty}(y|x_n) = (y|x')$, akkor $x - x' \in E^\perp = \{0\}$, vagyis $x' = x$.)

10. (*Elemi Lebesgue-Radon-Nicodym tétel.*) Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett. Ha $\theta, \theta' : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékek, akkor azt mondjuk, hogy θ' *abszolút folytonos θ szerint*, ha a T minden θ-nullhalmaza θ'-nullhalmaz. Mutassuk meg, hogy ha $\theta, \theta' : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ olyan mértékek, hogy $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta')$ (ahol 1_T az $T \to \mathbb{R}$ azonosan 1 függvény), és θ' abszolút folytonos θ szerint, akkor van olyan $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, hogy $\theta' = g.\theta$.

(**Megjegyzés**. Ha T σ-véges $\mathscr{R}$ szerint, akkor minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ mértékre az $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ feltétel a IX. fejezet 9. pontja alapján ekvivalens azzal, hogy a θ mérték *korlátos.*)

(*Útmutatás.* (I) Tegyük fel először, hogy $\mu, \nu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan *pozitív* mértékek, hogy $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \nu)$, és ν abszolút folytonos μ szerint. Bebizonyítjuk olyan $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu)$ függvény létezését, amelyre $g \geq 0$ és $\nu = g.\mu$.

Először megjegyezzük, hogy a μ-nullhalmazok megegyeznek a $\mu+\nu$-nullhalmazokkal. Ez azonnal következik a $\mu \leq \mu + \nu$ mértékegyenlőtlenségből, a IX. fejezet, 1. pont, **10**. gyakorlat c) pontjából, és abból, hogy ν abszolút folytonos μ szerint.

Továbbá, a IX. fejezet, 5. pont, **8**. gyakorlat szerint

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \nu) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$$

teljesül, tehát a hipotézis alapján $1_T^2 = 1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$, így a IX. fejezet, 6. pontja utolsó állításának c) része alapján $1_T \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$. Ebből következik, hogy $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$ esetén $f = f \cdot 1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$, vagyis fennállnak a

$$\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \nu)$$

relációk. Ezért jól értelmezett az

$$u : \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int\limits_T f \, d\nu$$

leképezés, amely természetesen lineáris funkcionál. A Hölder-egyenlőtlenség alapján minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$ esetén

$$|u(f)| = \left|\int\limits_T f \, d\nu\right| \leq \int\limits_T |f| \, d\nu = \int^* |f| \, d\nu \leq \left(\int^* 1_T^2 \, d\nu\right)^{1/2} \left(\int^* |f|^2 \, d\nu\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_T 1_T \; d\nu\right)^{1/2} \left(\int^* |f|^2 \; d(\mu+\nu)\right)^{1/2} = \left(\int\limits_T 1_T \; d\nu\right)^{1/2} \|f\|_{\mu+\nu,2},$$

tehát az u lineáris funkcionál folytonos az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ függvénytér feletti $\|\cdot\|_{\mu+\nu,2}$ félnorma szerint. Ezért létezik egyetlen olyan

$$u^\bullet : L^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu) \to \mathbb{R}$$

lineáris funkcionál, amelyre teljesül az, hogy minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ esetén

$$u^\bullet(f^\bullet) = u(f) := \int\limits_T f \; d\nu.$$

Világos, hogy ez az $u^\bullet$ funkcionál folytonos az $L^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ valós Hilbert-tér felett. A Riesz-féle reprezentációs tétel alapján létezik olyan $g_0 \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$, hogy minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ esetén $u^\bullet(f^\bullet) = (f^\bullet|g_0^\bullet)$, ahol $(\cdot|\cdot)$ az $L^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ Hilbert-tér skalárszorzása. Ez azt jelenti, hogy minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ függvényre

$$\int\limits_T f \; d\nu = \int\limits_T f g_0 \; d(\mu+\nu).$$

Megmutatjuk, hogy μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $g_0(t) \geq 0$ teljesül. Valóban, a T halmaz $\mu+\nu$-integrálható, és $g_0 \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$, ezért a IX. fejezet, 8. pont lemmája szerint a $[g_0 < 0]$ halmaz $\mu+\nu$-integrálható, vagyis $\chi^2_{[g_0<0]} = \chi_{[g_0<0]} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$. Tehát $\chi_{[g_0<0]} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ is teljesül, így

$$0 \leq \int\limits_T \chi_{[g_0<0]} \; d\nu = \int\limits_T \chi_{[g_0<0]} g_0 \; d(\mu+\nu) \leq 0,$$

hiszen $\chi_{[g_0<0]} g_0 \leq 0$ a T halmazon mindenütt. Ezért

$$\int^* (-\chi_{[g_0<0]} g_0) \; d(\mu+\nu) = \int\limits_T (-\chi_{[g_0<0]} g_0) \; d(\mu+\nu) = 0,$$

és $-\chi_{[g_0<0]} g_0 \geq 0$ a T halmazon mindenütt, így $-\chi_{[g_0<0]} g_0 = 0$ a T halmazon $\mu+\nu$-majdnem mindenütt. Ez azzal ekvivalens, hogy a $[-\chi_{[g_0<0]} g_0 \neq 0] = [g_0 < 0]$ halmaz $\mu+\nu$-nullhalmaz, vagyis $g_0 \geq 0$ a T halmazon $\mu+\nu$-majdnem mindenütt, tehát μ-majdnem mindenütt is.

Most megmutatjuk, hogy μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $g_0(t) < 1$ teljesül. A IX. fejezet, 8. pont lemmája szerint a $[g_0 \geq 1]$ halmaz $\mu+\nu$-integrálható, hiszen $g_0 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$. Ezért $\chi^2_{[g_0\geq 1]} = \chi_{[g_0\geq 1]} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$, így $\chi_{[g_0\geq 1]} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$, tehát $\chi_{[g_0\geq 1]} g_0 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\nu)$, következésképpen:

$$\int\limits_T \chi_{[g_0\geq 1]} \; d\nu = \int\limits_T \chi_{[g_0\geq 1]} g_0 \; d(\mu+\nu) = \int\limits_T \chi_{[g_0\geq 1]} g_0 \; d\mu + \int\limits_T \chi_{[g_0\geq 1]} g_0 \; d\nu.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$0 \geq \int_T \chi_{[g_0 \geq 1]}(1 - g_0) \, d\nu = \int_T \chi_{[g_0 \geq 1]} g_0 \, d\mu \geq 0,$$

hiszen $\chi_{[g_0 \geq 1]}(1 - g_0) \leq 0$ és $\chi_{[g_0 \geq 1]} g_0 \geq 0$ a T halmazon mindenütt. Ezért

$$\int^* \chi_{[g_0 \geq 1]} g_0 \, d\mu = \int_T \chi_{[g_0 \geq 1]} g_0 \, d\mu = 0,$$

ami azzal ekvivalens, hogy a $[\chi_{[g_0 \geq 1]} g_0 \neq 0] = [g_0 \geq 1]$ halmaz μ-nullhalmaz, vagyis μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $g_0(t) < 1$ teljesül.

Legyen $N := [g_0 < 0] \cup [g_0 \geq 1]$. Az előzőek alapján N μ-nullhalmaz, tehát a

$$g_1 : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} g_0(t) & ; \text{ha } t \in T \setminus N, \\ 0 & ; \text{ha } t \in N \end{cases}$$

függvény a g_0 függvénnyel μ-majdnem mindenütt egyenlő, ezért $g_1 \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$, és minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$ esetén

$$\int_T f \, d\nu = \int_T f g_1 \, d(\mu + \nu),$$

ugyanakkor minden $T \ni t$-re $g_1(t) \in [0, 1[$. Vezessük most be a

$$g := \frac{g_1}{1 - g_1} : T \to \mathbb{R}_+$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu)$ és $\nu = g.\mu$, vagyis minden $E \in \mathscr{R}$ halmazra

$$\nu(E) = \int_T \chi_E g \, d\mu$$

teljesül.

Legyen $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$ rögzített pozitív függvény. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor az $f g_1^k$ függvény $\mu + \nu$-mérhető és $0 \leq f g_1^k \leq f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$, ezért a négyzetes integrálhatóság kritériuma (IX. fejezet, 8. pont) alapján $f g_1^k \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu + \nu)$, következésképpen

$$\int_T f g_1^k \, d\nu = \int_T f g_1^{k+1} \, d(\mu + \nu).$$

Ezért minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_T f g_1^k \, d\nu = \sum_{k=0}^{n-1} \int_T f g_1^{k+1} \, d(\mu + \nu) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_T f g_1^{k+1} \, d\mu + \sum_{k=0}^{n-1} \int_T f g_1^{k+1} \, d\nu,$$

amiből könnyen kapjuk, hogy

$$\int_T f\ d\nu = \sum_{k=0}^{n-1} \int_T f g_1^{k+1}\ d\mu + \int_T f g_1^n\ d\nu.$$

Az $(fg_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\nu)$-ben halad, monoton fogyó, mindegyik tagja pozitív függvény, és $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(fg_1^n) = 0$. Ezért a Beppo-Levi-tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T fg_1^n\ d\nu = 0$, vagyis a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\int_T fg_1^{k+1}\ d\mu$ sor konvergens. Ebből ismét a Beppo-Levi-tétel alapján kapjuk, hogy az $fg = \sum\limits_{k=0}^{\infty} fg_1^{k+1}$ függvény eleme $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu)$-nek és

$$\int_T f\ d\nu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_T fg_1^{k+1}\ d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_T fg_1^n\ d\nu = \sum_{k=0}^{\infty}\int_T fg_1^{k+1}\ d\mu =$$

$$= \int_T \left(\sum_{k=0}^{\infty} fg_1^{k+1}\right)\ d\mu = \int_T fg\ d\mu.$$

Ezzel megmutattuk, hogy minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ pozitív függvényre $fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu)$ és

$$\int_T f\ d\nu = \int_T fg\ d\mu$$

teljesül. A hipotézis szerint $1_T \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$, ezért $g = 1_T g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu)$ is teljesül, és ha $E \in \mathscr{R}$, akkor $\chi_E \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\mu+\nu)$ miatt

$$\nu(E) := \int_T \chi_E\ d\nu = \int_T \chi_E g\ d\mu,$$

vagyis $\nu = g.\mu$.

(II) Most megmutatjuk, hogy ha $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ olyan mérték, hogy $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$, akkor létezik olyan $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T,\mathscr{R},\theta)$, hogy minden $t\in T$ esetén $|g(t)| = 1$, valamint $\theta = g.|\theta|$ és $|\theta| = \overline{g}.\theta$.

Ha $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, akkor a valós mértékek elemi Hahn-Jordan felbontását (VIII. fejezet, 4. pont) alkalmazva írható, hogy $\theta = \theta^+ - \theta^-$ és $\theta^+,\theta^- : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan pozitív mértékek, hogy $\theta^+ \le |\theta|$ és $\theta^- \le |\theta|$, így a θ^+ és θ^- mértékek nyilvánvalóan abszolút folytonosak a $|\theta|$ mérték szerint. Ugyanakkor a IX. fejezet, 5. pont, **8**. gyakorlat alapján

$$1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta^+) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta^-),$$

így az (I) miatt léteznek olyan $g_+, g_- \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},|\theta|) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ függvények, amelyekre $\theta^+ = g_+.|\theta|$ és $\theta^- = g_-.|\theta|$. Ekkor $g := g_+ - g_- \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{R},\theta)$ nyilvánvalóan olyan függvény, hogy $\theta = g.|\theta|$.

Ha $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, akkor a komplex mértékek elemi Hahn-Jordan felbontását (VIII. fejezet, 4. pont) alkalmazva írható, hogy

$$\theta = (\mathfrak{Re}(\theta))^+ - (\mathfrak{Re}(\theta))^- + i(\mathfrak{Im}(\theta))^+ - i(\mathfrak{Im}(\theta))^-,$$

ahol $(\mathfrak{Re}(\theta))^+, (\mathfrak{Re}(\theta))^-, (\mathfrak{Im}(\theta))^+, (\mathfrak{Im}(\theta))^- : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ olyan pozitív mértékek, amelyeket a $|\theta|$ mérték majorál, tehát ezek a pozitív mértékek mind abszolút folytonosak a $|\theta|$ mérték szerint. Ugyanakkor a IX. fejezet, 5. pont, **8**. gyakorlat szerint

$$1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, \theta) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, (\mathfrak{Re}(\theta))^+) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, (\mathfrak{Re}(\theta))^-) \cap$$

$$\cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, (\mathfrak{Im}(\theta))^+) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, (\mathfrak{Im}(\theta))^-)$$

ezért az (I) miatt léteznek olyan $g_+, g_-, h_+, h_- \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, |\theta|) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ függvények, amelyekre

$$(\mathfrak{Re}(\theta))^+ = g_+.|\theta|, \quad (\mathfrak{Re}(\theta))^- = g_-.|\theta|, \quad \mathfrak{Im}(\theta))^+ = h_+.|\theta|, \quad \mathfrak{Im}(\theta))^- = h_-.|\theta|.$$

Ekkor $g := g_+ - g_- + i(h_+ - h_-) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ nyilvánvalóan olyan függvény, hogy $\theta = g.|\theta|$.

Ezzel igazoltuk olyan $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ létezését, amelyre $\theta = g.|\theta|$. Ebből az egyenlőségből a IX. fejezet, 6. pont, **5**. gyakorlat alapján kapjuk, hogy $|\theta| = |g.|\theta|| = |g|.|\theta|$. Ebből könnyen belátható, hogy $|g| = 1$ teljesül T-n θ-majdnem mindenütt. Természetesen g megváltoztatható úgy, hogy minden $T \ni t$-re $|g(t)| = 1$ legyen. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\overline{g}.\theta = \overline{g}.(g.|\theta|) = |g|^2.|\theta| = |\theta|$ is teljesül.

(III) Legyenek $\theta, \theta' : \mathscr{R} \to \mathbb{K}$ olyan mértékek, hogy $1_T \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta')$, és θ' abszolút folytonos θ szerint. Ekkor $|\theta'|$ abszolút folytonos $|\theta|$ szerint, tehát az (I) alapján van olyan $h \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, hogy $|\theta'| = h.|\theta|$. A (II) alapján léteznek olyan $g_1 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ és $g_2 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta')$ függvények, hogy $|g_1| = 1 = |g_2|$, valamint $|\theta| = g_1.\theta$ és $|\theta'| = g_2.\theta'$. Ekkor $g_2.\theta' = (hg_1).\theta$, amiből ugyanúgy, mint az előbb $\theta' = (\overline{g}_2 h g_1).\theta$ adódik, tehát a $g := \overline{g}_2 h g_1 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \theta)$ függvény olyan, hogy $\theta' = g.\theta$.)

11. Legyen E normált tér és F prehilbert-tér. Minden $u \in \mathscr{L}(E; F)$ teljesen folytonos lineáris operátorhoz létezik olyan $\mathscr{L}(E; F)$-ben haladó $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, amely konvergál u-hoz az operátornorma szerint, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $Im(u_n) \subseteq F$ lineáris altér véges dimenziós.

(**Megjegyzés**. Ha F nem prehilbert-tér, akkor már létezhet olyan $u \in \mathscr{L}(E; F)$ teljesen folytonos lineáris operátor, amely nem approximálható operátornormában véges dimenziós értékkészletű folytonos lineáris operátorokkal.)

(*Útmutatás.* Az $u \in \mathscr{L}(E; F)$ operátor teljes folytonossága miatt az $u\langle \overline{B}_1(0) \rangle \subseteq F$ halmaz teljesen korlátos. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges; ekkor van olyan $H \subseteq \overline{B}_1(0)$ véges halmaz, hogy

$$u\langle \overline{B}_1(0) \rangle \subseteq \bigcup_{x \in H} B_\varepsilon(u(x)).$$

Jelölje F_ε az $u\langle H \rangle$ véges halmaz által generált lineáris alteret F-ben. Az F_ε altér teljes, ezért tekinthetjük az F_ε-ra vetítő P_{F_ε} ortogonális projektort. Ha $x \in \overline{B}_1(0)$, akkor létezik olyan $x' \in H$, hogy $u(x) \in B_\varepsilon(u(x'))$, azaz $\|u(x) - u(x')\| < \varepsilon$. Ekkor a P_{F_ε} operátor értelmezése alapján

$$\|u(x) - (P_{F_\varepsilon} \circ u)(x)\| = \inf_{y \in F_\varepsilon} \|u(x) - y\| \leq \min_{z \in H} \|u(x) - u(z)\| \leq \|u(x) - u(x')\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy $\|u - P_{F_\varepsilon} \circ u\| \leq \varepsilon$; ugyanakkor a $P_{F_\varepsilon} \circ u \in \mathscr{L}(E; F)$ operátor értékkészlete véges dimenziós altér F-ben.)

12. Ha E és F prehilbert-terek és $u : E \to F$ *konjugált lineáris* operátor, akkor u izometrikussága ekvivalens azzal, hogy minden $x_1, x_2 \in E$ esetén fennáll az $(u(x_1)|u(x_2)) = (x_2|x_1)$ egyenlőség.

(*Útmutatás.* Hasonlóan járhatunk el, mint a lineáris operátorok izometrikusságának esetében.)

6. Ortogonális rendszerek és ortogonális sorok

Definíció. Legyen E prehilbert-tér. Az E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszert *ortogonálisnak* nevezzük, ha minden $i,j\in I$, $i\neq j$ indexre $(x_i|x_j)=0$. Az E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszert *ortonormáltnak* nevezzük, ha ortogonális, és minden $I\ni i$-re $\|x_i\|=1$. Az ortogonális sorozatokhoz asszociált sorokat *ortogonális soroknak* nevezzük.

Legyen E prehilbert-tér és $(x_i)_{i\in I}$ E-ben haladó véges ortogonális rendszer. Ha $I\neq\emptyset$, akkor

$$\left\|\sum_{i\in I}x_i\right\|^2=\left(\sum_{i\in I}x_i\,\middle|\,\sum_{i\in I}x_i\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I}(x_i|x_j)\right)=\sum_{i\in I}\|x_i\|^2.$$

Ha megállapodunk abban, hogy az üres rendszer összege 0 az E-ben, akkor ez az egyenlőség-lánc $I=\emptyset$ esetén is igaz. Ezt az összefüggést *elemi Pithagorász-tételnek* nevezzük. Most megfogalmazzuk ennek általánosítását ortogonális sorokra.

Állítás. (*Az ortogonális sorok kovergenciájának kritériuma.*) Legyen E Hilbert-tér és $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat E-ben. A $\sum_{k\in\mathbb{N}}x_k$ sor pontosan akkor konvergens E-ben, ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}\|x_k\|^2$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}x_k$ sor konvergens E-ben, akkor

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}x_k\right\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\|x_k\|^2$$

(*Pithagorász-tétel*).

Bizonyítás. Minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén, az elemi Pithagorász-tétel alapján

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right\|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k\|^2,$$

tehát ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}x_k$ sor konvergens E-ben, akkor

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}x_k\right\|^2=\left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\|x_k\|^2.$$

Megfordítva, ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}}\|x_k\|^2$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, akkor $m,n\in\mathbb{N}$ esetén, az elemi Pithagorász-tétel alapján

$$\left\|\sum_{k=0}^{m-1}x_k-\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right\|^2=\left\|\sum_{k=\min(m,n)}^{\max(m,n)-1}x_k\right\|^2=\sum_{k=\min(m,n)}^{\max(m,n)-1}\|x_k\|^2\leq\sum_{k=\min(m,n)}^{\infty}\|x_k\|^2,$$

amiből látható, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor (mint sorozat) Cauchy-sorozat E-ben, tehát az E teljessége miatt konvergens. ■

Tétel. Legyen E Hilbert-tér, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat E-ben, és H az $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér E-ben.

a) Minden $x \in E$ vektorra a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |(x|e_k)|^2$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és fennáll a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

Bessel-egyenlőtlenség.

b) Minden $E \ni x$-re a $\sum_{k\in\mathbb{N}} (x|e_k)e_k$ sor konvergens E-ben, és teljesülnek az

$$P_H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)e_k,$$

$$\|P_H(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2$$

Parseval-egyenlőségek.

Bizonyítás. Legyen $x \in E$ rögzített. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, az elemi Pithagorász-tétel alapján

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n-1} (x|e_k)e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\left(x \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n-1} (x|e_k)e_k \right) + \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (x|e_k)e_k \right\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{(x|e_k)}(x|e_k) + \sum_{k=0}^{n-1} |(x|e_k)|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |(x|e_k)|^2,$$

amiből látható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ebből következik, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |(x|e_k)|^2$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és fennáll a Bessel-egyenlőtlenség, így az a) állítást igazoltuk. Ebből azt is kapjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} (x|e_k)e_k$ sor konvergens E-ben. Tehát a Pithagorász-tétel alapján a b) bizonyításához elgendő azt megmutatni, hogy $P_H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)e_k$.

Az nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (x|e_k)e_k \in H,$$

ezért a $P_H(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k$ egyenlőség bizonyítához elég azt megmutatni, hogy minden $y \in H$ esetén

$$\|x-y\| \geq \left\| x - \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \right\|.$$

Az E feletti norma-függvény folytonossága miatt ehhez elég igazolni, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $(\lambda_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k\in n}\lambda_k e_k \right\| \geq \left\| x - \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \right\|$$

teljesül, hiszen

$$H = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}\left\{ \sum_{k\in n}\lambda_k e_k \,\middle|\, (\lambda_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n \right\}}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \,\middle|\, x \right) + \left\| \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \right\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)(e_k|x) + \sum_{k=0}^{\infty}|(x|e_k)|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty}|(x|e_k)|^2,$$

ahol kihasználtuk a Pithagorász-tételt, és azt, hogy $z \in E$ esetén a $(\cdot|z) : E \to \mathbb{K}$ függvény folytonos lineáris funkcionál, ezért

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \,\middle|\, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)(e_k|z).$$

Ezért elegendő azt igazolni, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $(\lambda_k)_{k\in n} \in \mathbb{K}^n$, akkor

$$\left\| x - \sum_{k\in n}\lambda_k e_k \right\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k\in n}|(x|e_k)|^2,$$

hiszen az előzőek szerint

$$\|x\|^2 - \sum_{k\in n}|(x|e_k)|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty}|(x|e_k)|^2 = \left\| x - \sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k \right\|^2.$$

Ez viszont nyilvánvalóan igaz, mert az elemi Pithagorász-tétel alapján

$$\left\| x - \sum_{k\in n}\lambda_k e_k \right\|^2 - \|x\|^2 + \sum_{k\in n}|(x|e_k)|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re} \sum_{k \in n} \lambda_k (e_k|x) + \sum_{k \in n} |\lambda_k|^2 - \|x\|^2 + \sum_{k \in n} |(x|e_k)|^2 =$$

$$= \sum_{k \in n} \left(|\lambda_k|^2 - 2\mathfrak{Re}(\lambda_k (e_k|x)) + |(x|e_k)|^2 \right) = \sum_{k \in n} |\lambda_k - (x|e_k)|^2 \geq 0. \blacksquare$$

Következmény. Legyen E Hilbert-tér, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormált sorozat E-ben, és H az $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris alteret E-ben. A következő állítások ekvivalensek.

(i) Ha $x \in E$ olyan, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(x|e_k) = 0$, akkor $x = 0$.

(ii) Az $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér (vagyis H) egyenlő E-vel.

(iii) Minden $E \ni x$-re $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2$.

(iv) Minden $E \ni x$-re $x = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k) e_k$.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Az (i) állítás azt jelenti, hogy $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$, amiből következik, hogy $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = E$, és itt a bal oldalon H áll.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Ha $H = E$, akkor $P_H = id_E$, ezért a Parseval-egyenlőség szerint minden $E \ni x$-re

$$\|x\|^2 = \|P_H(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2.$$

(iii)$\Rightarrow$(iv) Minden $x \in E$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n-1} (x|e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |(x|e_k)|^2,$$

ezért ha (iii) igaz, akkor minden $x \in E$ vektorra $x = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k) e_k$, vagyis (iv) teljesül.

(iv)$\Rightarrow$(i) Ha $x \in E$ olyan, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(x|e_k) = 0$, és (iv) teljesül, akkor $x = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k) e_k = 0$. $\blacksquare$

Definíció. Legyen E Hilbert-tér. Az E-ben haladó $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormált sorozatot *ortonormált bázissorozatnak* nevezzük, ha teljesülnek rá az előző állításban megfogalmazott (i), (ii), (iii) és (iv) állítások. Ha $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormált sorozat az E Hilbert-térben, akkor $x \in E$ esetén a $\sum_{k \in \mathbb{N}} (x|e_k) e_k$ vektorsort az x vektor $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ szerinti *absztrakt Fourier-sorának* nevezzük.

Állítás. (*Gram-Schmidt-ortogonalizáció.*) Legyen E prehilbert-tér és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lineárisan független sorozat E-ben. Ekkor létezik egyetlen olyan $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormált sorozat E-ben, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re az $(x_k)_{k \in n}$ és $(e_k)_{k \in n}$ rendszerek által generált lineáris alterek egyenlők, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(x_n|e_n) \in \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen H_n az $\{x_k | k \in n\}$ halmaz által generált (n-dimenziós) lineáris altér E-ben. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer lineáris függetlensége miatt minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \notin H_n$, vagyis $x_n \neq P_{H_n}(x_n)$; legyen $y_n := x_n - P_{H_n}(x_n)$.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $(x_n|y_n) = 0$ lehetetlen, különben $0 = (x_n|y_n) = (x_n|x_n - P_{H_n}(x_n))$, azaz $(x_n|P_{H_n}(x_n)) = \|x_n\|^2$, így

$$0 \leq \|y_n\|^2 = \|x_n - P_{H_n}(x_n)\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathfrak{Re}(x_n|P_{H_n}(x_n)) + \|P_{H_n}(x_n)\|^2 =$$

$$= \|P_{H_n}(x_n)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0,$$

tehát $y_n = 0$, holott $y_n \neq 0$.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $x_n \in H_{n+1}$ és $P_{H_n}(x_n) \in H_n \subseteq H_{n+1}$, tehát $y \in H_{n+1}$. Ugyanakkor $y_n := x_n - P_{H_n}(x_n) \in H_n^\perp$, így $\mathbb{K}.y_n \subseteq H_{n+1} \cap H_n^\perp$. Tekintettel arra, hogy $\mathbb{K}.y_n$ és $H_{n+1} \cap H_n^\perp$ mindketten egydimenziós lineáris alterek E-ben, itt egyenlőség áll, azaz $\mathbb{K}.y_n = H_{n+1} \cap H_n^\perp$.

Most igazoljuk az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egyértelműségét. Legyen tehát $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan ortonormált sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\{e_k | k \in n\}$ halmaz által generált lineáris altér egyenlő H_n-nel és $(x_n|e_n) \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $e_n \in H_{n+1} \cap H_n^\perp = \mathbb{K}.y_n$, így létezik egyetlen olyan $\lambda_n \in \mathbb{K}$, amelyre $e_n = \lambda_n y_n$; ekkor $\|e_n\| = 1$ miatt $|\lambda_n| = \dfrac{1}{\|y_n\|}$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\lambda_n}(x_n|y_n) = (x_n|e_n) \in \mathbb{R}^+$, következésképpen

$$\lambda_n = \frac{1}{\|y_n\|} . \frac{(x_n|y_n)}{|(x_n|y_n)|}.$$

Ez azt jelenti, hogy az adott tulajdonságok az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot egyértelműen meghatározzák.

Most világosan látszik, hogy a keresett $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *úgy kell értelmezni*, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$e_n := \left(\frac{1}{\|y_n\|} . \frac{(x_n|y_n)}{|(x_n|y_n)|} \right) y_n.$$

Triviálisan ellenőrizhető, hogy erre a sorozatra teljesülnek az előírt feltételek. ■

Az előző állítás feltételei mellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$P_{H_n}(x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_n|e_k)e_k,$$

ahol H_n az $(e_k)_{k\in n}$ rendszer által generált lineáris altér E-ben, ezért

$$e_n = \frac{x_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_k|e_k)e_k}{\sqrt{\|x_n\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} |(x_k|e_k)|^2}},$$

valamint $e_0 = x_0/\|x_0\|$. Ez *rekurzív formula* az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra.

Elnevezés. Ha E prehilbert-tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineárisan független sorozat E-ben, akkor az előző állásban értelmezett $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatot az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *Gram-Schimdt-féle ortogonalizáltjának* nevezzük.

Tétel. Ha E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) Létezik E-ben haladó ortonormált bázissorozat.

(ii) Létezik izometrikus lineáris bijekció az E és $l^2_{\mathbb{K}}$ Hilbert-terek között.

(iii) E végtelen dimenziós és szeparábilis.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázissorozat az E Hilbert-térben. Ekkor a Parseval-egyenlőség miatt az

$$u : E \to l^2_{\mathbb{K}}; \quad x \mapsto ((x|e_k))_{k\in\mathbb{N}}$$

leképezés izometrikus lineáris operátor. Az ortogonális sorok konvergenciájának kritériuma alapján minden $\mathbf{s} \in l^2_{\mathbb{K}}$ sorozatra a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathbf{s}(j)e_j$ sor konvergens E-ben és

$$u\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{s}(j)e_j\right) = \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{s}(j)e_j \,\middle|\, e_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{s}(j)(e_j|e_k)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \mathbf{s},$$

tehát az u operátor szürjektív is.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Ha $u : E \to l^2_{\mathbb{K}}$ izometrikus lineáris bijekció, akkor E végtelen dimenziós, mert $l^2_{\mathbb{K}}$ is végtelen dimenziós, továbbá E szeparábilis is, mert az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozattér szeparábilis és u homeomorfizmus E és $l^2_{\mathbb{K}}$ között.

(iii)$\Rightarrow$(i) Elegendő azt igazolni, hogy ha (iii) teljesül, akkor létezik olyan *lineárisan független* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat E-ben, amelyre az $\{x_k|k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált lineáris altér sűrű E-ben. Ha ugyanis $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ilyen sorozat, akkor ennek Gram-Schmidt-féle ortogonalizáltja ortonormált bázis E-ben.

Vegyünk tetszőleges olyan $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot E-ben, amelyre a $\{z_k|k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált lineáris altér sűrű E-ben; ilyen az E szeparabilitása miatt létezik. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen E_n az $\{z_k|k \in n\}$ halmaz által generált (legfeljebb n-dimenziós) lineáris alteret E-ben. Világos, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_n \subseteq E_{n+1}$, így $E_\infty := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ lineáris altér E-ben, és ez tartalmazza a $\{z_k|k \in \mathbb{N}\}$ halmazt, tehát E_∞ sűrű lineáris altere E-nek.

Van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $z_k \neq 0$, különben $\{z_k|k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$, így $E = \{0\}$, holott E végtelen dimenziós. Ezért jől értelmezett az $m := \min\{k \in \mathbb{N}|\boldsymbol{z}_k \neq 0\}$ természetes szám.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $k > n$ természetes szám, hogy $z_k \notin E_n$, különben $\{z_k|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k > n)\} \subseteq E_n$, ezért $\{z_k|k \in \mathbb{N}\} \subseteq E_{n+1}$ teljesülne, amiből $E_\infty = E_{n+1}$ következne, tehát az E_{n+1} zártsága és E_∞ sűrűsége folytán $E = E_{n+1}$, ami lehetetlen, mert E végtelen dimenziós. Ezért jól értelmezett a

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \mapsto \min\{k \in \mathbb{N}|(k > n) \wedge (z_k \notin E_n)\}$$

függvény. Jelölje σ a g függvény és az m kezdőpont által meghatározott iterációs sorozatot. Tehát $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a függvény, amelyre $\sigma(0) := m$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n+1) = g(\sigma(n))$. A definíciók alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a $(z_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat lineárisan független, és a $\{z_{\sigma(n)} | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált lineáris altér egyenlő E_∞-vel, vagyis sűrű E-ben. ■

Gyakorlatok

1. Legyen F valós vektortér. Egy $f : \mathbb{R} \to F$ függvényt F-be ható *trigonometrikus polinom* nevezünk, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és léteznek olyan $(s_k)_{0\leq k\leq n}$, $(c_k)_{0\leq k\leq n}$ rendszerek F-ben, hogy minden $\mathbb{R} \ni t$-re

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n}(c_k \cos(kt) + s_k \sin(kt)).$$

a) Ha $P : \mathbb{R} \to F$ poliniomiális vektorfüggvény, akkor a $P \circ \cos : \mathbb{R} \to F$ függvény trigonometrikus polinom.

b) Ha $f : \mathbb{R} \to F$ trigonometrikus polinom, akkor az $f.\sin$ függvény, és minden $\mathbb{R} \ni t_0$-ra az $\mathbb{R} \to F;\ t \mapsto f(t + t_0)$ függvény is trigonometrikus polinom.

c) (*Weierstrass approximációs tétele.*) Legyen F valós normált tér, és jelölje $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; F)$ azon $f : [-\pi, \pi] \to F$ folytonos függvények halmazát, amelyekre $f(-\pi) = f(\pi)$. Az F-be ható trigonometrikus polinomok $[-\pi, \pi]$-re vett leszűkítéseinek halmaza *sűrű* a $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; F)$ függvénytérben a sup-norma szerint, vagyis minden $f : [-\pi, \pi] \to F$ folytonos függvény esetében, ha $f(-\pi) = f(\pi)$, akkor létezik F-be ható trigonometrikus polinomoknak olyan sorozata, amely egyenletesen konvergál f-hez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

(*Útmutatás.* a) Legyen $N \in \mathbb{N}$, $(z_n)_{0\leq n\leq N} \in F^{N+1}$, és tekintsük a $P := \sum_{n=0}^{N} z_n id_{\mathbb{R}}^n$ polinomiális vektorfüggvényt. Ekkor $P \circ \cos = \sum_{n=0}^{N} z_n \cos^n$, ezért az a) bizonyításához elég azt megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $(c_{n,k})_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, hogy minden $\mathbb{R} \ni t$-re

$$\cos^n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cos(kt).$$

Valóban, $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $\mathbb{R} \ni t$-re a binomiális formula alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\cos^n(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{i(n-2j)t} =$$

$$= \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{i(n-2j)t}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cos((n-2j)t)$$

adódik. Tehát ha minden $k \leq n$ természetes számra

$$c_{n,k} := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{(n-k)/2} & ; \text{ha } n-k \text{ páros,} \\ 0 & ; \text{ha } n-k \text{ páratlan,} \end{cases}$$

akkor minden $\mathbb{R} \ni t$-re $\cos^n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cos(kt)$ teljesül.

b) A trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulák szerint minden $k \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(kt)\sin(t) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)t) - \sin((k-1)t)),$$

$$\sin(kt)\sin(t) = -\frac{1}{2}(\cos((k+1)t) - \cos((k-1)t)),$$

ezért minden $f : \mathbb{R} \to F$ trigonometrikus polinomra az $f.\sin$ függvény is trigonometrikus polinom. Továbbá, minden $t, t_0 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(k(t+t_0)) = \cos(kt_0)\cos(kt) - \sin(kt_0)\sin(kt),$$

$$\sin(k(t+t_0)) = \cos(kt_0)\sin(kt) + \sin(kt_0)\cos(kt),$$

ezért minden $f : \mathbb{R} \to F$ trigonometrikus polinomra az $\mathbb{R} \to F;\ t \mapsto f(t+t_0)$ függvény is trigonometrikus polinom.

c) Legyen először $f : [-\pi, \pi] \to F$ *páros* folytonos függvény, tehát *minden* $t \in [-\pi, \pi]$ pontra $f(-t) = f(t)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az $f \circ Arccos : [-1,1] \to F$ függvény folytonos (ahol $Arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$), ezért a Bernstein-féle approximációs tétel (V. fejezet, 8. pont) szerint van olyan $P : \mathbb{R} \to F$ polinomiális függvény, hogy $\sup\limits_{t\in[-1,1]} \|f(Arccos(t)) - P(t)\| < \varepsilon$. Ebből következik, hogy

$$\sup_{t\in[0,\pi]} \|f(t) - P(\cos(t))\| = \sup_{t\in[-1,1]} \|f(Arccos(t)) - P(t)\| < \varepsilon,$$

hiszen $\cos\langle[0,\pi]\rangle = [-1,1]$. Az f és cos függvények párossága folytán

$$\sup_{t\in[-\pi,0]} \|f(t) - P(\cos(t))\| = \sup_{t\in[0,\pi]} \|f(t) - P(\cos(t))\|,$$

ezért fennáll a $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} \|f(t) - P(\cos(t))\| < \varepsilon$ egyenlőtlenség, és a $P \circ \cos$ függvény az a) alapján trigonometrikus polinom. Ez azt jelenti, hogy minden $[-\pi,\pi] \to F$ páros folytonos függvény egyenletesen approximálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon trigonometrikus polinomokkal.

Most megmutatjuk, hogy ha $f : [-\pi, \pi] \to F$ tetszőleges folytonos függvény, akkor az $f.\sin^2$ függvény egyenletesen approximálható a $[-\pi,\pi]$ intervallumon trigonometrikus polinomokkal. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és értelmezzük a

$$f_1 : [-\pi,\pi] \to F; \quad t \mapsto \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)),$$

$$f_2 : [-\pi,\pi] \to F; \quad t \mapsto \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))\sin(t)$$

függvényeket. Ezek folytonosak és párosak, tehát az előzőek szerint léteznek olyan $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to F$ trigonometrikus polinomok, hogy $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} \|f_1(t) - g_1(t)\| < \varepsilon/2$ és $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} \|f_2(t) - g_2(t)\| < \varepsilon/2$. Ekkor $f.\sin^2 = f_1.\sin^2 + f_2.\sin$, következésképpen

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]} \|f(t)\sin^2(t) - (g_1(t)\sin(t) + g_2(t))\sin(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A b) alapján a $(g_1 . \sin + g_2) . \sin$ függvény is trigonometrikus polinom, tehát $f . \sin^2$ egyenletesen approximálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon trigonometrikus polinomokkal.

Végül bebizonyítjuk, hogy ha $f : [-\pi, \pi] \to F$ tetszőleges folytonos függvény, akkor $f(-\pi) = f(\pi)$ esetén létezik F-be ható trigonometrikus polinomoknak olyan sorozata, amely egyenletesen konvergál $f . \cos^2$-hez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ebből már következik a Weierstrass-féle approximációs tétel, mert ha $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; F)$, akkor az $f . \sin^2$ és $f . \cos^2$ függvények egyenletesen approximálhatók a $[-\pi, \pi]$ intervallumon trigonometrikus polinomokkal, tehát az $f = f . \sin^2 + f . \cos^2$ függvény is egyenletesen approximálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon trigonometrikus polinomokkal.

Legyen tehát $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; F)$ rögzített, és terjesszük ki az f függvényt $\mathbb{R}$-re 2π szerint periodikus függvénnyé. Ilyen kiterjesztés azért létezik, mert $f(-\pi) = f(\pi)$, továbbá világos, hogy a kiterjesztett függvény is folytonos. Ezt a kiterjesztett függvényt szintén f fogja jelölni, és értelmezzük az

$$f_\bullet : \mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto f\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

leképezést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az előzőek szerint létezik olyan $g_\bullet : \mathbb{R} \to F$ trigonometrikus polinom, hogy

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \|f_\bullet(t) \sin^2(t) - g_\bullet(t)\| < \varepsilon.$$

Az $f_\bullet . \sin^2$ és $g_\bullet$ függvények 2π szerinti periodikussága miatt

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \|f_\bullet(t) \sin^2(t) - g_\bullet(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_\bullet(t) \sin^2(t) - g_\bullet(t)\|,$$

amiből következik, hogy

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \left\| f(t) \cos^2(t) - g_\bullet\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| f_\bullet\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - g_\bullet\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_\bullet(t) \sin^2(t) - g_\bullet(t)\| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$g : \mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto g_\bullet\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

függvényre fennáll a

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \|f(t) \cos^2(t) - g(t)\| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.)

2. Legyen F komplex vektortér. Egy $f : \mathbb{R} \to F$ függvényt F-be ható *komplex trigonometrikus polinomnak* nevezünk, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és létezik olyan $(c_k)_{-n \leq k \leq n}$ rendszer F-ben, hogy minden $\mathbb{R} \ni t$-re

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Legyen F komplex normált tér, és jelölje $\mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F)$ azon $f:[-\pi,\pi]\to F$ folytonos függvények halmazát, amelyekre $f(-\pi)=f(\pi)$. Az F-be ható komplex trigonometrikus polinomok $[-\pi,\pi]$-re vett leszűkítéseinek halmaza *sűrű* a $\mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F)$ függvénytérben a sup-norma szerint, vagyis minden $f:[-\pi,\pi]\to F$ folytonos függvény esetében, ha $f(-\pi)=f(\pi)$, akkor létezik F-be ható komplex trigonometrikus polinomoknak olyan sorozata, amely egyenletesen konvergál f-hez a $[-\pi,\pi]$ intervallumon.

(*Útmutatás.* Jelölje $F_{\mathbb{R}}$ az F alatt fekvő valós normált teret (VI. fejezet, 2. pont), és alkalmazzuk az **1**. gyakorlatban megfogalmazott Weierstrass-féle approximációs tételt $F_{\mathbb{R}}$-re! Ehhez vegyük észre, hogy az $F_{\mathbb{R}}$-be ható (valós) trigonometrikus polinomok egyben F-be ható komplex trigonometrikus polinomok is (az Euler- de Moivre formula szerint), továbbá $\mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F)=\mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F_{\mathbb{R}})$ nyilvánvalóan teljesül.)

3. Legyen $T\in\mathbb{R}^+$ rögzített szám és $\omega:=2\pi/T$. Legyen továbbá F valós (illetve komplex) Banach-tér, és jelölje $\mathscr{C}_\bullet([-T/2,T/2];F)$ azon $f:[-T/2,T/2]\to F$ folytonos függvények halmazát, amelyekre $f(-T/2)=f(T/2)$. Ekkor minden $f\in\mathscr{C}_\bullet([-T/2,T/2];F)$ függvényhez létezik $\mathbb{R}\to F$ valós (illetve komplex) trigonometrikus polinomoknak olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy az $(f_n\circ(\omega.id_{\mathbb{R}}))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a $[-T/2,T/2]$ intervallumon.

(*Útmutatás.* Értelmezzük a $\sigma:[-T/2,T/2]\to[-\pi,\pi];\ t\mapsto\omega t$ leképezést. Ha $f\in\mathscr{C}_\bullet([-T/2,T/2];F)$, akkor $f\circ\sigma^{-1}\in\mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F)$, tehát az **1** (illetve **2**.) gyakorlat szerint létezik $\mathbb{R}\to F$ valós (illetve komplex) trigonometrikus polinomoknak olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $(f_n\circ(\omega id_{\mathbb{R}}))_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál az f függvényhez a $[-T/2,T/2]$ intervallumon.)

4. Legyen F Banach-tér és $f\in\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$.

a) Minden $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbb{R}\to F;\quad t\mapsto f(t)\sin(\lambda t),$$
$$\mathbb{R}\to F;\quad t\mapsto f(t)\cos(\lambda t)$$

függvények $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálhatók, és

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)=0,$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)=0$$

teljesül.

b) Ha F komplex Banach-tér, akkor minden $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén az

$$\mathbb{R}\to F;\quad t\mapsto f(t)e^{i\lambda t}$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható és

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)=0$$

teljesül.

(*Útmutatás.* a) Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az $\mathbb{R} \to F$; $t \mapsto f(t)\sin(\lambda t)$ és $\mathbb{R} \to F$; $t \mapsto f(t)\cos(\lambda t)$ függvények Lebesgue-mérhetők és a normafüggvényüket $\|f(\cdot)\|$ majorálja, ezért az integrálhatóság kritériuma (IX. fejezet, 8. pont) alapján ezek a függvények Lebesgue-integrálhatók.

Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$. Az elemi Newton-Leibniz-formula (X. fejezet, 2. pont) alkalmazásával könnyen belátható, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}(t)\cos(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int_a^b \cos(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$
$$= (b-a)\mathrm{sinc}\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{(b+a)\lambda}{2}\right),$$

valamint

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int_a^b \sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) =$$
$$= (b-a)\mathrm{sinc}\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{(b+a)\lambda}{2}\right),$$

és a sinc (sinus cardinalis) függvény a $\pm\infty$-ben 0-hoz tart. Ebből következik, hogy minden $f \in \mathscr{E}_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$ lépcsősfüggvényre

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = 0,$$
$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = 0$$

teljesül.

Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $g \in \mathscr{E}_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}})$, hogy $\int^* \|f-g\|\ d\mu_{\mathbb{R}} < \varepsilon/2$. Az előző bekezdés alapján van olyan $L \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, ha $|\lambda| > L$, akkor

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} g(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left\|\int_{\mathbb{R}} g(t)\cos(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, ha $|\lambda| > L$, akkor

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| \le \left\|\int_{\mathbb{R}} (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| +$$

$$+\left\|\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \|f(t)-g(t)\| d\mu_{\mathbb{R}}(t) + \left\|\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)\sin(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| < \varepsilon,$$

és hasonlóan kapjuk, hogy $\left\|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\lambda t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)\right\| < \varepsilon.$

b) Elegendő alkalmazni az a) állítást az F alatt fekvő $F_{\mathbb{R}}$ valós Banach-térre. De eljárhatunk úgy is, hogy megismételjük az a) bizonyításában követett gondolatmenetet, hivatkozva arra, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ esetén minden $\mathbb{R} \ni \lambda$-ra az elemi Newton-Leibniz-formula szerint

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[}(t)e^{i\lambda t}\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \int\limits_{a}^{b} e^{i\lambda t}\ d\mu_{\mathbb{R}}(t) = (b-a)\mathrm{sinc}\left(\frac{(b-a)\lambda}{2}\right) Exp\left(\frac{i(b+a)\lambda}{2}\right)$$

teljesül.)

5. (*Klasszikus egydimenziós valós Fourier-sorok.*) Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ rögzített szám és $\omega := 2\pi/T$. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra legyen

$$\mathbf{e}_{2k+1} := \chi_{[-T/2,T/2]} \sin\circ((k+1)\omega id_{\mathbb{R}}),$$
$$\mathbf{e}_{2k} := \chi_{[-T/2,T/2]} \cos\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}).$$

Az $(\mathbf{e}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot (T paraméterű) *valós trigonometrikus rendszernek* nevezzük.

a) Az $(\mathbf{e}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$-ben halad, és $(\mathbf{e}^\bullet_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat az $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ valós Hilbert-térben, továbbá az $\{\mathbf{e}^\bullet_m | m \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$-ben egyenlő az

$$\{f^\bullet \mid (f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})) \wedge (\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0] \cap (\mathbb{R} \setminus [-T/2,T/2])) = 0)\}$$

halmazzal. (Itt, és a továbbiakban $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ esetén $f^\bullet$ jelöli az f függvény ekvivalencia-osztályát $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$-ben.)

b) Legyen $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ olyan függvény, hogy $\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0]\cap(\mathbb{R}\setminus[-T/2,T/2])) = 0$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén jól értelmezettek a

$$c_k(f) := \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t), \quad s_k(f) := \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\ d\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

számok, és a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \chi_{[-T/2,T/2]}(c_k(f)\cos\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}) + s_k(f)\sin\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}))$$

függvénysor konvergens a $\|\cdot\|_{\mu_{\mathbb{R}},2}$ félnorma szerint, és

$$f^\bullet = \frac{c_0(f)}{2}\chi^\bullet_{[-T/2,T/2]} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\chi_{[-T/2,T/2]}(c_k(f)\cos\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}) + s_k(f)\sin\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}))\right)^\bullet$$

teljesül az $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ normája szerint, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(t)-\left(\frac{c_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k(f)\cos(k\omega t)+s_k(f)\sin(k\omega t))\right)\right|^2\,d\mu_{\mathbb{R}}(t)=0.$$

Továbbá, létezik olyan $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $\mu_{\mathbb{R}}$-*majdnem minden* $t\in[-T/2,T/2]$ esetén

$$f(t)=\frac{c_0(f)}{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\sigma(n)}(c_k(f)\cos(k\omega t)+s_k(f)\sin(k\omega t))$$

teljesül. Ezenkívül fennáll a

$$\frac{2}{T}\int_{\mathbb{R}}|f|^2\,d\mu_{\mathbb{R}}=\frac{c_0(f)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k(f)^2+s_k(f)^2)$$

egyenlőség. (Megjegyezzük, hogy a

$$\frac{c_0(f)}{2}+\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1}(c_k(f)\cos\circ(k\omega id_{\mathbb{R}})+s_k(f)\sin\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}))$$

függvénysort az f függvény *valós trigonometrikus Fourier-sorának* nevezzük.)

c) Legyen F valós Banach-tér és $f:\mathbb{R}\to F$ olyan T szerint periodikus függvény, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]}f\in\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$. Ekkor minden $k\in\mathbb{N}$ esetén jól értelmezettek a

$$c_k(f):=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(k\omega t)\,d\mu_{\mathbb{R}}(t),\quad s_k(f):=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(k\omega t)\,d\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

vektorok. (Megjegyezzük, hogy ekkor is a

$$\frac{c_0(f)}{2}+\sum_{k\in\mathbb{N};\ k\geq 1}(c_k(f)\cos\circ(k\omega id_{\mathbb{R}})+s_k(f)\sin\circ(k\omega id_{\mathbb{R}}))$$

vektorfüggvény-sort az f függvény *valós trigonometrikus Fourier-sorának* nevezzük.) Minden $n\in\mathbb{N}^+$ és $t\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{c_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k(f)\cos(k\omega t)+s_k(f)\sin(k\omega t))=\int_{-T/2}^{T/2}f(t+s)D_n(s)\ \mu_{\mathbb{R}}(s),$$

ahol $D_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $\mathbb{R}\ni s$-re

$$D_n(s):=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} & ;\text{ ha }\dfrac{s}{T}\notin\mathbb{Z},\\[2ex] \dfrac{1}{T}(2n+1) & ;\text{ ha }\dfrac{s}{T}\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

(Ez az n-edik *Dirichlet-féle magfüggvény.*)

d) Legyen F valós Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ olyan T szerint periodikus függvény, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \mu_\mathbb{R})$. Ha a $t \in \mathbb{R}$ ponthoz van olyan $z \in F$, hogy az

$$\mathbb{R} \to F; \quad s \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t+s) + f(t-s) - 2z}{s} & ; \text{ha } s \neq 0, \\ 0 & ; \text{ha } s = 0 \end{cases}$$

függvény $\mu_\mathbb{R}$-integrálható a 0 valamely környezetén, akkor az f függvény valós trigonometrikus Fourier-sora konvergens a t pontban és

$$\frac{c_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k(f)\cos(k\omega t) + s_k(f)\sin(k\omega t)\right) = z.$$

e) Legyen F valós Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ olyan T szerint periodikus függvény, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_\mathbb{R}, \mu_\mathbb{R})$. Legyen $t \in \mathbb{R}$ rögzített, és tekintsük a következő kijelentéseket.

(i) f differenciálható a t pontban.

(ii) Léteznek olyan $C, \delta, \alpha \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $s \in]-\delta, \delta[$ esetén

$$\|f(t+s) - f(t)\| \leq C|s|^\alpha.$$

(iii) Az

$$\mathbb{R} \to F; \quad s \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t+s) - f(t)}{s} & ; \text{ha } s \neq 0, \\ 0 & ; \text{ha } s = 0 \end{cases}$$

függvény $\mu_\mathbb{R}$-integrálható a 0 valamely környezetén (*Dini-feltétel*).

(iv) Az f-nek létezik t-ben a jobboldali és a baloldali határértéke, és léteznek olyan $C, \delta, \alpha \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $s \in]0, \delta[$ esetén

$$\|f(t+s) - f(t+0)\| \leq C|s|^\alpha,$$
$$\|f(t-s) - f(t-0)\| \leq C|s|^\alpha.$$

(v) Az f-nek létezik t-ben a jobboldali és a baloldali határértéke, és létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy az

$$\mathbb{R}^+ \to F; \quad s \mapsto \frac{f(t+s) - f(t+0)}{s},$$
$$\mathbb{R}^+ \to F; \quad s \mapsto \frac{f(t-s) - f(t-0)}{s}$$

függvények $\mu_\mathbb{R}$-integrálhatók a $]0, \delta[$ intervallumon (*egyoldali Dini-feltétel*).

Ekkor igazak az (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii), valamint (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v) következtetések. Ha a Dini-feltétel (vagyis (iii)) teljesül, akkor az f függvény valós trigonometrikus Fourier-sora konvergens a t pontban és

$$\frac{c_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k(f)\cos(k\omega t) + s_k(f)\sin(k\omega t)\right) = f(t).$$

Ha az egyoldali Dini-feltétel (vagyis (v)) teljesül, akkor az f függvény valós trigonometrikus Fourier-sora konvergens a t pontban és

$$\frac{c_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k(f)\cos(k\omega t)+s_k(f)\sin(k\omega t))=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}.$$

(*Útmutatás.* a) Jelölje H az $\{\mathbf{e}_m^\bullet|m\in\mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris alteret $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$-ben. Legyen $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ olyan függvény, hogy $f^\bullet\in H^\perp$; megmutatjuk, hogy ekkor

$$\mu^*_{\mathbb{R}}([f\neq 0]\cap[-T/2,T/2])=0.$$

A feltevés szerint minden $\mathbb{N}\ni m$-re $(f^\bullet|\mathbf{e}_m^\bullet)=0$, ami azzal ekvivalens, hogy minden $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trigonometrikus polinomra

$$\int_{\mathbb{R}}(\chi_{[-T/2,T/2]}f)g\ d\mu_{\mathbb{R}}=\int_{\mathbb{R}}f(\chi_{[-T/2,T/2]}g)\ d\mu_{\mathbb{R}}=0.$$

Ha $g:[-T/2,T/2]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $g(-T/2)=g(T/2)$, akkor a Weierstrass-féle approximációs tétel (**3**. gyakorlat) szerint létezik $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trigonometrikus polinomoknak olyan $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy a $(g_m\circ(\omega id_{\mathbb{R}}))_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál g-hez a $[-T/2,T/2]$ intervallumon; ekkor a Lebesgue-tétel alapján

$$\int_{\mathbb{R}}fg^\circ\ d\mu_{\mathbb{R}}=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(\chi_{[-T/2,T/2]}(g_m\circ(\omega id_{\mathbb{R}})))\ d\mu_{\mathbb{R}}=0.$$

Speciálisan, ha $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan folytonos, kompakt tartójú függvény, hogy $supp(g)\subseteq[-T/2,T/2]$, akkor $\int_{\mathbb{R}}fg\ d\mu_{\mathbb{R}}=0$ teljesül. A X. fejezet, 3. pontjának eredményei szerint az $f|_{[-T/2,T/2]}$ függvényhez létezik olyan $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N}\ni m$-re $g_m:]-T/2,T/2[\to\mathbb{R}$ folytonos, kompakt tartójú függvény, és $supp(g_m)\subseteq]-T/2,T/2[$, és $\lim_{m\to\infty}g_m^\circ=\left(f|_{[-T/2,T/2]}\right)^\circ$ a $\|\cdot\|_{\mu_{\mathbb{R}},2}$ félnorma szerint. Ekkor

$$0=\lim_{m\to\infty}(f^\bullet|(g_m^\circ)^\bullet)=(f^\bullet|((f|_{[-T/2,T/2]})^\circ)^\bullet)=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-T/2,T/2]}|f|^2\ d\mu_{\mathbb{R}},$$

hiszen az előzőek alapján minden $\mathbb{N}\ni m$-re $(f^\bullet|(g_m^\circ)^\bullet)=\int_{\mathbb{R}}fg_m^\circ\ d\mu_R=0$. Ez azt jelenti, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]}|f|^2=0$ az $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, azaz $[f\neq 0]\cap]-T/2,T/2[$ $\mu_{\mathbb{R}}$-nullhalmaz, így teljesül a $\mu^*_{\mathbb{R}}([f\neq 0]\cap[-T/2,T/2])=0$ egyenlőség.

Megfordítva, ha $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}})$ olyan függvény, hogy $\mu^*_{\mathbb{R}}([f\neq 0]\cap[-T/2,T/2])=0$, akkor $f=\chi_{\mathbb{R}\setminus[-T/2,T/2]}f$ teljesül $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, így minden $\mathbb{N}\ni m$-re $(f^\bullet|e_m^\bullet)=0$, vagyis $f^\bullet\in H^\perp$. Ez azt jelenti, hogy

$$H^\perp=\{f^\bullet|(f\in\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{R}_{\mathbb{R}},\mu_{\mathbb{R}}))\wedge(\mu^*_{\mathbb{R}}([f\neq 0]\cap[-T/2,T/2])=0)\}.$$

Ebből következik, hogy ha $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$, akkor $f^\bullet - (\chi_{[-T/2,T/2]} f)^\bullet \in H^\perp$, ezért az $f^\bullet \in H = H^{\perp\perp}$ reláció maga után vonja azt, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\mu_{\mathbb{R}} = \|f^\bullet\|^2_{\mu_{\mathbb{R}},2} = (f^\bullet|f^\bullet) = (f^\bullet|(\chi_{[-T/2,T/2]} f)^\bullet) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-T/2,T/2]} |f|^2 \, d\mu_{\mathbb{R}},$$

amiből következik, hogy $\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0] \cap (\mathbb{R} \setminus [-T/2, T/2])) = 0$. Megfordítva, ha $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ és $\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0] \cap (\mathbb{R} \setminus [-T/2, T/2])) = 0$, akkor $f = \chi_{\mathbb{R}\setminus[-T/2,T/2]} f$ teljesül $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, és minden $g^\bullet \in H^\perp$ elemre $\mu^*_{\mathbb{R}}([g \neq 0] \cap [-T/2, T/2]) = 0$, vagyis $g = \chi_{[-T/2,T/2]} g$ teljesül $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, így $fg = 0$ teljesül $\mathbb{R}$-en $\mu_{\mathbb{R}}$-majdnem mindenütt, vagyis $(f^\bullet|g^\bullet) = 0$, ami azt jelenti, hogy $f^\bullet \in H^{\perp\perp} = H$.

b) Ha H az $\{\mathbf{e}^\bullet_m | m \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$-ben, akkor az a) alapján minden $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ esetén $P_H(f^\bullet) = (\chi_{[-T/2,T/2]} f)^\bullet$, így ha $\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0] \cap (\mathbb{R} \setminus [-T/2, T/2])) = 0$, akkor $f^\bullet = (\chi_{[-T/2,T/2]} f)^\bullet$. Ebből már következik a b) állítás, ha a Riesz-Fischer-tételt és az absztrakt Fourier-sorokra vonatkozó ismereteket alkalmazzuk a konrét $\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{(f^\bullet|e^\bullet_m)}{\|e^\bullet_m\|^2} e^\bullet_m$ Fourier-sorra.

c) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített. Ha $s \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $e^{i\omega s} \neq 1$ (vagyis $\frac{s}{T} \notin \mathbb{Z}$), akkor

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\omega s) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \cos(k\omega s) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\omega s} + e^{-ik\omega s}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\omega s}}{1 - e^{i\omega s}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)\omega s}}{1 - e^{-i\omega s}}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\omega s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} = \frac{T}{2} D_n(s),$$

és ha $e^{i\omega s} = 1$ (vagyis $\frac{s}{T} \in \mathbb{Z}$), akkor

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\omega s) = n + \frac{1}{2} = \frac{T}{2} D_n(s).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{R} \ni s$-re

$$D_n(s) = \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\omega s)\right),$$

amiből azonnal következik, hogy

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_n(s) \, d\mu_{\mathbb{R}}(s) = 1.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy a D_n függvény páros. Ezért minden $\mathbb{R} \ni t$-re, a $(c_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ és $(s_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ vektorsorozatok értelmezése, a Lebesgue-mérték transzláció-invarianciája, és az f függvény T szerinti periodikussága alapján

$$\frac{c_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (c_k(f)\cos(k\omega t) + s_k(f)\sin(k\omega t)) =$$

$$= \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t') \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\omega(t-t')) \right) d\mu_{\mathbb{R}}(t') = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t') D_n(t-t')\ d\mu_{\mathbb{R}}(t') =$$

$$= \int\limits_{-t-T/2}^{-t+T/2} f(t+s) D_n(s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t+s) D_n(s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

d) Legyenek $t \in \mathbb{R}$ és $z \in F$ olyanok, hogy a

$$g_t : \mathbb{R} \to F; \quad s \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t+s)+f(t-s)-2z}{s} & ; \text{ha } s \neq 0, \\ 0 & ; \text{ha } s = 0 \end{cases}$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható a 0 valamely környezetén. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a D_n függvény párossága miatt

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t+s) D_n(s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t-s) D_n(s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s),$$

ezért a c) és a Dirichlet-féle magfüggvény definíciója alapján

$$\frac{c_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (c_k(f)\cos(k\omega t) + s_k(f)\sin(k\omega t)) - z = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t+s) D_n(s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s) - z =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t+s) D_n(s) d\mu_{\mathbb{R}}(s) + \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t-s) D_n(s) d\mu_{\mathbb{R}}(s) - \int\limits_{-T/2}^{T/2} 2z D_n(s) d\mu_{\mathbb{R}}(s) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-T/2}^{T/2} (f(t+s) + f(t-s) - 2z) D_n(s) d\mu_{\mathbb{R}}(s) =$$

$$= \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} g_t(s) \frac{\frac{1}{2}s}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega s \right) d\mu_{\mathbb{R}}(s) =$$

$$= \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{g_t(s)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega s \right) d\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ s \mapsto \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega s\right)$ függvény a $[-T/2, T/2]$ intervallumon pozitív és ezen a halmazon majorálja a $\operatorname{sinc}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$ számot. Ezért a g_t-re vonatkozó integrálhatósági hipotézis alapján az

$$\mathbb{R} \to F; \quad s \mapsto \begin{cases} \dfrac{g_t(s)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} & ; \text{ha } s \in [-T/2, T/2], \\ 0 & ; \text{ha } s \notin [-T/2, T/2] \end{cases}$$

függvény Lebesgue-integrálható. Ebből a **4**. gyakorlat a) pontja szerint következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{g_t(s)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega s\right) d\mu_{\mathbb{R}}(s) = 0,$$

amit bizonyítani kellett.

e) Az (i)⇒(ii)⇒(iii), valamint (i)⇒(ii)⇒(iv)⇒(v) implikációk könnyen igazolhatók. Minden $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\frac{f(t+s)+f(t-s)-2f(t)}{s} = \frac{f(t+s)-f(t)}{s} - \frac{f(t-s)-f(t)}{-s},$$

ezért a Dini-feltételből (vagyis a (iii)-ból) következik a d)-ben megfogalmazott tulajdonság a $t \in \mathbb{R}$ pontra és a $z := f(t)$ vektorra.

Továbbá, minden $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\frac{f(t+s)+f(t-s)-2\left(\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}\right)}{s} =$$

$$= \frac{f(t+s)-f(t+0)}{s} + \frac{f(t-s)-f(t-0)}{s},$$

ezért az egyoldali Dini-feltételből (vagyis (v)-ből) következik a d)-ben megfogalmazott tulajdonság a $t \in \mathbb{R}$ pontra és a $z := \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ vektorra.)

6. (*Klasszikus egydimenziós komplex Fourier-sorok.*) Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ rögzített szám és $\omega := 2\pi/T$. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra legyen

$$\mathbf{e}_{2k+1} := \chi_{[-T/2,T/2]} Exp \circ (i(k+1)\omega id_{\mathbb{R}}),$$
$$\mathbf{e}_{2k} := \chi_{[-T/2,T/2]} Exp \circ (-ik\omega id_{\mathbb{R}}).$$

Az $(\mathbf{e}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot (T paraméterű) *komplex trigonometrikus rendszernek* nevezzük.

a) Az $(\mathbf{e}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$-ben halad, és $(\mathbf{e}^\bullet_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat az $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ komplex Hilbert-térben, továbbá az $\{\mathbf{e}^\bullet_m | m \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$-ben egyenlő az

$$\{f^\bullet \mid (f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})) \wedge (\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0] \cap (\mathbb{R} \setminus [-T/2, T/2])) = 0)\}$$

halmazzal. (Itt, és a továbbiakban $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ esetén $f^\bullet$ jelöli az f függvény ekvivalencia-osztályát $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$-ben.)

b) Legyen $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ olyan függvény, hogy $\mu^*_{\mathbb{R}}([f \neq 0] \cap (\mathbb{R} \setminus [-T/2, T/2])) = 0$. Ekkor minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén jól értelmezett a

$$z_k(f) := \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t}\, d\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

szám, és a

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} \chi_{[-T/2,T/2]} z_k(f) Exp \circ (ik\omega.id_{\mathbb{R}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

függvénysorozat konvergens a $\|\cdot\|_{\mu_{\mathbb{R}},2}$ félnorma szerint, valamint

$$f^{\bullet} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \chi_{[-T/2,T/2]} z_k(f) Exp \circ (ik\omega.id_{\mathbb{R}})\right)^{\bullet}$$

teljesül az $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ normája szerint, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \chi_{[-T/2,T/2]} z_k(f) e^{ik\omega t} \right|^2 d\mu_{\mathbb{R}}(t) = 0.$$

Továbbá, létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $\mu_{\mathbb{R}}$-*majdnem minden* $t \in [-T/2, T/2]$ esetén

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \chi_{[-T/2,T/2]} z_k(f) e^{ik\omega t}$$

teljesül. Ezenkívül fennáll a

$$\frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\mu_{\mathbb{R}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |z_k(f)|^2$$

egyenlőség. (Megjegyezzük, hogy a

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} z_k(f) Exp \circ (ik\omega id_{\mathbb{R}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

függvénysorozatot az f függvény *komplex trigonometrikus Fourier-sorának* nevezzük.)

c) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ olyan T szerint periodikus függvény, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$. Ekkor minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén jól értelmezett a

$$z_k(f) := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} \, d\mu_{\mathbb{R}}(t)$$

vektor. (Megjegyezzük, hogy ekkor is a

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} z_k(f) Exp \circ (ik\omega id_{\mathbb{R}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

vektorfüggvény-sorozatot az f függvény *komplex trigonometrikus Fourier-sorának* nevezzük.) Minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{k=-n}^{n} z_k(f)e^{ik\omega t} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t+s)D_n(s)\ \mu_{\mathbb{R}}(s),$$

ahol $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az **5**. gyakorlat c) pontjában bevezetett n-edik Dirichlet-féle magfüggvény.

d) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ olyan T szerint periodikus függvény, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$. Ha a $t \in \mathbb{R}$ ponthoz van olyan $z \in F$, hogy az

$$\mathbb{R} \to F; \quad s \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t+s)+f(t-s)-2z}{s} & ; \text{ha } s \neq 0, \\ 0 & ; \text{ha } s = 0 \end{cases}$$

függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-integrálható a 0 valamely környezetén, akkor az f függvény komplex trigonometrikus Fourier-sora konvergens a t pontban és

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} z_k(f)e^{ik\omega t} = z.$$

e) Legyen F komplex Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ olyan T szerint periodikus függvény, hogy $\chi_{[-T/2,T/2]} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$. Ha $t \in \mathbb{R}$ és f-re teljesül a t pontban a Dini-feltétel (**5**. gyakorlat), akkor az f függvény komplex trigonometrikus Fourier-sora konvergens a t pontban és

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} z_k(f)e^{ik\omega t} = f(t).$$

Ha az egyoldali Dini-feltétel teljesül a $t \in \mathbb{R}$ pontban az f függvényre (**5**. gyakorlat), akkor az f függvény komplex trigonometrikus Fourier-sora konvergens a t pontban és

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} z_k(f)e^{ik\omega t} = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}.$$

(Megjegyezzük, hogy $t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} z_k(f)e^{ik\omega t}$$

határértéket szokás a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k(f)e^{ik\omega t}$$

szimbólummal is jelölni minden olyan $t \in \mathbb{R}$ pontban, ahol létezik a határérték.)

7. (*Klasszikus ortogonális polinomok.*) Ha $p \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ olyan pozitív függvény, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $id^k_{\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, p\mu_{\mathbb{R}})$, akkor azt mondjuk, hogy p *súlyfüggvény* (a Lebesgue-mérték szerint).

a) Egy $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ függvény pontosan akkor súlyfüggvény, ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $id^k_{\mathbb{R}} p \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ (IX. fejezet, 8. pont, **11**. gyakorlat). Ha $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, akkor a $p\mu_{\mathbb{R}} : \mathscr{R}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$ mérték *korlátos*, és minden $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényre $Q \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, p\mu_{\mathbb{R}})$.

b) Legyen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény. Ekkor az $((id^k_{\mathbb{R}})^\bullet)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat *lineárisan független* az $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, p\mu_{\mathbb{R}})$ valós Hilbert-térben. Továbbá, létezik olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényekből álló $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $(P^\bullet_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egyenlő az $((id^k_{\mathbb{R}})^\bullet)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat Gram-Schmidt-ortogonalizáltjával az $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, p\mu_{\mathbb{R}})$ Hilbert-térben; ezt a $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polinomiálisfüggvény-sorozatot a p súlyfüggvény szerint *ortogonális polinomsorozatnak* nevezzük.

c) A p súlyfüggvény választása szerint a következő nevezetes klasszikus ortogonális polinomsorozatokat értelmezhetjük.

- $p := id_{]-1,1[}$ esetén a *Legendre-* vagy *szférikus polinomok.*

- $p := \left(1 - id^2_{\mathbb{R}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \chi_{]-1,1[}$ esetén a λ-paraméterű *Gegenbauer-* vagy *ultraszférikus polinomok*, ahol $\lambda \in]-1/2, \to[$ valós szám.

- $p := (1-id_{\mathbb{R}})^\alpha (1-id_{\mathbb{R}})^\beta \chi_{]-1,1[}$ esetén az (α, β)-paraméterű *Jacobi-polinomok*, ahol $\alpha, \beta \in]-1, \to[$.

- $p := exp \circ \left(-id^2_{\mathbb{R}}\right)$ esetén a *Hermit-polinomok.*

- $p := \dfrac{1}{\sqrt{1 - id^2_{\mathbb{R}}}} \chi_{]-1,1[}$ esetén az *elsőfajú Csebisev-polinomok.*

- $p := \sqrt{1 - id^2_{\mathbb{R}}} \chi_{]-1,1[}$ esetén az *másodfajú Csebisev-polinomok.*

Ellenőrizzük, hogy ezek valóban súlyfüggvények, vagyis olyan pozitív Lebesque-integrálható függvények, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $id^k_{\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, p\mu_{\mathbb{R}})$. Vegyük észre, hogy a Legendre-, Gegenbauer- és Csebisev-polinomok speciális Jacobi-polinomok!

8. Legyen E normált tér. Egy E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszert *szummálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan $x \in E$, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, amelyre minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq J$, akkor $\left\| x - \sum\limits_{i\in J} x_i \right\| < \varepsilon$.

a) Ha az E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható, akkor egyetlen olyan $x \in E$ vektor létezik, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, amelyre minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq J$, akkor $\left\| x - \sum\limits_{i\in J} x_i \right\| < \varepsilon$. Ezt az x vektort az $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer *összegének* nevezzük, és a $\sum\limits_{i,I} x_i$ szimbólummal jelöljük.

b) Ha $(x_i)_{i\in I}$ olyan rendszer E-ben, hogy az $I_0 := \{i \in I | x_i \neq 0\}$ halmaz véges, akkor az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható, és $\sum\limits_{i,I} x_i = \sum\limits_{i\in I_0} x_i$. Ha $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan E-

ben haladó sorozat, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor *abszolút konvergens* és *konvergens*, akkor az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer szummálható, és $\sum\limits_{k,\mathbb{N}} x_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Azonban egy szummálható sorozathoz asszociált sor nem szükségképpen abszolút konvergens, még akkor sem, ha E teljes.

c) Legyen $(x_i)_{i\in I}$ egy E-ben haladó rendszer, és tekintsük a következő állításokat.

(i) Az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható.

(ii) Minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \cap H = \emptyset$, akkor $\left\|\sum\limits_{i\in H} x_i\right\| < \varepsilon$.

(ii)$'$ Minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $J, J' \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq J$ és $K \subseteq J'$, akkor $\left\|\sum\limits_{i\in J} x_i - \sum\limits_{i\in J'} x_i\right\| < \varepsilon$.

(iii) Minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $i \in I \setminus K$ esetén $\|x_i\| < \varepsilon$.

(iv) Az $\{i \in I | x_i \neq 0\}$ halmaz megszámlálható.

Ekkor teljesülnek az (i)$\Rightarrow$(ii), (ii)$\Leftrightarrow$(ii)$'$, (ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv) következtetések. (Megjegyezzük, hogy az ekvivalens (ii) és (ii)$'$ állításokat a *szummálhatóság Cauchy-kritériumának* nevezzük.) A Cauchy-kritérium a szummálhatósághoz szükséges, és ha E teljes, akkor elégséges is.

d) (*A szummálhatóság kommutativitása.*) Ha $(x_i)_{i\in I}$ szummálható E-ben haladó rendszer, I' halmaz, és $\sigma : I' \to I$ bijekció, akkor az $(x_{\sigma(i')})_{i'\in I'}$ rendszer is szummálható E-ben, és $\sum\limits_{i,I} x_i = \sum\limits_{i',I'} x_{\sigma(i')}$. Speciálisan, egy E-ben haladó szummálható rendszer bármely *átrendezése* szummálható, és ugyanaz az összege, mint az eredeti rendszeré.

e) Legyen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy E-ben haladó sorozat. A következő állítások ekvivalensek.

(i) A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor *konvergens* E-ben, és minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz van olyan $K \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, hogy minden $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazra, ha $K \cap H = \emptyset$, akkor $\left\|\sum\limits_{k\in H} x_k\right\| < \varepsilon$ (vagyis az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszerre teljesül a szummálhatóság Cauchy-kritériuma).

(ii) Az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat szummálható E-ben.

(iii) A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor *feltétlen konvergens* (vagyis minden átrendezése konvergens).

Továbbá, ha az (i), (ii) vagy (iii) feltétel teljesül, akkor $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k = \sum\limits_{k,\mathbb{N}} x_k$.

f) (*A szummálhatóság asszociativitása.*) Legyen $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer az *E Banach-térben.* Ha $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ az I halmaznak partíciója (vagyis olyan diszjunkt halmazrendszer, amelyre $I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$), akkor minden $A \ni \alpha$-ra az $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ rendszer szummálható E-ben, továbbá a $\left(\sum_{i,I_\alpha} x_i\right)_{\alpha\in A}$ rendszer szummálható E-ben, és

$$\sum_{i,I} x_i = \sum_{\alpha,A}\left(\sum_{i,I_\alpha} x_i\right).$$

Speciálisan, ha $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer az E Banach-térben, és $I' \subseteq I$, akkor az $(x_i)_{i\in I'}$ és $(x_i)_{i\in I\setminus I'}$ rendszerek szummálhatók E-ben és

$$\sum_{i,I} x_i = \sum_{i,I'} x_i + \sum_{i,I\setminus I'} x_i.$$

g) Legyen $(x_i)_{i\in I}$ E-ben haladó rendszer, és $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ az I halmaznak olyan partíciója, hogy A véges. Ha minden $A \ni \alpha$-ra az $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ rendszer szummálható E-ben, akkor az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható E-ben.

h) (*A szummálhatóság linearitása.*) Ha E, F normált terek, $u : E \to F$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor, és $(x_i)_{i\in I}$ szummálható E-ben haladó rendszer, akkor az F-ben haladó $(u(x_i))_{i\in I}$ rendszer szummálható, és

$$\sum_{i,I} u(x_i) = u\left(\sum_{i,I} x_i\right).$$

i) (*A szummálhatóság disztributivitása.*) Legyenek E, F normált terek, G Banach-tér, $u : E \times F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor, és $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer E-ben, valamint $(y_j)_{j\in J}$ szummálható rendszer F-ben. Ha a G-ben haladó $(u(x_i, y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ rendszer szummálható G-ben, akkor

$$\sum_{(i,j),I\times J} u(x_i, y_j) = u\left(\sum_{i,I} x_i, \sum_{j,J} y_j\right).$$

j) Az $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszer pontosan akkor szummálható $\mathbb{R}$-ben, ha

$$\sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i < +\infty.$$

Ha az $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben, akkor

$$\sum_{i,I} x_i = \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i.$$

k) Legyen E prehilbert-tér. Ha az E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ ortogonális rendszer szummálható E-ben, akkor az $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben és

$$\left\|\sum_{i,I} x_i\right\|^2 = \sum_{i,I} \|x_i\|^2$$

(*általános Pithagorász-tétel*). Ha E Hilbert-tér, akkor az E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ ortogonális rendszer pontosan akkor szummálható E-ben, ha a $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben.

(*Útmutatás.* b) Legyen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó sorozat, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor abszolút konvergens és konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor N olyan véges részhalmaza $\mathbb{N}$-nek, hogy minden $J \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazra, ha $N \subseteq J$, akkor

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} x_k - \sum_{k\in J} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{N} x_k - \sum_{k\in J} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k - \sum_{k\in J,\ k\geq N+1} x_k\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|x_k\| + \sum_{k\in J,\ k\geq N+1} \|x_k\| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon,$$

tehát az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer szummálható E-ben, és $\sum\limits_{k,\mathbb{N}} x_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Később - a k) pont bizonyításának végén - látni fogjuk, hogy egy szummálható sorozathoz asszociált sor még Hilbert-térben sem szükségképpen abszolút konvergens.

c) Legyen $(x_i)_{i\in I}$ egy E-ben haladó rendszer.

Ha az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható és $x := \sum\limits_{i,I} x_i$, akkor $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq J$, akkor $\left\|x - \sum\limits_{i\in J} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor bármely $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \cap H = \emptyset$, akkor

$$\left\|\sum_{i\in H} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in H} x_i + \sum_{i\in K} x_i - \sum_{i\in K} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in H\cup K} x_i - \sum_{i\in K} x_i\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{i\in H\cup K} x_i - x\right\| + \left\|x - \sum_{i\in K} x_i\right\| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon,$$

ezért (i)$\Rightarrow$(ii) teljesül.

A (ii)$\Rightarrow$(ii)$'$ következtetés nyilvánvaló, mert ha az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz a $K \subseteq I$ véges halmazt úgy választjuk meg, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, $K \cap H = \emptyset$ esetén $\left\|\sum\limits_{i\in H} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor minden $J, J' \subseteq I$ véges halmazra: $K \subseteq J$ és $K \subseteq J'$ esetén

$$\left\|\sum_{i\in J'} x_i - \sum_{i\in J} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in J'\setminus K} x_i - \sum_{i\in J\setminus K} x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i\in J'\setminus K} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in J\setminus K} x_i\right\| < \varepsilon$$

teljesül, hiszen $J'\setminus K$ és $J\setminus K$ olyan véges részhalmazai I-nek, amelyek nem metszik a K halmazt.

A (ii)′-ből következik a (ii), mert ha az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz a $K \subseteq I$ véges halmazt úgy választjuk meg, hogy minden $J, J' \subseteq I$ véges halmazra: $K \subseteq J$ és $K \subseteq J'$ esetén $\left\|\sum_{i\in J'} x_i - \sum_{i\in J} x_i\right\| < \varepsilon$, akkor minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \cap H = \emptyset$, akkor

$$\left\|\sum_{i\in H} x_i\right\| = \left\|\sum_{i\in K\cup H} x_i - \sum_{i\in K} x_i\right\| < \varepsilon.$$

A (ii)-ből triviálisan következik a (iii) állítás. Tegyük fel, hogy (iii) teljesül és legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zárussorozat $\mathbb{R}^+$-ban. A (iii) alapján kiválasztható olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq I$ véges halmaz, és minden $i \in I \setminus K_n$ esetén $\|x_i\| < \varepsilon_n$. Ekkor $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq I$ olyan megszámlálható halmaz, hogy $i \in I \setminus K$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re $i \in I \setminus K_n$, így $\|x_i\| < \varepsilon_n$. Ez azt jelenti, hogy $i \in I \setminus K$ esetén $x_i = 0$, tehát $\{i \in I | x_i \neq 0\} \subseteq K$, így $\{i \in I | x_i \neq 0\}$ megszámlálható halmaz, vagyis (iv) teljesül.

Tegyük fel, hogy E Banach-tér, és az $(x_i)_{i\in I}$ rendszerre teljesül a (ii) feltétel; megmutatjuk, hogy $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer. Az előzőek alapján ekkor (iv) teljesül; legyen $I_0 := \{i \in I | x_i \neq 0\}$. Ha I_0 véges halmaz, akkor a b) első állítása szerint az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható. Ha I_0 végtelen halmaz, akkor vehetünk egy $\sigma : \mathbb{N} \to I_0$ bijekciót. Bebizonyítjuk, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_{\sigma(k)}$ sorra teljesül a (sorokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergenciakritérium. Valóban, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és a (ii) alapján vegyünk olyan $K \subseteq I$ véges halmazt, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, $K \cap H = \emptyset$ esetén $\left\|\sum_{i\in H} x_i\right\| < \varepsilon$. Ekkor $\overset{-1}{\sigma}\langle K\rangle \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz; legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan szám, hogy $\overset{-1}{\sigma}\langle K\rangle \subseteq N$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > N$, akkor $\mathbb{N}_{m,n} := \{k \in \mathbb{N} | \min(m, n) < k \leq \max(m, n)\}$ olyan véges halmaz, hogy $K \cap \sigma\langle \mathbb{N}_{m,n}\rangle = \emptyset$, hiszen $N < \min(m, n)$, ezért teljesül a

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}\right\| = \left\|\sum_{k\in\mathbb{N}_{m,n}} x_{\sigma(k)}\right\| = \left\|\sum_{i\in\sigma\langle N_{m,n}\rangle} x_i\right\| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség. Tehát az E teljessége folytán a $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_{\sigma(k)}$ sor konvergens E-ben; legyen $x := \sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)}$. Megmutatjuk, hogy x az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer összege. Legyen ugyanis $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\left\|x - \sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. A (ii) alkalmazásával vegyünk olyan $K \subseteq I$ véges halmazt, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, $K \cap H = \emptyset$ esetén $\left\|\sum_{i\in H} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Állítjuk, hogy minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq J$, akkor $\left\|x - \sum_{i\in J} x_i\right\| < \varepsilon$ teljesül. Ha ugyanis $J \subseteq I$ véges halmaz és $K \subseteq J$, továbbá az $n \in \mathbb{N}$ számot úgy választjuk meg, hogy $n > N$ és $J \cap I_0 \subseteq \{\sigma(k)|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k < n)\}$ teljesüljön, akkor

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| = \left\| x - \sum_{i \in J \cap I_0} x_i \right\| \leq$$

$$\leq \left\| x - \sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)} \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{n-1} x_{\sigma(k)} - \sum_{k \in \overset{-1}{\sigma}\langle J \rangle} x_{\sigma(k)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle J \rangle,\ k<n} x_{\sigma(k)} \right\| < \varepsilon,$$

hiszen ha $H := \{\sigma(k)|(k \in \mathbb{N}) \wedge (k < n)\} \setminus J$, akkor

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle J \rangle,\ k<n} x_{\sigma(k)} = \sum_{i \in H} x_i,$$

és a H halmaz nem metszi J-t, így $K \subseteq J$ miatt K-t sem metszi, tehát $\left\| \sum_{i \in H} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

d) Legyen $(x_i)_{i \in I}$ szummálható rendszer E-ben, és $\sigma : I' \to I$ bijekció. Legyen $x := \sum_{i,I} x_i$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $K \subseteq I$ véges halmazt, hogy minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq J$, akkor $\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \cap H = \emptyset$, akkor

$$\left\| \sum_{i \in H} x_i \right\| = \left\| \sum_{i \in K \cup H} x_i - \sum_{i \in K} x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i \in K \cup H} x_i - x \right\| + \left\| x - \sum_{i \in K} x_i \right\| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ezért $\overset{-1}{\sigma}\langle K \rangle \subseteq I'$ olyan véges halmaz, hogy minden $J' \subseteq I'$ véges halmazra, ha $\overset{-1}{\sigma}\langle K \rangle \subseteq J'$, akkor

$$\left\| x - \sum_{i' \in J'} x_{\sigma(i')} \right\| = \left\| x - \sum_{i \in K} x_i - \sum_{i' \in J' \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle K \rangle} x_{\sigma(i')} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{i' \in J' \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle K \rangle} x_{\sigma(i')} \right\| = \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{i \in \sigma\langle J' \rangle \setminus K} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

vagyis az $(x_{\sigma(i')})_{i' \in I'}$ rendszer szummálható E-ben, és $\sum_{i',I'} x_{\sigma(i')} = \sum_{i,I} x_i$.

e) Legyen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ E-ben haladó sorozat. A d) alapján (ii)⇒(iii) teljesül. Az (i)⇒(ii) bizonyításához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $K \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazt, hogy minden $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazra, ha $K \cap H = \emptyset$, akkor $\left\| \sum_{i \in H} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Az (i) szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor konvergens E-ben, ezért az ε-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\left\| x - \sum\limits_{k=0}^{n} x_k \right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ahol $x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Ha $N' \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $N < N'$ és minden $k \in K$ esetén $k < N'$, akkor N' olyan véges részhalmaza $\mathbb{N}$-nek, hogy minden $J \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazra: $N' + 1 \subseteq J$ esetén

$$\left\| x - \sum_{i\in J} x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{N'} x_k \right\| + \left\| \sum_{k\in J,\ k>N'} x_k \right\| < \varepsilon,$$

mert $K \cap \{k \in \mathbb{N} | k > N'\} = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat szummálható E-ben, és $\sum\limits_{k,\mathbb{N}} x_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$.

A (iii)$\Rightarrow$(i) bizonyításához tegyük fel, hogy (i) *nem* igaz; megmutatjuk, hogy ekkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor *nem* feltétlen konvergens, vagyis létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_{\sigma(k)}$ sor *nem* konvergens.

Feltehetjük, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$ sor konvergens, de létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $K \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazhoz van olyan $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, hogy $K \cap H = \emptyset$, de $\left\| \sum\limits_{i\in H} x_i \right\| \geq \varepsilon$. Egy ilyen ε-hoz a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával könnyen előállíthatjuk az $\mathbb{N}$-nek olyan $(J_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *partícióját*, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ számra J_m véges, és $\left\| \sum\limits_{i\in J_m} x_i \right\| \geq \varepsilon$ *végtelen sok* $\mathbb{N} \ni m$-re igaz.

Minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re legyen

$$\pi(n) := \sum_{m=0}^{n-1} Card(J_m),$$

és $\pi(0) := 0$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\{k \in \mathbb{N} | \pi(n) \leq k < \pi(n+1)\}$ halmaz számossága egyenlő $Card(J_n)$-nel, ezért létezik $\{k \in \mathbb{N} | \pi(n) \leq k < \pi(n+1)\} \to J_n$ bijekció. Ezért a kiválasztási axiómát alkalmazva vehetünk olyan $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\sigma_n : \{k \in \mathbb{N} | \pi(n) \leq k < \pi(n+1)\} \to J_n$ bijekció. Ekkor egyértelműen létezik az a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén σ_n egyenlő a σ függvény $\{k \in \mathbb{N} | \pi(n) \leq k < \pi(n+1)\}$-re vett leszűkítésével. Ekkor σ az $\mathbb{N}$-nek permutációja és a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} x_{\sigma(k)}$ sor azért nem konvergens, mert minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| \sum_{m=0}^{\pi(n+1)-1} x_{\sigma(m)} - \sum_{m=0}^{\pi(n)-1} x_{\sigma(m)} \right\| = \left\| \sum_{m=\pi(n)}^{\pi(n+1)-1} x_{\sigma(m)} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{m=\pi(n)}^{\pi(n+1)-1} x_{\sigma_n(m)} \right\| = \left\| \sum_{i\in J_n} x_i \right\|,$$

ezért a $\left(\sum_{m=0}^{\pi(n)-1} x_{\sigma(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem Cauchy-sorozat E-ben.

f) Tegyük fel, hogy E Banach-tér és $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer E-ben. Ekkor $(x_i)_{i\in I}$-re teljesül a szummálhatóság Cauchy-kritériuma, amiből azonnal következik, hogy minden $I' \subseteq I$ halmaz esetében az $(x_i)_{i\in I'}$ rendszerre is teljesül a szummálhatóság Cauchy-kritériuma, így az $(x_i)_{i\in I'}$ rendszer is szummálható E-ben. Legyen $(I_j)_{j\in J}$ az I halmaznak partíciója; ekkor minden $J \ni j$re az $(x_i)_{i\in I_j}$ rendszer szummálható E-ben. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálhatósága miatt létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $I' \subseteq H$, akkor $\left\|\sum_{i\in H} x_i - \sum_{i,I} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $J' := \{j \in J | I_j \cap I' \neq \emptyset\}$. Természetesen $J' \subseteq J$ véges halmaz, mert $(I_j)_{j\in J}$ az I halmaznak partíciója. Megmutatjuk, hogy ha $H \subseteq J$ olyan véges halmaz, hogy $J' \subseteq H$, akkor

$$\left\|\sum_{j\in H}\left(\sum_{i,I_j} x_i\right) - \sum_{i,I} x_i\right\| < \varepsilon.$$

Ehhez legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varepsilon' Card(H) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $j \in H$, akkor az $(x_i)_{i\in I_j}$ rendszer szummálható, ezért az ε'-höz van olyan $I'_j \subseteq I_j$ véges halmaz, hogy minden $K \subseteq I_j$ véges halmazra, ha $I'_j \subseteq K$, akkor $\left\|\sum_{i\in K} x_i - \sum_{i,I_j} x_i\right\| \leq \varepsilon'$; így aztán is $\left\|\sum_{i\in I'_j} x_i - \sum_{i,I_j} x_i\right\| \leq \varepsilon'$ is teljesül. Természetesen $j \in H$ esetén az I'_j halmaz megválasztható úgy, hogy $I_j \cap I' \subseteq I'_j$ teljesüljön. Ekkor az $I_H := \bigcup_{j\in H} I'_j$ halmaz véges részhalmaza I-nek, és $I' = \bigcup_{j\in J'} (I_j \cap I') \subseteq \bigcup_{j\in H} (I_j \cap I') \subseteq I_H$, következésképpen $\left\|\sum_{i\in I_H} x_i - \sum_{i,I} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$\left\|\sum_{j\in H}\left(\sum_{i,I_j} x_i\right) - \sum_{i,I} x_i\right\| \leq \left\|\sum_{j\in H}\left(\sum_{i,I_j} x_i\right) - \sum_{j\in H}\left(\sum_{i\in I'_j} x_i\right)\right\| +$$

$$+\left\|\sum_{j\in H}\left(\sum_{i\in I'_j} x_i\right) - \sum_{i,I} x_i\right\| \leq \sum_{j\in H}\left\|\sum_{i,I_j} x_i - \sum_{i\in I'_j} x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in I_H} x_i - \sum_{i,I} x_i\right\| <$$

$$< \varepsilon' Card(H) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

amit bizonyítani kellett.

g) Legyen $(x_i)_{i\in I}$ E-ben haladó rendszer, és $(I_j)_{j\in J}$ az I halmaznak olyan partíciója, hogy J véges, és minden $J \ni j$-re az $(x_i)_{i\in I_j}$ rendszer szummálható E-ben. Legyen

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot válasszuk meg úgy, hogy $\varepsilon' Card(J) < \varepsilon$ legyen. Minden $j \in J$ esetén vegyünk olyan $K_j \subseteq I_j$ véges halmazt, hogy minden $H \subseteq I_j$ véges halmazra, ha $K_j \subseteq H$, akkor $\left\| \sum_{i \in H} x_i - \sum_{i, I_j} x_i \right\| < \varepsilon'$. Ekkor $K := \bigcup_{j \in J} K_j$ véges részhalmaza I-nek, és ha $H \subseteq I$ véges halmaz, valamint $K \subseteq H$, akkor minden $J \ni j$-re $H \cap I_j \subseteq I_j$ olyan véges halmaz, hogy $K_j \subseteq H \cap I_j$, ezért

$$\left\| \sum_{i \in H} x_i - \sum_{j \in J} \left(\sum_{i, I_j} x_i \right) \right\| = \left\| \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in H \cap I_j} x_i \right) - \sum_{j \in J} \left(\sum_{i, I_j} x_i \right) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j \in J} \left\| \sum_{i \in H \cap I_j} x_i - \sum_{i, I_j} x_i \right\| \leq \varepsilon' Card(J) < \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $H = \bigcup_{j \in J} (H \cap I_j)$, hiszen $(I_j)_{j \in J}$ az I halmaznak partíciója. Tehát az $(x_i)_{i \in I}$ rendszer szummálható E-ben és $\sum_{i, I} x_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i, I_j} x_i \right)$.

h) Legyenek E, F normált terek, $u : E \to F$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor, és $(x_i)_{i \in I}$ szummálható rendszer E-ben. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és az $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot válasszuk meg úgy, hogy $\|u\| \varepsilon' < \varepsilon$ legyen. Az ε'-höz legyen $K \subseteq I$ olyan véges halmaz, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq H$, akkor $\left\| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i, I} x_i \right\| < \varepsilon'$. Ekkor minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \subseteq H$, akkor

$$\left\| \sum_{i \in H} u(x_i) - u \left(\sum_{i, I} x_i \right) \right\| \leq \|u\| \left\| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i, I} x_i \right\| \leq \|u\| \varepsilon' < \varepsilon,$$

tehát $(u(x_i))_{i \in I}$ szummálható rendszer F-ben, és $\sum_{i, I} u(x_i) = u \left(\sum_{i, I} x_i \right)$.

i) Legyenek E, F normált terek, G Banach-tér, $u : E \times F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor, és $(x_i)_{i \in I}$ szummálható rendszer E-ben, valamint $(y_j)_{j \in J}$ szummálható rendszer F-ben. Tegyük fel, hogy az $(u(x_i, y_j))_{(i,j) \in I \times J}$ rendszer szummálható G-ben. Minden $j \in J$ esetén legyen $A_j := I \times \{j\}$; ekkor $(A_j)_{j \in J}$ az $I \times J$ halmaznak partíciója. A g) alapján minden $J \ni j$-re az $(u(x_i, y_j))_{((i,j) \in A_j}$ rendszer szummálható G-ben, és fennáll a

$$\sum_{(i,j), I \times J} u(x_i, y_j) = \sum_{j, J} \left(\sum_{(i,j), A_j} u(x_i, y_j) \right)$$

egyenlőség. Ha $j \in J$, akkor az $I \to A_j$; $i \mapsto (i, j)$ leképezés bijekció, ezért a szummálhatóság kommutativitása miatt az $(u(x_i, y_j))_{i \in I}$ rendszer szummálható G-ben, és $\sum_{i, I} u(x_i, y_j) = \sum_{(i,j), A_j} u(x_i, y_j)$. A szummálhatóság linearitása folytán $j \in J$

esetén $\sum_{i,I} u(x_i, y_j) = u\left(\sum_{i,I} x_i, y_j\right)$, hiszen az $u(\cdot, y_j) : E \to G$ parciális függvény folyonos $\mathbb{R}$-lineáris operátor, továbbá $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer E-ben. Tehát az $\left(u\left(\sum_{i,I} x_i, y_j\right)\right)_{j\in J}$ rendszer szummálható G-ben és

$$\sum_{(i,j),I\times J} u(x_i, y_j) = \sum_{j,J} u\left(\sum_{i,I} x_i, y_j\right).$$

Ezután ismét a szummálhatóság linearitásából nyerjük, hogy

$$\sum_{j,J} u\left(\sum_{i,I} x_i, y_j\right) = u\left(\sum_{i,I} x_i, \sum_{j,J} y_j\right),$$

hiszen az $u\left(\sum_{i,I} x_i, \cdot\right) : F \to G$ leképezés folytonos és $\mathbb{R}$-lineáris.

j) Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben (természetesen az $\mathbb{R}$ euklidészi abszolútértéke szerint), és legyen $x := \sum_{i,I} x_i$. Minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra jelöljön $K_\varepsilon \subseteq I$ olyan véges halmazt, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazara, ha $K_\varepsilon \subseteq H$, akkor $\left|x - \sum_{i\in H} x_i\right| < \varepsilon$, vagyis $x - \varepsilon < \sum_{i\in H} x_i < x + \varepsilon$. Ekkor minden $J \subseteq I$ véges halmazra és minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra $\sum_{i\in J} x_i \leq \sum_{i\in K_\varepsilon \cup J} x_i < x + \varepsilon$, tehát minden $J \subseteq I$ véges halmazra $\sum_{i\in J} x_i \leq x$ is teljesül Ugyanakkor minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra $x < \varepsilon + \sum_{i\in K_\varepsilon} x_i \leq \varepsilon + \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i$ is teljesül, amiből következik, hogy $x \leq \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i$. Ezzel megmutattuk, hogy $\sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i < +\infty$ és $\sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i = \sum_{i,I} x_i$.

Megfordítva, tegyük most fel, hogy az $\mathbb{R}_+$-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ rendszerre $x' := \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} x_i < +\infty$, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor van olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy $x' < \varepsilon + \sum_{i\in K} x_i$. Ha $J \subseteq I$ olyan véges halmaz, hogy $K \subseteq J$, akkor $x' < \varepsilon + \sum_{i\in J} x_i$ még inkább teljesül, mert az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer minden tagja pozitív szám, ezért $\left|x' - \sum_{i\in J} x_i\right| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben.

k) Legyen E prehilbert-tér, $(x_i)_{i\in I}$ szummálható ortogonális rendszer E-ben, és $x := \sum_{i,I} x_i$. Ekkor $j \in I$ esetén a $(\cdot|x_j) : E \to \mathbb{K}$ funkcionál folytonossága és linearitása miatt, a h) alapján

$$(x|x_j) = \left(\sum_{i,I} x_i \,\middle|\, x_j\right) = \sum_{i,I}(x_i|x_j) = \|x_j\|^2,$$

ahol kihasználtuk az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer ortogonalitását. Ezért minden $J \subseteq I$ véges halmazra

$$0 \le \left\|x - \sum_{j\in J} x_j\right\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\left(x \,\middle|\, \sum_{j\in J} x_j\right) + \left\|\sum_{j\in J} x_j\right\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\sum_{j\in J}(x|x_j) + \sum_{j\in J}\|x_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j\in J}\|x_j\|^2.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $J \subseteq I$ véges halmazra $\sum_{j\in J}\|x_j\|^2 \le \|x\|^2$, tehát a j) alapján az $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben és fennáll a

$$\sum_{i,I}\|x_i\|^2 = \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{j\in J}\|x_j\|^2 \le \|x\|^2$$

egyenlőtlenség. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és $K \subseteq I$ olyan véges halmaz, hogy minden $J \subseteq I$ véges halmazra: $K \subseteq J$ esetén $\left\|x - \sum_{j\in J} x_j\right\| < \varepsilon$, akkor a fentiek szerint bármely ilyen J halmazra

$$\|x\|^2 < \varepsilon^2 + \sum_{j\in J}\|x_j\|^2 \le \varepsilon^2 + \sum_{i,I}\|x_i\|^2.$$

Ebből következik, hogy $\|x\| \le \sum_{i,I}\|x_i\|^2$ is teljesül, így $\|x\|^2 = \sum_{i,I}\|x_i\|^2$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(x_i)_{i\in I}$ olyan ortogonális rendszer az E prehilbert-térben, hogy az $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben. A szummálhatóság Cauchy-kritériuma szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz van olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $J \subseteq I$ véges halmazra, ha $K \cap J = \emptyset$, akkor $\sum_{i\in J}\|x_i\|^2 < \varepsilon$; ekkor viszont $\left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in J}\|x_i\|^2$ miatt $\left\|\sum_{i\in J} x_i\right\| < \sqrt{\varepsilon}$ is igaz. Ez azt jelenti, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ rendszerre is teljesül a szummálhatóság Cauchy-kritériuma, így ha E teljes, akkor az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható E-ben.

Most könnyen előállíthatunk olyan Hilbert-teret, és olyan abban haladó sorozatot, amely szummálható, de a hozzá asszociált sor nem abszolút konvergens. Ha ugyanis

$\mathbf{c} \in l^2_{\mathbb{K}}$ olyan sorozat, hogy $\mathbf{c} \notin l^1_{\mathbb{K}}$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{c}(k)\mathbf{e}_k$ sor nem abszolút konvergens $l^2_{\mathbb{K}}$-ban a $\|\cdot\|_2$ szerint (ahol $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_k$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni j$-re $\mathbf{e}_k(j) = \delta_{j,k}$), hiszen a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{c}(k)\mathbf{e}_k\|_2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |\mathbf{c}(k)|$ sor divergens. Ugyanakkor a $(\mathbf{c}(k)\mathbf{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer ortogonális $l^2_{\mathbb{K}}$-ban, és az $(\|\mathbf{c}(k)\mathbf{e}_k\|_2^2)_{k\in\mathbb{N}} = (|\mathbf{c}(k)|^2)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat szummálható $\mathbb{R}$-ben, így a j) szerint a $(\mathbf{c}(k)\mathbf{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer szummálható $l^2_{\mathbb{K}}$-ban.)

9. Legyen E prehilbert-tér és $(e_i)_{i\in I}$ ortonormált rendszer E-ben. Ekkor minden $E \ni x$-re a $(|(x|e_i)|^2)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben és fennáll a

$$\sum_{i,I} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Bessel-egyenlőtlenség. Ha E Hilbert-tér, akkor minden $E \ni x$-re az $((x|e_i)e_i)_{i\in I}$ ortogonális rendszer szummálható E-ben és teljesülnek a

$$P_H(x) = \sum_{i,I} (x|e_i)e_i, \quad \|P_H(x)\|^2 = \sum_{i,I} |(x|e_i)|^2$$

Parseval-egyenlőségek, ahol H az $\{e_i | i \in I\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér E-ben.

(*Útmutatás.* Ha $x \in E$, akkor minden $J \subseteq I$ véges halmazra

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i\in J} (x|e_i)e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |(x|e_i)|^2,$$

tehát $\sup\limits_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum\limits_{i\in J} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$, így a **8**. gyakorlat j) pontja szerint az $(|(x|e_i)|^2)_{i\in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben, és

$$\sum_{i,I} |(x|e_i)|^2 = \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} |(x|e_i)|^2,$$

vagyis a $\sum\limits_{i,I} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ Bessel-egyenlőtlenség teljesül.

Ha $x \in E$, akkor $(|(x|e_i)|^2)_{i\in I} = (\|(x|e_i)e_i\|^2)_{i\in I}$, tehát ha E teljes, akkor a **8**. gyakorlat h) pontja alapján az $((x|e_i)e_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható E-ben, továbbá

$$\left\| \sum_{i,I} (x|e_i)e_i \right\|^2 = \sum_{i,I} |(x|e_i)|^2.$$

Ezért a Parseval-egyenlőség bizonyításához elég azt igazolni, hogy az $y := \sum\limits_{i,I} (x|e_i)e_i$ vektorra $y = P_H(x)$ teljesül, ahol H az $\{e_i | i \in I\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér E-ben. A szummálható rendszerek összegének definíciója szerint $y \in \overline{H} = H$. Továbbá, $k \in I$ esetén a **8**. gyakorlat h) pontja alapján

$$(x - y|e_k) = (x|e_k) - \left(\sum_{i,I} (x|e_i)e_i \,\middle|\, e_k \right) = (x|e_k) - \sum_{i,I} (x|e_i)(e_i|e_k) = 0,$$

tehát $x - y \in \{e_i | i \in I\}^\perp = H^\perp$. Az 5. pont **6**. gyakorlata, valamint a P_H operátor értelmezése szerint $y = P_H(x)$.)

10. Legyen E Hilbert-tér és $(e_i)_{i \in I}$ ortonormált rendszer E-ben. A következő állítások ekvivalensek.

(i) Ha $x \in E$ olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $(x|e_i) = 0$, akkor $x = 0$.

(ii) Az $\{e_i | i \in I\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér E-ben egyenlő E-vel.

(iii) Minden $E \ni x$-re $\sum_{i,I} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$.

(iv) Minden $E \ni x$-re $x = \sum_{i,I} (x|e_i)e_i$.

Ha $(e_i)_{i \in I}$ olyan ortonormált rendszer E-ben, amelyre (i), (ii), (iii) és (iv) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $(e_i)_{i \in I}$ *ortonormált bázis* E-ben.

(*Útmutatás.* Ugyanúgy bizonyítunk, mint az ortonormált *sorozatok* esetében, de itt a **9**. gyakorlat eredményeire kell hivatkozni.)

11. Minden Hilbert-térben létezik ortonormált bázis, és bármely két ortonormált bázisának az indexhalmazai ekvipotensek. (Ha E Hilbert-tér és $(e_i)_{i \in I}$ ortonormált bázis E-ben, akkor a $Card(I)$ számosságot az E *Hilbert-dimenziójának* nevezzük, és a $dim(E)$ szimbólummal jelöljük.)

(*Útmutatás.* (I) Nevezzünk egy $H \subseteq E$ halmazt *ortonormáltnak*, ha minden $x, y \in H$ és $x \neq y$ esetén $(x|y) = 0$, valamint minden $H \ni x$-re $\|x\| = 1$. Megmutatjuk, hogy minden $H \subseteq E$ ortonormált halmazhoz létezik olyan $B \subseteq E$, hogy $H \subseteq B$ és a $(b)_{b \in B}$ rendszer ortonormált bázis E-ben. Valóban, legyen $\mathfrak{S}_H$ az E azon ortonormált részhalmazainak halmaza, amelyek tartalmazzák H-t, és rendezzük $\mathfrak{S}_H$-t a $\subseteq$ relációval. Ekkor $\mathfrak{S}_H$ *induktívan* rendezett halmaz, mert ha $(B_i)_{i \in I}$ olyan rendszer $\mathfrak{S}_H$-ban, hogy minden $I \ni i, j$-re $B_i \subseteq B_j$ vagy $B_j \subseteq B_i$, akkor nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{i \in I} B_i$ olyan eleme $\mathfrak{S}_H$-nak, amely felső korlátja (sőt szuprémuma) a $(B_i)_{i \in I}$ rendszernek. A Zorn-lemma alapján van olyan $B \in \mathfrak{S}_H$, amely az $\mathfrak{S}_H$-nak *maximális* eleme. Ha a $(b)_{b \in B}$ ortonormált rendszer nem volna ortonormált bázis, akkor a **10**. gyakorlat szerint létezne olyan $b' \in E$, hogy $\|b'\| = 1$ és b' ortogonális a B minden elemére; ekkor $B \cup \{b'\} \in \mathfrak{S}_H$ olyan halmaz volna, amely valódi részként tartalmazza B-t, ami ellentmond a B maximalitásának.

(II) Az $\emptyset$ ortonormált részhalmaza E-nek, ezért az (I) alapján van olyan B ortonormált halmaz E-ben, amelyre $(b)_{b \in B}$ ortonormált bázis. Ezért létezik E-ben ortonormált bázis.

(III) Legyenek $(e_i)_{i \in I}$ és $(f_j)_{j \in J}$ ortonormált bázisok E-ben. Ha I vagy J véges, akkor E véges dimenziós, és $(e_i)_{i \in I}$, $(f_j)_{j \in J}$ mindketten algebrai bázisok E-ben, így I és J végesek, és $Card(I) = dim(E) = Card(J)$. Ezért feltehető, hogy I és J

végtelenek. Minden $i \in I$ esetén legyen $J_i := \{j \in J | (e_i|f_j) \neq 0\}$. Ha $i \in I$, akkor az $(|(e_i|f_j)|^2)_{j \in J}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben (**9**. gyakorlat), ezért a **8**. gyakorlat c) pontja szerint J_i *megszámlálható* halmaz. Ha $j \in J$, akkor $f_j \neq 0$, ezért a **10**. gyakorlat szerint van olyan $i \in I$, hogy $(e_i|f_j) \neq 0$, vagyis $j \in J_i$. Ez azt jelenti, hogy $J = \bigcup_{i \in I} J_i$. Ugyanakkor az $\bigcup_{i \in I} J_i$ halmaz nyilvánvalóan kisebb-egyenlő számosságú az $\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J_i)$ diszjunkt uniónál, hiszen könnyen képezhető $\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J_i) \to \bigcup_{i \in I} J_i$ szürjekció. Az I. fejezet 3. pontjának **25**. gyakorlata szerint az I halmaz ekvipotens $\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J_i)$-vel, hiszen I végtelen. Tehát J kisebb-egyenlő számosságú I-nél. Az I és J szerepét felcserélve, az iménti érveléssel kapjuk, hogy I is kisebb-egyenlő számosságú J-nél, így a Schröder-Bernstein-tétel alapján I és J ekvipotensek.)

12. Legyen I halmaz, $\mathscr{R}_I$ az I véges részhalmazainak halmaza, és $\mu_I : \mathscr{R}_I \to \mathbb{R}_+$ a számláló mérték I felett (VIII. fejezet, 1. pont, 1. példa). Minden $I \ni i$-re legyen $e_i \in \mathbb{K}^{(I)} = \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I)$ az a függvény, amelyre $e_i(i) = 1$, és minden $j \in I \setminus \{i\}$ esetén $e_i(j) = 0$. Ekkor $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ felett a $\|\cdot\|_{\mu_I,2}$ félnorma *norma*, és $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ a $\|\cdot\|_{\mu_I,2}$ normával ellátva olyan Hilbert-tér, amelyben az $(e_i)_{i \in I}$ rendszer ortonormált bázis. Minden $\mathfrak{n}$ számossághoz létezik olyan Hilbert-tér, amelynek Hilbert-dimenziója egyenlő $\mathfrak{n}$-nel.

(*Útmutatás.* Az $\emptyset$ az egyetlen μ_I-nullhalmaz I-ben (IX. fejezet, 1. pont, **8**. gyakorlat), ezért a $\|\cdot\|_{\mu_I,2}$ félnorma norma, így $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ a $\|\cdot\|_{\mu_I,2}$ normával ellátva Hilbert-tér. Nyilvánvaló, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ rendszer ortonormált az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ Hilbert-térben, továbbá az általa generált lineáris altér egyenlő a $\mathbb{K}^{(I)} = \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I)$ függvénytérrel, amely az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ definíciója alapján sűrű ebben a Hilbert-térben a $\|\cdot\|_{\mu_I,2}$ norma szerint.)

13. Ha E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett és $(e_i)_{i \in I}$ ortonormált bázis E-ben, akkor az E Hilbert-tér és a **12**. gyakorlatban értelmezett $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ Hilbert-tér *izomorfak.* Két Hilbert-tér pontosan akkor izomorf, ha a Hilbert-dimenzióik megegyeznek.

(*Útmutatás.* (I) Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{K}$ olyan függvény, hogy az $(|f(i)|^2)_{i \in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben. Ekkor a **8**. gyakorlat j) pontja és a IX. fejezet, 1. pont, **8**. gyakorlat szerint

$$\int^* |f|^2 d\mu_I = \sup_{J \subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i \in J} |f(i)|^2 < +\infty,$$

vagyis $f \in \mathscr{F}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$. Ugyanakkor $\{i \in I | f(i) \neq 0\}$ megszámlálható halmaz, ezért létezik olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I)$-ben, amely az I halmazon mindenütt pontonként konvergál f-hez, így f mérhető a μ_I mérték szerint. A négyzetes integrálhatóság kritériuma szerint $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$.

(II) Ha $x \in E$, akkor az $(|(x|e_i)|^2)_{i \in I}$ rendszer szummálható $\mathbb{R}$-ben, ezért az (I) alapján $((x|e_i))_{i \in I} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$. Értelmezzük az

$$u : E \to \mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I); \quad x \mapsto ((x|e_i))_{i \in I}$$

lineáris operátort. Az általános Parseval-egyenlőség szerint u izometria, amiből következik, hogy $Im(u)$ zárt lineáris altér az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ Hilbert-térben. Ha

$(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} = \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I)$, akkor az $x := \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ vektorra $u(x) = (\lambda_i)_{i\in I}$ teljesül, ezért $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I) \subseteq Im(u)$, így $Im(u)$ sűrű az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ Hilbert-térben, vagyis u szürjektív is. Ez azt jelenti, hogy az E és $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{R}_I, \mu_I)$ Hilbert-terek izomorfak.

(III) Ha E és F olyan Hilbert-terek, amelyek Hilbert-dimenziója ugyanaz a $\mathfrak{n}$ kardinális szám, akkor a (II) alapján E és F mindketten izomorfak az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\mathfrak{n}, \mathscr{R}_{\mathfrak{n}}, \mu_{\mathfrak{n}})$ Hilbert-térrel, tehát egymással is izomorfak.)

14. (*Hilbert-terek Hilbert-összege.*) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ Hilbert-terek tetszőleges rendszere, és minden $I \ni i$-re jelölje $\|\cdot\|_i$ az E_i normáját. Legyen

$$E := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \;\middle|\; \sup_{J\subseteq I,\ J \text{ véges}} \sum_{i\in J} \|x_i\|_i^2 < +\infty \right\}.$$

Ekkor E lineáris altere a $\prod_{i\in I} E_i$ lineáris szorzattérnek, és az

$$E \to \mathbb{R}_+; \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto \sqrt{\sum_{i,I} \|x_i\|_i^2}$$

leképezés olyan norma E felett, amellyel ellátva E Hilbert-tér. Továbbá, a

$$\bigoplus_{i\in I} E_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \;\middle|\; \{i \in I | x_i \neq 0\} \text{ véges halmaz} \right\}$$

halmaz *sűrű* lineáris altere az E Hilbert-térnek. Fennáll a

$$dim(E) = \sum_{i\in I} dim(E_i)$$

egyenlőség, ahol a jobb oldalon kardinális számok összege áll (I. fejezet, 3. pont, **41**. gyakorlat).

(**Megjegyzés**. Az itt értelmezett E Hilbert-teret az $(E_i)_{i\in I}$ Hilbert-tér-rendszer *Hilbert-összegének* nevezzük, és a $\widehat{\bigoplus_{i\in I}} E_i$ szimbólummal jelöljük.)

15. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, valamint $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$ és $(\mathscr{K}_i)_{i\in I}$ a $\mathscr{H}$ zárt lineáris altereinek ortogonális rendszerei. Ha a

$$\sum_{i\in I} \mathscr{K}_i := \left\{ \sum_{i\in I} \zeta_i \;\middle|\; (\zeta_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathscr{K}_i \right\}$$

halmaz sűrű $\mathscr{H}$-ban és minden $i \in I$ esetén $\mathscr{K}_i \subseteq \mathscr{H}_i$, akkor minden $I \ni i$-re $\mathscr{K}_i = \mathscr{H}_i$.

16. (*A klasszikus valós trigonometrikus Fourier-sorok pontonkénti divergenciájáról.*) Jelölje $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ azon $[-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ folytonos függvények terét, amelyek a $-\pi$ és π pontban ugyanazt az értéket veszik fel.

a) Ha $g \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, akkor az

$$u_g : \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}; \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} fg \; d\mu_{\mathbb{R}}$$

leképezés olyan lineáris funkcionál, amely a sup-normában folytonos és

$$\|u_g\| = \int_{-\pi}^{\pi} |g| \; d\mu_{\mathbb{R}}.$$

b) Ha $n \in \mathbb{N}^+$ esetén D_n az n-edik *Dirichlet-féle magfüggvény*, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n| \; d\mu_{\mathbb{R}} = +\infty$$

teljesül.

c) Létezik olyan $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ függvény, amelynek a klasszikus valós trigonometrikus Fourier-sora a 0 pontban *divergens.*

(*Útmutatás.* a) Legyen $g \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ rözítve. Ha $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ tetszőleges, akkor $|fg| \leq |||f|||g$ miatt

$$|u_g(f)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} fg \; d\mu_{\mathbb{R}} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |fg| \; d\mu_{\mathbb{R}} \leq |||f||| \int_{-\pi}^{\pi} |g| \; d\mu_{\mathbb{R}},$$

amiből látszik, hogy az u_g lineáris funkcionál a sup-normában folytonos és

$$\|u_g\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g| \; d\mu_{\mathbb{R}}.$$

A fordított egyenlőség bizonyításához elegendő megmutatni olyan $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$-ben haladó $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|h_n| \leq 1$ és a $(gh_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a $|g|$ függvényhez. Ha ugyanis $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ilyen függvénysorozat, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} gh_n \; d\mu_{\mathbb{R}} = \int_{-\pi}^{\pi} |g| \; d\mu_{\mathbb{R}},$$

következésképpen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g| \; d\mu_{\mathbb{R}} \leq \sup_{h \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K}); \; |h| \leq 1} |u_g(h)| =: \|u_g\|.$$

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rögzített zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük a $\{t \in [-\pi, \pi] \mid |g(t)| \geq \varepsilon_n\}$ kompakt halmazt és az ezt tartalmazó $\{t \in [-\pi, \pi] \mid g(t) \neq 0\}$ nyílt halmazt. Az Uriszon-tétel alapján kiválaszthatunk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, $\varphi_n \in \mathscr{C}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\{t \in [-\pi, \pi] \mid |g(t)| \geq \varepsilon_n\} \subseteq \{t \in [-\pi, \pi] \mid \varphi_n(t) = 1\}$, és $supp(\varphi_n) \subseteq \{t \in [-\pi, \pi] \mid g(t) \neq 0\}$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re értelmezzük a következő függvényt:

$$h_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}; \quad t \mapsto \begin{cases} \varphi_n(t)\dfrac{|g(t)|}{g(t)} & \text{, ha } g(t) \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } g(t) = 0. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $h_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény és a $(gh_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a $|g|$ függvényhez.

Ha $g(\pi) = g(-\pi) = 0$, akkor a definíció szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $h_n(-\pi) = 0 = h_n(\pi)$, tehát $h_n \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, így $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek a létezését állítottuk.

Ha $g(\pi) = g(-\pi) \neq 0$, akkor vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ számra $\varepsilon_n \leq |g(\pi)| = |g(-\pi)|$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $-\pi, \pi \in \{t \in [-\pi, \pi] \mid |g(t)| \geq \varepsilon_n\}$, így $\varphi_n(-\pi) = 1 = \varphi_n(\pi)$, következésképpen $h_n(-\pi) = h_n(\pi)$, tehát $h_n \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, így $(h_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, amelynek a létezését állítottuk.

b) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített. A D_n függvény páros és minden $t \in [0, \pi]$ számra $0 \leq \sin(t/2) \leq t/2$, ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n| \, d\mu_{\mathbb{R}} = 2\int_{0}^{\pi} |D_n| \, d\mu_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} d\mu_{\mathbb{R}}(t) \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{t} d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} d\mu_{\mathbb{R}}(s).$$

A jobb oldal $+\infty$-hez tart, ha $n \to \infty$ (a sinus cardinalis függvény nem Lebesgue-integrálható a $]0, \to[$ intervallumon).

c) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük a következő függvényt:

$$u_n : \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} fD_n \, d\mu_{\mathbb{R}}.$$

Az a) alapján minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re u_n sup-normában folytonos lineáris funkcionál a $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ valós Banach-téren, ezért ha pontonként konvergens volna, akkor Banach egyenletes korlátosság tétele alapján funkcionálnormában is korlátos volna, holott az a) és b) alapján

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \|u_n\| = +\infty.$$

Tehát van olyan $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{R})$, hogy az $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}^+}$ számsorozat *nem konvergens*. Ugynakkor világos, hogy minden $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$u_n(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(0+s)D_n(s)\ d\mu_{\mathbb{R}}(s) = \frac{c_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k(f),$$

vagyis $u_n(f)$ az f függvény klasszikus valós trigonometrikus Fourier-sora n-edik részletösszegének 0 pontban fölvett értéke.)

7. Folytonos lineáris operátorok Hilbert-terek között

Állítás. Legyen E Hilbert-tér, F prehilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E;F)$. Egyértelműen létezik olyan $u^* : F \to E$ függvény, amelyre

$$(\forall x \in E)(\forall y \in F): \ (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

teljesül. Az u^* függvény olyan folytonos lineáris operátor, amelyre

$$\|u^*\| = \|u\|, \quad \|u^* \circ u\| = \|u\|^2.$$

Bizonyítás. Ha $y \in F$, akkor az

$$E \to \mathbb{K}; \quad x \mapsto (u(x)|y)$$

függvény folytonos lineáris funkcionál E felett, ezért a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján létezik egyetlen olyan $z \in E$, amelyre $(\cdot|z)$ megegyezik ezzel a funkcionállal, vagyis minden $E \ni x$-re $(u(x)|y) = (x|z)$. Ezért egyértelműen létezik olyan $u^* : F \to E$ függvény, amelyre

$$(\forall x \in E)(\forall y \in F): \ (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

teljesül.

Az u^* függvény additív, mert ha $y_1, y_2 \in F$, akkor tetszőleges $x \in E$ esetén $(u(x)|y_1) = (x|u^*(y_1))$ és $(u(x)|y_2) = (x|u^*(y_2))$, ezért

$$\begin{aligned}(x|u^*(y_1+y_2)) = (u(x)|y_1+y_2) = (u(x)|y_1) + (u(x)|y_2) = \\ = (x|u^*(y_1)) + (x|u^*(y_2)) = (x|u^*(y_1) + u^*(y_2)),\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $u^*(y_1) + u^*(y_2) - u^*(y_1 + y_2) \in E^\perp = \{0\}$, vagyis $u^*(y_1) + u^*(y_2) = u^*(y_1 + y_2)$.

Az u^* függvény $\mathbb{K}$-homogén, mert ha $y \in F$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $x \in E$ esetén $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$, ezért

$$(x|u^*(\lambda y)) = (u(x)|\lambda y) = \overline{\lambda}(u(x)|y) = \overline{\lambda}(x|u^*(y)) = (x|\lambda u^*(y)),$$

amiből következik, hogy $u^*(\lambda y) - \lambda u^*(y) \in E^\perp = \{0\}$, vagyis $u^*(\lambda y) = \lambda u^*(y)$.

Az $u^* : F \to E$ lineáris operátor folytonosságának bizonyításához elég felírni a következő egyenlőségeket

$$\sup_{y\in F;\ \|y\|\le 1} \|u^*(y)\| = \sup_{y\in F;\ \|y\|\le 1} \left(\sup_{x\in E;\ \|x\|\le 1} |(x|u^*(y))| \right) =$$

$$= \sup_{y\in F;\ \|y\|\le 1} \left(\sup_{x\in E;\ \|x\|\le 1} |(u(x)|y)| \right) = \sup_{x\in E;\ \|x\|\le 1} \left(\sup_{y\in F;\ \|y\|\le 1} |(u(x)|y)| \right) =$$

$$= \sup_{x \in E;\ \|x\| \le 1} \|u(x)\| =: \|u\|.$$

Ebből láthatjuk, hogy u^* folytonos, és kiolvasható belőle az $\|u^*\| = \|u\|$ egyenlőség is. Ebből következik, hogy $\|u^* \circ u\| \le \|u^*\|\|u\| = \|u\|^2$. Ha $\|u\| = 0$, akkor ebből azonnal következik az egyenlőség. Ezért a fordított egyenlőtlenség bizonyításánál feltehetjük, hogy $\|u\| > 0$. Legyen $c \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges olyan szám, amelyre $c < \|u\|^2$. Ekkor $\sqrt{c} < \|u\| = \sup_{x \in E;\ \|x\| \le 1} \|u(x)\|$, tehát van olyan $x \in E$, hogy $\|x\| \le 1$ és $\sqrt{c} < \|u(x)\|$, tehát a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$c < \|u(x)\|^2 = |(u(x)|u(x)| = |(x|u^*(u(x))| \le \|x\|\|u^* \circ u\|\|x\| \le \|u^* \circ u\|.$$

Ez azt jelenti, hogy $\|u\|^2 \le \|u^* \circ u\|$ is teljesül. ■

Definíció. Ha E Hilbert-tér, F prehilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor az u *adjungáltjának* nevezzük azt az $u^* \in \mathscr{L}(F;E)$ operátort, amelyre minden $x \in E$ és $y \in F$ esetén $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ teljesül.

Állítás. Legyen E Hilbert-tér és F prehilbert-tér.

a) Az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E);\ u \mapsto u^*$ leképezés konjugált-lineáris izometria.

b) Ha F Hilbert-tér, akkor az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E);\ u \mapsto u^*$ leképezés olyan bijekció, amelynek inverze az $\mathscr{L}(F;E) \to \mathscr{L}(E;F);\ v \mapsto v^*$ leképezés, vagyis minden $\mathscr{L}(E;F) \ni u$-ra $(u^*)^* = u$.

c) Ha F Hilbert-tér, G prehilbert-tér, $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $v \in \mathscr{L}(F;G)$, akkor $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Bizonyítás. a) Ha $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor minden $x \in E$ és $y \in F$ esetén

$$(x|(u_1^* + u_2^*)(y)) = (x|u_1^*(y) + u_2^*(y)) = (x|u_1^*(y)) + (x|u_2^*(y)) =$$
$$= (u_1(x)|y) + (u_2(x)|y) = (u_1(x) + u_2(x)|y) = ((u_1 + u_2)(x)|y) = (x|(u_1 + u_2)^*(y)),$$

amiből következik, hogy $(u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^*$.

Ha $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $x \in E$ és $y \in F$ esetén

$$(x|(\lambda u)^*(y)) = ((\lambda u)(x)|y) = (\lambda u(x)|y) = \lambda(u(x)|y) =$$
$$= \lambda(x|u^*(y)) = (x|\overline{\lambda}u^*(y)) = (x|(\overline{\lambda}u^*)(y)).$$

amiből következik, hogy $(\lambda u)^* = \overline{\lambda}u^*$.

Tehát az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E);\ u \mapsto u^*$ leképezés konjugált-lineáris, és az előző állítás szerint izometria.

b) Tegyük fel, hogy F is Hilbert-tér. Ekkor $u \in \mathscr{L}(E;F)$ esetén $u^* \in \mathscr{L}(F;E)$, így van értelme az $(u^*)^* \in \mathscr{L}(E;F)$ operátornak, amelyre minden $y \in F$ és $x \in E$ esetén

$$(y|(u^*)^*(x)) = (u^*(y)|x) = \overline{(x|u^*(y))} = \overline{(u(x)|y)} = (y|u(x)),$$

amiből következik, hogy $(u^*)^* = u$. Ebből látható, hogy az $\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E);\ u \mapsto u^*$ leképezés olyan bijekció, amelynek inverze az $\mathscr{L}(F;E) \to \mathscr{L}(E;F);\ v \mapsto v^*$ leképezés.

c) Tegyük fel, hogy F Hilbert-tér, G prehilbert-tér, $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $v \in \mathscr{L}(F;G)$. Ha $x \in E$ és $z \in G$, akkor

$$(x|(v \circ u)^*(z)) = ((v \circ u)(x)|z) = (v(u(x))|z) = (u(x)|v^*(z)) = (x|u^*(v^*(z))),$$

amiből látható, hogy $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$. ■

Definíció. Legyen E Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$. Azt mondjuk, hogy az u operátor

- *normális*, ha $u^* \circ u = u \circ u^*$, vagyis u és u^* felcserélhetők egymással;
- *önadjungált*, ha $u^* = u$;
- *pozitív*, ha létezik olyan véges $(v_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathscr{L}(E)$-ben, amelyre $u = \sum_{i \in I} v_i^* \circ v_i$;
- *unitér*, ha $u^* \circ u = u \circ u^* = id_E$, vagyis $u \in \mathbf{GL}(E)$ és $u^{-1} = u^*$;
- *projektor*, ha $u^* = u = u^2$, vagyis u önadjungált és idempotens.

Természetesen minden projektor pozitív operátor, minden pozitív operátor önadjungált, és és minden önadjungált vagy unitér operátor normális. Továbbá, ha E Hilbert-tér, akkor egy $u : E \to E$ lineáris operátor pontosan akkor unitér, ha izometrikus lineáris bijekció. Ez azonnal következik az adjungált operátorok értelmezéséből és abból, hogy prehilbert-terek közötti lineáris operátor pontosan akkor izometria, ha skalárszorzás-tartó (a polarizációs formulák alapján). Azonban vigyázzunk arra, hogy ha E Hilbert-tér és $u : E \to E$ lineáris izometria, akkor u nem szükségképpen szürjektív, ezért u nem feltétlenül unitér operátor.

Állítás. Legyen E Hilbert-tér és F prehilbert-tér. Minden $u \in \mathscr{L}(E;F)$ esetén

$$(Im(u))^{\perp} = Ker(u^*),$$

és ha F is Hilbert-tér, akkor

$$\overline{Im(u)} = (Ker(u^*))^{\perp}.$$

Bizonyítás. Ha $u \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor minden $y \in F$ esetén nyilvánvalóan teljesülnek a következők

$$y \in (Im(u))^{\perp} \Leftrightarrow (\forall x \in E) : \ (u(x)|y) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in E) : \ (x|u^*(y)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^*(y) \in E^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow u^*(y) = 0 \Leftrightarrow y \in Ker(u^*),$$

ami azt jelenti, hogy $(Im(u))^{\perp} = Ker(u^*)$. Ha F is Hilbert-tér, akkor $u \in \mathscr{L}(E;F)$ esetén $Im(u)^{\perp\perp}$ megegyezik az $Im(u) \subseteq F$ lineáris altér által generált zárt lineáris altérrel, vagyis $\overline{Im(u)}$-val, tehát az imént igazolt összefüggés alapján $\overline{Im(u)} = (Ker(u^*))^{\perp}$. ■

Következmény. Ha E és F Hilbert-terek, és $u \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor $Im(u)$ pontosan akkor sűrű F-ben, ha u^* injektív.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

Speciálisan, ha E Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$ önadjungált operátor, akkor u pontosan akkor injektív, ha $Im(u)$ sűrű E-ben.

Állítás. Legyen E komplex Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$ önadjungált operátor. Ekkor $Sp(u) \subseteq \mathbb{R}$, $Sp_r(u) = \emptyset$, és minden $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ esetén

$$\|R(u,\lambda)\| \leq \frac{1}{|\mathfrak{Im}(\lambda)|}.$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in E$. Ekkor $u^* = u$ miatt $(x|u(x)) \in \mathbb{R}$, hiszen

$$\overline{(x|u(x))} = (u(x)|x) = (x|u^*(x)) = (x|u(x)),$$

ezért teljesülnek a következők

$$\begin{aligned}\|(\lambda id_E - u)(x)\|^2 &= \|\lambda x - u(x)\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\left(\lambda(x|u(x))\right) + \|u(x)\|^2 = \\ &= (\mathfrak{Im}(\lambda))^2\,\|x\|^2 + (\mathfrak{Re}(\lambda))^2\,\|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\,(\lambda)\,(x|u(x)) + \|u(x)\|^2 = \\ &= (\mathfrak{Im}(\lambda))^2\,\|x\|^2 + \|\mathfrak{Re}(\lambda)x - u(x)\|^2 \geq (\mathfrak{Im}(\lambda))^2\,\|x\|^2.\end{aligned}$$

Tehát $\|(\lambda id_E - u)(x)\| \geq |\mathfrak{Im}(\lambda)|\|x\|$, ezért ha $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, akkor a $\lambda id_E - u$ operátor injektív és az $(\lambda id_E - u)^{-1} : Im(\lambda id_E - u) \to E$ inverzoperátor folytonos, sőt az is látható, hogy

$$\|(\lambda id_E - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathfrak{Im}(\lambda)|}.$$

Ha $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, akkor $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, így az előzőek szerint a $\overline{\lambda} id_E - u$ operátor injektív, és ez $u^* = u$ miatt egyenlő a $(\lambda id_E - u)^*$ adjungált operátorral. Az előző állítás alapján ez azt jelenti, hogy $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ esetén $\overline{Im(\lambda id_E - u)} = (Ker((\lambda id_E - u)^*))^\perp = \{0\}^\perp = E$, vagyis $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű altere E-nek. De a XII. fejezet 1. pontjának első állása szerint $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ esetén az $Im(\lambda id_E - u)$ altér zárt E-ben, mert $\lambda id_E - u$ injektív és az inverze folytonos. Ez azt jelenti, hogy ha $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, akkor $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, vagyis $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Sp(u)$.

Ezzel megmutattuk, hogy $Sp(u) \subseteq \mathbb{R}$, és azt is látjuk, hogy $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ esetén

$$\|R(u,\lambda)\| = \|(\lambda id_E - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathfrak{Im}(\lambda)|}.$$

Ha $\lambda \in Sp(u)$ és $\lambda id_E - u$ injektív operátor, akkor az $\lambda id_E - u$ önadjungáltsága miatt $Im(\lambda id_E - u)$ sűrű altér E-ben, ezért $\lambda \in Sp_r(u)$ lehetetlen. Ez azt jelenti, hogy $Sp_r(u) = \emptyset$. ■

Állítás. Ha E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett és $u \in \mathscr{L}(E)$ unitér operátor, akkor $Sp(u) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} | |\lambda| = 1\}$.

Bizonyítás. Világos, hogy $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\| = \|id_E\| \leq 1$, ezért $\rho(u) \leq \|u\| \leq 1$, így $Sp(u) \subseteq \overline{B}_{\rho(u)}(0;\mathbb{K}) \subseteq \overline{B}_1(0;\mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \in Sp(u)$ esetén $|\lambda| \leq 1$. Továbbá, ha $\lambda \in Sp(u)$, akkor $\lambda \neq 0$, hiszen $u \in \mathbf{GL}(E)$, és

$$\lambda^{-1} id_E - u^{-1} = (\lambda id_E - u) \circ (-\lambda^{-1}u^{-1}) = (-\lambda^{-1}u^{-1}) \circ (\lambda id_E - u),$$

ugyanakkor a $-\lambda^{-1}u^{-1}$, a $\lambda id_E - u$ és a $\lambda^{-1} id_E - u^{-1}$ operátorok páronként felcserélhetők, így $\lambda id_E - u \notin \mathbf{GL}(E)$ esetén $\lambda^{-1} id_E - u^{-1} \notin \mathbf{GL}(E)$. Ez azt jelenti, hogy ha $\lambda \in Sp(u)$, akkor $\lambda^{-1} \in Sp(u)$, így $|\lambda^{-1}| \leq 1$ is teljesül, tehát $|\lambda| = 1$. ■

Gyakorlatok

1. Legyenek E, F normált terek és $u \in \mathscr{L}(E;F)$. Ekkor képezhető az u operátor topologikus transzponáltja, vagyis az az $u' \in \mathscr{L}(F';E')$ operátor, amelyre minden $f \in F'$ esetén $u'(f) := f \circ u$ (VI. fejezet, 2. pont, **16**. gyakorlat). Ha E Hilbert-tér és F prehilbert-tér, akkor $u^* = J_E^{-1} \circ u' \circ J_F$.

(*Útmutatás.* Ha $y \in F$, akkor a definíciók alapján minden $E \ni x$-re

$$\begin{aligned}(x|(J_E^{-1} \circ u' \circ J_F)(y)) &= (x|J_E^{-1}(u'(J_F(y)))) = \\ &= (u'(J_F(y))|x) = (J_F(y))(u(x)) = (u(x)|y),\end{aligned}$$

ezért az u^* értelmezése szerint $u^* = J_E^{-1} \circ u' \circ J_F$.)

2. Legyen E normált tér és F prehilbert-tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $u \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor a

$$\boldsymbol{b}_u : E \times F \to \mathbb{K}; \quad (x,y) \mapsto (u(x)|y)$$

leképezés folytonos konjugált-bilineáris funkcionál. Ha F teljes, akkor minden $\boldsymbol{b} : E \times F \to \mathbb{K}$ folytonos konjugált-bilineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $u \in \mathscr{L}(E;F)$, amelyre $\boldsymbol{b}_u = \mathbf{b}$. Ebből kiindulva adjunk új bizonyítást arra, hogy ha E Hilbert-tér, F prehilbert-tér, és $u \in \mathscr{L}(E;F)$, akkor létezik egyetlen olyan $u^* \in \mathscr{L}(F;E)$ operátor, amelyre minden $x \in E$ és $y \in F$ esetén $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $\boldsymbol{b} : E \times F \to \mathbb{K}$ folytonos konjugált bilineáris funkcionál, és $x \in E$ rögzített. Tekintsük az

$$F \to \mathbb{K}; \quad y \mapsto \overline{\mathbf{b}(x,y)}$$

leképezést, ami folytonos lineáris funkcionál F felett. A Riesz-féle reprezentációs tétel alapján létezik egyetlen olyan $z \in F$ vektor, hogy $J_F(z)$ egyenlő ezzel a funkcionállal, vagyis minden $F \ni y$-ra $(y|z) = (J_F(z))(y) = \overline{\boldsymbol{b}(x,y)}$; ezért jól értelmezett az az $u : E \to F$ függvény, amelyre $x \in E$ és $y \in F$ esetén $(u(x)|y) = \mathbf{b}(x,y)$ teljesül. Az u leképezés lineáris operátor, mert ha $x_1, x_2 \in E$, akkor $u(x_1) + u(x_2) \in F$ olyan vektor, hogy minden $F \ni y$-ra

$$\begin{aligned}(u(x_1) + u(x_2)|y) = (u(x_1)|y) + (u(x_2)|y) = \boldsymbol{b}(x_1,y) + \boldsymbol{b}(x_2,y) = \\ = \boldsymbol{b}(x_1 + x_2, y) = (u(x_1 + x_2)|y),\end{aligned}$$

tehát $u(x_1) + u(x_2) = u(x_1 + x_2)$, továbbá, ha $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\lambda u(x) \in F$ olyan vektor, hogy minden $F \ni y$-ra

$$(\lambda u(x)|y) = \lambda(u(x)|y) = \lambda \boldsymbol{b}(x,y) = \boldsymbol{b}(\lambda x, y) = (u(\lambda x)|y),$$

tehát $\lambda u(x) = u(\lambda x)$.

Az $u : E \to F$ lineáris operátor folytonos, mert a $\boldsymbol{b}$ konjugált bilineáris leképezés folytonossága miatt létezik olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $(x,y) \in E \times F$ esetén $|\boldsymbol{b}(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$, tehát minden $E \ni x$-re

$$\|u(x)\| = \sup_{y \in F,\ \|y\| \leq 1} |(u(x)|y)| = \sup_{y \in F,\ \|y\| \leq 1} |\boldsymbol{b}(x,y)| \leq C\|x\|.$$

Végül, a definíció alapján triviális, hogy fennáll a $\boldsymbol{b}_u = \boldsymbol{b}$ egyenlőség.

Ha E Hilbert-tér és F prehilbert-tér, akkor nyilvánvaló, hogy az

$$F \times E \to \mathbb{K}; \quad (y, x) \mapsto (y|u(x))$$

leképezés konjugált-bilineáris funkcionál, és folytonos is, mert a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján $x \in E$ és $y \in F$ esetén $|(y|u(x))| \leq \|u\|\|x\|\|y\|$. Az előző tétel alapján létezik egyetlen olyan $u^* \in \mathfrak{L}(F; E)$, hogy minden $y \in F$ és $x \in E$ esetén $(y|u(x)) = (u^*(y)|x)$ teljesül, vagy ami ugyanaz: $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$.)

3. Ha E Hilbert-tér, akkor az $u \in \mathscr{L}(E)$ operátor pontosan akkor normális, ha minden $x \in E$ esetén $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$.

(*Útmutatás*. Tegyük fel, hogy $E \ni x$-re $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$ teljesül. Ekkor $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ esetén a polarizációs formulát alkalmazva kapjuk, hogy

$$((u^* \circ u)(x)|y) = (u(x)|u(y)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u(x) + i^k u(y)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u(x + i^k y)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u^*(x + i^k y)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u^*(x) + i^k u^*(y)\|^2 =$$

$$= (u^*(x)|u^*(y)) = ((u \circ u^*)(x)|y),$$

tehát $u^* \circ u = u \circ u^*$. A $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ esetben szintén a polarizációs formulát alkalmazzuk.)

4. Legyen E pehilbert-tér. Egy $u \in \mathscr{L}(E)$ operátort *formálisan szimmeretrikusnak* nevezünk, ha minden $x, y \in E$ esetén $(u(x)|y) = (x|u(y))$ teljesül.

a) Ha $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus operátor, akkor

$$\|u\| = \sup_{x \in E;\ \|x\| \leq 1} |(u(x)|x)|,$$

és $u \neq 0$ esetén $\|u\|$ vagy $-\|u\|$ általánosított sajátértéke u-nak (XII. fejezet, 1. pont, **15**. gyakorlat).

b) Ha $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus operátor, továbbá $e \in E$ olyan vektor, hogy $\|e\| = 1$ és $|(u(e)|e)| = \|u\|$, akkor $u(e) = (u(e)|e)e$, vagyis az $(u(e)|e) \in \mathbb{K}$ szám sajátértéke u-nak és $e \in E$ ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektor.

c) Ha $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus kompakt operátor, akkor $u \neq 0$ esetén van olyan $e \in E$, hogy $\|e\| = 1$ és $|(u(e)|e)| = \|u\|$ (XII. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlat). Speciálisan; prehilbert-tér nem nulla, formálisan szimmetrikus, kompakt operátorának *létezik sajátértéke*, még akkor is, ha *valós* prehilbert-térről van szó.

d) Ha $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus kompakt operátor és $Im(u)$ végtelen dimenziós altér E-ben, akkor létezik olyan $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormált sorozat E-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re e_n sajátvektora u-nak, és minden $x \in E$ vektorhoz létezik olyan $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$ sorozat, hogy $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k$ (tehát $Im(u)$ része az $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált zárt lineáris altérnek).

(**Megjegyzések**. 1) Ha E Hilbert-tér, akkor az $u \in \mathscr{L}(E)$ operátor formális szimmetrikussága ekvivalens az u önadjungáltságával, de a formális szimmetrikusság nem teljes prehilbert-tér esetén is értelmezhető, míg az adjungált operátorokat csak Hilbert-téren értelmezett operátorokra értelmezzük.

2) A XII. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlat szerint normált terek között ható kompakt operátor teljesen folytonos, és ennek megfordítása is igaz, ha az érkezési tér teljes. De ha E nem teljes prehilbert-tér, akkor létezhet olyan $u \in \mathscr{L}(E)$ teljesen folytonos lineáris operátor, amely nem kompakt operátor. Ha E nem teljes, akkor a c) állításban *nem elegendő* az u teljes folytonosságát feltenni (a formális szimmetrikusság mellett), hanem az erősebb *kompaktságot* tesszük fel.)

(*Útmutatás.* a) Legyen $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus operátor. Jelölje C a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán álló valós számot, amely az Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján nyilvánvalóan kisebb-egyenlő $\|u\|$-nál (még akkor is, ha u nem formálisan szimmetrikus). A definíció alapján az is világos, hogy minden $E \ni x$-re $|(u(x)|x)| \leq C\|x\|^2$. Legyenek $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tetszőlegesek. Ekkor

$$\begin{gathered}(u(\lambda x \pm \lambda^{-1}u(x))|\lambda x \pm \lambda^{-1}u(x)) = \\ = \lambda^2(u(x)|x) + \lambda^{-2}(u(u(x))|u(x)) \pm (u(x)|u(x)) \pm (u(u(x))|x) = \\ = \lambda^2(u(x)|x) + \lambda^{-2}(u(u(x))|u(x)) \pm 2\|u(x)\|^2,\end{gathered}$$

amiből következik, hogy

$$(u(\lambda x + \lambda^{-1}u(x))|\lambda x + \lambda^{-1}u(x)) - (u(\lambda x - \lambda^{-1}u(x))|\lambda x - \lambda^{-1}u(x)) = 4\|u(x)\|^2.$$

Ebből a paralelogramma-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$4\|u(x)\|^2 \leq C\|\lambda x + \lambda^{-1}u(x)\|^2 + C\|\lambda x - \lambda^{-1}u(x)\|^2 = 2C(\lambda^2\|x\|^2 + \lambda^{-2}\|u(x)\|^2).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $E \ni x$-re

$$\|u(x)\|^2 \leq \frac{C}{2} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^+} (\lambda^2\|x\|^2 + \lambda^{-2}\|u(x)\|^2).$$

Könnyen látható, hogy $a, b \in \mathbb{R}\{0\}$ esetén az

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad \lambda \mapsto \lambda^2 a^2 + \lambda^{-2} b^2$$

függvénynek a $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ helyen globális minimuma van és

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}^+} (\lambda^2 a^2 + \lambda^{-2} b^2) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^+} (\lambda^2 a^2 + \lambda^{-2} b^2) = \frac{b}{a} a^2 + \frac{a}{b} b^2 = 2ba.$$

Tehát ha $x \in E$ olyan, hogy $u(x) \neq 0$, akkor

$$\|u(x)\|^2 \leq \frac{C}{2} 2\|u(x)\|\|x\| = C\|u(x)\|\|x\|,$$

vagyis $\|u(x)\| \leq C\|x\|$. Természetesen az utóbbi egyenlőtlenség akkor is igaz, ha $u(x) = 0$, így azt kapjuk, hogy $\|u\| \leq C$.

Tegyük fel, hogy $u \neq 0$; ekkor $E \neq \{0\}$. Ha $x \in E$ és $0 < \|x\| \leq 1$, akkor

$$|(u(x)|x)| = \left| \left(u \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \middle| \frac{x}{\|x\|} \right) \right| \|x\|^2 \leq \sup_{e \in E,\ \|e\|=1} |(u(e)|e)|,$$

amiből következik, hogy

$$\|u\| = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} |(u(x)|x)| = \sup_{e \in E,\ \|e\|=1} |(u(e)|e)|.$$

Ezért létezik olyan $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat E-ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|e_n\| = 1$, és $\|u\| = \lim\limits_{n \to \infty} |(u(e_n)|e_n)|$. Ekkor az $((u(e_n)|e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat korlátos, tehát a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel alapján van olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy a $((u(e_{\sigma(m)})|e_{\sigma(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$ részsorozat konvergens; legyen $\lambda := \lim\limits_{m \to \infty} (u(e_{\sigma(m)})|e_{\sigma(m)})$. Természetesen ekko $|\lambda| = \lim\limits_{m \to \infty} |(u(e_{\sigma(m)})|e_{\sigma(m)})| = \lim\limits_{n \to \infty} |(u(e_n)|e_n)| = \|u\|$, tehát $\lambda = \|u\|$ vagy $\lambda = -\|u\|$. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|\lambda e_{\sigma(k)} - u(e_{\sigma(k)})\|^2 = \lambda^2 + \|u(e_{\sigma(k)})\|^2 - 2\lambda(u(e_{\sigma(k)})|e_{\sigma(k)}) \leq$$

$$\leq \lambda^2 + \|u\|^2 - 2\lambda(u(e_{\sigma(k)})|e_{\sigma(k)}),$$

amiből $\lambda^2 = \|u\|^2$ és $\lambda = \lim\limits_{k \to \infty} (u(e_{\sigma(k)})|e_{\sigma(k)})$ miatt $\lim\limits_{k \to \infty} \big(\lambda e_{\sigma(k)} - u(e_{\sigma(k)})\big) = 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy λ általánosított sajátértéke u-nak.

b) Tegyük fel, hogy $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus operátor, valamint $e \in E$ olyan vektor, amelyre $\|e\| = 1$ és $|(u(e)|e)| = \|u\|$. Ekkor

$$\|(u(e)|e)e - u(e)\|^2 = |(u(e)|e)|^2 + \|u(e)\|^2 - 2(u(e)|e)(e|u(e)) = 0,$$

tehát $u(e) = (u(e)|e)e$.

c) Tegyük fel, hogy $u \neq 0$ formálisan szimmetrikus kompakt operátor. Az a) bizonyításában láttuk olyan $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|e_k\| = 1$ és $0 = \lim\limits_{k \to \infty} (\lambda e_k - u(e_k))$, ahol $\lambda = \|u\|$ vagy $\lambda = -\|u\|$. Az u operátor kompakt, ezért az $(u(e_k))_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat benne halad az E egy kompakt részhalmazában, tehát a Bolzano-Weierstrass-tétel alapján létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy az $(u(e_{\sigma(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat konvergens E-ben. Ekkor a $(\lambda e_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat is konvergens E-ben, tehát $|\lambda| = \|u\| \neq 0$ miatt van olyan $e \in E$, hogy $e = \lim\limits_{k \to \infty} e_{\sigma(k)}$. Az u operátor folytonossága alapján $u(e) = \lim\limits_{k \to \infty} u(e_{\sigma(k)}) = \lim\limits_{k \to \infty} \big(\lambda e_{\sigma(k)} - (\lambda e_{\sigma(k)} - u(e_{\sigma(k)}))\big) = \lambda e$. Ugyanakkor $\|e\| = 1$, tehát λ sajátértéke u-nak, ezért $|(u(e)|e)| = |\lambda| = \|u\|$ is teljesül.

d) Először megjegyezzük, hogy ha $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus kompakt operátor és $H \subseteq E$ olyan zárt lineáris altér, hogy $u\langle H \rangle \subseteq H$, akkor $u|_H \in \mathscr{L}(H)$ is formálisan szimmetrikus és kompakt operátor. Valóban, az $u|_H$ operátor formális szimmetrikussága nyilvánvaló, és ha V olyan környezete a $0 \in E$ vektornak, hogy

$u\langle V\rangle$ relatív kompakt E-ben, akkor a $V\cap H$ halmaz olyan környezete H-ban a 0-nak, hogy $u\langle V\cap H\rangle \subseteq \overline{u\langle V\rangle}\cap H$ és $\overline{u\langle V\rangle}$ kompakt E-ben és H zárt E-ben, így $\overline{u\langle V\rangle}\cap H$ kompakt E-ben és része H-nak, tehát kompakt a H normált altérben is, így $(u|_H)\langle V\cap H\rangle = u\langle V\cap H\rangle$ relatív kompakt H-ban, vagyis $u|_H \in \mathscr{L}(H)$ kompakt operátor.

Megjegyezzük továbbá azt, hogy ha $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus operátor, akkor $Im(u) \subseteq (Ker(u))^\perp$, hiszen $x \in E$ és $y \in Ker(u)$ esetén $(u(x)|y) = (x|u(y)) = 0$, vagyis minden $E \ni x$-re $u(x) \in (Ker(u))^\perp$.

Legyen most $u \in \mathscr{L}(E)$ formálisan szimmetrikus kompakt operátor és $Im(u)$ végtelen dimenziós altér E-ben. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat létezését E-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|(u(e_n)|e_n)| = \|u|_{E_n}\|$, ahol $E_n := \{e_k|k \in n\}^\perp$.

Az u operátor formálisan szimmetrikus, kompakt és nem nulla, ezért a c) alapján van olyan $e_0 \in E$, hogy $\|e_0\| = 1$ és $|(u(e_0)|e_0)| = \|u\|$. Természetesen $E_0 = \emptyset^\perp = E$, vagyis $\|u\| = \|u|_{E_0}\|$.

Legyen most $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy $(e_k)_{k\in n}$ olyan ortonormált rendszer E-ben, amelyre minden $k \in n$ esetén $|(u(e_k)|e_k)| = \|u|_{E_k}\|$ teljesül, ahol $E_k := \{e_j|j \in \mathbb{N}\}^\perp$. Legyen $E_n := \{e_k|k \in n\}^\perp$; ekkor $u\langle E_n\rangle \subseteq E_n$ és $u|_{E_n} \neq 0$, különben $E_n \subseteq Ker(u)$, azaz $Im(u) \subseteq (Ker(u))^\perp \subseteq E_n\perp = \bigoplus\limits_{k\in n} \mathbb{K}e_k$ teljesülne, tehát $dim(Im(u)) \leq n$ volna, holott $Im(u)$ végtelen dimenziós altér E-ben. Ugyanakkor $u|_{E_n}$ kompakt és formálisan szimmetrikus operátor, ezért c)-t alkalmazva $u|_{E_n}$-re kapjuk olyan $e_n \in E_n$ vektor létezését, hogy $\|e_n\| = 1$ és $|((u|_{E_n})(e_n)|e_n)| = \|u|_{E_n}\|$, vagyis $|(u(e_n)|e_n)| = \|u|_{E_n}\|$. Ekkor $(e_k)_{k\in n+1}$ olyan ortonormált rendszer E-ben, hogy minden $k \in n+1$ esetén $|(u(e_k)|e_k)| = \|u|_{E_k}\|$ teljesül, ahol minden $n+1 \ni k$-ra $E_k := \{e_j|j \in k\}^\perp$.

Legyen tehát $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan ortonormált sorozat E-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|(u(e_n)|e_n)| = \|u|_{E_n}\|$, ahol $E_n := \{e_k|k \in n\}^\perp$. A b) alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re e_n sajátvektora $u|_{E_n}$-nek, így u-nak is, és a hozzá tartozó sajátérték az $(u(e_n)|e_n)$ valós szám. Nyilvánvaló, hogy az $(\|u|_{E_n}\|)_{n\in|N}$ valós számsorozat monoton fogyó, hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $E_{n+1} \subseteq E_n$. Állítjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|u|_{E_n}\| = 0$. Ha ugyanis nem így volna, akkor létezne olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|u|_{E_n}\| \geq c$. Tehát ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x := \dfrac{e_n}{\|u|_{E_n}\|}$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos volna E-ben, így az u kompaktsága miatt az $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezne konvergens részsorozata. De minden $\mathbb{N} \ni n$-re fennáll az

$$u(x_n) = \frac{e_n}{\|u|_{E_n}\|} = \frac{(u(e_n)|e_n)e_n}{|(u(e_n)|e_n)|} = \varepsilon_n e_n,$$

összefüggés, ahol $\varepsilon_n := \operatorname{sign}((u(e_n)|e_n))$. Ezért $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \neq n$ esetén $\|u(x_m) - u(x_n)\|^2 = \|\varepsilon_m e_m - \varepsilon_n e_n\|^2 = 2$, így az $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak még Cauchy-részsorozata sem létezik, ami ellentmondás.

Ha most $x \in E$ tetszőleges, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x - \sum\limits_{k\in n}(x|e_k)e_k \in \{e_k|k \in n\}^\perp = E_n$, így

$$\left\| u(x) - \sum_{k\in n}(x|e_k)(u(e_k)|e_k)e_k \right\| = \left\| u\left(x - \sum_{k\in n}(x|e_k)e_k\right)\right\| \leq$$

$$\leq \|u|_{E_n}\| \left\| x - \sum_{k \in n} (x|e_k)e_k \right\| \leq \|u|_{E_n}\| \|x\|,$$

hiszen az $(e_k)_{k \in n}$ rendszer ortonormáltsága folytán nyilvánvalóan

$$\left\| x - \sum_{k \in n} (x|e_k)e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k \in n} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ezért $x \in E$ esetén $\lim\limits_{n \to \infty} \|u|_{E_n}\| = 0$ miatt a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (x|e_k)(u(e_k)|e_k)e_k$ sor konvergens E-ben, és $u(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (x|e_k)(u(e_k)|e_k)e_k$.)

5. Legyen E Hilbert-tér és F prehilbert-tér. Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$ olyan operátor, hogy $u^* \circ u$ teljesen folytonos, akkor u is teljesen folytonos. Ha F is Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ teljesen folytonos operátor, akkor $u^* \in \mathscr{L}(F; E)$ is teljesen folytonos operátor.

(*Útmutatás.* Tegyük fel, hogy az $u^* \circ u \in \mathscr{L}(E)$ operátor teljesen folytonos. Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos sorozat E-ben és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|x_n\| \leq C$. A XII. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlat b) része szerint létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $((u^* \circ u)(x_{\sigma(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben. Ha $j, k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|u(x_{\sigma(j)}) - u(x_{\sigma(k)})\|^2 = ((u^* \circ u)(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(k)})|x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(k)}) =$$

$$= |((u^* \circ u)(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(k)})|x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(k)})| \leq$$

$$\leq \|(u^* \circ u)(x_{\sigma(j)}) - (u^* \circ u)(x_{\sigma(k)})\| \|x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(k)}\| \leq$$

$$\leq 2C \|(u^* \circ u)(x_{\sigma(j)}) - (u^* \circ u)(x_{\sigma(k)})\|,$$

amiből látható, hogy $(u(x_{\sigma(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben. Ebből a XII. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlat b) része alapján kapjuk, hogy u is teljesen folytonos operátor.

Ha F teljes és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ teljesen folytonos operátor, akkor XII. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlat c) része szerint $u \circ u^* \in \mathscr{L}(F)$ is teljesen folytonos, és ez az operátor egyenlő az $(u^*)^* \circ u^*$ operátorral. Az előző állítást alkalmazva u helyett az u^* operátorra (E-t és F-t felcserélve) kapjuk, hogy u^* is teljesen folytonos.)

6. Legyen E Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) $u \in \mathbf{GL}(E)$ pontosan akkor teljesül, ha $u^* \in \mathbf{GL}(E)$. Ha $u \in \mathbf{GL}(E)$, akkor $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

b) $Sp(u^*) = \{\overline{\lambda} | \lambda \in Sp(u)\}$.

c) Ha u normális, akkor $Sp_s(u^*) = \{\overline{\lambda} | \lambda \in Sp_s(u)\}$, továbbá $\lambda \in Sp_s(u)$ esetén az $E_\lambda(u)$ és $E_{\overline{\lambda}}(u^*)$ sajátalterek megegyeznek. Ha u nem normális, akkor lehetséges az, hogy $Sp_s(u^*) \neq \{\overline{\lambda} | \lambda \in Sp_s(u)\}$.

d) Ha u normális és $\lambda, \lambda' \in Sp_s(u)$ olyanok, hogy $\lambda \neq \lambda'$, akkor az $E_\lambda(u)$ és $E_{\lambda'}(u)$ sajátalterek ortogonálisak egymásra.

e) Ha E szeparábilis és végtelen dimenziós, továbbá u teljesen folytonos önadjungált operátor, akkor létezik E-ben olyan ortonormált bázissorozat, amelynek minden tagja sajátvektora u-nak.

(*Útmutatás.* a) Ha $u \in \mathbf{GL}(E)$, akkor az $u \circ u^{-1} = id_E = u^{-1} \circ u$ egyenlőségből $(u^{-1})^* \circ u^* = id_E = u^* \circ (u^{-1})^*$ következik.

b) Ha $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\lambda \notin Sp(u)$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda id_E - u \in \mathbf{GL}(E)$, vagyis az a) alapján azzal, hogy $\overline{\lambda} id_E - u^* \in \mathbf{GL}(E)$. Ezért $\mathbb{K} \setminus Sp(u^*) = \mathbb{K} \setminus \{\overline{\lambda} | \lambda \in Sp(u)\}$ teljesül.

c) Legyen $|\lambda \in Sp_s(u)$ és $x \in E \setminus \{0\}$ olyan, hogy $u(x) = \lambda x$. Ekkor az u normálisságát kihasználva a **3**. gyakorlat alapján kapjuk, hogy

$$\|\overline{\lambda}x - u^*(x)\|^2 = |\overline{\lambda}|^2 \|x\|^2 + \|u^*(x)\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{\lambda}(x|u^*(x))) =$$

$$= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|u(x)\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{\lambda}(u(x)|x)) = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|\lambda x\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\overline{\lambda}(\lambda x|x)) = 0,$$

tehát $u^*(x) = \overline{\lambda}x$. Ez azt jelenti, hogy $\{\overline{\lambda} | \lambda \in Sp_s(u)\} \subseteq Sp_s(u^*)$, és $\lambda \in Sp_s(u)$ esetén $E_\lambda(u) \subseteq E_{\overline{\lambda}}(u^*)$. Ebből az u helyére u^*-t téve kapjuk, hogy $\{\overline{\lambda} | \lambda \in Sp_s(u^*)\} \subseteq Sp_s((u^*)^*) = Sp_s(u)$, és $\lambda \in Sp_s(u^*)$ esetén $E_\lambda(u^*) \subseteq E_{\overline{\lambda}}((u^*)^*) = E_{\overline{\lambda}}(u)$.

Tekintsük az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozatteret a $\| \cdot \|_2$ normával ellátva. Legyen $u : l^2_{\mathbb{K}} \to l^2_{\mathbb{K}}$ az a leképezés, amelyre $\boldsymbol{s} \in l^2_{\mathbb{K}}$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(u(\boldsymbol{s}))(n) := \boldsymbol{s}(n+1)$. Ekkor $u \in \mathscr{L}(l^2_{\mathbb{K}})$ és könnyen látható, hogy $u^* : l^2_{\mathbb{K}} \to l^2_{\mathbb{K}}$ az a leképezés, amelyre $\boldsymbol{s} \in l^2_{\mathbb{K}}$ esetén $(u^*(\boldsymbol{s}))(0) := 0$ és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $(u(\boldsymbol{s}))(n) := \boldsymbol{s}(n-1)$. Ekkor $u \circ u^* = id_{l^2_{\mathbb{K}}}$, míg $(u^* \circ u)(\mathbf{e}_0) = 0$, ahol $\mathbf{e}_0$ az a számsorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_0(n) := \delta_{0,n}$. Ezért u nem normális operátor, és $0 \in Sp_s(u)$, hiszen $u(\mathbf{e}_0) = 0$, azonban $0 \notin Sp(u^*)$, hiszen u^* injektív operátor (sőt izometria).

d) Legyenek $\lambda, \lambda' \in Sp_s(u)$ és $x, x' \in E$ olyanok, hogy $u(x) = \lambda x$ és $u(x') = \lambda' x'$. A c) szerint $u^*(x) = \overline{\lambda}x$, ezért

$$\lambda'(x'|x) = (\lambda' x'|x) = (u(x')|x) = (x'|u^*(x)) = (x'|\overline{\lambda}x) = \lambda(x'|x),$$

tehát $(\lambda' - \lambda)(x'|x) = 0$, így $\lambda \neq \lambda'$ esetén $(x'|x) = 0$.

e) Legyen E szeparábilis és végtelen dimenziós Hilbert-tér, továbbá $u \in \mathscr{L}(E)$ teljesen folytonos önadjungált operátor. A XII. fejezet, 1. pont, **18**. gyakorlat szerint $Sp(u)$ megszámlálható halmaz, és $\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$ esetén λ sajátértéke u-nak, továbbá az $E_\lambda(u)$ sajátaltér véges dimenziós. Minden $\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}$ esetén legyen $n_\lambda := dim(E_\lambda(u))$, továbbá legyen $(e_{\lambda,i})_{i \in n_\lambda}$ ortonormált bázis $E_\lambda(u)$-ban. Jelölje H az $\{e_{\lambda,i} | (\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}) \wedge (i \in n_\lambda)\}$ halmaz által generált zárt lineáris alteret E-ben. Világos, hogy

$$\{e_{\lambda,i} | (\lambda \in Sp(u) \setminus \{0\}) \wedge (i \in n_\lambda)\} \subseteq Im(u) \subseteq \overline{Im(u)} = (Im(u))^{\perp\perp} =$$

$$= (Ker(u^*))^\perp = (Ker(u))^\perp.$$

Ebből következik, hogy $H \subseteq (Ker(u))^\perp$. Ha $Im(u)$ végtelen dimenziós, akkor a **4**. gyakorlat d) pontja szerint $Im(u) \subseteq H$, ezért $(Ker(u))^\perp = \overline{Im(u)} \subseteq H$, vagyis $H = (Ker(u))^\perp$ teljesül. Ezért a Riesz-féle felbontási tétel alapján $E = Ker(u) \oplus (Ker(u))^\perp = Ker(u) \oplus H$. Ha most $Ker(u) = \{0\}$ (vagyis u

injektív operátor), akkor $E = H$, így $(e_{\lambda,i})_{\lambda \in Sp(u)\setminus\{0\},\ i\in n_\lambda}$ olyan ortonormált rendszer, amelynek létezését állítottuk. (Itt megjegyezzük, hogy szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-térben létezik *injektív* teljesen folytonos operátor, amit majd a XII. fejezet, 8. pont, **3**. gyakorlatban fogunk igazolni.) Ha viszont $Ker(u) \neq \{0\}$, akkor a 0 szám sajátértéke u-nak és $E_0(u) = Ker(u)$. Ebben az esetben a $Ker(u)$ normált altér szeparábilis Hilbert-tér (ugyanis szeparábilis metrikus tér metrikus alterének szeparabilitása nyilvánvalóan következik az V. fejezet, 3. pontjának utolsó állításából), ezért a 6. pont utolsó állítása alapján van olyan A megszámlálható (esetleg véges) halmaz és olyan $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ ortonormált rendszer $Ker(u)$-ban, amely ortonormált bázis a Ker(u) Hilbert-altérben. Ekkor az $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(e_{\lambda,i})_{\lambda \in Sp(u)\setminus\{0\},\ i\in n_\lambda}$ rendszerekből könnyen előállítható E-ben ortonormált bázis (elég "összefűzni" ezeket a rendszereket); és ennek a rendszernek minden tagja sajátvektora u-nak.)

7. a) Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktéktér, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, és $f : T \to F$ θ-mérhető függvény. Ha minden $u \in F'$ funkcionálra a $u \circ f : T \to \mathbb{K}$ függvény θ-eltűnő (ilyenkor azt mondjuk, hogy az f függvény *skalárisan θ-eltűnő*), akkor az f függvény θ-eltűnő. Mutassuk meg, hogy ha az $f : T \to F$ függvény nem θ-mérhető, akkor lehetséges az, hogy f skalárisan θ-eltűnő, de nem θ-eltűnő.

b) (*du-Bois-Reymond lemma.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\theta : \mathscr{R}_n \to \mathbb{K}$ tetszőleges mérték. Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan függvény, hogy minden $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ kompakt tartójú C^∞-osztályú függvényre $f\varphi \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$ és $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \, d\theta = 0$, akkor az f függvény θ-eltűnő.

(**Megjegyzés**. Látni fogjuk, hogy a du-Bois-Reymond lemma viszonylag könynyen következik az a) állításból. A du-Bois-Reymond lemmára a *Fourier-féle inverziós tétel* bizonyításában lesz szükségünk (**8**. gyakorlat h) pontja). Az a) állítás bizonyításában felhasználunk egy olyan tételt, amelyet csak később, a XIV. fejezetben igazolunk. Természetesen a XIV. fejezet eredményeinek származtatásához sem az a) állítást, sem annak következményeit nem használjuk fel.)

(*Útmutatás.* a) Az f függvény θ-mérhetősége miatt létezik olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$-ben, hogy $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ a T halmazon θ-majdnem-mindenütt. Ekkor van olyan $N \subseteq T$ θ-nullhalmaz, hogy $f\langle T \setminus N\rangle \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Im(f_k)}$. Jelölje F_0 az $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Im(f_k)$ megszámlálható halmaz által generált zárt lineáris alteret F-ben. Ekkor F_0 szeparábilis Banach-tér és $Im(\chi_{T\setminus N} f) \subseteq F_0$. A XIV. fejezetben majd igazoljuk, hogy ha E szeparábilis normált tér, akkor létezik olyan $H \subseteq E'$ megszámlálható halmaz, hogy minden $z_1, z_2 \in E$ esetén, ha $z_1 \neq z_2$, akkor létezik $u \in H$ úgy, hogy $u(z_1) \neq u(z_2)$; vagyis a H funkcionál-halmaz szétválasztó E felett. (Itt megjegyezzük, hogy ha E véges dimenziós, vagy szeparábilis *Hilbert-tér*, akkor ilyen H létezése azonnal következik abból, hogy E' is szeparábilis a funkcionálnorma szerint.) Tehát az F_0-hoz vehetünk olyan $H \subseteq F_0'$ megszámlálható halmazt, amely szétválasztó F_0 felett. Minden $u \in H$ esetén a Hahn-Banach-tétel alapján $\{\tilde{u} \in F' | u \subseteq \tilde{u}\} \neq \emptyset$, ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk egy $\tau \in \prod_{u\in H} \{\tilde{u} \in F' | u \subseteq \tilde{u}\}$ kiválasztó függvényt. Ekkor $\tilde{H} := Im(\tau) \subseteq F'$ olyan megszámlálható halmaz, amely szétválasztó F_0 felett (de lehet, hogy $\tilde{H}$

nem szétválasztó F felett, mert előfordulhat, hogy F nem szeparábilis). Ekkor $Im(\chi_{T\setminus N} f) \subseteq F_0$ miatt

$$(T \setminus N) \cap \{t \in T | f(t) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{\tilde{u} \in \tilde{H}} \{t \in T | (\tilde{u} \circ f)(t) \neq 0\},$$

és itt a jobb oldalon θ-nullhalmaz áll, ha f skalárisan θ-eltűnő. Ugyanakkor

$$\{t \in T | f(t) \neq 0\} = ((T \setminus N) \cap \{t \in T | f(t) \neq 0\}) \cup (N \cap \{t \in T | f(t) \neq 0\}),$$

ezért ha f skalárisan θ-eltűnő, akkor $\{t \in T | f(t) \neq 0\}$ is θ-nullhalmaz, így az f függvény θ-eltűnő. (Megjegyezzük, hogy az f függvény θ-mérhetősége helyett elég lett volna azt fetenni, hogy létezik olyan $S \subseteq F$ megszámlálható halmaz, és olyan $N \subseteq T$ θ-nullhalmaz, hogy $f\langle T \setminus N\rangle$ részhalmaza az S által generált F-beli zárt lineáris altérnek.)

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $(T, \mathscr{R}, \theta)$ $\mathbb{K}$-mértéktér, F Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett és olyan $f : T \to \mathbb{K}$ függvény, amely skalárisan θ-eltűnő, de nem θ-eltűnő (és akkor f szükségképpen nem θ-mérhető). Ehhez jelölje $\mathscr{R}$ az $\mathbb{R}$ véges részhalmazainak halmazgyűrűjét, legyen $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ a számláló mérték, és jelölje F az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}, \mu)$ Hilbert-teret (XII. fejezet, 6. pont, **12**. gyakorlat). Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén legyen $e_t \in F$ az a függvény, amelyre minden $\mathbb{R} \ni s$-re $e_t(s) := \delta_{s,t}$; ekkor $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ortonormált bázis az F Hilbert-térben. Tekintsük az $(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \mu_{\mathbb{R}})$ mértékteret, és értelmezzük az $f : \mathbb{R} \to F;\ t \mapsto e_t$ függvényt. Ha $u \in F'$, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik az a $g_u \in F$ függvény, amelyre minden $F \ni h$-ra $(h|g_u) = u(h)$, ahol $(\cdot|\cdot)$ az F Hilbert-tér skalárszorzása. Tehát $u \in F'$ esetén minden $\mathbb{R} \ni t$-re $(u \circ f)(t) = u(e_t) = (e_t|g_u) = \overline{g_u(t)}$, vagyis $\overline{g_u} = u \circ f$. De a XII. fejezet, 6. pont, **9**. gyakorlat szerint minden $F' \ni u$-ra az $((e_t|g_u))_{t\in\mathbb{R}}$ rendszer szummálható $\mathbb{C}$-ben, így a XII. fejezet, 6. pont, **8**. gyakorlat c) része alapján a $\{t \in \mathbb{R} | (e_t|g_u) \neq 0\}$ halmaz megszámlálható, tehát $\mu_{\mathbb{R}}$-nullhalmaz. Ez azt jelenti, hogy minden $F' \ni u$-ra az $u \circ f$ függvény $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő, vagyis f skalárisan $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő, ugyanakkor minden $\mathbb{R} \ni t$-re $f(t) := e_t \neq 0$, vagyis f nem $\mu_{\mathbb{R}}$-eltűnő.

b) Jelölje $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ kompakt tartójú C^∞-osztályú függvények terét. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$ olyan függvény, hogy minden $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ esetén $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, d\theta = 0$, akkor az f függvény θ-eltűnő. Ehhez elég azt igazolni, hogy az adott feltevések mellett minden $E \in \mathscr{R}_n$ halmazra $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_E\, d\theta = 0$, hiszen ha ez igaz, akkor minden $\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n)$ esetén $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\psi\, d\theta = 0$, következésképpen a IX. fejezet, 6. pont, **3**. gyakorlat szerint

$$\int^* |f|\ d|\theta| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|\ d|\theta| = \sup_{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n),\ |\psi| \leq 1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\psi\ d\theta \right| = 0,$$

így az f függvény θ-eltűnő. Legyen tehát $E \in \mathscr{R}_n$ rögzített halmaz. A sima függvényekkel p-edik hatványon való approximáció tételének bioznyításában (X. fejezet, 3. pont) láttuk, hogy létezik olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $0 \le \varphi_k \le 1$ és $\chi_E = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$. Ekkor $f\chi_E = \lim_{k\to\infty} (f\varphi_k)$, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $|f\varphi_k| \le |f|$, és természetesen $\int^* |f|\, d|\theta| < +\infty$. Tehát a Lebesgue-tétel és az f-re vonatkozó hipotézis alapján $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_E\, d\theta = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi_k\, d\theta = 0.$

Legyen most F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $f : f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan függvény, hogy minden $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{K})$ esetén $f\varphi \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$ és $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, d\theta = 0$. Legyen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$-ban, hogy $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = 1$. Legyenek $u \in F'$ és $k \in \mathbb{N}$ rögzítettek. Ekkor $f\varphi_k \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, tehát az integrál linearitása folytán $u \circ (f\varphi_k) \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, és minden $C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{K}) \ni \varphi$-re $(f\varphi_k)\varphi = f(\varphi_k\varphi) \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, így $(u \circ (f\varphi_k))\varphi = u \circ (f(\varphi_k\varphi)) \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, és fennáll az

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u \circ (f\varphi_k))\varphi\, d\theta = u\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f\varphi_k)\varphi\ \theta\right) = 0$$

egyenlőség. Ebből az előzőek alapján kapjuk, hogy az $u \circ (f\varphi_k)$ függvény θ-eltűnő. Tehát ha $u \in F'$, akkor $f = \lim_{k\to\infty} (f\varphi_k)$ miatt $u \circ f = \lim_{k\to\infty} (u \circ (f\varphi_k))$, következésképpen

$$\{x \in \mathbb{R}^n | (u \circ f)(x) \ne 0\} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n | (u \circ (f\varphi_k))(x) \ne 0\},$$

és itt a jobb oldalon az előzőek szerint θ-nullhalmaz áll, vagyis az f-re vonatkozó feltételből következik, hogy minden $F' \ni u$-ra az $u \circ f$ függvény θ-eltűnő, így az f függvény skalárisan θ-eltűnő. De $f = \lim_{k\to\infty} (f\varphi_k)$, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f\varphi_k \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \theta)$, tehát az $f\varphi_k$ függvény θ-mérhető, és θ-mérhető függvények pontonkénti limeszfüggvénye is θ-mérhető (IX. fejezet, 8. pont, **3**. gyakorlat), ezért az f függvény is θ-mérhető. Ebből az a) alapján kapjuk, hogy az f függvény θ-eltűnő.)

8. (*Klasszikus Fourier-transzformáció.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzített, és minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén vezessük be a

$$\chi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto e^{i(p|x)}$$

függvényt, ahol $(\cdot|\cdot)$ az $\mathbb{R}^n$ feletti euklidészi skalárszorzás. Legyen továbbá F rögzített komplex Banach-tér.

a) Ha $f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor minden $\mathbb{R}^n \ni p$-re $f\chi_p, f\chi_{-p} \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és az

$$\mathscr{F} f : \mathbb{R}^n \to F; \quad p \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p}\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(p|x)} d\mu_n(x),$$

$$\overline{\mathscr{F}} f : \mathbb{R}^n \to F; \quad p \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_p\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(p|x)} d\mu_n(x),$$

függvények folytonosak, végtelenben eltűnők, továbbá

$$|||\mathscr{F}f||| \leq \|f\|_{\mu_n,1}, \quad |||\overline{\mathscr{F}}f||| \leq \|f\|_{\mu_n,1}$$

teljesül, ahol $|||\cdot|||$ a sup-normát jelöli az $\mathbb{R}^n \to F$ korlátos függvények terén. Az $\mathscr{F}f$ (illetve $\overline{\mathscr{F}}f$) függvényt az f *Fourier-transzformáltjának* (illetve *konjugált Fourier-transzformáltjának*) nevezzük.

b) Minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto x - a$. Továbbá, jelölje $i_{\mathbb{R}^n}$ az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto -x$ leképezést. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor minden $q \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\mathscr{F}(\chi_a f) = (\mathscr{F}f) \circ \tau_a, \quad \mathscr{F}(f \circ \tau_a) = \chi_{-a}\mathscr{F}f,$$

$$\overline{\mathscr{F}}(\chi_a f) = (\overline{\mathscr{F}}f) \circ \tau_{-a}, \quad \overline{\mathscr{F}}(f \circ \tau_a) = \chi_a\overline{\mathscr{F}}f,$$

$$\mathscr{F}(f \circ i_{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathscr{F}}f, \quad \overline{\mathscr{F}}(f \circ i_{\mathbb{R}^n}) = \mathscr{F}f.$$

c) Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor

$$f(\mathscr{F}g),\ (\mathscr{F}f)g,\ f(\overline{\mathscr{F}}g),\ (\overline{\mathscr{F}}f)g \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n),$$

továbbá

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}g)\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)g\, d\mu_n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(\overline{\mathscr{F}}g)\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}}f)g\, d\mu_n.$$

d) Tekintsük a következő függvényt

$$\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right),$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklidészi norma $\mathbb{R}^n$ felett. Ekkor $\Psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $\mathscr{F}\Psi = \Psi$, valamint

$$\Psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}\Psi\, d\mu_n.$$

e) Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ olyan függvény, hogy $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ (illetve $\overline{\mathscr{F}}f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$). Ekkor $\overline{\mathscr{F}}f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ (illetve $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$) is teljesül, és a következő állítások ekvivalensek.

(i) $f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)$, vagyis minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{-i(p|x')} d\mu_n(x') \right) e^{i(p|x)} d\mu_n(p)$$

teljesül (*Fourier-féle inverziós formula*).

(i)′ $f = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f)$, vagyis minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x') e^{i(p|x')} d\mu_n(x') \right) e^{-i(p|x)} d\mu_n(p)$$

teljesül (*Fourier-féle inverziós formula*).

(ii) f folytonos és végtelenben eltűnő.

(iii) f folytonos és korlátos.

f) Ha F komplex *Hilbert-tér*, $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és $g : \mathbb{R}^n \to F$ olyan folytonos korlátos függvény, hogy $g \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $\mathscr{F} g \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor az

$$\begin{aligned} (f|g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad & x \mapsto (f(x)|g(x)), \\ (\mathscr{F} f|\mathscr{F} g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad & p \mapsto ((\mathscr{F} f)(p)|(\mathscr{F} g)(p)), \\ (\overline{\mathscr{F}} f|\overline{\mathscr{F}} g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad & p \mapsto ((\overline{\mathscr{F}} f)(p)|(\overline{\mathscr{F}} g)(p)) \end{aligned}$$

függvények μ_n-integrálhatók és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f|g)\ d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f|\mathscr{F} g)\ d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}} f|\overline{\mathscr{F}} g)\ d\mu_n$$

teljesül (*Parseval-formula*).

g) Legyen $r \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan r-szer folytonosan differenciálható függvény, hogy minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre, $|\alpha|_1 := \sum\limits_{k \in n} \alpha(k) \le r$ esetén $\partial^\alpha f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és ∂^α végtelenben eltűnő függvény. (A $\partial^\alpha f$ parciális deriváltfüggvények értelmezése megtalálható a VII. fejezet, 3. pontjának, **3**. gyakorlatában.) Ekkor minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre, ha $|\alpha|_1 \le r$ és $p \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$(\mathscr{F}(\partial^\alpha f))(p) = i^{|\alpha|_1} p^\alpha (\mathscr{F} f)(p),$$

ahol $p^\alpha := \prod\limits_{k \in n} p_k^{\alpha(k)}$. Ebből bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \to F$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvény, akkor minden $q \in [1, \to [$ valós számra $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}^q_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f) = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}} f)$ teljesül.

h) (*Fourier-féle inverziós tétel.*) Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ olyan függvény, hogy $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor $\overline{\mathscr{F}} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és

$$f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f) = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}} f)$$

teljesül $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt.

i) (*Plancherel-tétel.*) Legyen F komplex Hilbert-tér. Egyértelműen léteznek olyan

$$\mathbb{F},\ \overline{\mathbb{F}}\ :\ L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \to L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$$

unitér operátorok, amelyekre minden $f : \mathbb{R}^n \to F$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvény esetében $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathscr{F} f)^\bullet$ és $\overline{\mathbb{F}}(f^\bullet) = (\overline{\mathscr{F}} f)^\bullet$ teljesül. (Az $\mathbb{F}$ unitér operátort az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-tér feletti *Fourier-transzformációnak* nevezzük.)

j) Legyen F komplex Hilbert-tér. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \cap \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathscr{F} f)^\bullet$. Ha $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_k \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, $0 \le \varphi_k \le 1$, *supp*(φ_k) kompakt és $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = 1$ az $\mathbb{R}^n$ halmazon, akkor minden $f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f\varphi_k \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \cap \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és az $(\mathscr{F}(f\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint és

$$\mathbb{F}(f^\bullet) = \lim_{k\to\infty} (\mathscr{F}(f\varphi_k))^\bullet$$

teljesül az $\mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térben a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ norma szerint. Fennáll az $\mathbb{F}^{-1} = \overline{\mathbb{F}}$ egyenlőség.

(**Megjegyzések**. 1) Ha F komplex Hilbert-tér és $f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor az $\mathscr{F} f$ függvényt *nem értelmeztük*, hiszen ekkor lehetséges az, hogy $f \notin \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és *minden* $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $f\chi_{-p} \notin \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, így a $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p}\, d\mu_n$ szimbólum *egyetlen* $p \in \mathbb{R}^n$ *pontra sem értelmes*. Azonban az i) alapján ekkor is jól értelmezett az $\mathbb{F}(f^\bullet) \in L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ elem, és ha $g \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ olyan függvény, hogy $g^\bullet = \mathbb{F}(f^\bullet)$, akkor a g függvényt nevezhetjük az f függvény Fourier-transzformáltjának. De vigyázzunk arra, hogy g nincs egyértelműen meghatározva (hanem csak μ_n-majdnem mindenütt), ezért nincs értelme az f Fourier-transzformáltjának *adott pontbeli értékéről* beszélni.

2) Ha $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az $\mathbb{R}^n$ relatív kompakt μ_n-integrálható részhalmazainak olyan monoton növő sorozata, hogy $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$, akkor a $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\chi_{E_k})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat eleget tesz a j)-ben megfogalmazott feltételeknek. (Konkrét példa: minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $E_k := [-k, k[^n$.) Ha $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, $C_k \subseteq Int(C_{k+1})$ és $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} C_k$, akkor Dieudonné-féle egységosztás-tétel alapján kiválasztható olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú függvény, $0 \le \varphi_k \le 1$, $C_k \subseteq [\varphi_k = 1]$ és $supp(\varphi_k) \subseteq Int(C_{k+1})$. Ekkor a $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra szintén teljesülnek a j)-ben megfogalmazott feltételek. Ezek az állítások azt mutatják, hogy *léteznek* olyan $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatok, amelyek eleget tesznek a j)-ben megkövetelt feltételeknek.

3) Ha F komplex Hilbert-tér, $f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\varphi_k \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, $0 \le \varphi_k \le 1$, $supp(\varphi_k)$ kompakt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = 1$ az $\mathbb{R}^n$ halmazon, akkor a j) szerint az $(\mathscr{F}(f\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, és $\mathbb{F}(f^\bullet) = \lim_{k\to\infty} (\mathscr{F}(f\varphi_k))^\bullet$ teljesül az $\mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térben a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ norma szerint. Azonban az $(\mathscr{F}(f\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *nem feltétlenül konvergens pontonként* $\mathbb{R}^n$-en. A Riesz-Fischer-tétel alapján csak annyit állíthatunk, hogy ennek a függvénysorozatnak van olyan részsorozata, amely μ_n-majdnem mindenütt konvergens $\mathbb{R}^n$-en.

4) Ebben a gyakorlatban a *klasszikus Fourier-transzformációról* van szó. Ennek létezik általánosítása arra az esetre, amikor az euklidészi topológiával és az összeadással ellátott $\mathbb{R}^n$ additív csoport helyére tetszőleges *kommutatív lokálisan kompakt csoportot* teszünk. A Fourier-transzformáció ilyen irányú (”*nemklasszikus*”) általánosításáról a XVII. fejezet 8. pontjában, a harmonikus analízisben lesz szó. Az $\mathbb{R}^n$ additív csoportjával kapcsolatos klasszikus Fourier-transzformációnak

létezik más irányú általánosítása is; bevezethetők a *gyorsan fogyó alapfüggvények*, a *csillapított disztribúciók*, és a csillapított disztribúciók terén természetes módon értelmezhető egy olyan lineáris operátor, amely a klasszikus Fourier-transzformáció (bizonyos értelmű) kiterjesztése.)

(*Útmutatás.* a) Legyen $f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Ha $p \in \mathbb{R}^n$, akkor a χ_p és $\overline{\chi}_p$ függvények μ_n-mérhetők (mert folytonosak), ezért $f\chi_p$ és $f\overline{\chi}_p$ mindketten μ_n-mérhetők, továbbá a norma-függvényüket $\|f\|$ majorálja, amelyre $\int^* \|f\| \, d\mu_n <$ $+\infty$, így az integrálhatóság kritériuma alapján $f\chi_p, f\overline{\chi}_p \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, vagyis az $\mathscr{F}f, \overline{\mathscr{F}}f : \mathbb{R}^n \to F$ függvények jól értelmezettek. Triviális az, hogy $\mathscr{F}f$ és $\overline{\mathscr{F}}f$ korlátosak és $|||\mathscr{F}f|||, |||\overline{\mathscr{F}}f||| \leq \|f\|_{\mu_n,1}$. Továbbá, a definícióból látható, hogy $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $(\overline{\mathscr{F}}f)(p) = (\mathscr{F}f)(-p)$, ezért az $\mathscr{F}f$ folytonosságából és végtelenben eltűnéséből következik az $\overline{\mathscr{F}}f$ folytonossága és végtelenben eltűnése.

Az $\mathscr{F}f$ függvény *folytonosságának* bizonyításához legyen $p \in \mathbb{R}^n$ rögzített és $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{R}^n$-ben, amely p-hez konvergál. Ekkor az $(f\chi_{-p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $f\chi_{-p}$-hez $\mathbb{R}^n$-en, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|f\chi_{-p_k}\| \leq \|f\|$ valamint $\int^* \|f\| \, d\mu_n < +\infty$, ezért a Lebesgue-tétel alapján $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p_k} \, d\mu_n =$ $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p} \, d\mu_n$, vagyis $\mathscr{F}f$ a p pontban folytonos.

Az $\mathscr{F}f$ függvény *végtelenben eltűnésének* bizonyításához először megmutatjuk, hogy minden $g \in \mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n \mathscr{R}_n)$ lépcsősfüggvényre az $\mathscr{F}g$ Fourier-transzformált végtelenben eltűnő. Valóban, a g lépcsősfüggvényhez létezik olyan $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges rendszer F-ben és olyan $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer $\mathscr{S}_n$-ben, hogy $g = \sum\limits_{\alpha\in A} \chi_{E_\alpha} z_\alpha$. Ekkor $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\mathscr{F}g)(p) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i(p|x)} \, d\mu_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{\alpha\in A} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_\alpha}(x) e^{-i(p|x)} \, d\mu_n(x) \right) z_\alpha = \sum_{\alpha\in A} (\mathscr{F}\chi_{E_\alpha})(p) z_\alpha,$$

ezért $\mathscr{F}g$ végtelenben eltűnő, ha minden $E \in \mathscr{S}_n$ esetén az $\mathscr{F}\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Fourier-transzformált végtelenben eltűnő. Ha $(a_k)_{k\in n}, (b_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n$ olyan rendszerek, hogy minden $n \ni k$-ra $a_k < b_k$, akkor az $E := \prod\limits_{k\in n} [a_k, b_k[\in \mathscr{S}_n$ halmazra a Lebesgue-Fubini-tétel, valamint a Newton-Leibniz-formula alkalmazásával könnyen kapható, hogy minden $p := (p_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n$ pontra

$$(\mathscr{F}\chi_E)(p) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) e^{-i(p|x)} \, d\mu_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k\in n} \int\limits_{a_k}^{b_k} e^{-ip_k x_k} \, d\mu_1(x_k) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i}{2}(p|a+b)}}{(2\pi)^{n/2}} \left(\prod_{k \in n} (b_k - a_k) \right) \left(\prod_{k \in n} \operatorname{sinc} \left(\frac{1}{2} p_k (b_k - a_k) \right) \right),$$

amiből látható, hogy az $\mathscr{F}\chi_E$ függvény végtelenben eltűnő $\mathbb{R}^n$ felett, mert a sinus cardinalis függvény végtelenben eltűnő $\mathbb{R}$ felett. Tehát minden $g \in \mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n \mathscr{R}_n)$ lépcsősfüggvényre az $\mathscr{F}g$ Fourier-transzformált végtelenben eltűnő. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ tetszőleges, akkor létezik olyan $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(\mathbb{R}^n \mathscr{R}_n)$-ben, amelyre $\lim\limits_{k \to \infty} \|f - f_k\|_{\mu,1} = 0$. Ekkor $\lim\limits_{k \to \infty} |||\mathscr{F}f - \mathscr{F}f_k||| = 0$ még inkább teljesül, tehát az $(\mathscr{F}f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $\mathscr{F}f$-hez $\mathbb{R}^n$-en, és láttuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-re $\mathscr{F}f_k$ végtelenben eltűnő, ezért $\mathscr{F}f$ is végtelenben eltűnő.

b) A bizonyítandó formulák egyszerű számolással kaphatók, felhasználva a Lebesgue-mérték szerinti integrál invariancia-tulajdonságait (X. fejezet, 3. pont) és a Fourier-transzformáció definícióját.

c) Legyenek $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Az a) alapján $\mathscr{F}g$ és $\mathscr{F}f$ korlátos folytonos függvények, ezért az integrálhatóság kritériuma szerint $f(\mathscr{F}g), (\mathscr{F}f)g \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Továbbá, az

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to F; \quad (x,p) \mapsto f(x)g(p)e^{-i(p|x)}$$

függvény $\mu_n \otimes \mu_n$-integrálható, hiszen a X. fejezet, 7. pont, **3**. gyakorlat szerint az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to F$; $(x,p) \mapsto f(x)g(p)$ függvény $\mu_n \otimes \mu_n$-integrálható, és az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to F$; $(x,p) \mapsto e^{-i(p|x)}$ függvény korlátos és folytonos (így $\mu_n \otimes \mu_n$-mérhető). Tehát a Lebesgue-Fubini-tétel alapján

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}g)\ d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathscr{F}g)(x)\ d\mu_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(p)e^{-i(x|p)}\ d\mu_n(p) \right) d\mu_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(p)e^{-i(p|x)}\ d(\mu_n \otimes \mu_n)(x,p) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(p|x)}\ d\mu_n(x) \right) g(p)\ d\mu_n(p) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(p)g(p)\ d\mu_n(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)g\ d\mu_n,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}g)\ d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)g\ d\mu_n.$$

Ezt az egyenlőséget felírhatjuk g helyett a $g \circ i_{\mathbb{R}^n} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ függvényre is, amiből a helyettesítéses integrálás tétele, valamint b) alapján kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\overline{\mathscr{F}} g)\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}(g \circ i_{\mathbb{R}^n}))\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f)(g \circ i_{\mathbb{R}^n})\, d\mu_n =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (((\mathscr{F} f) \circ i_{\mathbb{R}^n}) g) \circ i_{\mathbb{R}^n}\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} ((\mathscr{F} f) \circ i_{\mathbb{R}^n})\, g\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}} f) g\, d\mu_n,$$

amit bizonyítani kellett.

d) A X. fejezet, 3. pont, **4**. és **7**. gyakorlat szerint a Ψ függvény μ_n-integrálható, továbbá $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\mathscr{F}\Psi)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2 - i(p|x)}\, d\mu_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k \in n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2 - ip_k x_k}\, d\mu_1(x_k).$$

A XI. fejezet, 4. pont, **6**. gyakorlat szerint: ha $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $\beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 - i\beta x}\, d\mu_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Ebből a Ψ függvény Fourier-transzformáltjára azt kapjuk, hogy minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\mathscr{F}\Psi)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k \in n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2 - ip_k x_k}\, d\mu_1(x_k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k \in n} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}p_k^2} = e^{-\frac{1}{2}\|p\|^2} = \Psi(p).$$

Ebből az is látható, hogy

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}\Psi\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}\, d\mu_n(x) =$$

$$= (\mathscr{F}\Psi)(0) = \Psi(0) = 1,$$

amit bizonyítani kellett.

e) Az (i) és (i)$'$ állítások ekvivalenciája a b)-ben feírt harmadik formula-párosból azonnal következik. Az a) alapján egy integrálható függvény konjugált Fourier-transzformáltja szükségképpen folytonos és végtelenben eltűnő, ezért (i)$\Rightarrow$(ii) igaz, továbbá (ii)$\Rightarrow$(iii) triviális, ezért elég azt igazolni, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan folytonos és korlátos függvény, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor $f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f)$ teljesül.

Jelölje Ψ ugyanazt a függvényt, mint d)-ben, és minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük a

$$\Psi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \Psi\left(\frac{x}{k}\right)$$

függvényt. A helyettesítéses integrálás tétele alapján minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-ra $\Psi_k \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és a c) eredményeit alkalmazva kapjuk, hogy minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\mathscr{F}\Psi_k)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi_k(x) e^{-i(p|x)} \, d\mu_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{x}{k}\right) e^{-i(p|x)} \, d\mu_n(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) e^{-ik(p|x)} k^n \, d\mu_n(x) = k^n (\mathscr{F}\Psi_k)(kp).$$

Most adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén c)-t alkalmazzuk a $g := \Psi_k$ választással, és helyettesítéses integrálást hajtunk végre:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)\Psi_k \, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}\Psi_k) \, d\mu_n =$$

$$= k^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(p)(\mathscr{F}\Psi)(kp) \, d\mu_n(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{p}{k}\right) \Psi(p) \, d\mu_n(p).$$

A $(\Psi_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $\mathbb{R}^n$ halmazon a $\Psi(0)$ értékű konstansfüggvényhez, tehát $\lim\limits_{k\to\infty} \Psi_k = 1$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-ra $\|(\mathscr{F}f)\Psi_k\| \le \|\mathscr{F}f\|$ és a feltevés alapján $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, vagyis $\int^* \|\mathscr{F}f\| \, d\mu_n < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)\Psi_k \, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}f \, d\mu_n.$$

A feltevés szerint f folytonos, ezért minden $\mathbb{R}^n \ni p$-re $\lim\limits_{k\to\infty} (f(k^{-1}p)\Psi(p)) = f(0)\Psi(p)$. Továbbá, f korlátos is, ezért $k \in \mathbb{N}^+$ és $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|f(k^{-1}p)\Psi(p)\| \le |||f|||\Psi(p)$ és $\Psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, vagyis $\int^* \Psi \, d\mu_n < +\infty$. Ismét a Lebesgue-tételt és a d) eredményeit alkalmazva

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{p}{k}\right) \Psi(p) \, d\mu_n(p) = f(0) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi(p) \, d\mu_n(p) = (2\pi)^{n/2} f(0)$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}f \, d\mu_n = (\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f))(0).$$

Ezzel megmutattuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan folytonos és korlátos függvény, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor $f(0) = (\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(0)$ teljesül. De ha f ilyen függvény, akkor minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén az $f \circ \tau_{-a} : \mathbb{R}^n \to F$ függvény is folytonos, korlátos, és a Lebesgue-mérték transzláció-invarianciája folytán $f \circ \tau_{-a} \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, továbbá a b) alapján $\mathscr{F}(f \circ \tau_{-a}) = \chi_a(\mathscr{F} f) \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, hiszen $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Ezért minden $a \in \mathbb{R}^n$ pontra

$$f(a) = (f \circ \tau_{-a})(0) = (\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f \circ \tau_{-a})))(0) = (\overline{\mathscr{F}}(\chi_a(\mathscr{F} f)))(0) = (\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(a),$$

ahol ismét alkalmaztuk a b)-ben felírt formulákat.

f) Először megmutatjuk, hogy az

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad (x, p) \mapsto (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}$$

függvény $\mu_n \otimes \mu_n$-integrálható. Valóban, a feltevések alapján az $f, g : \mathbb{R}^n \to F$ függvények μ_n-integrálhatók, és az F feletti skalárszorzás $F \times F \to \mathbb{C}$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor, ezért a X. fejezet, 7. pont, **3**. gyakorlat szerint az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; $(x, p) \mapsto (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))$ függvény $\mu_n \otimes \mu_n$-integrálható. Továbbá, az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; $(x, p) \mapsto e^{-i(p|x)}$ függvény folytonos, ezért $\mu_n \otimes \mu_n$-mérhető, és korlátos, ezért a X. fejezet, 8. pont, **2**. gyakorlat szerint az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; $(x, p) \mapsto (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}$ függvény $\mu_n \otimes \mu_n$-integrálható.

Most a Lebesgue-Fubini-tételt alkalmazzuk erre a $\mu_n \otimes \mu_n$-integrálható függvényre. Először is az adódik, hogy μ_n-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontra az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad p \mapsto (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}$$

függvény szintén μ_n-integrálható, és az $\mathbb{R}^n$-ben μ_n-majdnem mindenütt értelmezett

$$\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{C}; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(p)$$

függvény is μ_n-integrálható, és fennáll az

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}\, d(\mu_n \otimes \mu_n)(x, p) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(p) \right) d\mu_n(x)$$

egyenlőség. Azonban ebben a konkrét esetben *minden* $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; $p \mapsto (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}$ függvény μ_n-integrálható, mert az $\mathbb{R}^n \to F$; $p \mapsto (\mathscr{F} g)(p)e^{i(p|x)}$ függvény μ_n-integrálható, és világos, hogy az $(f(x)|\cdot) : F \to \mathbb{C}$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál. Ebből még az is következik, hogy minden $\mathbb{R}^n \ni x$-re

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F} g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(p) = \left(f(x) \middle| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} g)(p)e^{i(p|x)}\, d\mu_n(p) \right) =$$

$$= (2\pi)^{n/2}(f(x)|(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}g))(x)),$$

ami a g-re vonatkozó Fourier-féle inverziós formula alapján azt jelenti, hogy

$$(f(x)|g(x)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(p).$$

Tehát az $(f|g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ x \mapsto (f(x)|g(x))$ függvény μ_n-integrálható (ami egyébként is nyilvánvaló), és teljesül az

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f|g)\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d(\mu_n \otimes \mu_n)(x,p)$$

egyenlőség (ami egyáltalán nem nyilvánvaló).

Másfelől, a Lebesgue-Fubini-tételből következik, hogy μ_n-majdnem minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\quad x \mapsto (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}$$

függvény μ_n-integrálható, és az $\mathbb{R}^n$-ben μ_n-majdnem mindenütt értelmezett

$$\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{C};\quad p \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(x)$$

függvény szintén μ_n-integrálható, és fennáll az

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d(\mu_n \otimes \mu_n)(x,p) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(x) \right) d\mu_n(p)$$

egyenlőség. Azonban ebben a konkrét esetben *minden* $p \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ x \mapsto (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}$ függvény μ_n-integrálható, mert az $\mathbb{R}^n \to F;\ x \mapsto f(x)e^{-i(p|x)}$ függvény μ_n-integrálható, és világos, hogy az $(\cdot|(\mathscr{F}g)(p)) : F \to \mathbb{C}$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál. Ebből még az is következik, hogy minden $\mathbb{R}^n \ni x$-re

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(x) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(x) \,\middle|\, (\mathscr{F}g)(p) \right) =$$

$$= (2\pi)^{n/2}((\mathscr{F}f)(p)|(\mathscr{F}g)(p)),$$

ami azt jelenti, hogy az $(\mathscr{F}f|\mathscr{F}g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ p \mapsto ((\mathscr{F}f)(p)|(\mathscr{F}g)(p))$ függvény μ_n-integrálható, és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f|\mathscr{F}g)\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)|(\mathscr{F}g)(p))e^{-i(p|x)}\, d\mu_n(p)$$

teljesül. Ebből következik az

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f|g)\ d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f|\mathscr{F} g)\ d\mu_n$$

Parseval-formula. Ugyanakkor a helyettesítéses integrálás tétele alapján

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f|\mathscr{F} g)\ d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f|\mathscr{F} g) \circ i_{\mathbb{R}^n}\ d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}} f|\overline{\mathscr{F}} g)\ d\mu_n$$

is teljesül, következésképpen

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f|g)\ d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}} f|\overline{\mathscr{F}} g)\ d\mu_n$$

is igaz.

g) Az állítást r szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először legyen $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan folytonosan differenciálható és végtelenben eltűnő függvény, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és minden $n \ni k$-ra $\partial_k f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, valamint $\partial_k f$ végtelenben eltűnő. Legyen $k \in n$ rögzített szám, és $p \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor $(\partial_k f)chi_{-p} = \partial_k(f\chi_{-p}) - f(\partial_k \chi_{-p})$ és $\partial_k \chi_{-p} = -ip_k \chi_{-p}$, tehát

$$(\mathscr{F}(\partial_k f))(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_k f)\chi_{-p}\ d\mu_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k(f\chi_{-p})\ d\mu_n - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\partial_k \chi_{-p})\ d\mu_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k(f\chi_{-p})\ d\mu_n - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(-ip_k) \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p}\ d\mu_n = ip_k(\mathscr{F} f)(p),$$

mert az $f\chi_{-p}$ függvény is végtelenben eltűnő, ezért a a Lebesgue-Fubibi-tétel és a Newton-Leibniz formula szerint $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_k(f\chi_{-p})\ d\mu_n = 0$. Ez azt jelenti, hogy az állítás igaz $r = 1$ esetén.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $r \in \mathbb{N}^+$ számra, és legyen $f : \mathbb{R}^n \to F$ olyan $r+1$-szer folytonosan differenciálható függvény, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és minden $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre, ha $|\alpha|_1 \leq r+1$, akkor $\partial^\alpha f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, valamint $\partial^\alpha f$ végtelenben eltűnő. Legyen $\alpha \in \mathbb{N}^n$ olyan, hogy $|\alpha|_1 \leq r+1$. Ha $|\alpha|_1 < r+1$, akkor az indukciós hipotézis szerint $\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|_1} id^\alpha_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F} f$ teljesül, hiszen az f függvény r-szer is folytonosan differenciálható, és minden $\beta \in \mathbb{N}^n$ multiindexre, ha $|\beta|_1 \leq r$, akkor $\partial^\beta f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, valamint $\partial^\beta f$ végtelenben eltűnő. Ezért elegendő az $|\alpha|_1 = r+1$ esetet vizsgálni. Ekkor van olyan $k \in n$ és $\beta \in \mathbb{N}^n$, hogy $|\beta|_1 = r$ és $\partial^\alpha f = \partial_k(\partial^\beta f)$. Ha $p \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$(\partial^\alpha f)\chi_{-p} = \partial_k(\partial^\beta f)\chi_{-p} = \partial_k((\partial^\beta f)\chi_{-p}) + ip_k(\partial^\beta f)\chi_{-p},$$

és az indukciós hipotézis szerint $(\mathscr{F}(\partial^\beta f))(p) = i^{|\beta|_1} p^\beta (\mathscr{F} f)(p)$, így

$$(\mathscr{F}(\partial^\alpha f))(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)\chi_{-p}\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k(\partial^\beta f)\chi_{-p}\, d\mu_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k((\partial^\beta f)\chi_{-p})\, d\mu_n + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(ip_k) \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial^\beta f)\chi_{-p}\, d\mu_n =$$

$$= ip_k(\mathscr{F}(\partial^\beta f))(p) = ip_k\left(i^{|\beta|_1} p^\beta (\mathscr{F} f)(p)\right) = i^{|\alpha|_1} p^\alpha (\mathscr{F} f)(p),$$

mert a $(\partial^\beta f)\chi_{-p}$ függvény is végtelenben eltűnő, ezért a Lebesgue-Fubini-tétel és a Newton-Leibniz formula alapján $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k((\partial^\beta f)\chi_{-p})\, d\mu_n = 0$. Ez azt jelenti, hogy az állítás teljesül az $r+1$ számra is.

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to F$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvény. Bármely $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindexre és $p \in \mathbb{R}^n$ pontra $\|(\mathscr{F}(\partial^\alpha f))(p)\| = |p^\alpha| \|(\mathscr{F} f)(p)\|$, tehát

$$|p^\alpha| \|(\mathscr{F} f)(p)\| = \left(\prod_{k \in n} |p_k|^{\alpha_k}\right) \|(\mathscr{F} f)(p)\| \leq |||\partial^\alpha f|||.$$

Ebből következik, hogy minden $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényre (VI. fejezet, 3. pont, **1**. gyakorlat) a $P\mathscr{F} f$ függvény *korlátos.* Az n dimenzió szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re az $\dfrac{1}{(1+\|\cdot\|_n^2)^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény μ_n-integrálható, ahol $\|\cdot\|_n$ az euklidészi norma $\mathbb{R}^n$ felett. Ugyankkor az $(1+\|\cdot\|_n^2)^n$ függvény éppen $2n$-ed fokú polinomiális függvény, tehát van olyan $C_n(f) \in \mathbb{R}^+$, amelyre $(1+\|\cdot\|_n^2)^n \|\mathscr{F} f\| \leq C_n(f)$, vagyis $\|\mathscr{F} f\| \leq \dfrac{C_n(f)}{(1+\|\cdot\|_n^2)^n}$. Ha $q \in [1, \infty[$ tetszőleges valós szám, akkor ebből $\|\mathscr{F} f\|^q \leq \dfrac{C_n(f)^q}{(1+\|\cdot\|_n^2)^{qn}} \leq \dfrac{C_n(f)^q}{(1+\|\cdot\|_n^2)^n}$ adódik, tehát a q-adik hatványon integrálhatóság kritériuma alapján $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}_F^q(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Ugyanakkor f folytonos és végtelenben eltűnő, ezért az e) szerint $f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f) = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}} f)$ is teljesül.

h) Legyen $f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ olyan függvény, hogy $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Ekkor $\overline{\mathscr{F}} f = (\mathscr{F} f) \circ i_{\mathbb{R}^n}$, így a helyettesítéses integrálás tétele alapján $\overline{\mathscr{F}} f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ is teljesül. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tetszőleges kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvény. A g) szerint $\overline{\mathscr{F}}\varphi \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, tehát c)-t alkalmazva a $g := \overline{\mathscr{F}}\varphi$ választással

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}\varphi))\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f)(\overline{\mathscr{F}}\varphi)\, d\mu_n.$$

Ugyanakkor a hipotézis szerint $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és tudjuk, hogy $\overline{\mathscr{F}}\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, tehát ismét c)-t alkalmazva f helyett $\mathscr{F} f$-re és a $g := \varphi$ függvényre

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F} f)(\overline{\mathscr{F}}\varphi)\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))\varphi\, d\mu_n$$

adódik. A φ-re alkalmazhatjuk a Fourier-féle inverziós formulát, tehát $\varphi = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}\varphi)$. Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f))\varphi\, d\mu_n.$$

Tehát az $f - \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f) : \mathbb{R}^n \to F$ különbség-függvény olyan, hogy minden $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvényre $\big(f - \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)\big)\varphi \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(f - \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)\big)\,\varphi\, d\mu_n = 0,$$

így a du Bois-Reymond lemma (**7**. gyakorlat) szerint $f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)$ teljesül $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt. Az előző érvelést megismételve az $\mathscr{F}$ és $\overline{\mathscr{F}}$ szimbólumok felcserélésével azt kapjuk, hogy $f = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f)$ teljesül $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt. Ebből következik, hogy $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f) = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f)$ teljesül $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt. De ezek folytonos függvények és $supp(\mu_n) = \mathbb{R}^n$, ezért $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f) = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f)$ teljesül $\mathbb{R}^n$-en *mindenütt*.

i) Legyen F komplex Hilbert-tér és $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)^\bullet := \{f^\bullet | f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)\}$, ahol $f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ esetén $f^\bullet$ az f függvény ekvivalencia-osztálya $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-ben. A sima függvénykkel p-edik hatványon való approximáció tétele (X. fejezet, 3. pont) alapján $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)^\bullet$ sűrű lineáris altere az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térnek. A g) szerint $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ esetén $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, ezért $supp(\mu_n) = \mathbb{R}^n$ miatt jól értelmezett a

$$\mathbb{F}_0 : C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)^\bullet \to L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n); \quad f^\bullet \mapsto (\mathscr{F}f)^\bullet$$

leképezés, amely a Parseval-formula alapján lineáris izometria a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ norma szerint. A sűrűn értelmezett folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele alapján egyértelműen létezik olyan

$$\mathbb{F} : L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \to L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$$

folytonos lineáris operátor, amely $\mathbb{F}_0$-nak kiterjesztése, vagyis $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ esetén $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathscr{F}f)^\bullet$ teljesül. Az egyenlőségek folytatásának elve alapján az $\mathbb{F}$ operátor is izometria, ezért $\mathbb{F}$ pontosan akkor unitér, ha $Im(\mathbb{F})$ sűrű $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-ben, hiszen Banach-téren értelmezett lineáris izometria értékkészlete szükségképpen zárt.

Megmutatjuk, hogy $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ esetén $f^\bullet \in \overline{Im(\mathbb{F}_0)}$. Valóban, a g) szerint $\overline{\mathscr{F}}f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, ezért létezik olyan $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$-ben, amelyre $\overline{\mathscr{F}}f = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$ a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, vagyis $\lim\limits_{k\to\infty} \int^* \|\overline{\mathscr{F}}f - g_k\|^2\, d\mu_n = 0$. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $g_k = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}g_k)$, és az $f - \mathscr{F}g_k : \mathbb{R}^n \to F$ függvény folytonos, korlátos, μ_n-integrálható, és a konjugált Fourier-transzformáltja is μ_n-integrálható, így a Parseval-formula szerint

$$\int^* \|\overline{\mathscr{F}}f - g_k\|^2\, d\mu_n = \int^* \|\overline{\mathscr{F}}f - \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}g_k)\|^2\, d\mu_n = \int^* \|f - \mathscr{F}g_k\|^2\, d\mu_n.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ térben haladó $(\mathscr{F} g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat f-hez konvergál a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint. Ezért $f^\bullet = \lim\limits_{k\to\infty}(\mathscr{F} g_k)^\bullet = \lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{F}_0(g_k^\bullet)$ az $L_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-tér normája szerint, ezért $f^\bullet \in \overline{Im(\mathbb{F}_0)}$. Tehát még $Im(\mathbb{F}_0)$ is sűrű az $L_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térben, így $\mathbb{F}$ unitér operátor. Teljesen hasonlóan látható be az $\overline{\mathbb{F}}$ unitér operátor létezése.

j) (I) Először feltesszük, hogy $f \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és f kompakt tartójú. Ekkor $f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ is igaz, mert $f = f\chi_{_{supp(f)}}$ és $f, \chi_{_{supp(f)}} \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathscr{F} f \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathscr{F} f)^\bullet$. Legyen ugyanis $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$-ben, amely a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint konvergál f-hez. Legyen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre $0 \le \varphi \le 1$ és $supp(f) \subseteq [\varphi = 1]$. Ekkor az $(f_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, mert $f = f\varphi$, tehát minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\int^* \|f - f_k\varphi\|^2\, d\mu_n = \int^* \|f\varphi - f_k\varphi\|^2\, d\mu_n \le \int^* \|f - f_k\|^2\, d\mu_n.$$

Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $supp(f_k\varphi) \subseteq supp(\varphi)$ és $f_k\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$. Megmutatjuk, hogy az $(\mathscr{F}(f_k\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az $\mathbb{R}^n$-en pontonként (sőt egyenletesen) konvergál $\mathscr{F} f$-hez. Valóban, $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $f = f\varphi$ és $\varphi\chi_{-p} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F) \subseteq \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, tehát a Hölder-egyenlőtlenség alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\|(\mathscr{F} f)(p) - (\mathscr{F}(f_k\varphi))(p)\| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_k\varphi)\chi_{-p}\, d\mu_n \right\| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_k)\varphi\chi_{-p}\, d\mu_n \right\| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - f_k\|_{\mu_n,2} \|\varphi\chi_{-p}\|_{\mu_n,2} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - f_k\|_{\mu_n,2} \|\varphi\|_{\mu_n,2}.$$

Ebből látható, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{p\in\mathbb{R}^n} \|(\mathscr{F} f)(p) - (\mathscr{F}(f_k\varphi))(p)\| \right) = 0,$$

amint azt állítottuk. Ebből következik, hogy $\|\mathscr{F} f\|^2 = \lim\limits_{k\to\infty} \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2$ az $\mathbb{R}^n$-en pontonként, tehát a Fatou-lemma szerint

$$\int^* \|\mathscr{F} f\|^2\, d\mu_n = \int^* \liminf_{k\to\infty} \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2\, d\mu_n \le \liminf_{k\to\infty} \int^* \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2\, d\mu_n.$$

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $f_k\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ függvényre felírható a Parseval-formula, vagyis

$$\int^* \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2\, d\mu_n = \int^* \|f_k\varphi\|^2\, d\mu_n = \|f_k\varphi\|_{\mu_n,2}^2.$$

De az $(\|f_k\varphi\|_{\mu_n,2})_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozat korlátos (sőt konvergens), mert az $(f_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint. Ezért

$$\liminf_{k\to\infty}\int^* \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2\, d\mu_n < +\infty,$$

következésképpen

$$\int^* \|\mathscr{F}f\|^2\, d\mu_n < +\infty.$$

A négyzetes integrálhatóság kritériuma szerint ebből azt kapjuk, hogy $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, hiszen a $\mathscr{F}f$ függvény μ_n-mérhető is, hiszen folytonos. Az is látszik, hogy

$$\|\mathscr{F}f\|_{\mu_n,2} = \left(\int^* \|\mathscr{F}f\|^2\, d\mu_n\right)^{1/2} \le \liminf_{k\to\infty}\left(\int^* \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2\, d\mu_n\right)^{1/2} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\|f_k\varphi\|_{\mu_n,2} = \|f\|_{\mu_n,2},$$

ezért minden $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$\|\mathscr{F}f - \mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2_{\mu_n,2} = \|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} + \|\mathscr{F}(f_k\varphi)\|^2_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}(\mathscr{F}f|\mathscr{F}(f_k\varphi))_{\mu_n,2} =$$

$$= \|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} + \|f_k\varphi\|^2_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}f|\mathscr{F}(f_k\varphi))\, d\mu_n =$$

$$= \|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} + \|f_k\varphi\|^2_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}\int_{\mathbb{R}^n}(f|f_k\varphi)\, d\mu_n =$$

$$= \|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} + \|f_k\varphi\|^2_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}(f|f_k\varphi)_{\mu_n,2},$$

ahol $(\cdot|\cdot)_{\mu_n,2}$ jelöli a skalárszorzást $\mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ felett. Ismét felhasználjuk azt, hogy az $(f_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, így

$$\lim_{k\to\infty}\left(\|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} + \|f_k\varphi\|^2_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}(f|f_k\varphi)_{\mu_n,2}\right) =$$

$$= \|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} + \|f\|^2_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}(f|f)_{\mu_n,2} = \|\mathscr{F}f\|^2_{\mu_n,2} - \|f\|^2_{\mu_n,2} \le 0.$$

Ebből következik, hogy az $(\mathscr{F}(f_k\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $\mathscr{F}f$-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint. Ezért az $\mathbb{F}$ Fourier-transzformáció alapvető tulajdonságai szerint

$$(\mathscr{F}f)^\bullet = \lim_{k\to\infty}(\mathscr{F}(f_k\varphi))^\bullet = \lim_{k\to\infty}\mathbb{F}((f_k\varphi)^\bullet) = \mathbb{F}(f^\bullet).$$

(II) Legyen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k\in\mathbb{N}$ esetén $\varphi_k \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, $0 \le \varphi_k \le 1$, $supp(\varphi_k)$ kompakt és $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 1$ az $\mathbb{R}^n$ halmazon. Megmutatjuk, hogy minden $f \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és $k\in\mathbb{N}$ esetén $f\varphi_k \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \cap \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ és az $(\mathscr{F}(f\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, és

$$\mathbb{F}(f^\bullet) = \lim_{k\to\infty}(\mathscr{F}(f\varphi_k))^\bullet.$$

Valóban, az $(f\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja eleme $\mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$-nek, és $\varphi_k \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ is igaz, ezért $f\varphi_k\in\mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n) \cap \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$. Továbbá, $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|f\varphi_k\| \leq \|f\|$ és $\int^* \|f\|^2 \, d\mu_n < +\infty$, azonkívül $f=\lim\limits_{k\to\infty}(f\varphi_k)$ az $\mathbb{R}^n$-en pontonként, tehát a Lebesgue-tétel alapján az $(f\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint. Ebből következik, hogy az $L_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$-ben haladó $((f\varphi_k)^\bullet)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $f^\bullet$-hoz a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ norma szerint, így az $\mathbb{F}$ Fourier-transzformáció folytonossága miatt $\mathbb{F}(f^\bullet) = \lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{F}((f\varphi_k)^\bullet)$ teljesül az $L_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ Hilbert-térben. De minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $f\varphi_k \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ függvény kompakt tartójú, ezért az (I) miatt $\mathbb{F}((f\varphi_k)^\bullet) = (\mathscr{F}(f\varphi_k))^\bullet$. Ezért az $(\mathscr{F}(f\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, és $\mathbb{F}(f^\bullet) = \lim\limits_{k\to\infty}(\mathscr{F}(f\varphi_k))^\bullet$ az $L_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ Hilbert-térben.

(III) Legyen most $f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)\cap\mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$; megmutatjuk, hogy $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ és $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathscr{F}f)^\bullet$. Ehhez legyen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_k \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$, $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $supp(\varphi_k)$ kompakt és $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = 1$ az $\mathbb{R}^n$ halmazon. A (III)-ban láttuk, hogy az $(f\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,2}$ félnorma szerint, így

$$\|f\|_{\mu_n,2}^2 = \lim_{k\to\infty}\|f\varphi_k\|_{\mu_n,2}^2$$

is teljesül. Ugyanakkor $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $f\chi_{-p} = \lim\limits_{k\to\infty}(f\varphi\chi_{\boldsymbol{p}})$ az $\mathbb{R}^n$-en mindenütt, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\|f\varphi\chi_{-p}\| \leq \|f\|$, valamint $\int^* \|f\| \, d\mu_n < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tételből azt kapjuk, hogy minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén az $(f\varphi\chi_{-p})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $f\chi_{-p}$-hez a $\|\cdot\|_{\mu_n,1}$ félnorma szerint, így

$$(\mathscr{F}f)(p)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\chi_{-p}\, d\mu_n=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi_k\chi_{-p}d\mu_n=\lim_{k\to\infty}(\mathscr{F}(f\varphi_k))(p)$$

is teljesül. Ebből következik, hogy $\|\mathscr{F}f\|^2 = \lim\limits_{k\to\infty}\|\mathscr{F}(f\varphi_k)\|^2$ az $\mathbb{R}^n$-en pontonként. Ugyanakkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a (II) miatt $\|\mathscr{F}(f\varphi_k)\|_{\mu_n,2}^2 = \|f\varphi_k\|_{\mu_n,2}^2$, így a Fatou-lemma alkalmazásával

$$\int^* \|\mathscr{F}f\|^2 \, d\mu_n \leq \liminf_{k\to\infty}\int^* \|\mathscr{F}(f\varphi_k)\|^2 \, d\mu_n = \liminf_{k\to\infty}\|f\varphi_k\|_{\mu_n,2}^2 = \|f\|_{\mu_n,2}^2$$

adódik. A négyzetes integrálhatóság kritériuma alapján $\mathscr{F}f \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ és $\|\mathscr{F}f\|_{\mu_n,2}^2 - \|f\|_{\mu_n,2}^2 \leq 0$ is látható. Ezután az $\mathbb{F}(f^\bullet) = (\mathscr{F}f)^\bullet$ egyenlőséget ugyanazzal az érveléssel kapjuk, mint az (I) bizonyításának a végén.

(IV) Végül megmutatjuk, hogy $\mathbb{F}^{-1} = \overline{\mathbb{F}}$. Ehhez legyen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ tetszőleges. Ekkor a g) szerint $\overline{F}f \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n) \cap \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$, tehát a (III) alapján $\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f) \in \mathscr{L}_F^2(\mathbb{R}^n,\mathscr{R}_n,\mu_n)$ (ami másképpen is következik a Fourier-féle inverziós formulából, hiszen $\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f) = f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F))$), továbbá

$$\mathbb{F}((\overline{\mathscr{F}}f)^\bullet) = (\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f))^\bullet = f^\bullet.$$

De az $\overline{\mathbb{F}}$ definíciójából következik, hogy $\overline{\mathscr{F}}(f^\bullet)=(\overline{\mathscr{F}}f)^\bullet$, tehát fennáll az $(\mathbb{F}\circ\overline{\mathbb{F}})(f^\bullet) = f^\bullet$ egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{F}\circ\overline{\mathbb{F}}$ egyenlő az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-tér identikus operátorával az $\{f^\bullet | f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)\}$ sűrű altéren, tehát mindenütt, így $\mathbb{F}^{-1} = \overline{\mathbb{F}}$ teljesül.)

9. Legyen $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér és F Hilbert-tér. Legyen $\sigma : T \to T$ olyan függvény, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén a $\overset{-1}{\sigma}\langle E\rangle$ halmaz μ-integrálható és $\mu(\overset{-1}{\sigma}\langle E\rangle) = \mu(E)$ (itt az egyenlőség bal oldalán a μ mérték kiterjesztése áll a μ-integrálható halmazok δ-gyűrűjére). Legyen $w \in \mathscr{L}(F)$ tetszőleges operátor.

a) Minden $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ esetén $w\circ\psi\circ\sigma \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$, és egyértelműen létezik olyan

$$u_{w,\sigma} : L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu) \to L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$$

lineáris operátor, amelyre minden $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ esetén

$$u_{w,\sigma}(\psi^\bullet) = (w\circ\psi\circ\sigma)^\bullet.$$

Továbbá, az $u_{w,\sigma}$ operátor folytonos és $\|u_{w,\sigma}\| \le \|w\|$.

b) Ha a w operátor izometria, akkor az $u_{w,\sigma}$ operátor is izometria.

c) Ha σ bijekció és minden $\mathscr{R} \ni E$-re a $\sigma\langle E\rangle$ halmaz μ-integrálható, akkor jól értelmezett az $u_{w^*,\sigma^{-1}}$ operátor is, és $u_{w^*,\sigma^{-1}} = (u_{w,\sigma})^*$.

d) Ha a w operátor önadjungált, akkor az u_{w,id_T} operátor önadjungált. Ha a w operátor unitér és σ olyan bijekció, hogy minden $\mathscr{R} \ni E$-re a $\sigma\langle E\rangle$ halmaz μ-integrálható, akkor az $u_{w,\sigma}$ operátor unitér.

(**Megjegyzés**. A nemrelativisztikus kvantummechanikában az *adott térirányú spinoperátorok* u_{w,id_T} alakúak, ahol w önadjungált operátor és F véges dimenziós. Megjegyezzük még, hogy a σ és μ kapcsolatára megfogalmazott feltételt a μ mérték *σ-invarianciájának* nevezzük.)

(*Útmutatás.* Legyen $\psi \in \mathscr{E}_F(T, \mathscr{R})$, és $(E_i)_{i\in I}$ olyan véges diszjunkt rendszer $\mathscr{R}$-ben és $(z_i)_{i\in I}$ olyan rendszer F-ben, hogy $\psi = \sum\limits_{i\in I} z_i\chi_{E_i}$. Ekkor $w\circ\psi\circ\sigma = \sum\limits_{i\in I} w(z_i)\chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle E_i\rangle}$ és a hipotézis szerint minden $I \ni i$-re a $\overset{-1}{\sigma}\langle E_i\rangle$ halmaz μ-integrálható, így $\chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle E_i\rangle} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{R}, \mu)$, tehát $w\circ\psi\circ\sigma \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$. Továbbá, a $(\overset{-1}{\sigma}\langle E_i\rangle)_{i\in I}$ halmazrendszer diszjunkt, ezért

$$\|w\circ\psi\circ\sigma\|^2 = \sum_{i\in I} \|w(z_i)\|^2 \chi_{\overset{-1}{\sigma}\langle E_i\rangle},$$

így a μ mérték σ-invarianciája következtében fennállnak a

$$\|w\circ\psi\circ\sigma\|^2_{\mu,2} = \int\limits_T \|w\circ\psi\circ\sigma\|^2 \, d\mu = \sum_{i\in I} \mu(\overset{-1}{\sigma}\langle E_i\rangle)\|w(z_i)\|^2 =$$

$$= \sum_{i\in I} \mu(E_i)\|w(z_i)\|^2 = \int\limits_T \sum_{i\in I} \|w(z_i)\|^2 \chi_{E_i} \, d\mu = \int\limits_T \|w\circ\psi\|^2 \, d\mu \le \|w\|^2 \|\psi\|^2_{\mu,2}$$

összefüggések. Ebből azonnal látható, hogy az $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})^\bullet := \{\psi^\bullet | \psi \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})\} \subseteq L^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ lineáris altéren egyértelműen értelmezhető az az $L^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$-be ható lineáris operátor, amely minden $\psi \in \mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$ esetén $\psi^\bullet$-hoz a $(w \circ \psi\sigma)^\bullet$ értéket rendeli. Sőt azt is látjuk, hogy ha w izometria, akkor ez az operátor is izometria. Az általános esetben ez a lineáris operátor folytonos és a normája kisebb-egyenlő a $\|w\|$ számnál. Ezért a sűrű altéren folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele alapján ez az operátor egyértelműen kiterjeszthető $L^2_F(T,\mathscr{R},\mu) \to L^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ folytonos lineáris operátorrá, amelynek a normája szintén kisebb-egyenlő a $\|w\|$ számnál; jelölje $u_{w,\sigma}$ ezt a kiterjesztést. Az egyenlőségek folytatásának elvéből következik, hogy ha w izometria, akkor $u_{w,\sigma}$ is izometria.

Megmutatjuk, hogy minden $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ esetén $w \circ \psi \circ \sigma \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, és fennáll az $u_{w,\sigma}(\psi^\bullet) = (w \circ \psi \circ \sigma)^\bullet$ egyenlőség.

Legyen $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ rögzített, és vegyünk olyan $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_F(T,\mathscr{R})$-ben, amely a $\|\cdot\|_{\mu,2}$ félnorma szerint konvergál ψ-hez *és* a T halmazon μ-majdnem mindenütt is konvergál ψ-hez (ilyen a Riesz-Fischer-tétel alapján létezik). Ekkor $(w \circ \psi_k \circ \sigma)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\mu,2}$ félnorma szerint, mert az imént bizonyított egyenlőtlenséget minden $j,k \in \mathbb{N}$ esetében felírva ψ helyett a $\psi_j - \psi_k$ lépcsősfüggvényre

$$\|w \circ \psi_j \circ \sigma - w \circ \psi_k \circ \sigma\|_{\mu,2} = \|w \circ (\psi_j - \psi_k) \circ \sigma\|_{\mu,2} \leq \|w\|\|\psi_j - \psi_k\|_{\mu,2}$$

adódik. Tehát a Riesz-Fischer-tétel alapján létezik olyan $\psi' \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ és olyan $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy a $(w \circ \psi_{\pi(j)} \circ \sigma)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál φ'-höz a $\|\cdot\|_{\mu,2}$ félnorma szerint és a T halmazon μ-majdnem mindenütt. A $(w \circ \psi_{\pi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat μ-majdnem mindenütt konvergál a $w \circ \psi$ függvényhez, mert w folytonos és $(\psi_{\pi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergál ψ-hez μ-majdnem mindenütt. Tehát ha N azon $t \in T$ pontok halmaza, amelyekre a $\big((w \circ \psi_{\pi(j)})(t)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat nem konvergál $(w \circ \psi)(t)$-hez F-ben, akkor $\mu^*(N) = 0$. Ha $t \in T$ olyan pont, hogy a $\big((w \circ \psi_{\pi(j)} \circ \sigma)(t)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat nem konvergál $(w \circ \psi\sigma)(t)$-hez F-ben, akkor $\sigma(t) \in N$, azaz $t \in \overset{-1}{\sigma}\langle N\rangle$. Ugyanakkor a $\overset{-1}{\sigma}\langle N\rangle$ halmaz μ-nullhalmaz, mert a μ-nullhalmazok mértékelméleti jellemzése (IX. fejezet, 2. pont utolsó állítása) alapján minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) < \varepsilon$; ekkor a μ mérték σ-invarianciája miatt

$$\mu^*\left(\overset{-1}{\sigma}\langle N\rangle\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overset{-1}{\sigma}\langle E_k\rangle\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(\overset{-1}{\sigma}\langle E_k\rangle) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) < \varepsilon,$$

tehát $\mu^*(\overset{-1}{\sigma}\langle N\rangle) = 0$. Ebből következik, hogy a $(w \circ \psi_{\pi(j)} \circ \sigma)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat μ-majdnem mindenütt konvergál $w \circ \psi \circ \sigma$-hoz, így $w \circ \psi \circ \sigma = \psi' \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ a T halmazon μ-majdnem mindenütt, tehát $w \circ \psi \circ \sigma \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$. Ugyanakkor

$$(w \circ \psi \circ \sigma)^\bullet = (\psi')^\bullet = \lim_{j\to\infty} (w \circ \psi_{\pi(j)} \circ \sigma)^\bullet = \lim_{j\to\infty} u_{w,\sigma}((\psi_{\pi(j)})^\bullet) = u_{w,\sigma}(\psi^\bullet)$$

teljesül $L^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$-ben, mert a $(w \circ \psi_{\pi(j)} \circ \sigma)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál ψ'-höz a $\|\cdot\|_{\mu,2}$ félnorma szerint, és $u_{w,\sigma}$ folytonos. Ezzel az a) és b) állításokat igazoltuk.

Legyen σ olyan bijekció, hogy minden $\mathscr{R} \ni E$-re a $\sigma\langle E\rangle$ és $\overset{-1}{\sigma}\langle E\rangle$ halmazok μ-integrálhatók. Ha $\varphi, \psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$, akkor

$$(u_{w,\sigma}(\psi^\bullet)|\varphi^\bullet)_{\mu,2} = \int_T (w \circ \psi \circ \sigma|\varphi)\ d\mu = \int_T (\psi|w^* \circ \varphi \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma\ d\mu =$$

$$= \int_T (\psi|w^* \circ \varphi \circ \sigma^{-1})\ d\mu = (\psi^\bullet|u_{w^*,\sigma^{-1}}(\varphi^\bullet))_{\mu,2},$$

mert könnyen látható, hogy $(\psi|w^* \circ \varphi \circ \sigma^{-1}) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \mu)$, és minden $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \mu)$ esetén a μ mérték σ-invarianciája miatt $f \circ \sigma \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \mu)$ és

$$\int_T (f \circ \sigma)\ d\mu = \int_T f\ d\mu$$

teljesül, hiszen a IX. fejezet, 6. pont, **8**. gyakorlat eredményeit alkalmazhatjuk, mivel $\sigma(\mu) = \mu$ és $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R}, \sigma(\mu))$. Ezért $u_{w^*,\sigma^{-1}} = (u_{w,\sigma})^*$ teljesül, vagyis c)-t igazoltuk.

A d) bizonyításához elég c)-re és a)-ra hivatkozni, figyelembe véve azt a könnyen igazolható állítást, hogy ha $w_1, w_2 \in \mathscr{L}(F)$ és $\sigma_1, \sigma_2 : T \to T$ olyan függvények, hogy $E \in \mathscr{R}$ esetén a $\overset{-1}{\sigma_1}\langle E\rangle$ és $\overset{-1}{\sigma_2}\langle E\rangle$ halmazok μ-integrálhatók és $\mu(\overset{-1}{\sigma_1}\langle E\rangle) = \mu(E) = \mu(\overset{-1}{\sigma_2}\langle E\rangle)$, akkor $u_{w_1,\sigma_1} \circ u_{w_2,\sigma_2} = u_{w_1 \circ w_2, \sigma_1 \circ \sigma_2}$.)

10. Legyen E Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$ idempotens operátor, vagyis $u = u^2$. Ekkor $Im(u)$ zárt lineáris altér E-ben, és a következő állítások ekvivalensek.

(i) $u = u^*$ (így u projektor).

(ii) $(Im(u))^\perp = Ker(u)$.

(iii) $(Ker(u))^\perp = Im(u)$.

(iv) $Im(u) \perp Ker(u)$.

(v) $u = P_{Im(u)}$.

Megfordítva, minden $H \subseteq E$ zárt lineáris altérre $P_H \in \mathscr{L}(E)$ projektor, és ha $\mathfrak{P}(E)$ jelöli az E projektorainak halmazát, és $\mathfrak{M}(E)$ jelöli az E zárt lineáris altereinek halmazát, akkor a

$$\mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{M}(E); \quad u \mapsto Im(u),$$

$$\mathfrak{M}(E) \to \mathfrak{P}(E); \quad H \mapsto P_H$$

leképezések olyan bijekciók, amelyek egymás inverzei.

(**Megjegyzés**. Ez az állítás azért fontos, mert megmutatja, hogy Hilbert-tér zárt lineáris altereinek halmaza és a projektorainak halmaza kitüntetett módon (kanonikusan) azonosítható. Ezáltal a Hilbert-terek zárt lineáris altereivel kapcsolatos (tehát geometriai) állítások lefordíthatók a projektorokkal kapcsolatos (tehát algebrai) kijelentésekre, és fordítva.)

(*Útmutatás.* Az $Im(u)$ altér zárt, mert ha $y \in \overline{Im(u)}$, akkor van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat E-ben, hogy $y = \lim_{n\to\infty} u(x_n)$, tehát az u folytonossága és idempotenciája miatt $u(y) = \lim_{n\to\infty} u(u(x_n)) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) = y$, vagyis $y = u(y) \in Im(u)$.

Az (i)$\Rightarrow$(ii) következtetés nyilván helyes, mert $(Im(u))^\perp = Ker(u^*)$. A (ii)$\Rightarrow$(iii) implikáció azért igaz, mert $Im(u)$ zárt, tehát $Im(u) = \overline{Im(u)} = (Im(u))\perp\perp$, tehát ha $(Im(u))^\perp = Ker(u)$, akkor $(Ker(u))^\perp = Im(u)$. A (iii)$\Rightarrow$(iv) állítás triviális.

A (iv)$\Rightarrow$(v) következtetés bizonyításához legyen $x \in E$ tetszőleges. Azt kell igazolni, hogy

$$\|u(x) - x\| = \inf_{y \in Im(u)} \|y - x\|,$$

hiszen a $P_{Im(u)}$ operátor definíciója alapján ez az egyenlőség azt jelenti, hogy $u(x) = P_{Im(u)}(x)$. Ha $y \in Im(u)$ tetszőleges, akkor $y - u(x) \in Im(u)$ és $u(x) - x \in Ker(u)$, ezért a (iv) miatt $(y - u(x)|u(x) - x) = 0$, így

$$\|y - x\|^2 = \|(y - u(x)) + (u(x) - x)\|^2 = \|y - u(x)\|^2 + \|u(x) - x\|^2 \geq \|u(x) - x\|^2,$$

ezért $\|y - x\| \geq \|u(x) - x\|$, amiből $u(x) \in Im(u)$ alapján következik a bizonyítandó egyenlőség.

Az (v)$\Rightarrow$(i) következtetés bizonyításához megmutatjuk, hogy minden $H \subseteq E$ zárt lineáris altérre a P_H operátor önadjungált. Valóban, ha $x, y \in E$, akkor $P_H(x) \in H$ és a Riesz-féle felbontási tétel szerint $y - P_H(y) \in H^\perp$, ezért

$$(P_H(x)|y) = (P_H(x)|y - P_H(y)) + (P_H(x)|P_H(y)) = (P_H(x)|P_H(y)).$$

Ugyanakkor $x, y \in E$ esetén $P_H(y) \in H$ és a Riesz-féle felbontási tétel szerint $x - P_H(x) \in H^\perp$, ezért

$$(x|P_H(y)) = (x - P_H(x)|P_H(y)) + (P_H(x)|P_H(y)) = (P_H(x)|P_H(y)),$$

amiből következik, hogy $(P_H(x)|y) = (P_H(x)|P_H(y)) = (x|P_H(y))$, így $P_H = P_H^*$.

Ezzel az öt állítás ekvivalenciáját igazoltuk, és megmutattuk, hogy minden $H \subseteq E$ zárt lineáris altérre a P_H operátor önadjungált, továbbá folytonos és idempotens is, tehát projektor. Azt is tudjuk, hogy minden $H \subseteq E$ zárt lineáris altérre $H = Im(P_H)$, amiből azonnal következik az utolsó állítás.)

8. Lineáris operátorok Hilbert-terek között

A kvantummechanika heurisztikus megalapozásában döntő jelentősége van a *Heisenberg-féle felcserelési relációnak* eleget tevő operátorok előállításának. Pontosabban, olyan $E \neq \{0\}$ komplex Hilbert-teret (esetleg prehilbert-teret) keresünk, amelyben léteznek olyan q és p önadjungált operátorok, amelyekre $[q,p] = i\hbar.id_E$ teljesül, ahol $\hbar$ egy 0-nál nagyobb valós szám, és $[q,p]$ a q és p operátorok *kommutátora*, tehát $[q,p] := q \circ p - p \circ q$. Ha itt q és p mindketten $E \to E$ lineáris operátorok, akkor $[q,p]$ szintén $E \to E$ lineáris operátor, tehát ilyenkor azt várjuk el, hogy a $[q,p]$ kommutátor az identikus operátor nem nulla számszorosa legyen.

A következő állítás megmutatja, hogy a Heisenberg-féle felcserélési reláció nem elégíthető ki nemtriviálisan *folytonos* lineáris operátorokkal.

Állítás. Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett, és legyenek $q,p \in \mathscr{L}(E)$ olyan operátorok, valamint $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan szám, hogy

$$[q,p] = \lambda.id_E,$$

ahol $[q,p] := q \circ p - p \circ q$. Ekkor $E \neq \{0\}$ esetén $\lambda = 0$, tehát $[q,p] = 0$, azaz $q \circ p = p \circ q$.

Bizonyítás. Először teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $[q,p^n] = n\lambda p^{n-1}$. Ez $n := 1$ esetén a $[q,p] = \lambda.id_E$ feltétel alapján igaz. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és az állítás igaz n-re, akkor az indukciós hipotézis alkalmazásával

$$\begin{aligned}
[q,p^{n+1}] &= q \circ p^{n+1} - p^{n+1} \circ q = (q \circ p^n) \circ p - p^{n+1} \circ q = \\
&= (p^n \circ q + n\lambda p^{n-1}) \circ p - p^{n+1} \circ q = (p^n \circ q) \circ p + n\lambda p^n - p^{n+1} \circ q = \\
&= p^n \circ (q \circ p) + n\lambda p^n - p^{n+1} \circ q = p^n \circ (p \circ q + \lambda.id_E) + n\lambda p^n - p^{n+1} \circ q = \\
&= p^{n+1} \circ q + \lambda p^n + n\lambda p^n - p^{n+1} \circ q = (n+1)\lambda p^{(n+1)-1}
\end{aligned}$$

adódik.

Tehát ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\begin{aligned}
n|\lambda|\|p^{n-1}\| &= \|[q,p^n]\| = \|(q \circ p) \circ p^{n-1} - p^{n-1} \circ (p \circ q)\| \leq \\
&\leq (\|q \circ p\| + \|p \circ q\|)\|p^{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Feltesszük, hogy $E \neq \{0\}$; ekkor két kizáró eset lehetséges.

(I) p *nilpotens* operátor, tehát van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $p^n = 0$; ekkor legyen $m := \min\{n \in \mathbb{N}^+ | p^n = 0\}$. Ha $m > 1$, akkor $p^{m-1} \neq 0$ és $p^m = 0$, így $0 = [q,p^m] = m\lambda p^{m-1}$, tehát $\lambda = 0$. Ha $m = 1$, akkor $p = p^1 = 0$, ezért $0 = [q,p] = \lambda.id_E$, tehát $id_E \neq 0$ miatt $\lambda = 0$ (itt használtuk ki, hogy $E \neq \{0\}$).

(II) p *nem nilpotens* operátor, tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $p^n \neq 0$. Ekkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re az imént bizonyított egyenlőtlenségből

$$|\lambda| \leq \frac{1}{n}(\|q \circ p\| + \|p \circ q\|)$$

következik, tehát $\lambda = 0$. ■

Példa. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és jelölje $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú, végtelenszer differenciálható függvények terét. Minden $k \in n$ esetén legyen

$$q_k : C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto pr_k \varphi,$$

ahol $pr_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a k-adik projekció-függvény, és legyen

$$p_k : C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto -i\hbar\partial_k \varphi,$$

ahol $\hbar \in \mathbb{R}^+$ egy rögzített szám. Nyilvánvaló, hogy minden $n \ni k$-ra q_k és p_k lineáris operátorok, és triviális számolással belátható, hogy minden $j, k \in n$ esetén

$$[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{j,k} id_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})},$$

tehát minden $n \ni k$-ra a q_k és p_k operátorok kielégítik a Heisenberg-féle felcserélési relációt. Az előző állításból következik, hogy *nem létezik* olyan norma a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ függvénytér felett, amely szerint minden $n \ni k$-ra a q_k és p_k operátorok folytonosak.

Állítás. Legyen E Hilbert-tér, F prehilbert-tér, és $u : E \rightarrowtail F$ olyan lineáris operátor, amelyre $Dom(u)$ sűrű lineáris altere E-nek (ilyenkor azt mondjuk, hogy *u sűrűn értelmezett*). Ekkor létezik egyetlen olyan $u^* : F \rightarrowtail E$ függvény, amelyre

$$Dom(u^*) = \{y \in F \mid (u(\cdot)|y) : Dom(u) \to \mathbb{K} \text{ folytonos lineáris funkcionál}\},$$

és teljesül az, hogy

$$(\forall x \in Dom(u))(\forall y \in Dom(u^*)) : \ (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

Ez az $u^* : F \rightarrowtail E$ leképezés lineáris operátor, és ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor az így értelmezett u^* operátor megegyezik az u (korábban értelmezett) adjungáltjával.

Bizonyítás. A $J_F : F \to F'$ leképezés konjugált-linearitásából következik, hogy a $Dom(u^*)$ halmaz lineáris altere F-bek. Legyen $y \in Dom(u^*)$ rögzített. Ekkor az $(u(\cdot)|y) : Dom(u) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos, és $Dom(u)$ sűrű E-ben, ezért a folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele (VI. fejezet, 2. pont) alapján létezik egyetlen olyan $f \in E'$, amely az $(u(\cdot)|y)$-nak kiterjesztése. A Riesz-féle reprezentációs tétel alapján létezik egyetlen olyan $z \in$E vektor, hogy $(\cdot|z) = f$. Ekkor z az a vektor E-ben, amelyre minden $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|y) = f(x) = (x|z)$ teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy

$$(\forall y \in Dom(u^*))(\exists z \in E)(\forall x \in Dom(u))(\forall y \in Dom(u^*)) : \ (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

Ha $y \in Dom(u^*)$ és $z_1, z_2 \in E$ olyanok, hogy minden $Dom(u) \ni x$-re $(x|z_1) = (u(x)|y) = (x|z_2)$, akkor az E feletti $(\cdot|z_1)$ és $(\cdot|z_2)$ folytonos lineáris funkcionálok megegyeznek a $Dom(u)$ sűrű halmazon, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $(\cdot|z_1) = (\cdot|z_2)$, tehát $z_1 = z_2$. Ezért jól értelmezett az az $u^* : Dom(u^*) \to E$ függvény, amelyre minden $y \in Dom(u^*)$ és $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$.

Az u^* függvény additív, mert ha $y_1, y_2 \in Dom(u^*)$, akkor tetszőleges $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|y_1) = (x|u^*(y_1))$ és $(u(x)|y_2) = (x|u^*(y_2))$, ezért

$$(x|u^*(y_1 + y_2)) = (u(x)|y_1 + y_2) = (u(x)|y_1) + (u(x)|y_2) = \\ = (x|u^*(y_1)) + (x|u^*(y_2)) = (x|u^*(y_1) + u^*(y_2)),$$

amiből következik, hogy $u^*(y_1) + u^*(y_2) - u^*(y_1 + y_2) \in Dom(u)^\perp = \{0\}$, vagyis $u^*(y_1) + u^*(y_2) = u^*(y_1 + y_2)$.

Az u^* függvény $\mathbb{K}$-homogén, mert ha $y \in Dom(u^*)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$, ezért

$$(x|u^*(\lambda y)) = (u(x)|\lambda y) = \overline{\lambda}(u(x)|y) = \overline{\lambda}(x|u^*(y)) = (x|\lambda u^*(y)),$$

amiből következik, hogy $u^*(\lambda y) - \lambda u^*(y) \in Dom(u)^\perp = \{0\}$, vagyis $u^*(\lambda y) = \lambda u^*(y)$.

Ez azt jelenti, hogy $u^* : F \rightarrowtail E$ lineáris operátor. Ha $u \in \mathscr{L}(E; F)$, akkor minden $y \in F$ esetén $(u(\cdot)|y) \in E'$, tehát $Dom(u^*) = F$, és az u^* operátor itteni definíciója szerint minden $E = Dom(u) \ni x$-re $(u(x)|y_2) = (x|u^*(y_2))$, ezért u^* egyenlő a korábban értelmezett adjungált operátorral. ■

Definíció. Legyen E Hilbert-tér, F prehilbert-tér, és $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor az u operátor *adjungáltjának* nevezzük és u^*-gal jelöljük azt az $u^* : F \rightarrowtail E$ lineáris operátort, amelyre

$$Dom(u^*) = \{y \in F \mid (u(\cdot)|y) : Dom(u) \to \mathbb{K} \text{ folytonos lineáris funkcionál}\},$$

és minden $(x, y) \in Dom(u) \times Dom(u^*)$ esetén $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$. Ha E Hilbert-tér, akkor egy $u : E \rightarrowtail E$ sűrűn értelmezett lineáris operátort *önadjungáltnak* (illetve *szimmetrikusnak*) nevezünk, ha $u = u^*$ (illetve $u \subseteq u^*$).

Vigyázzunk arra, hogy E Hilbert-tér, F prehilbert-tér, és $u : E \rightarrowtail F$ *nem sűrűn értelmezett* lineáris operátor (vagyis $\overline{Dom(u)} \neq E$), akkor az iménti definícióval adott $Dom(u^*) \subseteq F$ lineáris altér értelmezhető ugyan, de létezik olyan $y \in Dom(u^*)$, hogy vannak olyan $x_1, x_2 \in E$ vektorok, amelyekre $x_1 \neq x_2$, de minden $Dom(u) \ni x$-re $(x|x_1) = (u(x)|y) = (x|x_2)$, így az $u^*(y) \in E$ vektor nem értelmezhető egyértelműen. Ezért csakis sűrűn értelmezett lineáris operátorok adjungáltjáról beszélünk.

Egy sűrűn (sőt akár mindenütt) értelmezett lineáris operátor adjungáltjának definíciós tartománya lehet a $\{0\}$ altér (**2**. gyakorlat). Ha viszont az adjungált operátor is sűrűn értelmezett, akkor beszélhetünk az operátor második adjungáltjáról.

Állítás. Legyenek E és F prehilbert-terek (illetve Hilbert-terek). Az $E \times F$ lineáris szorzattér az

$$E \times F \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

normával ellátva szintén prehilbert-tér (illetve Hilbert-tér). Ezt a normát az

$$(E \times F) \times (E \times F) \to \mathbb{K}; \quad ((x,y),(x',y')) \mapsto (x|x') + (y|y')$$

skalárszorzás generálja.

Bizonyítás. Az V. fejezet 4. pontja szerint ez a függvény olyan norma az $E \times F$ lineáris szorzattér felett, amely ekvivalens a szorzatnormával, továbbá egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy teljesül rá a paralelogramma-egyenlőség. Ha E és F teljesek, akkor az $E \times F$ lineáris szorzattér is teljes a szorzatnormával ellátva, ezért ezzel a normával ellátva is teljes. ■

Megállapodunk abban, hogy ha E és F prehilbert-terek (illetve Hilbert-terek), akkor az $E \times F$ lineáris szorzatteret a továbbiakban mindig az előző állításban értelmezett normával látjuk el, tehát $E \times F$ prehilbert-tér (illetve Hilbert-tér) lesz.

Definíció. Legyenek E és F normált terek. Egy $u : E \rightarrowtail F$ lineáris operátort *zártnak* nevezünk, ha a $gr(u) := \{(x, u(x)) | x \in Dom(u)\}$ halmaz zárt az $E \times F$ szorzattérben a

$$E \times F \to \mathbb{R}_+; \quad (x,y) \mapsto \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

norma szerint.

Megjegyezzük, hogy ha E és F normált terek, akkor egy $u : E \rightarrowtail F$ lineáris operátor pontosan akkor zárt, ha minden $Dom(u)$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatra teljesül az, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in Dom(u)$, akkor az $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens F-ben és $u\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n)$. Valóban, ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy minden $gr(u)$-ban haladó, $E \times F$-ben konvergens sorozat határértéke eleme $gr(u)$-nak, ami a zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése alapján éppen azt jelenti, hogy $gr(u)$ zárt $E \times F$-ben.

Lemma. Legyenek E és F Hilbert-terek. Ekkor az

$$U_{E,F} : E \times F \to F \times E; \quad (x,y) \mapsto (y, -x),$$

$$V_{F,E} : F \times E \to E \times F; \quad (y,x) \mapsto (-x, y)$$

leképezések unitér operátorok, és minden $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lineáris operátorra

$$U_{E,F}\langle (gr(u))^{\perp} \rangle = gr(u^*), \quad V_{F,E}\langle gr(u^*) \rangle = (gr(u))^{\perp}.$$

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $V_{F,E} \circ U_{E,F} = id_{E\times F}$ és $U_{E,F} \circ V_{F,E} = id_{F\times E}$, tehát $U_{E,F}$ és $V_{F,E}$ lineáris bijekciók, továbbá természetesen izometriák, ezért mindketten unitér operátorok, és $U_{E,F}^{-1} = V_{F,E}$. Ebből következik, hogy a két bizonyítandó egyenlőség ekvivalens egymással; a másodikat fogjuk igazolni.

Legyen $(x', y') \in E \times F$. Ekkor a definíciók alapján

$$(x', y') \in (gr(u))^{\perp} \Leftrightarrow (\forall x \in Dom(u)): \ ((x', y')|(x, u(x))) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in Dom(u)): \ (x'|x) + (y'|u(x)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in Dom(u)): \ (u(x)|y') = (x| - x') \Leftrightarrow (y' \in Dom(u^*)) \wedge (u^*(y') = -x') \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y' \in Dom(u^*)) \wedge ((x', y') = (-u^*(y'), y')) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y' \in Dom(u^*)) \wedge ((x', y') = V_{F,E}(y', u^*(y'))).$$

Ezért $(gr(u))^{\perp} \subseteq V_{F,E}\langle gr(u^*)\rangle$ teljesül. Ha $(x', y') \in V_{F,E}\langle gr(u^*)\rangle$, akkor van olyan $y \in Dom(u^*)$, hogy fennáll az

$$(x', y') = V_{F,E}(y, u^*(y)) = (-u^*(y), y)$$

egyenlőség, így $y' = y$ és $(x', y') = V_{F,E}(y', u^*(y'))$, tehát az iménti ekvivalenciák szerint $(x', y') \in (gr(u))^{\perp}$, következésképpen $V_{F,E}\langle gr(u^*)\rangle \subseteq (gr(u))^{\perp}$. ■

Állítás. Ha E, F Hilbert-terek, és $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lineáris operátor, akkor u^* zárt operátor. Hilbert-térben önadjungált operátor zárt operátor.

Bizonyítás. Az előző lemma alapján $gr(u^*) = U_{E,F}\langle (gr(u))^{\perp}\rangle$ és $(gr(u))^{\perp}$ zárt halmaz $E \times F$-ben, továbbá az $U_{E,F} : E \times F \to F \times E$ operátor unitér, tehát homeomorfizmus, így $U_{E,F}\langle (gr(u))^{\perp}\rangle$ is zárt $F \times E$-ben. ■

Állítás. Ha E Hilbert-tér és $u : E \rightarrowtail E$ önadjungált operátor, akkor $Dom(u) = E$ ekvivalens azzal, hogy u folytonos.

Bizonyítás. Ha $Dom(u) = E$, akkor az előző állítás alapján $u : E \to E$ zárt lineáris operátor az E Banach-téren, tehát a zártgráf-tétel szerint u folytonos. Megfordítva, ha u folytonos, akkor nyilvánvaló, hogy $Dom(u^*) = E$, tehát $u = u^*$ miatt $Dom(u) = E$. ■

Következmény. Ha E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett és $q, p : E \rightarrowtail E$ önadjungált operátorok, valamint $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ olyan szám, hogy

$$[q, p] \subseteq \lambda.id_E,$$

(ahol $[q, p] := q \circ p - p \circ q$ a q és p operátorok kommutátora), akkor $E \neq \{0\}$ esetén *q vagy p nem folytonos* operátor (vagy ami ugyanaz: *q vagy p nem mindenütt értelmezett* operátor).

(**Megjegyzés**. A definíció szerint $[q, p] : E \rightarrowtail E$ az a lineáris operátor, amelyre $Dom([q, p]) := \overset{-1}{q}\langle Dom(p)\rangle \cap \overset{-1}{p}\langle Dom(q)\rangle$, és minden $Dom([q, p]) \ni x$-re $[q, p](x) := q(p(x)) - p(q(x))$. Tehát ha q vagy p nem mindenütt értelmezett, akkor $[q, p]$ sem mindenütt értelmezett, ezért biztosan nem teljesülhet a *$[q, p] = \lambda.id_E$ operátor-egyenlőség*, hiszen itt a jobb oldalon E-n mindenütt értelmezett operátor áll.)

Bizonyítás. Ha *q és p* folyonosak (vagy ami az előző álliás alapján ugyanaz: mindenütt értelmezve vannak), akkor a $[q, p] \subseteq \lambda.id_E$ tartalmazásból $[q, p] = \lambda.id_E$ következne, tehát $E \neq \{0\}$ miatt $\lambda = 0$. ■

A **10**. gyakorlatban megvilágítjuk, hogy a Heisenberg-féle felcserélési reláció milyen értelemben elégíthető ki Hilbert-tér önadjungált operátoraival. Jóval később, a XVII. fejezet 12. pontjában szó lesz a Heisenberg-féle felcserélési reláció alternatív formájáról, a *Weyl-féle felcserélési relációról*, amely matematikai szempontból sokkal könnyebben kezelhető, mint Heisenberg eredeti formulája.

Gyakorlatok

1. Legyen E *véges dimenziós* vektortér a 0 karakterisztikájú K test felett, és legyenek $q, p : E \to E$ olyan lineáris operátorok, valamint $\lambda \in K$ olyan elem, hogy

$$[q, p] = \lambda id_E,$$

(ahol $[q, p] := q \circ p - p \circ q$ a q és p operátorok kommutátora). Ekkor $E \neq \{0\}$ esetén $\lambda = 0$, tehát $[q, p] = 0$, vagyis $q \circ p = p \circ q$.

(*Útmutatás.* Ha $[q, p] = \lambda.id_E$, akkor $Tr([q, p]) = Tr(\lambda id_E) = \lambda dim(E)$, és könnyen igazolható, hogy $Tr([q, p]) = Tr(q \circ p) - Tr(p \circ q) = 0$, tehát ha $dim(E) \neq 0$, akkor $\lambda = 0$.)

2. Legyen E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, és $u : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál E felett. Ekkor az $u^* : \mathbb{K} \rightarrowtail E$ jól értelmezett lineáris operátor, és

- ha u folytonos, akkor $Dom(u^*) = \mathbb{K}$ és $u^*(1) = J_E^{-1}(u)$;

- ha u nem folytonos, akkor $Dom(u^*) = \{0\}$, tehát az $u^* : \mathbb{K} \rightarrowtail E$ adjungált operátor nem sűrű értelmezett.

3. (*Lineáris operátorok az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozattérben.*) Az $l^2_{\mathbb{K}}$ sorozatteret ellátjuk a $\|\cdot\|_2$ normával: ekkor $l^2_{\mathbb{K}}$ Hilbert-tér. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbf{e}_n \in l^2_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n(m) = \delta_{m,n}$. Jelölje továbbá $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ az $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ függvények halmazát, amelynek elemeit "végtelen" mátrixoknak tekinthetjük. Minden $\mathbf{t} := (t_{jk})_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ esetén értelmezzük az $u_{\mathbf{t}} : l^2_{\mathbb{K}} \rightarrowtail l^2_{\mathbb{K}}$ függvényt úgy, hogy

$$Dom(u_{\mathbf{t}}) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}} \,\big|\, \big((\forall j \in \mathbb{N}) : \ (t_{jk}x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}\big) \wedge$$
$$\wedge \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{jk}x_k\right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}\right)\},$$

és minden $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Dom(u_{\mathbf{t}})$ esetén

$$u_{\mathbf{t}}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{jk}x_k\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

a) Mutassuk meg, hogy $u_{\mathbf{t}} : l^2_{\mathbb{K}} \rightarrowtail l^2_{\mathbb{K}}$ lineáris operátor, és a következő állítások ekvivalensek.

(i) $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq Dom(u_{\mathbf{t}})$.

(ii) Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_k \in Dom(u_{\mathbf{t}})$.

(iii) Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{jk})_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$, vagyis a $\mathbf{t}$ mátrix mindegyik oszlopában álló sorozat négyzetesen abszolút szummálható.

Továbbá, a

$$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq Dom(u_{\mathbf{t}})) \ \wedge \ (u_{\mathbf{t}}\langle\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\rangle \subseteq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$$

kijelentés ekvivalens azzal, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-hoz van olyan $n_k \in \mathbb{N}$, hogy minden $j > n_k$ természetes számra $t_{jk} = 0$, vagyis a $\mathbf{t}$ mátrix mindegyik oszlopában álló sorozat eleme $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$-nek.

b) Legyen $\mathbf{t} := (t_{jk})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$, és definíció szerint $\mathbf{t}^* := (\overline{t_{kj}})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Tegyük fel, hogy minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{jk})_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_K$ és a $\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|t_{jk}|^2\right)$ sor konvergens. Ekkor $u_{\mathbf{t}} : l^2_K \to l^2_K$ *teljesen folytonos* lineáris operátor és $u^*_{\mathbf{t}} = u_{\mathbf{t}^*}$. Mutassuk meg, hogy szeparábilis Hilbert-tér felett létezik injektív teljesen folytonos önadjungált operátor!

c) Legyen $\mathbf{t} := (t_{jk})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ olyan, hogy $u_{\mathbf{t}} \in \mathscr{L}(l^2_K)$. Ekkor minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{jk})_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_K$ és $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}|t_{jk}|^2 < +\infty$, továbbá minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{jk})_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_K$ és $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{\infty}|t_{jk}|^2 < +\infty$.

(*Útmutatás.* a) Az (i)$\Rightarrow$(ii) következtetés nyilvánvaló, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{e}_n \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Ha (ii) teljesül, akkor minden $\mathbb{N} \ni j,k$-ra $\mathbf{e}_k \in Dom(u_{\mathbf{t}})$ miatt $(t_{j,m}\mathbf{e}_k(m))_{m\in\mathbb{N}} = t_{j,k}\mathbf{e}_k \in l^1_{\mathbb{K}}$, és $(t_{j,k})_{j\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty}t_{j,m}\mathbf{e}_k(m)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$, vagyis (iii) teljesül. Végül, ha (iii) igaz és $k \in \mathbb{N}$, akkor $\left(\sum_{m=0}^{\infty}t_{j,m}\mathbf{e}_k(m)\right)_{j\in\mathbb{N}} = (t_{j,k})_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$, tehát a $Dom(u_{\mathbf{t}})$ értelmezése alapján $\mathbf{e}_k \in Dom(u_{\mathbf{t}})$, ezért $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq Dom(u_{\mathbf{t}})$, hiszen $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ egyenő az $\{\mathbf{e}_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz által generált lineáris altérrel $l^2_{\mathbb{K}}$-ben, így (i) teljesül.

Ha a

$$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq Dom(u_{\mathbf{t}})) \;\wedge\; (u_{\mathbf{t}}\langle\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\rangle \subseteq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$$

kijelentés teljesül, akkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{j,k})_{j\in\mathbb{N}} = u_{\mathbf{t}}(\mathbf{e}_k) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, tehát létezik olyan $n_k \in \mathbb{N}$, hogy minden $j > n_k$ természetes számra $t_{j,k} = 0$. A fordított következtetés hasonlóan igazolható.

b) Jelölje $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{t}_n \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ azt az elemet, amely minden $(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ párhoz a 0 értéket rendeli, ha $j > n$, míg a $t_{j,k}$ értéket rendeli, ha $j \le n$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $u_{\mathbf{t}_n} : l^2_{\mathbb{K}} \to l^2_{\mathbb{K}}$ véges dimenziós értékű folytonos lineáris operátor, és ha $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$, akkor az elemi Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján

$$\|(u_{\mathbf{t}} - u_{\mathbf{t}_n})((x_k)_{k\in\mathbb{N}})\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}t_{j,k}x_k\right|^2 \le \sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|t_{j,k}|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^2\right) \le$$

$$\le \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|t_{j,k}|^2\right)\right)\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2,$$

következésképpen fennáll az

$$\|u_{\mathbf{t}} - u_{\mathbf{t}_n}\| \le \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|t_{j,k}|^2\right)}$$

egyenlőtlenség. A (ii) alapján ez azt jelenti, hogy az $(u_{\mathbf{t}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat konvergál $u_{\mathbf{t}}$-hez az operátornorma szerint. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $u_{\mathbf{t}_n}$ teljesen folytonos operátor, ezért a XII. fejezet, 1. pont, **16**. gyakorlat c) pontja szerint $u_{\mathbf{t}}$ is teljesen folytonos operátor.

Legyenek $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$ tetszőlegesek. Az (i) alapján minden $\mathbb{N} \ni j$-re $(t_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$, tehát a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}x_k$ sor abszolút konvergens, így a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}x_k\overline{y}_j$ sor is abszolút konvergens. Továbbá, $j \in \mathbb{N}$ esetén az elemi Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}x_k\overline{y}_j| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2}\|x\|_2|y_j|,$$

és a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2}\right) |y_j|$ sor konvergens, hiszen $y \in l^2_{\mathbb{K}}$ és a feltevés szerint $\left(\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}x_k\overline{y}_j|\right)$ sor konvergens, ezért a $(t_{j,k}x_k\overline{y}_j)_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kettős sorozatra alkalmazhatjuk a diszkrét Lebesgue-Fubini-tételt (VII. fejezet, 10. pont). Az adódik, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} t_{j,k}x_k\overline{y}_j$ sor abszolút konvergens, és a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} |t_{j,k}x_k\overline{y}_j|\right)$ sor konvergens, és fennáll a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\overline{y}_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\overline{y}_j\right)$$

egyenlőség. Ez bármely két $x, y \in l^2_{\mathbb{K}}$ elemre teljesül, tehát ha $y \in l^2_{\mathbb{K}}$ rögzített, akkor, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} t_{j,k}\overline{y}_j$ sor abszolút konvergens (ehhez elég olyan $l^2_{\mathbb{K}} \ni x$-et választani, amelyre $x_k = 1$), így a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \overline{t}_{j,k}y_j$ sor is abszolút konvergens, és a $\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{t}_{j,k}y_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat eleme $l^2_{\mathbb{K}}$-nak, mert az elemi Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} \overline{t}_{j,k}y_j\right|^2 \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2\right) \|y\|_2^2,$$

és a feltevés szerint a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2}\right)$ sor is konvergens, ami látható a diszkrét Lebesgue-Fubini-tételből, ha azt alkalmazzuk a $(|t_{j,k}|^2)_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kettős sorozatra.

Ez azt jelenti, hogy $l^2_{\mathbb{K}} = Dom(u_{\mathbf{t}})$. Ha $x, y \in l^2_{\mathbb{K}}$ tetszőlegesek, akkor az előzőek alapján

$$(x|u_{\mathbf{t}^*}(y)) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\overline{y}_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\overline{y}_j\right) = (u_{\mathbf{t}}(x)|y) = (x|\left(u_{\mathbf{t}}\right)^*(y)),$$

ezért $u_{\mathbf{t}^*} = (u_{\mathbf{t}})^*$.

Ha $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$ olyan sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $c_k \neq 0$, és $\mathbf{t} := (c_k\delta_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, akkor az előzőek szerint $u_{\mathbf{t}} \in \mathscr{L}(l^2_{\mathbb{K}})$ teljesen folytonos operátor (amely még önadjungált is, ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $c_k \in \mathbb{R}$), és könnyen látható, hogy $u_{\mathbf{t}}$ injektív. Ebből a XII. fejezet 6. pontjának utolsó állítása alapján kapjuk, hogy minden szeparábilis Hilbert-térben létezik injektív teljesen folytonos önadjungált operátor.

c) Legyen $\mathbf{t} := (t_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in M_N(\mathbb{K})$ olyan, hogy $u_{\mathbf{t}} \in \mathscr{L}(l^2_{\mathbb{K}})$. Az $u_{\mathbf{t}}$ operátorra $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq l^2_{\mathbb{K}} = Dom(u_{\mathbf{t}})$, ezért az a) alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $(t_{j,k})_{j\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$. Ha $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$, akkor $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Dom(u_{\mathbf{t}})$, tehát minden $\mathbb{N} \ni j$-re a $\sum_{k\in\mathbb{N}} t_{j,k}x_k$ sor (abszolút) konvergens, így a XII. fejezet, 3. pontja, **3**. gyaakorlat b) része alapján $(t_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{K}}$. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mathbf{e}_k \in Dom(u_{\mathbf{t}})$ és $\|\mathbf{e}_k\|_2 = 1$, ezért

$$\sum_{j=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{m=0}^{\infty} t_{j,m}\mathbf{e}_k(m)\right|^2 = \|u_{\mathbf{t}}(\mathbf{e}_k)\|^2_{\leq}\|u_{\mathbf{t}}\|^2,$$

tehát fennáll a

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2 \leq \|u_{\mathbf{t}}\|^2 < +\infty$$

egyenlőtlenség. Legyen most $j \in \mathbb{N}$ rögzített, és x az a numerikus sorozat, amelyre $\|(t_{j,m})_{m\in\mathbb{N}}\|_2 = 0$ esetén $x := 0$, míg $\|(t_{j,m})_{m\in\mathbb{N}}\|_2 > 0$ esetén minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $x_k := \dfrac{\overline{t}_{j,k}}{\|(t_{j,m})_{m\in\mathbb{N}}\|_2}$. Ekkor $x \in l^2_{\mathbb{K}}$ és $\|x\|_2 \leq 1$, tehát

$$\|u_{\mathbf{t}}\| \geq \|u_{\mathbf{t}}(x)\|_2 \geq |(u_{\mathbf{t}}(x))_j| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} t_{j,k}x_k\right| = \|(t_{j,m})_{m\in\mathbb{N}}\|_2.$$

Ez minden $j \in \mathbb{N}$ esetén igaz, tehát teljesül a

$$+\infty > \|u_{\mathbf{t}}\|^2 \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|(t_{j,m})_{m\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty} |t_{j,k}|^2$$

egyenlőtlenség is.)

4. Legyen E Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $u : E \rightarrowtail E$ (nem feltétlenül sűrűn értelmezett) lineáris operátort *formálisan szimmetrikusnak* nevezünk, ha minden $x, y \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|y) = (x|u(y))$.

a) Ha $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, akkor egy $u : E \rightarrowtail E$ lineáris operátor pontosan akkor formálisan szimmetrikus, ha minden $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|x) \in \mathbb{R}$,

b) Az $u : E \rightarrowtail E$ lineáris operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha formálisan szimmetrikus és sűrűn értelmezett.

c) Az $u : E \rightarrowtail E$ lineáris operátor *formálisan pozitívnak* nevezzük, ha minden $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|x) \subset \mathbb{R}_+$. Minden formálisan pozitív operátor formálisan szimmetrikus. Ha $u : E \rightarrowtail E$ sűrűn értelmezett formálisan pozitív operátor, és $x \in Dom(u)$, valamint $y \in E$, akkor az $u(x) = y$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy a

$$Dom(u) \to \mathbb{R}; \quad x' \mapsto (u(x')|x') - 2\mathfrak{Re}(x'|y)$$

függvénynek globális minimuma van az x pontban. (Megjegyezzük, hogy a sűrűn értelmezett formálisan pozitív operátorokat *pozitív operátoroknak* nevezzük.)

d) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és jelölje $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú függvények terét. Ha $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ és $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, akkor a

$$\triangle f = g \text{ teljesül } \mathbb{R}^n\text{-en } \mu_n\text{-majdnem mindenütt}$$

kijelentés ekvivalens azzal, hogy a

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \to \mathbb{R}; \quad \psi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|grad(\psi)\|^2 \, d\mu_n + \mathfrak{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\overline{g} \, d\mu_n$$

energia-funkcionálnak globális minimuma van az f pontban. (Itt $f, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ esetén $\triangle f := \sum\limits_{k \in n} \partial_k^2 f$ és $\|grad(\psi)\|^2 := \sum\limits_{k \in n} |\partial_k \psi|^2$.)

(*Útmutatás.* a) Tegyük fel, hogy minden $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x)|x) \in \mathbb{R}$. Legyenek $x, y \in Dom(u)$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{C}$ számra teljesül az, hogy $(u(\lambda x+y)|\lambda x+y) \in \mathbb{R}$, tehát

$$|\lambda|^2(u(x)|x) + \lambda(u(x)|y) + \overline{\lambda}(u(y)|x) + (u(y)|y) \in \mathbb{R},$$

így $(u(x)|x), (u(y)|y) \in \mathbb{R}$ miatt minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mathfrak{Im}(\lambda(u(x)|y) + \overline{\lambda}(u(y)|x)) = 0.$$

Ebből a $\lambda := 1$ választással kapjuk, hogy $\mathfrak{Im}(u(x)|y) = \mathfrak{Im}(x|u(y))$, és a $\lambda := i$ választással $\mathfrak{Re}(u(x)|y) = \mathfrak{Re}(x|u(y))$ adódik, tehát $(u(x)|y) = (x|u(y))$. Ezért u formálisan szimmetrikus operátor.

b) Ha u formálisan szimmetrikus és $Dom(u)$ sűrű E-ben, akkor $y \in Dom(u)$ esetén $J_E(y) \circ u : Dom(u) \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre bármely $x \in Dom(u)$ esetén $(J_E(y) \circ u)(x) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = J_E(u(y))(x)$, vagyis $J_E(y) \circ u = J_E(u(y))|_{Dom(u)}$, így $J_E(y) \circ u$ folytonos, azaz $y \in Dom(u^*)$. Ez azt jelenti, hogy $Dom(u) \subseteq Dom(u^*)$, és minden $x, y \in Dom(u)$ esetén $(x|u^*(y)) = (u(x)|y) = (x|u(y))$, tehát $u^*(y) = u(y)$. Ezért az u operátor szimmetrikus.

c) Legyen $u : E \rightarrowtail E$ sűrűn értelmezett, formálisan pozitív operátor és $x \in Dom(u)$, $y \in E$. Tegyük fel, hogy $u(x) = y$. Ekkor könnyen látható, hogy minden $Dom(u) \ni z$-re az u formális pozitivitása folytán

$$(u(x+z)|x+z) - 2\mathfrak{Re}(x+z|y) = (u(x)|x) - 2\mathfrak{Re}(x|y) + (u(z)|z) \geq (u(x)|x) - 2\mathfrak{Re}(x|y),$$

tehát a

$$Dom(u) \to \mathbb{R}; \quad x' \mapsto (u(x')|x') - 2\mathfrak{Re}(x'|y)$$

függvénynek x-ben globális minimuma van.

Megfordítva, tegyük fel, hogy ennek a függvénynek x-ben globális minimuma van; megmutatjuk, hogy az $u(x)-y$ vektor ortogonális a $Dom(u)$ altérre, tehát $u(x) = y$. Ehhez legyen $z \in Dom(u)$ rögzített. Ekkor az x-re vonatkozó feltevés és az u formális pozitivitása (tehát formális szimmetrikussága) folytán

$$0 \leq (u(x+z)|x+z) - 2\mathfrak{Re}(x+z|y) - (u(x)|x) + 2\mathfrak{Re}(x|y) =$$

$$= (u(z)|z)+(u(x)|z)+(u(z)|x)-2\mathfrak{Re}(z|y)=(u(z)|z)+(u(x)|z)+(z|u(x))-2\mathfrak{Re}(z|y) =$$

$$= (u(z)|z) + 2\mathfrak{Re}(z|u(x) - y).$$

Ide z helyére a $-z$ vektort téve $0 \leq (u(z)|z) - 2\mathfrak{Re}(z|u(x) - y)$ adódik, ezért minden $Dom(u) \ni z$-re

$$|\mathfrak{Re}(z|u(x) - y)| \leq \frac{1}{2}(u(z)|z).$$

Ha $z \in Dom(u)$ rögzített, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén felírva ezt az egyenlőtlenséget z helyett az εz vektorra azt kapjuk, hogy $\varepsilon|\mathfrak{Re}(z|u(x) - y)| \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon^2(u(z)|z)$, tehát minden $Dom(u) \ni z$-re és $\mathbb{R} \ni \varepsilon$-ra

$$|\mathfrak{Re}(z|u(x) - y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(u(z)|z)$$

teljesül. Adott $z \in Dom(u)$ esetén itt ε-nal 0-hoz tartva kapjuk, hogy $\mathfrak{Re}(z|u(x) - y) = 0$. Ha $z \in Dom(u)$, akkor $iz \in Dom(u)$, ezért $0 = \mathfrak{Re}(iz|u(x) - y) = -\mathfrak{Im}(z|u(x) - y)$, tehát $(z|u(x) - y) = 0$, amit bizonyítani kellett.

d) Tekintsük az $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ komplex Hilbert-teret, és legyen

$$u : L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \rightarrowtail L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$$

az a lineáris operátor, amelyre $Dom(u) := \{f^\bullet | f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\}$, és minden $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ esetén $u(f^\bullet) := (-\triangle f)^\bullet$. Ekkor u sűrűn értelmezett, formálisan pozitív operátor $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$-ben, mert ha $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, akkor a Lebesgue-Fubini-tétel és a Newton-Leibniz formula alapján

$$(u(f^\bullet)|f^\bullet)_{\mu_n,2} = ((-\triangle f)^\bullet|f^\bullet)_{\mu_n,2} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\sum_{k \in n} \partial_k^2 f \right) \overline{f} \, d\mu_n =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in n} \left(\partial_k((\partial_k f)\overline{f}) - |\partial_k f|^2 \right) \, d\mu_n = -\sum_{k \in n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k((\partial_k f)\overline{f}) \, d\mu_n +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|grad(f)\|^2 \, d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|grad(f)\|^2 \, d\mu_n \geq 0,$$

ahol $(\cdot|\cdot)_{\mu_n,2}$ jelöli az $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-tér skalárszorzását. Ezért $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ és $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ esetén a c) pontból kapjuk, hogy az $u(f^\bullet) = (-g)^\bullet$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy az

$$\mathscr{E} : Dom(u) \to \mathbb{R}; \quad \psi^\bullet \mapsto (u(\psi^\bullet)|\psi^\bullet)_{\mu_n,2} - 2\mathfrak{Re}(\psi^\bullet|(-g)^\bullet)_{\mu_n,2}$$

leképezésnek globális minimuma van $f^\bullet$-ban. Ugyanakkor az $u(f^\bullet) = (-g)^\bullet$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $\triangle f = g$ teljesül $\mathbb{R}^n$-en μ_n-majdnem mindenütt. Ugyanakkor $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ esetén

$$\mathscr{E}(\psi^\bullet) = 2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|grad(\psi)\|^2 \, d\mu_n + \mathfrak{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\overline{g} \, d\mu_n\right),$$

tehát az $\mathscr{E}$ függvénynek pontosan akkor van globális minimuma van $f^\bullet$-ban, ha a

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}; \quad \psi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|grad(\psi)\|^2 \, d\mu_n + \mathfrak{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\overline{g} \, d\mu_n$$

leképezésnek az f helyen globális minimuma van.)

5. Legyenek E és F Hilbert-terek. Ha $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lineáris operátor, akkor

$$(Im(u))^\perp = Ker(u^*),$$

és u értékkészlete pontosan akkor sűrű F-ben, ha u^* injektív. Ha $u : E \rightarrowtail E$ önadjungált operátor, akkor $Im(u)$ pontosan akkor sűrű E-ben, ha u injektív.

6. Legyenek E és F Hilbert-terek. Ha $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett zárt operátor, akkor az $u^* : F \rightarrowtail E$ operátor is sűrűn értelmezett és $u = (u^*)^*$.

(*Útmutatás.* Legyen $y \in (Dom(u^*))^\perp$. Ekkor $y' \in Dom(u^*)$ esetén $(y|y') = 0$, következésképpen

$$0 = ((0,y)|(-u^*(y'), y')) = ((0,y)|V_{F,E}(y', u^*(y'))),$$

tehát az u zártsága miatt $(0,y) \in (V_{F,E}\langle gr(u^*)\rangle)^\perp = (gr(u))^{\perp\perp} = \overline{gr(u)} = gr(u)$. Ezért van olyan $x \in Dom(u)$, hogy $(0,y) = (x, u(x))$, vagyis $x = 0$ és $y = u(x) = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $u^* : F \rightarrowtail E$ operátor is sűrűn értelmezett. Ezért írható, hogy

$$V_{E,F}\langle gr(u^{**})\rangle = (gr(u^*))^\perp,$$

így u zártsága miatt fennállnak a

$$gr(u) = \overline{gr(u)} = (gr(u))^{\perp\perp} = (V_{F,E}\langle gr(u^*)\rangle)^\perp = V_{F,E}\langle (gr(u^*))^\perp\rangle =$$

$$= V_{F,E}\langle V_{E,F}\langle gr(u^{**})\rangle\rangle = -gr(u^{**}) = gr(u^{**})$$

egyenlőségek, hiszen $V_{F,E} \circ V_{E,F} = -id_{E\times F}$.)

7. Legyenek E és F Hilbert-terek. Egy $u : E \rightarrowtail F$ (nem feltétlenül sűrűn értelmezett) lineáris operátort *lezárhatónak* nevezünk, ha létezik olyan $v : E \rightarrowtail F$ zárt operátor, hogy $u \subseteq v$.

a) Ha $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lezárható operátor, akkor $\overline{u}$ (tehát az $u \subseteq E \times F$ halmaz lezártja az $E \times F$ normált szorzattérben) az egyetlen olyan $E \rightarrowtail F$ zárt lineáris operátor, amely az u-nak kiterjesztése; ezt az $\overline{u} : E \rightarrowtail F$ (szintén sűrűn értelmezett) zárt lineáris operátort nevezzük az *u lezártjának*.

b) Minden $u : E \rightarrowtail E$ szimmetrikus operátor lezárható, de lehetséges az, hogy $\overline{u}$ nem önadjungált operátor.

c) Az $u : E \rightarrowtail E$ sűrűn értelmezett lineáris operátor pontosan akkor lezárható, ha u^* is sűrűn értelmezett. Ha $u : E \rightarrowtail E$ sűrűn értelmezett lezárható lineáris operátor, akkor $\overline{u} = (u^*)^*$.

(*Útmutatás.* c) Tegyük fel, hogy az $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lineáris operátor lezárható. Ekkor $\overline{u} : E \rightarrowtail F$ is sűrűn értelmezett és zárt operátor, tehát a **6**. gyakorlat szerint az $\overline{u}^* : F \rightarrowtail E$ operátor is sűrűn értelmezett és $\overline{u}^* \subseteq u^*$. Ezért u^* is sűrűn értelmezett és $u \subseteq u^{**} \subseteq \overline{u}^{**} = \overline{u}$. De u^{**} zárt operátor, tehát az $\overline{u}$ definíciója szerint $\overline{u} \subseteq u^{**}$, így $\overline{u} = u^{**}$.

Megfordítva, ha $u : E \rightarrowtail F$ sűrűn értelmezett lineáris operátor és u^* is sűrűn értelmezett, akkor $u \subseteq u^{**}$ és u^{**} zárt operátor, tehát u lezárható.)

8. Legyen $(T, \mathscr{R}, \mu)$ pozitív mértéktér, F Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f : T \to \mathbb{K}$ μ-mérhető függvény. Értelmezzük azt a

$$Q_f : L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu) \rightarrowtail L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$$

leképezést, amelyre

$$Dom(Q_f) := \{\psi^\bullet \in L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu) \mid f\psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)\},$$

és minden $\psi^\bullet \in Dom(Q_f)$ esetén

$$Q_f(\psi^\bullet) := (f\psi)^\bullet.$$

a) Q_f sűrűn értelmezett lineáris operátor az $L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ Hilbert-térben, és $(Q_f)^* = Q_{\overline{f}}$.

b) Ha μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \in \mathbb{R}$, akkor Q_f önadjungált operátor.

c) Ha f korlátos, akkor $Dom(Q_f) = L^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ és Q_f folytonos normális operátor, valamint $\|Q_f\| \leq |||f|||$.

d) Ha μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $|f(t)| = 1$, akkor Q_f unitér operátor.

(*Útmutatás.* a) Legyen $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ rögzített, és vegyünk olyan $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő halmazsorozatot $\mathscr{R}$-ben, amelyre $[\psi \neq 0] \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, valamint legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H_n := E_n \cap [|f| \leq n]$. Ekkor az $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat is monoton növő és minden tagja μ-integrálható, továbbá természetesen $[\psi \neq 0] \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\chi_{H_n}\psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$ és $f\chi_{H_n}\psi \in \mathscr{L}^2_F(T, \mathscr{R}, \mu)$, mert $f\chi_{H_n} : T \to \mathbb{C}$ korlátos μ-mérhető függvény. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\chi_{H_n}\psi)^\bullet \in Dom(Q_f)$. Továbbá $\psi^\bullet = \lim\limits_{n\to\infty} (\chi_{H_n}\psi)^\bullet$ a $\|\cdot\|_{\mu,2}$ szerint, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi - \chi_{H_n}\psi\|^2 = 0$ a T halmazon pontonként, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\|\psi - \chi_{H_n}\psi\|^2 = \chi_{T\setminus H_n}\|\psi\|^2 \leq \|\psi\|^2,$$

és $\int^* \|\psi\|^2 \, d\mu < +\infty$, tehát a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi^\bullet - \left(\chi_{H_n}\psi\right)^\bullet\|_{\mu,2}^2 = \lim_{n\to\infty} \int^* \|\psi - \chi_{H_n}\psi\|^2 \, d\mu = 0.$$

Ezért a $Dom(Q_f)$ altér sűrű az $L^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ Hilbert-térben.

Megmutatjuk, hogy $(Q_f)^* = Q_{\overline{f}}$. Ha $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, akkor az $f\psi$ függvény μ-mérhetősége és a négyzetes integrálhatóság kritériuma szerint teljesülnek a következő ekvivalenciák:

$$\psi^\bullet \in Dom(Q_f) \Leftrightarrow f\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu) \Leftrightarrow \int^* \|f\psi\|^2 \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int^* \|\overline{f}\psi\|^2 \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow \overline{f}\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu) \Leftrightarrow \psi^\bullet \in Dom(Q_{\overline{f}}),$$

ami azt jelenti, hogy $Dom(Q_f) = Dom(Q_{\overline{f}})$. Tehát ha $\varphi,\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ olyanok, hogy $\varphi^\bullet,\psi^\bullet \in Dom(Q_f)$, akkor

$$(Q_f(\varphi^\bullet)|\psi^\bullet) = \int_T (f\varphi|\psi) \, d\mu = \int_T (\varphi|\overline{f}\psi) \, d\mu = (\varphi^\bullet|Q_{\overline{f}}(\psi^\bullet)).$$

Ebből következik, hogy $\psi^\bullet \in Dom(Q_f)$ esetén a

$$Dom(Q_f) \to \mathbb{C}; \quad \psi^\bullet \mapsto (Q_f(\varphi^\bullet)|\psi^\bullet)$$

lineáris funkcionál folytonos, tehát $\psi^\bullet \in Dom((Q_f)^*)$, és $(Q_f)^*(\psi^\bullet) = Q_{\overline{f}}(\psi^\bullet)$, vagyis $Q_{\overline{f}} \subseteq (Q_f)^*$.

Megfordítva, legyen $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ olyan, hogy $\psi^\bullet \in Dom((Q_f)^*)$. Legyen $\psi' \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ olyan, hogy $(\psi')^\bullet = (Q_f)^*(\psi^\bullet)$, vagyis minden $Dom(Q_f) \ni \varphi^\bullet$ esetén $(Q_f(\varphi^\bullet)|\psi^\bullet)_{\mu,2} = (\varphi^\bullet|(\psi')^\bullet)_{\mu,2}$. Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő halmazsorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $[\psi \neq 0] \cup [\psi' \neq 0] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, továbbá legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H_n := E_n \cap [|f| \leq n]$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen

$$\psi_n := \chi_{H_n}(\psi' - \overline{f}\psi).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a ψ_n függvény μ-mérhető, továbbá

$$\int^* \|\chi_{H_n}\overline{f}\psi\|^2 \, d\mu \leq n^2 \int^* \|\psi\|^2 \, d\mu < +\infty,$$

tehát a négyzetes integrálhatóság kritériuma szerint $\chi_{H_n}\overline{f}\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, azonkívül természetesen $\chi_{H_n}\psi' \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ is teljesül, így $\psi_n \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $f\chi_{H_n}\psi' \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, mert $f\chi_{H_n}$ korlátos μ-mérhető függvény. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $f\chi_{H_n}\overline{f}\psi = |f|^2\chi_{H_n}\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, mert $|f|^2\chi_{H_n}$ is korlátos μ-mérhető függvény. Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f\psi_n \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, vagyis $\psi_n^\bullet \in Dom(Q_f)$. Ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\int_T (f\psi_n|\psi) \, d\mu = (Q_f(\psi_n^\bullet)|\psi^\bullet)_{\mu,2} = (\psi_n^\bullet|(\psi')^\bullet)_{\mu,2} = \int_T (\psi_n|\psi'_n) \, d\mu,$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$0 = \int\limits_T (\psi_n|\psi')\ d\mu - \int\limits_T (f\psi_n|\psi)\ d\mu = \int\limits_T (\psi_n|\psi' - \overline{f}\psi)\ d\mu = \int^* \chi_{H_n} \|\psi' - \overline{f}\psi\|^2\ d\mu.$$

Ebből a felső integrál monoton σ-folytonossága és

$$[\|\psi' - \overline{f}\psi\|^2 \neq 0] \subseteq [\psi \neq 0] \cup [\psi' \neq 0] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$$

alapján kapjuk, hogy

$$\int^* \|\psi' - \overline{f}\psi\|^2\ d\mu = \int^* \chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n} \|\psi' - \overline{f}\psi\|^2\ d\mu = \int^* \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{H_n}\right) \|\psi' - \overline{f}\psi\|^2\ d\mu =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \chi_{H_n} \|\psi' - \overline{f}\psi\|^2\ d\mu = 0.$$

Ezért $\overline{f}\psi = \psi'$ teljesül a T halmazon μ-majdnem mindenütt, így $\overline{f}\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, azaz $\psi^\bullet \in Dom(Q_{\overline{f}})$ és $Q_{\overline{f}}(\psi^\bullet) := (\overline{f}\psi)^\bullet = (\psi')^\bullet = (Q_f)^*(\psi^\bullet)$. Ez azt jelenti, hogy $(Q_f)^* \subseteq Q_{\overline{f}}$ is teljesül.

b) Ha μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) \in \mathbb{R}$, akkor $f = \overline{f}$ a T halmazon μ-majdnem mindenütt, ezért $Q_f = Q_{\overline{f}}$, így az a)-ból azonnal kapjuk, hogy $Q_f = (Q_f)^*$.

c) Ha f korlátos, akkor a négyzetes integrálhatóság kritériuma szerint minden $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$ esetén $f\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, vagyis $Dom(Q_f) = \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$. Továbbá, ha $\psi \in \mathscr{L}^2_F(T,\mathscr{R},\mu)$, akkor

$$\|Q_f(\psi^\bullet)\|^2_{\mu,2} = \|f\psi\|^2_{\mu,2} = \int\limits_T |f|^2\|\psi\|^2\ d\mu \leq |||f|||^2\|\psi\|^2_{\mu,2},$$

tehát Q_f folytonos és $\|Q_f\| \leq |||f|||^2\|$. Ekkor a Q_f operátor nyilvánvalóan normális, mert az a) alkalmazásával $(Q_f)^* \circ Q_f = Q_{\overline{f}} \circ Q_f = Q_{|f|^2} = Q_f \circ Q_{\overline{f}} = Q_f \circ (Q_f)^*$ adódik.

d) Ha μ-majdnem minden $t \in T$ esetén $|f(t)| = 1$, akkor $|f|^2 = 1$ a T halmazon μ-majdnem mindenütt, tehát a c)-ben feírt operátoregyenlőségek alapján $(Q_f)^* \circ Q_f = Q_f \circ (Q_f)^* = Q_{|f|^2} = Q_{1_T} = id_{L^2_F(T,\mathscr{R},\mu)}$, ahol 1_T a $T \to \mathbb{C}$ azonosan 1 függvény. Ezért Q_f unitér operátor.)

9. Legyen E Hilbert-tér és $u \in \mathscr{L}(E)$ unitér operátor. Ha $v : E \rightarrowtail E$ sűrűn értelmezett lineáris operátor, akkor $u^{-1} \circ v \circ u : E \rightarrowtail E$ szintén sűrűn értelmezett lineáris operátor és

$$(u^{-1} \circ v \circ u)^* = u^{-1} \circ v^* \circ u.$$

Speciálisan, ha $v : E \rightarrowtail E$ önadjungált operátor, akkor $u^{-1} \circ v \circ u$ is önadjungált operátor.

10. (*A Heisenberg-féle felcserélési reláció teljesítése önadjungált operátorokkal.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, F komplex Hilbert-tér, és minden $k \in n$ esetén

$$q_k : L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \rightarrowtail L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$$

az a leképezés, amelyre

$$Dom(q_k) := \{\psi^\bullet \in L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \mid pr_k\psi \in \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)\},$$

és minden $\psi^\bullet \in Dom(q_k)$ esetén

$$q_k(\psi^\bullet) := (pr_k\psi)^\bullet,$$

ahol $pr_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a k-adik projekció-függvény. Legyen továbbá $\hbar \in \mathbb{R}^+$ rögzített szám és minden $n \ni k$-ra

$$p_k := \hbar\, \mathbb{F}^{-1} \circ q_k \circ \mathbb{F},$$

ahol $\mathbb{F}$ az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-tér feletti Fourier-transzformáció (XII. fejezet, 7. pont, **8**. gyakorlat). Ekkor minden $k \in n$ esetén

$$\{\psi^\bullet | \psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)\} \subseteq Dom(q_k) \cap Dom(p_k),$$

és $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$ esetén

$$p_k(\psi^\bullet) = (-i\hbar\partial_k\psi)^\bullet.$$

Továbbá, minden $k \in n$ esetén q_k és p_k nem folytonos (vagyis nem mindenütt értelmezett) önadjungált operátorok az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térben, és ha $j, k \in n$, akkor

$$[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk} id_{L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)}$$

teljesül az $\{\psi^\bullet | \psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)\} \subseteq L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ sűrű lineáris altéren.

(*Útmutatás.* Minden $n \ni k$-ra $q_k = Q_{pr_k}$ (**8**. gyakorlat), ezért q_k önadjungált operátor az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térben, így a **9**. gyakorlat szerint p_k is önadjungált operátor az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ Hilbert-térben, hiszen az $L^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$ tér feletti Fourier-transzformáció unitér operátor. Ha $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$ és $k \in n$, akkor $pr_k\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$, tehát $\{\psi^\bullet | \psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)\} \subseteq Dom(q_k)$.

Legyen most $k \in n$ rögzítve. Megmutatjuk, hogy $\{\psi^\bullet | \psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)\} \subseteq Dom(p_k)$, és minden $C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F) \ni \psi$-re $p_k(\psi^\bullet) = (-i\hbar\partial_k\psi)^\bullet$. Valóban, ha $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$, akkor minden $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $(\partial_k\psi)\chi_{-p} = \partial_k(\psi\chi_{-p}) + ip_k\psi\chi_{-p}$ és $\psi\chi_{-p} \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$, ezért a Lebesgue-Fubini-tétel és a Newton-Leibniz formula alapján

$$(\mathscr{F}(\partial_k\psi))(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_k\psi)\chi_{-p}\, d\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_k(\psi\chi_{-p})\, d\mu_n +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(ip_k) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\chi_{-p}\, d\mu_n = ip_k(\mathscr{F}\psi)(p).$$

Ez azt jelenti, hogy $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$ esetén $pr_k\mathscr{F}\psi = -i\mathscr{F}(\partial_k\psi)$, és természetesen $\partial_k\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n; F)$, tehát a XII. fejezet, 7. pont, **8**. gyakorlat szerint $pr_k\mathscr{F}\psi \in$

$\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n) \cap \mathscr{L}^2_F(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$. Ezért minden $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ függvényre $\mathbb{F}(\psi^\bullet) = (\mathscr{F}\psi)^\bullet \in Dom(q_k)$, vagyis $\psi^\bullet \in \overset{-1}{\mathbb{F}}\langle Dom(q_k)\rangle = Dom(p_k)$. Továbbá, ha $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$, akkor a XII. fejezet, 7. pont, **8**. gyakorlat szerint

$$p_k(\psi^\bullet) = \hbar(\mathbb{F}^{-1} \circ q_k \circ \mathbb{F})(\psi^\bullet) = \hbar\mathbb{F}^{-1}(q_k((\mathscr{F}\psi)^\bullet)) = \hbar\mathbb{F}^{-1}((pr_k\mathscr{F}\psi)^\bullet) =$$

$$= \hbar((\overline{\mathscr{F}}(pr_k\mathscr{F}\psi))^\bullet = -i\hbar(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(\partial_k\psi)))^\bullet = (-i\hbar\partial_k\psi)^\bullet.$$

Ha $j, k \in n$, akkor minden $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; F)$ függvényre a

$$[q_j, p_k](\psi^\bullet) = i\hbar\delta_{j,k}\psi^\bullet$$

egyenlőség az előzőek alapján egyszerű számolással belátható.)

XIII. AZ ANALITIKUS GEOMETRIA ELEMEI

Az *analitikus geometria* a "geometriai természetű objektumok" analitikus tulajdonságaival foglalkozik. Geometriai természetű objektumok a különféle "felületek" véges dimenziós valós vektorterekben. Habár a felületek fogalma intuitíve eléggé tisztának tűnik, korántsem triviális olyan szigorú definíciót adni rájuk, amely összhangban van a róluk alkotott intuitív képünkkel, ugyanakkor tartalmas analitikus elméletük is létezik. Ennek indoklásaként elegendő a "vonalak" (vagyis az "egydimenziós felületek") esetét tekinteni. Első közelítésben ezek folytonos függvények értékkészleteiként értelmezhetők, de az V. fejezet 11. pontjának **13**. gyakorlatában láttuk, hogy ez a definíció nincs összhangban a (folytonos) vonalakról kialakult szemléletünkkel.

Az analitikus geometriának három, viszonylag jól megkülönböztethető ága van. A *topologikus geometria* (másnéven *topologikus sokaságok elmélete*) azoknak a topologikus tereknek a speciális tulajdonságaival foglalkozik, amelyek minden pontjának van olyan környezete, amely homeomorf egy véges dimenziós valós vektortér nyílt részhalmazával. Az ilyen tulajdonságú topologikus terek *lokálisan euklidészi tereknek* is nevezzük. A *differenciálgeometria* (másnéven *differenciálható sokaságok elmélete*) azokkal a topologikus terekkel foglalkozik, amelyek minden pontjához hozzárendelhető egy Banach-tér (a pont *érintőtere*) olymódon, hogy a pont valamely környezete homeomorf az érintőtér valamely nyílt részhalmazával, továbbá az a függvény, amely a halmaz minden pontjához a érintőteret rendeli (bizonyos értelemben) differenciálható. Az ilyen típusú terekkel kapcsolatban olyan objektumokat lehet értelmezni (elsősorban a *tenzormezőket*), amelyek legegyszerűbb speciális esetét (ti. a Banach-terek között ható folytonosan differenciálható függvények esetét) a VII. fejezetben részletesen megvizsgáltuk. Végül, az *integrálgeometria* nem más, mint az *általános geometriai integrálelmélet*, amelyről a X. fejezet bevezetésében volt szó. Tehát az integrálgeometriában a speciális differenciálható sokaságokkal (például *Riemann-sokaságokkal*), valamint a speciális feltételeknek eleget tevő *differenciálformákkal* kapcsolatban bevezethető kitüntetett mértékeket, valamint az integrálelméleti és differenciálelméleti tulajdonságok közötti összefüggéseket elemezzük. Az integrálgeometria nevezetes része a *Stokes-tételkör*, amelynek fontos reprezentánsa az itt bemutatásra kerülő *Gauss-Osztrogradszkij tétel.*

Az analitikus geometriának rendkívüli jelentősége van az analízis alkalmazásai szempontjából. Ennek szemléltetéseként felsoroljuk az elméleti fizikának néhány fejezetét, amelyekben az analitikus geometria fogalmainak és tételeinek alkalmazása nekülözhetetlennek tűnik.

- A *klasszikus mechanikában*, a sok szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszerek fázistere egy speciális differenciálható sokaság-típussal modellezhető: a *szimplektikus sokaságok ko-érintőterével.* A *klasszikus statisztikus mechanikában* szintén megjelennek (lokálisan véges dimenziós) differenciálható sokaságok, a klasszikus *Fock-terek.*

- A *klasszikus dinamikai rendszerek* elméletében, és a *termodinamikában* nélkülözhetetlenek a közönséges differenciálegyenlet-rendszerek, és azok megoldásainak tere, ami rendszerint olyan speciális differenciálható sokaság, amelynek analitikus geometriai tulajdonságai jól tükrözik a rendszer egyensúlyi, stabilitási, illetve kaotikus vonásait. A termodinamikában a fázisok és a fázisátmenetek egzakt leírásában felhasználjuk az analitikus geometria fogalmait.

- A *klasszikus elektrodinamika* integrális alapegyenleteinek (a *Maxwell-egyenletek*) megfogalmazása elképzelhetetlen a tenzormezőkkel kapcsolatos elemi differenciáloperációk (divergencia, rotáció, Laplace-operátor, külső derivált, stb.), és a *Riemann-sokaságokon* bevezethető *felületi mértékek* ismerete nélkül.

- A *gravitációs terek klasszikus elméletében*, és különösen az *általános relativitáselméletben* alapvetően fontos a *Lorentz-sokaságok* fogalma, valamint az ezeken bevezethető *konnexió, párhuzamos eltolás, torzió-tenzor* és *Ricci-tenzor* értelmezése. Ezek nélkül fel sem lehet írni a gravitációs terek alapegyenletét, az *Einstein-egyenletet.*

- A *speciális relativisztikus kvantumelméletben* fontos bizonyos *Lie-csoportok* folytonos unitér ábrázolásainak ismerete. A Lie-csoportok olyan csoportok, amelyek egyben differenciálható sokaságok is, és a csoportművelet differenciálható függvény.

- A *gravitációs terek kvantumelméletében* és a *kvantumtérelemléletben* határozott jele van annak, hogy a kifogástalan elméleti modellezésben különös szerepe lehet a *holomorf* (vagyis *komplex differenciálható*) *sokaságoknak.*

Magától értetődő, hogy egy ennyire szerteágazó és alkalmazásokban ilyen gazdag elméletet gyakorlatilag lehetetlen bemutatni a teljesség igényével. Ezért ebben a fejezetben csak egy olyan bevezető elméletet tárgyalunk, amely segítséget nyújthat az analitikus geometria mélyebb problémáinak megértéséhez. Az analízisnek ez a fejezete az általánosságnak különösen sokféle szintjén tárgyalható. A legelemibb szinten aritmetikai terek (vagyis a $\mathbb{K}^n$ terek) részsokaságait kellene tárgyalni. Az aritmetikai terekben létezik egy kitüntetett algebrai bázis, és ez meghatároz egy kitüntetett koordinátázást. Ez a tény kifejezetten zavaró lehet abban a gyakran előforduló esetben, amikor olyan differenciálgeometriai probémát vizsgálunk, amelynek megoldásához ez a kitüntetett koordinátázás nem megfelelő. Ilyen esetben más koordinátázás, vagyis másféle bázis választása válik szükségessé (vagy néha semmiféle koordinátázás nem célszerű); ekkor viszont lényegtelen az, hogy a vizsgált részsokaság aritmetikai térbe van beágyazva, vagyis csak az számít, hogy egy *véges dimenziós valós vektortér részsokaságáról* van szó. Ezért a sokaságelmélet legelemibb szintjén is érdemes véges dimenziós valós vektorterek részsokaságait tekinteni. Az ilyen típusú részsokaságok azért különösen egyszerűek, mert a velük kapcsolatban bevezethető legfontosabb differenciálgeometriai objektumok viszonylag "konkrét" formában értelmezhetők; például az érintőterek a tartalmazó vektortér lineáris alterei.

A véges dimenziós valós vektorterek részsokaságainak vannak olyan "külső" objektumai, illetve tulajdonságai, amelyek attól függenek, hogy szóbanforgó sokaság melyik vektortér részsokasága. Például a harmadik pontban részletesen tárgyaljuk a folytonos *normálvektor-mezők* létezésének problémáját euklidészi tér bizonyos hiperfelületein; ez tipikus példája az euklidészi terekbe ágyazott sokaságok külső objektumának. Azonban a differenciálgeometriában különösen fontos kérdés a sokaságok "belső", tehát csak a sokaság-struktúra által meghatározott jellemzőinek kiderítése. Ez a probléma vezetett el az *absztrakt sokaságok* értelmezéséhez, és azok analíziséhez. Ebben a fejezetben nem foglalkozunk absztrakt sokaságokkal, de az 1.

pont **9**. gyakorlatában bemutatjuk azt a természetes gondolatmenetet, amelynek mentén eljuthatunk a részsokaságok fogalmától az absztrakt sokaságokig.

Az első pontban értelmezzük a véges dimenziós valós vektorterek *részsokaságait* és ezek *érintőtereit*. Az érintőterek segítségével vezethetők be sokaságok felett a *tenzormezők* (speciálisan a *differenciálformák*). Ugyancsak az érintőterek létezése teszi lehetővé sokaságok között ható függvények differenciálhatóságának és derivált-függvényének értelmezését. Ezután bemutatjuk azokat a legfontosabb eljárásokat, amelyek segítségével részsokaságok konstruálhatók. E módszerek közül kiemelkedik a részsokaságok *normálegyenletekkel* való maghatározása, amelyről kiderül, hogy ez egyben (lokálisan) a legáltalánosabb módja részsokaságok értelmezésének. A normálegyenletekkel kapcsolatos a *szintfelületek kollektív paraméterezésének tétele*, amelynek fontos alkalmazása lesz az integrálgeometriában. Gyakori konstrukció a részsokaságok *szorzása*, valamint aritmetikai terek nyílt részhalmazainak (bizonyos) differenciálható függvények általi képek előállítása. Ez utóbbi nehéz probléma megoldásában fontos az *állandó rang tétele*.

A második pontban értelmezzük a végesdimenziós valós vektorterekbe ágyazott *Riemann-sokaságokat* és bemutatunk néhány nemtriviális példát. Itt csak azokról az alaptulajdonságokról lesz szó, amelyek nélkülözhetetlenek lesznek a felületi mértékek értelmezéséhez. A Riemann-sokaságokkal kapcsolatban bevezethető geometriai fogalmakra (például a *Levi-Civita konnexió, görbületi tenzormező, Gauss-görbület*, stb.) nem térünk ki. A *Riemann-geometria* részletes tárgyalása megtalálható a felsorolt szakirodalomban. Ezután a Riemann-sokaságok feletti *felületi mértékek* pontos definíciója következik, majd megvizsgáljuk a felületi mértékek szerinti *integrálás kritériumait*. Megmutatjuk, hogyan lehet folytonosan differenciálható függvényelből álló egységosztást előállítani sokaságok esetében, és megvizsgáljuk a térfogati és felületi mértékek szerinti integrálok kapcsolatát, amit a *Cavalieri-elv* fejez ki.

A harmadik pontban megadjuk az euklidészi terek nyílt részhalmazai topologikus határának felbontását a *reguláris*, illetve *irreguláris határra*. Látni fogjuk, hogy a reguláris határ olyan Riemann-sokaság lesz, amelyen bevezethet a *kimenő normálvektor-mező*. Ennek, és a felületi mértéknek segítségével értelmezhető a reguláris határon adott vektorfüggvények *fluxusa*.

Az utolsó pontban bebizonyítjuk a *Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformáját*, és annak közvetlen kövtkezményeit: a *Green-formulákat*. A tétel alkalmazhatóságát az elliptikus parciális differenciálegyenletek megoldásával kapcsolatban illusztráljuk. A Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételeiből és bizonyításából látható, hogy az érvényessége lényegében azon múlik, hogy a tételben szereplő vektormező tartója a nyílt halmaz irreguláris határát bizonyos értelemben "kicsi" halmazban metszi.

Megjegyezzük, hogy a fejezet után álló függelék által tartalmazott, topologikus terekkel kapcsolatos ismeretek nagyon hasznosak a fejezet anyagának megértése szempontjából, de nem nekülözhetetlenek. Azonban az *absztrakt sokaságok* elmélete feltételezi az általános topológia bizonyos mélységű ismeretét, sőt ennek az elméletnek van olyan speciális területe (a *globális analitikus geometria*), amelyben a sokaságok topologikus tulajdonságai különös hangsúlyt kapnak. A topologikus geometria pedig kifejezetten a lokálisan euklidészi topologikus terek elméletének tekinthető.

Ebben a fejezetben a következő megállapodásokhoz tartjuk magunkat.

– Az E betű mindenütt *véges dimenziós valós vektorteret* jelöl; $dim(E)$ az E dimenziója.

– Az m és n szimbólumok természetes számokat jelölnek. Továbbá, r és s nullánál nagyobb természetes számokat, vagy a ∞ szimbólumot jelölik.

– *Euklidészi téren* véges dimenziós valós Hilbert-teret értünk, amelynek skalárszorzását a $(\cdot|\cdot)$, és normáját a $\|\cdot\|$ szimbólum jelöli.

– Minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathscr{R}_m$ jelöli a *standard halmazgyűrűt* $\mathbb{R}^m$ felett, és μ_m jelöli az m-dimenziós *Lebesgue-mértéket.*

Irodalomjegyzék

1. L. Schwartz, *Analyse mathématique*, Hermann, Paris, 1967.

2. S. Kobayashi - K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vols. I-II, Interscience Pub., New York-London-Sydney, 1969.

3. D. Gromoll - W. Klingenberg - W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

4. J. Beem - P. Ehrlich, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker Inc., New York-Basel, 1981.

5. M. M. Постников, *Введение в теорию Морса*, Наука, Москва, 1971.

6. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I, *Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

7. M. Berger, *Géometrie*, I-II, CEDIC, Paris, 1977-1978.

8. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Variétés différentielles és analytiques, Fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1967-1971.

9. S. Lang, *Differential Manifolds*, Springer P.C., New York-Berlin-Heidelberg, 1985.

10. H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press, 1957.

11. H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.

12. S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

1. Véges dimenziós valós vektorterek részsokaságai

Definíció. Az $M \subseteq E$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú *lokális paraméterezésének* nevezünk minden olyan $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ függvényt, amelyre teljesülnek a következők.

- Az $Im(\Phi)$ halmaz nyílt M-ben, vagyis létezik olyan $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, amelyre $Im(\Phi) = M \cap \Omega$.

- A Φ függvény homeomorfizmus $Dom(\Phi)$ és $Im(\Phi)$ között.

- A $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ függvény C^r-osztályú (ezért $Dom(\Phi)$ is nyílt halmaz $\mathbb{R}^m$-ben), és minden $p \in Dom(\Phi)$ esetén a $(D\Phi)(p) : \mathbb{R}^m \to E$ lineáris operátor injektív.

Az $M \subseteq E$ halmaz Φ lokális paraméterezését *globálisnak* mondjuk, ha $Im(\Phi) = M$.

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban a "paraméterezés" szó mindenütt "lokális paraméterezést" jelent; ahol globális paraméterezésről van szó, ott ezt külön megemlítjük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $M \subseteq E$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú *részsokasága* E-nek, ha létezik az M halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezéseinek olyan $(\Phi_i)_{i\in I}$ rendszere, amelyre $M = \bigcup\limits_{i\in I} Im(\Phi_i)$. Azt mondjuk, hogy az $M \subseteq E$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú *elemi részsokasága* E-nek, ha létezik az M halmaznak m-dimenziós, C^r-osztályú globális paraméterezése. Az E vektortér $dim(E) - 1$ dimenziós részsokaságait *hiperfelületeknek*, és az E egydimenziós részsokaságait *vonalaknak* nevezzük E-ben.

Tehát az $M \subseteq E$ halmaz pontosan akkor m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, ha az M halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezéseinek értékkészletei *befedik* M-et, vagyis ha minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén van olyan V nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy létezik M-nek olyan Φ m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése, amelyre $Im(\Phi) = M \cap V$.

Megjegyzések. 1) Nyilvánvaló, hogy egy $M \subseteq E$ m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése egyben m-dimenziós, C^s-osztályú paraméterezése is, ha $s \leq r$. Ezért m-dimenziós, C^r-osztályú (elemi) részsokaság egyben m-dimenziós, C^s-osztályú (elemi) részsokaság is, ha $s \leq r$.

2) Ha Φ m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése az $M \subseteq E$ halmaznak, és $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor a $\Phi \big|_{\overset{-1}{\Phi}\langle\Omega\rangle}$ függvény szintén m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése M-nek, és természetesen $Im\left(\Phi \big|_{\overset{-1}{\Phi}\langle\Omega\rangle}\right) = M \cap \Omega$. Ezt az elemi tényt gyakran alkalmazzuk, külön hivatkozás nélkül.

3) Ha M nem üres m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, akkor $m \leq dim(E)$, hiszen ha $\mathfrak{a} \in M$ és V olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy a $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ függvény m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése M-nek és $Im(\Phi) = M \cap V$, akkor a $(D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})) : \mathbb{R}^m \to E$ lineáris operátor injektív, ezért $m = dim(\mathbb{R}^m) \leq dim(E)$.

4) Legyen $M \subseteq E$ legalább két elemű *kompakt* halmaz. Ekkor *nem létezik* olyan $m \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$, hogy M m-dimenziós, C^r-osztályú *elemi* részsokasága volna E-nek, vagyis M-nek nem létezhet m-dimenziós, C^r-osztályú globális paraméterezése. Ha ugyanis a $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ függvény m-dimenziós, C^r-osztályú globális paraméterezése M-nek, akkor Φ homeomorfizmus a $Dom(\Phi) \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz és $Im(\Phi) = M$ között; ekkor $Dom(\Phi)$ nem üres kompakt (ezért zárt) és nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, tehát az $\mathbb{R}^m$ összefüggősége miatt $Dom(\Phi) = \mathbb{R}^m$. Következésképpen $m = 0$, hiszen $m > 0$ esetén $\mathbb{R}^m$ nem kompakt. Ekkor viszont $M = Im(\Phi) = \{\Phi(0)\}$, vagyis M egy elemű.

5) Tegyük fel, hogy $\Omega, \Omega' \subseteq E$ nyílt halmazok, és $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^r-diffeomorfizmus Ω és Ω' között. Ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek és $M \subseteq \Omega$, akkor $\sigma\langle M\rangle$ szintén m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek. Valóban, ha $\mathfrak{a} \in \sigma\langle M\rangle$ és V olyan nyílt környezete $\sigma^{-1}(\mathfrak{a})$-nak E-ben, amelyre a $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ függvény olyan m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése M-nek, hogy $Im(\Phi) = M \cap V$, akkor nyilvánvaló, hogy a $\sigma\langle \Omega \cap V\rangle$ halmaz olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy a $\sigma \circ \Phi$ függvény m dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése $\sigma\langle M\rangle$-nek és $Im(\sigma \circ \Phi) = \sigma\langle M\rangle \cap \sigma\langle \Omega \cap V\rangle$.

6) Az *elemi részsokaságok* előállításának standard módja az, hogy tekintünk egy $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ C^r-osztályú függvényt, amely homeomorfizmus $Dom(\Phi)$ és $Im(\Phi)$ között, és minden $p \in Dom(\Phi)$ esetén a $(D\Phi)(p) : \mathbb{R}^m \to E$ lineáris operátor injektív. Ekkor az $Im(\Phi)$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú elemi részsokasága E-nek, és természetesen Φ az $Im(\Phi)$-nek globális m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése.

Példák. 1) Az E minden nem üres *diszkrét* részhalmaza 0-dimenziós, C^∞-osztályú részsokasága E-nek. Az E minden egy elemű részhalmaza 0-dimenziós, C^∞-osztályú elemi részsokasága E-nek. Minden $M \subseteq E$ *nyílt* halmaz $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú elemi részsokasága E-nek, és ha $u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to E$ lineáris bijekció, akkor az $u\Big|_{\overset{-1}{u}\langle M\rangle} : \mathbb{R}^{dim(E)} \rightarrowtail E$ függvény az M-nek globális $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú paraméterezése.

2) Legyen F is véges dimenziós valós vektortér, $U \subseteq E$ nem üres nyílt halmaz, és $f \in C^r(U; F)$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$\Psi_f : U \to E \times F; \quad x \mapsto (x, f(x))$$

függvény C^r-osztályú, és homeomorfizmus az U és $gr(f) := Im(\Psi_f)$ halmazok között, valamint minden $x \in U$ esetén a $(D\Psi_f)(x) : E \to E \times F$ deriváltoperátor injektív. Ezért minden $u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to E$ lineáris bijekcióra a $\Psi_f \circ u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to gr(f)$ leképezés $dim(E)$-dimenziós, C^r-osztályú globális paraméterezése az $gr(f)$ halmaznak, tehát $gr(f)$ (vagyis az f függvény *gráfja*) $dim(E)$-dimenziós, C^r-osztályú elemi részsokasága $E \times F$-nek.

Valóban, a Ψ_f függvény nyilvánvalóan injektív, tehát Ψ_f bijekció az $U := Dom(\Psi_f)$ és a $gr(f)$ halmaz között. Továbbá, a Ψ_f függvény mindkét komponens-függvénye C^r-osztályú, így Ψ_f is C^r-osztályú. A C^r-osztályú inverze az $E \times F \to E$ első projekció-függvény $gr(f)$-re vett leszűkítése, tehát Ψ_f homeomorfizmus U és $gr(f)$ között. Végül, $x \in U$ esetén minden $E \ni z$-re $((D\Psi_f)(x))(z) = (z, ((Df)(x))(z))$, amiből látható, hogy a $(D\Psi_f)(x) : E \to E \times F$ deriváltoperátor injektív.

3) Tekintsük a következő leképezést

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad p \mapsto \left(\frac{p(1+p^2)}{1+p^4}, \frac{p(1-p^2)}{1+p^4} \right),$$

és legyen $M := Im(\Phi)$. Ezt az M halmazt *Bernoulli-lemniszkátának* nevezzük. A Φ függvény folytonos bijekció $\mathbb{R}$ és M között, továbbá C^∞ osztályú, és minden $p \in \mathbb{R}$ esetén a $(D\Phi)(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ operátor injektív. Azonban a Φ inverze *nem folytonos* a $(0,0)$ pontban, tehát Φ nem 1-dimenziós, C^∞-osztályú globális paraméterezése M-nek. Könnyen látható, hogy M végtelen kompakt halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, tehát a 4) megjegyzés alapján M-nek egyáltalán nem létezhet 1-dimenziós, C^∞-osztályú globális paraméterezése.

4) Legyen E euklidészi tér. Minden $\mathfrak{a} \in E$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$S_r(\mathfrak{a}) := \{ \ x \in E \mid \|x - \mathfrak{a}\| = r \ \}$$

gömbfelület C^∞ osztályú hiperfelület E-ben (**2**. gyakorlat).

5) Legyen E euklidészi tér. Ha $\mathfrak{a} \in E$, $\mathbf{n} \in E$ és $\|\mathbf{n}\| = 1$, valamint $\lambda \in]-1, 1[$ valós szám, akkor a

$$C_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a}) := \{ \ x \in E \setminus \{\mathfrak{a}\} \mid (x - \mathfrak{a}|\mathbf{n}) = \lambda\|x - \mathfrak{a}\| \ \}$$

kúpfelület C^∞ osztályú elemi hiperfelület E-ben (**3**. gyakorlat).

6) Legyen E euklidészi tér. Minden $m \in \mathbb{R}^+$ esetén a

$$P_m := \left\{ \ (p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times E \ \middle| \ p_0 = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} \ \right\}$$

forgási paraboloid C^∞ osztályú elemi hiperfelület $\mathbb{R} \times E$-ben (**4**. gyakorlat).

7) Legyen E euklidészi tér és $m \in \mathbb{R}_+$. Értelmezzük a következő halmazokat

$$X_m^\pm := \{ \ (p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times E \mid p_0 = \pm\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2} \ \},$$

ha $m > 0$, míg

$$X_0^\pm := \{ \ (p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0\}) \mid p_0 = \pm\|\mathbf{p}\| \ \}.$$

Ekkor az $X_m^\pm$ halmazok C^∞ osztályú elemi hiperfelület $\mathbb{R} \times E$-ben (**5**. gyakorlat).

Legyen a Φ függvény m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése az $M \subseteq E$ halmaznak. Ekkor Φ injekció, tehát beszélhetünk a $\Phi^{-1} : E \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ inverzfüggvényről, de ha az $Im(\Phi)$ $(= Dom(\Phi^{-1}))$ halmaz nem nyílt részhalmaza E-nek (és látni fogjuk, hogy $m < dim(E)$ esetén mindig ez a helyzet), akkor a Φ^{-1} függvény a definíciós tartományának egyetlen pontjában sem lehet differenciálható, hiszen a $Dom(\Phi^{-1})$ halmaz belseje üres. Még az sem állítható, hogy Φ^{-1} kiterjeszthető egy $E \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ C^r-osztályú függvénnyé. Az viszont igaz, hogy Φ^{-1} *lokálisan kiterjeszthető* C^r-osztályú $E \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvénnyé. A pontos állítás a következő.

Tétel. Legyen a Φ függvény m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése az $M \subseteq E$ halmaznak. Minden $\mathfrak{a} \in Im(\Phi)$ pontnak létezik olyan V nyílt környezete E-ben, és létezik olyan $h \in C^r(V;\mathbb{R}^m)$ függvény, hogy

$$h \circ \Phi = id_{\overset{-1}{\Phi}\langle V\rangle}, \quad h\langle V \cap Im(\Phi)\rangle \subseteq Dom(\Phi), \quad \Phi(h(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$$

teljesül, ami ekvivalens azzal, hogy $\left(\Phi^{-1}\right)\big|_{V\cap Im(\Phi)} \subseteq h$ és $\Phi(h(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$.

Bizonyítás. Jelölje $p \in Dom(\Phi)$ azt a pontot, amelyre $\Phi(p) = \mathfrak{a}$. A $(D\Phi)(p) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;E)$ operátor injektív, ezért vehetünk olyan $v \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}^m)$ operátort, amelyre $v \circ (D\Phi)(p) = id_{\mathbb{R}^m}$. Ekkor a $v \circ \Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény definíciós tartománya egyenlő $Dom(\Phi)$-vel, C^r-osztályú, és $D(v\circ\Phi)(p) = v\circ(D\Phi)(p) = id_{\mathbb{R}^m}$ lineáris homeomofizmus. Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján létezik a p-nek olyan $U \subseteq Dom(\Phi)$ nyílt környezete $\mathbb{R}^m$-ben, hogy a $(v \circ \Phi)|_U$ függvény injektív, a $W := (v \circ \Phi)\langle U\rangle$ halmaz nyílt környezete $\mathbb{R}^m$-ben a $v(\Phi(p)) = v(\mathfrak{a})$ pontnak, és a $((v \circ \Phi)|_U)^{-1} : W \to U$ függvény C^r-osztályú. Nyilvánvaló, hogy a $V := \overset{-1}{v}\langle W\rangle$ halmaz nyílt E-ben, $v\langle V\rangle \subseteq W$ és $\mathfrak{a} \in V$. Legyen

$$h := ((v \circ \Phi)|_U)^{-1} \circ v\,\big|_V .$$

Ekkor $h \in C^r(V;\mathbb{R}^m)$ és

$$h \circ \Phi = \left(((v \circ \Phi)|_U)^{-1} \circ v\,\Big|_V\right) \circ \Phi = ((v \circ \Phi)|_U)^{-1} \circ (v|_V \circ \Phi) =$$

$$= ((v \circ \Phi)|_U)^{-1} \circ (v \circ \Phi)\Big|_{\overset{-1}{\Phi}\langle V\rangle} = id_{\overset{-1}{\Phi}\langle V\rangle} .$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$h\langle V\cap Im(\Phi)\rangle = \left(((v \circ \Phi)|_U)^{-1} \circ v\,\Big|_V\right)\langle V\cap Im(\Phi)\rangle = ((v \circ \Phi)|_U)^{-1}\langle v\langle V\cap Im(\Phi)\rangle\rangle \subseteq$$

$$\subseteq ((v \circ \Phi)|_U)^{-1}\langle W\rangle \subseteq U \subseteq Dom(\Phi).$$

Végül, $h(\mathfrak{a}) = ((v \circ \Phi)|_U)^{-1}(v(\mathfrak{a})) = p$, mert $\Phi(p) = \mathfrak{a}$, így $\Phi(h(\mathfrak{a})) = \Phi(p) = \mathfrak{a}$. Ez azt jelenti, hogy h olyan függvény, amelynek a létezését állítottuk. ■

Következmény. Ha a Φ függvény m-dimenziós és a Ψ függvény n-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése az $M \subseteq E$ halmaznak, akkor a $\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ és $\Psi^{-1} \circ \Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ függvények (amelyek egymás inverzei) C^r-diffeomorfizmusok, tehát $Im(\Phi) \cap Im(\Psi) \neq \emptyset$ esetén $m = n$.

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy a $\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény C^r-osztályú. Legyen $p \in Dom\left(\Phi^{-1} \circ \Psi\right) = \overset{-1}{\Psi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$ rögzített pont. Az előző tétel alapján a $\Psi(p) \in Im(\Phi)$ pontban létezik olyan V nyílt környezete E-ben, és létezik olyan $h \in C^r(V;\mathbb{R}^m)$, hogy $\Phi^{-1} = h$ a $V \cap Im(\Phi)$ halmazon. Ekkor $\Phi^{-1} \circ \Psi = h \circ \Psi$ az $U := \overset{-1}{\Psi}\langle V \cap Im(\Phi)\rangle \cap Dom(\Phi^{-1} \circ \Psi)$ halmazon. Az U halmaz nyílt $\mathbb{R}^n$-ben, mert $Im(\Phi)$ és $Im(\Psi)$ nyíltak M-ben, vagyis léteznek olyan Ω_Φ és Ω_Ψ nyílt halmazok E-ben, hogy $Im(\Phi) = M \cap \Omega_\Phi$ és $Im(\Psi) = M \cap Im(\Psi)$, így

$$U = \overset{-1}{\Psi}\langle V \cap Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle = \overset{-1}{\Psi}\langle V \cap M \cap \Omega_\Phi \cap M \cap \Omega_\Psi\rangle = \overset{-1}{\Psi}\langle V \cap \Omega_\Phi \cap \Omega_\Psi\rangle$$

nyílt $\mathbb{R}^n$-ben, hiszen $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrowtail E$ folytonos és $V \cap \Omega_\Phi \cap \Omega_\Psi$ nyílt E-ben. Ezért a $\Psi|_U : U \to E$ függvény C^r-osztályú, és a $h : V \to \mathbb{R}^m$ függvény is C^r-osztályú, valamint $Im\,(\Psi|_U) = \Psi\langle U\rangle \subseteq V \subseteq Dom(h)$, következésképpen a $h\circ(\Psi|_U) : U \to \mathbb{R}^m$ függvény C^r-osztályú. De ez a függvény egyenlő a $\Phi^{-1} \circ \Psi$ függvénnyel az U halmazon, és természetesen $p \in U$. Ezzel megmutattuk, hogy $Dom(\Phi^{-1} \circ \Psi)$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és a $\Phi^{-1} \circ \Psi$ függvény a definíciós tartományának minden pontjának valamely környezetén egyenlő egy C^r-osztályú függvénnyel, ezért a magasabb rendben való folytonos differenciálhatóság lokalitása miatt a $\Phi^{-1} \circ \Psi$ függvény C^r-osztályú.

Ha $Im(\Phi) \cap Im(\Psi) \neq \emptyset$, akkor a $\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény C^r-diffeomorfizmus a $\overset{-1}{\Psi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ nem üres nyílt halmazok között, tehát ha $p \in \overset{-1}{\Psi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$, akkor $D(\Phi^{-1} \circ \Psi)(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris bijekció, így $m = n$. ■

Következmény. Ha M nem üres m-dimenziós és n-dimenziós részsokasága E-nek, akkor $m = n$.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in M$ rögzített pont. Az M-nek létezik olyan Φ m-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése, és létezik olyan Ψ n-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése, hogy $\mathfrak{a} \in Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$. Ekkor $Im(\Phi) \cap Im(\Psi) \neq \emptyset$, tehát az előző állítás alapján $m = n$. ■

Definíció. Ha M nem üres m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, akkor az előző állítás szerint egyértelműen meghatározott m számot $dim(M)$ jelöli, és ezt az M sokaság *dimenziójának* nevezzük.

Következmény. Ha a Φ és Ψ függvények m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezései az $M \subseteq E$ halmaznak, akkor minden $\mathfrak{a} \in Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$ esetén

$$Im((D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a}))) = Im((D\Psi)(\Psi^{-1}(\mathfrak{a}))).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$. Nyilvánvaló, hogy $\Psi = \Phi \circ (\Phi^{-1} \circ \Psi)$ a $\overset{-1}{\Psi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$ halmazon. Látuk, hogy a $\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény C^r-diffeomorfizmus, továbbá a $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail E$ függvény C^r-osztályú, és $\Psi^{-1}(\mathfrak{a}) \in \overset{-1}{\Psi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$. Ezért a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$(D\Psi)(\Psi^{-1}(\mathfrak{a})) = (D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})) \circ (D(\Phi^{-1} \circ \Psi))(\Psi^{-1}(\mathfrak{a})).$$

Ebből az egyenlőségből következik, hogy $Im((D\Psi)(\Psi^{-1}(\mathfrak{a}))) \subseteq Im((D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})))$. A Φ és Ψ paraméterezések szerepét felcserélve kapjuk, hogy $Im((D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a}))) \subseteq Im((D\Psi)(\Psi^{-1}(\mathfrak{a})))$ is igaz, amiből következik az állítás. ■

Az iménti állítás azt mutatja, hogy ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, $\mathfrak{a} \in M$ és Φ tetszőleges olyan m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése M-nek, hogy $\mathfrak{a} \in Im(\Phi)$, akkor a

$$Im((D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a}))) \subseteq E$$

m-dimenziós lineáris altér *független* a Φ választásától. Ezért értelmes a következő definíció.

Definíció. Legyen M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek és $\mathfrak{a} \in M$. Ekkor

$$T_{\mathfrak{a}}(M) := Im((D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a}))),$$

ahol Φ tetszőleges olyan m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése M-nek, amelyre $\mathfrak{a} \in Im(\Phi)$. A $T_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq E$ m-dimenziós lineáris alteret az M sokaság $\mathfrak{a}$ pontbeli *érintőterének* nevezzük.

Definíció. Legyen M_1 m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú részsokasága az E_1 véges dimenziós valós vektortérnek és M_2 m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú részsokasága az E_2 véges dimenziós valós vektortérnek. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \to M_2$ függvény *C^r-osztályú*, ha $r \leq \min(r_1, r_2)$ és az M_1 minden Φ_1 m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú paraméterezésére és az M_2 minden Φ_2 m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú paraméterezésére a

$$\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1 : \mathbb{R}^{m_1} \rightarrowtail \mathbb{R}^{m_2}$$

függvény C^r-osztályú.

Figyeljük meg, hogy C^{r_1}-osztályú sokaságból C^{r_2}-osztályú sokaságba vezető függvénynek csak olyan C^r-osztályú simaságát értelmeztük, amelyre $r \leq \min(r_1, r_2)$ (holott logikailag nem helytelen magasabb simaság értelmezése sem).

Állítás. Legyen M_1 m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú részsokasága az E_1 véges dimenziós valós vektortérnek és M_2 m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú részsokasága az E_2 véges dimenziós valós vektortérnek. Legyen $f : M_1 \to M_2$ C^r-osztályú függvény. Ha Φ_1, Ψ_1 az M_1-nek m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú paraméterezései, valamint Φ_2, Ψ_2 az M_2-nek m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú paraméterezései, továbbá $\mathfrak{a} \in Im(\Phi_1) \cap Im(\Psi_1)$ és $f(\mathfrak{a}) \in Im(\Phi_2) \cap Im(\Psi_2)$, akkor

$$\big((D\Psi_2)(\Psi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1))(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D\Psi_1)(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)^{-1} =$$

$$= \big((D\Phi_2)(\Phi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1))(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D\Phi_1)(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)^{-1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Φ_1 és Ψ_1 paraméterezései M_1-nek, valamint Φ_2 és Ψ_2 paraméterezései M_2-nek. Legyen $\mathfrak{a} \in Im(\Phi_1) \cap Im(\Psi_1)$ olyan pont, hogy $f(\mathfrak{a}) \in Im(\Phi_2) \cap Im(\Psi_2)$. A $\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1$ függvény C^r-osztályú, ezért a

$$Dom(\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1) = \overset{-1}{\Psi_1}\langle \overset{-1}{f} \langle Im(\Psi_2)\rangle\rangle = \overset{-1}{\Psi_1}\langle Im(\Psi_1) \cap \overset{-1}{f} \langle Im(\Psi_2)\rangle\rangle$$

halmaz nyílt $\mathbb{R}^{m_1}$-ben. és Ψ_1 homeomorfizmus $Dom(\Psi_1)$ és $Im(\Psi_1)$ között, így az

$$Im(\Psi_1) \cap \overset{-1}{f} \langle Im(\Psi_2)\rangle = \Psi_1\langle \overset{-1}{\Psi_1}\langle Im(\Psi_1) \cap \overset{-1}{f} \langle Im(\Psi_2)\rangle\rangle\rangle$$

halmaz nyílt $Im(\Psi_1)$-ben, amely viszont nyílt az M_1 topologikus altérben. Ebből következik, hogy az $Im(\Psi_1) \cap \overset{-1}{f} \langle Im(\Psi_2)\rangle$ halmaz nyílt M_1-ben. Hasonlóan kapjuk, hogy az $Im(\Phi_1) \cap \overset{-1}{f}\langle Im(\Phi_2)\rangle$ halmaz is nyílt M_1-ben. Ezért ezek metszete, vagyis az

$$\Omega := (Im(\Phi_1) \cap Im(\Psi_1)) \cap \overset{-1}{f}\langle Im(\Phi_2) \cap Im(\Psi_2)\rangle$$

halmaz is nyílt M_1-ben, és ez mind $Im(\Phi_1)$-nek, mind $Im(\Psi_1)$-nek részhalmaza, valamint $\mathfrak{a} \in \Omega$. Ezért

$$\Psi_2 \circ (\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1) = \Phi_2 \circ (\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1) \circ (\Phi_1^{-1} \circ \Psi_1)$$

teljesül a $\overset{-1}{\Psi_1}\langle\Omega\rangle$ halmazon, és $\overset{-1}{\Psi_1}\langle\Omega\rangle$ nyílt környezete $\mathbb{R}^{m_1}$-ben a $\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a})$ pontnak. A $\Phi_1^{-1} \circ \Psi_1$ függvény C^r-osztályú, és a feltevés alapján a $\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1$ függvény C^r-osztályú, ezért a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$\big((D\Psi_2)(\Psi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1))(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) =$$

$$= \big((D\Phi_2)(\Phi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1))(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Phi_1^{-1} \circ \Psi_1))(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big).$$

Ugyanakkor $\Psi_1 = \Phi_1 \circ (\Phi_1^{-1} \circ \Psi_1)$ teljesül a $\overset{-1}{\Psi_1}\langle Im(\Phi_1) \cap Im(\Psi_1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$ nyílt halmazon, tehát

$$(D\Psi_1)(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a})) = \big((D\Phi_1)(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Phi_1^{-1} \circ \Psi_1))(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big),$$

vagyis fennáll a

$$(D(\Phi_1^{-1} \circ \Psi_1))(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a})) = \big((D\Phi_1)(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)^{-1} \circ \big((D\Psi_1)(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)$$

összefüggés is. Ezt az előző egyenlőségbe helyettesítve és a $(D\Psi_1)(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))$ operátor inverzével jobbról komponálva kapjuk, hogy

$$\big((D\Psi_2)(\Psi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1))(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D\Psi_1)(\Psi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)^{-1} =$$

$$= \big((D\Phi_2)(\Phi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1))(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D\Phi_1)(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)^{-1}$$

amit bizonyítani kellett. ■

Definíció. Legyen M_1 m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú részsokasága az E_1 véges dimenziós valós vektortérnek és M_2 m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú részsokasága az E_2 véges dimenziós valós vektortérnek, valamint $f : M_1 \to M_2$ C^r-osztályú függvény. Minden $\mathfrak{a} \in M_1$ esetén

$$T_{\mathfrak{a}}(f) := \big((D\Phi_2)(\Phi_2^{-1}(f(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D(\Phi_2^{-1} \circ f \circ \Phi_1))(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big) \circ \big((D\Phi_1)(\Phi_1^{-1}(\mathfrak{a}))\big)^{-1},$$

ahol Φ_1 az M_1-nek olyan m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú paraméterezései, valamint Φ_2 az M_2-nek olyan m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú paraméterezései, hogy $\mathfrak{a} \in Im(\Phi_1)$ és $f(\mathfrak{a}) \in Im(\Phi_2)$. A

$$T_{\mathfrak{a}}(f) \in \mathscr{L}(T_{\mathfrak{a}}(M_1); T_{\mathfrak{a}}(M_2))$$

lineáris operátort az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli *deriváltjának* nevezzük, valmint a

$$T(f) := (T_{\mathfrak{a}}(f))_{\mathfrak{a}\in M_1} \in \prod_{\mathfrak{a}\in M_1} \mathscr{L}(T_{\mathfrak{a}}(M_1); T_{\mathfrak{a}}(M_2))$$

leképezést az f *deriváltfüggvényének* nevezzük.

Az E véges dimenziós valós vektortér részsokaságainak szokásos előállítási módja az, hogy veszünk egy $n \in \mathbb{N}$ számot, valamint egy $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ függvényt, és minden $w \in Im(h)$ esetén képezzük a $[h = w]$ *szintfelületet*, vagyis a $\overset{-1}{h}\langle\{w\}\rangle$ halmazt. Kiderül, hogy bizonyos h-ra vonatkozó simasági és a h deriválfüggvényére vonatkozó nemelfajultsági feltételek teljesülése esetén ezek a szintfelületek valóban részsokaságok lesznek.

Tétel. (*Szintfelületek kollektív paraméterezésének tétele.*) Legyen $m \in \mathbb{N}$, $m \leq dim(E)$ és $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ C^r-osztályú függvény. Ha $\mathfrak{a} \in Dom(h)$ olyan pont, hogy a $(Dh)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor *szürjektív*, akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $V_{\mathfrak{a}} \subseteq Dom(h)$ nyílt környezete E-ben, és létezik $h(\mathfrak{a})$-nak olyan $U_{h(\mathfrak{a})}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^{dim(E)-m}$-ben, és létezik a 0-nak olyan U_0 nyílt környezete $\mathbb{R}^m$-ben, és létezik olyan $\Phi : U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \to V_{\mathfrak{a}}$ függvény, amely C^r-diffeomorfizmus, és $\Phi(0, h(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, valamint minden $w \in U_{h(\mathfrak{a})}$ esetén a $\Phi(\cdot, w) : U_0 \to E$ függvény m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezése a $[h = w] \cap V_{\mathfrak{a}}$ halmaznak (tehát $[h = w] \cap V_{\mathfrak{a}}$ m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek).

Bizonyítás. A $(Dh)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor szürjektivitása miatt vehetünk olyan $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)-m}; E)$ lineáris operátort, amelyre $((Dh)(\mathfrak{a}))\circ v = id_{\mathbb{R}^{dim(E)-m}}$. A v operátor injektív, ezért $dim(Im(v)) = dim(E) - m$, továbbá könnyen látható, hogy $Ker((Dh)(\mathfrak{a})) \oplus Im(v) = E$, ezért $dim(Ker((Dh)(\mathfrak{a}))) = m$. Legyen $u : \mathbb{R}^m \to Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$ tetszőleges lineáris bijekció, és képezzük azt az

$$f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}) \times \mathbb{R}^{dim(E)-m} \rightarrowtail \mathbb{R}^{dim(E)-m}$$

függvényt, amelyre

$$Dom(f) := \{((p, w), q) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}) \times \mathbb{R}^{dim(E)-m} | \mathfrak{a} + u(p) + v(q) \in Dom(h)\},$$

és minden $((p, w), q) \in Dom(f)$ esetén

$$f((p, w), q) := h(a + u(p) + v(q)) - w.$$

Világos, hogy $((0, h(\mathfrak{a})), 0) \in Dom(f)$ és $f((0, h(\mathfrak{a})), 0) = 0$. Továbbá, $Dom(f)$ nyílt részhalmaza $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}) \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}$-nek, mert a

$$g : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}) \times \mathbb{R}^{dim(E)-m} \to E; \quad ((p, w), q) \mapsto a + u(p) + v(q)$$

leképezés affin függvény, tehát folytonos, és $Dom(f) = \overset{-1}{g}\langle Dom(h)\rangle$, és $Dom(h)$ nyílt halmaz E-ben. Ugyanakkor az f függvény C^r-osztályú, mert $f = h \circ g - j$, ahol

$$j : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}) \times \mathbb{R}^{dim(E)-m} \to \mathbb{R}^{dim(E)-m}; \quad ((p, w), q) \mapsto w,$$

és a j függvény C^∞-osztályú (mert lineáris), és a g függvény C^∞-osztályú (mert affin), és h a hipotézis szerint C^r-osztályú. Könnyen látható, hogy $((p,w),q) \in Dom(f)$ esetén az $f((p,w),\cdot) : \mathbb{R}^{dim(E)-m} \rightarrowtail \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ parciális függvényre

$$(D(f((p,w),\cdot)))(q) = ((Dh)(\mathfrak{a} + u(p) + v(q))) \circ v,$$

amiből következik, hogy

$$(D(f((0,h(\mathfrak{a})),\cdot)))(0) = ((Dh)(\mathfrak{a})) \circ v = id_{\mathbb{R}^{dim(E)-m}},$$

vagyis $(D(f((0,h(\mathfrak{a})),\cdot)))(0)$ lineáris homeomorfizmus. Ezért az implicitfüggvény-tétel alapján létezik a $(0,h(\mathfrak{a}))$ pontnak olyan U' nyílt környezete $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}$-ben, és létezik olyan $\varphi : U' \to \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ C^r-osztályú függvény, hogy $\varphi(0,h(\mathfrak{a})) = 0$, és minden $(p,w) \in Dom(\varphi) = U'$ pontra $((p,w),\varphi(p,w)) \in Dom(f)$, valamint $f((p,w),\varphi(p,w)) = f((0,h(\mathfrak{a})),0) = 0$. Az f definíciója alapján ez azt jelenti, hogy minden $(p,w) \in U'$ esetén $\mathfrak{a} + u(p) + v(\varphi(p,w)) \in Dom(h)$ és

$$h(\mathfrak{a} + u(p) + v(\varphi(p,w))) = w.$$

Értelmezzük most a következő függvényt

$$\Phi' : U' \to E; \quad (p,w) \mapsto \mathfrak{a} + u(p) + v(\varphi(p,w)).$$

Világos, hogy a Φ' függvény C^r-osztályú, $Im(\Phi') \subseteq Dom(h)$, $\Phi'(0,h(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, és minden $(p,w) \in U'$ esetén $h(\Phi'(p,w)) = w$.

Megmutatjuk, hogy $Im(\Phi')$ nyílt halmaz E-ben, továbbá Φ' C^r-diffeomorfizmus a $Dom(\Phi') = U'$ és $Im(\Phi')$ halmazok között. Ha $(p,w) \in U'$, akkor $(Dh)(\mathfrak{a}) \circ v = id_{\mathbb{R}^{dim(E)-m}}$ miatt

$$((Dh)(\mathfrak{a}))\,(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a}) = ((Dh)(\mathfrak{a}))\,(u(p) + v(\varphi(p,w))) = \varphi(p,w),$$

tehát $v(\varphi(p,w)) = (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a})$, így

$$u(p) = \Phi'(p,w) - \mathfrak{a} - (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a})$$

teljesül. Az u operátor injektív, ezért $(p,w) \in U'$ esetén

$$p = u^{-1}\left(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a} - (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a})\right).$$

Ugyanakkor minden $U' \ni (p,w)$-re

$$w = h(\Phi'(p,w)),$$

ami azt jelenti, hogy

$$(p,w) = \left(u^{-1}\left(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a} - (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(\Phi'(p,w) - \mathfrak{a})\right), h(\Phi'(p,w))\right).$$

Könnyen látható, hogy minden $x \in E$ esetén

$$x - \mathfrak{a} - (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a}) \in Ker((Dh)(\mathfrak{a})) = Im(u),$$

mert $(Dh)(\mathfrak{a}) \circ v = id_{\mathbb{R}^{dim(E)-m}}$, tehát jól értelmezett az

$$E \to \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto u^{-1}\left(x - \mathfrak{a} - (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})\right)$$

leképezés, amely nyilvánvalóan C^∞-osztályú, hiszen affin függvény (és E véges dimenziós). Ebből következik, hogy a

$$\Psi : Dom(h) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}; \quad x \mapsto \left(u^{-1}\left(x - \mathfrak{a} - (v \circ (Dh)(\mathfrak{a}))(x - \mathfrak{a})\right), h(x)\right)$$

függvény C^r-osztályú, és $\Psi \circ \Phi' = id_{U'}$, vagyis Ψ a Φ'-nek C^r-osztályú *balinverze.* Ezért Φ' injektív, és minden $(p, w) \in U'$ esetén a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$id_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}} = (Did_{U'})(p, w) = (D(\Psi \circ \Phi'))(p, w) = (D\Psi)(\Phi'(p, w)) \circ (D\Phi')(p, w),$$

vagyis a $(D\Psi)(\Phi'(p, w))$ operátor balinverze a $(D\Phi')(p, w) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m} \to E$ lineáris operátornak, tehát ez utóbbi operátor injektív, így $dim(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}) = dim(E)$ miatt *bijekció.* Az inverzfüggvény-tételből következik, hogy $Im(\Phi')$ nyílt halmaz E-ben, és Φ' C^r-diffeomorfizmus a $Dom(\Phi') = U'$ és $Im(\Phi')$ halmazok között.

Az U' halmaz nyílt környezete a $(0, h(\mathfrak{a}))$ pontnak $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}$-ben, ezért a 0-nak van olyan U_0 nyílt környezete $\mathbb{R}^m$-ben és $h(\mathfrak{a})$-nak olyan $U_{h(\mathfrak{a})}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^{dim(E)-m}$-ben, hogy $U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \subseteq U'$. Értelmezzük a $V_\mathfrak{a}$ halmazt úgy, hogy $V_\mathfrak{a} := \Phi'\langle U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}\rangle$; ekkor $V_\mathfrak{a}$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben és $V_\mathfrak{a} \subseteq Im(\Phi') \subseteq Dom(h)$. Világos, hogy a $\Phi := \Phi'|_{U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}} : U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \to V_\mathfrak{a}$ függvény C^r-diffeomorfizmus.

A bizonyítás befejezéseként megmutatjuk, hogy minden $w \in U_{h(\mathfrak{a})}$ pontra a $\Phi(\cdot, w) : U_0 \to E$ függvény m-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése a $[h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ halmaznak. Ehhez legyen $w \in U_{h(\mathfrak{a})}$ rögzített. Minden $p \in U_0$ esetén

$$(D\Phi(\cdot, w))(p) = (D\Phi)(p, w) \circ j,$$

ahol $j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}$; $p \mapsto (p, 0)$, ezért a $(D\Phi(\cdot, w))(p) : \mathbb{R}^m \to E$ operátor injektív, hiszen j nyilvánvalóan injekció és $(D\Phi)(p, w)$ bijekció $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ és E között. Az is világos, hogy $\Phi(\cdot, w)$ homeomorfizmus U_0 és $Im(\Phi(\cdot, w))$ között, hiszen $\Phi(\cdot, w)^{-1} = \Phi^{-1}|_{Im(\Phi(\cdot, w))}$, és tudjuk, hogy a $\Phi^{-1} : V_\mathfrak{a} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ függvény folytonos. Ezért elegendő az $Im(\Phi(\cdot, w)) = [h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ egyenlőséget igazolni. Ha $p \in U_0$, akkor a Φ' és Φ értelmezése alapján $h(\Phi(p, w)) = h(\Phi'(p, w)) = w$, tehát fennáll az $Im(\Phi(\cdot, w)) \subseteq [h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ tartalmazás. Megfordítva, legyen $x \in [h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ tetszőleges. Ekkor $V_\mathfrak{a} := \Phi'\langle U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}\rangle$ miatt van olyan $(p', w') \in U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}$, hogy $x = \Phi'(p', w')$. Ekkor $w = h(x) = h(\Phi'(p', w')) = w'$, tehát $w = w'$, továbbá $(\Phi(\cdot, w))(p') = \Phi(p', w) = \Phi'(p', w') = x$, amiből következik, hogy $x \in Im(\Phi(\cdot, w))$. Ezért $[h = w] \cap V_\mathfrak{a} \subseteq Im(\Phi(\cdot, w))$ is teljesül. ■

Tétel. (*Részsokaság értelmezése normálegyenlettel.*) Legyen $m \in \mathbb{N}$, $m \le dim(E)$ és $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ olyan C^r-osztályú függvény, hogy minden $x \in Dom(h)$ esetén a $(Dh)(x) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor *szürjektív.* Ekkor minden $w \in Im(h)$ esetén a $[h = w]$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, és minden $\mathfrak{a} \in [h = w]$ esetén $T_\mathfrak{a}([h = w]) = Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$.

Bizonyítás. Legyenek $w \in Im(h)$ és $\mathfrak{a} \in [h=w]$ rögzített pontok. A feltevés szerint a $(Dh)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor szürjektív, ezért a szintfelületek kollektív paraméterezésének tétele alapján létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $V_\mathfrak{a} \subseteq E$ nyílt környezete, és létezik $w = h(\mathfrak{a})$-nak olyan U_w nyílt környezete $\mathbb{R}^{dim(E)-m}$-ben, és létezik a 0-nak olyan U_0 nyílt környezete $\mathbb{R}^m$-ben, valamint létezik olyan $\Phi : U_0 \times U_w \to V_\mathfrak{a}$ függvény, amely C^r-diffeomorfizmus, $\Phi(0,w) = \mathfrak{a}$, és minden $w' \in U_w$ esetén a $\Phi(\cdot,w') : U_0 \to E$ függvény m-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése a $[h = w'] \cap V_\mathfrak{a}$ halmaznak és $Im(\Phi(\cdot,w')) = [h = w'] \cap V_\mathfrak{a}$. Ha a $V_\mathfrak{a}$, U_w, U_0 halmazokat és a Φ függvényt így választjuk meg, akkor a $\Phi(\cdot,w) : U_0 \to E$ függvény is m-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése a $[h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ halmaznak és $Im(\Phi(\cdot,w)) = [h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ teljesül, vagyis $Im(\Phi(\cdot,w))$ nyílt részhalmaza a $[h = w]$ halmaznak és $\mathfrak{a} \in Im(\Phi(\cdot,w))$. Ez azt jelenti, hogy a $[h = w]$ halmaz m-dimenziós C^r-osztályú részsokasága E-nek. Világos továbbá, hogy a $h \circ \Phi(\cdot,w) : U_0 \to \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ függvény a w értékű konstansfüggvény (mert $Im(\Phi(\cdot,w)) \subseteq [h = w]$), ezért a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$0 = (Dh)(\mathfrak{a}) \circ (D\Phi(\cdot,w)) \left(\Phi(\cdot,w)^{-1}(\mathfrak{a})\right),$$

így teljesül a

$$T_\mathfrak{a}([h = w]) = Im\left((D\Phi(\cdot,w))(\Phi(\cdot,w)^{-1}(\mathfrak{a}))\right) \subseteq Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$$

tartalmazás. A $(Dh)(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor szürjektivitásából következik, hogy $dim(Ker((Dh)(\mathfrak{a}))) = m$, és persze $dim(T_\mathfrak{a}([h = w])) = m$, ezért ebből $T_\mathfrak{a}([h = w]) = Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$ adódik. ■

Az előző tétel hatékony eljárást ad részsokaságok előállítására. Nem minden részsokaság állítható elő *globálisan* ezzel a módszerrel, de *lokálisan* igen. A pontos állítás a következő.

Tétel. Legyen M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek. Minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $V_\mathfrak{a}$ nyílt környezete E-ben, és létezik olyan $h \in C^r(V_\mathfrak{a};\mathbb{R}^{dim(E)-m})$ függvény, hogy $[h = h(\mathfrak{a})] = M \cap V_\mathfrak{a}$, és minden $Dom(h) \ni x$-re a $(Dh)(x) \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor szürjektív.

Bizonyítás. Legyen V olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben és Φ olyan m-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése M-nek, hogy $Im(\Phi) = M \cap V$. A $(D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;E)$ lineáris injekcióhoz legyen $v \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}^m)$ olyan, hogy $v \circ (D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})) = id_{\mathbb{R}^m}$. Könnyen látható, hogy ekkor $E = Ker(v) \oplus T_\mathfrak{a}(M)$ teljesül. A $v \circ \Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ leképezés C^r-osztályú és

$$(D(v \circ \Phi))(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})) = v \circ (D\Phi)(\Phi^{-1}(\mathfrak{a})) = id_{\mathbb{R}^m} \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{R}).$$

Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján létezik olyan U nyílt környezete $\Phi^{-1}(\mathfrak{a})$-nak $\mathbb{R}^m$-ben, hogy $U \subseteq Dom(\Phi)$, és $(v \circ \Phi)\langle U \rangle$ nyílt környezete $v(\mathfrak{a})$-nak $\mathbb{R}^m$-ben, valamint a $(v \circ \Phi)|_U$ függvény C^r-diffeomorfizmus U és $(v \circ \Phi)\langle U \rangle$ között.

Értelmezzük most azt a $g : E \rightarrowtail E$ függvényt, amelyre $Dom(g) = \overset{-1}{v}\langle (v \circ \Phi)\langle U \rangle \rangle$, és minden $x \in Dom(g)$ esetén

$$g(x) := x - \Phi\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(x))\right),$$

vagyis g egyenlő az $id_E - \Phi \circ \left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1} \circ v$ függvény $\overset{-1}{v}\langle (v \circ \Phi)\langle U\rangle\rangle$-re vett leszűkítésével. Világos, hogy $Dom(g)$ nyílt halmaz E-ben, $\mathfrak{a} \in Dom(g)$, és $Im(g) \subseteq Ker(v)$, mert ha $x \in Dom(g)$, akkor $v(x) \in (v \circ \Phi)\langle U\rangle$, tehát létezik olyan $p \in U$, amelyre $v(x) = v(\Phi(p))$, így

$$g(x) := x - \Phi\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(x))\right) = x - \Phi\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(\Phi(p)))\right) =$$

$$= x - \Phi(p) \in Ker(v).$$

Az $E = Ker(v) \oplus T_{\mathfrak{a}}(M)$ egyenlőség miatt $dim(Ker(v)) = dim(E) - m$. Legyen $u : \mathbb{R}^{dim(E)-m} \to Ker(v)$ tetszőleges lineáris bijekció, és vezessük be a $H := u^{-1} \circ g$ függvényt. Ekkor $H : E \rightarrowtail \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ olyan C^r-osztályú függvény, amelyre $Dom(H) = Dom(g) = \overset{-1}{v}\langle (v \circ \Phi)\langle U\rangle\rangle$.

Megmutatjuk, hogy $[H = 0] = \Phi\langle U\rangle \cap Dom(H)$. Valóban, ha $x \in [H = 0]$, akkor $x \in Dom(H) = Dom(g)$ és $0 = H(x) = u^{-1}(g(x))$, ezért $g(x) = 0$, így $x = \Phi\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(x))\right) \in \Phi\langle U\rangle$, ami azt jelenti, hogy $[H = 0] \subseteq \Phi\langle U\rangle \cap Dom(H)$. Megfordítva, ha $x \in \Phi\langle U\rangle \cap Dom(H)$, akkor létezik olyan $p \in U$, hogy $x = \Phi(p)$, ezért

$$H(x) := u^{-1}(g(x)) = u^{-1}\left(x - \Phi\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(x))\right)\right) =$$

$$= u^{-1}\left(x - \Phi\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(\Phi(p)))\right)\right) = u^{-1}(x - \Phi(p)) = 0,$$

tehát $\Phi\langle U\rangle \cap Dom(H) \subseteq [H = 0]$.

Az U halmaz nyílt $\mathbb{R}^m$-ben, $U \subseteq Dom(\Phi)$, és Φ homeomorfizmus $Dom(\Phi)$ és $Im(\Phi)$ között, ezért $\Phi\langle U\rangle$ nyílt részhalmaza $Im(\Phi)$-nek. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, amelyre $\Phi\langle U\rangle = \Omega \cap Im(\Phi)$ teljesül. Ugyanakkor $Im(\Phi)$ nyílt részhalmaz M-ben, tehát létezik olyan $\Omega' \subseteq E$ nyílt halmaz, amelyre $Im(\Phi) = \Omega' \cap M$. Ebből következik, hogy a $V_{\mathfrak{a}} := \Omega \cap \Omega' \cap Dom(H)$ halmaz olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy a $h := H|_{V_{\mathfrak{a}}}$ függvényre

$$[h = 0] = [H = 0] \cap V_{\mathfrak{a}} = (\Phi\langle U\rangle \cap Dom(H)) \cap (\Omega \cap \Omega' \cap Dom(H)) =$$

$$= (Im(\Phi) \cap \Omega) \cap Dom(H) \cap \Omega \cap \Omega' = M \cap \Omega' \cap \Omega \cap Dom(H) \cap \Omega \cap \Omega' = M \cap V_{\mathfrak{a}}$$

teljesül, továbbá természetesen $h \in C^r(V_{\mathfrak{a}}; \mathbb{R}^{dim(E)-m})$.

Azt kell még igazolni, hogy minden $x \in V_{\mathfrak{a}}$ esetén a $(Dh)(x) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^{dim(E)-m})$ operátor szürjektív. A definíció szerint $x \in V_{\mathfrak{a}}$ esetén $h(x) = u^{-1}(g(x))$, ezért $(Dh)(x) = u^{-1} \circ (Dg)(x)$. Az $u^{-1} : Ker(v) \to \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ leképezés lineáris bijekció, ezért $x \in V_{\mathfrak{a}}$ esetén a $(Dh)(x) : E \to \mathbb{R}^{dim(E)-m}$ operátor szürjektivitása ekvivalens a $(Dg)(x) : E \to Ker(v)$ operátor szürjektivitásával. Legyen $x \in V_{\mathfrak{a}}$ rögzített; ekkor $x \in Dom(H) = Dom(g) = \overset{-1}{v}\langle (v \circ \Phi)\langle U\rangle\rangle$ miatt vehetünk olyan $p \in U$ pontot, hogy $v(x) = v(\Phi(p))$. A g definíciója és a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$(Dg)(x) = id_E - (D\Phi)\left(\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}(v(x))\right) \circ \left(\left(D\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}\right)(v(x))\right) \circ v =$$

$$= id_E - (D\Phi)(p) \circ \left(\left(D\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}\right)(v(x))\right) \circ v,$$

mert $v(x) = v(\Phi(p))$ miatt $\left(((v \circ \Phi)|_U)^{-1}\right)(v(x)) = p$. Ez azt jelenti, hogy

$$id_E - (Dg)(x) = (D\Phi)(p) \circ \left(\left(D\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}\right)(v(x))\right) \circ v.$$

Ebből kapjuk, hogy $Im\,(id_E - (Dg)(x)) \subseteq Im((D\Phi)(p))$ és

$$((D\Phi)(p))^{-1} \circ (id_E - (Dg)(x)) = \left(\left(D\left((v \circ \Phi)|_U\right)^{-1}\right)(v(x))\right) \circ v,$$

hiszen a $(D\Phi)(p){:}\mathbb{R}^m{\to}E$ operátor injektív. Ebből az egyenlőségből, valamint a $((D\Phi)(p))^{-1}$ injektivitásából kapjuk, hogy $z{\in}Ker(v)$ esetén $(id_E - (Dg)(x))\,(z) = 0$, vagyis $z = ((Dg)(x))(z) \in Im((Dg)(x))$. Tehát $Ker(v) \subseteq Im((Dg)(x))$, vagyis a $(Dg)(x) : E \to Ker(v)$ operátor szürjektív. ∎

Állítás. (*Részsokaságok szorzata.*) Legyen $(E_i)_{i\in I}$ véges dimenziós valós vektorterek nem üres véges rendszere, és minden $I \ni i$-re M_i m_i-dimenziós C^{r_i}-osztályú részsokasága E_i-nek. Ekkor a $\prod\limits_{i\in I} M_i$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága a $\prod\limits_{i\in I} E_i$ lineáris szorzattérnek, ahol $m := \sum\limits_{i\in I} m_i$ és $r := \min\limits_{i\in I} r_i$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} M_i$ rögzített. Minden $I \ni i$-hez létezik $\mathfrak{a}_i$-nek olyan V_i nyílt környezete E_i-ben, hogy az M_i halmaznak van olyan $\Phi_i : \mathbb{R}^{m_i} \rightarrowtail E_i$ m_i-dimenziós C^{r_i}-osztályú paraméterezése, amelyre $Im(\Phi_i) = M_i \cap V_i$. Ekkor a

$$\Phi : \prod_{i\in I} Dom(\Phi_i) \to \prod_{i\in I} E_i; \quad (p_i)_{i\in I} \mapsto (\Phi_i(p_i))_{i\in I}$$

leképezés nyilvánvalóan homeomorfizmus $Dom(\Phi)$ és $Im(\Phi) = \prod\limits_{i\in I} Im(\Phi_i)$ között. Továbbá, ez a függvény C^r-osztályú, és $(p_i)_{i\in I} \in Dom(Phi)$ esetén a

$$(D\Phi)\left((p_i)_{i\in I}\right) = \left((D\Phi_i)(p_i)\right)_{i\in I}$$

operátor injektív. Azonkívül, $\prod\limits_{i\in I} V_i$ nyílt környezete a $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ pontnak $\prod\limits_{i\in I} E_i$-ben, és könnyen látható, hogy $Im(\Phi) = \left(\prod\limits_{i\in I} M_i\right) \cap \left(\prod\limits_{i\in I} V_i\right)$. Ezért ha u jelöl egy tetszőleges $\mathbb{R}^m \to \prod\limits_{i\in I} \mathbb{R}^{m_i}$ lineáris bijekciót, akkor a $\Phi \circ u$ függvény nyilvánvalóan olyan m-dimenziós C^r-osztályú paraméterezése $\prod\limits_{i\in I} M_i$-nek, hogy $Im(\Phi \circ u) = \left(\prod\limits_{i\in I} M_i\right) \cap \left(\prod\limits_{i\in I} V_i\right)$. ∎

Most azt a problémát vizsgáljuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail E$ C^r-osztályú függvény, akkor az $Im(f)$ halmaz részsokasága lesz-e E-nek? Erre a kérdésre a Bernoulli-lemniszkáta példája (3. példa) alapján könnyen kapjuk azt a választ, hogy *nem* (**13**. gyakorlat). Ezért az érdekes kérdés az, hogy milyen f-re vonatkozó feltételek biztosítják azt, hogy $Im(f)$ részsokasága legyen E-nek? Erre a kérdésre ad választ az *állandó rang tétele*. Ehhez először értelmezzük differenciálható függvény *rangjának* fogalmát.

Definíció. Ha E és F véges dimenziós valós vektorterek és $f : E \rightarrowtail F$ differenciálható függvény, akkor minden $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ esetén a $dim(Im((Df)(\mathfrak{a})))$ természetes számot az f függvény *rangjának* nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban, és az $rg_{\mathfrak{a}}(f)$ szimbólummal jelöljük.

Tétel. (*Az állandó rang tétele.*) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail E$ C^r-osztályú függvény. Ha az $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ pontnak létezik olyan környezete $\mathbb{R}^n$-ben, hogy annak minden x pontjában $rg_x(f) = rg_{\mathfrak{a}}(f)$ (vagyis f *állandó rangú* az $\mathfrak{a}$ pont valamely környezetén), akkor létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, hogy $U_{\mathfrak{a}} \subseteq Dom(f)$ és az $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmaz $rg_{\mathfrak{a}}(f)$-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek.

Bizonyítás. (I) Legyen $\mathfrak{a} \in Dom(f)$ olyan pont, amelynek valamely környezetén a f függvény állandó rangú. Legyenek $Q \in \mathscr{L}(E)$ és $P \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ olyan operátorok, hogy $Q \circ Q = Q$, $Im(Q) = Im((Df)(\mathfrak{a}))$, $P \circ P = P$ és $Im(P) = Ker((Df)(\mathfrak{a}))$ (VII. fejezet, 11. pont, **2**. gyakorlat). Vezessük be az $X := Ker(P)$ és $Y := Ker(Q)$ jelöléseket; ekkor $X \oplus Ker((Df)(\mathfrak{a})) = \mathbb{R}^n$ és $Y \oplus Im((Df)(\mathfrak{a})) = E$. Könnyen látható, hogy a $(Df)(\mathfrak{a})|_X : X \to Im((Df)(\mathfrak{a})) = Im(Q)$ leképezés lineáris bijekció X és $Im((Df)(\mathfrak{a}))$ között, ezért $dim(X) = rg_{\mathfrak{a}}(f)$ is teljesül. Az is könnyen igazolható, hogy

$$((Df)(\mathfrak{a})|_X)^{-1} \circ ((Df)(\mathfrak{a})) + P = id_{\mathbb{R}^n}.$$

Képezzük most a

$$\Phi := ((Df)(\mathfrak{a})|_X)^{-1} \circ Q \circ f + P : Dom(f) \to \mathbb{R}^n$$

leképezést, amely nyilvánvalóan C^r-osztályú, és a függvénykompozíció differenciálási szabálya, valamint $Q \circ (Df)(\mathfrak{a}) = (Df)(\mathfrak{a})$ miatt

$$(D\Phi)(\mathfrak{a}) = ((Df)(\mathfrak{a})|_X)^{-1} \circ Q \circ (Df)(\mathfrak{a}) + P = ((Df)(\mathfrak{a})|_X)^{-1} \circ (Df)(\mathfrak{a}) + P = id_{\mathbb{R}^n}.$$

Ezért az inverzfüggvény-tétel alapján létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U' \subseteq Dom(f)$ nyílt környezete, hogy $\Phi\langle U'\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és a $\Phi|_{U'}$ függvény C^r-diffeomorfizmus U' és $\Phi\langle U'\rangle$ között. Az U' halmaz nyilvánvalóan megválasztható úgy, hogy minden $U' \ni x$-re $rg_x(f) = rg_{\mathfrak{a}}(f)$. A $\Phi(\mathfrak{a}) \in \Phi\langle U'\rangle$ pontnak létezik olyan W nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, amely *konvex* és $W \subseteq \Phi\langle U'\rangle$. Ekkor az $U := \overset{-1}{\Phi}\langle W\rangle$ halmaz is nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, és a $\varphi := \Phi|_U$ függvény C^r-diffeomorfizmus az U és W nyílt halmazok között, valamint $W = \varphi\langle U\rangle$, tehát a $\varphi\langle U\rangle$ halmaz konvex. (Később kiderül, hogy miért fontos a φ értékkészletének konvexitása.) Ekkor a Φ és φ függvények definíciója alapján

$$id_{\varphi\langle U\rangle} = \varphi \circ \varphi^{-1} = \Phi \circ \varphi^{-1} = ((Df)(\mathfrak{a})|_X)^{-1} \circ Q \circ f \circ \varphi^{-1} + P \circ \varphi^{-1}$$

teljesül, és ezt az egyenlőséget a $(Df)(\mathfrak{a})$ operátorral balról komponálva

$$(Df)(\mathfrak{a})|_{\varphi\langle U\rangle} = Q \circ f \circ \varphi^{-1}$$

adódik, hiszen $(Df)(\mathfrak{a}) \circ P = 0$ és $(Df)(\mathfrak{a}) \circ ((Df)(\mathfrak{a})|_X)^{-1} = id_{Im((Df)(\mathfrak{a}))} = id_{Im(Q)}$.

(II) Megmutatjuk, hogy $z \in \varphi\langle U\rangle$, $z_0 \in Ker((Df)(\mathfrak{a}))$ és $z + z_0 \in \varphi\langle U\rangle$ esetén $(f \circ \varphi^{-1})(z + z_0) = (f \circ \varphi^{-1})(z)$ teljesül. Valóban, a $(Df)(\mathfrak{a})|_{\varphi\langle U\rangle} = Q \circ f \circ \varphi^{-1}$ függvény-egyenlőség alapján minden $z' \in \varphi\langle U\rangle$ esetén

$$(Df)(\mathfrak{a}) = (D(Q \circ f \circ \varphi^{-1}))(z') = Q \circ ((D(f \circ \varphi^{-1}))(z')) =$$

$$= Q \circ \left((Df)(\varphi^{-1}(z'))\right) \circ \left((D\varphi^{-1})(z')\right).$$

Itt $z' \in \varphi\langle U\rangle$ esetén $(D\varphi^{-1})(z') \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, ezért

$$Im((Df)(\mathfrak{a})) = Q\langle Im((D(f \circ \varphi^{-1}))(z'))\rangle = Q\langle Im((Df)(\varphi^{-1}(z')))\rangle,$$

és a feltevés szerint

$$dim(Im((Df)(\varphi^{-1}(z')))) = rg_{\varphi^{-1}(z')}(f) = rg_{\mathfrak{a}}(f) = dim(Im((Df)(\mathfrak{a}))),$$

következésképpen a Q operátor szükségképpen *injektív* az $Im((D(f\circ\varphi^{-1}))(z')) \subseteq E$ lineáris altéren. Ugyanakkor $z_0 \in Ker((Df)(\mathfrak{a}))$ és $z' \in \varphi\langle U\rangle$ esetén

$$0 = ((Df)(\mathfrak{a}))(z_0) = \left(Q \circ ((D(f \circ \varphi^{-1}))(z'))\right)(z_0) = Q\left(\left((D(f \circ \varphi^{-1}))(z')\right)(z_0)\right),$$

így $\left(D(f \circ \varphi^{-1}))(z')\right)(z_0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $f \circ \varphi^{-1}$ függvény tetszőleges $z_0 \in Ker((Df)(\mathfrak{a}))$ irány menti deriváltja bármely $z' \in \varphi\langle U\rangle$ pontban nulla. Legyenek most $z \in \varphi\langle U\rangle$ és $z_0 \in Ker((Df)(\mathfrak{a}))$ olyanok, hogy $z + z_0 \in \varphi\langle U\rangle$. Tekintsük a

$$g : [0, 1] \to E; \quad t \mapsto (f \circ \varphi^{-1})(z + t.z_0)$$

leképezést. Ez jól értelmezett, mert $t \in [0, 1]$ esetén $z + t.z_0 = (1 - t).z + t.(z + z_0)$ és $z \in \varphi\langle U\rangle$, valamint $\varphi\langle U\rangle$ konvex halmaz, tehát $z + t.z_0 \in \varphi\langle U\rangle$. Világos, hogy a g függvény folytonos és a $]0, 1[$ intervallum minden pontjában differeneciálható (sőt C^r-osztályú). Ugyanakkor $t \in]0, 1[$ esetén az előzőek alapján

$$(Dg)(t) = \left((D(f \circ \varphi^{-1}))(z + t.z_0)\right)(z_0) = 0.$$

Ebből következik, hogy g a $]0, 1[$ intervallumon állandó, tehát a g folytossága miatt

$$(f \circ \varphi^{-1})(z + z_0) = g(1) = g(0) = (f \circ \varphi^{-1})(z)$$

is teljesül, amint azt állítottuk.

(III) Most megmutatjuk, hogy $f(\mathfrak{a})$-nak létezik olyan V nyílt környezete E-ben, és létezik olyan $\psi : V \to V$ függvény, amely C^r-diffeomorfizmus, valamint létezik az $\mathfrak{a}$-nak olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, hogy $U_{\mathfrak{a}} \subseteq U$, $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle \subseteq V$, és fennáll a

$$(Df)(\mathfrak{a}) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

egyenlőség a $\varphi\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmazon, vagy ami ezzel ekvivalens: $((Df)(\mathfrak{a}))\langle\varphi\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle \subseteq \psi\langle V\rangle = V$ és

$$f = \psi^{-1} \circ ((Df)(\mathfrak{a})) \circ \varphi$$

teljesül az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazon.

Ehhez először megjegyezzük, hogy $(Q \circ f)|_U = ((Df)(\mathfrak{a})) \circ \varphi$ és φ homeomorfizmus U és $\varphi\langle U\rangle$ között, míg a $(Df)(\mathfrak{a}) : \mathbb{R}^n \to Im((Df)(\mathfrak{a}))$ operátor folytonos és szürjektív, ezért Banach nyíltleképezés-tétele alapján *nyílt leképezés*, így a $(Q\circ f)|_U : U \to Im((Df)(\mathfrak{a}))$ függvény szintén nyílt leképezés, vagyis bármely $U' \subseteq U$ nyílt halmazra $(Q \circ f)\langle U'\rangle$ nyílt halmaz az $Im((Df)(\mathfrak{a}))$ altérben (de az E-ben nem szükségképpen nyílt). Másfelől, az

$$U \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto \varphi(x) + P(\mathfrak{a} - x)$$

leképezés folytonos, és $\mathfrak{a}$-hoz a $\varphi(\mathfrak{a}) \in \varphi\langle U\rangle$ értéket rendeli, ezért létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathbb{R}^n$-ben, hogy $U_{\mathfrak{a}} \subseteq U$ és minden $U \ni x$-re $\varphi(x) + P(\mathfrak{a} - x) \in \varphi\langle U\rangle$. Az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazt így választva teljesül az is, hogy $y \in \overset{-1}{Q}\langle(Q \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle$ esetén van olyan $x \in U_{\mathfrak{a}}$, hogy $Q(y) = (Q \circ f)(x)$, tehát a φ definíciója szerint

$$\left(\left(((Df)(\mathfrak{a}))|_X\right)^{-1} \circ Q + P(\mathfrak{a})\right)(y) = \left(((Df)(\mathfrak{a}))|_X\right)^{-1}(Q(y)) + P(\mathfrak{a}) =$$

$$= \left(((Df)(\mathfrak{a}))|_X\right)^{-1}(Q(f(x))) + P(\mathfrak{a}) = \varphi(x) - P(x) + P(\mathfrak{a}) \in \varphi\langle U\rangle.$$

Ebből következik, hogy a $V := \overset{-1}{Q}\langle(Q \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle \subseteq E$ halmazon jól értelmezett a

$$\psi := id_E - (id_E - Q) \circ (f \circ \varphi^{-1}) \circ \left(\left(((Df)(\mathfrak{a}))|_X\right)^{-1} \circ Q + P(\mathfrak{a})\right)$$

függvény. A $(Q \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmaz nyílt az $Im((Df)(\mathfrak{a}))$ altérben, és a $Q : E \to Im((Df)(\mathfrak{a}))$ leképezés folytonos, ezért V nyílt részhalmaza E-nek. Ha $y \in V$, akkor $Q(y) \in (Q \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ és $Q \circ (id_E - Q) = 0$ miatt $Q(\psi(y)) = Q(y)$, tehát $\psi(y) \in \overset{-1}{Q}\langle(Q \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle =: V$. ez azt jelenti, hogy $\psi\langle V\rangle \subseteq V$. Az nyilvánvaló, hogy a ψ függvény C^r-osztályú. Ha $x \in U_0$, akkor természetesen $f(x) \in V$ és

$$\left(\left(((Df)(\mathfrak{a}))|_X\right)^{-1} \circ Q + P(\mathfrak{a})\right)(f(x)) = \left(\left(((Df)(\mathfrak{a}))|_X\right)^{-1} \circ Q \circ f\right)(x) + P(\mathfrak{a}) =$$

$$= \varphi(x) + P(\mathfrak{a} - x),$$

következésképpen

$$\psi(f(x)) = f(x) - (id_E - Q)\left((f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + P(\mathfrak{a} - x))\right) =$$

$$= f(x) - (id_E - Q)\left((f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\right) = (Q \circ f)(x),$$

mert $\varphi(x) \in \varphi\langle U\rangle$, $P(\mathfrak{a} - x) \in Ker((Df)(\mathfrak{a}))$ és $\varphi(x) + P(\mathfrak{a} - x) \in \varphi\langle U\rangle$, tehát a (II) alapján

$$(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + P(\mathfrak{a} - x)) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy $\psi \circ f = Q \circ f = ((Df)(\mathfrak{a})) \circ \varphi$ az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazon. Ha szintén a V halmazon értelmezzük a

$$\psi' := id_E + (id_E - Q) \circ \Big((((Df)(\mathfrak{a}))|_X)^{-1} \circ Q + P(\mathfrak{a}) \Big)$$

függvényt, akkor az előzőek mintájára kapjuk, hogy $\psi'\langle V\rangle \subseteq V$, és egyszerű számolás mutatja, hogy $\psi' \circ \psi = \psi \circ \psi' = id_V$, így a $\psi : V \to V$ függvény C^r-diffeomorfizmus.

(IV) Nyilvánvaló, hogy a $h := (id_E - Q) \circ \psi : V \to Ker(Q)$ függvény C^r-osztályú, és minden $y \in V$ pontra

$$(Dh)(y) = (id_E - Q) \circ ((D\psi)(y)) : E \to Ker(Q)$$

lineáris *szürjekció*, mert $(D\psi)(y) : E \to E$ lineáris bijekció, és $id_E - Q : E \to Ker(Q)$ lineáris szürjekció. Továbbá, az $U_{\mathfrak{a}}$ halmazon teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$h \circ f = (id_E - Q) \circ \psi \circ f = (id_E - Q) \circ ((Df)(\mathfrak{a})) \circ \varphi = 0,$$

mert $Im((Df)(\mathfrak{a})) = Im(Q) = Ker(id_E - Q)$. Ez azt jelenti, hogy $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle \subseteq [h = 0]$. Megfordítva, legyen $y \in [h = 0]$ tetszőleges. Ekkor $0 = h(y) = (id_E - Q)(\psi(y))$, vagyis $\psi(y) \in Ker(id_E - Q) = Im(Q)$, azaz $\psi(y) = Q(\psi(y)) = Q(y)$, hiszen $Q \circ (id_E - Q) = 0$ miatt, a ψ definíciója alapján $Q \circ \psi = Q|_V$. Ugyanakkor $y \in V = \overset{-1}{Q}\langle (Q \circ f)\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle\rangle$ tehát van olyan $x \in U_{\mathfrak{a}}$, hogy $Q(y) = Q(f(x))$. Ezért $\psi(y) = Q(f(x)) = ((Df)(\mathfrak{a}))(\varphi(x)) = \psi(f(x))$, így ψ injektivitása folytán $y = f(x) \in f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$. Ezzel megmutattuk, hogy $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle = [h = 0]$, tehát a részsokaságok normálegyenlettel való előállításának tétele alapján az $f\langle U_{\mathfrak{a}}\rangle$ halmaz $dim(E) - dim(Ker(Q))$ $(= dim(Im(Q)) = rg_{\mathfrak{a}}(f))$ dimenziós C^r-osztályú részsokasága E-nek. ■

A Bernoulli-lemniszkáta példája (3. példa) mutatja, hogy egy C^r-osztályú függvény értékkészlete még akkor sem szükségképpen részsokaság, ha f állandó rangú és injektív; tehát az állandó rang tétele szükségképpen *lokális természetű.* Másfelől, egyszerű példákon szemléltethető, hogy ha az f C^r-osztályú függvény nem állandó rangú egy pont valamely környezetén, akkor előfordulhat, hogy a pont minden U környezetére az $f\langle U\rangle$ halmaz nem részsokaság. Tekintsük például az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), r)$$

C^∞-osztályú függvényt, amelyre könnyen látható, hogy $Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2\}$. Minden $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$(Df)(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ezért fennáll az

$$Im((Df)(r, \varphi)) = \mathbb{R}.(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 1) + \mathbb{R}.(-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi), 0)$$

egyenlőség, vagyis $r \neq 0$ esetén $rg_{(r,\varphi)}(f) = 2$, míg $rg_{(0,\varphi)}(f) = 1$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén a $(0, \varphi)$ pont bármely környezetén f nem állandó rangú. Ugyanakkor belátható, hogy minden $\mathbb{R} \ni \varphi$-re a $(0, \varphi)$ pont bármely U környezetére a $f\langle U\rangle$ halmaz nem részsokasága $\mathbb{R}^3$-nak (**14**. gyakorlat).

Gyakorlatok

1. Legyen $M \subseteq E$ nem üres halmaz. Az M halmaz pontosan akkor *nyílt* E-ben, ha M $dim(E)$-dimenziós C^∞-osztályú részsokasága E-nek. Az M halmaz pontosan akkor *diszkrét* E-ben, ha M 0-dimenziós C^∞-osztályú részsokasága E-nek.

2. (*Euklidészi gömbfelületek.*) Ha E euklidészi tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in E$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$\mathbf{S}_r(\mathfrak{a}) := \{x \in E | \|x - \mathfrak{a}\| = r\}$$

halmaz C^∞-osztályú hiperfelület E-ben, és $x \in \mathbf{S}_r(\mathfrak{a})$ esetén

$$T_x(\mathbf{S}_r(\mathfrak{a})) = (x - \mathfrak{a})^\perp.$$

Adjuk meg az $\mathbf{S}_r(\mathfrak{a})$-nak *két* olyan paraméterezését, amelyek értékkészletei befedik $\mathbf{S}_r(\mathfrak{a})$-t!

(*Útmutatás.* Az 5. megjegyzés alapján ezt elegendő az $\mathfrak{a} := 0$ pontra igazolni, hiszen a $\sigma : E \to E$; $x \mapsto \mathfrak{a} + x$ leképezés C^∞-diffeomorfizmus és $\sigma\langle \mathbf{S}_r(0)\rangle = \mathbf{S}_r(\mathfrak{a})$.

Legyen $\mathbf{n} \in E$ olyan rögzített vektor, amelyre $\|\mathbf{n}\| = 1$, és jelölje $\mathbf{n}^\perp$ a $\mathbf{n}$-re ortogonális E-beli vektortok halmazát. A Riesz-féle felbontási tétel alapján az $\mathbf{n}^\perp$ halmaz $dim(E) - 1$ dimenziós lineáris altere E-nek és $E = \mathbf{n}^\perp \oplus (\mathbb{R}.\mathbf{n})$. Értelmezzük a következő függvényeket:

$$\Psi_\pm : \mathbf{n}^\perp \to E; \quad \mathbf{p} \mapsto \left(\frac{2r^2}{\|\mathbf{p}\|^2 + r^2}\right).\mathbf{p} \pm r\left(\frac{\|\mathbf{p}\|^2 - r^2}{\|\mathbf{p}\|^2 + r^2}\right).\mathbf{n}.$$

Könnyen látható, hogy a $\Psi_\pm$ függvények C^∞-osztályú injekciók, és $Im(\Psi_\pm) = \mathbf{S}_r(0) \setminus \{\pm r.\mathbf{n}\}$, valamint a $\Psi_\pm$ függvények inverzei a

$$\mathbf{S}_r(0) \setminus \{\pm r.\mathbf{n}\} \to \mathbf{n}^\perp; \quad \mathbf{q} \mapsto \frac{\mathbf{q} - (\mathbf{q}|\mathbf{n}).\mathbf{n}}{1 \mp \dfrac{(\mathbf{q}|\mathbf{n})}{r}}$$

függvények. Ebből látható, hogy a $\Psi_\pm$ függvények homeomorfizmusok a definíciós és képtartományaik között. Ugyanakkor $\mathbf{p} \in \mathbf{n}^\perp$ esetén minden $\mathbf{n}^\perp \ni \mathbf{z}$-re

$$((D\Psi_\pm)(\mathbf{p}))(\mathbf{z}) = -\left(\frac{4r^2}{(\|\mathbf{p}\|^2 + r^2)^2}\right)(\mathbf{p}|\mathbf{z}).\mathbf{p} + \left(\frac{2r^2}{\|\mathbf{p}\|^2 + r^2}\right).\mathbf{z} \pm$$

$$\pm\left(\frac{4r^2}{(\|\mathbf{p}\|^2 + r^2)^2}\right)(\mathbf{p}|\mathbf{z}).\mathbf{n} = \left(\frac{2r^2}{\|\mathbf{p}\|^2 + r^2}\right)\left(\mathbf{z} + \left(\frac{2(\mathbf{p}|\mathbf{z})}{\|\mathbf{p}\|^2 + r^2}\right).(-\mathbf{p} \pm r.\mathbf{n})\right),$$

amiből nyilvánvaló, hogy $((D\Psi_\pm)(\mathbf{p}))(\mathbf{z}) = 0$ esetén $\mathbf{z} = 0$, vagyis a $(D\Psi_\pm)(\mathbf{p})$ operátorok injektívek. Ha tehát $u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to \mathbf{n}^\perp$ tetszőleges lineáris bijekció, akkor a $\Psi_\pm \circ u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to E$ függvények $dim(E) - 1$ dimenziós C^∞ osztályú paraméterezései az $\mathbf{S}_r(0) \setminus \{\pm r.\mathbf{n}\}$ halamzoknak. Ugyanakkor

$$\mathbf{S}_r(0) \setminus \{\pm r.\mathbf{n}\} = \mathbf{S}_r(0) \cap (E \setminus \{\pm r.\mathbf{n}\}),$$

tehát $\mathbf{S}_r(0) \setminus \{\pm r.\mathbf{n}\}$ nyílt halmazok $\mathbf{S}_r(0)$-ban, és természetesen

$$\mathbf{S}_r(0) = (\mathbf{S}_r(0) \setminus \{r.\mathbf{n}\}) \cup (\mathbf{S}_r(0) \setminus \{-r.\mathbf{n}\}),$$

így a $\mathbf{S}_r(0)$ halmaz C^∞-osztályú hiperfelület E-ben. Megemlítjük, hogy a $\Psi_\pm$ függvényeket $\pm r.\mathbf{n}$ csúcspontú *sztereografikus projekcióknak* nevezzük.)

3. (*Euklidészi kúpfelületek.*) Ha E euklidészi tér, akkor minden $\mathfrak{a} \in E$, $\mathbf{n} \in E$, $\|\mathbf{n}\| = 1$ és $\lambda \in]-1, 1[$ esetén a

$$\mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a}) := \{x \in E \setminus \{\mathfrak{a}\} \mid (x - \mathfrak{a}|\mathbf{n}) = \lambda\|x - \mathfrak{a}\|\}$$

halmaz C^∞-osztályú elemi hiperfelület E-ben, és $x \in \mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})$ esetén

$$T_x(\mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})) = \left(\mathbf{n} - \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2\|x - \mathfrak{a}\|}.(x - \mathfrak{a} - (x - \mathfrak{a}|\mathbf{n}).\mathbf{n})\right)^\perp.$$

Adjuk meg $\mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})$-nak globális paraméterezését!

(*Útmutatás.* Jelölje $\mathbf{n}^\perp$ az $\mathbf{n}$-re ortogonális vektortok halmazát E-ben. A Riesz-féle felbontási tétel alapján az $\mathbf{n}^\perp$ halmaz $dim(E) - 1$ dimenziós lineáris altere E-nek és $E = \mathbf{n}^\perp \oplus (\mathbb{R}.\mathbf{n})$. Értelmezzük a következő függvényt:

$$\Psi : \mathbf{n}^\perp \setminus \{0\} \to E; \quad \mathbf{p} \mapsto \mathfrak{a} + \mathbf{p} + \frac{\lambda\|\mathbf{p}\|}{\sqrt{1-\lambda^2}}.\mathbf{n}.$$

Könnyen látható, hogy a Ψ függvény C^∞-osztályú injekció, és $Im(\Psi) = \mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})$, továbbá $\Psi^{-1} : \mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a}) \to \mathbf{n}^\perp \setminus \{0\}$ az a leképezés, amelyre minden $x \in \mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})$ esetén

$$\Psi^{-1}(x) = x - \mathfrak{a} - \lambda\|x - \mathfrak{a}\|\mathbf{n},$$

tehát Ψ^{-1} folytonos, így Ψ homeomorfizmus $\mathbf{n}^\perp \setminus \{0\}$ és $\mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})$ között. Ha $\mathbf{p} \in \mathbf{n}^\perp \setminus \{0\}$, akkor minden $\mathbf{n}^\perp \ni \mathbf{z}$-re

$$((D\Psi)(\mathbf{p}))(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{(\mathbf{p}|\mathbf{z})}{\|\mathbf{p}\|}.\mathbf{n}.$$

Ebből látható, hogy minden $\mathbf{n}^\perp \setminus \{0\} \ni \mathbf{p}$-re a $(D\Psi)(\mathbf{p}) : \mathbf{n}^\perp \to E$ lineáris operátor injektív. Ezért bármely $u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to \mathbf{n}^\perp$ lineáris bijekcióra a $\Psi \circ u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \setminus \{0\} \to E$ leképezés $dim(E) - 1$ dimenziós C^∞-osztályú paraméterezése a $\mathbf{C}_{\mathbf{n},\lambda}(\mathfrak{a})$ halmaznak.)

4. (*Euklidészi paraboloidok.*) Ha E euklidészi tér, akkor minden $\mathbb{R}^+ \ni m$-re a

$$P_m := \left\{(p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times E \mid p_0 = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m}\right\}$$

halmaz C^∞-osztályú elemi hiperfelület az $\mathbb{R} \times E$ vektortérben, és $(p_0, \mathbf{p}) \in P_m$ esetén

$$T_{(p_0,\mathbf{p})}(P_m) = \{(\mu, \mathbf{q}) \in \mathbb{R} \times E \mid \mu = m(\mathbf{p}|\mathbf{q})\}.$$

Adjuk meg P_m-nek globális paraméterezését!

5. (*Euklidészi hiperboloidok.*) Legyen E euklidészi tér és $m \in \mathbb{R}_+$ rözített szám. Értelmezzük a következő halmazokat

$$X_m^{\pm} := \{ (p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times E \mid p_0 = \pm\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2} \},$$

ha $m > 0$, míg

$$X_0^{\pm} := \{ (p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0\}) \mid p_0 = \pm\|\mathbf{p}\| \}.$$

Ekkor az $X_m^{\pm}$ halmaz C^∞-osztályú elemi hiperfelület az $\mathbb{R} \times E$ vektortérben. Adjuk meg $X_m^{\pm}$-nek globális paraméterezését!

(*Útmutatás.* Ha $m > 0$, akkor a

$$\Psi_m^{\pm} : E \to X_m^{\pm}; \quad \mathbf{p} \mapsto \left(\pm\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}, \boldsymbol{p}\right)$$

leképezések bijekciók és a $\Psi_m^{\pm} : E \to \mathbb{R} \times E$ függvények C^∞-osztályúak (hiszen a komponens-függvényeik is azok), továbbá $\Psi_m^{\pm}$ homeomorfizmus E és $X_m^{\pm}$ között, mert $(\Psi_m^{\pm})^{-1} = pr_E|_{X_m^{\pm}}$, ahol pr_E az $\mathbb{R} \times E \to E$ kanonikus projekció (ami folytonos függvény, így az $X_m^{\pm}$-re vett leszűkítései is folytonosak). Ugyanakkor fennállnak a $pr_E \circ \Psi_m^{\pm} = id_E$ összefüggések, ezért a függvénykompozíció differenciálásai szabálya szerint minden $\mathbf{p} \in E$ esetén $pr_E \circ ((D\Psi_m^{\pm})(\mathbf{p})) = id_E$, ezért a $(D\Psi_m^{\pm})(\mathbf{p}) : E \to \mathbb{R} \times E$ operátorok injektívek. Ezért bármely $u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to E$ lineáris bijekcióra a $\Psi_m^{\pm} \circ u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to \mathbb{R} \times E$ függvények $dim(E)$ dimenziós C^∞-osztályú paraméterezései az $X_m^{\pm}$ halmaznak.

Hasonló meggondolásokkal igazolható, hogy a

$$\Psi_0^{\pm} : E \setminus \{0\} \to X_0^{\pm}; \quad \mathbf{p} \mapsto (\pm\|\mathbf{p}\|, \boldsymbol{p})$$

leképezések olyanok, hogy bármely $u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to E$ lineáris bijekcióra a $\Psi_0^{\pm} \circ u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to \mathbb{R} \times E$ függvény $dim(E)$ dimenziós C^∞-osztályú paraméterezése az $X_0^{\pm}$ halmaznak.)

6. (*Möbius-szalag.*) Legyenek $a, r \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $a \le r$. Jelölje $M_{a,r}$ az

$$\left(\left(r + \rho\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos(\varphi),\ \left(r + \rho\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\sin(\varphi),\ \rho\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \in \mathbb{R}^3$$

pontok halmazát, ahol $\varphi \in \mathbb{R}$ és $\rho \in]-a, a[$ tetszőlegesek. Ekkor az $M_{a,r}$ halmaz C^∞-osztályú hiperfelület $\mathbb{R}^3$-ban. (Az $M_{a,r}$ halmazt (a, r)-paraméterű *Möbius-szalagnak* nevezzük.)

7. Legyen M_1 m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú részsokasága az E_1 véges dimenziós valós vektortérnek, M_2 m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú részsokasága az E_2 véges dimenziós valós vektortérnek, és M_3 m_3-dimenziós, C^{r_3}-osztályú részsokasága az E_3 véges dimenziós valós vektortérnek. Ha $f : M_1 \to M_2$ C^r-osztályú függvény és $g : M_2 \to M_3$ C^r-osztályú függvény, akkor a $g \circ f : M_1 \to M_3$ függvény is C^r-osztályú, és minden $\mathfrak{a} \in M_1$ esetén

$$T_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = T_{f(\mathfrak{a})}(g) \circ T_{\mathfrak{a}}(f)$$

teljesül (*a függvénykompozíció differenciálásának szabálya*).

8. (*Részsokaság érintőtere.*) Legyen M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, és tegyük fel, hogy $r \geq 2$. Bevezetjük a

$$T(M) := \bigcup_{\mathfrak{a} \in M} (\{\mathfrak{a}\} \times T_{\mathfrak{a}}(M))$$

jelölést. Ekkor az M sokaság minden Φ paraméterezésére a

$$Dom(\Phi) \times \mathbb{R}^m \to E \times E; \quad (p, v) \mapsto (\Phi(p), ((D\Phi)(p))(v))$$

függvény $2m$-dimenziós, C^{r-1}-osztályú paraméterezése a $T(M)$ halmaznak. Igazoljuk, hogy a $T(M)$ halmaz $2m$-dimenziós, C^{r-1}-osztályú részsokasága az $E \times E$ valós vektortérnek. (Ezt a $T(M)$ sokaságot nevezzük az M *érintőterének.*)

9. (*Absztrakt sokaságok.*)

a) Legyen M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek és jelölje $Par(M)$ az M halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezéseinek halmazát. Legyen továbbá $Ch(M) := \{\Phi^{-1} | \Phi \in Par(M)\}$; a $Ch(M)$ elemeit az M halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú *térképeinek* nevezzük. Teljesülnek a következő állítások.

(i) Minden $\varphi \in Ch(M)$ függvény olyan $M \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ injekció, amelyre $Im(\varphi)$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek.

(ii) Ha $\varphi, \psi \in Ch(M)$, akkor a $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvények C^r-osztályúak (tehát C^r-diffeomorfizmusok, hiszen ezek egymás inverzei).

(iii) Fennáll az $M = \bigcup_{\varphi \in Ch(M)} Dom(\varphi)$ egyenlőség.

(iv) Ha $\psi : M \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ olyan injekció, hogy $Im(\psi) \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, és minden $Ch(M) \ni \varphi$-re a $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvények C^r-osztályúak, akkor $\psi \in Ch(M)$.

b) Legyen M tetszőleges halmaz. Ekkor M feletti *m-dimenziós, C^r-osztályú struktúrának* nevezünk $M \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvények tetszőleges olyan $\mathfrak{Ch}$ halmazát, amelyre az a) pont (i), (ii), (iii) és (iv) állításai teljesülnek, a $Ch(M)$ helyére $\mathfrak{Ch}$-t írva. Az $(M, \mathfrak{Ch})$ párt (absztrakt) *m-dimenziós, C^r-osztályú sokaságnak* nevezzük, ha $\mathfrak{Ch}$ m-dimenziós, C^r-osztályú struktúra az M halmaz felett. Tehát a definíció, és az a) alapján világos, hogy ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága az E véges dimenziós valós vektortérnek, akkor az $(M, Ch(M))$ pár m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság.

c) Legyen M tetszőleges halmaz. Ekkor M feletti *m-dimenziós, C^r-osztályú atlasznak* nevezünk $M \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvények tetszőleges olyan $\mathfrak{A}$ halmazát, amelyre az a) pont (i), (ii) és (iii) állításai teljesülnek, a $Ch(M)$ helyére $\mathfrak{A}$-t írva. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{A}$ m-dimenziós, C^r-osztályú atlasz az M halmaz felett, és $\mathfrak{Ch}$ jelöli azon $\psi : M \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ injekciók halmazát, amelyekre $Im(\psi)$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^m$-ben, és minden $\mathfrak{A} \ni \varphi$-re a $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvények C^r-osztályúak, akkor $\mathfrak{Ch}$ az az egyértelműen meghatározott m-dimenziós, C^r-osztályú struktúra M felett, amelyre $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Ch}$ teljesül (ezt a $\mathfrak{Ch}$ struktúrát nevezzük az $\mathfrak{A}$ *atlasz által generált struktúrának*).

d) Legyen $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság, és jelölje $\mathscr{T}$ azt a legkisebb M feletti topológiát, amelyre minden $\mathfrak{Ch} \ni \varphi$-re $Dom(\varphi) \in \mathscr{T}$ (tehát $\mathscr{T}$ a

$\{Dom(\varphi)|\varphi \in \mathfrak{Ch}\}$ halmazt tartalmazó M feletti topológiák *metszete*). Ekkor minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ esetén a φ függvény *homeomorfizmus* a $Dom(\varphi)$ $\mathscr{T}$-nyílt topologikus altér és az $Im(\varphi)$ $\mathbb{R}^m$-beli nyílt topologikus altér között (természetesen $\mathbb{R}^m$ felett az euklidészi topológiát véve). A $\mathscr{T}$ topológiát az $(M, \mathfrak{Ch})$ *sokaság-topológiájának* nevezzük. Mutassuk meg, hogy ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokaság az E véges dimenziós valós vektortérben, akkor az $(M, Ch(M))$ sokaság-topológiája egyenlő az E euklidészi topológiájának M-re vett leszűkítésével. Azonban létezik olyan absztrakt sokaság, amelynek sokaság-topológiája nem Hausdorff-féle.

e) Legyen $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság, és $\mathfrak{a} \in M$. Legyen

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch}) := \{(\mathbf{v}, \varphi) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{Ch} \mid \mathfrak{a} \in Dom(\varphi)\}.$$

A $\mathscr{T}_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ halmazon értelmezzük az $\approx_{\mathfrak{a}}$ relációt úgy, hogy $(\mathbf{v}_1, \varphi_1), (\mathbf{v}_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{Ch}$ esetén

$$(\mathbf{v}_1, \varphi_1) \approx_{\mathfrak{a}} (\mathbf{v}_2, \varphi_2) \overset{df}{\Leftrightarrow} \mathbf{v}_2 = \left(D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})\right)(\varphi_1(\mathfrak{a}))\mathbf{v}_1.$$

Ekkor $\approx_{\mathfrak{a}}$ ekvivalecia-reláció $\mathscr{T}_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ felett; legyen

$$T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch}) := \mathscr{T}_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch}) / \approx_{\mathfrak{a}},$$

valamint jelölje $\pi_{\mathfrak{a}}$ a $\mathscr{T}_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch}) \to T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ kanonikus szürjekciót. Mutassuk meg, hogy ha $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ olyan, hogy $\mathfrak{a} \in Dom(\varphi)$, akkor a

$$\theta_{\varphi,\mathfrak{a}} : \mathbb{R}^m \to T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch}); \quad \mathbf{v} \mapsto \pi_{\mathfrak{a}}(\mathbf{v}, \varphi)$$

leképezés *bijekció*, és ha $\psi \in \mathfrak{Ch}$ szintén olyan, hogy $\mathfrak{a} \in Dom(\psi)$, akkor

$$\theta_{\psi,\mathfrak{a}}^{-1} \circ \theta_{\varphi,\mathfrak{a}} = \left(D(\psi \circ \varphi^{-1})\right)(\varphi(\mathfrak{a})) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

f) Ha $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság és $\mathfrak{a} \in M$, akkor a $T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ halmazon létezik egyetlen olyan *valós vektortér-struktúra*, amelyre minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ esetén, ha $\mathfrak{a} \in Dom(\varphi)$, akkor a $\theta_{\varphi,\mathfrak{a}} : \mathbb{R}^m \to T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ leképezés *lineáris bijekció*. A $T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ halmazt, ezzel a valós vektortér-struktúrával ellátva az $(M, \mathfrak{Ch})$ sokaság $\mathfrak{a}$ pontbeli *érintőterének* nevezzük, és a $T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ halmaz elemei az $(M, \mathfrak{Ch})$ sokaságot $\mathfrak{a}$ pontban *érintő vektorok*. Mutassuk meg, hogy ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokaság az E véges dimenziós valós vektortérben, akkor minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén a $T_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq E$ lineáris altér és a $T_{\mathfrak{a}}(M, Ch(M))$ érintőtér között létezik *kitüntetett lineáris bijekció*, amely által a $T_{\mathfrak{a}}(M)$ "konkrét" és a $T_{\mathfrak{a}}(M, Ch(M))$ "absztrakt" érintőterek *kanonikusan azonosulnak*.

10. (*Absztrakt sokaságok szorzata.*) Legyen $((M_i, \mathfrak{Ch}_i))_{i \in I}$ olyan nem üres véges rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $(M_i, \mathfrak{Ch}_i)$ m_i-dimenziós, C^{r_i}-osztályú (absztrakt) sokaság. Legyen $m := \sum_{i \in I} m_i$ és $r := \max_{i \in I} r_i$; és minden $(\varphi_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{Ch}_i$ esetén értelmezzük a

$$\underset{i \in I}{\times} \varphi_i : \prod_{i \in I} Dom(\varphi_i) \to \prod_{i \in I} \mathbb{R}^{m_i}; \quad (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \mapsto (\varphi_i(\mathfrak{a}_i))_{i \in I}$$

leképezést. Ekkor az $\prod_{i\in I} M_i$ szorzathalmaz felett létezik egyetlen olyan $\mathfrak{Ch}$ m-dimenziós, C^r-osztályú struktúra, hogy minden $u : \prod_{i\in I} \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}^m$ lineáris bijekcióra, és minden $(\varphi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{Ch}_i$ rendszerre $u \circ \times_{i\in I} \varphi_i \in \mathfrak{Ch}$ teljesül. Ezt az $\prod_{i\in I} M_i$ feletti m-dimenziós, C^r-osztályú struktúrát nevezzük a $(\mathfrak{Ch}_i)_{i\in I}$ *struktúra-rendszer szorzatának*, és a $\times_{i\in I} \mathfrak{Ch}_i$ szimbólummal jelöljük. Továbbá, a

$$\left(\prod_{i\in I} M_i, \underset{i\in I}{\times} \mathfrak{Ch}_i\right)$$

m-dimenziós, C^r-osztályú sokaságot az $((M_i, \mathfrak{Ch}_i))_{i\in I}$ *sokaság-rendszer szorzatának* nevezzük. Mutassuk meg, hogy minden $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ esetén a

$$T_{(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}}\left(\prod_{i\in I} M_i, \underset{i\in I}{\times} \mathfrak{Ch}_i\right)$$

absztrakt érintőtér kitüntetett módon lineárisan azonosítható a $\prod_{i\in I} T_{\mathfrak{a}_i}(M_i, \mathfrak{Ch}_i)$ lineáris szorzattérrel.

11. (*Absztrakt sokaság érintőtere.*) Legyen $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság, és tegyük fel, hogy $r \to 2$. Legyen

$$T(M, \mathfrak{Ch}) := \bigcup_{\mathfrak{a}\in M} \left(\{\mathfrak{a}\} \times T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})\right),$$

és jelölje π_M azt a $T(M, \mathfrak{Ch}) \to M$ függvényt, amely minden $(\mathfrak{a}, \mathfrak{t}) \in T(M, \mathfrak{Ch})$ párhoz az $\mathfrak{a}$ pontot rendeli; világos, hogy π_M szürjekció. Minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ esetén legyen

$$\hat{\varphi} : \overset{-1}{\pi}_M\langle Dom(\varphi)\rangle \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{t}) \mapsto \left(\varphi(\mathfrak{a}), \theta^{-1}_{\varphi,\mathfrak{a}}(\mathfrak{t})\right).$$

Ekkor a $T(M, \mathfrak{Ch})$ halmaz felett létezik egyetlen olyan $T(\mathfrak{Ch})$ $2m$-dimenziós, C^{r-1}-osztályú struktúra, amelyre minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ esetén $\hat{\varphi} \in T(\mathfrak{Ch})$. A $(T(M, \mathfrak{Ch}), T(\mathfrak{Ch}))$ $2m$-dimenziós, C^{r-1}-osztályú sokaságot az $(M, \mathfrak{Ch})$ sokaság *érintőterének* nevezzük. Mutassuk meg, hogy ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokaság az E véges dimenziós valós vektortérben, akkor a $(T(M, Ch(M)), T(Ch(M)))$ "absztrakt" és $(T(M), Ch(T(M)))$ "konkrét" érintőterek kitüntetett módon azonosulnak egymással.

12. (*Morfizmusok absztrakt sokaságok között.*) Legyen $(M_1, \mathfrak{Ch}_1)$ m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú sokaság, $(M_2, \mathfrak{Ch}_2)$ m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú sokaság, és $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *függvény* C^r*-osztályú* (a $\mathfrak{Ch}_1$ és $\mathfrak{Ch}_2$ struktúrák szerint), ha $r \leq \min(r_1, r_2)$, és minden $\varphi_1 \in \mathfrak{Ch}_1$ és $\varphi_2 \in \mathfrak{Ch}_2$ esetén a

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^{m_1} \rightarrowtail \mathbb{R}^{m_2}$$

leképezés C^r-osztályú. Mutassuk meg, hogy ha az $f : M_1 \to M_2$ függvény C^r-osztályú, akkor minden $\mathfrak{a} \in M_1$, $\varphi_1 \in \mathfrak{Ch}_1$ és $\varphi_2 \in \mathfrak{Ch}_2$ esetén, ha $\mathfrak{a} \in Dom(\varphi_1)$ és $f(\mathfrak{a}) \in Dom(\varphi_2)$, akkor a

$$\theta_{\varphi_2, f(\mathfrak{a})} \circ \left(D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})\right)(\varphi_1(\mathfrak{a})) \circ \theta_{\varphi_1,\mathfrak{a}}^{-1} \in \mathscr{L}(T_{\mathfrak{a}}(M_1, \mathfrak{Ch}_1); T_{f(\mathfrak{a})}(M_2, \mathfrak{Ch}_2))$$

lineáris operátor *független* a φ_1 és φ_2 térképek választásától, tehát ha $\psi_1 \in \mathfrak{Ch}_1$ és $\psi_2 \in \mathfrak{Ch}_2$ is olyan térképek, hogy $\mathfrak{a} \in Dom(\psi_1)$ és $f(\mathfrak{a}) \in Dom(\psi_2)$, akkor

$$\theta_{\varphi_2, f(\mathfrak{a})} \circ \left(D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})\right)(\varphi_1(\mathfrak{a})) \circ \theta_{\varphi_1,\mathfrak{a}}^{-1} = \theta_{\psi_2, f(\mathfrak{a})} \circ \left(D(\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1})\right)(\psi_1(\mathfrak{a})) \circ \theta_{\psi_1,\mathfrak{a}}^{-1}$$

teljesül. Ha az $f : M_1 \to M_2$ függvény C^r-osztályú, akkor minden $\mathfrak{a} \in M_1$ esetén a

$$\theta_{\varphi_2, f(\mathfrak{a})} \circ \left(D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})\right)(\varphi_1(\mathfrak{a})) \circ \theta_{\varphi_1,\mathfrak{a}}^{-1}$$

operátort a $T_{\mathfrak{a}}(f)$ szimbólummal jelöljük (ahol $\varphi_1 \in \mathfrak{Ch}_1$ és $\varphi_2 \in \mathfrak{Ch}_2$ olyan térképek, hogy $\mathfrak{a} \in Dom(\varphi_1)$ és $f(\mathfrak{a}) \in Dom(\varphi_2)$), és a

$$T_{\mathfrak{a}}(f) \in \mathscr{L}(T_{\mathfrak{a}}(M_1, \mathfrak{Ch}_1); T_{f(\mathfrak{a})}(M_2, \mathfrak{Ch}_2))$$

operátort az f függvény *érintő-operátorának*, vagy *deriváltjának* nevezzük az $\mathfrak{a}$ pontban (a $\mathfrak{Ch}_1$ és $\mathfrak{Ch}_2$ struktúrák szerint).

13. Jelölje M a Bernoulli-lemniszkátát (**3**. gyakorlat). Ekkor *nem létezik* olyan $m \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{N}^+$, hogy az M halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága $\mathbb{R}^2$-nek.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $m \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{N}^+$ olyan számok, amelyekre az M halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága $\mathbb{R}^2$-nek. Ekkor létezik olyan V nyílt környezete a $\mathbf{0} := (0,0) \in M$ pontnak $\mathbb{R}^2$-ben, és létezik olyan $h : V \to \mathbb{R}^{2-m}$ C^r-osztályú függvény, hogy minden $V \ni x$-re a $(Dh)(x)$ operátor szürjektív és $[h = 0] = M \cap V$; továbbá, ha h ilyen függvény, akkor $T_{\mathbf{0}}(M) = Ker((Dh)(\mathbf{0}))$. Tekintsük most a 3. példában értelmezett

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad p \mapsto \left(\frac{p(1+p^2)}{1+p^4}, \frac{p(1-p^2)}{1+p^4}\right)$$

leképezést. Világos, hogy $\Phi(0) = \mathbf{0}$, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\Phi\langle]-\delta,\delta[\rangle \subseteq M \cap V$, vagyis $h \circ \Phi = 0$ a $]-\delta,\delta[$ intervallumon. Ezért $((Dh)(\mathbf{0}))((D\Phi)(0)) = 0$, és könnyen kiszámítható, hogy $(D\Phi)(0) = (1,1)$, így $(1,1) \in Ker((Dh)(\mathbf{0})) = T_{\mathbf{0}}(M)$. Ugyanakkor $\lim_{p\to+\infty} \Phi(p) = \mathbf{0}$, ezért van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy fennáll a $\Phi\langle]c, \to [\rangle \subseteq M \cap V$ tartalmazás, azaz $h \circ \Phi = 0$ a $]c, \to [$ intervallumon. Ezért minden $]c, \to [\ni p$-re

$$((Dh)(\Phi(p)))\left(p^2.(D\Phi)(p)\right) = p^2.(D(h \circ \Phi))(p) = 0.$$

A Φ konkrét alakjából következik, hogy $\lim_{p\to+\infty} \left(p^2.(D(h\circ\Phi))(p)\right) = (-1,1)$, ezért az előző egyenlőséget és Dh folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$((Dh)(\mathbf{0}))(-1,1) = \lim_{p\to+\infty} \left(((Dh)(\Phi(p)))\left(p^2.(D\Phi)(p)\right)\right) = 0,$$

vagyis $(-1,1) \in Ker((Dh)(\mathbf{0})) = T_{\mathbf{0}}(M)$. Ez azt jelenti, hogy a $(-1,1)$ és $(1,1)$ *lineárisan független* vektorok elemei $T_{\mathbf{0}}(M)$-nek, tehát $dim(T_{\mathbf{0}}(M)) = 2$, vagyis $m = 2$. Az **1**. gyakorlat alapján ebből következik, hogy M *nyílt halmaz* $\mathbb{R}^2$-ben, ami nem igaz.)

14. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), r)$$

C^∞-osztályú függvényt. Ha $\varphi \in \mathbb{R}$ és U a $(0,\varphi)$ pontnak környezete $\mathbb{R}^2$-ben, akkor *nem létezik* olyan $m \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{N}^+$, hogy az $f\langle U\rangle$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága $\mathbb{R}^3$-nak.

(*Útmutatás.* Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\varphi \in \mathbb{R}$, U környezete a $(0,\varphi)$ pontnak $\mathbb{R}^2$-ben, $m \in \mathbb{N}$ és $r \in \mathbb{N}^+$, valamint az $f\langle U\rangle$ halmaz m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága $\mathbb{R}^3$-nak. Létezik a $\mathbf{0} := (0,0,0) \in f\langle U\rangle$ pontnak olyan V nyílt környezete $\mathbb{R}^3$-ban, és létezik olyan $h : V \to \mathbb{R}^{3-m}$ C^r-osztályú függvény, hogy minden $V \ni x$-re a $(Dh)(x)$ operátor szürjektív és $[h = 0] = f\langle U\rangle \cap V$; továbbá, ha h ilyen függvény, akkor $T_{\mathbf{0}}(f\langle U\rangle) = Ker((Dh)(\mathbf{0}))$. Az f függvény folytonos a $(0,\varphi)$ pontban, ezért a $(0,\varphi)$-nek vehetjük olyan W nyílt környezetét $\mathbb{R}^2$-ben, hogy $W \subseteq U$ és $f\langle W\rangle \subseteq V$. Legyenek $r,\delta \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $]-r,r[\times]\varphi-2\delta,\varphi+2\delta[\subseteq W$, és képezzük a

$$\gamma_0 :]-r,r[\to \mathbb{R}^2; \quad p \mapsto (p,\varphi),$$

$$\gamma_+ :]-r,r[\to \mathbb{R}^2; \quad p \mapsto (p,\varphi+\delta),$$

$$\gamma_- :]-r,r[\to \mathbb{R}^2; \quad p \mapsto (p,\varphi-\delta)$$

görbéket, amelyek mind W-ben haladnak és C^∞-osztályúak. Világos, hogy $f(\gamma_0(0)) = f(\gamma_+(0)) = f(\gamma_-(0)) = \mathbf{0}$, és $h \circ f \circ \gamma_0 = h \circ f \circ \gamma_+ = h \circ f \circ \gamma_-$ a $]-r,r[$ intervallumon. A függvénykompozíció differenciálási szabályát alkalmazva ebből kapjuk, hogy a

$$(D(f \circ \gamma_0))(0) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 1),$$

$$(D(f \circ \gamma_+))(0) = (\cos(\varphi+\delta), \sin(\varphi+\delta), 1),$$

$$(D(f \circ \gamma_-))(0) = (\cos(\varphi-\delta), \sin(\varphi-\delta), 1)$$

vektorok elemei $Ker((Dh)(\mathbf{0}))$-nak, vagyis a $T_{\mathbf{0}}(f\langle U\rangle)$ érintőtérnek. Azonban egyszerű lineáris algebrai megfontolásokkal belátható, hogy $\delta < \pi$ esetén ez három vektor *lineárisan független* $\mathbb{R}^3$-ban, ezért $m = 3$. Az **1**. gyakorlat alapján ebből következik, hogy $f\langle U\rangle$ *nyílt halmaz* $\mathbb{R}^3$-ban, ami nem igaz, hiszen még az $Im(f)$ halmaznak sincs belső pontja $\mathbb{R}^3$-ban.)

2. Riemann-sokaságok és felületi mértékek

Definíció. Az (M, g) párt m-dimenziós, C^r-osztályú *Riemann-sokaságnak* nevezzük E-ben, ha M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek, és

$$g \in \prod_{\mathfrak{a} \in M} \mathscr{L}_2(T_{\mathfrak{a}}(M)^2; \mathbb{R})$$

olyan függvény, hogy minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén a $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2(T_{\mathfrak{a}}(M)^2; \mathbb{R})$ bilineáris funkcionál *skalárszorzás* a $T_{\mathfrak{a}}(M)$ valós m-dimenziós vektortér felett, és az M minden Φ m-dimenziós, C^r-osztályú paraméterezésére a

$$g_\Phi : Dom(\Phi) \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^m)^2; \mathbb{R}); \quad p \mapsto g(\Phi(p)) \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p))$$

függvény C^{r-1}-osztályú.

Példák 1) Legyen E euklidészi tér. Ekkor az E halmaz $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú részsokasága E-nek, és ha g az az E-n értelmezett konstansfüggvény, amelynek értéke az E feletti $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzás, akkor az (E, g) pár $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú elemi Riemann-sokaság E-ben, mert ha Φ az E halmaznak $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú paraméterezése, akkor minden $Dom(\Phi) \ni p$-re

$$g_\Phi(p) := g(\Phi(p)) \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p)) = (\cdot|\cdot) \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p)),$$

tehát a g_Φ függvény a

$$Dom(\Phi) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E) \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E); \quad p \mapsto ((D\Phi)(p), (D\Phi)(p))$$

C^∞-osztályú, és az

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E) \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)} \times \mathbb{R}^{dim(E)}; E \times E); \quad (u, v) \mapsto u \times v$$

C^∞-osztályú, valamint az

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)} \times \mathbb{R}^{dim(E)}; E \times E) \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R}); \quad w \mapsto (\cdot|\cdot) \circ w$$

C^∞-osztályú függvény kompozíciója, így C^∞-osztályú.

2) Az első példa általánosításaként legyen E euklidészi tér és M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága E-nek. Minden $M \ni \mathfrak{a}$-ra $T_{\mathfrak{a}}(M)$ lineáris altere E-nek, ezért a $(\cdot|\cdot)|_{T_{\mathfrak{a}}(M)^2} : T_{\mathfrak{a}}(M)^2 \to \mathbb{R}$ függvény skalárszorzás a $T_{\mathfrak{a}}(M)$ m-dimenziós valós vektortér felett. Legyen g az az M-en értelmezett függvény, amelyre minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén $g(\mathfrak{a}) := (\cdot|\cdot)|_{T_{\mathfrak{a}}(M)^2}$. Ekkor (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság E-ben. Valóban, ha Φ paraméterezése az M sokaságnak, akkor $p \in Dom(\Phi)$ esetén

$$g_\Phi(p) := g(\Phi(p)) \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p)) := (\cdot|\cdot)|_{T_{\mathfrak{a}}(M)^2} \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p)) =$$

$$= (\cdot|\cdot) \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p)),$$

tehát a g_Φ függvény a

$$Dom(\Phi) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E) \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E); \quad p \mapsto ((D\Phi)(p), (D\Phi)(p))$$

C^{r-1}-osztályú, és az

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E) \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)}; E) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)} \times \mathbb{R}^{dim(E)}; E \times E); \quad (u, v) \mapsto u \times v$$

C^∞-osztályú, valamint az

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^{dim(E)} \times \mathbb{R}^{dim(E)}; E \times E) \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R}); \quad w \mapsto (\cdot|\cdot) \circ w$$

C^∞-osztályú függvény kompozíciója, így C^{r-1}-osztályú. Ez a példa jól mutatja, hogy a C^r-osztályú Riemann-sokaságok definíciójában miért azt kell megkövetelni, hogy a sokaság minden Φ paraméterezésére a g_Φ függvény *csak* C^{r-1}-osztályú legyen, és *nem feltétlenül* C^r-osztályú. Ha a g_Φ alakú függvényektől azt követelnénk meg, hogy C^r-osztályúak legyenek, akkor a most értelmezett (M, g) pár csak C^{r-1} osztályú Riemann-sokaság lenne, holott M C^r-osztályú részsokasága E-nek.

3) A második példa általánosításaként legyen M_1 m_1-dimenziós, C^{r_1}-osztályú részsokasága az E_1 véges dimenziós valós vektortérnek, és legyen (M_2, g_2) m_2-dimenziós, C^{r_2}-osztályú Riemann-sokaság az E_2 véges dimenziós valós vektortérben. Legyen $f : M_1 \to M_2$ olyan C^r-osztályú függvény, hogy minden $\mathfrak{a} \in M_1$ esetén a $T_\mathfrak{a}(f) : T_\mathfrak{a}(M_1) \to T_{f(\mathfrak{a})}(M_2)$ operátor *injektív* (ilyenkor azt mondjuk, hogy f *immerzió*). Természetesen ekkor $M_1 \neq \emptyset$ esetén szükségképpen $m_1 \leq m_2$. Minden $M_1 \ni \mathfrak{a}$-ra legyen

$$g_1(\mathfrak{a}) := g_2(f(\mathfrak{a})) \circ (T_\mathfrak{a}(f) \times T_\mathfrak{a}(f)).$$

Ekkor az (M_1, g_1) pár m_1-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság E_1-ben.

Lemma. Legyen E valós prehilbert-tér, és jelölje $(\cdot|\cdot)$ az E skalárszorzását. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $(f_i)_{i\in n}$ lineárisan független rendszer E-ben, akkor az $((f_i|f_j))_{(i,j)\in n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix determinánsa 0-nál nagyobb valós szám.

Bizonyítás. Legyen $(e_i)_{i\in n}$ olyan ortonormált rendszer E-ben, amely ugyanazt az n dimenziós lineáris alteret generálja, mint az $(f_i)_{i\in n}$ rendszer. Egyértelműen létezik olyan $L \in M_n(\mathbb{R})$, hogy minden $n \ni i$-re $f_i = \sum_{j\in n} L_{j,i}.e_j$. Ekkor minden $(i, j) \in n\times n$ párra az $(e_i)_{i\in n}$ rendszer ortonormáltsága folytán

$$(f_i|f_j) = \left(\sum_{k\in n} L_{k,i}.e_k \,\middle|\, \sum_{l\in n} L_{l,i}.e_l\right) = \sum_{k\in n}\left(\sum_{l\in n} L_{k,i}L_{l,j}(e_k|e_l)\right) =$$

$$= \sum_{k\in n}\left(\sum_{l\in n} L_{k,i}L_{l,j}\delta_{k,l}\right) = \sum_{k\in n} L_{k,i}L_{k,j} = (L^T \cdot L)_{i,j},$$

ahol L^T az L mátrix transzponáltját és $\cdot$ a mátrixszorzást jelöli $M_n(\mathbb{R})$-ben. Ez azt jelenti, hogy az $((f_i|f_j))_{(i,j)\in n\times n}$ mátrix egyenlő az $L^T \cdot L$ mátrixszal, tehát a determináns-függvény ismert tulajdonságai szerint

$$det\left(((f_i|f_j))_{(i,j)\in n\times n}\right) = det\left(L^T \cdot L\right) = det(L^T)det(L) = (det(L))^2.$$

Ugyanakkor az $(f_i)_{i\in n}$ rendszer lineárisan függetlensége miatt $det(L) \neq 0$, ezért $(det(L))^2 > 0$. ■

Következmény. Ha E és F valós Hilbert-terek, E véges dimenziós, és $u \in \mathscr{L}(E;F)$ injekció, akkor $det(u^* \circ u) > 0$.

Bizonyítás. Ha $n := dim(E)$ és $(e_i)_{i\in n}$ algebrai bázis E-ben, akkor $det(u^* \circ u)$ egyenlő az $(((u^* \circ u)(e_i)|e_j))_{(i,j)\in n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix determinánsával. Ha $i, j \in n$, akkor $((u^* \circ u)(e_i)|e_j) = (u(e_i)|u(e_j)$, és az u injektivitása folytán az $(u(e_i))_{i\in n}$ rendszer lineárisan független F-ben. Ezért az előző állítás alapján $det(u^* \circ u) > 0$. ■

Ha (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság, és Φ paraméterezése M-nek, akkor minden $p \in Dom(\Phi)$ esetén a $(D\Phi)(p) : \mathbb{R}^m \to T_{\Phi(p)}(M)$ lineáris operátor bijekció, és $\mathbb{R}^m$ az euklidészi skalárszorzással ellátva euklidészi tér, míg $T_{\Phi(p)}(M)$ a $g(\Phi(p))$ skalárszorzással ellátva szintén euklidészi tér. Ilyen esetben a $((D\Phi)(p))^*$ szimbólum a $(D\Phi)(p)$ operátor adjungáltját jelenti e skalárszorzások szerint. Ezért az előző állítás alapján értelmes a következő definíció.

Definíció. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek. Ekkor

$$mod_g(\Phi) : Dom(\Phi) \to \mathbb{R}^+; \quad p \mapsto \sqrt{det(((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p))},$$

és a $mod_g(\Phi)$ függvényt a Φ paraméterezés *g-modulusának* nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek, akkor $mod_g(\Phi)$ *lényegesen függ* a g Riemann-metrikától, hiszen $p \in Dom(\Phi)$ esetén

$$(mod_g(\Phi))\,(p) := \sqrt{det(((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p))},$$

és itt a $(D\Phi)(p) : \mathbb{R}^m \to T_{\Phi(p)}(M)$ lineáris operátor adjungáltja áll az $\mathbb{R}^m$ feletti euklidészi skalárszorzás és a $T_{\Phi(p)}(M)$ feletti $g(\Phi(p))$ skalárszorzás szerint; ez az adjungált teljesen más lehet, ha a $g(\Phi(p))$ skalárszorzást megváltoztatjuk.

Állítás. Ha (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek, akkor a $mod_g(\Phi) : Dom(\Phi) \to \mathbb{R}^+$ függvény C^{r-1}-osztályú (tehát legalább folytonos).

Bizonyítás. Feltehető, hogy $m > 0$ (**1**. gyakorlat). Legyen $(e_i)_{i\in m}$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^m$-ben, Φ paraméterezése M-nek és $p \in Dom(\Phi)$. Ekkor

$$(mod_g(\Phi))^2\,(p) := det(((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p)) =$$

$$= det\Big(\big(\big(\big(((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p)\big)\,(e_i)\mid e_j\big)_{\mathbb{R}^m}\big)_{(i,j)\in n\times n}\Big) =$$

$$= det\Big(\big(\ g(\Phi(p))\,(((D\Phi)(p))(e_i), ((D\Phi)(p))(e_j))\ \big)_{(i,j)\in n\times n}\Big) =$$

$$= det\left(\left(g_\Phi(p)(e_i, e_j) \right)_{(i,j)\in n\times n}\right) = \sum_{\sigma\in \mathbf{S}_m} \left(\varepsilon_\sigma \prod_{i\in m} g_\Phi(p)(e_i, e_{\sigma(i)})\right),$$

ahol $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^m}$ jelöli az $\mathbb{R}^m$ feletti eulidészi skalárszorzást. A feltevés szerint a $g_\Phi : Dom(\Phi) \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^m)^2; \mathbb{R})$ függvény C^{r-1}-osztályú, és minden $(e, f) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ esetén az $\mathscr{L}_2((\mathbb{R}^m)^2; \mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ \mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}(e, f)$ leképezés lineáris, tehát C^∞-osztályú. Ezért minden $i, j \in m$ indexre a

$$Dom(\Phi) \to \mathbb{R}; \quad p \mapsto g_\Phi(p)(e_i, e_j)$$

függvény C^{r-1}-osztályú, így a $(mod_g(\Phi))^2$ függvény is C^{r-1}-osztályú. Ezért $mod_g(\Phi)$ is C^{r-1}-osztályú, hiszen ez az $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ négyzetgyökvonás-függvény és a $(mod_g(\Phi))^2$ kompozíciója, ugyanis az előző következmény szerint minden $Dom(\Phi) \ni p$-re $det(((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p)) > 0$. ■

Most megvizsgáljuk Riemann-sokaság különböző paraméterezései modulusainak egymással való kapcsolatait.

Állítás. Ha (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ, Ψ paraméterezései M-nek, akkor

$$mod_g(\Phi) = \left| det(D(\Psi^{-1} \circ \Phi))\right| \cdot (mod_g(\Psi)) \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)$$

teljesül a $\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$ halmazon.

Bizonyítás. Legyen $p \in \overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$ rögzített pont. Világos, hogy $\Phi = \Psi \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)$ a $\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazon, és a $\Psi^{-1} \circ \Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható p-ben (sőt C^r-osztályú), így a függvénykompozíció differenciálási szabálya szerint

$$(D\Phi)(p) = (D\left(\Psi \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)\right))(p) = (D\Psi)((\Psi^{-1} \circ \Phi)(p)) \circ (D(\Psi^{-1} \circ \Phi))(p),$$

következésképpen

$$((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p) =$$

$$= (D(\Psi^{-1} \circ \Phi))(p)^* \circ (D\Psi)((\Psi^{-1} \circ \Phi)(p))^* \circ (D\Psi)((\Psi^{-1} \circ \Phi)(p)) \circ (D(\Psi^{-1} \circ \Phi))(p).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$(mod_g(\Phi))^2 (p) := det(((D\Phi)(p))^* \circ (D\Phi)(p)) =$$

$$= det\left((D(\Psi^{-1} \circ \Phi))(p)^*\right) \cdot det\left((D\Psi)((\Psi^{-1} \circ \Phi)(p))^* \circ (D\Psi)((\Psi^{-1} \circ \Phi)(p))\right) \cdot$$

$$\cdot det\left((D(\Psi^{-1} \circ \Phi))(p)\right) = \left(det\left((D(\Psi^{-1} \circ \Phi))(p)\right)\right)^2 \cdot (mod_g(\Psi))^2 \left((\Psi^{-1} \circ \Phi)(p)\right),$$

amiből következik az állítás. ■

A következő állításból kiderül a paraméterezések modulusainak integrálelméleti jelentősége.

Állítás. Ha (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság, Φ, Ψ paraméterezései M-nek, F Banach-tér és $f : M \to F$ olyan függvény, hogy $[f{\neq}0] \subseteq Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$. Ekkor az $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi) : Dom(\Phi) \to F$ függvény pontosan akkor integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint, ha az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi) : Dom(\Psi) \to F$ függvény integrálható a $Dom(\Psi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint. Továbbá, ha az $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi) : Dom(\Phi) \to F$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon μ_m szerint, akkor

$$\int\limits_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\, d\mu_m = \int\limits_{Dom(\Psi)} (f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\, d\mu_m.$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega := \overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$ és $\Omega' := \overset{-1}{\Psi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle$; ezek nyílt halmazok $\mathbb{R}^m$-ben. Az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)$ függvény (a definíció szerint) pontosan integrálható a $Dom(\Psi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint, ha $((f \circ \Psi)mod_g(\Psi))^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$. Az $[f{\neq}0] \subseteq Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$ feltétel alapján $((f \circ \Psi)mod_g(\Psi))^\circ = ((f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\,|_{\Omega'})^\circ$, ezért az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)$ függvény pontosan integrálható a $Dom(\Psi)$ halmazon a μ_m szerint, ha az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\,|_{\Omega'} : \Omega' \to F$ függvény integrálható az Ω' halmazon a μ_m mérték szerint. A $\Psi^{-1} \circ \Phi : \Omega \to \Omega'$ leképezés C^r-diffeomorfizmus, ezért a helyettesítéses integrálás tétele alapján az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\,|_{\Omega'} : \Omega' \to F$ függvény pontosan akkor integrálható az Ω' halmazon a μ_m szerint, ha a

$$|det(D(\Psi^{-1} \circ \Phi))|.\,((f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\,|_{\Omega'}) \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi) : \Omega \to F$$

függvény integrálható az Ω halmazon a μ_m szerint. De a modulus transzformációs tulajdonsága alapján

$$|det(D(\Psi^{-1} \circ \Phi))|.\,((f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\,|_{\Omega'}) \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi) = (f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\,|_{\Omega},$$

tehát az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)$ függvény pontosan integrálható a $Dom(\Psi)$ halmazon a μ_m szerint, ha az $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\,|_{\Omega} : \Omega \to F$ függvény integrálható az Ω halmazon a μ_m szerint. Ez utóbbi állítás viszont az $((f \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ = ((f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\,|_{\Omega})^\circ$ miatt azzal ekvivalens, hogy az $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi) : Dom(\Phi) \to F$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m szerint. Tehát az $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)$ és $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi)$ függvények μ_m szerinti integrálhatósága ekvivalens tulajdonságok, és a helyettesítéses integrálás formuláját alkalmazva kapjuk, hogy ha $(f \circ \Psi)mod_g(\Psi)$ integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m szerint, akkor

$$\int\limits_{Dom(\Psi)} (f \circ \Psi)mod_g(\Psi)\, d\mu_m = \int\limits_{\Omega'} ((f \circ \Psi)mod_g(\Psi))\,|_{\Omega'}\, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{\Omega} |det(D(\Psi^{-1} \circ \Phi))|.\,((f \circ \Psi)mod_g(\Psi)|_{\Omega'}) \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)\, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{\Omega} ((f \circ \Phi)mod_g(\Phi))\,|_{\Omega}\, d\mu_m = \int\limits_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\, d\mu_m$$

teljesül. ■

Definíció. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság. Az M sokaság minden Φ paraméterezésére értelmezzük az $\mathscr{R}_{g,\Phi} \subseteq \mathscr{P}(Im(\Phi))$ halmazt és a $\mu_{g,\Phi} : \mathscr{R}_{g,\Phi} \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvényt a következőképpen:

$$\mathscr{R}_{g,\Phi} := \left\{ H \subseteq Im(\Phi) \,\middle|\, \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m) \right\},$$

$$\mu_{g,\Phi} : \mathscr{R}_{g,\Phi} \to \mathbb{R}_+; \quad H \mapsto \int\limits_{Dom(\Phi)} \chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\, d\mu_m,$$

ahol $\circ$ a nullával való kiterjesztést jelöli $Dom(\Phi)$-ről $\mathbb{R}^m$-re.

Állítás. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság. Ha Φ paraméterezés az M sokaságnak, akkor a $\mathscr{R}_{g,\Phi}$ halmaz δ-gyűrű $Im(\Phi)$ felett, és $\mu_{g,\Phi}$ pozitív mérték.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\emptyset \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$. Legyen $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{R}_{g,\Phi}$-ben. A feltevés szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_n\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, és természetesen a $H := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$ halmazra

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_n\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ}$$

teljesül. A Levi-tételből következik, hogy $\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, vagyis $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$.

Legyenek $H, H' \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$. Ekkor $H \cap H' \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$ is teljesül, így a definíció szerint

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ}, \ \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H'\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ}, \ \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cap H'\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ}$$

függvények integrálhatók $\mathbb{R}^m$-en a μ_m szerint. Ugyanakkor nyilvánvalóan

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cup H'\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} = \sup\left(\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ}, \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H'\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} \right),$$

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\setminus H'\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} = \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ} - \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cap H'\rangle} mod_g(\Phi)\right)^{\circ},$$

következésképpen $H \cup H', H \setminus H' \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$. Ezzel megmutattuk, hogy a $\mathscr{R}_{g,\Phi}$ halmaz δ-gyűrű.

A $\mu_{g,\Phi} : \mathscr{R}_{g,\Phi} \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény σ-additivitásának bizonyításához legyen $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}_{g,\Phi}$-ben, amelyre $H := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k \in$

$\mathscr{R}_{g,\Phi}$. A feltevés szerint minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_k\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, és a $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer diszjunktsága folytán

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_k\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ = \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m).$$

Ezért a Levi-tétel és a $\mu_{g,\Phi}$ definíciója alapján

$$\mu_{g,\Phi}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k\right) = \int\limits_{Dom(\Phi)} \chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\, d\mu_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ d\mu_m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_k\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ d\mu_m = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{Dom(\Phi)} \chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_k\rangle} mod_g(\Phi)\, d\mu_m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{g,\Phi}(H_k)$$

teljesül, vagyis a $\mu_{g,\Phi}$ halmazfüggvény σ-additív. ■

Lemma. (*Szétvágási lemma.*) Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek. Ha $H \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$ és Ψ paraméterezése M-nek, akkor $H \cap Im(\Psi) \in \mathscr{R}_{g,\Phi} \cap \mathscr{R}_{g,\Psi}$.

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy ha F tetszőleges Banach-tér és $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, akkor minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazra $\chi_\Omega.f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$. Legyen ugyanis $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt halmaz, $K_n \subseteq K_{n+1}$ és $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú foyltonos függvény, $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $supp(\varphi_n) \subseteq \Omega$ és $K_n \subseteq [\varphi_n = 1]$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ esetén a φ_n függvény μ_m-mérhető, tehát $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$ esetén a $\varphi_n.f : \mathbb{R}^m \to F$ függvény is μ_m-mérhető, továbbá $\|\varphi_n.f\| \leq \|f\|$, és $\int^* \|f\| d\mu_m < +\infty$, ezért az integrálhatóság kritériuma szerint $\varphi_n.f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$. Természetesen $\chi_\Omega.f = \lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n.f)$, ezért a Lebesgue-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy $\chi_\Omega.f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$.

(II) Legyen $H \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$ és Ψ paraméterezése M-nek. Ekkor $H \subseteq Im(\Phi)$, ezért

$$\overset{-1}{\Phi}\langle H \cap Im(\Psi)\rangle = \overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi) \cap H\rangle = \overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi) \cap Im(\Psi)\rangle \cap \overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle,$$

amiből következik, hogy

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cap Im(\Psi)\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ = \chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi)\cap Im(\Psi)\rangle}\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ,$$

és a jobb oldalon álló függvény az (I) alapján μ_m-integrálható, mert a $\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi)\cap Im(\Psi)\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz nyílt és $\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$. Ez azt jelenti, hogy $H\cap Im(\Psi)\in \mathscr{R}_{g,\Phi}$. Ugyanakkor a $\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cap Im(\Psi)\rangle} : M\to\mathbb{R}$ függvényre teljesül az, hogy $\left[\chi_{H\cap Im(\Psi)}\neq 0\right]\subseteq Im(\Phi)\cap Im(\Psi)$, ezért a

$$\left(\left(\chi_{H\cap Im(\Psi)}\circ\Phi\right) mod_g(\Phi)\right)^\circ = \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cap Im(\Psi)\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$$

kijelentés ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\left(\chi_{H\cap Im(\Psi)}\circ\Psi\right) mod_g(\Psi)\right)^\circ = \left(\chi_{\overset{-1}{\Psi}\langle H\cap Im(\Psi)\rangle} mod_g(\Psi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m).$$

Az imént láttuk, hogy $\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H\cap Im(\Psi)\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, következésképpen $\left(\chi_{\overset{-1}{\Psi}\langle H\cap Im(\Psi)\rangle} mod_g(\Psi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$ is teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy $H\cap Im(\Psi)\in\mathscr{R}_{g,\Psi}$. ■

Következmény. Legyen (M,g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek. Ha $H\subseteq Im(\Phi)$ és létezik M-nek olyan Ψ paraméterezése, hogy $H\in\mathscr{R}_{g,\Psi}$, akkor $H\in\mathscr{R}_{g,\Phi}$.

Bizonyítás. A szétvágási lemma szerint $H = H\cap Im(\Phi)\in\mathscr{R}_{g,\Psi}\cap\mathscr{R}_{g,\Phi}$. ■

Jelölés. Legyen (M,g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és jelölje $Par(M)$ az M paraméterezéseinek halmazát. Az $\mathscr{S}_g\subseteq\mathscr{P}(M)$ halmazt a következőképpen értelmezzük

$$\mathscr{S}_g := \bigcup_{\Phi\in Par(M)} \mathscr{R}_{g,\Phi},$$

valamint $\mathscr{R}_g$ jelöli az $\mathscr{S}_g$ által generált halmazgyűrűt.

Állítás. Ha (M,g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság, akkor $\mathscr{S}_g$ félgyűrű M felett, és létezik egyetlen olyan

$$\mu_g : \mathscr{R}_g \to \mathbb{R}_+$$

pozitív mérték, hogy az M minden Φ paraméterezésére

$$\mu_g|_{\mathscr{R}_{g,\Phi}} = \mu_{g,\Phi}$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $H_1, H_2\in\mathscr{S}_g$, és legyenek Φ_1, Φ_2 olyan paraméterezései M-nek, hogy $H_1\in\mathscr{R}_{g,\Phi_1}$ és $H_2\in\mathscr{R}_{g,\Phi_2}$. A szétvágási lemmából következik, hogy

$H_1 \cap Im(\Phi_2) \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2}$. Ugyanakkor $H_2 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2}$ és $\mathscr{R}_{g,\Phi_2}$ halmazgyűrű, ezért $H_2 \subseteq Im(\Phi_2)$ és a szétvágási lemma alapján

$$H_1 \cap H_2 = H_1 \cap (H_2 \cap Im(\Phi_2)) = (H_1 \cap Im(\Phi_2)) \cap H_2 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2},$$

így $H_1 \cap H_2 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2} \subseteq \mathscr{S}_g$.

Tegyük fel, hogy $H_1, H_2 \in \mathscr{S}_g$ és $H_1 \subseteq H_2$; megmutatjuk, hogy $H_2 \setminus H_1 \in \mathscr{S}_g$. Legyenek Φ_1 és Φ_2 olyan paraméterezései M-nek, hogy $H_1 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_1}$ és $H_2 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2}$. A szétvágási lemma alapján $H_1 \cap Im(\Phi_2) \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2}$, ezért $H_1 \subseteq H_2$ és $H_1 \subseteq Im(\Phi_2)$ miatt

$$H_1 = H_1 \cap H_2 = H_1 \cap (H_2 \cap Im(\Phi_2)) = (H_1 \cap Im(\Phi_2)) \cap H_2 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2},$$

hiszen $\mathscr{R}_{g,\Phi_2}$ halmazgyűrű. Ezért $H_2 \setminus H_1 \in \mathscr{R}_{g,\Phi_2} \subseteq \mathscr{S}_g$, hiszen $\mathscr{R}_{g,\Phi_2}$ halmazgyűrű. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathscr{S}_g$ félgyűrű.

Jelölje most $Par(M)$ az M sokaság paraméterezéseinek halmazát, és tekintsük a $(\mu_{g,\Phi})_{\Phi \in Par(M)}$ mérték-rendszert. Akkor és csak akkor létezik olyan $\mu : \mathscr{S}_g \to \mathbb{R}_+$ függvény, amelyre minden $\Phi \in Par(M)$ esetén $\mu|_{\mathscr{R}_{g,\Phi}} = \mu_{g,\Phi}$, ha minden $\Phi, \Psi \in Par(M)$ és $H \in \mathscr{R}_{g,\Phi} \cap \mathscr{R}_{g,\Psi}$ esetén $\mu_{g,\Phi}(H) = \mu_{g,\Psi}(H)$ teljesül (I. fejezet, 2. pont, **20**. gyakorlat). Tehát legyenek $\Phi, \Psi \in Par(M)$ és $H \in \mathscr{R}_{g,\Phi} \cap \mathscr{R}_{g,\Psi}$. Ekkor a $\chi_H : M \to \mathbb{R}$ függvényre $[\chi_H \neq 0] \subseteq Im(\Phi) \cap Im(\Psi)$ teljesül, továbbá $H \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$ miatt a $(\chi_H \circ \Phi) mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint, ezért a $(\chi_H \circ \Psi) mod_g(\Psi)$ függvény is integrálható a $Dom(\Psi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint és

$$\mu_{g,\Phi}(H) := \int\limits_{Dom(\Phi)} \chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H \rangle} mod_g(\Phi)\, d\mu_m = \int\limits_{Dom(\Phi)} (\chi_H \circ \Phi) mod_g(\Phi)\, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{Dom(\Psi)} (\chi_H \circ \Psi) mod_g(\Psi)\, d\mu_m = \int\limits_{Dom(\Psi)} \chi_{\overset{-1}{\Psi}\langle H \rangle} mod_g(\Psi)\, d\mu_m =: \mu_{g,\Psi}(H).$$

Ezzel megmutattuk, hogy egyértelműen képezhető az a $\mu : \mathscr{S}_g \to \mathbb{R}_+$ függvény, amelyre minden $\Phi \in Par(M)$ esetén $\mu|_{\mathscr{R}_{g,\Phi}} = \mu_{g,\Phi}$. Állítjuk, hogy ez a μ függvény σ-additív. Ehhez legyen $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan diszjunkt rendszer $\mathscr{S}_g$-ben, hogy $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} H_k \in \mathscr{S}_g$. Legyen Φ olyan paraméterezése M-nek, hogy $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} H_k \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $H_k \subseteq Im(\Phi)$ és $H_k \in \mathscr{S}_g$ miatt létezik az M-nek olyan Φ_k paraméterezése, hogy $H_k \in \mathscr{R}_{g,\Phi_k}$, így a szétvágási lemma következménye szerint $H_k \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$. Ezért a μ definíciója és a $\mu_{g,\Phi}$ halmazfüggvény σ-additivitása folytán

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k\right) = \mu_{g,\Phi}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{g,\Phi}(H_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(H_k),$$

tehát a $\mu : \mathscr{S}_g \to \mathbb{R}_+$ függvény σ-additív.

Ebből a VIII. fejezet 1. és 6. pontjának eredményei alapján kapjuk egyetlen olyan $\mu_g : \mathscr{R}_g \to \mathbb{R}_+$ mérték létezését, amely μ-nek kiterjesztése. Ez a μ_g egyben az az egyértelműen meghatározott pozitív mérték, amely $\mathscr{R}_g$-n értelmezett, és amelyre teljesül az, hogy az M minden Φ paraméterezésére $\mu_g|_{\mathscr{R}_{g,\Phi}} = \mu|_{\mathscr{R}_{g,\Phi}} = \mu_{g,\Phi}$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állítás feltételei mellett $\mathscr{S}_g$ olyan félgyűrű M felett, amely zárt a megszámlálható metszet-képzésre nézve és zárt a halmazkülönbség-képzésre is, de általában nem zárt a véges unió-képzésre nézve, ezért $\mathscr{S}_g$ nem feltétlenül halmazgyűrű, vagyis $\mathscr{S}_g \neq \mathscr{R}_g$ lehetséges. Később megmutatjuk, hogy ha (M, g) *elemi* Riemann-sokaság és Φ globális paraméterezése M-nek, akkor $\mathscr{S}_g = \mathscr{R}_{g,\Phi} = \mathscr{R}_g$. Az is könnyen bizonyítható, hogy $\mathscr{R}_g$ valójában δ-gyűrű (**4.** gyakorlat), azonban $\mathscr{R}_g$ általában nem zárt a megszámlálható unió-képzésre nézve, vagyis $\mathscr{R}_g$ nem feltétlenül σ-gyűrű.

Definíció. Ha (M, g) Riemann-sokaság, akkor az előző állításban értelmezett $\mu_g : \mathscr{R}_g \to \mathbb{R}_+$ pozitív mértéket az (M, g) Riemann-sokaság *felületi mértékének* nevezzük, továbbá, ha az M halmaz μ_g-integrálható, akkor az $\int\limits_M \chi_M \, d\mu_g \in \mathbb{R}_+$ számot az (M, g) Riemann-sokaság *felszínének* nevezzük.

Példa. (*Euklidészi mértékek.*) Legyen E euklidészi tér, $m := dim(E)$, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, és jelölje g a $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzás által meghatározott Ω feletti Riemann-metrikát. Ekkor tekinthetjük az $\mathscr{R}_g$ halmazgyűrűt és a μ_g felületi mértéket, amit az E skalárszorzása által meghatározott Ω feletti *euklidészi mértéknek* nevezünk.
Az μ_g euklidészi mérték szoros kapcsolatban áll az $\mathbb{R}^m$ feletti Lebesgue-mértékkel. A pontos kapcsolat meghatározása céljából legyen $u : \mathbb{R}^m \to E$ tetszőleges lineáris bijekció; ekkor $u\Big|_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle}$ globális paraméterezése az Ω sokaságnak. Minden $p \in \overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle$ esetén $\left(D\left(u\Big|_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle}\right)\right)(p) = u$, ezért a $mod_g\left(u\Big|_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle}\right) : \overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle \to \mathbb{R}^+$ modulus-függvény egyenlő a $\sqrt{det(u^* \circ u)}$ értékű konstansfüggvénnyel. Ebből következik, hogy

$$\mathscr{R}_g = \left\{ H \subseteq \Omega \,\middle|\, \left(\chi_{\overset{-1}{u}\langle H\rangle} mod_g\left(u\Big|_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle}\right)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m) \right\} =$$

$$= \left\{ H \subseteq \Omega \,\middle|\, \chi_{\overset{-1}{u}\langle H\rangle} \sqrt{det(u^* \circ u)} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m) \right\} =$$

$$= \left\{ H \subseteq \Omega \,\middle|\, \chi_{\overset{-1}{u}\langle H\rangle} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m) \right\},$$

és $H \in \mathscr{R}_g$ esetén

$$\mu_g(H) = \sqrt{det(u^* \circ u)} \cdot \mu_m\left(\overset{-1}{u}\langle H\rangle\right).$$

Speciálisan, ha az $u : \mathbb{R}^m \to E$ lineáris bijekció sklárszorzás-tartó az $\mathbb{R}^m$ feletti euklidészi skalárszorzás és az E felett adott skalárszorzás szerint, akkor minden $H \in \mathscr{R}_g$ esetén

$$\mu_g(H) = \mu_m\left(\overset{-1}{u}\langle H\rangle\right),$$

hiszen ekkor $u^* \circ u = id_{\mathbb{R}^m}$, tehát $\sqrt{det(u^* \circ u)} = 1$. Jól látható, hogy az $\mathscr{R}_g$ halmazgyűrű *független* az u operátortól, sőt még az E feletti skalárszorzástól sem függ, ezért erre a halmazgyűrűre az $\mathscr{R}_\Omega$ jelölést alkalmazzuk. Tehát $\mathscr{R}_\Omega \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ az a halmaz, amelyre $H \in \mathscr{R}_\Omega$ pontosan akkor teljesül, ha $H \subseteq \Omega$ és *van olyan* $u : \mathbb{R}^m \to E$ lineáris bijekció, amelyre az $\overset{-1}{u}\langle H\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz Lebesgue-integrálható (ekkor *minden* $u : \mathbb{R}^m \to E$ lineáris bijekcióra az $\overset{-1}{u}\langle H\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz Lebesgue-integrálható).
Azonban a μ_g felületi mérték *lényegesen függ* az E feletti skalárszorzástól, ami a μ_g-re imént felírt formulákból látható. A pontos összefüggés meghatározása céljából legyen $(\cdot|\cdot)'$ szintén skalárszorzás E felett, és jelölje g' a $(\cdot|\cdot)'$ által meghatározott Ω feletti Riemann-metrikát. Legyenek $u, u' : \mathbb{R}^m \to E$ olyan lineáris bijekciók, hogy u megtartja az $(\cdot|\cdot)_m$ és $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzásokat, valamint u' megtartja az $(\cdot|\cdot)_m$ és $(\cdot|\cdot)'$ skalárszorzásokat, ahol $(\cdot|\cdot)_m$ az euklidészi skalárszorzás $\mathbb{R}^m$ felett. Ha $H \in \mathscr{R}_\Omega$, akkor a helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva az $u^{-1} \circ u' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ C^1-diffeomorfizmusra és a $\chi_H \circ u \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$ függvényre

$$\mu_{g'}(H) = \mu_m\left(\overset{-1}{u'}\langle H\rangle\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_H \circ u'\, d\mu_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\chi_H \circ u) \circ (u^{-1} \circ u')\, d\mu_m =$$

$$= \frac{1}{|det(u^{-1} \circ u')|} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_H \circ u\, d\mu_m = \frac{1}{|det(u^{-1} \circ u')|} \mu_m(\overset{-1}{u}\langle H\rangle) = \frac{1}{|det(u^{-1} \circ u')|} \mu_g(H)$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy

$$\mu_g = |det(u^{-1} \circ u')| \mu_{g'}$$

teljesül.

Lemma. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek.
a) Minden $K \subseteq Im(\Phi)$ kompakt halmazra $K \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$.
b) Ha $f : Im(\Phi) \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$.
c) Ha F Banach-tér és $f : Im(\Phi) \to F$ véges dimenziós értékű, kompakt tartójú folytonos függvény, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$.
Bizonyítás. a) Ha $K \subseteq Im(\Phi)$ kompakt halmaz, akkor

$$\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle K\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ = \left(mod_g(\Phi)\Big|_{\overset{-1}{\Phi}\langle K\rangle}\right)^\circ,$$

és $mod_g(\Phi)\Big|_{\overset{-1}{\Phi}\langle K\rangle} : \overset{-1}{\Phi}\langle K\rangle \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelynek $mod_g(\Phi)$ folytonos kiterjesztése a $Dom(\Phi) \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazra, és $\overset{-1}{\Phi}\langle K\rangle$ kompakt halmaz $\mathbb{R}^m$-ben, mert Φ homeomorfizmus $Dom(\Phi)$ és $Im(\Phi)$ között, tehát a X. fejezet 1. pontjának eredményeiből következik, hogy $\left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle K\rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, azaz $K \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$.

b) Legyen $f : Im(\Phi) \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú folytonos függvény, és $K \subseteq Im(\Phi)$ olyan kompakt halmaz, amelyre $[f \neq 0] \subseteq K$. Megmutatjuk, hogy $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}) \cap \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$. Ehhez legyen minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{\overset{-1}{f}\langle[k/2^n,(k+1)/2^n[\rangle} : Im(\Phi) \to \mathbb{R}_+.$$

Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvényrendszer monoton növő, és pontonként (sőt egyenletesen) konvergál f-hez az $Im(\Phi)$ halmazon (V. fejezet, 3. pont, **8**. gyakorlat), továbbá minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $[f_n \neq 0] \subseteq [f \neq 0] \subseteq K$. Ha minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $f_n \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ teljesülne, akkor a Levi-tétel alapján $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ is igaz volna, hiszen $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq f_n \leq f \leq |||f|||\chi_K$, és az előzőek alapján $\int^* \chi_K \, d\mu_{g,\Phi} < +\infty$, így $\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \|f_n\|_{\mu_{g,\Phi},1} \leq |||f|||\mu^*_{g,\Phi}(K) < +\infty$. Tehát elég volna azt igazolni, hogy $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ esetén az $\overset{-1}{f}\langle[a,b[\rangle$ halmaz $\mu_{g,\Phi}$-integrálható. Ez viszont így van, ha $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $a < b_k < b$, valamint $b = \lim_{k\to\infty} b_k$, akkor

$$\overset{-1}{f}\langle[a,b[\rangle = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overset{-1}{f}\langle[a,b_k]\rangle \subseteq K,$$

és a K halmaz, valamint az a) alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra az $\overset{-1}{f}\langle[a,b_k]\rangle$ halmaz is $\mu_{g,\Phi}$-integrálható, hiszen ez kompakt, így a IX. fejezet 5. pontjának eredményei alapján $\overset{-1}{f}\langle[a,b[\rangle$ is $\mu_{g,\Phi}$-integrálható halmaz. Az is látható, hogy $\chi_{\overset{-1}{f}\langle[a,b[\rangle} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\overset{-1}{f}\langle[a,b_k]\rangle}$, és az a) miatt minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_{\overset{-1}{f}\langle[a,b_k]\rangle} \in \mathscr{E}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$. Ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, így $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$.

c) Legyen F Banach-tér és $f : Im(\Phi) \to F$ olyan folytonos függvény, amelyhez létezik olyan $K \subseteq Im(\Phi)$ kompakt halmaz, hogy $[f \neq 0] \subseteq K$, és az $Im(f)$ által generált lineáris altér véges dimenziós F-ben. Megmutatjuk, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$. Ekkor ugyanis létezik olyan $(z_i)_{i\in I}$ véges rendszer F-ben és létezik $Im(\Phi) \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú folytonos függvényeknek olyan $(f_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy minden $I \ni i$-re $[f_i \neq 0] \subseteq K$ és $f = \sum_{i\in I} z_i \otimes f_i$. A b)-ből következik, hogy minden $I \ni i$-re $f_i \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$, ezért

$$f = \sum_{i\in I} z_i \otimes f_i \in F \otimes \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi}) \subseteq \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi}),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Lemma. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek.

a) Ha F Banach-tér, akkor minden $f \in \mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$ esetén az $(f \circ \Phi) mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint és

$$\int_{Im(\Phi)} f \, d\mu_{g,\Phi} = \int_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m.$$

b) Minden $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$ függvényre

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^{*} f \, d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{Dom(\Phi)}^{*} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m.$$

c) Minden $f : Im(\Phi) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^{*} f \, d\mu_{g,\Phi} \geq \int\limits_{Dom(\Phi)}^{*} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m.$$

d) Az $N \subseteq Im(\Phi)$ halmaz pontosan akkor $\mu_{g,\Phi}$-nullhalmaz, ha a $\overset{-1}{\Phi}\langle N \rangle \subseteq Dom(\Phi)$ halmaz μ_m-nullhalmaz.

Bizonyítás. a) Legyen $f \in \mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$. Létezik olyan $(H_i)_{i \in I}$ véges rendszer $\mathscr{R}_{g,\Phi}$-ben és olyan $(z_i)_{i \in I}$ rendszer F-ben, hogy $f = \sum\limits_{i \in I} z_i \otimes \chi_{H_i}$. Ekkor az $\mathscr{R}_{g,\Phi}$ halmazgyűrű definíciója alapján

$$((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ = \sum_{i \in I} z_i \otimes \big((\chi_{H_i} \circ \Phi) mod_g(\Phi)\big)^\circ = \sum_{i \in I} z_i \otimes \left(\chi_{\overset{-1}{\Phi}\langle H_i \rangle} mod_g(\Phi)\right)^\circ$$

$$\in F \otimes \mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m) \subseteq \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m),$$

tehát az $(f \circ \Phi) mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint, és a $\mu_{g,\Phi}$ mérték definíciója alapján

$$\int\limits_{Im(\Phi)} f \, d\mu_{g,\Phi} = \sum_{i \in I} z_i \mu_{g,\Phi}(H_i) = \sum_{i \in I} z_i \int\limits_{\mathbb{R}^m} \big((\chi_{H_i} \circ \Phi) mod_g(\Phi)\big)^\circ \, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{i \in I} z_i \otimes \big((\chi_{H_i} \circ \Phi) mod_g(\Phi)\big)^\circ \right) d\mu_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} ((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m.$$

b) Legyen $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, és vegyünk olyan $\mathscr{E}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$-ben haladó $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot, amelyre $f = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$. Az a) alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, és $\big(((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\big)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan monoton növő függvénysorozat, hogy

$$((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ = \sup_{k \in \mathbb{N}} ((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ$$

teljesül. Így a felső integrál monoton σ-folytonosságát és a)-t alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \sup_{k \in \mathbb{N}} ((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi)) \, d\mu_m =$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m}^{*} (f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi)\ d\mu_m = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{Dom(\Phi)} (f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi)\ d\mu_m =$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{Im(\Phi)} f_k\ d\mu_{g,\Phi} = \int_{Im(\Phi)}^{*} f\ d\mu_{g,\Phi}.$$

c) Legyen $f : Im(\Phi) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény. Ha $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$ olyan, hogy $f \leq h$, akkor természetesen $((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \leq ((h \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ$, ezért az a) alapján

$$\int^{*} ((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\, d\mu_m \leq \int^{*} ((h \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\, d\mu_m = \int_{Im(\Phi)}^{*} h\ d\mu_{g,\Phi}.$$

Ebből következik, hogy

$$\int^{*} ((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\, d\mu_m \leq \inf_{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi),\mathscr{R}_{g,\Phi});\ f\leq h} \int_{Im(\Phi)}^{*} h\, d\mu_{g,\Phi} = \int_{Im(\Phi)}^{*} f\, d\mu_{g,\Phi},$$

amit bizonyítani kellett.

d) Legyen az $N \subseteq Im(\Phi)$ halmaz $\mu_{g,\Phi}$-nullhalmaz. Ekkor a c) alapján

$$0 = \mu^*_{g,\Phi}(N) := \int_{Im(\Phi)}^{*} \chi_{_N}\ d\mu_{g,\Phi} \geq \int^{*} ((\chi_{_N} \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\, d\mu_m =$$

$$= \int^{*} ((\chi_{_N} \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\, d\mu_m,$$

ezért $((\chi_{_N} \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ = 0$ az $\mathbb{R}^m$-en μ_m-majdnem mindenütt. Ugyanakkor a $\left[((\chi_{_N} \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \neq 0\right]$ halmaz egyenlő $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle$-nel, tehát a $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle$ halmaz μ_m-nullhalmaz.

Megfordítva; tegyük fel, hogy $N \subseteq Im(\Phi)$ olyan halmaz, amelyre az $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle$ halmaz μ_m-nullhalmaz. A X. fejezet 3. pontjában megmutattuk, hogy ekkor minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz van olyan $\Omega_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle \subseteq \Omega_\varepsilon$ és $\mu^*_m(\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$. A $Dom(\Phi)$ halmaz nyílt $\mathbb{R}^m$-ben és $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle \subseteq Dom(\Phi)$, ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén az $\Omega_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz megválasztható úgy, hogy $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle \subseteq \Omega_\varepsilon \subseteq Dom(\Phi)$ és $\mu^*_m(\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$. Ekkor fennáll a

$$\frac{\chi_{_N}}{(mod_g(\Phi)) \circ \Phi^{-1}} \leq \frac{\chi_{\Phi\langle\Omega_\varepsilon\rangle}}{(mod_g(\Phi)) \circ \Phi^{-1}} = \left(\frac{\chi_{\Omega_\varepsilon}}{mod_g(\Phi)}\right) \circ \Phi^{-1}$$

függvény-egyenlőtlenség $Im(\Phi)$-n, következésképpen

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} \left(\frac{\chi_{_N}}{(mod_g(\Phi)) \circ \Phi^{-1}}\right) d\mu_{g,\Phi} \leq \int_{Im(\Phi)}^{*} \left(\left(\frac{\chi_{\Omega_\varepsilon}}{mod_g(\Phi)}\right) \circ \Phi^{-1}\right) d\mu_{g,\Phi}.$$

Ebből látható, hogy ha teljesülnének a

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} \left(\left(\frac{\chi_{\Omega_\varepsilon}}{mod_g(\Phi)} \right) \circ \Phi^{-1} \right) d\mu_{g,\Phi} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}^{*} \left(\left(\left(\left(\frac{\chi_{\Omega_\varepsilon}}{mod_g(\Phi)} \right) \circ \Phi^{-1} \right) \circ \Phi \right) mod_g(\Phi) \right)^{\circ} d\mu_m = \mu_m^*(\Omega_\varepsilon)$$

egyenlőségek, akkor

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} \left(\frac{\chi_N}{(mod_g(\Phi)) \circ \Phi^{-1}} \right) d\mu_{g,\Phi} < \varepsilon$$

adódna (minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén), vagyis $\dfrac{\chi_N}{(mod_g(\Phi)) \circ \Phi^{-1}} = 0$ teljesülne $Im(\Phi)$-n $\mu_{g,\Phi}$-majdnem mindenütt, tehát az N halmaz $\mu_{g,\Phi}$-nullhalmaz lenne. Tehát elég azt igazolni, hogy ha $\Omega \subseteq Im(\Phi)$ nyílt halmaz, akkor az $f := \left(\dfrac{\chi_\Omega}{mod_g(\Phi)} \right) \circ \Phi^{-1} :$ $Im(\Phi) \to \mathbb{R}_+$ függvényre

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} f \, d\mu_{g,\Phi} = \int_{\mathbb{R}^m}^{*} ((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^{\circ} \, d\mu_m$$

teljesül. Ennek bizonyításához legyen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\varphi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, és $0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1} \leq 1$, $supp(\varphi_k) \subseteq \Omega$, valamint $\chi_\Omega = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k$. Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k :=$ $\left(\dfrac{\varphi_k}{mod_g(\Phi)} \right) \circ \Phi^{-1}$. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : Im(\Phi) \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, és az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, valamint $f = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ az $Im(\Phi)$ halmazon. A $\mu_{g,\Phi}$ szerinti felső integrál monoton σ-folytonossága miatt

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} f \, d\mu_{g,\Phi} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{Im(\Phi)}^{*} f_k \, d\mu_{g,\Phi}.$$

Az előző lemma b) pontja szerint $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mu_{g,\Phi})$, tehát a b) alapján

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} f_k \, d\mu_{g,\Phi} = \int_{\mathbb{R}^m}^{*} ((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^{\circ} \, d\mu_m.$$

Ugyanakkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^{\circ} = \varphi_k$, valamint $((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^{\circ} =$ χ_Ω, tehát a μ_m szerinti felső integrál monoton σ-folytonossága következtében

$$\int_{Im(\Phi)}^{*} f \, d\mu_{g,\Phi} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m}^{*} \varphi_k \, d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^m}^{*} \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k \right) d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \chi_\Omega d\mu_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} ((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \, d\mu_m,$$

amit bizonyítani kellett. ■

Most bebizonyítjuk a X. fejezet 3. pontjában igazolt helyettesítéses integrálás tételének természetes általánosítását (**5**. gyakorlat).

Tétel. (*Felületi mérték szerinti helyettesítéses integrálás tétele.*) Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság, Φ paraméterezése M-nek és F Banach-tér. Ha $f : Im(\Phi) \to F$ tetszőleges függvény, akkor $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ ekvivalens azzal, hogy az $(f \circ \Phi) mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$, akkor

$$\int\limits_{Im(\Phi)} f \, d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m.$$

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$. Ekkor létezik olyan $\mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$-ben haladó $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{Im(\Phi)}^{*} \|f - f_k\| \, d\mu_{g,\Phi} = 0.$$

Ekkor természetesen $\int\limits_{Im(\Phi)} f \, d\mu_{g,\Phi} = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{Im(\Phi)} f_k \, d\mu_{g,\Phi}$ is teljesül. Az előző lemma a) és c) pontja szerint minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, és

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^{*} \|f - f_k\| \, d\mu_{g,\Phi} \geq \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} ((\|f - f_k\| \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \|((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ - ((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\| \, d\mu_m,$$

következésképpen

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \|((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ - ((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ\| \, d\mu_m = 0.$$

Ebből kapjuk, hogy $((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$, vagyis az $(f \circ \Phi) mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m szerint és

$$\int\limits_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} ((f \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \, d\mu_m =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} ((f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi))^\circ \, d\mu_m = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{Dom(\Phi)} (f_k \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{Im(\Phi)} f_k \, d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{Im(\Phi)} f \, d\mu_{g,\Phi}.$$

(II) Tegyük fel, hogy az $(f\circ\Phi)mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m szerint, azaz $((f\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$; megmutatjuk, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$. A sima függvényekkel p-edik hatványon való approximáció tételének X. fejezet 3. pontjában bizonyított következménye alapján van olyan $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $g_k : Dom(\Phi) \to F$ véges dimenziós értékű, C^∞-osztályú, és van olyan $C_k \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt halmaz, hogy $[g_k \neq 0] \subseteq C_k$, valamint fennáll a

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \|g_k^\circ - ((f\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ\| \, d\mu_m = 0$$

egyenlőség. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra értelmezzük az

$$f_k := \left(\frac{g_k}{mod_g(\Phi)}\right) \circ \Phi^{-1} : Im(\Phi) \to F$$

függvényt; világos, hogy ez folytonos, véges dimenziós értékű, és kompakt tartójú, következésképpen $\mu_{g,\Phi}$-integrálható. Továbbá, $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_k = (f_k \circ \Phi)mod_g(\Phi)$, tehát

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \|((f_k\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ - ((f\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ\| \, d\mu_m = 0.$$

Ebből látható, hogy az $\left(((f_k\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat Cauchy-sorozat $\mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^m, \mathscr{R}_m, \mu_m)$-ben a $\|\cdot\|_{\mu_m,1}$ félnorma szerint. Továbbá, $j, k \in \mathbb{N}$ esetén $\|f_j - f_k\| : Im(\Phi) \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú folytonos függvény, így $\|f_j - f_k\| \in \mathscr{E}_+(Im(\Phi), \mu_{g,\Phi})$, tehát

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^{*} \|f_j - f_k\| \, d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \left((\|f_j - f_k\|\circ\Phi)\, mod_g(\Phi)\right)^\circ \, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m}^{*} \|((f_j\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ - ((f_k\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ\| \, d\mu_m.$$

Ezért az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat Cauchy-sorozat $\mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$-ben a $\|\cdot\|_{\mu_{g,\Phi},1}$ félnorma szerint. A Riesz-Fischer tételből következik, olyan $f' \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ létezése, hogy az $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f'-höz a $\|\cdot\|_{\mu_{g,\Phi},1}$ félnorma szerint, továbbá létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy az $(f_{\sigma(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ részsorozat konvergál f'-höz az $Im(\Phi)$ halmazon $\mu_{g,\Phi}$-majdnem mindenütt. Legyen N azon $x \in Im(\Phi)$ pontok halmaza, amelyekre az $(f_{\sigma(j)}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat nem konvergál F-ben $f'(x)$-hez; ekkor $\mu^*_{g,\Phi}(N) = 0$, tehát az előző lemma d) pontja szerint az $\overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz μ_m-nullhalmaz. Az N és σ definíciója szerint az $\left(((f_{\sigma(j)}\circ\Phi)mod_g(\Phi))^\circ\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $((f' \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ$-hoz az $\mathbb{R}^m \setminus \overset{-1}{\Phi}\langle N\rangle$ halmazon, tehát μ_m-majdnem mindenütt. Ugyanakkor az $\left(((f_{\sigma(j)} \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál az $((f \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ$ függvényhez a $\|\cdot\|_{\mu_m,1}$ félnorma szerint, tehát ismét a Riesz-Fischer tételt alkalmazva kapjuk olyan $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény létezését, hogy az $\left(((f_{\sigma(\sigma'(j))} \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $((f \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ$-hoz $\mathbb{R}^m$-en μ_m-majdnem mindenütt. Ebből kapjuk, hogy az $((f' \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ$ és $((f \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ$ függvények μ_m-majdnem mindenütt egyenlők, vagyis a $H := [((f' \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ \neq ((f \circ \Phi)mod_g(\Phi))^\circ]$ halmaz μ_m-nullhalmaz. Nyilvánvaló, hogy $H \subseteq Dom(\Phi)$ és $H = \overset{-1}{\Phi}\langle [f' \neq f]\rangle$, tehát az előző lemma d) pontja szerint a $\Phi\langle H\rangle = [f' \neq f]$ halmaz $\mu_{g,\Phi}$-nullhalmaz. Ez azt jelenti, hogy $f' = f$ az $Im(\Phi)$ halmazon $\mu_{g,\Phi}$-majdnem mindenütt, tehát az is teljesül, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$, hiszen $f' \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ az f' megválasztása miatt igaz. ■

Tétel. (*A felületi mérték szerinti integrálhatóság elemi kritériuma.*) Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú *elemi* Riemann-sokaság. Az M sokaság minden Φ globális paraméterezésére $\mathscr{R}_{g,\Phi} = \mathscr{S}_g = \mathscr{R}_g$ és $\mu_{g,\Phi} = \mu_g$. Továbbá, ha F Banach-tér és $f : M \to F$ függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$.

(ii) Az M *minden* Φ globális paraméterezésére az $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint.

(iii) Az M-nek *létezik* olyan Φ globális paraméterezése, amelyre az $(f \circ \Phi)mod_g(\Phi)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint.

Ha F Banach-tér, $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és Φ globális paraméterezése M-nek, akkor

$$\int_M f\, d\mu_g = \int_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\, d\mu_m.$$

Bizonyítás. Legyen Φ globális paraméterezése M-nek; ekkor a definíció szerint $\mathscr{R}_{g,\Phi} \subseteq \mathscr{S}_g \subseteq \mathscr{R}_g$. Legyen $H \in \mathscr{R}_g$; ekkor a félgyűrű által generált halmazgyűrű jellemzési tétele alapján létezik az M sokaság paraméterezéseinek olyan $(\Phi_i)_{i\in I}$ véges rendszere, és létezik olyan $(H_i)_{i\in I}$ halmazrendszer, hogy $H = \bigcup_{i\in I} H_i$ és minden $I \ni i$-re $H_i \in \mathscr{R}_{g,\Phi_i}$. A szétvágási lemma szerint minden $i \in I$ esetén $H_i \cap Im(\Phi) \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$, és $\mathscr{R}_{g,\Phi}$ halmazgyűrű, ezért $H = H \cap Im(\Phi) = \bigcup_{i\in I}(H_i \cap Im(\Phi)) \in \mathscr{R}_{g,\Phi}$, így $\mathscr{R}_g \subseteq \mathscr{R}_{g,\Phi}$ is teljesül. Ebből következik, hogy $\mathscr{R}_{g,\Phi} = \mathscr{S}_g = \mathscr{R}_g$, tehát a μ_g definíciója szerint $\mu_g = \mu_g|_{\mathscr{R}_{g,\Phi}} = \mu_{g,\Phi}$. Ezért az (i)⇒(ii) és (iii)⇒(i) implikációk, valamint az

$$\int_M f\, d\mu_g = \int_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi)mod_g(\Phi)\, d\mu_m$$

egyenlőség (ahol $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és Φ globális paraméterezése M-nek) közvetlenül adódik a felületi mérték szerinti helyettesítéses integrálás tételéből. A (ii)⇒(iii) következtetés nyilvánvalóan helyes, mert M elemi sokaság, tehát M-nek *létezik* globális paraméterezése. ■

Lemma. Legyen (M, g) Riemann-sokaság és Φ paraméterezése M-nek. Minden $f : M \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre

$$\int_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}.$$

Bizonyítás. (I) Először mgmutatjuk, hogy ha F Banach-tér és $f \in \mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g)$, akkor az M minden Φ paraméterezésére $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g)$ és $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, valamint

$$\int_M \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}.$$

Valóban, létezik olyan $(H_i)_{i \in I}$ véges rendszer $\mathscr{S}_g$-ben, és olyan $(z_i)_{i \in I}$ olyan rendszer F-ben, hogy $f = \sum_{i \in I} (z_i \otimes \chi_{H_i})$. Létezik az M paraméterezéseinek olyan $(\Phi_i)_{i \in I}$ rendszere, hogy minden $I \ni i$-re $H_i \in \mathscr{R}_{g,\Phi_i}$. Ha Φ paraméterezése M-nek, akkor a szétvágási lemma alapján minden $i \in I$ esetén $H_i \cap Im(\Phi) \in \mathscr{R}_{g,\Phi} \subseteq \mathscr{R}_g$, ezért

$$\chi_{Im(\Phi)} f = \sum_{i \in I} z_i \otimes \chi_{H_i \cap Im(\Phi)} \in \mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g),$$

valamint

$$f|_{Im(\Phi)} = \sum_{i \in I} (z_i \otimes \chi_{H_i})|_{Im(\Phi)} = \sum_{i \in I} z_i \otimes \chi_{H_i \cap Im(\Phi)}|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}),$$

továbbá az elemi integrál definíciója alapján

$$\int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} = \int_M \left(\sum_{i \in I} z_i \otimes \chi_{H_i \cap Im(\Phi)} \right) d\mu_g = \sum_{i \in I} z_i \mu_g(H_i \cap Im(\Phi)) =$$

$$= \sum_{i \in I} z_i \mu_{g,\Phi}(H_i \cap Im(\Phi)) = \int_{Im(\Phi)} \sum_{i \in I} z_i \otimes \chi_{H_i \cap Im(\Phi)}|_{Im(\Phi)} d\mu_{g,\Phi} = \int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} d\mu_{g,\Phi},$$

amint azt állítottuk. Ebből az is következik, hogy ha $f \in \mathscr{E}_+(M, \mathscr{R}_g)$, akkor $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{E}_+(M, \mathscr{R}_g)$ és $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{E}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, valamint

$$\int_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_M \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} = \int_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}.$$

(II) Legyen most $f \in \overline{\mathscr{E}}_+(M, \mathscr{R}_g)$, és vegyünk olyan monoton növő $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_+(M, \mathscr{R}_g)$-ben, hogy $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$. Legyen Φ rögzített paraméterezése M-nek. Az (I) alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_{Im(\Phi)} \varphi_n \in \mathscr{E}_+(M, \mathscr{R}_g)$, $\varphi_n|_{Im(\Phi)} \in$

$\mathscr{E}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, és $\int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int\limits_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}$. Nyilvánvaló továbbá, hogy $\chi_{Im(\Phi)} f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(\chi_{Im(\Phi)} \varphi_n\big)$ és $f|_{Im(\Phi)} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(\varphi_n|_{Im(\Phi)}\big)$, ezért

$$\int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} \varphi_n \, d\mu_g = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{Im(\Phi)}^* \varphi_n|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} =$$

$$= \int\limits_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}.$$

(III) Legyen $f : M \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény. Ha $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(M, \mathscr{R}_g)$ olyan függvény, hogy $\chi_{Im(\Phi)} f \leq h$, akkor nyilvánvalóan $f|_{Im(\Phi)} \leq h|_{Im(\Phi)}$, és a (II) alapján

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} \leq \int\limits_{Im(\Phi)}^* h|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} h \, d\mu_g \leq \int\limits_M^* h \, d\mu_g,$$

következésképpen

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} \leq \inf_{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(M,\mathscr{R}_g);\ \chi_{Im(\Phi)} f \leq h} \int\limits_M^* h \, d\mu_g =: \int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g,$$

vagyis fennáll az

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} \leq \int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g$$

egyenlőtlenség. Ez triviálisan teljesül akkor is, ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(M, \mathscr{R}_g)$, hogy $\chi_{Im(\Phi)} f \leq h$, hiszen akkor a jobb oldalon (a definíció szerint) $+\infty$ áll.

Megfordítva, legyen $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$ olyan függvény, hogy $f|_{Im(\Phi)} \leq h$. Ekkor $\chi_{Im(\Phi)} f = \big(f|_{Im(\Phi)}\big)^\circ \leq h^\circ$, ahol $\circ$ a 0-val vett kiterjesztést jelöli $Im(\Phi)$-ről M-re. Triviális az, hogy $h^\circ \in \overline{\mathscr{E}}_+(M, \mathscr{R}_g)$, és $h^\circ = \chi_{Im(\Phi)} h^\circ$, valamint $(h^\circ)\,|_{Im(\Phi)} = h$, ezért a (II) alapján

$$\int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g \leq \int\limits_M^* h^\circ \, d\mu_g = \int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} h^\circ \, d\mu_g =$$

$$= \int\limits_{Im(\Phi)}^* (h^\circ)\,|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{Im(\Phi)}^* h \, d\mu_{g,\Phi},$$

következésképpen

$$\int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g \leq \inf_{h\in\overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi),\mathscr{R}_{g,\Phi});\ f|_{Im(\Phi)} \leq h} \int\limits_{Im(\Phi)}^* h \, d\mu_{g,\Phi} =: \int\limits_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi},$$

vagyis fennáll az

$$\int_M^* \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g \leq \int_{Im(\Phi)}^* f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}$$

egyenlőtlenség. Ez triviálisan teljesül akkor is, ha nem létezik olyan $h \in \overline{\mathscr{E}}_+(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, hogy $f|_{Im(\Phi)} \leq h$, hiszen akkor a jobb oldalon (a definíció szerint) $+\infty$ áll. ■

Állítás. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és F Banach-tér. Ha $f : M \to F$ függvény és Φ paraméterezése M-nek, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$.

(ii) $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}_F^1(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$.

(iii) $(f \circ \Phi) mod_g(\Phi)$ integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint.

Ha az (i), (ii) és (iii) állítások közül valamelyik teljesül, akkor fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\int_M \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi} = \int_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi) \, d\mu_m.$$

Bizonyítás. A felületi mérték szerinti helyettesítéses integrálás tétele alapján a (ii) és (iii) állítások ekvivalensek.

(i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. Létezik olyan $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g)$-ben, hogy fennáll a

$$\lim_{k \to \infty} \int_M^* \|\chi_{Im(\Phi)} f - f_k\| \, d\mu_g = 0$$

egyenlőség. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\|\chi_{Im(\Phi)} f - f_k\| \geq \chi_{Im(\Phi)} \|\chi_{Im(\Phi)} f - f_k\| = \|\chi_{Im(\Phi)} f - \chi_{Im(\Phi)} f_k\| = \chi_{Im(\Phi)} \|f - f_k\|,$$

tehát az előző lemma szerint

$$\int_M^* \|\chi_{Im(\Phi)} f - f_k\| \, d\mu_g \geq \int_M^* \chi_{Im(\Phi)} \|f - f_k\| \, d\mu_g = \int_M^* \|f|_{Im(\Phi)} - f_k|_{Im(\Phi)}\| \, d\mu_g,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{k \to \infty} \int_M^* \|f|_{Im(\Phi)} - f_k|_{Im(\Phi)}\| \, d\mu_g = 0.$$

Az előző lemma bizonyításának (I) része alapján nyilvánvaló, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\chi_{Im(\Phi)} f_k \in \mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g)$ és $f_k|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$, valamint

$$\int_M \chi_{Im(\Phi)} f_k \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)} f_k|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}.$$

Ezért $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ és

$$\int\limits_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)}\ d\mu_{g,\Phi} = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{Im(\Phi)} f_k|_{Im(\Phi)}\ d\mu_{g,\Phi} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_M \chi_{Im(\Phi)} f_k\ d\mu_g = \int\limits_M \chi_{Im(\Phi)} f\ d\mu_g.$$

(ii)⇒(i) Tegyük fel, hogy $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$. Van olyan $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi})$-ben, hogy fennáll a

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{Im(\Phi)} \|f|_{Im(\Phi)} - f_k\|\ d\mu_{g,\Phi} = 0$$

egyenlőség. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f_k = (f_k)^\circ|_{Im(\Phi)}$, ahol $\circ$ a 0-val vett kiterjesztést jelöli $Im(\Phi)$-ről M-re. Ezért az előző lemma alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int\limits_{Im(\Phi)}^{*} \|f|_{Im(\Phi)} - f_k\|\ d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{Im(\Phi)}^{*} \|f|_{Im(\Phi)} - (f_k)^\circ|_{Im(\Phi)}\|\ d\mu_{g,\Phi} =$$

$$= \int\limits_{Im(\Phi)}^{*} \|f - f_k^\circ\|_{Im)\Phi)}\ d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_M^{*} \chi_{Im(\Phi)} \|f - f_k^\circ\|\ d\mu_g =$$

$$= \int\limits_M^{*} \|\chi_{Im(\Phi)} f - \chi_{Im(\Phi)} f_k^\circ\|\ d\mu_g = \int\limits_M^{*} \|\chi_{Im(\Phi)} f - f_k^\circ\|\ d\mu_g,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_M^{*} \|\chi_{Im(\Phi)} f - f_k^\circ\|\ d\mu_g = 0.$$

Triviális, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k^\circ \in \mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g)$, ezért $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. ■

Következmény. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és F Banach-tér. Ha $f : M \to F$ függvény és Φ olyan paraméterezése M-nek, hogy $[f \neq 0] \subseteq Im(\Phi)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.
(i) $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$.
(ii) $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$.
(iii) $(f\circ\Phi) mod_g(\Phi)$ integrálható a $Dom(\Phi)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint.
Ha az (i), (ii) és (iii) állítások közül valamelyik teljesül, akkor fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\int\limits_M f\ d\mu_g = \int\limits_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)}\ d\mu_{g,\Phi} = \int\limits_{Dom(\Phi)} (f \circ \Phi) mod_g(\Phi)\ d\mu_m.$$

Bizonyítás. Az $[f \neq 0] \subseteq Im(\Phi)$ feltétel alapján $f = \chi_{Im(\Phi)} f$, ezért az állítás nyilvánvalóan következik az előzőből. ■

Következmény. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság, F Banach-tér és $f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. Ekkor az M minden Φ paraméterezésére $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}_F^1(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$ teljesül, valamint

$$\int_M \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi},$$

és fennáll a

$$\sup_{\Phi \in Par(M)} \int_{Im(\Phi)}^* \left\| f|_{Im(\Phi)} \right\| \, d\mu_{g,\Phi} < +\infty$$

egyenlőtlenség, ahol $Par(M)$ az M sokaság paraméterezéseinek halmaza.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és Φ az M-nek paraméterezése. Létezik olyan $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $C_k \subseteq Dom(\Phi)$ kompakt halmaz, $C_k \subseteq C_{k+1}$ és $Dom(\Phi) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$. Ekkor $(\Phi\langle C_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\Phi\langle C_k \rangle \subseteq Im(\Phi)$ kompakt halmaz, $\Phi\langle C_k \rangle \subseteq \Phi\langle C_{k+1} \rangle$, valamint $Im(\Phi) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi\langle C_k \rangle$. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\Phi\langle C_k \rangle \in \mathscr{R}_{g,\Phi} \subseteq \mathscr{R}_g$, így $\chi_{\Phi\langle C_k \rangle} \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(M, \mathscr{R}_g)$. Az $f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ feltételből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\chi_{\Phi\langle C_k \rangle} f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$, továbbá természetesen $\chi_{Im(\Phi)} f = \lim_{k \to \infty} \left(\chi_{\Phi\langle C_k \rangle} f \right)$ teljesül az M halmazon pontonként. Azonkívül, $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|\chi_{\Phi\langle C_k \rangle} f\| \leq \|f\|$ az M halmazon mindenütt és $\int_M^* \|f\| \, d\mu_g < +\infty$. Ezért a Lebesgue-tétel alkalmazásával $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ adódik, és az előző állítás alapján kapjuk, hogy $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}_F^1(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,\Phi}, \mu_{g,\Phi})$, valamint $\int_M \chi_{Im(\Phi)} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \, d\mu_{g,\Phi}$. Ugyanakkor

$$\sup_{\Phi \in Par(M)} \int_{Im(\Phi)}^* \left\| f|_{Im(\Phi)} \right\| \, d\mu_{g,\Phi} = \sup_{\Phi \in Par(M)} \int_M^* \chi_{Im(\Phi)} \|f\| \, d\mu_g \leq$$

$$\leq \int_M^* \|f\| \, d\mu_g < +\infty$$

is teljesül. ■

Tétel. (*A felületi mérték szerinti integrálhatóság kritériuma.*) Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és F Banach-tér. Minden $f : M \to F$ függvényre az $f \in \mathscr{L}_F^1(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy létezik az

M paraméterezéseinek olyan $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozata és létezik olyan $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozat, hogy teljesülnek a következők:

a) minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $H_k \in \mathscr{R}_{g,\Phi_k}$;

b) minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k}, \mu_{g,\Phi_k})$ (vagy ami ugyanaz: a $\chi_{\Phi^{-1}_k\langle H_k\rangle}.(f \circ \Phi_k) mod_g(\Phi_k)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi_k)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint);

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \chi_{H_k} \left\| f|_{Im(\Phi_k)} \right\| \, d\mu_{g,\Phi_k} < +\infty$;

d) $[f \neq 0] \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k$.

Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az M paraméterezéseinek olyan sorozata és $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt halmazsorozat, amelyekre a), b), c) és d) teljesül, akkor a $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \left(\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)}\right) \, d\mu_{g,\Phi_k}$ sor abszolút konvergens F-ben és

$$\int\limits_M f \, d\mu_g = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \left(\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)}\right) \, d\mu_{g,\Phi_k}.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. Ekkor $\displaystyle\int\limits_M^* \|f\| \, d\mu_g < +\infty$, ezért létezik olyan $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozat $\mathscr{R}_g$-ben, hogy $[f \neq 0] \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H'_n$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-hez van olyan $(H'_{n,i})_{i\in I_n}$ véges diszjunkt rendszer $\mathscr{S}_g$-ben, hogy $H'_n = \bigcup\limits_{i\in I_n} H'_{n,i}$. Az $\mathscr{S}_g$ definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I_n$ esetén létezik M-nek olyan $\Phi'_{n,i}$ paraméterezése, hogy $H'_{n,i} \in \mathscr{R}_{g,\Phi'_{n,i}}$. Vezessük be az $A := \{n \in \mathbb{N} | I_n \neq \emptyset\}$ jelölést. Ekkor két eset lehetséges.

1) Az A halmaz *végtelen*; ekkor az $\bigcup\limits_{n\in A} (\{n\} \times I_n)$ halmaz megszámlálhatóan végtelen. Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in A} (\{n\} \times I_n)$ tetszőleges bijekció, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $H_k := H'_{\sigma(k)}$ és $\Phi_k := \Phi'_{\sigma(k)}$.

2) Az A halmaz *véges*; ekkor az $\bigcup\limits_{n\in A} (\{n\} \times I_n)$ halmaz véges, így egyértelműen létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy N ekvipotens az $\bigcup\limits_{n\in A} (\{n\} \times I_n)$ halmazzal. Legyen σ olyan $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény, hogy $\sigma|_N$ bijekció az N és $\bigcup\limits_{n\in A} (\{n\} \times I_n)$ között, továbbá minden $k \geq N$ természetes számra $\sigma(k) := \emptyset$. Legyen minden $k \in N$ esetén $H_k := H'_{\sigma(k)}$ és $\Phi_k := \Phi'_{\sigma(k)}$, valamint minden $k \geq N$ természetes számra $H_k := \emptyset$ és $\Phi_k := \emptyset$.

Mindkét esetben $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan rendszerek, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra Φ_k paraméterezése M-nek, $H_k \in \mathscr{R}_{g,\Phi_k}$, és a $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer diszjunt, valamint $[f \neq 0] \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Az előző állításból tudjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k}, \mu_{g,\Phi_k})$, ezért $\chi_{H_k} \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k})$ miatt teljesül az, hogy $\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k}, \mu_{g,\Phi_k})$, vagyis a $\chi_{\overset{-1}{\Phi}_k \langle H_k \rangle} .(f \circ \Phi_k) mod_g(\Phi_k)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi_k)$ halmazon μ_m szerint. Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\chi_{H_k} \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}(M, \mathscr{R}_g)$ és $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ miatt $\chi_{H_k} f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$, továbbá $[\chi_{H_k} f \neq 0] \subseteq H_k \subseteq Im(\Phi_k)$, ezért

$$\int_M \chi_{H_k} \|f\| \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi_k)} \chi_{H_k} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k},$$

így minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer diszjunktságát kihasználva

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{Im(\Phi_k)} \chi_{H_k} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_M \chi_{H_k} \|f\| \, d\mu_g =$$

$$= \int_M \left(\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{H_k} \|f\| \right) d\mu_g \leq \int_M \|f\| \, d\mu_g < +\infty,$$

tehát (iii) is teljesül.

Megfordítva; tegyük fel, hogy $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan rendszerek, amelyekre a), b), c) és d) teljesül. A $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer diszjunktsága és a d) alapján $f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\chi_{H_k} f \right)$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\chi_{H_k} f : M \to F$ függvény olyan, hogy $[\chi_{H_k} f \neq 0] \subseteq H_k \subseteq Im(\Phi_k)$, és a b) alapján $(\chi_{H_k} f)|_{Im(\Phi_k)} = \chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k}, \mu_{g,\Phi_k})$, következésképpen $\chi_{H_k} f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és

$$\int_M \chi_{H_k} f \, d\mu_g = \int_{Im(\Phi_k)} (\chi_{H_k} f)|_{Im(\Phi_k)} d\mu_{g,\Phi_k}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\int_M^* \left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{H_k} f \right\| d\mu_g = \int_M^* \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \chi_{H_k} f \right\| d\mu_g \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_M^* \chi_{H_k} \|f\| \, d\mu_g =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \int_M^* \chi_{H_k} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k} = \sum_{k=n}^{\infty} \int_M \chi_{H_k} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k},$$

és a c) szerint fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \int_{Im(\Phi_k)} \chi_{H_k} \left\| f|_{Im(\Phi_k)} \right\| \, d\mu_{g,\Phi_k} = 0$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\chi_{H_k} f \right)$ függvénysor f-hez konvergál $\mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$-ben a $\| \cdot \|_{\mu_g,1}$ félnorma szerint. Ezért

$$\int_M f \, d\mu_g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Im(\Phi_k)} \left(\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)} \right) d\mu_{g,\Phi_k}$$

is teljesül. Végül, a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \left(\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)}\right) \, d\mu_{g,\Phi_k}$ sor abszolút konvergens F-ben, mert $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \int\limits_{Im(\Phi_k)} \left(\chi_{H_k} f|_{Im(\Phi_k)}\right) d\mu_{g,\Phi_k} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \chi_{H_k} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_M \chi_{H_k} \|f\| \, d\mu_g = \int\limits_M \left(\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{H_k} \|f\| \right) \, d\mu_g \leq \int\limits_M \|f\| \, d\mu_g < +\infty$$

teljesül. ■

Állítás. Legyen (M, g) m-dimenziós, C^r-osztályú Riemann-sokaság és $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az M paraméterezéseinek olyan sorozata, hogy az $(Im(\Phi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer diszjunkt, és az $M \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Im(\Phi_k)$ halmaz μ_g-nullhalmaz. Legyen F Banach-tér és $f : M \to F$ függvény. Ekkor $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ ekvivalens azzal, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k}, \mu_{g,\Phi_k})$ (vagy ami ezzel ekvivalens: az $(f \circ \Phi_k) mod_g(\Phi_k)$ függvény integrálható a $Dom(\Phi_k)$ halmazon a μ_m Lebesgue-mérték szerint) és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \left\|f|_{Im(\Phi_k)}\right\| \, d\mu_{g,\Phi_k} < +\infty$. Ha $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$, akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{Im(\Phi_k)} f|_{Im(\Phi_k)} \, d\mu_{g,\Phi_k}$ sor abszolút konvergens F-ben és

$$\int\limits_M f \, d\mu_g = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)} f|_{Im(\Phi_k)} \, d\mu_{g,\Phi_k}.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. Tudjuk, hogy ekkor az M minden Φ paraméterezésére $f|_{Im(\Phi)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi), \mathscr{R}_{g,Im(\Phi)}, \mu_{g,Im(\Phi)})$, $\chi_{Im(\Phi)} f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és $\int\limits_M \chi_{Im(\Phi)} f \, \boldsymbol{d}\mu_g = \int\limits_{Im(\Phi)} f|_{Im(\Phi)} \; \mu_{g,Im(\Phi)}$ teljesül, következésképpen minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,Im(\Phi_k)}, \mu_{g,Im(\Phi_k)})$, $\chi_{Im(\Phi_k)} f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és $\int\limits_M \chi_{Im(\Phi_k)} f \, \boldsymbol{d}\mu_g = \int\limits_{Im(\Phi_k)} f|_{Im(\Phi_k)} \; \mu_{g,Im(\Phi_k)}$. Ezért, és az $(Im(\Phi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer diszjunktsága folytán minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{Im(\Phi_k)}^{*} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_M \|\chi_{Im(\Phi_k)} f\| \, d\mu_g = \int\limits_M \left(\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{Im(\Phi_k)} \|f\| \right) \, d\mu_g \leq \int\limits_M \|f\| \, d\mu_g,$$

tehát $\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)}^{*} \|f|_{Im(\Phi_k)}\| \, d\mu_{g,\Phi_k} < +\infty$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\mathbb{N}\ni k$-ra $f|_{Im(\Phi_k)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_k), \mathscr{R}_{g,\Phi_k}, \mu_{g,\Phi_k})$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)} \left\|f|_{Im(\Phi_k)}\right\| \, d\mu_{g,\Phi_k} < +\infty$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\chi_{Im(\Phi_k)} f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és $f = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{Im(\Phi_k)} f$ az M halmazon μ_g-majdnem mindenütt, mert az $(Im(\Phi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer diszjunkt és az $M \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Im(\Phi_k)$ halmaz μ_g-nullhalmaz. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{Im(\Phi_k)} f\right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|\chi_{Im(\Phi_k)} f\| \leq \|f\|,$$

ezért ha $\int\limits_M^* \|f\| \, d\mu_g < +\infty$ teljesülne, akkor a Lebesgue-tétel alapján kapnánk, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. Ez viszont így van, mert a megszámlálható konvexitás tétele alapján

$$\int\limits_M^* \|f\| \, d\mu_g = \int\limits_M^* \|\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{Im(\Phi_k)} f\| \, d\mu_g \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_M^* \chi_{Im(\Phi_k)} \|f\| \, d\mu_g =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{Im(\Phi_k)}^{*} \left\|f|_{Im(\Phi_k)}\right\| \, d\mu_{g,\Phi_k} < +\infty,$$

amivel a bizonyítást befejeztük. ■

Állítás. Ha (M, g) Riemann-sokaság és F Banach-tér, akkor minden $f : M \to F$ kompakt tartójú folytonos függvényre $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ teljesül, továbbá az $M \to F$ kompakt tartójú, végesdimenziós értékű, folytonos függvények halmaza *sűrű* $\mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$-ben a $\|\cdot\|_{\mu_g,1}$ mérték szerint.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $K \subseteq M$ kompakt halmazhoz létezik az M paraméterezéseinek olyan $(\Phi_i)_{i\in I}$ véges rendszere és létezik olyan $(\varphi_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $supp(\varphi_i) \subseteq Im(\Phi_i)$, továbbá $K \subseteq \left[\sum_{i\in I} \varphi_i = 1\right]$.

Valóban, jelölje $Par(M)$ az M paraméterezéseinek halmazát; ekkor nyilvánvalóan $M = \bigcup_{\Phi\in Par(M)} Im(\Phi)$, és minden $Par(M) \ni \Phi$-re

$$Dom(\Phi) = \bigcup_{H\subseteq Dom(\Phi);\ H \text{ kompakt}} \overset{\circ}{H},$$

továbbá, ha $H \subseteq Dom(\Phi)$ kompakt halmaz, akkor $\Phi\langle \overset{\circ}{H} \rangle$ nyílt halmaz M-ben. Ez azt jelenti, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{\Phi \in Par(M);\ H \subseteq Dom(\Phi);\ H \text{ kompakt}} \Phi\langle \overset{\circ}{H} \rangle,$$

így létezik olyan $(\Phi_i)_{i\in I}$ véges rendszer $Par(M)$-ben, és létezik olyan $(H_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $H_i \subseteq Dom(\Phi_i)$ kompakt halmaz és $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Phi_i\langle \overset{\circ}{H}_i \rangle$. Létezik olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $I \ni i$-re Ω_i nyílt halmaz E-ben és $\Phi_i\langle \overset{\circ}{H}_i \rangle = \Omega_i \cap M$. A K halmaz E-ben is kompakt és $(\Omega_i)_{i\in I}$ a K-nak nyílt befedése E-ben, ezért a Dieudonné-féle egységosztás-tétel alapján létezik olyan $(\varphi'_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\varphi'_i : E \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú C^∞-osztályú függvény, és $0 \leq \varphi'_i \leq 1$, $supp(\varphi'_i) \subseteq \Omega_i$, valamint $K \subseteq \left[\sum_{i\in I} \varphi'_i = 1\right]$.
Legyen minden $I \ni i$-re $\varphi_i := \varphi'_i|_M$; ekkor minden $i \in I$ esetén $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ folytonos (sőt C^r-osztályú) függvény, és $0 \leq \varphi_i \leq 1$, továbbá $K \subseteq \left[\sum_{i\in I} \varphi_i = 1\right]$.
Ha $i \in I$, akkor

$$[\varphi_i \neq 0] = [\varphi'_i \neq 0] \cap M \subseteq supp(\varphi'_i) \cap M \subseteq \Omega_i \cap M = \Phi_i\langle \overset{\circ}{H}_i \rangle \subseteq \Phi_i\langle H_i \rangle \subseteq Im(\Phi_i),$$

és a $\Phi_i\langle H_i \rangle$ halmaz kompakt, tehát zárt M-ben, így tartalmazza a φ_i függvény M-beli tartóját, vagyis φ_i kompakt tartójú és $supp(\varphi_i) \subseteq Im(\Phi_i)$.

Legyen $f : M \to F$ kompakt tartójú folytonos függvény, és a $supp(f) \subseteq M$ kompakt halmazhoz vegyük az M paraméterezéseinek olyan $(\Phi_i)_{i\in I}$ véges rendszerét és vegyünk olyan $(\varphi_i)_{i\in I}$ rendszert, hogy minden $I \ni i$-re $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $supp(\varphi_i) \subseteq Im(\Phi_i)$, továbbá $supp(f) \subseteq \left[\sum_{i\in I} \varphi_i = 1\right]$. Ekkor $i \in I$ esetén $[\varphi_i f \neq 0] \subseteq supp(\varphi_i) \subseteq Im(\Phi_i)$, tehát $\varphi_i f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ pontosan akkor teljesül, ha $(\varphi_i f)|_{Im(\Phi_i)} \in \mathscr{L}^1_F(Im(\Phi_i), \mathscr{R}_{g,\Phi_i}, \mu_{g,\Phi_i})$, vagy ami ugyanaz: $((\varphi_i f) \circ \Phi_i)\, mod_g(\Phi_i) : Dom(\Phi_i) \to F$ függvény integrálható a $Dom(\Phi_i)$ halmazon a μ_m mérték szerint. Ha $i \in I$, akkor a $((\varphi_i f) \circ \Phi_i)\, mod_g(\Phi_i) : Dom(\Phi_i) \to F$ függvény folytonos és kompakt tartójú, ezért integrálható a $Dom(\Phi_i)$ halmazon a μ_m mérték szerint, vagyis $\varphi_i f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$. Ezért $f = \sum_{i\in I} (\varphi_i f)$ miatt $f \in \mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$.

Legyen $f \in \mathscr{E}_F(M, \mathscr{R}_g)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $h : M \to F$ kompakt tartójú, folytonos és végesdimenziós értékű függvény, hogy $\|h - f\|_{\mu_g,1} < \varepsilon$. Ebből már következik, hogy az $M \to F$ kompakt tartójú, végesdimenziós értékű, folytonos függvények halmaza *sűrű* $\mathscr{L}^1_F(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$-ben a $\|\cdot\|_{\mu_g,1}$ mérték szerint.

A félgyűrűk által generált halmazgyűrűk jellemzése (VIII. fejezet, 1. pont) alapján kapjuk, hogy létezik az M paraméterezéseinek olyan $(\Phi_i)_{i\in I}$ véges rendszere és olyan $(H_i)_{i\in I}$ diszjunkt halmazrendszer, valamint olyan $(z_i)_{i\in I}$ rendszer F-ben, hogy minden $I \ni i$-re $H_i \in \mathscr{R}_{g,\Phi_i}$ és $f = \sum_{i\in I}(z_i \otimes \chi_{H_i})$. Rögzítsünk olyan $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\varepsilon' \sum_{i\in I} \|z_i\| < \varepsilon$. Ha $i \in I$, akkor az $\mathscr{R}_{g,\Phi_i}$ definíciója alapján a $\chi_{\Phi^{-1}_i\langle H_i\rangle} mod_g(\Phi_i) : Dom(\Phi_i) \to \mathbb{R}$ függvény μ_m-integrálható a $Dom(\Phi_i)$ halmazon, ezért a sima függvényekkel p-edik hatványon való approximáció tétele (X. fejezet, 3. pont) alapján vehetünk olyan $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú, C^∞-osztályú függvényt, hogy $supp(\varphi_i) \subseteq Dom(\Phi_i)$ és

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* \left|\varphi_i - \left(\chi_{\Phi^{-1}_i\langle H_i\rangle} mod_g(\Phi_i)\right)^\circ\right| \, d\mu_m < \varepsilon'.$$

Minden $I \ni i$-re a Φ_i függvény homeomorfizmus $Dom(\Phi_i)$ és $Im(\Phi_i)$ között, ezért a

$$\left(\frac{\varphi_i}{mod_g(\Phi_i)}\right) \circ \Phi_i^{-1} : Im(\Phi_i) \to \mathbb{R}$$

függvény kompakt tartójú és folytonos (sőt C^{r-1}-osztályú); jelölje ψ_i ennek 0-val vett kiterjesztését M-re, tehát $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény. Világos, hogy $i \in I$ esetén $(\psi_i \circ \Phi_i) mod_g(\Phi_i) = \varphi_i$ a $Dom(\Phi_i)$ halmazon. Ebből következik, hogy

$$\int_M^* \left\|\sum_{i\in I}(z_i \otimes \psi_i) - f\right\| \, d\mu_g = \int_M^* \left\|\sum_{i\in I}(z_i \otimes \psi_i) - \sum_{i\in I}(z_i \otimes \chi_{H_i})\right\| \, d\mu_g \leq$$

$$\leq \sum_{i\in I}\|z_i\| \int_M^* \left|\psi_i - \chi_{H_i}\right| \, d\mu_g = \sum_{i\in I}\|z_i\| \int_M \left|\psi_i - \chi_{H_i}\right| \, d\mu_g =$$

$$= \sum_{i\in I}\|z_i\| \int_{Dom(\Phi_i)} \left(\left|\psi_i - \chi_{H_i}\right| \circ \Phi_i\right) mod_g(\Phi_i) \, d\mu_m =$$

$$= \sum_{i\in I}\|z_i\| \int_{Dom(\Phi_i)} \left|\varphi_i - \left(\chi_{H_i} \circ \Phi_i\right) mod_g(\Phi_i)\right| \, d\mu_m =$$

$$= \sum_{i\in I}\|z_i\| \int_{\mathbb{R}^m}^* \left|\varphi_i - \left(\chi_{\Phi^{-1}_i\langle H_i\rangle} mod_g(\Phi_i)\right)^\circ\right| \, d\mu_m < \varepsilon,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $i \in I$ esetén $\psi_i - \chi_{H_i} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(M, \mathscr{R}_g, \mu_g)$ és $[\psi_i - \chi_{H_i} \neq 0] \subseteq Im(\Phi_i)$. Ez azt jelenti, hogy a $h := \sum_{i\in I}(z_i \otimes \psi_i) : M \to F$ kompakt tartójú, folytonos és végesdimenziós értékű függvényre $\|h - f\|_{\mu_g,1} < \varepsilon$ teljesül. ■

Lemma. Legyenek E, F Hilbert-terek, $u : F \to E$ skalárszorzás-tartó (vagy ami ugyanaz: izometrikus) lineáris operátor, és $n \in E$ olyan, hogy $\|n\| = 1$ és $Im(u) = n^\perp$. Ekkor $u^* \circ u = id_F$ és minden $E \ni e$-re

$$\|e\|^2 = |(e|n)|^2 + \|u^*(e)\|^2$$

teljesül.

Bizonyítás. Az $u^* \circ u = id_F$ egyenlőség azonnal következik abból, hogy az u skalárszorzás-tartó (sőt azzal ekvivalens). Legyen $e \in E$ rögzített. Ekkor $(e|n)n$ és $e - (e|n)n$ egymásra merőleges vektorok E-ben, ezért

$$\|e\|^2 = \|(e|n)n + e - (e|n)n\|^2 = \|(e|n)n\|^2 + \|e - (e|n)n\|^2 = |(e|n)|^2 + \|e - (e|n)n\|^2.$$

Ugyanakkor $e - (e|n)n \in n^\perp = Im(u)$, ezért van olyan $f \in F$, hogy $u(f) = e - (e|n)n$; ekkor

$$\|e - (e|n)n\|^2 = \|u(f)\|^2 = \|f\|^2 = \|(u^* \circ u)(f)\|^2 = \|u^*(e - (e|n)n)\|^2 = \|u^*(e)\|^2,$$

mert $u^*(n) = 0$, hiszen $n \in (Im(u))^\perp = Ker(u^*)$. ■

Tétel. (*Szintfelületek kollektív paraméterezésének tétele euklidészi térre.*) Legyen $E \neq \{0\}$ euklidészi tér, $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ C^1-osztályú függvény, és $\mathfrak{a} \in Dom(h)$ olyan pont, amelyre $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$. Ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, és létezik a 0-nak olyan U_0 nyílt környezete $\mathbb{R}^{dim(E)-1}$-ben, és létezik az $\mathfrak{a}$-nak olyan $V_\mathfrak{a} \subseteq Dom(h)$ nyílt környezete, továbbá létezik olyan

$$\Phi : U_0 \times]h(\mathfrak{a}) - \delta, h(\mathfrak{a}) + \delta[\to V_\mathfrak{a}$$

C^1-diffeomorfizmus, hogy minden $w \in]h(\mathfrak{a}) - \delta, h(\mathfrak{a}) + \delta[$ esetén a $\Phi(\cdot, w) : U_0 \to E$ parciális függvény globális $dim(E) - 1$ dimenziós, C^1-osztályú paraméterezése a $[h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ halmaznak, és minden $(p, w) \in U_0 \times]h(\mathfrak{a}) - \delta, h(\mathfrak{a}) + \delta[$ párra

$$det\left(((D\Phi(\cdot, w))(p))^* \circ ((D\Phi(\cdot, w))(p))\right) =$$

$$= \|(grad(h))(\Phi(p, w))\|^2 det\left(((D\Phi)(p, w))^* \circ ((D\Phi)(p, w))\right),$$

vagyis fennáll a

$$\left(mod_{g_w}(\Phi(\cdot, w))\right)(p) = \|(grad(h))(\Phi(p, w))\| \left(mod_g(\Phi)\right)(p, w)$$

egyenlőség, ahol $w \in]h(\mathfrak{a}) - \delta, h(\mathfrak{a}) + \delta[$ esetén g_w jelöli az E skalárszorzása által indukált Riemann-metrikát $[h = w] \cap V_\mathfrak{a}$ felett, és g jelöli az E skalárszorzása által indukált Riemann-metrikát $V_\mathfrak{a}$ felett.

(**Megjegyzés**. Ha $(p, w) \in U_0 \times]h(\mathfrak{a}) - \delta, h(\mathfrak{a}) + \delta[$, akkor nyilvánvaló, hogy

$$((D\Phi(\cdot, w))(p))^* \circ ((D\Phi(\cdot, w))(p)) : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to \mathbb{R}^{dim(E)-1}$$

lineáris operátor, ugyanakkor

$$((D\Phi)(p, w))^* \circ ((D\Phi)(p, w)) : \mathbb{R}^{dim(E)} \to \mathbb{R}^{dim(E)}$$

lineáris operátor, tehát itt két *különböző dimenziós* mátrix determinánsának kapcsolatáról van szó.)

Bizonyítás. A $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$ feltétel alapján a $Ker((Dh)(\mathfrak{a})) \subseteq E$ lineáris altér $dim(E) - 1$ dimenziós; legyen $u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$ olyan lineáris bijekció, amely megtartja az $\mathbb{R}^{dim(E)-1}$ feletti euklidészi skalárszorzást és az E feletti skalárszorzás $Ker((Dh)(\mathfrak{a})) \times Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$-ra vett leszűkítését. Vezessük be az $n := \dfrac{(gradh)(\mathfrak{a})}{\|(gradh)(\mathfrak{a})\|}$ jelölést; ekkor a $grad$ differenciáloperátor definíciója alapján $Im(u) = Ker((Dh)(\mathfrak{a})) = n^{\perp}$, továbbá $((Dh)(\mathfrak{a}))(n) = ((gradh)(\mathfrak{a})|n) = 1$. Megjegyezzük, hogy az n vektor nem 0, mert $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$, azonban $\|n\|$ nem feltételenül egyenlő 1-gyel. Az eddigiekből látható, hogy az $\mathbb{R} \to E$; $\lambda \mapsto \lambda.n$ lineáris operátor jobbinverze a $(Dh)(\mathfrak{a})$ operátornak. A szintfelületek kollektív paraméterezésének *bizonyítása* szerint létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan $V_{\mathfrak{a}} \subseteq Dom(h)$ nyílt környezete E-ben, és létezik $h(\mathfrak{a})$-nak olyan $U_{h(\mathfrak{a})}$ nyílt környezete $\mathbb{R}$-ben, és létezik olyan $\varphi : U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \to \mathbb{R}$ függvény, amely C^1-osztályú, $\varphi(0, h(\mathfrak{a})) = 0$, és minden $U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \ni (p, w)$-re $\mathfrak{a} + u(p) + \varphi(p, w).n \in Dom(h)$ és $h(\mathfrak{a} + u(p) + \varphi(p, w).n) = w$, valamint a

$$\Phi : U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \to V_{\mathfrak{a}}; \quad (p, w) \mapsto \mathfrak{a} + u(p) + \varphi(p, w).n$$

függvény C^1-diffeomorfizmus, $\Phi(0, h(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, és minden $U_{h(\mathfrak{a})} \ni w$-re a $\Phi(\cdot, w) : U_0 \to E$ függvény $dim(E) - 1$ dimenziós C^1-osztályú globális paraméterezése a $[h = w] \cap V_{\mathfrak{a}}$ halmaznak (tehát a $[h = w] \cap V_{\mathfrak{a}}$ halmaz $dim(E) - 1$ dimenziós C^1-osztályú elemi részsokasága E-nek). Értelmezzük most a

$$Q : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R} \to E; \quad (\mathbf{p}, \mathbf{w}) \mapsto u(\mathbf{p}) + \mathbf{w}.n_0$$

leképezést, ahol $n_0 := \dfrac{n}{\|n\|}$. Nyilvánvaló, hogy Q lineáris operátor, és $Im(Q) = Im(u) \oplus (\mathbb{R}.n) = n^{\perp} \oplus (\mathbb{R}.n) = E$, tehát $dim(\mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R}) = dim(E)$ miatt Q bijekció. Az is triviális, hogy Q megtartja az $\mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R}$ feletti euklidészi skalárszorzást és az E feletti skalárszorzárst. Ugyanakkor a

$$(grad(h)) \circ \Phi : U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \to \mathbb{R}; \quad (p, w) \mapsto (((gradh)(\mathfrak{a}))(\Phi(p, w))|n_0)$$

függvény folytonos, és a $(0, h(\mathfrak{a}))$ ponthoz a $((grad(h))(\mathfrak{a})|n_0) = 1/\|n\| > 0$ értéket rendeli, ezért az U_0, $U_{h(\mathfrak{a})}$ és $V_{\mathfrak{a}}$ környezetek megválaszthatók úgy, hogy minden $U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})} \ni (p, w)$-re $(((gradh)(\mathfrak{a}))(\Phi(p, w))|n_0)\, neq 0$ (sőt > 0) teljesüljön. Kissé hosszadalmas, de teljesen elemi számolás után kapjuk, hogy minden $(p, w) \in U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}$ esetén a

$$Q^{-1} \circ (D\Phi)(p, w) : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R}$$

lineáris operátor olyan, hogy minden $\mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{p}, \mathbf{w})$-re

$$\left(Q^{-1} \circ (D\Phi)(p, w)\right)(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \left(\mathbf{p}, \frac{\mathbf{w} - (u^*((grad(h))(\Phi(p, w)))|\mathbf{p})_{\mathbb{R}^{dim(E)-1}}}{((grad(h))(\Phi(p, w))|n_0)}\right),$$

ahol $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^{dim(E)-1}}$ az euklidészi skalárszorzás $\mathbb{R}^{dim(E)-1}$ felett, és $(\cdot|\cdot)$ a skalárszorzás E felett, valamint u^* az $u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to E$ lineáris operátor adjungáltja a $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^{dim(E)-1}}$ és $(\cdot|\cdot)$ a skalárszorzások szerint. Ebből következik, hogy minden $(p, w) \in U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}$ esetén

$$det\left(Q^{-1} \circ (D\Phi)(p, w)\right) = \frac{1}{((grad(h))(\Phi(p, w))|n_0)},$$

ezért a $(Q^{-1})^* = Q$ egyenlőség alkalmazásával

$$det\,(((D\Phi)(p,w))^* \circ ((D\Phi)(p,w))) =$$

$$= det\left(((D\Phi)(p,w))^* \circ (Q^{-1})^* \circ Q^{-1} \circ ((D\Phi)(p,w))\right) =$$

$$= det\left(\left(Q^{-1} \circ (D\Phi)(p,w)\right)^* \circ \left(Q^{-1} \circ (D\Phi)(p,w)\right)\right) = \left(det\left(Q^{-1} \circ (D\Phi)(p,w)\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)^2}$$

adódik, ami úgy is írható, hogy

$$(mod_g(\Phi))\,(p,w) = \frac{1}{|\,((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)\,|}.$$

Elemi számolással kapjuk, hogy minden $(p,w) \in U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}$ pontra és $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dim(E)-1}$ vektorra

$$(((D\Phi(\cdot,w))(p))^* \circ ((D\Phi(\cdot,w))(p)))\,(\mathbf{p}) =$$

$$= \mathbf{p} + \frac{(u^*((grad(h))(\Phi(p,w)))|\mathbf{p})_{\mathbb{R}^{dim(E)-1}}\,.u^*((grad(h))(\Phi(p,w)))}{((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)^2},$$

amiből az adódik, hogy minden $(p,w) \in U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}$ pontra

$$det\,(((D\Phi(\cdot,w))(p))^* \circ ((D\Phi(\cdot,w))(p))) = 1 + \frac{\|u^*((grad(h))(\Phi(p,w)))\|^2}{|((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)|^2}.$$

Az előző lemmát alkalmazva az $u : \mathbb{R}^{dim(E)-1} \to E$ lineáris izometriára és az n_0 egységvektorra

$$\|(grad(h))(\Phi(p,w))\|^2 = |((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)|^2 + \|u^*((grad(h))(\Phi(p,w)))\|^2$$

adódik minden $(p,w) \in U_0 \times U_{h(\mathfrak{a})}$ pontra, tehát

$$det\,(((D\Phi(\cdot,w))(p))^* \circ ((D\Phi(\cdot,w))(p))) = \left\|\frac{(grad(h))(\Phi(p,w))}{((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)}\right\|^2,$$

vagy ami ugyanaz:

$$(mod_{g_w}(\Phi(\cdot,w)))\,(p) = \frac{\|(grad(h))(\Phi(p,w))\|}{|((grad(h))(\Phi(p,w))|n_0)|} =$$

$$= \|(grad(h))(\Phi(p,w))\|\,(mod_g(\Phi))\,(p,w),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Állítás. (*Egységosztás-tétel sokaságokra.*) Legyen M m-dimenziós, C^r-osztályú részsokasága az E véges dimenziós valós vektortérnek, $K \subseteq M$ kompakt halmaz, és $(\Omega_i)_{i\in I}$ az M nyílt részhalmazainak olyan véges rendszere, hogy $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Ekkor létezik olyan $(\varphi_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú C^r-osztályú függvény, és $0 \le \varphi_i \le 1$, $supp(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$, valamint $K \subseteq \left[\sum_{i\in I} \varphi_i = 1\right]$ és $\sum_{i\in I} \varphi_i \le 1$ az M halmazon.

Bizonyítás. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $p \in \mathbb{R}^m$ esetén jelölje $\mathbf{B}_r(p)$ (illetve $\overline{\mathbf{B}}_r(p)$) a p középpontú, r sugarú nyílt (illetve zárt) gömböt *bármely* rögzített $\mathbb{R}^m$ feletti norma szerint.

(I) Először megmutatjuk, hogy minden $\mathfrak{a} \in M$ ponthoz és $\Omega \subseteq M$ nyílt halmazhoz, $\mathfrak{a} \in \Omega$ esetén létezik az M sokaságnak olyan Φ paraméterezése, hogy $Im(\Phi) \subseteq \Omega$, $Dom(\Phi) = \mathbf{B}_1(0)$ és $\Phi(0) = \mathfrak{a}$. Ehhez először vegyük az M-nek olyan Ψ paraméterezését, amelyre $\mathfrak{a} \in Im(\Psi)$. Az Ω és $Im(\Psi)$ halmazok nyíltak M-ben, ezért az $\Omega \cap Im(\Psi)$ halmaz nyílt $Im(\Psi)$-ben, és Ψ homeomorfizmus $Dom(\Psi)$ és $Im(\Psi)$ között, így $\overset{-1}{\Psi}\langle\Omega \cap Im(\Psi)\rangle$ olyan nyílt részhalmaza $Dom(\Psi)$-nek $\mathbb{R}^m$-ben, amelynek eleme a $\Psi^{-1}(\mathfrak{a})$ pont. Ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\mathbf{B}_r(\Psi^{-1}(\mathfrak{a})) \subseteq \overset{-1}{\Psi}\langle\Omega \cap Im(\Psi)\rangle$. Ekkor a $\sigma : \mathbf{B}_1(0) \to \mathbf{B}_r(\Psi^{-1}(\mathfrak{a}))$; $p \mapsto r.p + \Psi^{-1}(\mathfrak{a})$ leképezés C^∞-diffeomorfizmus, és könnyen látható, hogy a $\Phi := \Psi \circ \sigma : \mathbf{B}_1(0) \to M$ leképezés olyan paraméterezése az M sokaságnak, hogy $Im(\Phi) \subseteq \Omega$, $Dom(\Phi) = \mathbf{B}_1(0)$ és $\Phi(0) = \mathfrak{a}$.

(II) Most azt igazoljuk, hogy ha $K \subseteq M$ kompakt halmaz, $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz és $K \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $\varphi : M \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú C^r-osztályú függvény, hogy $0 \le \varphi \le 1$, $supp(\varphi) \subseteq \Omega$ és $K \subseteq [\varphi = 1]$. (Ez az állításnak az a speciális esete, amikor I egy elemű.) Természetesen feltehető, hogy $K \neq \emptyset$.

Az (I) alapján, a kiválasztási axióma alkalmazásával veszünk olyan $(\Phi_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}\in K}$ rendszert, hogy minden $\mathfrak{a} \in K$ esetén $\Phi_\mathfrak{a}$ paraméterezése az M sokaságnak, és $Im(\Phi_\mathfrak{a}) \subseteq \Omega$, $Dom(\Phi_\mathfrak{a}) = \mathbf{B}_1(0)$ valamint $\Phi_\mathfrak{a}(0) = \mathfrak{a}$. A $\left(\Phi_\mathfrak{a}\langle\mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle\right)_{\mathfrak{a}\in K}$ halmazrendszer mindegyik tagja nyílt M-ben és $K \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in K} \Phi_\mathfrak{a}\langle\mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle$, ezért K kompaktsága miatt vehetünk olyan $A \subseteq K$ véges halmazt, hogy $K \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A} \Phi_\mathfrak{a}\langle\mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle$; ekkor $K \neq \emptyset$ miatt $A \neq \emptyset$.

A Dieudonné-féle egységosztás-tétel (X. fejezet, 1. pont) alapján a $\overline{\mathbf{B}}_{1/2}(0) \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt halmazhoz és a $\mathbf{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazhoz van olyan $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $0 \le \psi \le 1$, $supp(\psi) \subseteq \mathbf{B}_1(0)$ és $\overline{\mathbf{B}}_{1/2}(0) \subseteq [\psi = 1]$.

Minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén jelölje $\varphi_\mathfrak{a}$ a $\psi \circ \Phi_\mathfrak{a}^{-1} : Im(\Phi_\mathfrak{a}) \to \mathbb{R}$ függvény 0-val vett kiterjesztését M-re. Megmutatjuk, hogy minden $A \ni \mathfrak{a}$-ra a $\varphi_\mathfrak{a}$ függvény C^r-osztályú. Ehhez legyen Φ tetszőleges paraméterezése az M sokaságnak; azt kell igazolni, hogy a $\varphi_\mathfrak{a} \circ \Phi : Dom(\Phi) \to \mathbb{R}$ függvény C^r-osztályú. A $\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi_\mathfrak{a})\rangle$ halmaz nyílt $Dom(\Phi)$-ben, tehát $\mathbb{R}^m$-ben is, és ezen a halmazon a $\varphi_\mathfrak{a} \circ \Phi$ függvény egyenlő a $\psi \circ (\Phi_\mathfrak{a}^{-1} \circ \Phi)$ függvénnyel, amely C^r-osztályú, hiszen a $\Phi_\mathfrak{a}^{-1} \circ \Phi : \overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi_\mathfrak{a})\rangle \to \overset{-1}{\Phi}_\mathfrak{a}\langle Im(\Phi)\rangle$ függvény C^r-diffeomorfizmus és a ψ függvény C^r-osztályú. Másfelől, a $supp(\psi)$ kompaktsága miatt a $\Phi_\mathfrak{a}\langle supp(\psi)\rangle$ halmaz kompakt $Im(\Phi_\mathfrak{a})$-ban, így M-ben is, következésképpen az $M \setminus \Phi_\mathfrak{a}\langle supp(\psi)\rangle$ halmaz nyílt

M-ben. Ezért a $\overset{-1}{\Phi}\langle M \setminus \Phi_{\mathfrak{a}}\langle supp(\psi)\rangle\rangle$ halmaz nyílt $Dom(\Phi)$-ben, tehát $\mathbb{R}^m$-ben is, és ezen a halmazon a $\varphi_{\mathfrak{a}} \circ \Phi$ függvény azonosan 0. Ugyanakkor $Dom(\Phi) = \overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi_{\mathfrak{a}})\rangle \cup \overset{-1}{\Phi}\langle M \setminus \Phi_{\mathfrak{a}}\langle supp(\psi)\rangle\rangle$, ami azt jelenti, hogy a $\varphi_{\mathfrak{a}} \circ \Phi$ függvény a definíciós tartományának bármely pontjának valamely $\mathbb{R}^m$-beli környezetén egyenlő egy C^r-osztályú függvénnyel, ezért C^r-osztályú. (Megjegyezzük, hogy itt a $\overset{-1}{\Phi}\langle Im(\Phi_{\mathfrak{a}})\rangle$ és $\overset{-1}{\Phi}\langle M \setminus \Phi_{\mathfrak{a}}\langle supp(\psi)\rangle\rangle$ halmazok általában nem diszjunktak.)

Értelmezzük most a $\varphi := 1 - \prod_{\mathfrak{a}\in A}(1-\varphi_{\mathfrak{a}}) : M \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az előzőek alapján C^r-osztályú. Nyilvánvaló, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$, és ha $x \in K$, akkor van olyan $\mathfrak{a} \in A$, hogy $x \in \Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle$, tehát $\Phi_{\mathfrak{a}}^{-1}(x) \in \mathbf{B}_{1/2}(0) \subseteq \overline{\mathbf{B}}_{1/2}(0) \subseteq [\psi = 1]$, vagyis $\varphi_{\mathfrak{a}}(x) = \psi(\Phi_{\mathfrak{a}}^{-1}(x)) = 1$, amiből következik, hogy $\varphi(x) = 1$, tehát $K \subseteq [\varphi = 1]$. Világos továbbá, hogy

$$[\varphi \neq 0] \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A}[\varphi_{\mathfrak{a}} \neq 0] \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle supp(\psi)\rangle \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A} Im(\Phi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \Omega,$$

és az $\bigcup_{\mathfrak{a}\in A} Im(\Phi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \Omega$ halmaz kompakt M-ben, ezért φ kompakt tartójú és $supp(\varphi) \subseteq \Omega$. Ez azt jelenti, hogy φ olyan függvény, amelynek a létezését állítottuk.

(III) Áttérve az általános eset bizonyítására, először az (I) alapján és a kiválasztási axióma alkalmazásával veszünk olyan $(\Phi_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}\in K}$ rendszert, hogy minden $\mathfrak{a} \in K$ esetén $\Phi_{\mathfrak{a}}$ paraméterezése az M sokaságnak, $Dom(\Phi_{\mathfrak{a}}) = \mathbf{B}_1(0)$, $\Phi_{\mathfrak{a}}(0) = \mathfrak{a}$, és van olyan $i \in I$, hogy $Im(\Phi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \Omega_i$. A $\big(\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle\big)_{\mathfrak{a}\in K}$ halmazrendszer mindegyik tagja nyílt M-ben és $K \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in K}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle$, ezért K kompaktsága miatt vehetünk olyan $A \subseteq K$ véges halmazt, hogy $K \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle$.

Legyen $\tau : A \to I$ olyan függvény, hogy minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén $Im(\Phi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \Omega_{\tau(\mathfrak{a})}$, és minden $I \ni i$-re legyen $A_i := \{\mathfrak{a} \in A | \tau(\mathfrak{a}) = i\}$. Minden $i \in I$ esetén értelmezzük az

$$U_i := \bigcup_{\mathfrak{a}\in A_i}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle, \quad K_i := \bigcup_{\mathfrak{a}\in A_i}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \overline{\mathbf{B}}_{1/2}(0)\rangle$$

halmazokat. Világos, hogy $i \in I$ esetén U_i nyílt és K_i kompakt halmaz M-ben, valamint

$$U_i \subseteq K_i \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A_i}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_1(0)\rangle = \bigcup_{\mathfrak{a}\in A_i} Im(\Phi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A_i}\Omega_{\tau(\mathfrak{a})} = \Omega_i,$$

továbbá fennállnak a

$$K \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a}\in A}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{\mathfrak{a}\in A_i}\Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0)\rangle = \bigcup_{i\in I} U_i$$

összefüggések.

Most $i \in I$ esetén a (II) állítást alkalmazva a $K_i \subseteq M$ kompakt és $\Omega_i \subseteq M$ nyílt halmazra, választunk olyan $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kompakt tartójú,

C^r-osztályú, $0 \leq \psi_i \leq 1$, $K_i \subseteq [\psi_i = 1]$ és $supp(\psi_i) \subseteq \Omega_i$. Ismét a (II) állítást alkalmazva a $K \subseteq M$ kompakt és $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq M$ nyílt halmazra, választunk olyan $\psi : M \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kompakt tartójú, C^r-osztályú, $0 \leq \psi \leq 1$, $K \subseteq [\psi = 1]$ és $supp(\psi) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Ha $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x \in U_i$, tehát van olyan $\mathfrak{a} \in A$, hogy $x \in \Phi_{\mathfrak{a}}\langle \mathbf{B}_{1/2}(0) \rangle \subseteq \Phi_{\mathfrak{a}}\langle \overline{\mathbf{B}}_{1/2}(0) \rangle \subseteq K_i \subseteq [\psi_i = 1]$, így szükségképpen $\sum_{j \in I} \psi_j(x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \left[\sum_{j \in I} \psi_j \neq 0 \right]$ teljesül.

Minden $i \in I$ esetén legyen $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $x \in M$ esetén

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} \dfrac{\psi_i(x)\psi(x)}{\sum_{j \in I} \psi_j(x)} & , \text{ha } x \in \bigcup_{j \in I} U_j; \\ 0 & , \text{ha } x \in M \setminus \bigcup_{j \in I} U_j. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy a $(\varphi_i)_{i \in I}$ rendszer olyan, amelynek a létezését állítottuk. Nyilvánvaló, hogy $i \in I$ esetén $0 \leq \varphi_i \leq 1$, és $[\varphi_i \neq 0] \subseteq [\psi_i \neq 0] \subseteq supp(\psi_i) \subseteq \Omega_i$, valamint $supp(\psi_i)$ kompakt M-ben, így zárt is M-ben, ezért $supp(\varphi_i) \subseteq supp(\psi_i)$, vagyis φ_i kompakt tartójú és $supp(\varphi_i) \subseteq \Omega_i$. Továbbá, ha $x \in K$, akkor $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, ezért a definíció szerint

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = \sum_{i \in I} \left(\frac{\psi_i(x)\psi(x)}{\sum_{j \in I} \psi_j(x)} \right) = \psi(x) = 1,$$

mert $K \subseteq [\psi = 1]$. Ez azt jelenti, hogy $K \subseteq \left[\sum_{i \in I} \varphi_i = 1 \right]$. Nyilvánvaló továbbá, hogy $\sum_{i \in I} \varphi_i \leq 1$ az egész M halmazon.

Tehát csak azt kell még igazolni, hogy $i \in I$ esetén a $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ függvény C^r-osztályú, vagyis az M sokaság minden Φ paraméterezésére a $\varphi_i \circ \Phi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény C^r-osztályú. A $\overset{-1}{\Phi}\langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle$ halmaz nyílt a $Dom(\Phi)$ halmazban, tehát $\mathbb{R}^m$-ben is, és ezen a halmazon

$$\varphi_i \circ \Phi = \frac{(\psi_i \circ \Phi) \cdot (\psi \circ \Phi)}{\sum_{j \in I} (\psi_j \circ \Phi)},$$

ezért ezen a halmazon a $\varphi_i \circ \Phi$ függvény C^r-osztályú. A $\overset{-1}{\Phi}\langle M \setminus supp(\psi) \rangle$ halmaz nyílt a $Dom(\Phi)$ halmazban, tehát $\mathbb{R}^m$-ben is, és ezen a halmazon $\varphi_i \circ \Phi = 0$, ezért ezen a halmazon a $\varphi_i \circ \Phi$ függvény C^r-osztályú. Ugyanakkor

$$Dom(\varphi_i \circ \Phi) = \overset{-1}{\Phi}\langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle \cup \overset{-1}{\Phi}\langle M \setminus supp(\psi) \rangle$$

teljesül, mert $supp(\psi) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. (Megjegyezzük, hogy a $\overset{-1}{\Phi}\langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle$ és $\overset{-1}{\Phi}\langle M \setminus supp(\psi) \rangle$ halmazok általában nem diszjunktak.) Ebből következik, hogy a $\varphi_i \circ \Phi$ függvény C^r-osztályú. ■

Tétel. (*A térfogati és felületi integrálok kapcsolata: a Cavalieri-elv.*) Legyen $E \neq \{0\}$ euklidészi tér és $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan C^1-osztályú függvény, hogy minden $\mathfrak{a} \in Dom(h)$ esetén $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$. Jelölje g az E skalárszorzása által indukált Riemann-metrikát a $Dom(h) \subseteq E$ nyílt halmaz felett, és minden $w \in Im(h)$ esetén jelölje g_w az E skalárszorzása által indukált Riemann-metrikát a $[h = w]$ C^1-osztályú hiperfelület felett. Ha F Banach-tér és $f : Dom(h) \to F$ μ_g-integrálható függvény, akkor μ_1-majdnem minden $w \in Im(h)$ számra az $\dfrac{f}{\|grad(h)\|}$ függvény leszűkítése a $[h = w]$ szintfelületre μ_{g_w}-integrálható, és az

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to F$$

$$w \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{[h=w]} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} d\mu_{g_w} & \text{ha } w \in Im(h) \text{ és } \dfrac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h = w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w}) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény μ_1-integrálható, és fennáll az

$$\int\limits_{Dom(h)} f \, d\mu_g = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f} \, d\mu_1$$

egyenlőség, amit (kevésbé pontosan) úgy is írhatunk, hogy

$$\int\limits_{Dom(h)} f \, d\mu_g = \int\limits_{Im(h)} \left(\int\limits_{[h=w]} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} \right) d\mu_1(w).$$

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy az $f : Dom(h) \to F$ függvény μ_g-integrálható és *kompakt tartójú*, tehát van olyan $K \subseteq Dom(h)$ kompakt halmaz, hogy $[f \neq 0] \subseteq K$. Ha $\mathfrak{a} \in Dom(h)$, akkor $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$, így a szintfelületek kollektív paraméterezésének tétele és a kiválasztási axióma alapján létezik olyan $(U_\mathfrak{a}, W_\mathfrak{a}, V_\mathfrak{a}, \Phi_\mathfrak{a})_{\mathfrak{a} \in Dom(h)}$ rendszer, hogy minden $\mathfrak{a} \in Dom(h)$ esetén

– $U_\mathfrak{a}$ nyílt környezete a 0-nak $\mathbb{R}^{dim(E)-1}$-ben;

– $W_\mathfrak{a}$ nyílt környzete $h(\mathfrak{a})$-nak $\mathbb{R}$-ben;

– $V_\mathfrak{a} \subseteq Dom(h)$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben;

– $\Phi_{\mathfrak{a}} : U_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{a}} \to V_{\mathfrak{a}}$ olyan függvény, amely C^1-diffeomorfizmus, $\Phi_{\mathfrak{a}}(0, h(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, minden $W_{\mathfrak{a}} \ni w$-re a $\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w)$ parciális függvény paraméterezése a $[h = w]$ C^1-osztályú hiperfelületnek, $Im(\Phi_{\mathfrak{a}}) = [h = w] \cap V_{\mathfrak{a}}$, és $(p, w) \in U_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{a}}$ esetén

$$(mod_{g_w}(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w)))\,(p) = \|(grad(h))(\Phi_{\mathfrak{a}}(p, w))\|\,(mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))\,(p, w)$$

teljesül.

Ekkor a $(V_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a} \in supp(f)}$ rendszer E-ben nyílt befedése a $supp(f) \subseteq Dom(h)$ kompakt halmaznak, tehát vehetünk olyan $A \subseteq supp(f)$ véges halmazt, hogy $supp(f) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in A} V_{\mathfrak{a}}$. Az Dieudonné-féle egységosztás-tétel (X. fejezet, 1. pont) alapján van olyan $(\varphi_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a} \in A}$ rendszer, hogy minden $A \ni \mathfrak{a}$-ra $\varphi_{\mathfrak{a}} : Dom(h) \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos (sőt C^∞-osztályú függvény), $0 \leq \varphi_{\mathfrak{a}} \leq 1$, $supp(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq V_{\mathfrak{a}}$, továbbá $supp(f) \subseteq \left[\sum_{\mathfrak{a} \in A} \varphi_{\mathfrak{a}} = 1\right]$. Nyilvánvaló, hogy $f = \sum_{\mathfrak{a} \in A} (\varphi_{\mathfrak{a}} f)$, és minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén $[\varphi_{\mathfrak{a}} f \neq 0] \subseteq supp(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq V_{\mathfrak{a}} = Im(\Phi_{\mathfrak{a}})$, és a $\Phi_{\mathfrak{a}}$ függvény C^1-osztályú paraméterezése $Dom(h)$-nak, továbbá a $\varphi_{\mathfrak{a}} f$ függvény μ_g-integrálható, ezért a helyettesítéses integrálása tétele alapján

$$\int\limits_{Dom(h)} f\, d\mu_g = \sum_{\mathfrak{a} \in A} \int\limits_{Dom(h)} (\varphi_{\mathfrak{a}} f)\, d\mu_g =$$

$$= \sum_{\mathfrak{a} \in A} \int\limits_{U_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{a}}} ((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}})\ d\left(\mu_{dim(E)-1} \otimes \mu_1\right).$$

Legyen $\mathfrak{a} \in A$ rögzített. Tudjuk, hogy

$$(((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^\circ \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^{dim(E)-1} \times \mathbb{R}, \mathscr{R}_{dim(E)-1} \otimes \mathscr{R}_1, \mu_{dim(E)-1} \otimes \mu_1),$$

ezért a Lebesgue-Fubini tétel alapján az

$$N_{\mathfrak{a}} := \{w \in \mathbb{R} |\, (((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}) mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^\circ\, (\cdot, w) \notin \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^{dim(E)-1}, \mathscr{R}_{dim(E)-1}, \mu_{dim(E)-1})\}$$

halmaz μ_1-nullhalmaz, és ha $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}$ jelöli azt az $\mathbb{R} \to F$ függvényt, amelyre $w \in \mathbb{R} \setminus N_{\mathfrak{a}}$ esetén

$$\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) := \int\limits_{\mathbb{R}^{dim(E)-1}} (((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^\circ\, (p, w)\ d\mu_{dim(E)-1}(p),$$

míg $w \in N_{\mathfrak{a}}$ esetén $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) := 0$, akkor $\widehat{f_{\mathfrak{a}}} \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}, \mathscr{R}_1, \mu_1)$, és

$$\int\limits_{U_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{a}}} ((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}})\ d\left(\mu_{dim(E)-1} \otimes \mu_1\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f_{\mathfrak{a}}}\ d\mu_1.$$

Ha $(p, w) \in U_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{a}}$, akkor

$$(((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^\circ\, (p, w) = (((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))\, (p, w) =$$

$$= ((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})(p,w) \frac{(mod_{g_w}(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)))(p)}{\|(grad(h))(\Phi_{\mathfrak{a}}(p,w))\|} =$$

$$= \left(\left(\left(\frac{\varphi_{\mathfrak{a}} f}{\|grad(h)\|}\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)\right) mod_{g_w}\left(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)\right)\right)(p),$$

ami azt jelenti, hogy $w \in W_{\mathfrak{a}}$ esetén

$$(((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^{\circ}(\cdot,w) = \left(\left(\left(\frac{\varphi_{\mathfrak{a}} f}{\|grad(h)\|}\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)\right) mod_{g_w}\left(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)\right)\right)^{\circ}$$

teljesül $\mathbb{R}^{dim(E)-1}$-en. Ezért $w \in W_{\mathfrak{a}} \setminus N_{\mathfrak{a}}$ esetén a jobb oldalon álló függvény $\mu_{dim(E)-1}$-integrálható és

$$\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) := \int\limits_{\mathbb{R}^{dim(E)-1}} (((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^{\circ}(p,w)\; d\mu_{dim(E)-1}(p) =$$

$$= \int\limits_{U_{\mathfrak{a}}} \left(\left(\frac{\varphi_{\mathfrak{a}} f}{\|grad(h)\|}\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)\right) mod_{g_w}\left(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)\right) d\mu_{dim(E)-1} =$$

$$= \int\limits_{[h=w]} \frac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w},$$

hiszen a $\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w) : U_{\mathfrak{a}} \to E$ függvény paraméterezése a $[h = w]$ C^1-osztályú hiperfelületnek, továbbá

$$\left[\frac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \neq 0\right] \subseteq [h=w] \cap [\varphi_{\mathfrak{a}} \neq 0] \subseteq [h=w] \cap V_{\mathfrak{a}} = Im(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w)).$$

Ugyanakkor triviális, hogy $w \in \mathbb{R} \setminus W_{\mathfrak{a}}$ esetén $(((\varphi_{\mathfrak{a}} f) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}) mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))^{\circ}(\cdot,w) = 0 \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R}^{dim(E)-1}, \mathscr{R}_{dim(E)-1}, \mu_{dim(E)-1})$, így $w \in \mathbb{R} \setminus N_{\mathfrak{a}}$ (tehát $N_{\mathfrak{a}} \subseteq W_{\mathfrak{a}}$) és $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) = 0$. Összefoglalva: ha $w \in N_{\mathfrak{a}}$ vagy $w \in \mathbb{R} \setminus W_{\mathfrak{a}}$, akkor $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) = 0$, és ha $w \in W_{\mathfrak{a}} \setminus N_{\mathfrak{a}}$, akkor $\dfrac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h=w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w})$ és $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) = \displaystyle\int\limits_{[h=w]} \frac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w}$.

Most megmutatjuk, hogy $\widehat{f} = \displaystyle\sum_{\mathfrak{a} \in A} \widehat{f_{\mathfrak{a}}}$ az $\mathbb{R} \setminus \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{a} \in A} N_{\mathfrak{a}}$ halmazon, tehát $\mathbb{R}$-en μ_1-majdnem mindenütt. Ehhez legyen $w \in \mathbb{R} \setminus \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{a} \in A} N_{\mathfrak{a}}$ tetszőleges; ekkor két esetet különböztethetünk meg: $w \in \mathbb{R} \setminus \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{a} \in A} W_{\mathfrak{a}}$, vagy $w \in \left(\displaystyle\bigcup_{\mathfrak{a} \in A} W_{\mathfrak{a}}\right) \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{\mathfrak{a} \in A} N_{\mathfrak{a}}\right)$.

Tegyük fel, hogy $w \in \mathbb{R} \setminus \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{a} \in A} W_{\mathfrak{a}}$. Ekkor minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén $w \notin W_{\mathfrak{a}}$, így $\widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) = 0$, vagyis $\displaystyle\sum_{\mathfrak{a} \in A} \widehat{f_{\mathfrak{a}}}(w) = 0$. Ugyanakkor $\widehat{f}(w) = 0$ is teljesül. Ha ugyanis $\widehat{f}(w) \neq 0$, akkor az $\widehat{f}$ értelmezéséből közvetlenül kapjuk, hogy $w \in Im(h)$ és

$\frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h=w],\mathscr{R}_{g_w},\mu_{g_w})$, valamint $0 \neq \widehat{f}(w) := \int\limits_{[h=w]} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w}$, tehát vehetünk olyan $x \in [h=w]$ pontot, hogy $f(x) \neq 0$. De $[f \neq 0] \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} V_{\mathfrak{a}}$, tehát ekkor van olyan $\mathfrak{a} \in A$, hogy $x \in [h=w] \cap V_{\mathfrak{a}}$. A $V_{\mathfrak{a}} = Im(\Phi_{\mathfrak{a}})$ egyenlőség miatt létezik olyan $(p,w') \in U_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{a}}$, hogy $x = \Phi(p,w')$, így $w = h(x) = h(\Phi(p,w')) = w' \in W_{\mathfrak{a}}$, hiszen $Im(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,w')) = [h=w'] \cap V_{\mathfrak{a}}$. De $w \notin W_{\mathfrak{a}}$, ami ellentmondás, ami azt jelenti, hogy $\widehat{f} = 0 = \sum\limits_{\mathfrak{a}\in A} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}$ az $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} W_{\mathfrak{a}}$ halmazon.

Tegyük fel, hogy $w \in \left(\bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} W_{\mathfrak{a}}\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} N_{\mathfrak{a}}\right)$. Ha $\mathfrak{a} \in A$ olyan, hogy $w \notin W_{\mathfrak{a}}$, akkor $\widehat{f}_{\mathfrak{a}}(w) = 0$, míg $w \in W_{\mathfrak{a}}$ esetén $w \in W_{\mathfrak{a}} \setminus N_{\mathfrak{a}}$, következésképpen $\frac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h=w],\mathscr{R}_{g_w},\mu_{g_w})$ és $\widehat{f}_{\mathfrak{a}}(w) = \int\limits_{[h=w]} \frac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w}$. Ebből kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathfrak{a}\in A} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}(w) = \sum_{\mathfrak{a}\in A;\ w\in W_{\mathfrak{a}}} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}(w) = \sum_{\mathfrak{a}\in A;\ w\in W_{\mathfrak{a}}} \int\limits_{[h=w]} \frac{(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\,|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w} =$$

$$= \int\limits_{[h=w]} \frac{((\sum\limits_{\mathfrak{a}\in A;\ w\in W_{\mathfrak{a}}} \varphi_{\mathfrak{a}})f)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w}.$$

Tehát ha $f = \left(\sum\limits_{\mathfrak{a}\in A;\ w\in W_{\mathfrak{a}}} \varphi_{\mathfrak{a}}\right) f$ teljesül a $[h=w]$ halmazon, akkor ebből kapjuk, hogy $w \in Im(h)$ (mert nyilvánvalóan $\bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} \subseteq Im(h)$) és $\frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h = w],\mathscr{R}_{g_w},\mu_{g_w})$, valamint

$$\sum_{\mathfrak{a}\in A} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}(w) = \int\limits_{[h=w]} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w} =: \widehat{f}(w),$$

ami azt jelenti, hogy $\widehat{f} = \sum\limits_{\mathfrak{a}\in A} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}$ az $\left(\bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} W_{\mathfrak{a}}\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{\mathfrak{a}\in A} N_{\mathfrak{a}}\right)$ halmazon. Azt tudjuk, hogy $f = \sum\limits_{\mathfrak{a}\in A} (\varphi_{\mathfrak{a}} f)$, ezért már csak azt kell igazolni, hogy $\mathfrak{a} \in A$ és $\mathfrak{a} \notin W_{\mathfrak{a}}$ esetén $f = 0$ a $[h=w]$ halmazon. Ez viszont pontosan ugyanúgy bizonyítható (indirekt módon), mint az előző bekezdés végén.

Tehát $\widehat{f} = \sum\limits_{\mathfrak{a}\in A} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}$ teljesül az $\mathbb{R}$-en μ_1-majdnem mindenütt, és minden $A \ni \mathfrak{a}$-ra $\widehat{f}_{\mathfrak{a}} \in \mathscr{L}^1_F(\mathbb{R},\mathscr{R}_1,\mu_1)$, továbbá az előzőek alapján

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}\, d\mu_1 = \sum_{\mathfrak{a}\in A} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}_{\mathfrak{a}}\, d\mu_1 = \sum_{\mathfrak{a}\in A} \int\limits_{U_{\mathfrak{a}}\times W_{\mathfrak{a}}} ((\varphi_{\mathfrak{a}} f)\circ\Phi_{\mathfrak{a}})\, mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}})\, d\left(\mu_{dim(E)-1}\otimes\mu_1\right) =$$

$$= \int\limits_{Dom(h)} f\, d\mu_g,$$

amivel az állítást bebizonyítottuk, azzal a mellékfeltétellel, hogy f kompakt tartójú.
(II) Megmutatjuk, hogy ha $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(Dom(h), \mathscr{R}_g, \mu_g)$ *pozitív* függvény, és $\widetilde{f}$ jelöli azt az $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényt, amelyre $w \in Im(h)$ esetén

$$\widetilde{f}(w) := \int\limits_{[h=w]}^{\;\;*} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w},$$

míg $w \in \mathbb{R} \setminus Im(h)$ esetén $\widetilde{f}(w) := 0$, akkor $\displaystyle\int\limits_{Dom(h)} f\, d\mu_g = \int\limits_{\mathbb{R}}^{*} \widetilde{f}\, d\mu_1$ teljesül.

A $Dom(h)$ halmaz nyílt E-ben, ezért vehetjük az E kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatát, amelyre $Dom(h) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n = \chi_{K_n} f$; ez a $Dom(h) \to \mathbb{R}$ függvény pozitív, μ_g-integrálható és kompakt tartójú. Az (I) alapján teljesül az, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a

$$N_n := \left\{ w \in Im(h) \;\middle|\; \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \notin \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([h=w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w}) \right\}$$

halmaz $\mathbb{R}$-ben μ_1-nullhalmaz, és az

$$\widehat{f_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$w \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{[h=w]} \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} d\mu_{g_w} & \text{, ha } w \in Im(h) \text{ és } \dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([h=w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w}) \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvény μ_1-integrálható, valamint $\displaystyle\int\limits_{Dom(h)} f_n\, d\mu_g = \int\limits_{\mathbb{R}}^{*} \widetilde{f}_n\, d\mu_1$. Világos továbbá, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő és $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, így a Lévi-tétel alapján az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_g,1}$ félnorma szerint és

$$\int\limits_{Dom(h)} f\, d\mu_g = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{Dom(h)} f_n\, d\mu_g = \sup_{n\to\infty} \int\limits_{Dom(h)} f_n\, d\mu_g.$$

Legyen $w \in Im(h) \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n$ rögzített. Ekkor az $\left(\dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, és mindegyik tagja pozitív, valamint eleme $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([h{=}w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w})$-nek. Nyilvánvalóan fennáll a $\dfrac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \right)$ egyenlőség, ezért a μ_{g_w} által generált felső integrál monoton σ-folytonossága alapján

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{f}_n(w) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[h=w]} \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[h=w]}^{\;\;*} \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w} =$$

$$= \int_{[h=w]}^{*} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\, d\mu_{g_w} =: \widetilde{f}(w).$$

Ha $w \in \mathbb{R} \setminus Im(h)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\widehat{f}_n(w) = 0$, ugyanakkor $\widetilde{f}(w) = 0$, tehát $\sup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{f}_n(w) = \widetilde{f}(w)$ ismét igaz. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ halmazon (tehát μ_1-majdnem mindenütt) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{f}_n = \widetilde{f}$, és nyilvánvaló, hogy az $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő az $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ halmazon. A μ_1 által generált felső integrál monoton σ-folytonossága alapján ebből kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} \widetilde{f}\, d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}}^{*} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{f}_n\right) d\mu_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}}^{*} \widehat{f}_n\, d\mu_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_n\, d\mu_1 =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{Dom(h)} f_n\, d\mu_g = \int_{Dom(h)} \widehat{f}\, d\mu_g,$$

amit bizonyítani akartunk.

(III) Legyen most $f : Dom(h) \to F$ tetszőleges μ_g-integrálható függvény. A $Dom(h)$ halmaz nyílt E-ben, ezért (ugyanúgy, mint a (II)-ben) vehetjük az E kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatát, amelyre $Dom(h) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ismét legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n = \chi_{K_n} f$; ez a $Dom(h) \to F$ függvény μ_g-integrálható és kompakt tartójú, továbbá $\|f_n\| \leq \|f\|$ a $Dom(h)$ halmazon. Továbbá, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a $Dom(h)$ halmazon, és a hipotézis alapján $\int_{Dom(h)}^{*} \|f\|\, d\mu_g < +\infty$. Ebből a Lebesgue-tétel alapján következik (mellesleg közvetlenül is belátható), hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál f-hez a $\|\cdot\|_{\mu_g,1}$ félnorma szerint és

$$\int_{Dom(h)} f\, d\mu_g = \lim_{n\to\infty} \int_{Dom(h)} f_n\, d\mu_g.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$N_n := \left\{ w \in Im(h) \;\middle|\; \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \notin \mathscr{L}^1_F([h=w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w}) \right\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $f_n : Dom(h) \to F$ kompakt tartójú μ_g-integrálható függvény, tehát az (I) alapján az N_n halmaz $\mathbb{R}$-ben μ_1-nullhalmaz, és az

$$\widehat{f}_n : \mathbb{R} \to F$$

$$w \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int_{[h=w]} \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} d\mu_{g_w} & \text{ha } w \in Im(h) \text{ és } \dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h=w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w}) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény μ_1-integrálható, valamint fennáll az $\int\limits_{Dom(h)} f_n \, d\mu_g = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f_n} \, d\mu_1$ egyenlőség.

Ebből következik, hogy

$$\int\limits_{Dom(h)} f \, d\mu_g = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f_n} \, d\mu_1$$

is teljesül.

Jelölje $\|\widehat{f}\|$ azt a $Dom(h) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ leképezést, amely minden $w \in \mathbb{R} \setminus Im(h)$ esetén a w-hez a 0 értéket rendeli, továbbá minden $Im(h) \ni w$-re

$$\|\widehat{f}\|(w) := \int\limits_{[h=w]}^{*} \frac{\|f\| \mid_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w}.$$

Ekkor a (II) alapján $\int\limits_{\mathbb{R}}^{*} \|\widehat{f}\| \, d\mu_1 = \int\limits_{Dom(h)} \|f\| \, d\mu_g < +\infty$, mert az $\|f\| : Dom(h) \to \mathbb{R}$ függvény pozitív és μ_g-integrálható. Ezért az $N := \{w \in \mathbb{R} | \|\widehat{f}\|(w) = +\infty\}$ halmaz μ_1-nullhalmaz.

Legyen most $w \in Im(h) \setminus \left(N \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n\right)$ rögzített. Ekkor $\dfrac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\right)$ a $[h = w]$ halmazon, ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $w \in Im(h) \setminus N_n$, így $\dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h = w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w})$. Ezenkívül, minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\left\|\frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\right\| = \frac{\|f_n\| \mid_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \leq \frac{\|f\| \mid_{[h=w]}}{\|grad(h)\|},$$

és $w \in Im(h) \setminus N$ miatt

$$\int\limits_{[h=w]}^{*} \frac{\|f\| \mid_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} =: \|\widehat{f}\|(w) < +\infty.$$

A Lebesgue-tétel alapján $\dfrac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \in \mathscr{L}^1_F([h=w], \mathscr{R}_{g_w}, \mu_{g_w})$, és az $\left(\dfrac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $\dfrac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|}$-hoz a $\|\cdot\|_{\mu_{g_w},1}$ félnorma szerint és

$$\widehat{f}(w) := \int\limits_{[h=w]} \frac{f|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[h=w]} \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(w).$$

Ha $w \in \mathbb{R} \setminus Im(h)$, akkor a definíció szerint $\widehat{f}(w) = 0$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\widehat{f_n}(w) = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $\widehat{f}$-hoz az

$\mathbb{R} \setminus \left(N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \right)$ halmazon, tehát μ_1-majdnem mindenütt, hiszen az $N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ halmaz μ_1-nullhalmaz.

Ha $w \in Im(h) \setminus \left(N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \right)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\|\widehat{f}_n(w)\| = \left\| \int_{[h=w]} \frac{(f_n)|_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} \right\| \leq \int_{[h=w]} \frac{\|f_n\| \mid_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} \leq$$

$$\leq \int_{[h=w]}^{*} \frac{\|f\| \mid_{[h=w]}}{\|grad(h)\|} \, d\mu_{g_w} =: \|\widehat{f}\|(w),$$

azaz $\|\widehat{f}_n(w)\| \leq \|\widehat{f}\|(w)$. Ha $w \in \mathbb{R} \setminus Im(h)$, akkor a definíció szerint $\|\widehat{f}_n(w)\| = 0 = \|\widehat{f}\|(w)$. Ez azt jelenti, hogy $\|\widehat{f}_n\| \leq \|\widehat{f}\|$ az $\mathbb{R} \setminus \left(N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \right)$ halmazon, tehát μ_1-majdnem mindenütt, és láttuk, hogy $\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}\| \, d\mu_1 < +\infty$. Ismét a Lebesgue-tételre hivatkozva kapjuk, hogy az $\widehat{f} : \mathbb{R} \to F$ függvény μ_1-integrálható, és az $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergál $\widehat{f}$-hoz a $\| \cdot \|_{\mu_1,1}$ félnorma szerint, amiből azonnal következik, hogy

$$\int_{Dom(h)} f \, d\mu_g = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_n \, d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} \, d\mu_1,$$

amit bizonyítani kellett. ■

Gyakorlatok

1. Jellemezzük a 0-dimenziós és a $dim(E)$-dimenziós Riemann-sokaságokat az E véges dimenziós valós vektortérben!

(*Útmutatás.* (I) Legyen (M, g) tetszőleges 0-dimenziós C^r-osztályú Riemann-sokaság E-ben. Ekkor M diszkrét (de nem feltétlenül zárt) részhalmaza E-nek, és minden $M \ni \mathfrak{a}$-ra $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2(T_\mathfrak{a}(M)^2; \mathbb{R})$ skalárszorzás. De ha $\mathfrak{a} \in M$, akkor $T_\mathfrak{a}(M) = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, tehát $g(\mathfrak{a})$ egyenlő a $\{0\} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvénnyel. Megfordítva, ha $M \subseteq E$ tetszőleges diszkrét halmaz, és minden $M \ni \mathfrak{a}$-ra $g(\mathfrak{a}) : \{0\} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ az azonosan 0 függvény, akkor az (M, g) pár 0-dimenziós C^r-osztályú Riemann-sokaság E-ben.

(II) Legyen (M, g) egy $dim(E)$-dimenziós C^r-osztályú Riemann-sokaság E-ben. Ekkor M nyílt részhalmaza E-nek, és minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2(T_\mathfrak{a}(M)^2; \mathbb{R})$ skalárszorzás. De ha $\mathfrak{a} \in M$, akkor $T_\mathfrak{a}(M) = E$, tehát $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2(E^2; \mathbb{R})$ skalárszorzás. Ha $u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to E$ tetszőleges lineáris bijekció, akkor a $\Phi := u\big|_{\overset{-1}{u}\langle M\rangle} : \overset{-1}{u}\langle M\rangle \to M$ függvény globális paraméterezése M-nek, ezért a

$$g_\Phi : Dom(\Phi) \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R}); \quad p \mapsto g(\Phi(p)) \circ ((D\Phi)(p) \times (D\Phi)(p))$$

függvény C^{r-1}-osztályú. De $Dom(\Phi) = \overset{-1}{u}\langle M\rangle$, és minden $p \in \overset{-1}{u}\langle M\rangle$ esetén $(D\Phi)(p) = u$, ezért az

$$\overset{-1}{u}\langle M\rangle \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R}); \quad p \mapsto g(\Phi(p)) \circ (u \times u)$$

függvény C^{r-1}-osztályú. Az $u \times u : \left(\mathbb{R}^{dim(E)}\right)^2 \to E^2$ függvény lineáris bijekció, ezért ebből következik, hogy a $g \circ u : \overset{-1}{u}\langle M\rangle \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R})$ függvény C^{r-1}-osztályú, tehát a $g : M \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R})$ függvény is C^{r-1}-osztályú. Tehát azt kaptuk, hogy ha (M, g) $dim(E)$-dimenziós C^r-osztályú Riemann-sokaság E-ben, akkor $M \subseteq E$ nyílt halmaz, és $g : M \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R})$ olyan C^{r-1}-osztályú függvény, hogy minden $M \ni \mathfrak{a}$-ra $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R})$ skalárszorzás. Hasonlóan könnyen kapható, hogy ha M nyílt részhalmaza E-nek és $g : M \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R})$ olyan C^{r-1}-osztályú függvény, hogy minden $M \ni \mathfrak{a}$-ra $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^{dim(E)})^2; \mathbb{R})$ skalárszorzás, akkor (M, g) $dim(E)$-dimenziós C^r-osztályú Riemann-sokaság E-ben.)

2. Legyen E euklidészi tér és $m \in \mathbb{R}^+$. Képezzük az $X_m^\pm$ $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú részsokaságot $\mathbb{R} \times E$-ben (1. pont, **5**. gyakorlat). Jelölje $\mathfrak{g}_E$ az E skalárszorzása által meghatározott $\mathbb{R} \times E$ feletti kanonikus Lorentz-formát, tehát $\mathfrak{g}_E : (\mathbb{R} \times E) \times (\mathbb{R} \times E) \to \mathbb{R}$ az a leképezés, amelyre $(p_0, \mathbf{p}), (p_0', \mathbf{p}') \in \mathbb{R} \times E$ esetén

$$\mathfrak{g}_E\left((p_0, \mathbf{p}), (p_0', \mathbf{p}')\right) := -p_0 p_0' + (\mathbf{p}|\mathbf{p}').$$

Minden $(p_0, \mathbf{p}) \in X_m^\pm$ esetén legyen $g(p_0, \mathbf{p})$ a $\mathfrak{g}_E$ szimmetrikus (de nem pozitív definit) bilineáris funkcionál leszűkítése a $T_{(p_0,\mathbf{p})}(X_m^\pm)^2 \subseteq (\mathbb{R} \times E) \times (\mathbb{R} \times E)$ halmazra. Ekkor az $(X_m^\pm, g)$ pár $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú Riemann-sokaság. Mi a probléma az $m = 0$ esettel?

(*Útmutatás.* Ha $(p_0, \mathbf{p}) \in X_0^{\pm}$, akkor a $\mathfrak{g}_E$ bilineáris funkcionál leszűkítése $T_{(p_0,\mathbf{p})}(X_0^{\pm})^2$-re nem *pozitív definit*, hanem csak pozitív szemidefinit, ezért a fentiek alapján értelmezett g függvény értékei *nem skalárszorzások*. Ezért zártuk ki az $m = 0$ esetet.)

3. (*Absztrakt Riemann- és Lorentz-sokaságok.*) Legyen $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú (absztrakt) sokaság (1. pont, **9**. gyakorlat). Minden

$$g \in \prod_{\mathfrak{a} \in M} \mathscr{L}_2(T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})^2; \mathbb{R})$$

függvényre és $\mathfrak{Ch} \ni \varphi$-re legyen

$$g_\varphi : Im(\varphi) \to \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^m)^2; \mathbb{R}); \quad x \mapsto g(\varphi^{-1}(x)) \circ \left(\theta_{\varphi,\varphi^{-1}(x)} \times \theta_{\varphi,\varphi^{-1}(x)}\right).$$

a) Azt mondjuk, hogy g *Riemann-metrika* $(M, \mathfrak{Ch})$ felett, ha minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén a $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2(T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})^2; \mathbb{R})$ bilineáris funkcionál *skalárszorzás* a $T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ valós m-dimenziós vektortér felett, és minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ esetén a $g_\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^m)^2; \mathbb{R})$ függvény C^{r-1}-osztályú. Az $(M, \mathfrak{Ch}, g)$ hármast m-dimenziós, C^r-osztályú (absztrakt) *Riemann-sokaságnak* nevezzük, ha $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság és g Riemann-metrika $(M, \mathfrak{Ch})$ felett.

b) Azt mondjuk, hogy g *Lorentz-metrika* $(M, \mathfrak{Ch})$ felett, ha minden $\mathfrak{a} \in M$ esetén a $g(\mathfrak{a}) \in \mathscr{L}_2(T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})^2; \mathbb{R})$ bilineáris funkcionál *Lorentz-forma* a $T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$ valós m-dimenziós vektortér felett, vagyis létezik olyan $(\mathfrak{t}_i)_{i \in m}$ algebrai bázis $T_{\mathfrak{a}}(M, \mathfrak{Ch})$-ben, hogy minden $j, k \in m$ esetén $g(\mathfrak{a})(\mathfrak{t}_j, \mathfrak{t}_k) = G_{j,k}$, ahol $(G_{j,k})_{(j,k) \in m \times m}$ az a diagonális mátrix, amelyre $G_{0,0} = -1$ és ha $1 \leq j \in m$, akkor $G_{j,j} = +1$; továbbá minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}$ esetén a $g_\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathscr{L}_2((\mathbb{R}^m)^2; \mathbb{R})$ függvény C^{r-1}-osztályú. Az $(M, \mathfrak{Ch}, g)$ hármast m-dimenziós, C^r-osztályú (absztrakt) *Lorentz-sokaságnak* nevezzük, ha $(M, \mathfrak{Ch})$ m-dimenziós, C^r-osztályú sokaság és g Lorentz-metrika $(M, \mathfrak{Ch})$ felett.

4. Ha (M, g) Riemann-sokaság, akkor az $\mathscr{R}_g$ halmazgyűrű δ-gyűrű.

(*Útmutatás.* Legyen $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{R}_g$-ben. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $(H_{k,i})_{i \in I_k}$ véges halmazrendszer és az M paraméterezéseinek olyan $(\Phi_{k,i})_{i \in I_k}$ rendszere, hogy $H_k = \bigcup_{i \in I_k} H_{k,i}$ és minden $I_k \ni i$-re $H_{k,i} \in \mathscr{R}_{g,\Phi_{k,i}}$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $i \in I_0$, akkor

$$H_k \cap H_{0,i} = (H_k \cap Im(\Phi_{0,i})) \cap H_{0,i} = \bigcup_{j \in I_k} ((H_{k,j} \cap Im(\Phi_{0,i})) \cap H_{0,i}),$$

és a szétvágási lemma szerint minden $j \in I_k$ esetén $H_{k,j} \cap Im(\Phi_{0,i}) \in \mathscr{R}_{g,\Phi_{0,i}}$, amiből következik, hogy minden $I_k \ni j$-re $(H_{k,j} \cap Im(\Phi_{0,i})) \cap H_{0,i} \in \mathscr{R}_{g,\Phi_{0,i}}$, hiszen $\mathscr{R}_{g,\Phi_{0,i}}$ halmazgyűrű. Ezért $i \in I_0$ esetén $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (H_k \cap H_{0,i}) \in \mathscr{R}_{g,\Phi_{0,i}} \subseteq \mathscr{R}_g$, mert a $\mathscr{R}_{g,\Phi_{0,i}}$ halmazgyűrű δ-gyűrű. De $\mathscr{R}_g$ halmazgyűrű, ezért ebből következik, hogy

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} H_k = \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} H_k\right) \cap H_0 = \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} H_k\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I_0} H_{0,i}\right) = \bigcup_{i \in I_0} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (H_k \cap H_{0,i})\right) \in \mathscr{R}_g,$$

amit bizonyítani kellett.)

5. Legyenek Ω és Ω' nyílt halmazok $\mathbb{R}^m$-ben, $\sigma : \Omega \to \Omega'$ C^1-diffeomorfizmus, és jelölje g' az $\mathbb{R}^m$ feletti euklidészi skalárszorzás által meghatározott Riemann-metrikát Ω' felett. Ekkor σ globális m-dimenziós, C^1-osztályú paraméterezése az Ω' nyílt részsokaságnak, és $mod_{g'}(\sigma) = |det(D\sigma)|$. Továbbá, ha F Banach-tér, akkor az $f : \Omega' \to F$ függvény pontosan akkor eleme $\mathscr{L}^1_F(\Omega', \mathscr{R}_{\Omega'}, \mu_{\Omega'})$-nek, ha az f függvény integrálható Ω'-n a μ_m Lebesgue-mérték szerint; továbbá, ha $f \in \mathscr{L}^1_F(\Omega', \mathscr{R}_{\Omega'}, \mu_{\Omega'})$, akkor

$$\int_{\Omega'} f \; d\mu_{g',\sigma} = \int_{\Omega'} f \; d\mu_m.$$

A felületi mértékekre vonatkozó helyettesítéses integrálás tétele alapján ebből következik, hogy ha F Banach-tér és az $f : \Omega' \to F$ függvény integrálható Ω'-n a μ_m Lebesgue-mérték szerint, akkor

$$\int_{\Omega'} f \; d\mu_m = \int_{\Omega} (f \circ \sigma)|det(D\sigma)| \; d\mu_m$$

teljesül, vagyis visszakapjuk a helyettesítéses integrálás X. fejezet 3. pontjában igazolt tételét.

6. (*n-dimenziós euklidészi gömbfelszín.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\mathbf{S}_r(n) := \left\{ (x_k)_{k \in n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2} = r \right\}.$$

Ekkor $\mathbf{S}_r(n)$ C^∞-osztályú hiperfelület $\mathbb{R}^{n+1}$-ben és $\mathbb{R}^{n+1}$ az euklidészi skalárszorzással ellátva Riemann-sokaság, így $\mathbf{S}_r(n)$ n-dimenziós kompakt Riemann-sokaság $\mathbb{R}^{n+1}$-ben. Számítsuk ki az $\mathbf{S}_r(n)$ felületi mértékét (amit $\mu_{\mathbf{S}_r(n)}$-nel jelölünk), és mutassuk meg, hogy az $\mathbf{S}_r(n)$ felszíne egyenlő a

$$2r^n \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

számmal.

(*Útmutatás.* Legyen

$$\mathbf{B}_r(n) := \left\{ (p_k)_{k \in n} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2} < r \right\},$$

és értelmezzük a

$$\Phi_\pm : \mathbf{B}_r(n) \to \mathbf{S}_r(n); \quad (p_k)_{k \in n} \mapsto \left(p_0, \cdots, p_{n-1}, \pm\sqrt{r^2 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2} \right)$$

leképezéseket. Könnyen látható, hogy Φ_+ és Φ_- paraméterezései az $\mathbf{S}_r(n)$ C^∞-osztályú sokaságnak, továbbá

$$Im(\Phi_\pm) = \{\ (x_k)_{k\in n+1} \in \mathbf{S}_r(n) \mid \ \pm x_n > 0\}.$$

Ezért $Im(\Phi_+) \cap Im(\Phi_-) = \emptyset$ és $\mathbf{S}_r(n) \setminus (Im(\Phi_+) \cup Im(\Phi_-)) = \{(x_k)_{k\in n+1} \in \mathbf{S}_r(n) | x_n = 0\}$, ami azt jelenti, hogy az $\mathbf{S}_r(n) \setminus (Im(\Phi_+) \cup Im(\Phi_-))$ halmaz $\mu_{\mathbf{S}_r(n)}$-nullhalmaz. Ezért minden F Banach-térre és minden $f \in \mathscr{L}^1_F(\mathbf{S}_r(n), \mathscr{R}_{\mathbf{S}_r(n)}, \mu_{\mathbf{S}_r(n)})$ függvényre

$$\int\limits_{\mathbf{S}_r(n)} f\ d\mu_{\mathbf{S}_r(n)} = \int\limits_{Im(\Phi_+)} f\ d\left(\mu_{\mathbf{S}_r(n)} | Im(\Phi_+)\right) + \int\limits_{Im(\Phi_-)} f\ d\left(\mu_{\mathbf{S}_r(n)} | Im(\Phi_-)\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} (f \circ \Phi_+) mod(\Phi_+)\ d\mu_n + \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} (f \circ \Phi_-) mod(\Phi_-)\ d\mu_n.$$

Speciálisan, az $\mathbf{S}_r(n)$ felszínére

$$\mu_{\mathbf{S}_r(n)}(\mathbf{S}_r(n)) := \int\limits_{\mathbf{S}_r(n)} 1\ d\mu_{\mathbf{S}_r(n)} = \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} mod(\Phi_+)\ d\mu_n + \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} mod(\Phi_-)\ d\mu_n$$

teljesül. Látható, hogy a $\mu_{\mathbf{S}_r(n)}$ mérték meghatározásához szükség van a $mod(\Phi_\pm) : \mathbf{B}_r(n) \to \mathbb{R}^+$ függvények kiszámítására. Ha $(p_k)_{k\in n} \in \mathbf{B}_r(n)$, akkor

$$(D\Phi_\pm)\left((p_k)_{k\in n}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \pm\dfrac{p_0}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2}} & \pm\dfrac{p_1}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2}} & \dots & \pm\dfrac{p_{n-1}}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2}} \end{pmatrix}$$

($(n+1) \times n$-es mátrix), és

$$\left((D\Phi_\pm)\left((p_k)_{k\in n}\right)\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \pm\dfrac{p_0}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \pm\dfrac{p_1}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \pm\dfrac{p_{n-1}}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2}} \end{pmatrix}$$

($n\times(n+1)$-es mátrix), ezért $((D\Phi_\pm)((p_k)_{k\in n}))^* (D\Phi_\pm)((p_k)_{k\in n})$ a következő $n\times n$-es mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1+\dfrac{p_0^2}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} & \dfrac{p_0p_1}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} & \dots & \dfrac{p_0p_{n-1}}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} \\ \dfrac{p_1p_0}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} & 1+\dfrac{p_1^2}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} & \dots & \dfrac{p_1p_{n-1}}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{p_{n-1}p_0}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} & \dfrac{p_{n-1}p_1}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} & \dots & 1+\dfrac{p_{n-1}^2}{r^2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2} \end{pmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ jelöli az $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$; $\mathbf{x}\mapsto(\mathbf{x}|\mathbf{v})_n\mathbf{v}$ lineáris operátort (ahol $(\cdot|\cdot)_n$ az euklidészi skalárszorzás $\mathbb{R}^n$ felett), akkor minden $\mathbf{B}_r(n)\ni\mathbf{p}$-re

$$((D\Phi_\pm)(\mathbf{p}))^*((D\Phi_\pm)(\mathbf{p})) = id_{\mathbb{R}^n} + \left(\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{r^2-\|\mathbf{p}\|_n^2}}\right)\otimes\left(\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{r^2-\|\mathbf{p}\|_n^2}}\right),$$

ahol $\|\cdot\|_n$ az euklidészi norma $\mathbb{R}^n$ felett. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ esetén $det\,(id_{\mathbb{R}^n}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = 1+\|\mathbf{v}\|_n^2$, mert $\mathbf{v}\neq 0$ esetén a $\mathbf{v}^\perp$ $n-1$-dimenziós és $\mathbb{R}.\mathbf{v}$ egydimenziós sajátaltere az $id_{\mathbb{R}^n}+\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ operátornak, így az 1 szám $n-1$-szeres multiplicitású sajátérték, és $1+\|\mathbf{v}\|_n^2$ a $\mathbf{v}$ vektorthoz tartozó sajátérték. Ebből kapjuk, hogy minden $\mathbf{b}\in\mathbf{B}_r(n)$ esetén

$$(mod(\Phi_\pm))(\mathbf{p}) = \sqrt{1+\frac{\|\mathbf{p}\|_n^2}{r^2-\|\mathbf{p}\|_n^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-\|\mathbf{p}\|_n^2}}.$$

Tehát ha F Banach-tér, akkor egy $f:\mathbf{S}_r(n)\to F$ függvény pontosan akkor $\mu_{\mathbf{S}_r(n)}$-integrálható, ha a

$$\mathbf{B}_r(n)\to F;\quad \mathbf{p}\mapsto\frac{f\left(\mathbf{p}\pm\sqrt{r^2-\|\mathbf{p}\|_n^2}\right)}{\sqrt{r^2-\|\mathbf{p}\|_n^2}}$$

függvények μ_n-integrálhatók, továbbá, ha $f\in\mathscr{L}_F^1(\mathbf{S}_r(n),\mathscr{R}_{\mathbf{S}_r(n)},\mu_{\mathbf{S}_r(n)})$, akkor

$$\int\limits_{\mathbf{S}_r(n)} f\,d\mu_{\mathbf{S}_r(n)} =$$

$$= r \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} \frac{f\left(\mathbf{p} + \sqrt{r^2 - \|\mathbf{p}\|_n^2}\right)}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{p}\|_n^2}} \, d\mu_n(\mathbf{p}) + r \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} \frac{f\left(\mathbf{p} - \sqrt{r^2 - \|\mathbf{p}\|_n^2}\right)}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{p}\|_n^2}} \, d\mu_n(\mathbf{p}).$$

Speciálisan:

$$\mu_{\mathbf{S}_r(n)}(\mathbf{S}_r(n)) = 2r \int\limits_{\mathbf{B}_r(n)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \|\mathbf{p}\|_n^2}} \, d\mu_n(\mathbf{p}).$$

A $\sigma : \mathbf{B}_1(n) \to \mathbf{B}_r(n);\ \mathbf{q} \mapsto r\mathbf{q}$ leképezés C^1-diffeomorfizmus, ezért a helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva

$$\mu_{\mathbf{S}_r(n)}(\mathbf{S}_r(n)) = 2r \int\limits_{\mathbf{B}_1(n)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \|\sigma(\mathbf{q})\|_n^2}} |det\left((D\sigma)(\mathbf{q})\right)| \, d\mu_n(\mathbf{q}) =$$

$$= 2r \int\limits_{\mathbf{B}_1(n)} \frac{1}{r\sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|_n^2}} r^n \, d\mu_n(\mathbf{q})$$

adódik, vagyis $\mu_{\mathbf{S}_r(n)}(\mathbf{S}_r(n)) = 2r^n s_n$, ahol

$$s_n := \int\limits_{\mathbf{B}_1(n)} \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|_n^2}} \, d\mu_n(\mathbf{q}).$$

Most a Lebesgue-Fubini tétel alkalmazásával rekurzív formulát származtatunk az $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ renszerre. Először a $]-\pi/2, \pi/2[\to]-1, 1[;\ \theta \mapsto \sin(\theta)$ C^1-diffeomorfizmussal végrehajtott helyettesítéses integrálással könnyen kapjuk, hogy

$$s_1 := \int\limits_{\mathbf{B}_1(1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|_1^2}} \, d\mu_1(\mathbf{q}) = \int\limits_{]-1,1[} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \, d\mu_1(q) = \pi.$$

Legyen most $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. Ekkor a Lebesgue-Fubini tételt alkalmazva

$$s_{n+1} = \int\limits_{\mathbf{B}_1(n+1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|_{n+1}^2}} \, d\mu_{n+1}(\mathbf{q}) =$$

$$= \int\limits_{]-1,1[} \left(\int\limits_{\mathbf{B}_{\sqrt{1-q_n^2}}(n)} \frac{1}{\sqrt{1 - q_n^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} q_k^2}} \, d\mu_n((q_k)_{k \in n}) \right) d\mu_1(q_n)$$

adódik. Ha $q_n \in]-1, 1[$, akkor a

$$\sigma : \mathbf{B}_1(n) \to \mathbf{B}_{\sqrt{1-q_n^2}}(n); \quad \mathbf{z} \mapsto \sqrt{1 - q_n^2}.\mathbf{z}$$

leképezés C^1-diffeomorfizmus és $det(D\sigma) = \left(\sqrt{1-q_n^2}\right)^n$, ezért a helyettesítéses integrálás tétele alapján kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\mathbf{B}_{\sqrt{1-q_n^2}}(n)} \frac{1}{\sqrt{1-q_n^2-\sum_{k=0}^{n-1} q_k^2}}\, d\mu_n((q_k)_{k\in n}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{B}_1(n)} \frac{(1-q_n^2)^{n/2}}{\sqrt{1-q_n^2-\sum_{k=0}^{n-1}(1-q_n^2)z_k^2}}\, d\mu_n((z_k)_{k\in n}) =$$

$$= (1-q_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{\mathbf{B}_1(n)} \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{k=0}^{n-1} z_k^2}}\, d\mu_n((z_k)_{k\in n}) =: (1-q_n^2)^{\frac{n-1}{2}} s_n.$$

Ez azt jelenti, hogy fennáll az

$$s_{n+1} = s_n \int\limits_{]-1,1[} (1-q_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\mu_1(q_n)$$

egyenlőség. Ebben az integrálban helyettesítést hajtunk végre a $]-\pi/2,\pi/2[\to\,]-1,1[;\ \theta \mapsto \sin(\theta)$ C^1-diffeomorfizmussal. A gamma-függvény definíciója (X. fejezet, 3. pont, **2**. gyakorlat) szerint kapjuk, hogy

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \int\limits_{]-1,1[} (1-q_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\mu_1(q_n) = \int\limits_{]-\pi/2,\pi/2[} \cos^n(\theta)\, d\mu_1(\theta) = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Ebből következik, hogy $n > 1$ esetén

$$s_n = s_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{s_{k+1}}{s_k} = \pi \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}\right) = \pi\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\mu_{\mathbf{S}_r(n)}(\mathbf{S}_r(n)) = 2r^n \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

teljesül. Ebből természetesen speciális esetként visszakapjuk a középiskolai analízisből jól ismert $\mu_{\mathbf{S}_r(1)}(\mathbf{S}_r(1)) = 2\pi r$ és $\mu_{\mathbf{S}_r(2)}(\mathbf{S}_r(2)) = 4\pi r^2$ formulákat.)

7. Legyen E euklidészi tér, $m \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük a **2**. gyakorlatban értelmezett $(X_m^\pm, g)$ $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú Riemann-sokaságot $\mathbb{R}\times E$-ben. Ha F Banach-tér és $f : X_m^\pm \to F$ függvény, akkor $f \in \mathscr{L}_F^1(X_m^\pm, \mathscr{R}_{X_m^\pm}, \mu_{X_m^\pm})$ pontosan akkor teljesül, ha az

$$E \to F;\quad \mathbf{p} \mapsto \frac{f\left(\pm\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2+m^2}, \mathbf{p}\right)}{\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2+m^2}}$$

függvény μ_E-integrálható (ahol μ_E az E euklidészi mértéke), továbbá, ha $f \in \mathscr{L}_F^1(X_m^\pm, \mathscr{R}_{X_m^\pm}, \mu_{X_m^\pm})$, akkor

$$\int\limits_{X_m^\pm} f \, d\mu_{X_m^\pm} = m \int\limits_E \frac{f\left(\pm\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}, \mathbf{p}\right)}{\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2}} \, d\mu_E(\mathbf{p}).$$

8. Legyenek Ω_1 és Ω_2 nyílt halmazok az E euklidészi térben, F Banach-tér és $h : \Omega_1 \cap \Omega_2 \to F$ függvény. Jelölje h_1 (illetve h_2) a h nullával vett kiterjesztését $\Omega_1 \cap \Omega_2$-ről Ω_1-re (illetve Ω_2-re). Ekkor

$$h_1 \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1, \mathscr{R}_{\Omega_1}, \mu_{\Omega_1}) \Leftrightarrow h \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2}) \Leftrightarrow h_2 \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_2}, \mu_{\Omega_2}),$$

és ha $h \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2})$, akkor

$$\int\limits_{\Omega_1} h_1 \, d\mu_{\Omega_1} = \int\limits_{\Omega_1 \cap \Omega_2} h \, d\mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \int\limits_{\Omega_2} h_2 \, d\mu_{\Omega_2}$$

teljesül.

(*Útmutatás.* Legyen $n := dim(E)$ és $u : \mathbb{R}^n \to E$ tetszőleges lineáris bijekció. Minden $f : \mathbb{R}^n \to F$ függvényre jelölje f° az f függvény nullával vett kiterjesztését $\mathbb{R}^n$-re. Tudjuk, hogy $h_1 \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1, \mathscr{R}_{\Omega_1}, \mu_{\Omega_1})$ pontosan akkor teljesül, ha $(h_1 \circ u)^\circ \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, és világos, hogy $(h_1 \circ u)^\circ = (h \circ u)^\circ$, ezért $h_1 \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1, \mathscr{R}_{\Omega_1}, \mu_{\Omega_1})$ ekvivalens azzal, hogy $(h \circ u)^\circ \in \mathscr{L}_F^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mu_n)$, ami viszont éppen azt jelenti, hogy $h \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2})$. Ugyanakkor $h \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2})$ esetén

$$\int\limits_{\Omega_1 \cap \Omega_2} h \, d\mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \sqrt{det(u^* \circ u)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (h \circ u)^\circ \, d\mu_n =$$

$$= \sqrt{det(u^* \circ u)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (h_1 \circ u)^\circ \, d\mu_n = \int\limits_{\Omega_1} h_1 \, d\mu_{\Omega_1}.$$

Az iménti érvelésben a h_1-t h_2-vel felcserélve kapjuk, hogy $h_2 \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_2}, \mu_{\Omega_2})$ ekvivalens azzal, hogy $h \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2})$, továbbá, ha $h \in \mathscr{L}_F^1(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathscr{R}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2})$, akkor

$$\int\limits_{\Omega_1 \cap \Omega_2} h \, d\mu_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \int\limits_{\Omega_2} h_2 \, d\mu_{\Omega_2}$$

teljesül.)

3. Nyílt halmaz reguláris határa

Definíció. Az $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz *reguláris határpontjának* nevezünk minden olyan $\mathfrak{a} \in Fr(\Omega)$ pontot, amelynek létezik olyan V nyílt környezete E-ben és létezik olyan $h : V \to \mathbb{R}$ függvény, amely C^1-osztályú és

$$(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0, \quad [h < 0] = \Omega \cap V, \quad [h = 0] = Fr(\Omega) \cap V$$

teljesül. Az $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz *reguláris határának* nevezzük és $\partial\Omega$-val jelöljük az Ω halmaz reguláris határpontjainak halmazát. Azt mondjuk, hogy az Ω halmaz *reguláris határú*, ha $Fr(\Omega) = \partial\Omega$, vagyis az Ω minden határpontja reguláris határpont. Az $Fr(\Omega) \setminus \partial\Omega$ halmazt az Ω *irreguláris határának* nevezzük és $\partial_{irr}\Omega$-val jelöljük.

Ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$, akkor létezik a $\mathfrak{a}$ pontnak olyan V nyílt környezete E-ben és létezik olyan $h \in C^1(V;\mathbb{R})$, hogy *minden* $x \in V$ esetén $(Dh)(x) \neq 0$, valamint $[h < 0] = \Omega \cap V$ és $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap V$. Valóban, a definíció szerint van olyan $\tilde{V}$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak és létezik olyan $\tilde{h} \in C^1(\tilde{V};\mathbb{R})$, hogy $(D\tilde{h})(\mathfrak{a}) \neq 0$, valamint $[\tilde{h} < 0] = \Omega \cap \tilde{V}$ és $[\tilde{h} = 0] = Fr(\Omega) \cap \tilde{V}$. Ekkor a $D\tilde{h} : \tilde{V} \to E'$ deriváltfüggvény $\mathfrak{a}$ pontbeli folytonossága és $(D\tilde{h})(\mathfrak{a}) \neq 0$ miatt létezik $\mathfrak{a}$-nak olyan V nyílt környezete E-ben, hogy $V \subseteq \tilde{V}$ és minden $V \ni x$-re $(D\tilde{h})(x) \neq 0$. Ekkor a $h := \tilde{h}|_V$ függvényre $h \in C^1(V;\mathbb{R})$ teljesül és minden $x \in V$ esetén $(Dh)(x) = (D\tilde{h})(x) \neq 0$, valamint $[h < 0] = [\tilde{h} < 0] \cap V = (\Omega \cap \tilde{V}) \cap V = \Omega \cap V$ és $[h = 0] = [\tilde{h} = 0] \cap V = (Fr(\Omega) \cap \tilde{V}) \cap V = Fr(\Omega) \cap V$.

Állítás. Ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$, akkor $\mathfrak{a} \notin \overset{\circ}{\overline{\Omega}}$.

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$ és $\mathfrak{a} \in \overset{\circ}{\overline{\Omega}}$. Legyen U olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, hogy $U \subseteq \overline{\Omega}$, továbbá legyen V olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak és $h \in C^1(V;\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$ és $[h < 0] = \Omega \cap V$, valamint $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap V$. Ekkor $U \cap V \subseteq \overline{\Omega} \cap V = (\Omega \cap V) \cup (Fr(\Omega) \cap V) = [h \leq 0]$, és $U \cap V$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak, továbbá $h(\mathfrak{a}) = 0$. Ez azt jelenti, hogy h-nak lokális maximuma van $\mathfrak{a}$-ban, tehát $(Dh)(\mathfrak{a}) = 0$, ami ellentmond a $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$ feltételnek. ■

Következmény. Ha az $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz reguláris határú, akkor $\Omega = \overset{\circ}{\overline{\Omega}}$.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló, hogy ha $\mathfrak{a} \in \overset{\circ}{\overline{\Omega}} \subseteq \overline{\Omega}$, akkor $\mathfrak{a} \notin \partial\Omega = Fr(\Omega) = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, tehát $\mathfrak{a} \in \Omega$, így $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} \subseteq \Omega$. A fordított tartalmazás nyilvánvalóan teljesül. ■

Példák 1) Legyen $H \subseteq E$ *véges* halmaz. Ekkor $Fr(E \setminus H) = H$ és ha $dim(E) > 0$, akkor $\partial(E \setminus H) = \emptyset$, vagyis $E \setminus H$-nak egyáltalán nincs reguláris határpontja, hiszen $\overset{\circ}{\overline{E \setminus H}} = E$.

2) Legyen $u \in E^*$ nem nulla funkcionál és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor az $[u < c]$ *nyílt féltér* olyan nyílt halmaz E-ben, hogy $Fr([u < c]) = [u = c] = \partial[u < c]$. Valóban, az $h := u-c : E \to \mathbb{R}$ függvény C^∞-osztályú, és minden $x \in E$ esetén $(Dh)(x) = u \neq 0$, továbbá $[u < c] = [h < 0]$ és $Fr([u < c]) = [u = c] = [h = 0]$. Tehát minden $\mathfrak{a} \in Fr([u < c])$ esetén a $h \in C^\infty(E;\mathbb{R})$ függvény (az $\mathfrak{a}$-tól függetlenül) olyan, amelynek létezése maga után vonja, hogy az $\mathfrak{a}$ pont reguláris határpont.

3) Legyen $u \in E^*$ nem nulla funkcionál és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor az $E \setminus [u = c]$ halmaz nyílt és $Fr(E \setminus [u = c]) = [u = c]$, valamint $\partial(E \setminus [u = c]) = \emptyset$, vagyis $E \setminus [u = c]$-nek egyáltalán nincs reguláris határpontja, hiszen $\overset{\circ}{\overline{E \setminus [u = c]}} = E$.

4) Legyen E euklidészi tér, $\mathfrak{a} \in E$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $B_r(\mathfrak{a})$, vagyis az $\mathfrak{a}$ középpontú, r sugarú nyílt gömb reguláris határú nyílt halmaz E-ben, mert a $h : E \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \|x - \mathfrak{a}\|^2 - r^2$ függvény C^∞-osztályú, és minden $x \in Fr(B_r(\mathfrak{a})) = S_r(\mathfrak{a})$ esetén $(grad\ h)(x) = 2(x - \mathfrak{a}) \neq 0$ (így $(Dh)(x) \neq 0$) és $[h < 0] = B_r(\mathfrak{a})$, valamint $[h = 0] = S_r(\mathfrak{a}) = Fr(B_r(\mathfrak{a}))$.

Állítás. Ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor $\partial\Omega$ olyan nyílt halmaz $Fr(\Omega)$-ban, amely C^1-osztályú hiperfelület E-ben, továbbá $\partial_{irr}\Omega$ zárt halmaz E-ben.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$, továbbá V olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak és $h \in C^1(V;\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy minden $V \ni x$-re $(Dh)(x) \neq 0$ és $[h < 0] = \Omega \cap V$, valamint $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap V$. Ekkor az $Fr(\Omega) \cap V$ halmaz minden eleme nyilvánvalóan reguláris határpontja Ω-nak, így $\partial\Omega$ nyílt halmaz $Fr(\Omega)$-ban. Ugyanakkor minden $x \in V$ esetén a $(Dh)(x) \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ funkcionál *szürjektív*, így a $[h = 0]$ halmaz C^1-osztályú hiperfelület E-ben, tehát létezik a $[h = 0]$ halmaznak olyan $dim(E) - 1$ dimenziós C^1-osztályú Φ paraméterezése, hogy $\mathfrak{a} \in Im(\Phi)$ és $Im(\Phi)$ nyílt részhalmaza a $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap V = (\partial\Omega) \cap V$ halmaznak. Ekkor $Im(\Phi)$ nyílt részhalmaza a $\partial\Omega$ reguláris határnak is, tehát $\partial\Omega$ C^1-osztályú hiperfelület E-ben.

A definíció szerint $\partial_{irr}\Omega = Fr(\Omega) \setminus \partial\Omega$, tehát $\partial_{irr}\Omega$ zárt halmaz $Fr(\Omega)$-ban, és $Fr(\Omega)$ zárt halmaz E-ben, ezért $\partial_{irr}\Omega$ zárt E-ben. ■

Állítás. Legyen E euklidészi tér és $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz. Egyértelműen létezik olyan $\mathbf{n}_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to E$ függvény, hogy minden $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$ pontra, és az $\mathfrak{a}$ minden E-beli V nyílt környezetére, és minden $h \in C^1(V;\mathbb{R})$ függvényre: ha $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$, $[h < 0] = \Omega \cap V$ és $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap V$, akkor

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega}(\mathfrak{a}) = \frac{(grad\ h)(\mathfrak{a})}{\|(grad\ h)(\mathfrak{a})\|}.$$

Ez az $\mathbf{n}_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to E$ függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$ rögzített, és vegyünk az $\mathfrak{a}$-nak olyan V, V' nyílt környezeteit E-ben, és olyan $h \in C^1(V;\mathbb{R})$, $h' \in C^1(V';\mathbb{R})$ függvényeket, hogy $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$, $[h < 0] = \Omega \cap V$, $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap V$, valamint $(Dh')(\mathfrak{a}) \neq 0$, $[h' < 0] = \Omega \cap V'$, $[h' = 0] = Fr(\Omega) \cap V'$. Képezzük az

$$\mathbf{n} := \frac{(grad\ h)(\mathfrak{a})}{\|(grad\ h)(\mathfrak{a})\|}, \quad \mathbf{n}' := \frac{(grad\ h')(\mathfrak{a})}{\|(grad\ h')(\mathfrak{a})\|}$$

vektorokat. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$.

A definíció alapján $\mathbf{n} \perp Ker((Dh)(\mathfrak{a}))$ és $\mathbf{n}' \perp Ker((Dh')(\mathfrak{a}))$. Ugyanakkor tudjuk, hogy $Ker((Dh)(\mathfrak{a})) = T_{\mathfrak{a}}(\partial\Omega) = Ker((Dh')(\mathfrak{a}))$, és $T_{\mathfrak{a}}(\partial\Omega)$ az E-ben $dim(E)-1$ dimenziós lineáris altér, ezért van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbf{n}' = \lambda\mathbf{n}$. Ugyancsak a definíció alapján $\|\mathbf{n}\| = 1 = \|\mathbf{n}'\|$, ezért $\lambda \in \{-1, 1\}$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ egyenlőség bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $\lambda = (\mathbf{n}'|\mathbf{n}) \geq 0$.

Értelmezzük a következő függvényt:

$$\varphi : V \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{h(x) - h(\mathfrak{a}) - ((grad\ h)(\mathfrak{a})|x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}.$$

A h függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $e \in E$ esetén (a gradiens definíciója alapján) $((Dh)(\mathfrak{a}))(e) = ((grad\ h)(\mathfrak{a})|e)$, ezért a φ függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$.

Vegyünk most olyan $r \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $B_r(\mathfrak{a}) \subseteq V \cap V'$. Bebizonyítjuk, hogy minden $\delta \in]0, r[$ valós számhoz van olyan $t \in]-\delta, 0[$ valós szám, hogy $h(\mathfrak{a} + t\mathbf{n}) < 0$. Indirekt bizonyítunk, tehát tegyük fel olyan $\delta \in]0, r[$ valós szám létezését, hogy minden $t \in]-\delta, 0[$ valós számra $h(\mathfrak{a} + t\mathbf{n}) \geq 0$. Ekkor bármely $t \in]-\delta, 0[$ valós számra

$$0 \leq h(\mathfrak{a} + t\mathbf{n}) = h(\mathfrak{a}) + ((grad\ h)(\mathfrak{a})|t\mathbf{n}) + |t|\varphi(\mathfrak{a} + t\mathbf{n}),$$

amiből az $\mathbf{n}$ definíciója, $h(\mathfrak{a}) = 0$ és $t < 0$ alapján

$$0 \leq t\|(grad\ h)(\mathfrak{a})\| - t\varphi(\mathfrak{a} + t\mathbf{n})$$

következik, amit t-vel osztva ($t < 0$) kapjuk, hogy $\|(grad\ h)(\mathfrak{a})\| \leq \varphi(\mathfrak{a} + t\mathbf{n})$. Ez minden $t \in]-\delta, 0[$ valós számra igaz, ezért a $\lim_{\mathfrak{a}} \varphi = 0$ egyenlőség alapján $\|(grad\ h)(\mathfrak{a})\| \leq 0$ adódik, azaz $(grad\ h)(\mathfrak{a}) = 0$, holott $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$, ami ellentmondás.

Tehát minden $\delta \in]0, r[$ valós számhoz van olyan $t \in]-\delta, 0[$ valós szám, hogy $h(\mathfrak{a} + t\mathbf{n}) < 0$, így létezik olyan $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $t_k \in]-\delta, 0[$ és $h(\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n}) < 0$. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n} \in [h < 0] = \Omega \cap V$, azaz $\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n} \in \Omega$. Ugyanakkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n} \in B_r(\mathfrak{a}) \subseteq V'$, így $\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n} \in \Omega \cap V' = [h' < 0]$, vagyis $h'(\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n}) < 0$.

Értelmezzük most a következő függvényt:

$$\varphi' : V' \setminus \{\mathfrak{a}\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{h'(x) - h'(\mathfrak{a}) - ((grad\ h')(\mathfrak{a})|x - \mathfrak{a})}{\|x - \mathfrak{a}\|}.$$

A h' függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban, és minden $e \in E$ esetén (a gradiens definíciója alapján) $((Dh')(\mathfrak{a}))(e) = ((grad\ h')(\mathfrak{a})|e)$, ezért a φ' függvénynek létezik határértéke $\mathfrak{a}$-ban és $\lim_{\mathfrak{a}} \varphi' = 0$.

Tehát ha $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$0 > h'(\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n}) = h'(\mathfrak{a}) + ((grad\ h')(\mathfrak{a})|t_k\mathbf{n}) + |t_k|\varphi'(\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n}),$$

tehát $h'(\mathfrak{a}) = 0$ és az $\mathbf{n}'$ definíciója alapján

$$0 > t_k\|(grad\ h')(\mathfrak{a})\|(\mathbf{n}|\mathbf{n}') - t_k\varphi'(\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n}).$$

Ebből t_k-val osztva ($t_k < 0$) kapjuk, hogy $\|(grad\ h')(\mathfrak{a})\|(\mathbf{n}'|\mathbf{n}) \geq \varphi'(\mathfrak{a} + t_k\mathbf{n})$. Innen $k \to \infty$ esetén, $\lim\limits_{\mathfrak{a}} \varphi' = 0$ alapján $\|(grad\ h')(\mathfrak{a})\|(\mathbf{n}'|\mathbf{n}) \geq 0$ adódik, tehát $(\mathbf{n}'|\mathbf{n}) \geq 0$, mivel $\|(grad\ h')(\mathfrak{a})\| > 0$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$.

Tehát jól értelmezett az az $\mathbf{n}_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to E$ függvény, amely minden $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$ ponthoz az

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega}(\mathfrak{a}) := \frac{(grad\ h)(\mathfrak{a})}{\|(grad\ h)(\mathfrak{a})\|}$$

értéket rendeli, ahol $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ tetszőleges olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre $\mathfrak{a} \in Dom(h)$, $(Dh)(\mathfrak{a}) \neq 0$, $[h < 0] = \Omega \cap Dom(h)$ és $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap Dom(h)$.

Az $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ függvény folytonos, mert ha $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$, akkor van olyan $h : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre $\mathfrak{a} \in Dom(h)$, és *minden* $x \in Dom(h)$ esetén $(Dh)(x) \neq 0$, valamint $[h < 0] = \Omega \cap Dom(h)$ és $[h = 0] = Fr(\Omega) \cap Dom(h)$; ekkor *minden* $x \in Dom(h)$ pontra

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega}(x) = \frac{(grad\ h)(x)}{\|(grad\ h)(x)\|},$$

vagyis $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ a $(\partial\Omega) \cap Dom(h)$ halmazon egyenlő a $\dfrac{grad\ h}{\|grad\ h\|}$ függvénnyel, és $(\partial\Omega) \cap Dom(h)$ környezete a $\mathfrak{a}$ pontnak $\partial\Omega$-ban, és $\dfrac{grad\ h}{\|grad\ h\|} : Dom(h) \to E$ folytonos függvény. ■

Definíció. Legyen E euklidészi tér és $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz. Az előző állításban értelmezett

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to E$$

függvényt a $\partial\Omega$ hiperfelület *kimenő normálvektor-mezőjének* nevezzük, míg a $-\mathbf{n}_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to E$ függvényt a $\partial\Omega$ hiperfelület *bemenő normálvektor-mezőjének* nevezzük. Ha $f : E \rightarrowtail E$ olyan függvény, hogy $\partial\Omega \subseteq Dom(f)$, akkor az

$$(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) : \partial\Omega \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (f(x)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}(x))$$

leképezést az f vektormező $\partial\Omega$ hiperfelületen *kimenő fluxus-sűrűségének* nevezzük. Ha $f : E \rightarrowtail E$ olyan függvény, hogy $\partial\Omega \subseteq Dom(f)$ és a $(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})$ függvény $\mu_{\partial\Omega}$-integrálható, akkor az

$$\int\limits_{\partial\Omega} (f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})\ d\mu_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}$$

integrál-értéket az f vektormező $\partial\Omega$ hiperfelületen *kimenő fluxusának* nevezzük.

4. A Gauss-Osztrogradszkij tétel

Legyen E euklidészi tér és $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz. Ekkor tekinthetjük

– a μ_Ω mértéket, vagyis az Ω feletti euklidészi mértéket, ami nem más, mint az E skalárszorzása által meghatározott Riemann-metrika szerinti felületi mérték az Ω $dim(E)$-dimenziós, C^∞-osztályú Riemann-sokaságon;

– a $\partial\Omega$ halmazt, vagyis az Ω halmaz reguláris határát, ami C^1-osztályú hiperfelület E-ben, és az E skalárszorzása által meghatározott Riemann-metrikával ellátva $dim(E) - 1$ dimenziós, C^1-osztályú Riemann-sokaság;

– a $\mu_{\partial\Omega}$ mértéket, vagyis a $\partial\Omega$ Riemann-sokaság felületi mértékét;

– az $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ függvényt, vagyis a $\partial\Omega$ halmazon kimenő normálvektor-mezőt.

Legyen $f : E \rightarrowtail E$ olyan függvény (vagyis vektormező E felett), hogy $\Omega \cup \partial\Omega \subseteq Dom(f)$ és az $f|_\Omega$ függvény differenciálható. Ekkor tekinthetjük

– a $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$; $x \mapsto Tr((Df)(x))$ divergencia-függvényt;

– az $f|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to E$ leszűkített függvényt;

– az $(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ kimenő fluxus-sűrűséget.

Azt kérdezzük, hogy a $div(f)$ függvény μ_Ω (térfogati) mérték szerinti integrálhatósága milyen kapcsolatban van az $(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})$ függvény $\mu_{\partial\Omega}$ felületi mérték szerinti integrálhatóságával; és ha mindkét függvény integrálható a megfelelő mérték szerint, akkor teljesül-e az

$$\int\limits_\Omega div(f)\, d\mu_\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} (f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})\, d\mu_{\partial\Omega}$$

egyenlőség? *Gauss-Osztrogradszkij tételnek* nevezünk minden olyan állítást, amely választ ad ezekre a kérdésekre.

Tétel. (*A Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformája.*) Legyen E euklidészi tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, és $f : \overline{\Omega} \to E$ olyan kompakt tartójú folytonos függvény, hogy $f|_\Omega : \Omega \to E$ folytonosan differenciálható függvény. Ha a $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény μ_Ω-integrálható és $\partial_{irr}\Omega \cap supp(f) = \emptyset$, akkor az $(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ függvény $\mu_{\partial\Omega}$-integrálható és

$$\int\limits_\Omega div(f)\, d\mu_\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} (f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})\, d\mu_{\partial\Omega}$$

teljesül.

Bizonyítás. A bizonyítás során az $n := dim(E)$ jelölést alkalmazzuk, továbbá $(\cdot|\cdot)_n$ jelöli az euklidészi skalárszorzást $\mathbb{R}^n$ felett.

(I) Először feltesszük, hogy $supp(f) \subseteq \Omega$. Világos, hogy ekkor $f = 0$ a $\partial\Omega$ halmazon, ezért

$$\int\limits_{\partial\Omega} (f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})\, d\mu_{\partial\Omega} = 0.$$

Ugyanakkor az $\Omega \setminus supp(f)$ halmaz nyílt E-ben, és $f = 0$ ezen a halmazon, ezért $\Omega \setminus supp(f) \subseteq [div(f) = 0]$, így $supp(div(f)) \subseteq supp(f) \subseteq \Omega$. Tehát $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$

kompakt tartójú folytonos függvény, így szükségképpen $div(f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$, vagyis ekkor a $div(f)$ függvény μ_Ω-integrálhatóságának feltétele *felesleges.* Legyen $(e_i)_{i\in n}$ ortonormált bázis az E euklidészi térben, és legyen $u : \mathbb{R}^n \to E$ az a lineáris operátor, amelyre teljesül az, hogy minden $i \in n$ esetén $u(\mathbf{e}_i) = e_i$, ahol $(\mathbf{e}_i)_{i\in n}$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor u megtartja az $\mathbb{R}^n$ és az E feletti skalárszorzást, így

$$\int\limits_{\Omega} div(f)\ d\mu_\Omega = \int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} (div(f)\circ u)\ d\mu_n = \int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} Tr((Df)(u(p)))\ d\mu_n(p) =$$

$$= \sum_{i\in n} \int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} (((Df)(u(p)))(e_i)|e_i)\ d\mu_n(p) =$$

$$= \sum_{i\in n} \int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} (((Df)(u(p)))(u(\mathbf{e}_i))|u(\mathbf{e}_i))\ d\mu_n(p) =$$

$$= \sum_{i\in n} \int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} \big(((D(u^{-1}\circ f\circ u))(p))(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_i\big)\ d\mu_n(p).$$

Tehát ha $i \in n$ esetén f_i jelöli az $u^{-1}\circ f\circ u : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ függvény i-edik komponensét, akkor

$$\int\limits_{\Omega} div(f)\ d\mu_\Omega = \sum_{i\in n} \int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} (\partial_i f_i)(p)\ d\mu_n(p).$$

Ezért elég volna azt igazolni, hogy minden $i \in n$ esetén

$$\int\limits_{\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle} (\partial_i f_i)(p)\ d\mu_n(p) = 0.$$

Ezáltal a problémát a következő feladat megoldására redukáltuk: igaz-e, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra, és $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú C^1-osztályú függvényre

$$\int\limits_{\Omega} (\partial_i\varphi)\ d\mu_n = 0$$

teljesül minden $n \ni i$-re? Erre a kérdésre n-szerinti teljes indukcióval könnyen kaphatunk igenlő választ, ha felhasználjuk a Newton-Leibniz tételt és a Lebesgue-Fubini tételt.

(II) Most feltesszük, hogy $\mathfrak{a} \in \partial\Omega$ és $V_\mathfrak{a}$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $supp(f) \subseteq V_\mathfrak{a}$, valamint $(h_\mathfrak{a}, U_\mathfrak{a}, \delta_\mathfrak{a}, \Phi_\mathfrak{a})$ olyan négyes, amelyre teljesülnek a következők:

a) $h_\mathfrak{a} : V_\mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és minden $x \in V_\mathfrak{a}$ esetén $(Dh_\mathfrak{a})(x) \neq 0$, valamint

$$[h_\mathfrak{a} < 0] = \Omega \cap V_\mathfrak{a}, \quad [h_\mathfrak{a} = 0] = Fr(\Omega) \cap V_\mathfrak{a};$$

b) $U_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete a 0-nak $\mathbb{R}^{n-1}$-ben;

c) $\delta_{\mathfrak{a}} \in \mathbb{R}^+$;

d) $\Phi_{\mathfrak{a}} : U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[\to V_{\mathfrak{a}}$ olyan C^1-diffeomorfizmus, hogy $\Phi_{\mathfrak{a}}(0,0) = \mathfrak{a}$, és minden $w \in]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[$ esetén a $\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w)$ függvény paraméterezése a $[h_{\mathfrak{a}} = w]$ C^1-osztályú hiperfelületnek, és $Im(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w)) = [h_{\mathfrak{a}} = w] \cap V_{\mathfrak{a}}$, és minden $U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[\ni (p, w)$-re

$$(mod_{g_w}(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w)))(p) = \|(grad\ h_{\mathfrak{a}})(\Phi_{\mathfrak{a}}(p, w))\| (mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}))(p, w),$$

ahol g az E skalárszorzása által meghatározott $V_{\mathfrak{a}}$ feletti Riemann-metrika, és $w \in]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[$ esetén g_w az E skalárszorzása által meghatározott Riemann-metrika a $[h_{\mathfrak{a}} = w]$ C^1-osztályú hiperfelületen.

Rögzítsünk olyan $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, hogy $\psi \geq 0$, $supp(\psi) \subseteq [0, 1]$ és $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi\ d\mu_1 = 1$. Értelmezzük továbbá a

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \int\limits_0^t \psi\ d\mu_1$$

függvényt. A Newton-Leibniz tétel alapján a Ψ függvény C^1-osztályú, továbbá nyilvánvaló, hogy $t \in \mathbb{R}$ és $t \leq 0$ esetén $\Psi(t) = 0$, és $t \in [0, 1]$ esetén $0 \leq \Psi(t) \leq 1$, valamint $t \geq 1$ esetén $\Psi(t) = 1$. Rögzítsünk tetszőleges $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot $\mathbb{R}^+$-ban. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra a

$$\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right) : V_{\mathfrak{a}} \to \mathbb{R}$$

függvény C^1-osztályú, továbbá, ha $\chi_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}} : V_{\mathfrak{a}} \to \mathbb{R}$ jelöli az $\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}$ halmaz karakterisztikus függvényét $V_{\mathfrak{a}}$-ban, akkor teljesülnek a következők:

– ha $x \in \Omega \cap V_{\mathfrak{a}}$, akkor $h_{\mathfrak{a}}(x) < 0$, ezért $\lim\limits_{k \to \infty} \Psi\left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}}(x) - \varepsilon_k\right) = 1 = \chi_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}(x)$;

– ha $x \in Fr(\Omega) \cap V_{\mathfrak{a}}$, akkor $h_{\mathfrak{a}}(x) = 0$, ezért $\lim\limits_{k \to \infty} \Psi\left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}}(x) - \varepsilon_k\right) = \Psi(0) = 0 = \chi_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}(x)$;

– ha $x \in V_{\mathfrak{a}} \setminus \overline{\Omega}$, akkor $h_{\mathfrak{a}}(x) > 0$, ezért $\lim\limits_{k \to \infty} \Psi\left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}}(x) - \varepsilon_k\right) = 0 = \chi_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}(x)$.

Ez azt jelenti, hogy a $V_{\mathfrak{a}}$ halmazon fennáll a

$$\lim_{k \to \infty} \Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right) = \chi_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}$$

függvény-egyenlőség.

Az $(\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}) \setminus supp(f)$ halmaz nyílt E-ben, és $f = 0$ ezen a halmazon, ezért $(\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}) \setminus supp(f) \subseteq [div(f) = 0]$, így $[div(f) \neq 0] \subseteq \Omega \cap supp(f) \subseteq \Omega \cap V_{\mathfrak{a}}$. Ez azt jelenti, hogy a $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény egyenlő a $(div(f))\,|_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}$ függvény 0-val vett kiterjesztésével Ω-ra. Ugyanakkor a hipotézis szerint $div(f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$, így a 2. pont **8.** gyakorlatának eredményét alkalmazhatjuk az $\Omega_1 := \Omega$, $\Omega_2 := V_{\mathfrak{a}}$ nyílt halmazokra, és a $(div(f))\,|_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}$ függvény 0-val vett kiterjesztésére $V_{\mathfrak{a}}$-ra, amit $((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ$ fog jelölni. Tehát azt kapjuk, hogy $((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ \in \mathscr{L}^1_\mathbb{R}(V_\mathfrak{a}, \mathscr{R}_{V_\mathfrak{a}}, \mu_{V_\mathfrak{a}})$ és

$$\int_\Omega div(f)\ d\mu_\Omega = \int_{V_\mathfrak{a}} ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\ d\mu_{V_\mathfrak{a}} = \int_{V_\mathfrak{a}} \chi_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}} ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\ d\mu_{V_\mathfrak{a}} =$$

$$= \int_{V_\mathfrak{a}} \left(\lim_{k\to\infty} \left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right)\right) ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\ d\mu_{V_\mathfrak{a}}.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $0 \leq \Psi \leq 1$ miatt

$$\left|\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\right| \leq \left|((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\right|,$$

ugyanakkor $((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ \in \mathscr{L}^1_\mathbb{R}(V_\mathfrak{a}, \mathscr{R}_{V_\mathfrak{a}}, \mu_{V_\mathfrak{a}})$, ezért

$$\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ \in \mathscr{L}^1_\mathbb{R}(V_\mathfrak{a}, \mathscr{R}_{V_\mathfrak{a}}, \mu_{V_\mathfrak{a}})$$

és a Lebesgue-tétel alapján

$$\int_{V_\mathfrak{a}} \left(\lim_{k\to\infty} \left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right)\right) ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\ d\mu_{V_\mathfrak{a}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{V_\mathfrak{a}} \left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ\ d\mu_{V_\mathfrak{a}}.$$

Legyen most $k \in \mathbb{N}$ rögzítve. Az $\Omega \cap V_\mathfrak{a}$ halmazon nyilvánvalóan fennállnak a

$$\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) ((div(f))|_{\Omega\cap V_\mathfrak{a}})^\circ = \left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) div(f) =$$

$$= div\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right) - \left(grad\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) \,\middle|\, f\right) =$$

$$= div\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right) + \varepsilon_k^{-1}\left((D\Psi) \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) (grad\ h_\mathfrak{a} \mid f) =$$

$$= div\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right) + \varepsilon_k^{-1}\left(\psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) (grad\ h_\mathfrak{a} \mid f)$$

egyenlőségek.

Jelölje $\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^\circ$ a $\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f : \overline{\Omega} \cap V_\mathfrak{a} \to E$ függvény 0-val vett kiterjesztését $V_\mathfrak{a}$-ra. Állítjuk, hogy a $\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^\circ$ függvény folytonosan differenciálható, továbbá ez a függvény kompakt tartójú. Legyen ugyanis $x \in [\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^\circ \neq 0]$. Ekkor $x \in \overline{\Omega} \cap V_\mathfrak{a}$ olyan pont, hogy $x \in [f \neq 0] \subseteq supp(f) \subseteq V_\mathfrak{a}$, és $\Psi\left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a}(x) - \varepsilon_k\right) \neq 0$, tehát $x \in [h_\mathfrak{a} < -\varepsilon_k^2] \subseteq [h_\mathfrak{a} \leq -\varepsilon_k^2]$. De a $[h_\mathfrak{a} \leq -\varepsilon_k^2]$ halmaz zárt a $V_\mathfrak{a}$ nyílt halmazban, ezért van olyan $H \subseteq E$ zárt halmaz, hogy $[h_\mathfrak{a} \leq -\varepsilon_k^2] = H \cap V_\mathfrak{a}$. Tehát $x \in (H \cap V_\mathfrak{a}) \cap supp(f) = H \cap supp(f)$, ugyanakkor $H \cap supp(f)$ kompakt halmaz E-ben. Ezért $supp\left(\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^\circ\right)$ kompakt halmaz és része $H \cap supp(f)$-nek. Világos, hogy $\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_\mathfrak{a} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^\circ = 0$ a $V_\mathfrak{a} \setminus (H \cap supp(f))$ nyílt halmazon, ezért ez a függvény itt folytonosan differenciálható. Ugyanakkor

$H \cap supp(f) \subseteq H \cap V_{\mathfrak{a}} \subseteq [h_{\mathfrak{a}} \leq -\varepsilon_k^2] \subseteq [h_{\mathfrak{a}} < 0] = \Omega \cap V_{\mathfrak{a}}$, és az $\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}$ halmazon fennáll a $\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^{\circ} = \left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) f$ egyenlőség, továbbá itt a jobb oldalon álló függvény folytonosan differenciálható $\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}$-n. A folytonos differenciálhatóság lokalitása alapján a $\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^{\circ} : V_{\mathfrak{a}} \to E$ függvény folytonosan differenciálható. Ezért az (I) állításból következik, hogy $div\left(\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^{\circ}\right) : V_{\mathfrak{a}} \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonosan differenciálható függvény és

$$\int_{V_{\mathfrak{a}}} div\left(\left(\left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) f\right)^{\circ}\right) \, d\mu_{V_{\mathfrak{a}}} = 0.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\int_{V_{\mathfrak{a}}} \left(\Psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) \left((div(f))\,|_{\Omega \cap V_{\mathfrak{a}}}\right)^{\circ} \, d\mu_{V_{\mathfrak{a}}} =$$

$$= \varepsilon_k^{-1} \int_{V_{\mathfrak{a}}} \left(\psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) \left(grad\ h_{\mathfrak{a}} \mid f_{\mathfrak{a}}\right) \, d\mu_{V_{\mathfrak{a}}},$$

ahol $f_{\mathfrak{a}}$ jelöli az $f|_{\overline{\Omega} \cap V_{\mathfrak{a}}} : \overline{\Omega} \cap V_{\mathfrak{a}} \to E$ függvény 0-val vett kiterjesztését $V_{\mathfrak{a}}$-ra. Most felhasználjuk azt, hogy a $\Phi_{\mathfrak{a}} : U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[\to V_{\mathfrak{a}}$ függvény paraméterezése a $V_{\mathfrak{a}}$ nyílt, n-dimenziós, C^1-osztályú részsokaságnak, ezért

$$\int_{V_{\mathfrak{a}}} \left(\psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right)\right) \left(grad\ h_{\mathfrak{a}} \mid f_{\mathfrak{a}}\right) \, d\mu_{V_{\mathfrak{a}}} =$$

$$= \int_{U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[} \left(\psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}\right) \left(\left(grad\ h_{\mathfrak{a}} \mid f_{\mathfrak{a}}\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}\right) mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}) d\left(\mu_{n-1} \otimes \mu_1\right).$$

Kihasználva azt, hogy $(p, w) \in U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[$ esetén $h_{\mathfrak{a}}(\Phi_{\mathfrak{a}}(p, w)) = w$, továbbá

$$\left(mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}})\right)(p, w) = \frac{\left(mod_{g_w}(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w))\right)(p)}{\|(grad\ h_{\mathfrak{a}})(\Phi_{\mathfrak{a}})(p, w)\|},$$

kapjuk, hogy

$$\int_{U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[} \left(\psi \circ \left(-\varepsilon_k^{-1} h_{\mathfrak{a}} - \varepsilon_k\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}\right) \left(\left(grad\ h_{\mathfrak{a}} \mid f_{\mathfrak{a}}\right) \circ \Phi_{\mathfrak{a}}\right) mod_g(\Phi_{\mathfrak{a}}) \ d\left(\mu_{n-1} \otimes \mu_1\right) =$$

$$= \int_{U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[} \psi(-\varepsilon_k^{-1} w - \varepsilon_k) \frac{\left(grad\ h_{\mathfrak{a}} | f_{\mathfrak{a}}\right)\left(\Phi_{\mathfrak{a}}(p, w)\right)}{\|(grad\ h_{\mathfrak{a}})(\Phi_{\mathfrak{a}}(p, w))\|} \left(mod_{g_w}(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot, w))\right)(p) \ dp \ dw.$$

Ebben az integrálban helyettesítést hajtunk végre a

$$\sigma : U_{\mathfrak{a}} \times \left]-\varepsilon_k - \frac{\delta_{\mathfrak{a}}}{\varepsilon_k}, -\varepsilon_k + \frac{\delta_{\mathfrak{a}}}{\varepsilon_k}\right[\to U_{\mathfrak{a}} \times]-\delta_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}[; \quad (p, t) \mapsto (p, -\varepsilon_k t - \varepsilon_k^2)$$

C^1-diffeomorfizmussal, amelyre nyilvánvalóan teljesül az, hogy minden $(p,t) \in U_\mathfrak{a} \times \left]-\varepsilon_k - \dfrac{\delta_\mathfrak{a}}{\varepsilon_k}, -\varepsilon_k + \dfrac{\delta_\mathfrak{a}}{\varepsilon_k}\right[$ esetén $|det(D\sigma)|(p,t) = \varepsilon_k$. Azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{U_\mathfrak{a}\times]-\delta_\mathfrak{a},\delta_\mathfrak{a}[} \psi(-\varepsilon_k^{-1}w - \varepsilon_k) \frac{(grad\ h_\mathfrak{a}|f_\mathfrak{a})\,(\Phi_\mathfrak{a}(p,w))}{\|(grad\ h_\mathfrak{a})(\Phi_\mathfrak{a}(p,w))\|}\,(mod_{g_w}(\Phi_\mathfrak{a}(\cdot,w)))\,(p)\ dp\ dw =$$

$$= \varepsilon_k \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} \psi(t)\varphi(p, -\varepsilon_k t - \varepsilon_k^2)\ dp\ dt,$$

ahol $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $(p,w) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(p,w) := \frac{(grad\ h_\mathfrak{a}|f_\mathfrak{a})\,(\Phi_\mathfrak{a}(p,w))}{\|(grad\ h_\mathfrak{a})(\Phi_\mathfrak{a}(p,w))\|}\,(mod_{g_w}(\Phi_\mathfrak{a}(\cdot,w)))\,(p),$$

ha $(p,w) \in U_\mathfrak{a}\times]-\delta_\mathfrak{a},\delta_\mathfrak{a}[$, és $\varphi(p,w) := 0$ egyébként. Tehát eljutottunk oda, hogy

$$\int\limits_\Omega div(f)\ d\mu_\Omega = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} \psi(t)\varphi(p, -\varepsilon_k t - \varepsilon_k^2)\ dp\ dt.$$

Nyilvánvaló, hogy a φ függvény kompakt tartójú és $supp(\varphi) \subseteq U_\mathfrak{a}\times]-\delta_\mathfrak{a},\delta_\mathfrak{a}[$, mert ha $K \subseteq V_\mathfrak{a}$ olyan kompakt halmaz E-ben, hogy $[f_\mathfrak{a} \neq 0] \subseteq K$, akkor $[\varphi \neq 0] \subseteq \overset{-1}{\Phi}_\mathfrak{a}\langle K\rangle$. Továbbá φ folytonos is, az $U_\mathfrak{a}\times]-\delta_\mathfrak{a},\delta_\mathfrak{a}[$ nyílt halmazon nyilvánvalóan folytonos, hiszen ezen folytonos függvények kompozíciójával egyenlő, továbbá φ az $(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}) \setminus supp(\varphi)$ halmazon is folytonos, mert ez tartalmazza az $(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}) \setminus (U_\mathfrak{a}\times]-\delta_\mathfrak{a},\delta_\mathfrak{a}[)$ halmazt, és ez utóbbi halmazon $\varphi = 0$. Ezért minden $(p,t) \in U_\mathfrak{a} \times \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(p, -\varepsilon_k t - \varepsilon_k^2) = \frac{(grad\ h_\mathfrak{a} \mid f_\mathfrak{a})\,(\Phi_\mathfrak{a}(p,0))}{\|(grad\ h_\mathfrak{a})(\Phi_\mathfrak{a}(p,0))\|}\,(mod_{g_0}(\Phi_\mathfrak{a}(\cdot,0)))\,(p),$$

és természetesen $(p,t) \in (\mathbb{R}^{n-1} \setminus U_\mathfrak{a}) \times \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(p, -\varepsilon_k t - \varepsilon_k^2) = 0$. A $\Phi_\mathfrak{a}(\cdot,0) : U_\mathfrak{a} \to \partial\Omega$ függvény paraméterezése a $\partial\Omega$ C^1-osztályú hiperfelületnek, továbbá a kimenő normálvektor-mező értelmezése alapján minden $U_\mathfrak{a} \ni p$-re

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega}(\Phi_\mathfrak{a}(p,0)) = \frac{(grad\ h_\mathfrak{a})(\Phi_\mathfrak{a}(p,0))}{\|(grad\ h_\mathfrak{a})(\Phi_\mathfrak{a}(p,0))\|},$$

tehát minden $(p,t) \in U_\mathfrak{a} \times \mathbb{R}$ párra

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(p, -\varepsilon_k t - \varepsilon_k^2) = (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid f)\,(\Phi_\mathfrak{a}(p,0))\left(mod_{g_{\partial\Omega}}(\Phi_\mathfrak{a}(\cdot,0))\right)(p),$$

ahol $g_{\partial\Omega}$ jelöli az E skalárszorzása által meghatározott Riemann-metrikát $\partial\Omega$ felett. Ebből a Lebesgue-Fubini tétel alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\int\limits_\Omega div(f)\ d\mu_\Omega = \int\limits_{U_\mathfrak{a}\times\mathbb{R}} \psi(t)\,(\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid f)\,(\Phi_\mathfrak{a}(p,0))\left(mod_{g_{\partial\Omega}}(\Phi_\mathfrak{a}(\cdot,0))\right)(p)\ dp\ dt =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt \right) \left(\int_{U_{\mathfrak{a}}} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f) (\Phi_{\mathfrak{a}}(p,0))(mod_{g_{\partial\Omega}}(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,0)))(p)dp \right) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\, d\mu_{\partial\Omega},$$

hiszen $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\ dt = 1$ és $[(\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid f) \neq 0] \subseteq (\partial\Omega) \cap V_{\mathfrak{a}} = Im(\Phi_{\mathfrak{a}}(\cdot,0))$.

(III) Áttérünk az általános eset bizonyítására. Ha $\mathfrak{a} \in \Omega \cap supp(f)$, akkor van olyan $V_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $V_{\mathfrak{a}} \subseteq \Omega$. Ha $\mathfrak{a} \in supp(f) \setminus \Omega$, akkor $(\partial_{irr}\Omega) \cap supp(f) = \emptyset$ miatt $\mathfrak{a} \in (\partial\Omega) \cap supp(f)$, ezért van olyan $V_{\mathfrak{a}}$ nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, amelyhez létezik olyan $(h_{\mathfrak{a}}, U_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}, \Phi_{\mathfrak{a}})$ négyes, amelyre teljesülnek a bizonyítás (II) részének elején megfogalmazott a), b), c) és d) állítások. Ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(V_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a} \in supp(f)}$ rendszert, hogy

– ha $\mathfrak{a} \in \Omega \cap supp(f)$, akkor $V_{\mathfrak{a}}$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy $V_{\mathfrak{a}} \subseteq \Omega$;

– ha $\mathfrak{a} \in supp(f) \setminus \Omega$, akkor $V_{\mathfrak{a}}$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy létezik olyan $(h_{\mathfrak{a}}, U_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}, \Phi_{\mathfrak{a}})$ négyes, amelyre teljesülnek a bizonyítás (II) részének elején megfogalmazott a), b), c) és d) állítások.

A $supp(f)$ halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $A \subseteq supp(f)$ véges halmaz, hogy $supp(f) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in A} V_{\mathfrak{a}}$. Az E (n-dimenziós, C^1-osztályú) sokaságra vonatkozó egységosztás-tétel alapján vehetünk olyan $(\varphi_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a} \in A}$ rendszert, hogy minden $\mathfrak{a} \in A$ esetén $\varphi_{\mathfrak{a}} : E \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, $0 \leq \varphi_{\mathfrak{a}} \leq 1$, $supp(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq V_{\mathfrak{a}}$, és $supp(f) \subseteq \left[\sum_{\mathfrak{a} \in A} \varphi_{\mathfrak{a}} = 1 \right]$ (valamint $\sum_{\mathfrak{a} \in A} \varphi_{\mathfrak{a}} \leq 1$ is feltehető, de ezt most nem használjuk ki). Ekkor természetesen

$$f = \sum_{\mathfrak{a} \in A} \varphi_{\mathfrak{a}} f = \sum_{\mathfrak{a} \in A \cap \Omega} \varphi_{\mathfrak{a}} f + \sum_{\mathfrak{a} \in A \setminus \Omega} \varphi_{\mathfrak{a}} f.$$

Ha $\mathfrak{a} \in A \cap \Omega$, akkor $supp(\varphi_{\mathfrak{a}} f) \subseteq supp(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq V_{\mathfrak{a}} \subseteq \Omega$, ezért $(\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f) = 0 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\partial\Omega, \mathscr{R}_{\partial\Omega}, \mu_{\partial\Omega})$, és az (I) alapján $div(\varphi_{\mathfrak{a}} f) : \Omega \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, így $div(\varphi_{\mathfrak{a}} f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_{\Omega}, \mu_{\Omega})$, és

$$\int_{\Omega} div(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\ d\mu_{\Omega} = 0 = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f)\ d\mu_{\partial\Omega}.$$

Ha $\mathfrak{a} \in A \setminus \Omega$, akkor $supp(\varphi_{\mathfrak{a}} f) \subseteq supp(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq V_{\mathfrak{a}}$, és $V_{\mathfrak{a}}$ olyan nyílt környezete $\mathfrak{a}$-nak E-ben, hogy létezik olyan $(h_{\mathfrak{a}}, U_{\mathfrak{a}}, \delta_{\mathfrak{a}}, \Phi_{\mathfrak{a}})$ négyes, amelyre teljesülnek a bizonyítás (II) részének elején megfogalmazott a), b), c) és d) állítások, ezért a (II) alapján

$$div(\varphi_{\mathfrak{a}} f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_{\Omega}, \mu_{\Omega}), \qquad (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\partial\Omega, \mathscr{R}_{\partial\Omega}, \mu_{\partial\Omega}),$$

továbbá

$$\int_{\Omega} div(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\ d\mu_{\Omega} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f)\ d\mu_{\partial\Omega},$$

és itt általában egyik integrál értéke sen nulla.

Ebből következik, hogy

$$(\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid f) = \left(\mathbf{n}_{\partial\Omega} \,\middle|\, \sum_{\mathfrak{a}\in A} \varphi_{\mathfrak{a}} f\right) = \sum_{\mathfrak{a}\in A} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}\in A\setminus\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\partial\Omega, \mathscr{R}_{\partial\Omega}, \mu_{\partial\Omega}),$$

ugyanakkor $div(\varphi_{\mathfrak{a}} f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_{\Omega}, \mu_{\Omega})$ az f-re vonatkozó *hipotézis szerint* teljesül, továbbá

$$\int_{\Omega} div(f)\ d\mu_{\Omega} = \int_{\Omega} div\left(\sum_{\mathfrak{a}\in A} \varphi_{\mathfrak{a}} f\right)\ d\mu_{\Omega} = \sum_{\mathfrak{a}\in A} \int_{\Omega} div(\varphi_{\mathfrak{a}} f)\ d\mu_{\Omega} =$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}\in A} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid \varphi_{\mathfrak{a}} f)\ d\mu_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{n}_{\partial\Omega} \,\middle|\, \sum_{\mathfrak{a}\in A} \varphi_{\mathfrak{a}} f\right)\ d\mu_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega} \mid f)\ d\mu_{\partial\Omega},$$

amit bizonyítani kellett. ■

Most bevezetjük a parciális differenciálegyenletek klasszikus elméletében leggyakrabban előforduló folytonosan differenciálható függvények tereit. Ehhez emlékeztetünk arra, hogy ha E, F normált terek és $U \subseteq E$ nyílt halmaz, valamint $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$, akkor $C^r(U; F)$ jelöli az r-szer folytonosan differenciálható $U \to F$ függvények halmazát (VII. fejezet, 5. pont), továbbá $f \in C^r(U; F)$ esetén minden $k \leq r$ természetes számra $D^k f$ jelöli az f függvény k-adik deriváltfüggvényét, ami $U \to \mathscr{L}^s_k(E^k; F)$ folytonos függvény, ahol $\mathscr{L}^s_k(E^k; F)$ az $E^k \to F$ szimmetrikus folytonos k-lineáris operátorok normált tere.

Definíció. Legyen E normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér. Ha $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$, akkor $C^r(\overline{\Omega}; F)$ jelöli azon $f : \overline{\Omega} \to F$ függvények halmazát, amelyekhez létezik olyan $U \subseteq E$ nyílt halmaz és olyan $\tilde{f} \in C^r(U; F)$, hogy $\overline{\Omega} \subseteq U$ és $\tilde{f}|\Omega = f$. Ha $r, s \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$ vagy $s = \infty$, akkor

$$C^{(r,s)}(\overline{\Omega}; F) := \{f \in C^r(\overline{\Omega}; F) \mid f|_{\Omega} \in C^s(\Omega; F)\},$$

$$C^{(r,s)}_0(\overline{\Omega}; F) := \{f \in C^{(r,s)}(\overline{\Omega}; F) \mid f \text{ kompakt tartójú}\}.$$

Természetesen $C^{(r,0)}(\overline{\Omega}; F) = C^r(\overline{\Omega}; F)$ és $C^{(0,s)}(\overline{\Omega}; F) = \{f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}; F) | f|_{\Omega} \in C^s(\Omega; F)\}$, tehát a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformájában szereplő f függvényre vonatkozó feltétel úgy is megfogalmazható, hogy $f \in C^{(0,1)}_0(\overline{\Omega}; E)$, $\partial_{irr}\Omega \cap supp(f) = \emptyset$ és $div(f) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_{\Omega}, \mu_{\Omega})$.

Nyilvánvaló, hogy ha $r, s, r', s' \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$ vagy $s = \infty$ vagy $r' = \infty$ vagy $s' = \infty$, akkor $r \leq r'$ és $s \leq s'$ esetén $C^{(r',s')}(\overline{\Omega}; F) \subseteq C^{(r,s)}(\overline{\Omega}; F)$ és $C^{(r',s')}_0(\overline{\Omega}; F) \subseteq C^{(r,s)}_0(\overline{\Omega}; F)$. Az is triviális, hogy

$$C^{(r,s)}(\overline{\Omega}; F) = C^{(r,0)}(\overline{\Omega}; F) \cap C^{(0,s)}(\overline{\Omega}; F),$$

$$C_0^{(r,s)}(\overline{\Omega};F) = C_0^{(r,0)}(\overline{\Omega};F) \cap C_0^{(0,s)}(\overline{\Omega};F).$$

Könnyen látható, hogy ha E normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, F normált tér, $r,s \in \mathbb{N}$ vagy $r=\infty$ vagy $s=\infty$, akkor $C^{(r,s)}(\overline{\Omega};F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(\overline{\Omega};F)$ függvénytérnek, és $C_0^{(r,s)}(\overline{\Omega};F)$ lineáris altere a $C^{(r,s)}(\overline{\Omega};F)$ függvénytérnek.

Állítás. Legyen E normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér. Ha $r \in \mathbb{N}$, akkor minden $f \in C^r(\overline{\Omega};F)$ függvényhez és $k \leq r$ természetes számhoz egyértelműen létezik olyan $\overline{D^k}f : \overline{\Omega} \to \mathscr{L}_k(E^k;F)$ folytonos függvény, amelyre teljesül az, hogy minden $U \subseteq E$ nyílt halmazra és minden $\overline{f} \in C^r(U;F)$ függvényre: ha $\overline{\Omega} \subseteq U$ és $f = \overline{f}|_{\Omega}$, akkor $\overline{D^k}f = (D^k\overline{f})|_{\overline{\Omega}}$.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy ha $f_1, f_2 : E \rightarrowtail F$ olyan C^r-osztályú függvények, amelyekre $\overline{\Omega} \subseteq Dom(f_1) \cap Dom(f_2)$, és $f_1|_{\Omega} = f = f_2|_{\Omega}$, akkor $f_1 = f_2$ az Ω nyílt halmazon, így minden $k \leq r$ természetes számra a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása alapján $D^k f_1 = D^k f_2$ az Ω halmazon, tehát a $D^k f_1$ és $D^k f_2$ deriváltfüggvények folytonossága miatt $D^k f_1 = D^k f_2$ teljesül az $\overline{\Omega}$ halmazon is. ∎

Speciálisan, ha E euklidészi tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és $f \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$, akkor az előző állítás alapján jól értelmezett a $\overline{D}f : \overline{\Omega} \to E'$ függvény; ekkor értelmezhető a

$$\overline{grad}(f) := J_E^{-1} \circ \overline{D}f : \overline{\Omega} \to E$$

kiterjesztett gradiens-függvény is, ahol J_E az E valós Hilbert-tér által meghatározott $E \to E'$ kanonikus leképezés. Természetesen ekkor a $\overline{grad}(f)$ függvény a $grad(f)$-nek folytonos kiterjesztése Ω-ról $\overline{\Omega}$-ra.

Állítás. (*Green-formulák.*) Legyen E euklidészi tér, $\Omega \subseteq E$ reguláris határú, relatív kompakt nyílt halmaz és $p \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$.

a) Ha $v \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ és $u \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy $div(p.grad(u)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathscr{R}_{\Omega},\mu_{\Omega})$, akkor

$$\int_{\Omega} v \cdot div(p.grad(u))\, d\mu_{\Omega} = \int_{\partial\Omega} v.(\overline{grad}(u)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}).p\, d\mu_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} p.(grad(v)|grad(u))\, d\mu_{\Omega}$$

teljesül (*aszimmetrikus Green-formula*).

b) Ha $u,v \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ olyan függvények, hogy $div(p.grad(u)), div(p.grad(v)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathscr{R}_{\Omega},\mu_{\Omega})$, akkor

$$\int_{\Omega} (u.div(p.grad(v)) - v.div(p.grad(u)))\, d\mu_{\Omega} =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u.(\overline{grad}(v)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) - v.(\overline{grad}(u)|\mathbf{n}_{\partial\Omega})).p\, d\mu_{\partial\Omega}$$

teljesül (*szimmetrikus Green-formula*).

Bizonyítás. a) A $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és korlátos, valamint a hipotézis szerint $div(p.grad(u)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$, amiből következik, hogy $v.div(p.grad(u)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$. Másfelől, $p.(grad(v)|grad(u)) : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek $p.(\overline{grad}(v)|\overline{grad}(u))$ egy folytonos kiterjesztése az $\overline{\Omega}$ kompakt halmazra, ezért a $p.(grad(v)|grad(u))$ függvény is integrálható μ_Ω szerint. Ugyanakkor

$$div(v.(p.grad(u))) = v.div(p.grad(u)) + p.(grad(v)|grad(u))$$

teljesül az Ω halmazon, ezért $div(v.(p.grad(u))) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$. A simasági feltevések miatt $v.(p.\overline{grad}(u)) \in C^{(0,1)}(\overline{\Omega}; E)$, tehát a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformáját alkalmazhatjuk erre a függvényre. Azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\partial\Omega} v.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|\overline{grad}(u)).p \; d\mu_{\partial\Omega} = \int\limits_{\Omega} div(v.(p.grad(u))) \; d\mu_\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} v.div(p.grad(u)) \; d\mu_\Omega + \int\limits_{\Omega} p.(grad(v)|grad(u)) \; d\mu_\Omega,$$

amit bizonyítani kellett.

b) Ha a b) feltételei teljesülnek, akkor $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ és $u \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ olyan függvények, amelyekre $div(p.grad(u)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$, továbbá $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ és $v \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ olyan függvények, amelyekre $div(p.grad(v)) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{R}_\Omega, \mu_\Omega)$. Ezért az a) alapján felírható az aszimmetrikus Green-formula a (v, u) és (u, v) függvénypárra. Ha ezt a két formulát kivonjuk egymásból, akkor a szimmetrikus Green-formulát kapjuk. ■

A Green-formulák alkalmazásaként bebizonyítunk egy unicitás-tételt a másodrendű elliptikus parciális differenciálegyenletek elméletéből.

Tétel. Legyen E euklidészi tér, $\Omega \subseteq E$ reguláris határú, relatív kompakt, összefüggő nyílt halmaz, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, $q \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}(\Omega; \mathbb{R})$ és $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{C}(\partial\Omega; \mathbb{R})$. Feltesszük, hogy minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, továbbá minden $x \in \partial\Omega$ pontra $\alpha(x)\beta(x) \geq 0$ (vagyis α és β a $\partial\Omega$ minden pontjában egyforma előjelű) és $[\beta = 0] \subseteq [\alpha \neq 0]$.

a) Ha q nem azonosan nulla, akkor *legfeljebb egy* olyan $u \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ függvény létezik, amelyre

$$-div(p.grad(u)) + q.u = f \text{ az } \Omega \text{ halmazon},$$

$$\alpha.u + \beta.(\overline{grad}(u)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) = \gamma \text{ a } \partial\Omega \text{ halmazon}$$

teljesül.

b) Ha $u_1, u_2 \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ olyan függvények, hogy

$$-div(p.grad(u_1)) = f = -div(p.grad(u_2)) \text{ az } \Omega \text{ halmazon},$$

$$\alpha.u_1 + \beta.(\overline{grad}(u_1)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) = \gamma = \alpha.u_2 + \beta.(\overline{grad}(u_2)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) \text{ a } \partial\Omega \text{ halmazon},$$

akkor az $u_1 - u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvény állandó.

Bizonyítás. Legyenek $u_1, u_2 \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ olyan függvények, amelyekre

$$-div(p.grad(u_1)) + q.u_1 = f = -div(p.grad(u_2)) + q.u_2 \text{ az } \Omega \text{ halmazon},$$

$$\alpha.u_1 + \beta.(\overline{grad}(u_1)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) = \gamma = \alpha.u_2 + \beta.(\overline{grad}(u_2)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) \text{ a } \partial\Omega \text{ halmazon}$$

teljesül. Ekkor $u := u_1 - u_2 \in C^{(1,2)}(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre

$$-div(p.grad(u)) + q.u = 0 \text{ az } \Omega \text{ halmazon},$$

$$\alpha.u + \beta.(\overline{grad}(u)|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) = 0 \text{ a } \partial\Omega \text{ halmazon}$$

teljesül. Azt kell megmutatni, hogy az u függvény állandó, és ha q nem azonosan nulla, akkor $u = 0$. Ehhez az (u, u) függvénypárra felírjuk az aszimmetrikus Green-formulát:

$$\int_{\Omega} u \cdot div(p.grad(u))\, d\mu_{\Omega} = \int_{\partial\Omega} u.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|\overline{grad}(u)).p\, d\mu_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} p.\|grad(u)\|^2\, d\mu_{\Omega},$$

és kihasználjuk azt, hogy $div(p.grad(u)) = q.u$ az Ω halmazon, továbbá figyelembe vesszük azt, hogy a $[\beta \neq 0] \subseteq \partial\Omega$ halmazon $(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|\overline{grad}(u)) = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).u$, míg a $[\beta = 0] \subseteq [\alpha \neq 0] \subseteq \partial\Omega$ halmazon $u = 0$. Azt kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega} q.u^2\, d\mu_{\Omega} = -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\circ}.u^2.p\, d\mu_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} p.\|grad(u)\|^2\, d\mu_{\Omega},$$

ahol $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\circ}$ jelöli az $\frac{\alpha}{\beta} : [\beta \neq 0] \to \mathbb{R}$ függvény 0-val vett kiterjesztését $\partial\Omega$-ra. A bal oldalon álló integrál integrandusa pozitív függvény, mert $q \geq 0$ az Ω halmazon, ezért az integrál is pozitív. A jobb oldalon álló integrálok integrandusai szintén pozitívak, mert $p \geq 0$ az $\overline{\Omega}$ halmazon és $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\circ} \geq 0$ a $\partial\Omega$ halmazon. Ebből következik, hogy

$$\int_{\Omega} q.u^2\, d\mu_{\Omega} = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\circ}.u^2.p\, d\mu_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} p.\|grad(u)\|^2\, d\mu_{\Omega} = 0,$$

így $q.u^2 = 0$ az Ω halmazon μ_{Ω}-majdnem mindenütt, és $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\circ}.u^2.p = 0$ a $\partial\Omega$ halmazon $\mu_{\partial\Omega}$-majdnem mindenütt, valamint $p.\|grad(u)\|^2 = 0$ az Ω halmazon μ_{Ω}-majdnem mindenütt. A feltevés szerint minden $\Omega \ni x$-re $p(x) > 0$, ezért a harmadik egyenlőségből kapjuk, hogy $\|grad(u)\|^2 = 0$ az Ω halmazon μ_{Ω}-majdnem mindenütt. A $grad(u)$ függvény folytonossága miatt ebből következik, hogy $grad(u) = 0$ az Ω halmazon. Az Ω összefüggősége alapján az $u|_{\Omega} : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény állandó, tehát az egyenlőségek folytatásának elvét alkalmazva kapjuk, hogy az $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvény is állandó. A $q.u^2$ függvény folytonos az $\overline{\Omega}$ halmazon, ezért $q.u^2 = 0$. Ha tehát $x \in \Omega$ olyan pont, hogy $q(x) \neq 0$, akkor $u(x) = 0$, ezért $u = 0$. Ha viszont $q = 0$, akkor csak arra következtethetünk, hogy u állandó. ■

A Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformájában szereplő Ω nyílt halmazra és f vektormezőre feltettük azt, hogy $(\partial_{irr}\Omega) \cap supp(f) = \emptyset$. Ez automatikusan teljesül akkor, ha $\partial_{irr}\Omega = \emptyset$, vagyis ha Ω reguláris határú. Másfelől, a gyakorlatban sokszor előfordulnak nem reguláris határú nyílt halmazok és olyan vektormezők, amelyekre teljesülnek a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformájában megfogalmazott feltételek, kivéve azt, hogy $(\partial_{irr}\Omega) \cap supp(f) = \emptyset$. Ezért szükség van a Gauss-Osztrogradszkij tétel általánosítására olyan esetben, amikor $(\partial_{irr}\Omega) \cap supp(f) \neq \emptyset$. Többféle általánosítás létezik; ezek egyike a következő.

Tétel. (*Gauss-Osztrogradszkij tétel.*) Legyen E euklidészi tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, $\partial_{irr}\Omega \subseteq \overset{\circ}{[\varphi_n = 1]}$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \chi_{\partial_{irr}\Omega}$.

a) Ha $f \in C_0^{(0,1)}(\overline{\Omega}; E)$ olyan függvény, hogy $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ_Ω-integrálható és $(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ $\mu_{\partial\Omega}$-integrálható függvény, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $(grad(\varphi_n)|f)$ függvény Ω-ra vett leszűkítése μ_Ω-integrálható, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (grad(\varphi_n)|f)\ d\mu_\Omega = \int\limits_\Omega div(f)\ d\mu_\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\ d\mu_{\partial\Omega}.$$

b) Ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra teljesül az is, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega^* \|grad\,(\varphi_n|_\Omega)\|\ d\mu_\Omega = 0,$$

akkor minden $f \in C_0^{(0,1)}(\overline{\Omega}; E)$ függvényre: ha $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ_Ω-integrálható és $(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ $\mu_{\partial\Omega}$-integrálható függvény, akkor

$$\int\limits_\Omega div(f)\ d\mu_\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\ d\mu_{\partial\Omega}$$

(függetlenül attól, hogy $(\partial_{irr}\Omega) \cap supp(f)$ üres-e vagy sem).

Bizonyítás. Ha a) igaz és teljesülnek a b) feltételei, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \int\limits_\Omega (grad(\varphi_n)|f)\ d\mu_\Omega \right| \leq \int\limits_\Omega |(grad(\varphi_n)|f)|\ d\mu_\Omega \leq$$

$$\leq \left(\sup_{x\in\Omega} \|f(x)\| \right) \int\limits_\Omega^* \|grad\,(\varphi_n|_\Omega)\|\ d\mu_\Omega,$$

ezért fennállnak a

$$\int\limits_\Omega div(f)\ d\mu_\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} (f|\mathbf{n}_{\partial\Omega})\ d\mu_{\partial\Omega} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (grad(\varphi_n)|f)\ d\mu_\Omega = 0$$

egyenlőségek. Tehát elegendő az a) állítást igazolni.

Legyen $f \in C_0^{(0,1)}(\overline{\Omega}; E)$ olyan függvény, hogy $div(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ_Ω-integrálható és $(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ $\mu_{\partial\Omega}$-integrálható függvény. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $(1-\varphi_n).f \in C_0^{(0,1)}(\overline{\Omega}; E)$ függvényre teljesülnek a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformájának feltételei. Valóban, $[(1-\varphi_n).f \neq 0] \subseteq supp(f) \setminus \overset{\circ}{[\varphi_n = 1]}$, és itt a jobb oldalon olyan kompakt halmaz áll, amely nem metszi az $\partial_{irr}\Omega$ halmazt, tehát a $supp((1-\varphi_n).f)$ halmaz is kompakt és nem metszi $\partial_{irr}\Omega$-t. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $div(f)$ függvénnyel együtt $\varphi_n.div(f)$ is integrálható μ_Ω szerint, mert φ_n korlátos és μ_Ω-mérhető (IX. fejezet, 8. pont, **2**. gyakorlat).

Megmutatjuk, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén a $(grad(\varphi_n)|f)$ függvény Ω-ra vett leszűkítése μ_Ω-inetgrálható. Világos, hogy ez az $\overline{\Omega}$-n értelmezett függvény folytonos és kompakt tartójú, ezért létezik olyan $\psi_n : E \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, amely ennek kiterjesztése (Függelék, 3. pont, Tietze-tétel lokálisan kompakt terekre). Ezért ha $u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to E$ tetszőleges lineáris bijekció, akkor a $\psi_n \circ u : \mathbb{R}^{dim(E)} \to \mathbb{R}$ függvény kompakt tartójú, folytonos, és kiterjesztése a $(grad(\varphi_n)|f) \circ u$ függvénynek. Ekkor a IX. fejezet 1. pontjának eredményei alapján következik, hogy a $(grad(\varphi_n)|f) \circ u$ függvény $\overset{-1}{u}\langle\Omega\rangle$ halmazra vett leszűkítése $\mu_{dim(E)}$-integrálható, tehát a $(grad(\varphi_n)|f)$ függvény Ω-ra vett leszűkítése μ_Ω-inetgrálható.

Az előzőekből kapjuk, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén a $div((1-\varphi_n).f) : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény μ_Ω-integrálható, hiszen

$$div((1-\varphi_n).f) = div(f) - \varphi_n.div(f) - (grad(\varphi_n)|f),$$

és az egyenlőség jobb oldalán álló függvények μ_Ω-integrálhatók. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(1-\varphi_n).f$ olyan függvény, amelyre teljesülnek a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformájának feltételei. Továbbá, minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\int_\Omega div(f)\, d\mu_\Omega - \int_\Omega \varphi_n.div(f)\, d\mu_\Omega - \int_\Omega (grad(\varphi_n)|f)\, d\mu_\Omega =$$

$$= \int_\Omega div((1-\varphi_n).f)\, d\mu_\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|(1-\varphi_n).f)\, d\mu_{\partial\Omega} =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\, d\mu_{\partial\Omega} - \int_{\partial\Omega} \varphi_n.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\, d\mu_{\partial\Omega},$$

ahol kihasználtuk azt, hogy a feltevés alapján a $(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ függvény $\mu_{\partial\Omega}$-integrálható. Ebből következik, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_\Omega div(f)\, d\mu_\Omega - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\, d\mu_{\partial\Omega} =$$

$$= \int_\Omega (grad(\varphi_n)|f)\, d\mu_\Omega + \int_\Omega \varphi_n.div(f)\, d\mu_\Omega - \int_{\partial\Omega} \varphi_n.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\, d\mu_{\partial\Omega}.$$

A $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \chi_{\partial_{irr}\Omega}$ feltétel, valamint $\Omega \cap (\partial_{irr}\Omega) = \emptyset$ és $(\partial\Omega) \cap (\partial_{irr}\Omega) = \emptyset$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n.div(f)) = 0$ az Ω halmazon, és $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)) = 0$ a $\partial\Omega$ halmazon. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\varphi_n.div(f)| \leq |div(f)|$ az Ω halmazon, és $|\varphi_n.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)| \leq |(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)|$ a $\partial\Omega$ halmazon; továbbá az f-re vonatkozó integrálhatósági feltételek alapján

$$\int_{\Omega}^{*} |div(f)|\; d\mu_\Omega < +\infty, \qquad \int_{\partial\Omega}^{*} |(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)|\; d\mu_{\partial\Omega} < +\infty.$$

Ezért a Lebesgue-tételből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \varphi_n.div(f)\; d\mu_\Omega = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \varphi_n.(\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\; d\mu_{\partial\Omega} = 0.$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} (grad(\varphi_n)|f)\; d\mu_\Omega = \int_{\Omega} div(f)\; d\mu_\Omega - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_{\partial\Omega}|f)\; d\mu_{\partial\Omega},$$

amit bizonyítani kellett. ■

Figyeljük meg, hogy az előző tétel b) részében az $(f|\mathbf{n}_{\partial\Omega}) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ fluxus-sűrűség $\mu_{\partial\Omega}$-integrálhatósága *hipotézisként* szerepel, míg a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapformájában (a többi feltétel alapján) ezt bizonyítani lehetett.

Megmutatható, hogy minden $H \subseteq E$ *zárt halmazhoz* létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ C^∞-osztályú függvény, $H \subseteq \overset{\circ}{[\varphi_n = 1]}$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \chi_H$. De ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor a $\partial_{irr}(\Omega)$ zárt halmazhoz nem szükségképpen választható meg a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fügvénysorozat úgy, hogy (az előző feltételek mellett) még $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\Omega}^{*} \|grad\,(\varphi_n|_\Omega)\|\; d\mu_\Omega = 0$ is teljesüljön. Kiderül, hogy ilyen tulajdonságú $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat létezése a $\partial_{irr}\Omega$ irreguláris határ “analitikus geometriai szerkezetén” múlik. A pontos állítások megtalálhatók a [**10**] könyvben.

TOPOLOGIKUS TEREK

Már az analízis bevezető fejezeteiben nyilvánvalóvá válik, hogy annak legsajátosabb gondolatai a sorozatok konvergenciájával kapcsolatosak. Az V. fejezetben láttuk, hogy a numerikus sorozatok konvergenciája speciális esete a metrikus terekben haladó sorozatok konvergenciájának. Már ott hangsúlyoztuk, hogy a metrikus terekben értelmezhető konvergencia-fogalom közvetlenül nem a metrikától, hanem a metrika által meghatározott nyílthalmaz-fogalomtól (vagyis a *topológiától*) függ. Azt mondtuk, hogy egy metrikus terekre vonatkozó tulajdonság "*topologikus*", ha csak a metrika által meghatározott topológiától függ, tehát nem változik meg akkor, ha a metrikát lecseréljük egy vele ekvivalens metrikára. A sorozatok konvergenciája, a halmazok kompaktsága és összefüggősége, valamint a függvények határértékének létezése és folyonossága ilyen értelemben topologikus tulajdonságoknak bizonyultak. Ezzel szemben a halmazok korlátossága, teljes korlátossága, teljessége, valamint a függvények egyenletes folytonossága nem topologikus tulajdonságok.

Az *általános topológia* a topologikus tulajdonságok elmélete. Vizsgálatának középpontjában a *topologikus tér*, valamint a topologikus terek között ható *folytonos függvények* fogalma áll. Az általános topológiában értelmezzük az (általánosított) sorozatok *konvergenciáját*, és a topologikus terek között ható függvények *határértékét*. A topologikus tereket azonosító függvényeket *homeomorfizmusoknak* nevezzük, és a topologikus tulajdonságok szempontjából "egyformán viselkedő", vagyis topologikusan azonosítható topologikus tereket *homeomorfaknak* nevezzük. Az általános topológia megmutatja, hogy a topologikus terek rendkívül sokfélék lehetnek, ezért a topologikus terek érdemi vizsgálata minden esetben csak speciális tér-osztályon belül lehetséges. Ezeket a speciális topologikustér-osztályokat rendszerint különféle axiómákkal választjuk ki; ilyenek a *megszámlálhatósági*, *szétválasztási*, *metrizálhatósági*, *összefüggőségi*, illetve *kompaktsági* feltételek.

Az első pontban értelmezzük a *topológiákat* és a *topologikus tereket*, továbbá áttekintést adunk azokról a legfontosabb eljárásokról, amelyek segítségével topologikus tereket állíthatunk elő. A topológiákkal kapcsolatos legközvetlenebb fogalom a *környezetek* fogalma. A topologikus terek pontjainak környezeteit vizsgálva természetes módon jutunk el a *szűrők* és *rácsok* fogalmához. Látni fogjuk, hogy topologikus térben a pontok környzetei egyértelműen meghatározzák a topológiát, sőt azt is megvizsgáljuk, hogyan lehet *előírni* a pontok környezeteit valamely topológia szerint. Bevezetjük a halmazok *belsejének* és *lezártjának* fogalmát topologikus térben; ezekkel együtt értelmezhetők a halmazok *belső pontjai*, *érintési pontjai*, *határpontjai*, valamint *torlódási pontjai*. Itt adjuk meg a topologikus terek között ható *függvények folytonosságának* fogalmát, és bebizonyítunk néhány folytonossággal kapcsolatos elemi állítást.

A topologikus terek konstrukciója szempontjából különösen fontos tény az, hogy egy halmaz feletti topológiák halmaza a $\subseteq$ relációval ellátva *teljes háló*, vagyis olyan rendezett halmaz, amelyben minden részhalmaznak létezik szuprémuma és infimuma. Ez ad lehetőséget arra, hogy bevezessük az *iniciális* és *finális topológiák* fogalmát. A *topológiák inverz képei*, az *altértopológiák*, valamint a *szorzattopológiák* speciális iniciális topológiák. A finális topológiák legfontosabb speciális esetei a *topológiák képei*, a *faktortopológiák*, és az *összegtopológiák*. Pontos jellemzést adunk a *topológia-szuprémumra* és *topológia-infimumra* vonatkozóan, amelyek segítségével az iniciális és finális topológiákat is jellemezhetjük. Az általános topológia alkalmazásai szempontjából a szorzattopológiák különösen jelentősek, ezért ezekkel valamivel részletesebben is foglalkozunk. Megmutatjuk például, hogy metrizálható terek megszámlálható rendszerének a topologikus szorzata szintén metrizálható. A fejezet végén megadjuk a metrikus terekkel kapcsolatban értelmezett *összefüggőség* fogalmának általánosítását topologikus terekre.

A második pontban bevezetjük a leggyakrabban előforduló *szétválasztási tulajdonságokat*, és bevezetjük az ezeknek eleget tevő topologikus tereket: a T_0-tereket, T_1-tereket, T_2-(vagy Hausdorff-)tereket, *reguláris* tereket, *teljesen reguláris* tereket, és *normális* tereket. A T_1-terekre és a reguláris terekre elemi topológiai jellemzést adunk. A Hausdorff-terekre bebizonyítjuk az *egyenlőségek folytatásának elvét.* Itt vezetjük be az *általánosított sorozatok*, azok *konvergenciájának* és *határértékének* fogalmát. Az általánosított sorozatokkal kapcsolatban igazolunk néhány olyan állítást, amelyet metrikus terekben haladó sorozatokra már jól ismerünk. Ezek közül a legfontosabb a függvények folyonosságát jellemző *átviteli elv.*

A normális terekre bebizonyítjuk a három legismertebb, és az alkalmazások szempontjából legfontosabb karakterizációs tételt: az *Uriszon-tételt*, a *Tietze-tételt* és az *egységosztás-tételt.* Ezek a lényegesen nemtriviális tételek speciális feltételeknek eleget tevő folytonos függvények létezését állítják. Az Uriszon-tétel alapján válik világossá, hogy a normális T_1-terek teljesen regulárisak, tehát a T_1 terek körében a normálisság az általunk bevezetett legerősebb szétválasztási tulajdonság. Bebizonyítjuk, hogy éppen azok a topologikus terek teljesen regulárisak, amelyek topológiája félmetrika-rendszer által generálható. Ebből kapjuk, hogy a teljesen reguláris Hausdorff-terek homeomorfak a $[0,1]^I$ alakú *topologikus kockák* topologikus altereivel. Ezt a pontot *Uriszon metrizációs tételével* zárjuk, amely megmutatja, hogy a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *euklidészi kocka* a szeparábilis metrizálható topologikus terek számára abban az értelemben *univerzális*, hogy minden ilyen topologikus tér homeomorf az euklidészi kocka valamely topologikus alterével.

A *kompaktság* és a *lokális kompaktság* két rendkívül fontos topológiai tulajdonság; ezekkel foglalkozunk a harmadik pontban. A *Bolzano-Weierstrass-tétel* általánosított sorozatokkal jellemzi a kompaktságot. Megadjuk a *Cantor-féle közösrész-tétel* általánosítását is. Az általános topológia analízisbeli alkalmazásai szempontjából döntő jelentőségű a *Tyihonov-tétel*, amely szerint kompakt terek topologikus szorzata kompakt. A kompakt tereken folytonos valós függvényekre vonatkozó *Weierstrass-féle maximum-minimum elvet* általánosítjuk *alulról*, illetve *felülről félig folytonos* függvényekre. A kompakt terek metrizálhatóságát jellemezve kiderül, hogy kompakt tér pontosan akkor metrizálható, ha *megszámlálható bázisú*, ami azzal is ekvivalens, hogy a tér homeomorf az euklidészi kocka valamely zárt topologikus alterével.

Részletesen megvizsgáljuk a lokálisan kompakt terek szétválasztási tulajdonságait. Ehhez fontos segédeszköz az *egypontú kompaktifikáció*, vagyis annak lehetősége, hogy lokálisan kompakt teret topologikusan azonosíthatunk egy olyan kompakt tér nyílt alterével, amely egyetlen ponttal nagyobb az eredeti lokálisan kompakt térnél. Kiderül, hogy a lokálisan kompakt terek teljesen regulárisak, bár nem feltétlenül normálisak. Ezért lokálisan kompakt terekre nem lehet érvényes az Uriszon-, a Tietze-, illetve egységosztás-tétel normális tereket jellemző eredeti alakja. Azonban megadható ezeknek a tételeknek lokálisan kompakt terekre vonatkozó változata. Bebizonyítjuk a *Baire-féle kategóriatételt* lokálisan kompakt terekre, és jellemzést adunk a lokálisan kompakt terek feletti félig folytonos függvényekre. Bevezetjük a *σ-kompaktság* és *parakompaktság* fogalmát, majd megmutatjuk, hogy a parakompaktság az a topologikus tulajdonság, amely a lehető legerősebb egységosztás-tétel érvényességét biztosítja. Végül jellemzést adunk a lokálisan kompakt terek parakompaktságára és metrizálhatóságára.

A lokálisan kompakt tereken értelmezett *folytonos függvények tereinek* speciális tulajdonságait vizsgáljuk a negyedik pontban. Értelmezzük a topologikus terek között ható folytonos függvények általánosított sorozatainak *pontonkénti limeszfüggvényét*, valamint az általánosított függvénysorozatok *egyenletes*, illetve *lokálisan egyenletes konvergenciájának* fogalmát abban a speciális esetben, amikor a függvények metrikus terekbe érkeznek. Megfogalmazzuk a *pontonkénti*, és az *egyenletes függvényapproximáció* problémáját. Az egyenletes approximáció témaköréből igazoljuk a *Stone-tételt*, valamint a *Stone-Weierstrass-tétel* kompakt, illetve lokálisan kompakt terekre vonatkozó változatát. Ezeknek a tételeknek az analízisben való alkalmazások szempontjából kivételesen fontos szerepük van, ugyanúgy, mint a ponotnkénti és egyenletes konvergencia közötti kapcsolatra vonatkozó *Dini-tételnek*. Befejezésül jellemzést adunk a kompakt terek metrizálhatóságára a rajtuk értelmezett folytonos valós függvények terének megszámlálhatósági tulajdonságával.

Ez a függelék a metrikus terekkel foglalkozó V. fejezet anyagának általánosítását tartalmazza. Az a célja, hogy a *topologikus vektorterek*, a *normált algebrák*, valamint a *harmonikus analízis* elméletében nélkülözhetetlen topológiai tudnivalókat egy csoportba gyűjtse. A későbbi fejezetekben közvetlenül alkalmazni fogjuk az itt bemutatásra kerülő konstrukciókat és tételeket.

Irodalomjegyzék

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Topologie générale*, Hermann, Paris

2. K. Kuratowski, *Topology*, vols. I-II, Acad. Press, 1968.

3. J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Co., 1957.

4. Császár Ákos, *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó, 1970.

5. H. Schubert, *Topológia*, Műszaki Könyvkiadó, 1986.

6. K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Polish Sci. Publishers, Warszawa, 1967.

7. М. М. Постников, *Введение в теорию Морса*, Наука, Москва, 1971.

1. Topologikus terek és folytonos függvények

Definíció. Legyen T halmaz. Egy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazt T feletti *topológiának* nevezünk, ha teljesülnek a következők.

(O_I) $T \in \mathscr{T}$.

(O_{II}) Minden $\mathscr{T}$-beli nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathscr{T}$-nek.

(O_{III}) Minden $\mathscr{T}$-beli rendszer uniója eleme $\mathscr{T}$-nek.

A $(T, \mathscr{T})$ párt *topologikus térnek* nevezzük, ha $\mathscr{T}$ topológia a T halmaz felett. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a $\mathscr{T}$ topológia elemeit a T halmaz *$\mathscr{T}$-nyílt* részhalmazainak nevezzük, és egy $F \subseteq T$ halmazt *$\mathscr{T}$-zártnak* nevezünk, ha a $T \setminus F$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt.

Ha $\mathscr{T}$ topológia a T halmaz felett, akkor az (O_{III}) miatt az üres rendszer uniója, vagyis az $\emptyset$ szintén eleme $\mathscr{T}$-nek.

A definícióból és a de Morgan-egyenlőségekből (I. fejezet, 2. pont, **14**. és **15**. gyakorlatok) következik, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térben az $\emptyset$ és T halmazok $\mathscr{T}$-zártak, továbbá $\mathscr{T}$-zárt halmazok bármely nem üres rendszerének a metszete $\mathscr{T}$-zárt, valamint véges sok $\mathscr{T}$-zárt halmaz uniója $\mathscr{T}$-zárt.

Példák (*topologikus terekre*) 1) Legyen T halmaz. Ekkor az $\{\emptyset, T\}$ és a $\mathscr{P}(T)$ halmazok nyilvánvalóan topológiák T felett. A $\{\emptyset, T\}$ topológiát T feletti *antidiszkrét* topológiának nevezzük és a $\mathscr{T}_{ind}(T)$ szimbólummal jelöljük. A $\mathscr{P}(T)$ topológiát T feletti *diszkrét* topológiának nevezzük és a $\mathscr{T}_{dis}(T)$ szimbólummal jelöljük. Nyilvánvaló, hogy minden T feletti $\mathscr{T}$ topológiára $\mathscr{T}_{ind}(T) := \{\emptyset, T\} \subseteq \mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(T) =: \mathscr{T}_{dis}(T)$ teljesül.

2) Ha (M, d) metrikus tér, akkor $\mathscr{T}_d$ topológia M felett (V. fejezet, 2. pont); ezt nevezzük a *d metrika által generált topológiának*. A T halmaz feletti $\mathscr{T}$ topológiát *metrizálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan T feletti d metrika, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$ teljesül (V. fejezet, 1. pont). A T halmaz feletti $\mathscr{T}$ topológiát *teljesen metrizálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan T feletti d metrika, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$ és (T, d) teljes metrikus tér (V. fejezet, 9. pont). Világos, hogy bármely halmaz felett a diszkrét topológia teljesen metrizálható (V. fejezet, 1. pont, 1. példa), míg az antidiszkrét topológia biztosan nem metrizálható, ha az alaphalmaz legalább két elemű.

3) Ha K test és $|\cdot|$ abszolútérték-függvény K felett (II. fejezet, 2. pont), akkor $d_{|\cdot|}$ metrika K felett (V. fejezet, 1. pont, 3. példa), tehát $\mathscr{T}_{d_{|\cdot|}}$ topológia K felett; ezt nevezzük az $|\cdot|$ *abszolútérték-függvény által generált* topológiának, és erre a $\mathscr{T}_{|\cdot|}$ egyszerűsített jelölést alkalmazzuk. Speiálisan, ha $|\cdot|$ jelöli az euklidészi abszolútérték-függvényt $\mathbb{K}$ felett (II. fejezet, 2. pont), akkor a $\mathscr{T}_{|\cdot|}$ topológiát $\mathbb{K}$ feletti *euklidészi topológiának* nevezzük. Az $\mathbb{R}$ (illetve $\mathbb{C}$) feletti euklidészi topológát gyakran az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ (illetve $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$) szimbólummal jelöljük.

4) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor $d_{\|\cdot\|}$ metrika E felett (V. fejezet, 1. pont, 4. példa), tehát $\mathscr{T}_{d_{\|\cdot\|}}$ topológia E felett; ezt nevezzük a $\|\cdot\|$ *norma által generált topológáinak*, és a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ szimbólummal jelöljük. A $\mathbb{K}$ feletti E vektortér alaphalmaza

feletti $\mathscr{T}$ topológiát *normálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ teljesül. A $\mathbb{K}$ feletti E vektortér alaphalmaza feletti $\mathscr{T}$ topológiát *teljesen normálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ és $(E, \|\cdot\|)$ Banach-tér.

5) Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett. Két E feletti norma ekvivalenciája - a definíció szerint - azt jelenti, hogy az általuk generált topológiák egyenlők (V. fejezet, 2. pont). Ha E véges dimenziós, akkor bármely két E feletti norma ekvivalens (V. fejezet, 5. pont), és létezik norma E felett (IV. fejezet, 3. pont, **4**. gyakorlat), tehát létezik egyértelműen olyan E feletti topológia, amelyet bármelyik E feletti norma generál; ezt nevezzük az E véges dimenziós valós vagy komplex vektortér *euklidészi topológiájának*.

6) (*Topológia inverz képe.*) Legyen T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T \to T'$ függvény. Ekkor az

$$\overset{-1}{f}[\mathscr{T}'] := \{ \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle | \Omega' \in \mathscr{T}' \}$$

halmaz nyilvánvalóan topológia T felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}'$ topológia f függvény által létesített *inverz képének*. Speciálisan, ha , $E \subseteq T$ és $in_{E,T}$ jelöli az $E \to T$ kanonikus injekciót, akkor a $\mathscr{T}$ topológia $in_{E,T}$ által létesített inverz képe topológia az E részhalmaz felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia E-re vett *leszűkítésének* és a $\mathscr{T}|E$ szimbólummal jelöljük. A definíció alapján világos, hogy

$$\mathscr{T}|E = \{\Omega \cap E | \Omega \in \mathscr{T}\}.$$

A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *topologikus alterének* nevezünk minden olyan $(T', \mathscr{T}')$ topologikus teret, amelyre $T' \subseteq T$ és $\mathscr{T}' = \mathscr{T}|T'$ teljesül.

7) (*Topológia képe.*) Legyen T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T' \to T$ függvény. Ekkor az

$$f[\mathscr{T}'] := \{\Omega \in \mathscr{P}(T) | \overset{-1}{f}\langle \Omega \rangle \in \mathscr{T}'\}$$

halmaz nyilvánvalóan topológia T felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}'$ topológia f függvény által létesített *képének*. Speciálisan, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, R ekvivalencia-reláció T felett és $\pi_{T/R}$ jelöli a $T \to T/R$ kanonikus szürjekciót, akkor a $\mathscr{T}$ topológia $\pi_{T/R}$ által létesített képe topológia a T/R faktorhalmaz felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia R ekvivalencia-reláció szerinti *faktortopológiájának* és a $\mathscr{T}/R$ szimbólummal jelöljük. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *topologikus faktorterének* nevezünk minden olyan $(T', \mathscr{T}')$ topologikus teret, amelyhez van olyan T feletti R ekvivalencia-reláció, hogy $T' = T/R$ és $\mathscr{T}' = \mathscr{T}/R$ teljesül.

Definíció. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Minden $t \in T$ esetén

$$\mathscr{T}(t) := \{V \in \mathscr{P}(T) \mid (\exists \Omega \in \mathscr{T}) : t \in \Omega \subseteq V\},$$

és az $\mathscr{T}(t)$ halmaz elemeit a t pont *környezeteinek* nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $t \in T$, akkor egy $\mathfrak{R} \subseteq \mathscr{T}(t)$ halmazt a t pont *környezetbázisának* nevezünk a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén van olyan $U \in \mathfrak{R}$, hogy $U \subseteq V$.

A környezetek és az altértopológia definíciója alapján nyilvánvaló, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor $t \in E$ esetén $(\mathscr{T}|E)(t) = \{V \cap E | V \in \mathscr{T}(t)\}$.

Definíció. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor egy $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}$ halmazt a $\mathscr{T}$ topológia *bázisának* nevezünk, ha minden $\mathscr{T} \ni \Omega$-hoz létezik olyan $\mathfrak{B}$-ben haladó $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszer, amelyre $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér M_1*-tér*, ha a T minden pontjának létezik megszámlálható környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint. Azt mondjuk, hogy az $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér M_2*-tér*, vagy *megszámlálható bázisú*, ha a $\mathscr{T}$ topológiának létezik megszámlálható bázisa.

Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $\mathfrak{B}$ bázisa a $\mathscr{T}$ topológiának, akkor nyilvánvaló, hogy minden $t \in T$ esetén az $\{\Omega \in \mathfrak{B} | t \in \Omega\}$ halmaz a t pontnak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint. Ebből következik, hogy minden M_2-tér M_1-tér.

Minden metrizálható topologikus tér M_1-tér, mert ha (M, d) metrikus tér és $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, akkor minden $T \ni t$-re a $\{B_{r_n}(t; d) | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz megszámlálható környezetbázisa t-nek a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint. A 3. pontban példát mutatunk olyan topologikus térre, amely nem metrizálható M_1-tér és nem M_2-tér.

Létezik olyan topologikus tér, amely nem M_1-tér. Ilyenre sok példát látunk majd a XIV. fejezetben, a *topologikus vektorterek* között.

Definíció. Legyen T halmaz. Egy $\mathfrak{F} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazt *szűrőnek* nevezünk T felett, ha teljesülnek rá a következők.

(F_I) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ és minden $V \in \mathfrak{F}$ esetén $V \neq \emptyset$, vagyis $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

(F_{II}) Minden $V, V' \in \mathfrak{F}$ esetén $V \cap V' \in \mathfrak{F}$.

(F_{III}) Minden $E \subseteq T$ halmazra, ha létezik olyan $V \in \mathfrak{F}$, hogy $V \subseteq E$, akkor $E \in \mathfrak{F}$.

Egy $\mathfrak{R} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazt *rácsnak* nevezünk T felett, ha teljesülnek rá a következők.

(R_I) $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ és minden $R \in \mathfrak{R}$ esetén $R \neq \emptyset$, vagyis $\emptyset \notin \mathfrak{R}$.

(R_{II}) Minden $R, R' \in \mathfrak{R}$ halmazhoz van olyan $S \in \mathfrak{R}$, hogy $S \subseteq R \cap R'$.

Állítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Ha $t \in T$, akkor $\mathscr{T}(t)$ olyan szűrő T felett, hogy minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re $t \in V$. Ha $t \in T$, akkor a t minden $\mathscr{T}$ szerinti $\mathfrak{B}$ környezetbázisa olyan rács T felett, amelyre minden $V \in \mathfrak{B}$ esetén $t \in V$.

Bizonyítás. (F_I) és (F_{III}) a $\mathscr{T}(t)$ definíciójából következik, míg (F_{II}) azon múlik, hogy két $\mathscr{T}$-nyílt halmaz metszete szintén $\mathscr{T}$-nyílt. Ha $\mathfrak{B}$ környezetbázisa a $t \in T$ pontnak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $V, V' \in \mathfrak{B}$ esetén léteznek olyan Ω és Ω' $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $t \in \Omega \subseteq V$ és $t \in \Omega' \subseteq V'$. Ekkor $t \in \Omega \cap \Omega' \in \mathscr{T}$, tehát $\Omega \cap \Omega' \in \mathscr{T}(t)$, így van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq \Omega \cap \Omega'$, így $W \subseteq V \cap V'$. Ebből következik, hogy a $\mathfrak{B}$ halmaz rács. ■

Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a definíciók alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathscr{T} = \{\Omega \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall\, t \in \Omega) : \Omega \in \mathscr{T}(t)\}.$$

Valóban, ha $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor minden $t \in \Omega$ esetén, a $\mathscr{T}(t)$ értelmezése alapján, $\Omega \in \mathscr{T}(t)$ teljesül. Megfordítva, ha $\Omega \subseteq T$ olyan halmaz, hogy minden $t \in \Omega$

esetén $\Omega \in \mathscr{T}(t)$, akkor kiválasztható olyan $(\Omega_t)_{t\in\Omega}$ rendszer, amelynek mindegyik tagja eleme $\mathscr{T}$-nek és minden $\Omega \ni t$-re $t \in \Omega_t \subseteq \Omega$; ekkor $\Omega = \bigcup_{t\in\Omega} \Omega_t$ teljesül, tehát az (O_{III}) alapján $\Omega \in \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy a topológiát egyértelműen meghatározzák a pontok környezetei. Felvetődik a kérdés, hogy ha minden $t \in T$ ponthoz hozzárendelünk egy T feletti $\mathfrak{F}_t$ szűrőt úgy, hogy minden $t \in T$ és $V \in \mathfrak{F}_t$ esetén $t \in V$, akkor létezik-e olyan T feletti $\mathscr{T}$ topológia, hogy minden $T \ni t$-re $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$? Erre a kérdésre ad választ a következő állítás.

Állítás. Legyen T halmaz és $(\mathfrak{F}_t)_{t\in T}$ olyan rendszer, hogy minden $t \in T$ esetén $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett és minden $\mathfrak{F}_t \ni V$-re $t \in V$. Akkor és csak akkor létezik olyan T feletti $\mathscr{T}$ topológia, amelyre minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$, ha teljesül a következő állítás:

$$(\forall\, t \in T)(\forall\, V \in \mathfrak{F}_t)(\exists\, V' \in \mathfrak{F}_t)(\forall\, t' \in V') : V \in \mathfrak{F}_{t'}.$$

Ha ez a feltétel teljesül, akkor a

$$\mathscr{T} := \{\Omega \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall\, t \in \Omega) : \Omega \in \mathfrak{F}_t\}$$

halmaz az egyetlen olyan T feletti topológia, amelyre minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$.

Bizonyítás. A feltétel *szükséges*, mert ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $T \ni t$-re $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$, akkor $t \in T$ és $V \in \mathfrak{F}_t$ esetén van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq \mathfrak{F}_t$, és ekkor minden $\Omega \ni t'$-re $\Omega \in \mathscr{T}(t') = \mathfrak{F}_{t'}$, tehát $V \in \mathfrak{F}_{t'}$, ami azt jelenti, hogy a $V' := \Omega$ halmazra $V' \in \mathfrak{F}_t$ és minden $V' \ni t'$-re $V \in \mathfrak{F}_{t'}$ teljesül.

A feltétel *elégségességének* bizonyításához értelmezzük a $\mathscr{T}$ halmazt az állításban megfogalmazott módon. Világos, hogy $T \in \mathscr{T}$, mert minden $t \in T$ esetén $T \in \mathfrak{F}_t$ (a szűrők definíciója alapján). Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer $\mathscr{T}$-ben és $t \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, akkor van olyan $j \in I$, hogy $t \in \Omega_j$ és $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett, így $\Omega_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ miatt $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathfrak{F}_t$; ezért $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$. Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres véges rendszer $\mathscr{T}$-ben és $t \in \bigcap_{i\in I} \Omega_i$, akkor minden $I \ni i$-re $\Omega_i \mathfrak{F}_t$, így $\bigcap_{i\in I} \Omega_i \in \mathfrak{F}_t$, hiszen $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett; ezért $\bigcap_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ topológia T felett.

A $\mathscr{T}$ topológia, valamint a környezetszűrők definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) \subseteq \mathfrak{F}_t$. Valóban, ha $V \in \mathscr{T}(t)$, akkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq V$, tehát $\Omega \in \mathfrak{F}_t$, így $V \in \mathfrak{F}_t$, mert $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett.

Megmutatjuk, hogy $t \in T$ esetén $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathscr{T}(t)$. Legyen $V \in \mathfrak{F}_t$ és értelmezzük az $\Omega := \{t' \in T | V \in \mathfrak{F}_t\}$ halmazt. Ha teljesülne az, hogy $t \in \Omega \subseteq V$ és $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor $V \in \mathscr{T}(t)$ is igaz volna (amit bizonyítani kell). A definíció és $V \in \mathfrak{F}_t$ miatt $t \in \Omega$. Ha $t' \in \Omega$, akkor $V \in \mathfrak{F}_{t'}$, ezért $t' \in V$, vagyis $\Omega \subseteq V$ teljesül. Az $\Omega \in \mathscr{T}$ összefüggés bizonyításához legyen $t' \in \Omega$ tetszőleges. Ekkor $V \in \mathscr{T}_{t'}$, ezért a hipotézist alkalmazva a t' pontra és a V halmazra kapjuk olyan $V' \in \mathfrak{F}_{t'}$ létezését, amelyre minden $t'' \in V'$ esetén $V \in \mathfrak{F}_{t''}$, azaz $t'' \in \Omega$. Tehát $V' \in \mathfrak{F}_{t'}$ olyan, hogy $V' \subseteq \Omega$, így $\Omega \in \mathfrak{F}_{t'}$, mert $\mathfrak{F}_{t'}$ szűrő T felett. Ez azt jelenti, hogy minden $t' \in \Omega$ esetén $\Omega \in \mathfrak{F}_{t'}$, tehát $\Omega \in \mathscr{T}$.

Végül, a környezetek egyértelműen meghatározzák a topológiát, ezért legfeljebb egy olyan T feletti $\mathscr{T}$ topológia létezhet, amelyre minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$. ■

Állítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Minden $E \subseteq T$ halmazhoz létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb (illetve legkisebb) $\mathscr{T}$-nyílt (illetve $\mathscr{T}$-zárt) halmaz, amely része E-nek (illetve tartalmazza E-t).

Bizonyítás. Az E által tartalmazott $\mathscr{T}$-nyílt halmazok uniója $\mathscr{T}$-nyílt, és a tartalmazás tekintetében ez a legnagyobb mindazon $\mathscr{T}$-nyílt halmazok közül, amelyek részhalmazai E-nek. Az E halmazt tartalmazó $\mathscr{T}$-zárt halmazok metszete $\mathscr{T}$-zárt, és a tartalmazás tekintetében ez a legkisebb mindazon $\mathscr{T}$-zárt halmazok közül, amelyeknek E részhalmaza. ■

Definíció. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$. Az E halmaz *belsejének* (illetve *lezártjának*) nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint a tartalmazás tekintetében legnagyobb (illetve legkisebb) $\mathscr{T}$-nyílt (illetv $\mathscr{T}$-zárt) halmazt, amely része E-nek (illetve tartalmazza E-t). Az E halmaz $\mathscr{T}$ szerinti belsejét (illetve lezártját) az $Int(E)$ vagy $\overset{\circ}{E}$ (illetve $Cl(E)$ vagy $\overline{E}$) szimbólum jelöli. Az $Int(E)$ (illetve $Cl(E)$) elemeit az E halmaz *belső pontjainak* (illetve *érintési pontjainak*) nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Az $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$ halmazt az E *határának* nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és az $Fr(E)$ vagy $\overset{\bullet}{E}$ szimbólummal jelöljük. Azt mondjuk, hogy a $t \in T$ pont *torlódási pontja* E-nek a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha $t \in \overline{E \setminus \{t\}}$.

Megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{E} &= \{t \in T \mid (\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) : V \subseteq E\}, \\ \overline{E} &= \{t \in T \mid (\forall\, V \in \mathscr{T}(t)) : V \cap E \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Ezak az egyenlőségek a környezetek értelmezése valamint az előző definíció alapján ugyanúgy bizonyíthatók, mint a metrikus terek esetében (V. fejezet, 2. pont). Az is könnyen belátható, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor

$$\overset{\circ}{E} = T \setminus \overline{T \setminus E}, \qquad \overline{E} = T \setminus (T \overset{\circ}{\setminus} E),$$

továbbá, ha $(E_i)_{i \in I}$ a T részhalmazainak tetszőleges nem üres *véges* rendszere, akkor

$$\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} E_i} = \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{E_i}, \qquad \overline{\bigcup_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{E}_i,$$

és ez utóbbi összefüggés természetesen $I = \emptyset$ esetén is (triviálisan) igaz.

Definíció. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor az $E \subseteq T$ halmazt *sűrűnek* nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha $\overline{E} = T$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus teret *szeparábilisnak* nevezzük, ha létezik T-nek megszámlálható sűrű részhalmaza.

Metrizálható topologikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha megszámlálható bázisú; ezt az V. fejezet 3. pontjában igazoltuk. Minden megszámlálható bázisú topologikus tér szeparábilis, mert ha a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér M_2-tér és $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}$ megszámlálható bázis, akkor a $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{B} \setminus \{\emptyset\}$ halmazra a kiválasztási axióma alapján

$\prod_{\Omega \in \mathfrak{B}_0} \Omega \neq \emptyset$, és ha f eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $Im(f)$ megszámlálható és sűrű részhalmaza T-nek, hiszen ha $t \in T$ és $V \in \mathscr{T}(t)$, akkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq V$, így van olyan $\Omega' \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in \Omega' \subseteq \Omega$, tehát $\Omega' \in \mathfrak{B}_0$ és $f(\Omega') \in \Omega'$, vagyis $f(\Omega') \in V \cap Im(f)$.

Megjegyezzük, hogy létezik olyan (szükségképpen nem metrizálható) topologikus tér, amely szeparábilis, de nem megszámlálható bázisú.

Definíció. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T_i)_{i \in I}$ a T részhalmazainak rendszere. Azt mondjuk, hogy $(T_i)_{i \in I}$ *pontonként véges*, ha minden $T \ni t$-re az $\{i \in I | t \in T_i\}$ halmaz véges. Azt mondjuk, hogy $(T_i)_{i \in I}$ *lokálisan véges* a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha minden $T \ni t$-nek van olyan V környezete $\mathscr{T}$ szerint, hogy az $\{i \in I | T_i \cap V \neq \emptyset\}$ halmaz véges.

Állítás. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(F_i)_{i \in I}$ a T halmaz $\mathscr{T}$-zárt részhalmazainak lokálisan véges rendszere, akkor a $\bigcup_{i \in I} F_i$ halmaz is $\mathscr{T}$-zárt.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $I \neq \emptyset$, különben az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyen $t \in T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$; megutatjuk, hogy t belső pontja a $T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$ halmaznak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, vagyis a $T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Az $(F_i)_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges, ezért létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy a $J := \{i \in I | V \cap F_i \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Ha $J = \emptyset$, akkor $V \subseteq T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$, tehát t belső pontja a $T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$ halmaznak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Tegyük fel, hogy $J \neq \emptyset$. Ha $i \in I$ esetén $t \in T \setminus F_i$ és a $T \setminus F_i$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, tehát $T \setminus F_i \in \mathscr{T}(t)$. Ezért $V \cap \bigcap_{i \in J} (T \setminus F_i)$ olyan környezete a t pontnak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, amely része a $T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$ halmaznak, tehát t belső pontja a $T \setminus \bigcup_{i \in I} F_i$ halmaznak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

Definíció. Legyenek $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek. Egy $f : T \to T'$ függvényt *folytonosnak* nevezünk *a $t \in T$ pontban* a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $V' \in \mathscr{T}'(t')$ környezethez van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, amelyre $f\langle V \rangle \subseteq V'$ teljesül (vagy ami ugyanaz: minden $\mathscr{T}'(t') \ni V'$-re $\overset{-1}{f} \langle V' \rangle \in \mathscr{T}(t)$). Azt mondjuk, hogy az $f : T \to T'$ függvény *folytonos* a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha f a T minden pontjában folytonos a a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Állítás. (*A folytonosság lokalitása.*) Legyenek $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, valamint $f, g : T \to T'$ függvények. Legyen $t \in T$ olyan pont, amelyhez van olyan $V \in \mathfrak{T}(t)$, amelyre $f = g$ a V halmazon. Az f függvény pontosan akkor folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $V_t \in \mathscr{T}(t)$ olyan, hogy $f = g$ a V_t halmazon. Ha $V' \in \mathscr{T}'(g(t))$, akkor $g(t) = f(t)$ miatt $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$, tehát létezik olyan $V \in (t)$, amelyre $f\langle V \rangle \subseteq V'$; ekkor $V \cap V_t \in \mathscr{T}(t)$ és $f = g$ a $V \cap V_t$ halmazon, így $g\langle V \cap V_t \rangle = f\langle V \cap V_t \rangle \subseteq f\langle V \rangle \subseteq V'$, vagyis g folytonos a t pontban a a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

Állítás. Legyenek $(T, \mathscr{T})$, $(T', \mathscr{T}')$ és $(T'', \mathscr{T}'')$ topologikus terek, valamint $f : T \to T'$ és $g : T' \to T''$ függvények. Ha f folytonos a $t \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, valamint g folytonos az $f(t)$ pontban a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, akkor $g \circ f$ folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint. Ha f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint és g folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, akkor $g \circ f$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint.

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből. Az első állítás bizonyításához legyen $V'' \in \mathscr{T}((g \circ f)(t))$ tetszőleges. A g függvény folytonos az $f(t)$ pontban a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, ezért van olyan $V' \in \mathscr{T}'(g(t))$, hogy $g\langle V' \rangle \subseteq V''$. Ha V' ilyen környezet, akkor van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V \rangle \subseteq V'$, mert f folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ekkor $(g \circ f)\langle V \rangle = g\langle f\langle V \rangle\rangle \subseteq g\langle V' \rangle \subseteq V''$, tehát $g \circ f$ folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint. ■

Definíció. Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor egy $f : T \to T'$ függvényt *homeomorfizmusnak* nevezünk a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha f bijekció, és f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, valamint f^{-1} folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. A $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus teret *homeomorfaknak* nevezzük, ha létezik olyan $f : T \to T'$ függvény, amely homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Könnyen látható, hogy a topologikus terek bármely halmazán a homeomorfia ekvivalencia-reláció, ugyanis

- a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér homeomorf önmagával, mert az $id_T : T \to T$ függvény homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint (a homeomorfia *reflexív*);

- ha a $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek homeomorfak és $f : T \to T'$ homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor az $f^{-1} : T' \to T$ függvény homeomorfizmus a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, így a $(T', \mathscr{T}')$ és $(T, \mathscr{T})$ topologikus terek homeomorfak (a homeomorfia *szimmetrikus*);

- ha a $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek homeomorfak, valamint a $(T', \mathscr{T}')$ és $(T'', \mathscr{T}'')$ topologikus terek homeomorfak, akkor van olyan $f : T \to T'$ függvény, amely homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, valamint van olyan $g : T' \to T''$ függvény, amely homeomorfizmus a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint; ekkor a $g \circ f : T \to T''$ függvény homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, tehát a $(T, \mathscr{T})$ és $(T'', \mathscr{T}'')$ topologikus terek homeomorfak (a homeomorfia *tranzitív*).

Állítás. (*A folytonosság topologikus jellemzése.*) Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor az $f : T \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $\Omega' \in \mathscr{T}'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}$ teljesül (vagy ami ugyanaz: $\overset{-1}{f}[\mathscr{T}'] \subseteq \mathscr{T}$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $\Omega' \in \mathscr{T}'$ tetszőleges. Ha $t \in \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$, akkor $f(t) \in \Omega'$, ezért $\Omega' \in \mathscr{T}'$ miatt $\Omega' \in \mathscr{T}'(f(t))$, így az f függvény t pontbeli folytonossága következtében létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V \rangle \subseteq \Omega'$, vagyis $V \subseteq \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$. Ez azt jelenti, hogy az $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$ halmaz minden pontja belső pont a $\mathscr{T}$ topológia szerint, tehát $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\Omega' \in \mathscr{T}'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}$ teljesül. Legyen $t \in T$ és $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$. Ekkor van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $f(t) \in \Omega' \subseteq V'$, vagyis $t \in \overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle V'\rangle$. A feltevés miatt $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}$, így $V := \overset{-1}{f}\langle V'\rangle \in \mathscr{T}(t)$ és $f\langle V\rangle \subseteq V'$, azaz f folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

Ha T, T' halmazok és $f : T \to T'$ függvény, akkor minden $F' \subseteq T'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle T' \setminus F'\rangle = T \setminus \overset{-1}{f}\langle F'\rangle$. Ebből, és az előző állításból következik, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor az $f : T \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a topológiák szerint, ha minden $F' \subseteq T'$ $\mathscr{T}'$-zárt halmazra az $\overset{-1}{f}\langle F'\rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.

Következmény. Legyenek $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek és $f : T \to T'$ függvény. Ha f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor minden $E \subseteq T$ halmazra az $f|_E : E \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|E$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ha $(T_i)_{i\in I}$ a T halmaz $\mathscr{T}$-zárt részhalmazainak lokálisan véges befedése a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és minden $I \ni i$-re az $f|_{T_i} : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|T_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Az első állítás bizonyításához tegyük fel, hogy f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $E \subseteq T$ tetszőleges. Ha az $\Omega' \subseteq T'$ halmaz $\mathscr{T}'$-nyílt, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján az $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, ugyanakkor nyilvánvalóan $\overset{-1}{f|_E}\langle\Omega'\rangle = E \cap \overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle$, tehát az altértopológia értelmezése alapján $\overset{-1}{f|_E}\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}|E$. Ismét a folytonosság topologikus jellemzésére hivatkozva kapjuk, hogy az $f|_E : E \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|E$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. A ma'sodik állítás bizonyításához tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re az $f|_{T_i} : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|T_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Legyen $F' \subseteq T'$ tetszőleges $\mathscr{T}'$-zárt halmaz. Ekkor $\overset{-1}{f}\langle F'\rangle = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$, és minden $i \in I$ esetén a folytonosság topologikus jellemzése alapján az $\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$ halmaz $\mathscr{T}|T_i$-zárt részhalmaza T_i-nek. De minden $I \ni i$-re T_i a T-nek $\mathscr{T}$-zárt részhalmaza, ezért az $\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt is. Továbbá, a $(T_i)_{i\in I}$ rendszer lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és minden $i \in I$ esetén $\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle \subseteq T_i$, így az $\left(\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle\right)_{i\in I}$ halmazrendszer is lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ezért $\bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$ a T-nek $\mathscr{T}$-zárt részhalmaza, tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján az f függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

Állítás. (*A függvényműveletek folytonossága.*) Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett.

a) Ha az $f, g : T \to F$ függvények folytonosak a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint, akkor az $f + g : T \to F;\ t \mapsto f(t) + g(t)$ függvény folytonos a t_0 pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint.

b) Ha az $f : T \to F$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint, valamint a $\lambda : T \to \mathbb{K}$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$

topológiák szerint, akkor a $\lambda.f : T \to F;\ t \mapsto \lambda(t).f(t)$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint.

c) Ha az $f : T \to F$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint, akkor az $\|f\| : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \|f(t)\|$ függvény folytonos a t_0 pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

d) Ha az $f : T \to \mathbb{K}$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint és minden $t \in T$ esetén $f(t) \neq 0$, akkor az $1/f : T \to \mathbb{K};\ t \mapsto 1/f(t)$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint.

e) Ha az $f, g : T \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor a $\sup(f,g) : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(f(t), g(t))$ és az $\inf(f,g) : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \min(f(t), g(t))$ függvények folytonosak a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Mindegyik esetre felírjuk azokat az egyenlőtlenségeket, amelyekből nyilvánvalóan következik az állítás.

a) Ha $t \in T$, akkor

$$\|(f+g)(t) - (f+g)(t_0)\| := \|(f(t)+g(t)) - (f(t_0)+g(t_0))\| \leq$$

$$\leq \|f(t) - f(t_0)\| + \|g(t) - g(t_0)\|.$$

b) Ha $t \in T$, akkor

$$\|(\lambda.f)(t) - (\lambda.f)(t_0)\| := \|\lambda(t).f(t) - \lambda(t_0).f(t_0)\| \leq$$

$$\leq |\lambda(t) - \lambda(t_0)| \|f(t) - f(t_0)\| + |\lambda(t) - \lambda(t_0)| \|f(t_0)\| + |\lambda(t_0)| \|f(t) - f(t_0)\|.$$

c) Ha $t \in T$, akkor

$$|\|f\|(t) - \|f\|(t_0)| := |\|f(t)\| - \|f(t_0)\|| \leq \|f(t) - f(t_0)\|.$$

d) Ha $t \in T$, akkor

$$|(1/f)(t) - (1/f)(t_0)| := \left| \frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(t_0)} \right| = \frac{|f(t_0) - f(t)|}{|f(t)||f(t_0)|}.$$

Az f függvény folytonos a t_0 pontban és $|f(t_0)| > 0$, ezért bármely $c \in]0, |f(t_0)|[$ rögzített számhoz létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t_0)$, hogy minden $V \ni t$-re $|f(t_0)| - |f(t)| \leq |f(t_0) - f(t)| < c$, így $|f(t)| > |f(t_0)| - c$, vagyis

$$|(1/f)(t) - (1/f)(t_0)| \leq \frac{|f(t_0) - f(t)|}{(|f(t_0)| - c)\,|f(t_0)|}.$$

Tehát ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $W \in \mathscr{T}(t)$ olyan, hogy minden $t \in W$ esetén $|f(t_0) - f(t)| < \varepsilon\,(|f(t_0)| - c)\,|f(t_0)|$, akkor a fenti egyenlőtlenség alapján minden $W \cap V\ \ni$-re $|(1/f)(t) - (1/f)(t_0)| < \varepsilon$ és $W \cap V \in \mathscr{T}(t)$, tehát $1/f$ folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint.

e) Ha $t \in T$, akkor

$$|\max(f,g)(t) - \max(f,g)(t_0)| := |\max(f(t), g(t)) - \max(f(t_0), g(t_0))| \leq$$

$$\leq |f(t) - f(t_0)| + |g(t) - g(t_0)|,$$

$$|\min(f,g)(t) - \min(f,g)(t_0)| := |\min(f(t),g(t)) - \min(f(t_0),g(t_0))| \leq$$

$$\leq |f(t) - f(t_0)| + |g(t) - g(t_0)|$$

teljesül. ∎

Vigyázzunk arra, hogy nyílt (illetve zárt) halmaz folytonos függvény által létesített képe nem szükségképpen nyílt (illetve zárt). Ezért tartalmas a következő definíció.

Definíció. Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor egy $f : T \to T'$ függvényt *nyíltnak* (illetve *zártnak*) nevezünk, ha minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt (illetve $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt) halmazra az $f\langle\Omega\rangle \subseteq T'$ (illetve $f\langle F\rangle \subseteq T'$) halmaz $\mathscr{T}$-nyílt (illetve $\mathscr{T}$-zárt).

Állítás. Ha T halmaz, akkor a T feletti topológiák halmaza a $\subseteq$ relációval ellátva olyan rendezett halmaz, amelynek a T feletti antidiszkrét topológia a legkisebb és a T feletti diszkrét topológia a legnagyobb eleme, továbbá a T feletti topológiák tetszőleges $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszerére létezik a $\sup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ felső határ és az $\inf\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ alsó határ a $\subseteq$ reláció szerint. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a T feletti topológiák halmaza a $\subseteq$ relációval ellátva *teljes rendezett halmaz.*)

Bizonyítás. Legyen $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ T feletti topológiák tetszőleges rendszere. Ha $I = \emptyset$, akkor a T feletti diszkrét topológia a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszer legnagyobb alsó korlátja a $\subseteq$ rendezés szerint. Ha $I \neq \emptyset$, akkor könnyen látható, hogy $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ olyan topológia T felett, amely alsó korlátja a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszernek a $\subseteq$ rendezés szerint, és ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $I \ni i$-re $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_i$, akkor természetesen $\mathscr{T} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$, ezért $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszer legnagyobb alsó korlátja a $\subseteq$ rendezés szerint. Tehát a T feletti topológiák tetszőleges rendszerének létezik infimuma a $\subseteq$ rendezés szerint. Ebből már következik, hogy a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ topológia-rendszer felső korlátjai halmazának az infimuma létezik és egyenlő a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszer szuprémumával a $\subseteq$ remdezés szerint. ∎

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban minden T halmazra a T feletti topológiák halmazát a $\subseteq$ rendezéssel ellátva (teljes) rendezett halmaznak tekintjük. Az előző állítás szerint a T halmaz feletti topológiák bármely $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ nem üres rendszerére $\inf\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$, ugyanakkor a $\sup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ topológiára nem adtunk ilyen explicit formulát. A következő állítás teljes jellemzést ad a topológia-szuprémumra.

Állítás. Legyen T halmaz, $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ T feletti topológiák tetszőleges nem üres rendszere, és értelmezzük a

$$\prod_{i\in I}{}^{*} \mathscr{T}_i := \left\{ (\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i \,\middle|\, \{i \in I | \Omega_i \neq T\} \text{ véges halmaz} \right\}$$

halmazt. Ekkor a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i \in I} \Omega_i \,\middle|\, (\Omega_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}^{*} \mathscr{T}_i \right\}$$

halmaz bázisa a $\sup\limits_{i \in I} \mathscr{T}_i$ topológiának.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely $\mathfrak{B}$-ben haladó nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathfrak{B}$-nek. Legyen ugyanais $((\Omega_{\alpha,i})_{i \in I})_{\alpha \in A}$ nem üres véges rendszer $\prod\limits_{i \in I}^{*} \mathscr{T}_i$-ben. Minden $i \in I$ esetén $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \in \mathscr{T}_i$, mert $\mathscr{T}_i$-re (O_{II}) teljesül, ezért $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \right)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} \mathscr{T}_i$. Továbbá, minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $I_\alpha \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $I \ni i$-re: $\Omega_{\alpha,i} \neq T$ esetén $i \in I_\alpha$. Ha $i \in I$ és $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \neq T$, akkor van olyan $\alpha \in A$, hogy $\Omega_{\alpha,i} \neq T$, így $i \in I_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, \bigcap_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \neq T \right\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha,$$

és itt a jobb oldalon véges halmaz áll, ezért $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \right)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I}^{*} \mathscr{T}_i$. Ebből következik, hogy

$$\bigcap_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i \in I} \Omega_{\alpha,i} \right) = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \right) \in \mathfrak{B}.$$

Értelmezzük a

$$\mathscr{T}' := \left\{ \bigcup_{H \in \mathfrak{B}'} H \,\middle|\, \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B} \right\}$$

halmazt, és vezessük be a $\mathscr{T} := \sup\limits_{i \in I} \mathscr{T}_i$ jelölést. Világos, hogy a $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$ egyenlőséget kell igazolni.

Minden $i \in I$ esetén $\mathscr{T}_i \subseteq \mathscr{T}$, ezért a $\mathscr{T}$-re vonatkozó (O_{II}) feltétel és a $\mathfrak{B}$ értelmezése alapján $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}$, amiből azonnal következik, hogy $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$ is teljesül, mert $\mathscr{T}$-re (O_{III}) teljesül.

Minden $I \ni i$-re $\mathscr{T}_i \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}'$ nyilvánvalóan igaz, ezért ha $\mathscr{T}'$ topológia lenne T felett, akkor $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ is teljesülne, amit bizonyítani kell. A $\mathscr{T}'$-re (O_I) és (O_{III}) triviálisan igaz. Az (O_{II}) bizonyításához legyen $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ nem üres véges rendszer $\mathscr{T}'$-ben; azt kell belátni, hogy $\bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha \in \mathscr{T}'$. Minden $A \ni \alpha$-hoz van olyan $\mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}$ halmaz, hogy $H_\alpha = \bigcup\limits_{H \in \mathfrak{B}_\alpha} H$. Legyen $F := \prod\limits_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$; ekkor az ismert disztributivitás-formula (I. fejezet, 2. pont, **26**. gyakorlat) alapján

$$\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \left(\bigcup_{H \in \mathfrak{H}_\alpha} H \right) = \bigcup_{f \in F} \left(\bigcap_{\alpha \in A} f(\alpha) \right) \in \mathscr{T}',$$

mert a definíció szerint minden $f \in F$ esetén minden $A \ni \alpha$-ra $f(\alpha) \in \mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}$, ezért $\bigcap_{\alpha\in A} f(\alpha) \in \mathfrak{B}$, mert láttuk, hogy bármely $\mathfrak{B}$-ben haladó nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathfrak{B}$-nek. ∎

Tétel. Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény. Ekkor létezik T felett olyan $\mathscr{T}$ topológia, amely a legkisebb mindazon T feletti topológiák között, amelyekre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Minden $I \ni i$-re legyen $\overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i] := \left\{ \overset{-1}{f_i}\langle\Omega_i\rangle \,\middle|\, \Omega_i \in \mathscr{T}_i \right\}$. Ekkor $i \in I$ esetén $\overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i]$ topológia T felett; legyen $\mathscr{T} := \sup_{i\in I} \overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i]$. Ha $i \in I$ és $\Omega_i \in \mathscr{T}_i$, akkor a definíció szerint $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega_i\rangle \in \overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i] \subseteq \mathscr{T}$, tehát minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni i$-re és $\mathscr{T}_i \ni \Omega_i$-re $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega_i\rangle \in \mathscr{T}'$, így $\overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i] \subseteq \mathscr{T}'$, vagyis a $\mathscr{T}$ definíciója alapján $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ az topológia, amely a legkisebb mindazon T feletti topológiák között, amelyekre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. ∎

Definíció. Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény. Ekkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által *projektívan előállított* (vagy *iniciális*) T feletti topológiának nevezzük azt a legkisebb T feletti $\mathscr{T}$ topológiát, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Az előző tétel bizonyításából látható, hogy ha T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek nem üres rendszere és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény, akkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által előállított T feletti $\mathscr{T}$ iniciális topológiára $\mathscr{T} = \sup_{i\in I} \overset{-1}{f}_i[\mathscr{T}_i]$ teljesül, ezért a topológiák inverz képének definíciója és a szuprémum-topológiák jellemzésére vonatkozó korábbi állításunk szerint a

$$\left\{ \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}_i\langle\Omega_i\rangle \,\middle|\, \left((\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i\right) \wedge (\{i \in I | \Omega_i \neq T_i\} \text{ véges halmaz}) \right\}$$

halmaz bázisa a $\mathscr{T}$ topológiának.

Tehát ha T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T \to T'$ függvény, akkor az $\overset{-1}{f}[\mathscr{T}']$ topológia megegyezik a $((T', \mathscr{T}'), f)$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológiával. Speciálisan, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor a $\mathscr{T}|E$ altértopológia megegyezik a $((T, \mathscr{T}), in_{E,T})$ rendszer által előállított E feletti iniciális topológiával, ahol $in_{E,T}$ az $E \to T$ kanonikus injekció.

Állítás. Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény.

a) Ha $\mathscr{T}$ a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológia, akkor minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T' \to T$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

b) Ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T' \to T$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, akkor $\mathscr{T}$ megegyezik a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológiával.

Bizonyítás. a) Ha az $f : T' \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, akkor minden $i \in I$ esetén az $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, mert $f_i : T \to T_i$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, és folytoos függvények kompozíciója folytonos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ha $i \in I$ és $\Omega_i \in \mathscr{T}_i$, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján

$$\overset{-1}{f}\langle \overset{-1}{f_i}\langle\Omega_i\rangle\rangle = \overset{-1}{(f_i \circ f)}\langle\Omega_i\rangle \in \mathscr{T}',$$

tehát $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega_i\rangle \in f[\mathscr{T}'] := \left\{ \Omega \in \mathscr{P}(T) \;\middle|\; \overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}' \right\}$. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos az $f[\mathscr{T}']$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Az iniciális topológia definíciója alapján $\mathscr{T} \subseteq f[\mathscr{T}']$, vagyis minden $\Omega \in \mathscr{T}$ esetén $\overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}'$, tehát f folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

b) Legyen $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T' \to T$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Az $id_T : T \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, így a feltételt alkalmazva a $(T', \mathscr{T}') := (T, \mathscr{T})$ topologikus térre és az $f := id_T$ függvényre kapjuk, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i = f_i \circ id_T : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Megfordítva, ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i \circ id_T = f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, akkor a feltételt alkalmazva a $(T, \mathscr{T}')$ topologikus térre és az id_T függvényre kapjuk, hogy id_T folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ami azzal ekvivalens, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ a legkisebb topológia T felett, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. ■

Következmény. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, $E \subseteq T$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér, akkor egy $f : T' \to E$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}|E$ topológiák szerint, ha f folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

Definíció. (*Szorzattopológia.*) Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, és minden $I \ni j$-re jelölje pr_j a $\prod_{i\in I} T_i \to T_j$ projekció-függvényt. Ekkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), pr_i)_{i\in I}$ rendszer által előállított $\prod_{i\in I} T_i$ feletti iniciális topológiát a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ *topológia-rendszer szorzatának* nevezzük, és a $\underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$ szimbólummal jelöljük. A $\left(\prod_{i\in I} T_i, \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i\right)$ topologikus teret a $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ *topologikus tér-rendszer szorzatának* nevezzük. Ha minden $i \in I$ esetén $(T_i, \mathscr{T}_i) = (T, \mathscr{T})$ ugyanaz a topologikus tér, akkor $\prod_{i\in I} T_i = \mathscr{F}(I;T) = T^I$, és ekkor a $\underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$ topológiát a $\mathscr{T}^I$ szimbólummal jelöljük, továbbá a $\left(T^I, \mathscr{T}^I\right)$ alakú topologikus tereket *topologikus kockáknak* nevezzük. Speciálisan, a $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ alakú topologikus kockákat *euklidészi kockáknak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a definíció szerint tetszőleges $(T, \mathscr{T})$ topologikus térre és tetszőleges I halmazra, az *összes* $I \to T$ függvények halmaza (vagyis T^I-n) felett van értelmezve a $\mathscr{T}^I$ szorzattopológia; ez a legkisebb olyan $\mathscr{F}(I;T)$ feletti topológia, amelyre teljesül az, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathscr{F}(I;T) \to T;\ f \mapsto f(i)$ függvény folytonos. A függvényhalmazok feletti topológiákkal a XIV. fejezetben foglalkozunk részletesen.

Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy ha $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek nem üres rendszere, akkor a

$$\left\{ \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{pr_i}\langle \Omega_i \rangle \,\middle|\, \left((\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i \right) \wedge (\{i \in I | \Omega_i \neq T_i\} \text{ véges halmaz}) \right\}$$

halmaz bázisa a $\underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$ topológiának.

Emlékeztetünk arra, hogy ha $(T_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer, $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ és $k \in I$, akkor $in_{k,t}$ jelöli azt a $T_k \to \prod_{i\in I} T_i$ függvényt, amelynek k-adik komponens-függvénye egyenlő a $T_k \to T_k$ identikus függvénnyel, és minden $I \setminus \{k\} \ni i$-re az i-edik komponens-függvénye egyenlő a t_i értékű $T_k \to T_i$ konstansfüggvénnyel (V. fejezet, 6. pont).

Állítás. Ha $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : \prod_{i\in I} T_i \to T'$ olyan függvény, amely a $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ pontban folytonos a $\underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni k$-ra az $f \circ in_{k,t} : T_k \to T'$ függvény folytonos a t_k pontban a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. A folytonos függvények kompozíciójának folytonossága miatt az állítás *ekvivalens* azzal, hogy minden $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ pontra és $I \ni k$-ra az $in_{k,t} : T_k \to$

$\prod_{i\in I} T_i$ függvény folyonos a t_k pontban a $\mathscr{T}_k$ és $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ennek bizonyításához elég azt igazolni, hogy minden $j, k \in I$ és $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ esetén a $pr_j \circ in_{k,t} : T_k \to T_j$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint. Ez viszont igaz, mert ha $j = k$, akkor $pr_j \circ in_{k,t} = id_{T_k}$ folytonos a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint, míg $j \neq k$ esetén $pr_j \circ in_{k,t}$ egyenlő a t_j értékű $T_k \to T_j$ konstansfüggvénnyel, ami szintén folytonos a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint. ■

Állítás. Legyenek $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ és $((T_i', \mathscr{T}_i'))_{i\in I}$ topologikus terek rendszerei (ugyanazzal az I indexhalmazzal), és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T_i \to T_i'$ folytonos függvény a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_i'$ topológiák szerint. Ekkor a

$$\times_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} T_i \to \prod_{i\in I} T_i', \quad (t_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(t_i))_{i\in I}$$

függvény folytonos a $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Minden $j \in I$ esetén legyen pr_j a $\prod_{i\in I} T_i \to T_j$ projekció-függvény, és pr_j' a $\prod_{i\in I} T_i' \to T_j'$ projekció-függvény. Tudjuk, hogy a $\times_{i\in I} f_i$ függvény pontosan akkor folytonos a $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni j$-re a $pr_j' \circ \left(\times_{i\in I} f_i\right) : \prod_{i\in I} T_i \to T_j'$ függvény folytonos a $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_j'$ topológiák szerint. A $\times_{i\in I} f_i$ függvény definíciója alapján nyilvánvaló, hogy minden $j \in I$ esetén

$$pr_j' \circ \left(\times_{i\in I} f_i\right) = f_j \circ pr_j,$$

továbbá a $pr_j : \prod_{i\in I} T_i \to T_j$ függvény folytonos a $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint, valamint $f_j : T_j \to T_j'$ a hipotézis alapján folytonos a $\mathscr{T}_j$ és $\mathscr{T}_j'$ toplógiák szerint, ezért az $f_j \circ pr_j : \prod_{i\in I} T_i \to T_j'$ függvény folytonos a $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_j'$ topológiák szerint, hiszen folytonos függvények kompozíciója folytonos. ■

Állítás. Ha $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, J halmaz és $\sigma : J \to I$ bijekció, akkor az

$$f : \prod_{i\in I} T_i \to \prod_{j\in J} T_{\sigma(j)}; \quad (t_i)_{i\in I} \mapsto (t_{\sigma(j)})_{j\in J}$$

függvény *homeomorfizmus* a $\left(\prod_{i\in I} T_i, \times_{i\in I} \mathscr{T}_i\right)$ és $\left(\prod_{j\in J} T_{\sigma(j)}, \times_{j\in J} \mathscr{T}_{\sigma(j)}\right)$ topologikus terek között.

Bizonyítás. Vezessük be a $T := \prod_{i \in I} T_i$, $T' := \prod_{j \in J} T_{\sigma(j)}$, $\mathscr{T} := \bigtimes_{i \in I} \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}' := \bigtimes_{j \in J} \mathscr{T}_{\sigma(j)}$ jelöléseket, továbbá $i \in I$ és $j \in J$ esetén legyenek $pr_i : T \to T_i$ és $pr'_j : T' \to T_{\sigma(j)}$ a projekció-függvények. Az f függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $J \ni j$-re a $pr'_j \circ f : T \to T_{\sigma(j)}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\sigma(j)}$ topológiák szerint. Az f definíciójából látható, hogy $j \in J$ esetén $pr'_j \circ f = pr_{\sigma(j)}$, és a szorzattopológia értelmezése alapján $pr_{\sigma(j)}$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\sigma(j)}$ topológiák szerint. Tehát f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Világos, hogy a

$$g : \prod_{j \in J} T_{\sigma(j)} \to \prod_{i \in I} T_i; \quad (t'_j)_{j \in J} \mapsto \left(t'_{\sigma^{-1}(i)}\right)_{i \in I}$$

függvény az f inverze, és g pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $pr_i \circ g : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. A g definíciójából látható, hogy minden $i \in I$ esetén $pr_i \circ g = pr'_{\sigma^{-1}(i)}$ és a szorzattopológia értelmezése alapján a $pr'_{\sigma^{-1}(i)}$ projekció-függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Tehát f^{-1} folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. ■

Állítás. Metrizálható terek megszámlálható rendszerének topologikus szorzata metrizálható topologikus tér.

Bizonyítás. Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek olyan rendszere, hogy I megszámlálható halmaz és minden $I \ni i$-re a $(T_i, \mathscr{T}_i)$ topologikus tér metrizálható. *Kiválaszthatunk* olyan $(d_i)_{i \in I}$ rendszert, hogy minden $i \in I$ esetén d_i metrika T_i felett és $\mathscr{T}_i = \mathscr{T}_{d_i}$, valamint minden $(t, t') \in T_i \times T_i$ párra $d_i(t, t') \leq 1$ (V. fejezet, 2. pont, 1. példa). Legyen $T := \prod_{i \in I} T_i$, $\mathscr{T} := \bigtimes_{i \in I} \mathscr{T}_i$, és minden $I \ni i$-re pr_i a $T \to T_i$ projekció-függvény. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér metrizálhatóságát három lépésben bizonyítjuk.

(I) Először feltesszük, hogy I *véges.* Ekkor képezhető a $((T_i, d_i))_{i \in I}$ véges metrikustér-rendszer szorzata, amelynek topológiája megegyezik a $\prod_{i \in I} T_i$ szorzattopológiával (V. fejezet, 4. pont).

(II) Most feltesszük, hogy $I = \mathbb{N}$. Legyen $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{R}^+$-ban, hogy a $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és értelmezzük a

$$d : T \times T \to \mathbb{R}_+; \quad ((t_k)_{k \in \mathbb{N}}, (t'_k)_{k \in \mathbb{N}}) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k(t_k, t'_k)$$

függvényt. Könnyen látható, hogy d metrika a T szorzathalmaz felett; megmutatjuk, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$.

Legyen $t := (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in T$ és $V \in \mathscr{T}_d(t)$. Rögzítsünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $B_\varepsilon(t; d) \subseteq V$. Vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k < \frac{\varepsilon}{2}$, és legyen minden $k \leq N$ természetes számra $\varepsilon_k := \dfrac{\varepsilon/2}{(N+1)c_k}$. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra legyen $\Omega_k := B_{\varepsilon_k}(t_k; d_k)$, ha $k \leq N$, és $\Omega_k := T_k$, ha $k > N$. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_k \in \mathscr{T}_{d_k} = \mathscr{T}_k$, és $\{k \in \mathbb{N} | \Omega_k \neq T_k\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} | k \leq N\}$ véges halmaz, tehát a szorzattopológia értelmezése alapján $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \in \mathscr{T}$. Ugyanakkor $t \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, tehát $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \in \mathscr{T}(t)$. Állítjuk, hogy $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \subseteq B_\varepsilon(t; d)$. Valóban, ha $(t'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, akkor $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq N$ esetén $t'_k \in B_{\varepsilon_k}(t_k; d_k)$, tehát

$$d\left((t_k)_{k\in\mathbb{N}}, (t'_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k(t_k, t'_k) = \sum_{k=0}^{N} c_k d_k(t_k, t'_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k d_k(t_k, t'_k) <$$

$$< \sum_{k=0}^{N} c_k \varepsilon_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{\varepsilon/2}{(N+1)c_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k < \varepsilon,$$

amint állítottuk. Ebből következik, hogy $V \in \mathscr{T}(t)$. Ezért $\mathscr{T}_d \subseteq \mathscr{T}$ teljesül.

Megfordítva, legyen $t := (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in T$ és $V \in \mathscr{T}(t)$. Létezik olyan $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\Omega_k \in \mathscr{T}_k = \mathscr{T}_{d_k}$, és $\{k \in \mathbb{N} | \Omega_k \neq T_k\}$ véges halmaz, és $t \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \subseteq V$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $\Omega_k = T_k$. Minden $k \leq N$ természetes számhoz válasszunk olyan $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $B_{\varepsilon_k}(t_k; d_k) \subseteq \Omega_k$, és legyen $\varepsilon := \min\limits_{0\leq k\leq N}(c_k\varepsilon_k)$. Állítjuk, hogy $B_\varepsilon(t; d) \subseteq \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Valóban, ha $(t'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B_\varepsilon(t; d)$, akkor minden $k \leq N$ természetes számra $d_k(t_k, t'_k) < \varepsilon_k$, hiszen ha $n \leq N$ olyan természetes szám volna, hogy $d_n(t_n, t'_n) \geq \varepsilon_n$, akkor

$$\varepsilon := \min_{0\leq k\leq N}(c_k\varepsilon_k) \leq c_n\varepsilon_n \leq c_n d_n(t_n, t'_n) \leq \sum_{k=0}^{N} c_k d_k(t_k, t'_k) \leq d\left((t_k)_{k\in\mathbb{N}}, (t'_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) < \varepsilon$$

teljesülne, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy $V \in \mathscr{T}_d(t)$. Ezért $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_d$ teljesül.

(III) Végül feltesszük, hogy I *megszámlálhatóan végtelen* halmaz. Ekkor létezik $\sigma : \mathbb{N} \to I$ bijekció, így az előző állításból következik, hogy a $\left(\prod\limits_{i\in I} T_i, \mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i\right)$ és $\left(\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} T_{\sigma(k)}, \mathop{\times}\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_{\sigma(k)}\right)$ topologikus terek homeomorfak, ugyanakkor az utóbbi a (II) alapján metrizálható, ezért $\left(\prod\limits_{i\in I} T_i, \mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i\right)$ metrizálható topologikus tér. ■

Tétel. Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény. Ekkor létezik olyan T feletti legnagyobb $\mathscr{T}$ topológia, amelyre teljesül az, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Minden $i \in I$ esetén $f_i[\mathscr{T}_i] := \left\{ \Omega \in \mathscr{P}(T) \,\middle|\, \overset{-1}{f_i}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i \right\}$ topológia T felett; legyen $\mathscr{T} := \inf_{i \in I} f_i[\mathscr{T}_i]$. Ha $i \in I$ és $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor a definíció szerint $\Omega \in f_i[\mathscr{T}_i]$, vagyis $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i$, tehát az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. Ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, akkor minden $i \in I$ és $\Omega \in \mathscr{T}'$ esetén $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i$, vagyis $\Omega \in f_i[\mathscr{T}_i]$, tehát $\Omega \in \mathscr{T}$, így $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ a legnagyobb T feletti topológia, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. ■

Definíció. Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere, és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény. Ekkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által *induktívan előállított* (vagy *finális*) T feletti topológiának nevezzük azt a legnagyobb T feletti $\mathscr{T}$ topológiát, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Az előző tétel bizonyításából látszik, hogy ha T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere, és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény, akkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított T feletti $\mathscr{T}$ topológiára $\mathscr{T} = \inf_{i \in I} f_i[\mathscr{T}_i]$ teljesül, ezért a topológiák képének definíciója szerint

$$\mathscr{T} = \{ \Omega \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall\, i \in I) : \overset{-1}{f}_i\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i \}$$

teljesül.

Tehát ha T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T' \to T$ függvény, akkor az $f[\mathscr{T}']$ topológia megegyezik a $((T', \mathscr{T}'), f)$ rendszer által induktívan előállított T feletti topológiával. Speciálisan, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és R ekvivalencia-reláció T felett, akkor a $\mathscr{T}/R$ faktortopológia megegyezik a $((T, \mathscr{T}), \pi_{T/R})$ rendszer által induktívan előállított T/R feletti topológiával, ahol $\pi_{T/R}$ a $T \to T/R$ kanonikus szürjekció.

Állítás. Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény.

a) Ha $\mathscr{T}$ a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított T feletti topológia, akkor minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T \to T'$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

b) Ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T \to T'$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor $\mathscr{T}$ megegyezik a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított T feletti topológiával.

Bizonyítás. a) Ha az $f : T \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni i$-re az $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, mert folytonos függvények kompozíciója folytonos, és minden $i \in I$ esetén az f_i függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén az $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Legyen $\Omega' \in \mathscr{T}'$; ekkor a folytonosság topologikus jellemzésének ismeretében azt kell igazolni, hogy $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}$. Az $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \subseteq T$ halmaz olyan, hogy minden $i \in I$ esetén

$$\overset{-1}{f_i}\langle\,\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle\rangle = (\overset{-1}{f \circ f_i})\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}_i,$$

hiszen $f \circ f_i$ folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in f_i[\mathscr{T}_i]$, tehát az induktívan előállított topológiák értelmezése alapján $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \inf\limits_{i \in I} f_i[\mathscr{T}_i] = \mathscr{T}$.

b) Legyen $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T \to T'$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Az $id_T : T \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ezért a feltételt alkalmazva a $(T', \mathscr{T}') := (T, \mathscr{T})$ topologikus térre és $f := id_T$ függvényre kapjuk, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i = id_T \circ f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i = id_T \circ f_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor a hipotézist alkalmazva a $(T, \mathscr{T}')$ topologikus térre és az id_T függvényre kapjuk, hogy id_T folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ami azzal ekvivalens, hogy $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$. Tehát $\mathscr{T}$ a legnagyobb topológia T felett, amelyre minden $i \in I$ esetén az f_i függvény folytonos $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ szerint. ■

Következmény. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, R ekvivalencia-reláció T felett, és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér, akkor egy $f : T/R \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}/R$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha az $f \circ \pi_{T/R} : T \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

Definíció. (*Összegtopológia.*) Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere, $T := \bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times T_i)$ és minden $I \ni i$-re értelmezzük az $f_i : T_i \to T;\ t \mapsto (i, t)$ függvényt. A $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által előállított T feletti finális topológiát a $(\mathscr{T}_i)_{i \in I}$ *topológia-rendszer összegének* nevezzük, és a $\bigvee\limits_{i \in I} \mathscr{T}_i$ szimbólummal jelöljük. Az $\left(\bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times T_i), \bigvee\limits_{i \in I} \mathscr{T}_i\right)$ topologikus teret a $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ *topologikus tér-rendszer összegének* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha $(T_i)_{i \in I}$ tetszőleges rendszer, akkor a $\bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times T_i)$ halmazt a $\bigvee\limits_{i \in I} T_i$ szimbólummal is jelöljük, és a $(T_i)_{i \in I}$ rendszer *halmazösszegének* vagy *diszjunkt uniójának* nevezzük.

Definíció. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Azt mondjuk, hogy a $C \subseteq T$ halmaz *összefüggő* a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha nem léteznek olyan $E, F \subseteq T$ halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $E \cap \overline{F} = \emptyset = \overline{E} \cap F$. Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *összefüggő*, ha a T halmaz összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Könnyen belátható, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a $C \subseteq T$ halmaz pontosan akkor összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha a $(C, \mathscr{T}|C)$ topologikus altér összefüggő topologikus tér.

Állítás. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) $(T, \mathscr{T})$ összefüggő topologikus tér.

(ii) Minden $E \subseteq T$ halmazra, ha E nyílt és zárt a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $E = \emptyset$ vagy $E = T$,

(iii) Minden $E \subseteq T$ halmazra, ha $E \neq \emptyset$ és $E \neq T$, akkor $Fr(E) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Szó szerint követhetjük az V. fejezet 10. pontjában kimondott, metrikus terekre vonatkozó analóg állítás bizonyítását. ■

Tétel. (*Darboux-tétel.*) Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, az $f : T \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és a $C \subseteq T$ halmaz összefüggő $\mathscr{T}$ szerint, akkor az $f\langle C \rangle \subseteq T'$ halmaz összefüggő $\mathscr{T}'$ szerint.

Bizonyítás. Ugyanúgy bizonyítható, mint az V. fejezet 10. pontjában igazolt Darboux-tétel. ■

Állítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Ha $C \subseteq T$ összefüggő halmaz a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $\overline{C}$ is összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $(C_i)_{i \in I}$ olyan nem üres rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $C_i \subseteq T$ összefüggő halmaz a $\mathscr{T}$ topológia szerint és $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, akkor az $\bigcup_{i \in I} C_i$ halmaz összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Minden $t \in T$ ponthoz létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb $C \subseteq T$ halmaz, amely összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint és $t \in C$ (ez a t pont *összefüggő komponense* a $\mathscr{T}$ topológia szerint).

Bizonyítás. Az állítás az V. fejezet 10. pontjában kimondott, metrikus terekre vonatkozó analóg kijelentések bizonyítását követve igazolható. ■

2. Szétválasztási tulajdonságok

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér:

- T_0-*tér*, ha minden $t, t' \in T$ pontra, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ hogy $t' \notin V$ *vagy* létezik olyan $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $t \notin V'$;

- T_1-*tér*, ha minden $t, t' \in T$ pontra, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ hogy $t' \notin V$ *és* létezik olyan $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $t \notin V'$;

- T_2-*tér*, ha minden $t, t' \in T$ pontra, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ és $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $V \cap V' = \emptyset$.

Megemlítjük, hogy a T_1-tereket *Kolmogorov-tereknek*, míg a T_2-tereket *Hausdorff-tereknek* is nevezzük. E két elnevezés közül csak az utóbbi terjedt el széles körben. A Hausdorff-tereket még *szeparált topologikus tereknek* is nevezzük.

Logikai okok miatt nyilvánvaló, hogy minden T_1-tér T_0-tér és minden T_2-tér T_1-tér. Antidiszkrét topologikus tér nem T_0-tér, ha az alaphalmaz legalább két elemű, hiszen ilyen térben bármely két pontnak ugyanazok a környezetei.

Létezik olyan T_0-tér, amely nem T_1-tér. Legyen például $\mathscr{T}$ azon $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ halmazok halmaza, amelyekre teljesül az, hogy minden $t \in \Omega$ esetén $[t, \rightarrow [\subseteq \Omega$. Ekkor $\mathscr{T}$ topológia $\mathbb{R}$ felett, és az $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ topologikus tér T_0-tér, de nem T_1-tér. Valóban, ha $t, t' \in \mathbb{R}$ és $t \neq t'$, akkor $t < t'$ vagy $t' < t$; az első esetben $[t', \rightarrow [\in \mathscr{T}(t')$ és $t \notin [t', \rightarrow [$, míg a második esetben $[t, \rightarrow [\in \mathscr{T}(t)$ és $t' \notin [t, \rightarrow [$. Ugyanakkor $t < t'$ esetén *minden* $\mathscr{T}(t) \ni V$-re $t' \in V$, és $t' < t$ esetén *minden* $\mathscr{T}(t') \ni V'$-re $t \in V'$, ezért $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ nem T_1-tér.

Létezik olyan T_1-tér, amely nem T_2-tér. Tekintsük például azt az R relációt a $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum felett, amlyet úgy értelmezünk, hogy $R := \{(t, t) | t \in [-1, 1]\} \cup \{(t, -t) | t \in [-1, 1]\}$. Ekkor R ekvivalencia-reláció $[-1, 1]$ felett, és könnyen ellenőrizhető, hogy a $([-1, 1], \mathscr{E}_{\mathbb{R}}/[-1, 1])$ topologikus faktortér T_1-tér, de nem T_2-tér.

Nyilvánvaló, hogy minden metrizálható topologikus tér Hausdorff-tér.

Állítás. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor T_1-tér, ha minden $t \in T$ esetén a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ T_1-tér és $t \in T$. Ha $t' \in T \setminus \{t\}$, akkor $t \neq t'$, tehát létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $t' \notin V$, és létezik olyan $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $t \notin V'$; ekkor $V' \subseteq T \setminus \{t\}$, tehát t' belső pontja a $T \setminus \{t\}$ halmaznak $\mathscr{T}$ szerint. Ez azt jelenti, hogy $T \setminus \{t\}$ nyílt a $\mathscr{T}$ topológia szerint, tehát a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $t \in T$ esetén a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt. Legyenek $t, t' \in T$ olyanok, hogy $t \neq t'$. A hipotézis szerint $V := T \setminus \{t'\}$ és $V' := T \setminus \{t\}$ mindketten nyílt halmazok, és $t \in V$ (tehát $V \in \mathscr{T}(t)$), $t' \in V'$ (tehát $V' \in \mathscr{T}(t')$), valamint nyilvánvalóan $t \notin V'$ és $t' \notin V$. Ez azt jelenti, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér T_1-tér. ■

Állítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér. Ha $f, g : T \to T'$ olyan függvények, amelyek folytonosak a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor a $\{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.

Bizonyítás. Legyen $t_0 \in T \setminus \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ rögzített. Ekkor $f(t_0) \neq g(t_0)$, és $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér, tehát létezik olyan $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$ és $W' \in \mathscr{T}'(g(t))$, hogy $V' \cap W' = \emptyset$. Az f és g függvények t_0 pontbeli folytonossága miatt van olyan $V \in \mathscr{T}(t_0)$ és $W \in \mathscr{T}(t_0)$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$ és $g\langle W\rangle \subseteq W'$. Ekkor $V \cap W \in \mathscr{T}(t_0)$, és ha $t \in V \cap W$, akkor $f(t) \in V'$ és $g(t) \in W'$, így $V' \cap W' = \emptyset$ miatt $f(t) \neq g(t)$. Ez azt jelenti, hogy $V \cap W \subseteq T \setminus \{t \in T | f(t) = g(t)\}$, tehát t_0 belső pontja a $T \setminus \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaznak $\mathscr{T}$ szerint, így a $\{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt. ■

Következmény. (*Az egyenlőségek folytatásának elve.*) Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér. Ha $f, g : T \to T'$ olyan függvények, amelyek folytonosak a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és $E \subseteq T$ olyan halmaz, hogy $f = g$ az E halmazon, akkor $f = g$ az $\overline{E}$ halmazon.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint a $\{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, és a hipotézis alapján $E \subseteq \{t \in T | f(t) = g(t)\}$, így $\overline{E} \subseteq \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ is nyilvánvalóan teljesül. ■

Állítás. Hausdorff-terek topologikus szorzata Hausdorff-tér.

Bizonyítás. Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ Hausdorff-terek tetszőleges rendszere és legyenek $(t_i)_{i\in I}, (t'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ olyan pontok, hogy $(t_i)_{i\in I} \neq (t'_i)_{i\in I}$. Legyen $k \in I$ olyan, hogy $t_k \neq t'_k$. A $(T_k, \mathscr{T}_k)$ topologikus tér Hausdorff-tér, így léteznek olyan $\Omega_k, \Omega'_k \in \mathscr{T}_k$ halmazok, hogy $\Omega_k \cap \Omega'_k = \emptyset$ és $t_k \in \Omega_k$, valamint $t'_k \in \Omega'_k$. Ekkor $(t_i)_{i\in I} \in \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega_k\rangle \in \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$ és $(t'_i)_{i\in I} \in \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega'_k\rangle \in \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$, továbbá $\Omega_k \cap \Omega'_k = \emptyset$ miatt $\overset{-1}{pr_k}\langle\Omega_k\rangle \cap \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega'_k\rangle = \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega_k \cap \Omega'_k\rangle = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $\left(\prod_{i\in I} T_i, \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i\right)$ Hausdorff-tér. ■

Definíció. Legyenek $(T, \mathscr{T})$, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, $f : T \rightarrowtail T'$ (nem feltétlenül mindenütt értelmezett) függvény, és $t \in T$ a $Dom(f)$ halmaznak torlódási pontja a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek *létezik határértéke* a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha

$$(\exists\, t' \in T')(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'))(\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) :\ f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'$$

teljesül.

Állítás. Legyenek $(T, \mathscr{T})$, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, $f : T \rightarrowtail T'$ függvény, és $t \in T$ a $Dom(f)$ halmaznak torlódási pontja a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér, akkor legfeljebb egy olyan $t' \in T'$ létezik, amelyre

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'))(\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) :\ f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'$$

teljesül.

Bizonyítás. Ugyanúgy bizonyíthatunk, mint az V. fejezet 3. pontjában. ■

Definíció. Legyenek $(T, \mathscr{T})$, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, $f : T \rightarrowtail T'$ függvény, és $t \in T$ a $Dom(f)$ halmaznak torlódási pontja a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér és létezik az f függvénynek határértéke a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor $\lim_t f$ jelöli azt az egyértelműen meghatározott pontot T'-ben, amelyre teljesül az, hogy minden $V' \in \mathscr{T}'\left(\lim_t f\right)$ esetén van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'$; és ezt a $\lim_t f \in T'$ pontot az f függvény *határértékének* nevezzük a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

A topologikus terek között ható függvények határértékére vonatkozóan könnyen igazolható az V. fejezet 6. pontjában megfogalmazott állítások nagy része, csak arra kell vigyázni, hogy az érkezési tér mindig Hausdorff-tér legyen. A továbbiakban nem használjuk a határérték általános fogalmát, viszont szükségünk lesz a metrikus térben haladó sorozatok konvergenciája fogalmának topologikus általánosítására.

Definíció. A reflexív és tranzitív relációkat *előrendezéseknek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy I *előrendezett halmaz*, ha adott I felett egy előrendezés. Az I halmaz feletti $\leq$ előrendezést *felfelé irányítottnak* nevezzük, ha minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $i_1 \leq i$ és $i_2 \leq i$.

Például egy halmaz feletti *lineáris rendezés* nyilvánvalóan felfelé irányított rendezés. Ennek leggyakrabban előforduló speciális esete az, amikor a halmaz $\mathbb{N}$ és a lineáris rendezés az $\mathbb{N}$ feletti természetes rendezés.

Az $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ halmaz felett vezessük be azt a $\leq$ relációt, amelyre $(i,j), (i',j') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ esetén $(i,j) \leq (i',j')$ azt jelenti, hogy $i < i'$ (az $\mathbb{N}$ természetes rendezése szerint), vagy $i = i'$ és $j \leq j'$ (az $\mathbb{N}$ természetes rendezése szerint). Könnyen látható, hogy $\leq$ olyan felfelé irányított rendezés $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ felett, amely nem lineáris rendezés.

Definíció. *Általánosított sorozatnak* nevezünk minden olyan $(t_i)_{i\in I}$ rendszert, amelynek I indexhalmaza nem üres, felfelé irányított előrendezett halmaz. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor azt mondjuk, hogy a T-ben haladó $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat *konvergál a $t \in T$ ponthoz* a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha

$$(\forall\ V \in \mathscr{T}(t))(\exists\ i \in I)(\forall\ j \in I) :\ (i \leq j) \Rightarrow (t_j \in V)$$

teljesül. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor azt mondjuk, hogy a T-ben haladó $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat *konvergens* a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha létezik olyan $t \in T$, amelyhez $(t_i)_{i\in I}$ konvergál $\mathscr{T}$ szerint.

Vigázzunk arra, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a T-ben haladó $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat *több* ponthoz is konvergálhat $\mathscr{T}$ szerint; sőt ha $\mathscr{T}$ egyenlő a T feletti antidiszkrét topológiával, akkor *minden* T-ben haladó $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál *minden* $t \in T$ ponthoz $\mathscr{T}$ szerint.

Állítás. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor Hausdorff-tér, ha minden T-ben haladó általánosított sorozathoz legfeljebb egy olyan pont létezik T-ben, amelyhez az adott általánosított sorozat konvergál $\mathscr{T}$ szerint.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(T, \mathscr{T})$ Hausdorff-tér, és legyen $(t_i)_{i \in I}$ olyan T-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint a $t \in T$ és $t' \in T$ pontokhoz. Ha $t \neq t'$ volna, akkor léteznek olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ és $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $V \cap V' = \emptyset$. Ekkor léteznek olyan $i_V \in I$ és $i_{V'} \in I$, hogy minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_V$, akkor $t_i \in V$, illetve, ha $i \geq i_{V'}$, akkor $t_i \in V'$. Az I előrendezett halmaz felfelé irányított, ezért volna olyan $i \in I$, hogy $i \geq i_V$ és $i \geq i_{V'}$ egyszerre teljesülne; ekkor $t_i \in V \cap V'$, holott $V \cap V' = \emptyset$.

Tegyük fel, hogy $(T, \mathscr{T})$ nem Hausdorff-tér; olyan T-ben haladó általánosított sorozatot keresünk, amely különböző pontokhoz konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint. A hipotézis alapján vehetünk olyan $t, t' \in T$ pontokat, hogy $t \neq t'$, de minden $V \in \mathscr{T}(t)$ és minden $V' \in \mathscr{T}(t')$ esetén $V \cap V' \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma szerint a $\prod\limits_{(V,V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')} (V \cap V')$ nem üres; legyen $(t_{V,V'})_{(V,V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ halmaz felett bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $(V, V'), (W, W') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ esetén $(V, V') \leq (W, W')$ pontosan akkor teljesüljön, ha $W \subseteq V$ és $W' \subseteq V'$. Ekkor $(\mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t'), \leq)$ olyan rendezett halmaz, amely felfelé irányított, mert $\mathscr{T}(t)$ és $\mathscr{T}(t')$ rácsok. Állítjuk, hogy a $(t_{V,V'})_{(V,V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')}$ általánosított sorozat t-hez is és t'-höz is konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Valóban, ha $V \in \mathscr{T}(t)$, akkor $(V, T) \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ olyan, minden $(W, W') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ esetén, ha $(V, T) \leq (W, W')$, akkor $W \subseteq V$, így $t_{W,W'} \in W \cap W' \subseteq W \subseteq V$; tehát $(t_{V,V'})_{(V,V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')}$ konvergál a t ponthoz a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ugyanakkor $V' \in \mathscr{T}(t')$ esetén $(T, V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ olyan, minden $(W, W') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ esetén, ha $(T, V') \leq (W, W')$, akkor $W' \subseteq V'$, így $t_{W,W'} \in W \cap W' \subseteq W' \subseteq V'$; tehát $(t_{V,V'})_{(V,V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')}$ konvergál a t' ponthoz a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

Definíció. Ha $(T, \mathscr{T})$ Hausdorff-tér és $(t_i)_{i \in I}$ olyan T-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergens $\mathscr{T}$ szerint, akkor $\lim\limits_{i,\ I} t_i$ jelöli a T-nek azt az egyetlen pontját, amelyhez $(t_i)_{i \in I}$ konvergál $\mathscr{T}$-szerint, és ezt a $\lim\limits_{i,\ I} t_i \in T$ pontot a $(t_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat *határértékének*, vagy *limeszpontjának* nevezzük $\mathscr{T}$ szerint.

Példa. (*Szummálható rendszerek normált terekben.*) Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $(x_i)_{i \in I}$ tetszőleges nem üres E-ben haladó rendszer. Jelölje $\mathscr{P}_0(I)$ az I nem üres véges részhalmazainak halmazát, és rendezzük a $\mathscr{P}_0(I)$ halmazt a $\subseteq$ relációval; ekkor felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Tekintsük az E-ben haladó $\left(\sum\limits_{i \in J} x_i\right)_{J \in \mathscr{P}_0(I)}$ általánosított sorozatot (azzal a konvencióval, hogy $\sum\limits_{i \in \emptyset} x_i := 0$). Ez az általánosított sorozat pontosan akkor konvergens E-ben a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológia szerint, ha létezik olyan $x \in E$, amelyre minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $J \subseteq H$, akkor $\left\| x - \sum\limits_{i \in H} x_i \right\| < \varepsilon$. Pontosan így értelmeztük az $(x_i)_{i \in I}$ rendszer *szummálhatóságát* E-ben a $\|\cdot\|$ norma szerint (XII. fejezet, 6. pont, **8**. gyakorlat), tehát a szummálhatóság fogalma az általánosított sorozatok konvergenciájának speciális esete. Az is látható, hogy ha az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható E-ben a $\|\cdot\|$ norma szerint, akkor

$$\sum_{i,\ I} x_i = \lim_{J,\ \mathscr{P}_0(I)} \sum_{i\in J} x_i$$

teljesül, tehát a rendszer *összege* a véges részletösszegek általánosított sorozatának határértéke a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológia szerint.

Könnyen látható, hogy ha $(t_i)_{i\in I}$ olyan $\mathbb{R}$-ben haladó nem üres általánosított sorozat, amely monoton növő (tehát $i, j \in I$ és $i \le j$ esetén $t_i \le t_j$) és $\sup\limits_{i\in I} t_i < +\infty$, akkor $(t_i)_{i\in I}$ konvergens az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia szerint, és $\lim\limits_{i,\ I} t_i = \sup\limits_{i\in I} t_i$.

Állítás. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, $E \subseteq T$ és $t \in T$, akkor $t \in \overline{E}$ ekvivalens azzal, hogy létezik olyan E-ben haladó $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, amely konvergál t-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Bizonyítás. Ha $(t_i)_{i\in I}$ olyan E-ben haladó általánosított sorozat, amely t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ környezethez van olyan $i \in I$, hogy $t_i \in V$, tehát $V \cap E \neq \emptyset$, így $t \in \overline{E}$.

Megfordítva, legyen $t \in \overline{E}$. Ekkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ környezetre $V \cap E \neq \emptyset$, így a kiválasztási axióma szerint $\prod\limits_{V\in\mathscr{T}(t)} (V \cap E) \neq \emptyset$; legyen $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t)$ halmazt a $\supseteq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Világos, hogy az E-ben haladó $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, hiszen minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re igaz az, hogy ha $W \in \mathscr{T}$ és $V \supseteq W$, akkor $t_W \in W \subseteq V$. ■

Definíció. Legyen $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat. Ha J felfelé irányított előrendezett halmaz és $\sigma : J \to I$ olyan monoton növő függvény, hogy $Im(\sigma)$ *kofinális* I-vel (vagyis minden $i \in I$ esetén van olyan $j \in J$, hogy $i \le \sigma(j)$), akkor a $(t_{\sigma(j)})_{j\in J}$ általánosított sorozatot a $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat *általánosított részsorozatának* nevezzük. (Megjegyezzük, hogy az $Im(\sigma)$ halmaz I-vel való kofinalitása és $I \neq \emptyset$ miatt $J \neq \emptyset$.)

Állítás. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(t_i)_{i\in I}$ olyan T-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergál a $t \in T$ ponthoz $\mathscr{T}$ szerint, akkor a $(t_i)_{i\in I}$ minden általánosított részsorozata konvergál t-hez $\mathscr{T}$ szerint.

Bizonyítás. Legyen J felfelé irányított előrendezett halmaz és $\sigma : J \to I$ olyan monoton növő függvény, amelyre $Im(\sigma)$ kofinális I-vel. Legyen $V \in \mathscr{T}(t)$, és vegyünk olyan $i_V \in I$ indexet, amelyre minden $i \in I$ esetén, ha $i \ge i_V$, akkor $t_i \in V$. Az $Im(\sigma)$ halmaz kofinális I-vel, ezért van olyan $j_V \in J$, hogy $i_V \le \sigma(j_V)$. Ha $j \in J$ és $j \ge j_V$, akkor a σ monotonitása folytán $\sigma(j) \ge \sigma(j_V) \ge i_V$, így $t_{\sigma(j)} \in V$. Ez azt jelenti, hogy a $\left(t_{\sigma(j)}\right)_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál t-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

Állítás. (*Átviteli elv.*) Legyenek $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek. Az $f : T \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a $t \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden T-ben haladó, $\mathscr{T}$ szerint t-hez konvergáló $(t_i)_{i\in I}$

általánosított sorozatra a T'-ben haladó $(f(t_i))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $f(t)$-hez $\mathscr{T}'$ szerint.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos a $t \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $(t_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat T-ben, amely t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Legyen $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$ tetszőleges. Ekkor van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$, és a V-hez van olyan $i_V \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_V$, akkor $t_i \in V$, tehát $f(t_i) \in f\langle V\rangle \subseteq V'$. Ez azt jelenti, hogy a T'-ben haladó $(f(t_i))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $f(t)$-hez $\mathscr{T}'$ szerint.

Tegyük fel, hogy f nem folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ekkor létezik olyan $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$, hogy minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re $f\langle V\rangle \nsubseteq V'$, vagyis $V \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma szerint $\prod\limits_{V\in\mathscr{T}(t)} \left(V \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle\right) \neq \emptyset$; legyen $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t)$ halmazt a $\supseteq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Világos, hogy az T-ben haladó $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, hiszen minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re igaz az, hogy ha $W \in \mathscr{T}$ és $V \supseteq W$, akkor $t_W \in W \subseteq V$. Ugyanakkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén $t_V \in V \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle$, azaz $f(t_V) \notin V'$, ezért az $(f(t_V))_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat nem konvergál $f(t)$-hez a $\mathscr{T}'$ topológia szerint. ■

A konvergens általánosított sorozatok *jellemzik* a topológiákat. Pontosabban, a következő fontos tényről van szó.

Állítás. Tegyük fel, hogy $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák a T halmaz felett. A $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden $t \in T$ pontra, és minden T-ben haladó, $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatra: a "$(t_i)_{i\in I}$ konvergál t-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint" kijelentés ekvivalens a "$(t_i)_{i\in I}$ konvergál t-hez a $\mathscr{T}'$ topológia szerint" kijelentéssel.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathscr{T} \neq \mathscr{T}'$; ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $\Omega \notin \mathscr{T}'$, *vagy* van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $\Omega' \notin \mathscr{T}$. A meghatározottság kedvéért tegyük fel az utóbbit, tehát legyen $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $\Omega' \notin \mathscr{T}$. Az Ω' halmaz nem $\mathscr{T}$-nyílt, ezért vehetünk olyan $t \in \Omega'$ pontot, amely a $\mathscr{T}$ topológia szerint nem belső pontja Ω'-nek, vagyis minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén $V \setminus \Omega' \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma szerint $\prod\limits_{V\in\mathscr{T}(t)} (V \setminus \Omega') \neq \emptyset$; legyen $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t)$ halmazt a $\supseteq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Világos, hogy az T-ben haladó $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, hiszen minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re igaz az, hogy ha $W \in \mathscr{T}$ és $V \supseteq W$, akkor $t_W \in W \subseteq V$. Ugyanakkor a $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat nem konvergál t-hez a $\mathscr{T}'$ topológia szerint, hiszen $\Omega' \in \mathscr{T}(t)$ és minden $\mathscr{T}(t) \ni t$-re $t_V \notin \Omega'$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban lényeges, hogy *általánosított sorozatokról* van szó, nem pedig természetes számokkal indexezett sorozatokról. A XIV. fejezetben majd példát látunk olyan különböző topológiákra (adott halmaz felett), amelyek szerint ugyanazok a konvergens sorozatok, de (az előző állítás alapján) nem ugyanazok a konvergens *általánosított* sorozatok.

Megállapodunk abban, hogy ha T halmaz, $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, és $c \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor az

$$\overset{-1}{f}\{c\}, \quad \overset{-1}{f}\langle \overline{\mathbb{R}} \setminus \{c\}\rangle, \quad \overset{-1}{f}\langle]\leftarrow, c[\rangle, \quad \overset{-1}{f}\langle]c, \rightarrow[\rangle, \quad \overset{-1}{f}\langle]\leftarrow, c]\rangle, \quad \overset{-1}{f}\langle [c, \rightarrow[\rangle$$

halmazokat a továbbiakban rendre a következő szimbólumokkal jelöljük

$$[f = c], \quad [f \neq c], \quad [f < c], \quad [f > c], \quad [f \leq c], \quad [f \geq c].$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér
- *reguláris*, ha minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $t \in T \setminus F$ ponthoz léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, amelyekre $F \subseteq \Omega$ és $t \in \Omega'$;
- *teljesen reguláris*, ha minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $t \in T \setminus F$ ponthoz létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) \neq 0$;
- *normális*, ha bármely két $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, amelyekre $F \subseteq \Omega$ és $F' \subseteq \Omega'$.

Nyilvánvaló, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor teljesen reguláris, ha minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz és $t \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, $f(t) = 1$ és $[f \neq 0] \subseteq \Omega$.

Állítás. T_0-tér (illetve T_1-tér, illetve Hausdorff-tér) minden topologikus altere T_0-tér (illetve T_1-tér, illetve Hausdorff-tér). Teljesen reguláris tér minden topologikus altere teljesen reguláris. Reguláris (illetve normális) tér minden zárt topologikus altere reguláris (illetve normális).

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $t \in E$, akkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén $V \cap E \in (\mathscr{T}|E)(t)$.

Legyen $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér, $E \subseteq T$, $t \in E$ és $F \subseteq E$ olyan $\mathscr{T}|E$-zárt halmaz, hogy $t \notin F$. Ekkor van olyan $G \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, hogy $F = G \cap E$, és természetesen $t \in T \setminus G$, ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér teljes regularitása miatt van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, $G \subseteq [f = 0]$ és $f(t) \neq 0$. Ekkor $f|_E : E \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|E$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $F = G \cap E \subseteq [f = 0] \cap E = [f|_E = 0]$ és $(f|_E)(t) = f(t) \neq 0$, tehát $(E, \mathscr{T}|E)$ teljesen reguláris tér.

Legyen $(T, \mathscr{T})$ reguláris tér, $E \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, $t \in E$ és $F \subseteq E$ olyan $\mathscr{T}|E$-zárt halmaz, hogy $t \notin F$. Ekkor az F halmaz $\mathscr{T}$-zárt is, ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér regularitása folytán léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$ és $t \notin \Omega'$. Ekkor $\Omega \cap E$ és $\Omega' \cap E$ diszjunkt $\mathscr{T}|E$-nyílt halmazok, és természetesen $F \subseteq \Omega \cap E$, valamint $t \in \Omega' \cap E$, így $(E, \mathscr{T}|E)$ reguláris tér.

Legyen $(T, \mathscr{T})$ normális tér, $E \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, és $F, F' \subseteq E$ diszjunkt $\mathscr{T}|E$-zárt halmazok. Ekkor az F és F' halmazok $\mathscr{T}$-zártak is, így a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normálissága miatt léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$ és $F' \subseteq \Omega'$. Világos, hogy ekkor $\Omega \cap E$ és $\Omega' \cap E$ diszjunkt $\mathscr{T}|E$-nyílt halmazok, és természetesen $F \subseteq \Omega \cap E$, valamint $F' \subseteq \Omega' \cap E$, tehát $(E, \mathscr{T}|E)$ normális tér. ■

Állítás. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor reguláris, ha a T minden pontjának létezik $\mathscr{T}$-zárt halmazokból álló környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ reguláris tér, $t \in T$ és $V \in \mathscr{T}(t)$. Ekkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, amelyre $t \in \Omega \subseteq V$. Tehát $t \notin T \setminus \Omega$ és $T \setminus \Omega$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, így a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér regularitása miatt léteznek olyan $\Omega_t, \Omega' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $t \in \Omega_t$ és $T \setminus \Omega \subseteq \Omega'$. Ekkor $t \in \Omega_t \subseteq T \setminus \Omega' \subseteq \Omega \subseteq V$, tehát $V' := T \setminus \Omega'$ olyan $\mathscr{T}$-zárt környezete t-nek, amelyre $V' \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy a $\{V \in \mathscr{T}(t) | V \text{ zárt } \mathscr{T} \text{ szerint}\}$ halmaz zárt halmazokból álló környezetbázisa t-nek a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a T minden pontjának létezik $\mathscr{T}$-zárt halmazokból álló környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Legyen $t \in T$ és $F \subseteq T$ olyan $\mathscr{T}$-zárt halmaz, hogy $t \notin F$. Ekkor $T \setminus F$ a t-nek $\mathscr{T}$-nyílt környezete, így a hipotézis szerint van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $V \subseteq T \setminus F$ és a V halmaz $\mathscr{T}$-zárt. Legyen $\Omega \in \mathscr{T}$ olyan, hogy $t \in \Omega \subseteq V$, valamint legyen $\Omega' := T \setminus V$. Ekkor Ω és Ω' diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, és $t \in \Omega$, valamint $F \subseteq T \setminus V =: \Omega'$, tehát $(T, \mathscr{T})$ reguláris tér. ■

Most megmutatjuk, hogy topologikus tér regularitása, bizonyos megszámlálhatósági feltétellel együtt, maga után vonja a normálisságot. Ehhez bevezetünk egy nevezetes topologikus tér-típust.

Definíció. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *$\mathscr{T}$-nyílt befedésének* nevezünk minden olyan $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszert, amelyre $T = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ és minden $I \ni i$-re Ω_i $\mathscr{T}$-nyílt részhalmaza T-nek. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus teret *Lindelöf-térnek* nevezzük, ha a T halmaz bármely $(\Omega_i)_{i \in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedéséhez létezik olyan $J \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy $(\Omega_i)_{i \in J}$ is befedése T-nek.

Állítás. (*Lindelöf-tétel.*) Minden megszámlálható bázisú topologikus tér Lindelöf-tér.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ megszámlálható bázisa a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térnek, és legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T-nek tetszőleges $\mathscr{T}$-nyílt befedése. *Kiválasztható* olyan $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{B}_i \subseteq \mathfrak{B}$ és $\Omega_i = \bigcup_{\Omega \in \mathfrak{B}_i} \Omega$. Ekkor a $\mathfrak{B}' := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ halmaz megszámlálható, mert $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, továbbá nyilvánvalóan $T = \bigcup_{\Omega \in \mathfrak{B}'} \Omega$. A $\mathfrak{B}'$ definíciója szerint minden $\Omega \in \mathfrak{B}'$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\Omega \in \mathfrak{B}_i$. Ezért *kiválasztható* olyan $f : \mathfrak{B}' \to I$ függvény, hogy minden $\mathfrak{B}' \ni \Omega$-ra $\Omega \in \mathfrak{B}_{f(\Omega)}$. Ekkor $Im(f) \subseteq I$ megszámlálható részhalmaz és $T = \bigcup_{i \in Im(f)} \Omega_i$. ■

A 3. pontban látni fogjuk, hogy minden kompakt tér is Lindelöf-tér, de nem feltétlenül megszámlálható bázisú.

Állítás. (*Tyihonov-lemma.*) Minden reguláris Lindelöf-tér normális.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ reguláris Lindelöf-tér, és legyenek $F, F' \subseteq T$ nem üres, diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok. Ha $t \in F$, akkor $t \in T \setminus F'$ és a $T \setminus F'$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, ezért a regulartitás miatt létezik t-nek olyan V $\mathscr{T}$-nyílt környezete $\mathscr{T}$ szerint, hogy $\overline{V} \subseteq T \setminus F'$, azaz $\overline{V} \cap F' = \emptyset$. Ezért *kiválasztható* olyan $(V_t)_{t \in F}$ rendszer, hogy minden $F \ni t$-re $V_t \in \mathscr{T}(t)$ és a V_t halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, valamint $\overline{V_t} \cap F' = \emptyset$.

Az F és F' halmazok szerepét felcserélve hasonlóan kapjuk olyan $(V_t)_{t\in F'}$ rendszer létezését, hogy minden $F' \ni t$-re $V_t \in \mathscr{T}(t)$ és a V_t halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, valamint $\overline{V_t} \cap F = \emptyset$. Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin F \cup F'$, és legyen $V_\omega := T \setminus (F \cup F')$. Ekkor $(V_t)_{t\in F\cup F'\cup\{\omega\}}$ a T halmaznak $\mathscr{T}$-nyílt befedése, és $(T, \mathscr{T})$ Lindelöf-tér, ezért létezik olyan $D \subseteq F \cup F' \cup \{\omega\}$ megszámlálható halmaz, hogy $T = \bigcup_{t\in D} V_t$. Ha $t \in F$, akkor van olyan $s \in D$, hogy $t \in V_s$, és nyilvánvaló, hogy $s \notin F'$ (mert $t \in V_s \cap F$ és $s \in F'$ esetén még $\overline{V_s} \cap F = \emptyset$ is igaz), továbbá természetesen $s \neq \omega$ (mert $t \notin T \setminus (F \cup F') =: V_\omega$). Ez azt jelenti, hogy $t \in F$ esetén van olyan $s \in D \cap F$, hogy $t \in V_s$, vagyis $F \subseteq \bigcup_{s\in D\cap F} V_s$. Felcserélve az F és F' halmazok szerepét hasonlóan kapjuk, hogy $F' \subseteq \bigcup_{s\in D\cap F'} V_s$ teljesül. Feltettük, hogy $F \neq \emptyset$, ezért $D \cap F$ nem üres megszámlálható halmaz, így létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to D \cap F$ függvény, amely szürjekció. Hasonlóan adódik $\sigma' : \mathbb{N} \to D \cap F'$ szürjekció létezése is. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Omega_n := V_{\sigma(n)} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \overline{V_{\sigma'(k)}}, \qquad \Omega'_n := V_{\sigma'(n)} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \overline{V_{\sigma(k)}},$$

továbbá értelmezzük az

$$\Omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n, \qquad \Omega' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega'_n$$

halmazokat. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re Ω_n és Ω'_n mindketten $\mathscr{T}$-nyílt halmazok T-ben, ezért Ω és Ω' szintén $\mathscr{T}$-nyílt halmazok. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $\Omega_n \cap V_{\sigma'(m)} = \emptyset$ és $\Omega'_m \subseteq V_{\sigma'(m)}$, ezért $\Omega_n \cap \Omega'_m = \emptyset$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $n \leq m$, akkor $\Omega'_m \cap V_{\sigma(n)} = \emptyset$ és $\Omega_n \subseteq V_{\sigma(n)}$, ezért $\Omega'_m \cap \Omega_n = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re $\Omega_n \cap \Omega'_m = \emptyset$, amiből következik, hogy $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $F \cap \overline{V_{\sigma'(k)}} = \emptyset$, ugyanakkor $F \subseteq \bigcup_{t\in D\cap F} V_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\sigma(n)}$, ezért $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n =: \Omega$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $F' \cap \overline{V_{\sigma(k)}} = \emptyset$, ugyanakkor $F' \subseteq \bigcup_{t\in D\cap F'} V_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\sigma'(n)}$, ezért $F' \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega'_n =: \Omega'$. ■

A Lindelöf-tétel és a Tyihonov-lemma összetevéséből kapjuk, hogy minden megszámlálható bázisú reguláris tér normális.

Állítás. Minden teljesen reguláris T_1-tér Hausdorff-tér.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris T_1-tér, és legyenek $t, t' \in T$ olyanok, hogy $t \neq t'$. Ekkor a $\{t'\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, tehát $T \setminus \{t'\}$ a t-nek nyílt környezete $\mathscr{T}$-szerint. A teljes regularitás miatt van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $0 \leq f \leq 1$, $[f \neq 0] \subseteq T \setminus \{t'\}$ és $f(t) > 0$. Ekkor bármely $r \in]0, f(t)[$ valós számra $t \in \overset{-1}{f}\langle]r, \to [\rangle$ és $t' \in \overset{-1}{f}\langle] \leftarrow, r[\rangle$, továbbá az $\overset{-1}{f}\langle]r, \to [\rangle$ és $\overset{-1}{f}\langle] \leftarrow, r[\rangle$ halmazok diszjunktak és $\mathscr{T}$-nyíltak, tehát ezek diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt környezetei t-nek, illetve t'-nek. ■

Másként fogalmazva: ha egy teljesen reguláris tér nem Hausdorff-tér, akkor már T_1-tér sem lehet (de előfordulhat az, hogy T_0-tér). Megemlítjük, hogy a teljesen reguláris T_1-tereket *Tyihonov-tereknek* is nevezik.

Állítás. Minden metrizálható topologikus tér normális.

Bizonyítás. Ezt az állítást korábban, az V. fejezet 7. pontjában már igazoltuk. ■

Később (a 3. pontban) látni fogjuk, hogy minden parakompakt Hausdorff-tér (speciálisan minden kompakt Hausdorff-tér) normális. Most a normálisság és a teljes regularitás kapcsolatát tisztázzuk. Ebből a szempontból a legfontosabb eredmény az Uriszon-tétel, amely megmutatja, hogy normális téren "elég sok" folytonos valós függvény létezik. Nemtriviális folytonos függvények létezése általában nem szükségszerű; például az antidiszkrét terekről induló, T_0-terekbe érkező folytonos függvények nyilvánvalóan mind triviálisak (vagyis állandók).

Tétel. (*Uriszon-tétel.*) Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő kijelentések ekvivalensek.

(i) $(T, \mathscr{T})$ normális tér.

(ii) Minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $U \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmaz, hogy $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$.

(iii) Minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ rendszer, hogy minden $\alpha \in [0,1]$ számra Ω_α $\mathscr{T}$-nyílt részhalmaza T-nek, és $F \subseteq \Omega_\alpha \subseteq \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega$, továbbá minden $[0,1] \ni \alpha, \beta$-ra, ha $\alpha < \beta$, akkor $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega_\beta$.

(iv) Minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1] \subseteq \overline{[f \neq 0]} \subseteq \Omega$.

(v) Bármely két $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $F' \subseteq [f = 0]$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, és tegyük fel, hogy $F \subseteq \Omega$. Ekkor F és $T \setminus \Omega$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok, ezért az (i) miatt léteznek olyan $U, V \in \mathscr{T}$ diszjunkt halmazok, hogy $F \subseteq U$ és $T \setminus \Omega \subseteq V$. Ekkor $U \subseteq T \setminus V$ és a $T \setminus V$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, ezért $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq T \setminus V \subseteq \Omega$.

(ii)⇒(iii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, és tegyük fel, hogy $F \subseteq \Omega$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \,\middle|\, (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \leq 2^n) \right\}$$

halmazt, és legyen $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. (A D halmaz elemeit a $[0,1]$ intervallum *diadikusan racionális* elemeinek nevezzük.) Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $D_n \subseteq D_{n+1}$, mert ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq 2^n$, akkor $2k \leq 2^{n+1}$, és $\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} \in D_{n+1}$. Továbbá, a D halmaz *megszámlálható*, és *sűrű* a $[0,1]$ intervallumban, mert $t \in [0,1]$ esetén van olyan $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $c_k \in \{0,1\}$ és $t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2^k}$ (ez a t szám felírása a kettes számrendszerben), tehát ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$\left|t - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^k}\right| < \varepsilon$, ugyanakkor nyilvánvalóan $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}c_k \in D_n$, hiszen $0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^k} \leq t \leq 1$, vagyis $0 \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}c_k \leq 2^n$.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan $\left((\Omega_{n,r})_{r\in D_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\Omega_{n,r})_{r\in D_n}$ olyan (véges) $\mathscr{T}$-ben haladó rendszer, hogy minden $D_n \ni r$-re $F \subseteq \Omega_{n,r} \subseteq \overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega$, valamint minden $r, s \in D_n$ esetén, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega_{n,s}$, továbbá minden $D_n \ni r$-re $\Omega_{n+1,r} = \Omega_{n,r}$.

A (ii) hipotézis alapján az F és Ω halmazokhoz létezik olyan $U \in \mathscr{T}$, hogy $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$. Ismét a (ii) hipotézist alkalmazva az $\overline{U}$ és Ω halmazokra kapjuk olyan $V \in \mathscr{T}$ létezését, hogy $\overline{U} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$. Ha $\Omega_{0,0} := U$ és $\Omega_{0,1} := V$, akkor $(\Omega_{0,r})_{r\in D_0}$ olyan rendszer $\mathscr{T}$-ben, hogy minden $D_0 \ni r$-re $F \subseteq \Omega_{0,r} \subseteq \overline{\Omega_{0,r}} \subseteq \Omega$, továbbá minden $r, s \in D_0 = \{0, 1\}$ esetén, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_{0,r}} \subseteq \Omega_{0,s}$.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $\left((\Omega_{k,r})_{r\in D_k}\right)_{k\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $k \in n$ esetén $(\Omega_{k,r})_{r\in D_k}$ olyan $\mathscr{T}$-ben haladó rendszer, amelyre minden $r \in D_k$ esetén $F \subseteq \Omega_{k,r} \subseteq \overline{\Omega_{k,r}} \subseteq \Omega$, valamint minden $r, s \in D_k$ esetén, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_{k,r}} \subseteq \Omega_{k,s}$, továbbá minden $n \ni k$-ra, ha $k+1 < n$ és $r \in D_k$, akkor $\Omega_{k+1,r} = \Omega_{k,r}$. Minden $r \in D_{n-1}$ esetén legyen $\Omega_{n,r} := \Omega_{n-1,r}$. Legyen $r \in D_n \setminus D_{n-1}$ rögzített; ekkor egyérteműen létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $2k + 1 \leq 2^n$ és $r = \frac{2k+1}{2^n}$. Világos, hogy $k < 2^{n-1}$, tehát $r_0 := \frac{k}{2^{n-1}} \in D_{n-1}$ és $r_1 := \frac{k+1}{2^{n-1}} \in D_{n-1}$, továbbá $r_0 < r < r_1$, és r a D_n egyetlen eleme, amely r_0 és r_1 közé esik. Az $\left((\Omega_{k,r})_{r\in D_k}\right)_{k\in n}$ rendszer tulajdonságai alapján $\overline{\Omega_{n-1,r_0}} \subseteq \Omega_{n-1,r_1}$, így a (ii) hipotézist alkalmazva az $\overline{\Omega_{n-1,r_0}}$ és Ω_{n-1,r_1} halmazokra kapjuk olyan $\Omega_{n,r} \in \mathscr{T}$ létezését, hogy $\overline{\Omega_{n-1,r_0}} \subseteq \Omega_{n,r} \subseteq \overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega_{n-1,r_1}$. Ebből látszik, hogy a most értelmezett $\left((\Omega_{k,r})_{r\in D_k}\right)_{k\in n+1}$ rendszer teljesíti ugyanazokat a feltételeket, mint az $\left((\Omega_{k,r})_{r\in D_k}\right)_{k\in n}$ rendszer, ha az n helyére az $n+1$ számot írjuk.

Legyen tehát $\left((\Omega_{n,r})_{r\in D_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek a létezését imént igazoltuk. Ha $r \in D$, akkor minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re, $r \in D_m \cap D_n$ esetén $\Omega_{m,r} = \Omega_{n,r}$. Ezért minden $r \in D$ számra értelmezhetjük a D_r halmazt úgy, hogy $\Omega_r := \Omega_{n,r}$ minden olyan $\mathbb{N} \ni n$-re, amelyre $r \in \Omega_{n,r}$. Világos, hogy minden $r \in D$ esetén $F \subseteq \Omega_r \subseteq \overline{\Omega_r} \subseteq \Omega$. Továbbá, $r, s \in D$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $r, s \in D_n$, tehát ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_r} := \overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega_{n,s} =: \Omega_s$. Legyen minden $\alpha \in [0,1] \setminus D$ esetén $\Omega_\alpha := \bigcup_{r\in D;\ r\leq\alpha} \Omega_r$. Ekkor minden $\alpha \in [0,1] \setminus D$ esetén $\Omega_\alpha \in \mathscr{T}$ és $F \subseteq \Omega_0 \subseteq \Omega_\alpha$, valamint $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega$ is teljesül, mert $\alpha < 1$ (hiszen $1 \in D$), tehát a D sűrűsége miatt van olyan $s \in D$, hogy $\alpha < s$, így $\Omega_\alpha \subseteq \Omega_s$, vagyis $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \overline{\Omega_s} \subseteq \Omega$. Továbbá, ha $\alpha, \beta \in [0,1]$ és $\alpha < \beta$, akkor ismét a D sűrűségéből következik olyan $r, s \in D$ számok létezése, hogy $\alpha < r < s < \beta$, és ekkor $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \overline{\Omega_r} \subseteq \Omega_s \subseteq \Omega_\beta$. Ez azt jelenti, hogy $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ olyan rendszer, amelynek a létezését (iii)-ban állítottuk.

(iii)⇒(iv) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, és tegyük fel, hogy $F \subseteq \Omega$. A (iii) alapján vegyünk olyan $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ rendszert, hogy minden $\alpha \in [0,1]$ számra Ω_α $\mathscr{T}$-nyílt részhalmaza T-nek, és $F \subseteq \Omega_\alpha \subseteq \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega$, továbbá minden $[0,1] \ni \alpha, \beta$-ra, ha $\alpha < \beta$, akkor $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega_\beta$.

Értelmezzük a $g : T \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy minden $t \in \Omega_1$ esetén

$$g(t) := \inf\{\ \gamma \in [0,1] \mid t \in \Omega_\gamma\ \},$$

és minden $T\setminus\Omega_1 \ni t$-re $g(t) := 1$. Világos, hogy $T\setminus\Omega \subseteq T\setminus\Omega_1 \subseteq [g = 1]$, és minden $t \in T$ esetén $0 \le g(t) \le 1$.

Megmutatjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in [0,1]$ és $\alpha < \beta$, akkor

$$\overset{-1}{g}\langle]\alpha,\beta[\rangle \subseteq \Omega_\beta \setminus \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \overset{-1}{g}\langle[\alpha,\beta]\rangle.$$

Valóban, ha $t \in \overset{-1}{g}\langle]\alpha,\beta[\rangle$, akkor $g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1]|t \in \Omega_\gamma\} < \beta$ miatt van olyan $\gamma \in [0,1]$, hogy $t \in \Omega_\gamma$ és $\gamma < \beta$; ekkor $\Omega_\gamma \subseteq \Omega_\beta$ miatt $t \in \Omega_\beta$. Ugyanakkor $t \notin \overline{\Omega_\alpha}$, különben minden $\gamma \in [0,1]$ számra, $\alpha < \gamma$ esetén $t \in \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega_\gamma$, tehát $g(t) \le \gamma$ teljesülne, így fennállna a $g(t) \le \alpha$ egyenlőtlenség, holott $g(t) > \alpha$. Továbbá, ha $t \in \Omega_\beta\setminus\overline{\Omega_\alpha}$, akkor $t \in \Omega_\beta$, így $g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1]|t \in \Omega_\gamma\} \le \beta$, valamint $g(t) \ge \alpha$, különben volna olyan $\gamma \in [0,1]$, hogy $\gamma < \alpha$ és $t \in \Omega_\gamma$, ami lehetetlen, mert ekkor $t \in \Omega_\gamma \subseteq \overline{\Omega_\gamma} \subseteq \Omega_\alpha \subseteq \overline{\Omega_\alpha}$ teljesülne, holott $t \notin \overline{\Omega_\alpha}$.

Megmutatjuk, hogy $\overline{\Omega_0} \subseteq [g = 0]$. Valóban, ha $t \in [g \ne 0]$ és $t \in \Omega_1$, akkor $g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1]|t \in \Omega_\gamma\} > 0$, és ha $\beta \in]0, g(t)[$, akkor $t \notin \Omega_\beta$, így $t \notin \overline{\Omega_0}$, mert $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega_\beta$. Ha pedig $t \in [g \ne 0]$ és $t \notin \Omega_1$, akkor $t \notin \overline{\Omega_0}$, mert $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega_1$.

Most bebizonyítjuk, hogy a $g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint. Ehhez legyen $t \in T$ rögzített pont; ekkor három eset lehetséges.

- Ha $t \in \overset{-1}{g}\langle]0,1[\rangle$, akkor bármely $\varepsilon \in]0, \min(g(t), 1 - g(t)]$ valós számra az előzőek alapján

$$t \in \overset{-1}{g}\langle]g(t)-\varepsilon, g(t)+\varepsilon[\rangle \subseteq \Omega_{g(t)+\varepsilon} \setminus \overline{\Omega_{g(t)-\varepsilon}} \subseteq \overset{-1}{g}\langle[g(t)-\varepsilon, g(t)+\varepsilon]\rangle,$$

tehát a $V_\varepsilon := \Omega_{g(t)+\varepsilon}\setminus\overline{\Omega_{g(t)-\varepsilon}}$ halmaz a t pontnak olyan $\mathscr{T}$-nyílt környezete, amelyre $g\langle V_\varepsilon\rangle \subseteq [g(t)-\varepsilon, g(t)+\varepsilon]$, így g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint.

- Ha $t \in [g = 0]$, vagyis $0 = g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1]|t \in \Omega_\gamma\}$, akkor vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Rögzítsünk olyan $\gamma \in [0,1]$ számot, amelyre $\gamma < \varepsilon$. Állítjuk, hogy Ω_γ olyan $\mathscr{T}$-nyílt környezete t-nek, hogy $g\langle\Omega_\gamma\rangle \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$. Valóban, az előzőek alapján $\Omega_\gamma\setminus\overline{\Omega_0} \subseteq \overset{-1}{g}\langle[0,\gamma]\rangle \subseteq \overset{-1}{g}\langle[0,\varepsilon]\rangle$, továbbá $\Omega_\gamma\cap\overline{\Omega_0} \subseteq \overline{\Omega_0} \subseteq [g = 0] \subseteq \overset{-1}{g}\langle[0,\varepsilon]\rangle$, ezért

$$\Omega_\gamma = \big(\Omega_\gamma \setminus \overline{\Omega_0}\big) \cup \big(\Omega_\gamma \cap \overline{\Omega_0}\big) \subseteq \overset{-1}{g}\langle[0,\varepsilon]\rangle = \overset{-1}{g}\langle[-\varepsilon,\varepsilon]\rangle,$$

vagyis $g\langle\Omega_\gamma\rangle \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$. Ebből következik, hogy g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint.

- Ha $t \in [g = 1]$, akkor két alternatíva van; $t \notin \overline{\Omega_1}$ vagy $t \in \overline{\Omega_1}$. Az első esetben $T\setminus\overline{\Omega_1}$ olyan $\mathscr{T}$-nyílt környezete t-nek, amelyen $g = 1$, ezért a folytonosság lokalitása miatt g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint. Ezért feltehető, hogy $t \in \overline{\Omega_1}$. Legyen $\varepsilon \in]0,1[$ tetszőleges valós szám. Ekkor $t \in T \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}}$, különben véve egy $\gamma \in]1-\varepsilon, 1[$ számot kapnánk, hogy $t \in \overline{\Omega_{1-\varepsilon}} \subseteq \Omega_\gamma$, így $g(t) \le \gamma < 1$, holott $g(t) = 1$. Tehát $T \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}}$ a t pontnak $\mathscr{T}$-nyílt környezete, és az előzőek alkalmazásával

$$g\langle T \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}}\rangle = g\langle T \setminus \Omega_1\rangle \cup g\langle \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}}\rangle \subseteq \{1\} \cup [1-\varepsilon, 1] \subseteq [1-\varepsilon, 1+\varepsilon],$$

tehát g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

Ezzel megmutattuk, hogy a $g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq g \leq 1$, valamint $\Omega_0 \subseteq [g = 0]$ és $T \setminus \Omega_1 \subseteq [g = 1]$. Ezért az $f := 1 - g : T \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq \Omega_0 \subseteq [g = 0] = [f = 1]$ és $\overline{[f \neq 0]} = \overline{[g \neq 1]} \subseteq \overline{\Omega_1} \subseteq \Omega$, vagyis az f függvény eleget tesz a (iv) követelményeinek.

(iv)$\Rightarrow$(v) Legyenek $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok. Ekkor $\Omega := T \setminus F'$ olyan $\mathscr{T}$-nyílt halmaz, hogy $F \subseteq \Omega$, így a (iv) alapján van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] \subseteq \Omega$, vagyis $F' \subseteq [f = 0]$.

(v)$\Rightarrow$(i) Legyenek $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok, és az (v) alapján legyen $f : T \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $F' \subseteq [f = 0]$. Ekkor bármely $r \in]0, 1[$ valós számra $F \subseteq [f < r]$ és $F' \subseteq [f > r]$, továbbá $[f < r] := \overset{-1}{f}\langle] \leftarrow, r[\rangle$ és $[f > r] := \overset{-1}{f}\langle]r, \to [\rangle$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok. Ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális. ■

Következmény. Minden normális T_1-tér teljesen reguláris Hausdorff-tér.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ normális T_1-tér, $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz és $t \in T \setminus F$. Ekkor a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, mert $(T, \mathscr{T})$ T_1-tér, így az Uriszon-tétel szerint van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $\{t\} \subseteq [f = 1]$ és $F \subseteq [f = 0]$. Ez azt jelenti, hogy $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér, és korábban láttuk minden teljesen reguláris T_1-tér szükségképpen Hausdorff-tér. ■

A következő tétel megfogalmazása előtt megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor f nem szükségképpen terjeszthető ki $T \to \mathbb{R}$ függvénnyé úgy, hogy a kiterjesztés folytonos legyen a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Másként fogalmazva: topologikus tér zárt topologikus alterén folytonos valós függvény nem feltétlenül terjeszthető ki a térre folytonosan. A Tietze-tétel éppen azt mondja, hogy a zárt topologikus altereken folytonos valós függvények folytonos kiterjeszthetősége *ekvivalens* a tér normálisságával.

Tétel. (*Tietze-tétel.*) Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő kijelentések ekvivalensek.

(i) $(T, \mathscr{T})$ normális tér.

(ii) Ha az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint minden $F \ni t$-re $|f(t)| \leq 1$ teljesül, akkor minden $c \in]0, 1/3]$ valós számhoz létezik olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és minden $t \in T$ esetén $|g(t)| \leq c$, valamint minden $t \in F$ esetén $|f(t) - g(t)| \leq 1 - c$ teljesül.

(iii) Ha az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, akkor létezik olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint és $f = \widetilde{f}|_F$.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, valamint $-1 \leq f \leq 1$. Rögzítsünk egy $c \in]0, 1/3]$ valós számot. Az folytonosság topologikus jellemzése alapján az $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle$ halmaz $\mathscr{T}|F$-zárt és F a T-ben $\mathscr{T}$-zárt, ezért az $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle$ halmaz is $\mathscr{T}$-zárt. Ugyanígy, az $\overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt T-ben, és természetesen $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle = \emptyset$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normálissága és az Uriszon-tétel alapján létezik olyan $h : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $0 \leq h \leq 1$, valamint $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle \subseteq [h = 1]$ és $\overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle \subseteq [h = 0]$. Értelmezzük a $g := -c(2h - 1)$ függvényt, amely szintén folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, valamint $[h = 1] = [g = -c]$ és $[h = 0] = [g = c]$. Ebből következik, hogy $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle \subseteq [g = -c]$ és $\overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle \subseteq [g = c]$. Világos, hogy $0 \leq h \leq 1$ miatt $|2h - 1| \leq 1$, ezért $|g| \leq c$. Továbbá, $t \in F$ esetén

- ha $t \in \overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle$, akkor $-1 \leq f(t) \leq -c$ és $g(t) = -c$, tehát $-1 + c \leq f(t) - g(t) \leq 0 \leq 1 - c$;

- ha $t \in \overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle$, akkor $c \leq f(t) \leq 1$ és $g(t) = c$, tehát $-1 + c \leq 0 \leq f(t) - g(t) \leq 1 - c$;

- ha $t \in \overset{-1}{f}\langle] - c, c[\rangle$, akkor $-c < f(t) < c$, $-c \leq g(t) \leq c$ és $c \leq 1/3$, így $-1 + c \leq -2c < f(t) - g(t) < 2c \leq 1 - c$,

ami azt jelenti, hogy $|f(t) - g(t)| \leq 1 - c$ teljesül, tehát g olyan függvény, amelynek a létezését állítottuk.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint. Az f megfelelő kiterjesztésének létezését három lépésben fogjuk igazolni.

(I) Először feltesszük, hogy az F halmazon $|f| \leq 1$, és megmutatjuk olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}|_F = f$, valamint a T halmazon eleget tesz a $|\widetilde{f}| \leq 1$ egyenlőtlenségnek.

Legyen $c \in]0, 1/3]$ rögzített valós szám. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával bebizonyítjuk olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon $|f_n| \leq 1 - (1 - c)^{n+1}$ és $|f_n - f_{n+1}| \leq c \cdot (1 - c)^{n+1}$, valamint az F halmazon $|f - f_n| \leq (1 - c)^{n+1}$ teljesül.

Az $f_0 : T \to \mathbb{R}$ függvénynek olyannak kell lennie, hogy folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $|f_0| \leq c$ és az F halmazon $|f - f_0| \leq 1 - c$ teljesül. A (ii) állítás éppen ilyen tulajdonságú függvény létezését mondja ki.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(f_k)_{k \in n}$ olyan rendszer, hogy minden $n \ni k$-ra $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon a $|f_k| \leq 1 - (1 - c)^{k+1}$ és $k + 1 < n$ esetén $|f_k - f_{k+1}| \leq c \cdot (1 - c)^{k+1}$, valamint az F halmazon $|f - f_k| \leq (1 - c)^{k+1}$ teljesül. Ekkor az $(1 - c)^n(f - f_{n+1}) : F \to \mathbb{R}$ függvényre alkalmazva a (ii) állítást kapjuk olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon $|g| \leq c$ és az F halmazon $|(1-c)^n(f - f_{n+1}) - g| \leq 1 - c$ teljesül. Ekkor az $f_n := f_{n-1} + (1-c)^n.g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a definíció szerint az F halmazon $|f - f_n| \leq (1-c)^{n+1}$ teljesül. Továbbá, a T halmazon $|f_{n-1}| \leq 1-(1-c)^n$ és $|g| \leq c$ is igaz, ezért

$$|f_n| \leq |f_{n-1}| + (1-c)^n|g| \leq 1 - (1-c)^n + (1-c)^n c = 1 - (1-c)^{n+1}.$$

Ugyanakkor, a definíció szerint, a T halmazon $|f_n - f_{n-1}| = (1-c)^n|g| \leq c(1-c)^n$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_k)_{k \in n+1}$ rendszer olyan, hogy minden $n+1 \ni k$-ra $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon a $|f_k| \leq 1 - (1-c)^{k+1}$ és $k+1 < n+1$ esetén $|f_k - f_{k+1}| \leq c \cdot (1-c)^{k+1}$, valamint az F halmazon $|f - f_k| \leq (1-c)^{k+1}$ teljesül. Ezért van olyan függvénysorozat, amelynek a létezését állítottuk; legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ilyen sorozat.

Ha $m, n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m < n$, akkor minden $t \in T$ esetén

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(t) - f_{k-1}(t)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c(1-c)^k =$$

$$= c(1-c)^{m+1} \sum_{k=0}^{n-m-1} (1-c)^k = c(1-c)^{m+1} \frac{1-(1-c)^{n-m}}{c} \leq (1-c)^{m+1}.$$

Ebből következik, hogy minden $T \ni t$-re az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, így konvergens is az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia szerint, tehát jól értelmezett az

$$\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in F$ esetén $|f(t) - f_n(t)| \leq (1-c)^{n+1}$ és $1 - c \in]0, 1[$, ezért $f(t) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$, vagyis $\widetilde{f}$ az f függvény kiterjesztése. Világos továbbá, hogy minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}(t)| \leq 1$, mert minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f_n(t)| \leq 1 - (1-c)^{n+1} \leq 1$, így $|\widetilde{f}(t)| = \lim\limits_{n \to \infty} |f_n(t)| \leq 1$.

Megmutatjuk, hogy $\widetilde{f}$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Ehhez legyen $t \in T$ rögzített és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyne $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $(1-c)^{k+1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Az előzőek alapján minden $m, n > N$ temészetes számra és $T \ni t'$-re $|f_n(t') - f_m(t')| \leq (1-c)^{\min(m,n)+1} < \frac{\varepsilon}{3}$. A definíció szerint minden $n > N$ természetes számra és minden $T \ni t'$-re

$$|f_n(t') - \widetilde{f}(t')| = \lim_{m \to \infty} |f_n(t') - f_m(t')| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ugyanakkor $\widetilde{f}(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)$, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ és $|\widetilde{f}(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$; legyen $n \in \mathbb{N}$ ilyen szám. Ekkor az f_n függvény t pontbeli folytonosságát kihasználva kapjuk olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ környezet létezését, hogy minden $t' \in V$ esetén $|f_n(t) - f_n(t')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ha $t' \in V$, akkor

$$|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(t')| \leq |\widetilde{f}(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t')| + |f_n(t') - \widetilde{f}(t')| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy $\widetilde{f}$ folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

(II) Most feltesszük, hogy az $f : F \to \mathbb{R}$ függvényre minden $t \in F$ esetén teljesül az $|f(t)| < 1$ szigorú egyenlőtlenség, és megmutatjuk olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}|_F = f$ és minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}(t)| < 1$.

Tekintettel arra, hogy a feltevés alapján minden $F \ni t$-re $|f(t)| \leq 1$ is teljesül, az (I) alapján van olyan $\widetilde{f_0} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f_0}|_F = f$ és minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f_0}(t)| \leq 1$. Ekkor az F, $[\widetilde{f_0} = -1]$ és $[\widetilde{f_0} = 1]$ halmazok páronként diszjunktak és $\mathscr{T}$-zártak T-ben, ezért az

$$f_1 : F \cup [\widetilde{f_0} = -1] \cup [\widetilde{f_0} = 1] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{, ha } t \in F \\ 1 & \text{, ha } t \in [\widetilde{f_0} = -1], \\ -1 & \text{, ha } t \in [\widetilde{f_0} = 1] \end{cases}$$

függvény jól értelmezett és folytonos a $\mathscr{T}|(F \cup [\widetilde{f_0} = -1] \cup [\widetilde{f_0} = 1])$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, hiszen a leszűkítései a F, $[\widetilde{f_0} = -1]$ és $[\widetilde{f_0} = 1]$ halmazokra folytonosak a megfelelő altértopológia és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ szerint. Nyilvánvaló, hogy minden $t \in F \cup [\widetilde{f_0} = -1] \cup [\widetilde{f_0} = 1]$ esetén $|f_1(t)| \leq 1$, ezért ismét az (I) állítást alkalmazva az f_1 függvényre kapjuk olyan $\widetilde{f_1} : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f_1}\Big|_{F \cup [\widetilde{f_0} = -1] \cup [\widetilde{f_0} = 1]} = f_1$ és minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f_1}(t)| \leq 1$. Ekkor az

$$\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{\widetilde{f_0}(t) + \widetilde{f_1}(t)}{2}$$

függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}|_F = f$ és nyilvánvaló, hogy minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}(t)| < 1$.

(III) Áttérve az általános esetre; legyen $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Vegyünk egy olyan $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ függvényt, amely *homeomorfizmus* a $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|]-1, 1[$ topológiák szerint. Ilyen például a

$$g : \mathbb{R} \to]-1, 1[; \quad x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

függvény, de a továbbiakban a g konkrét alakja lényegtelen. Természetesen a $g \circ f : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és minden $t \in F$ esetén $|(g \circ f)(t)| < 1$. A (II) alapján van olyan $h : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $h|_F = g \circ f$ és minden $t \in T$ esetén $|h(t)| < 1$. Ekkor h folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|]-1, 1[$ topológiák szerint is, tehát az $\widetilde{f} := g^{-1} \circ h : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és $\widetilde{f}|_F = g^{-1} \circ (h|_F) = g^{-1} \circ (g \circ f) = f$.

(iii)⇒(i) Legyenek $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok, és értelmezzük az

$$f : F \cup F' \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, ha } t \in F, \\ 0 & \text{, ha } t \in F' \end{cases}$$

függvényt. Az F halmaz $\mathscr{T}|(F \cup F')$-nyílt, mert $F = (F \cup F') \cap (T \setminus F')$ és a $T \setminus F'$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Az F és F' szerepét felcserélve kapjuk, hogy az F' halmaz $\mathscr{T}|(F \cup F')$-nyílt. Ezért a folytonosság lokalitását alkalmazva nyilvánvaló, hogy f folytonos a $\mathscr{T}|(F \cup F')$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és az $F \cup F'$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, így a (iii) alapján van olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $\widetilde{f}|_{F \cup F'} = f$. Ekkor bármely $r \in]0, 1[$ valós számra $F \subseteq [\widetilde{f} > r]$ és $F' \subseteq [\widetilde{f} < r]$, továbbá $[\widetilde{f} < r]$ és $[\widetilde{f} > r]$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok. Ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális. ■

Megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ normális tér, az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $\alpha \leq f \leq \beta$, akkor létezik olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $f = \widetilde{f}|_F$, valamint $\alpha \leq \widetilde{f} \leq \beta$. Valóban, a Tietze-tétel alapján van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $g|_F = f$; ekkor az $\widetilde{f} := \sup(\alpha, \inf(g, \beta)) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $f = \widetilde{f}|_F$, valamint $\alpha \leq \widetilde{f} \leq \beta$.

Definíció. Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, F vektortér és $f : T \to F$ függvény. Ekkor az $\overline{\overset{-1}{f}\langle F \setminus \{0\}\rangle}$ halmazt az f függvény *tartójának* nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és a *supp*(f) szimbólummal jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, F vektortér a K test felett, és $f, g : T \to F$ függvények, valamint $\lambda \in K$, akkor

$$supp(f + g) \subseteq supp(f) \cup supp(g), \quad supp(\lambda.f) \subseteq supp(f).$$

Továbbá, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, K test és $f, g : T \to K$ függvények, akkor

$$supp(f \cdot g) \subseteq supp(f) \cap supp(g).$$

Ha $(T, \mathscr{T})$ normális tér, az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt és $F \subseteq \Omega$, akkor az Uriszon-tétel szerint van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $supp(f) \subseteq \Omega$.

Definíció. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T_i)_{i \in I}$ a T halmaz befedése, akkor *$(T_i)_{i \in I}$-nek alárendelt folytonos egységosztásnak* nevezünk minden olyan $(f_i)_{i \in I}$ függvényrendszert, amelyre teljesül azt, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f_i \leq 1$, $supp(f_i) \subseteq T_i$, és a $(supp(f_i))_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint, valamint minden $t \in T$ esetén $\sum\limits_{i \in I} f_i(t) = 1$ (azzal a konvencióval, hogy az üres indexhalmazra vett összeg egyenlő 0-val).

Megjegyezzük, hogy az előző definícióban szereplő $\sum_{i\in I} f_i(t)$ kifejezés *értelmes*, mert a feltevés alapján a $(supp(f_i))_{i\in I}$ halmazrendszer lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint, így pontonként is véges, ezért minden $T \ni t$-re az $\{i \in I | f_i(t) \neq 0\}$ halmaz *véges.*

Tétel. (*Egységosztás-tétel normális terekre.*) Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő kijelentések ekvivalensek.

(i) $(T, \mathscr{T})$ normális tér.

(ii) A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ pontonként véges $\mathscr{T}$-nyílt befedéséhez létezik a T-nek olyan $(U_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedése (ugyanazzal az I indexhalmazzal), amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$.

(iii) A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér bármely lokálisan véges $\mathscr{T}$-nyílt befedéséhez létezik annak alárendelt folytonos egységosztás.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az (i) és (ii) állítások *ekvivalensek* egymással.

(i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy $(T, \mathscr{T})$ és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a T-nek pontonként véges $\mathscr{T}$-nyílt befedése. Jelölje $\mathfrak{S}$ az T azon $(U_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedéseinek halmazát, amelyekre minden $i \in T$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$ vagy $U_i = \Omega_i$. (Megjegyezzük, hogy ha $(U_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$, akkor létezhet olyan $i \in I$, hogy $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$ és $U_i = \Omega_i$ *egyszerre* teljesül; ekkor Ω_i egyszerre $\mathscr{T}$-nyílt és $\mathscr{T}$-zárt halmaz.) Nyilánvaló, hogy $(\Omega_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$, tehát $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Az $\mathfrak{S}$ halmazon bevezetjük azt a $\leq$ relációt, amelyre $(U_i)_{i\in I}, (V_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$ esetén $(U_i)_{i\in I} \leq (V_i)_{i\in I}$ pontosan akkor teljesül, ha minden $I \ni i$-re: ha $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, akkor $U_i = V_i$. Esetszétválasztásokkal könnyen ellenőrizhető, hogy a $\leq$ reláció rendezés a $\mathfrak{S}$ halmaz felett.

Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{S}, \leq)$ *induktívan* rendezett halmaz. Legyen $\left((U_{j,i})_{i\in I}\right)_{j\in J}$ olyan nem üres rendszer, amelyre minden $j \in J$ esetén $(U_{j,i})_{i\in I} \in \mathfrak{S}$, és minden $J \ni j_1, j_2$-re $(U_{j_1,i})_{i\in I} \leq (U_{j_2,i})_{i\in I}$ vagy $(U_{j_2,i})_{i\in I} \leq (U_{j_1,i})_{i\in I}$. Minden $I \ni i$-re legyen $U_i := \bigcap_{j\in J} U_{j,i}$. Állítjuk, hogy $(U_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$, és minden $J \ni j$-re $(U_{j,i})_{i\in I} \leq (U_i)_{i\in I}$, vagyis $(U_i)_{i\in I}$ felső korlátja az $\left((U_{j,i})_{i\in I}\right)_{j\in J}$ rendszernek az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmazban. Legyen $i \in I$ rögzített és $J_i := \{j \in J | \overline{U_{j,i}} \subseteq \Omega_i\}$. Ha $J_i = \emptyset$, akkor minden $j \in J$ esetén $U_{j,i} = \Omega_i$ (a $\mathfrak{S}$ halmaz definíciója és $(U_{j,i})_{i\in I} \in \mathfrak{S}$ miatt), ezért $U_i = \Omega_i$. Ha $j_1, j_2 \in J_i$, akkor $\overline{U_{j_1,i}} \subseteq \Omega_i$ és $\overline{U_{j_2,i}} \subseteq \Omega_i$, ugyanakkor $(U_{j_1,i})_{i\in I} \leq (U_{j_2,i})_{i\in I}$ vagy $(U_{j_2,i})_{i\in I} \leq (U_{j_1,i})_{i\in I}$ teljesül, így szükségképpen $U_{j_1,i} = U_{j_2,i}$ (a $\leq$ rendezés értelmezése alapján). Ez azt jelenti, hogy ha $J_i \neq \emptyset$, akkor bármely $j \in J$ esetén $U_i = U_{j,i}$. Tehát minden $I \ni i$-re $U_i \in \mathscr{T}$, és ha $J_i = \emptyset$, akkor $U_i = \Omega_i$, míg $J_i \neq \emptyset$ esetén bármely $J_i \ni j$-re $U_i = U_{j,i}$, így $\overline{U_i} = \overline{U_{j,i}} \subseteq \Omega_i$. Ezért $(U_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$ pontosan akkor teljesül, ha $(U_i)_{i\in I}$ befedése T-nek, azaz $T = \bigcup_{i\in I} U_i$. Ennek igazolásához először megjegyezzük, hogy az előzőek szerint minden $I \ni i$-hez létezik olyan $j \in J$, hogy $U_i = U_{j,i}$, ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $\tau : I \to J$ függvényt, hogy minden $I \ni i$-re $U_i = U_{\tau(i),i}$. Legyen $t \in T$ rögzített pont. Az $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer pontonként véges befedése T-nek, ezért az $I_t := \{i \in I | t \in \Omega_i\}$ halmaz véges és nem üres. A $\tau\langle I_t\rangle \subseteq J$ halmaz szintén véges és nem üres, ezért az $\{(U_{j,i})_{i\in I} | j \in \tau\langle I_t\rangle\}$ halmaz $\leq$ szerinti *lineáris rendezettsége* folytán van olyan $j_0 \in \tau\langle I_t\rangle$, hogy minden $\tau\langle I_t\rangle \ni j$-re

$(U_{j,i})_{i\in I} \le (U_{j_0,i})_{i\in I}$. Az $(U_{j_0,i})_{i\in I}$ rendszer befedése T-nek, ezért van olyan $i_0 \in I$, hogy $t \in U_{j_0,i_0}$. De $U_{j_0,i_0} \subseteq \Omega_{i_0}$, ezért $t \in \Omega_{i_0}$, vagyis $i_0 \in I_t$. Tehát $\tau(i_0) \in \tau\langle I_t\rangle$, így a j_0 értelmezése alapján $(U_{\tau(i_0),i})_{i\in I} \le (U_{j_0,i})_{i\in I}$. Ebből következik, hogy ha $\overline{U_{\tau(i_0),i_0}} \subseteq \Omega_{i_0}$, akkor $t \in U_{j_0,i_0} = U_{\tau(i_0),i_0} = U_{i_0}$, ugyanakkor $U_{\tau(i_0),i_0} = \Omega_{i_0}$ esetén $t \in \Omega_{i_0} = U_{\tau(i_0),i_0} = U_{i_0}$. Ez azt jelenti, hogy $t \in U_{i_0}$, tehát $(U_i)_{i\in I}$ befedése T-nek. Ezzel megmutattuk, hogy $(U_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$; az kell még igazolni, hogy minden $J \ni j$-re $(U_{j,i})_{i\in I} \le (U_i)_{i\in I}$. Ez azonban nyilvánvaló, mert ha $j \in J$ és $i \in I$ olyanok, hogy $\overline{U_{j,i}} \subseteq \Omega_i$, akkor az előzőek alapján $U_{j,i} = U_i$.

A Zorn-lemma alapján vehetünk olyan $(U_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$ elemet, amely maximális a $\le$ rendezés szerint. Megmutatjuk, hogy minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, tehát az $(U_i)_{i\in I}$ rendszer olyan $\mathscr{T}$-nyílt befedése T-nek, amelynek létezését a (ii)-ben állítottuk. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $i_0 \in I$ olyan, amelyre nem igaz az $\overline{U_{i_0}} \subseteq \Omega_{i_0}$ tartalmazás: ekkor $U_{i_0} = \Omega_{i_0}$ és $\overline{U_{i_0}} \ne U_{i_0}$. A $T \setminus \bigcup_{i\in I;\ i\ne i_0} U_i$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $T \setminus \bigcup_{i\in I;\ i\ne i_0} U_i \subseteq U_{i_0}$, mert $(U_i)_{i\in I}$ befedése T-nek. A $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér normális, ezért van olyan $U \in \mathscr{T}$, hogy $T \setminus \bigcup_{i\in I;\ i\ne i_0} U_i \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq U_{i_0}$. Értelmezzük a $(V_i)_{i\in I}$ rendszert úgy, hogy minden $i \in I \setminus \{i_0\}$ esetén $V_i := U_i$, továbbá $V_{i_0} := U$. Világos, hogy $(V_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$, és $(U_i)_{i\in I} \le (V_i)_{i\in I}$, valamint $(U_i)_{i\in I} \ne (V_i)_{i\in I}$, különben $U_{i_0} = V_{i_0} = U$, így $\overline{U_{i_0}} = U_{i_0}$ teljesülne, holott $\overline{U_{i_0}} \ne U_{i_0}$. Ez azt jelenti, hogy $(V_i)_{i\in I} \in \mathfrak{S}$ olyan elem, amely nagyobb $(U_i)_{i\in I}$-nél a $\le$ rendezés szerint; ez viszont ellentmond az $(U_i)_{i\in I}$ maximalitásának.

(ii)$\Rightarrow$(i) Legyenek F és F' diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok T-ben. Legyen $I := \{0,1\}$, $\Omega_0 := T \setminus F'$ és $\Omega_1 := T \setminus F$. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ véges, tehát pontonként véges $\mathscr{T}$-nyílt befedése a T halmaznak. A (ii) alapján vehetjük a T-nek olyan $(U_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedését, amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$. Ekkor $\Omega := T \setminus \overline{U_1}$ és $\Omega' := T \setminus \overline{U_0}$ olyan $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, amelyekre $F = T \setminus \Omega_1 \subseteq T \setminus \overline{U_1} =: \Omega$ és $F' = T \setminus \Omega_0 \subseteq T \setminus \overline{U_0} =: \Omega'$, valamint $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér normális.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a $\mathscr{T}$ topológia szerint lokálisan véges és nyílt befedése a T halmaznak. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ pontonként is véges, tehát a (ii) alapján vehetjük a a T-nek olyan $(U_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedését, amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$. (Megjegyezzük, hogy itt még csak az $(\Omega_i)_{i\in I}$ pontonkénti végességét használjuk ki, de később szükség lesz a $\mathscr{T}$ topológia szerinti lokális végességére is.) Minden $I \ni i$-re $U_i \subseteq \Omega_i$, ezért az $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer pontonkénti végessége folytán az $(U_i)_{i\in I}$ rendszer is pontonként véges. Ezért ismét a (ii) állítást alkalmazva az $(U_i)_{i\in I}$ rendszerre kapjuk a T olyan $(V_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedését, amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Láttuk, hogy (ii)$\Rightarrow$(i) teljesül, tehát a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér normális, így az Uriszon-tétel alapján minden $I \ni i$-hez van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \le g \le 1$, és $\overline{V_i} \subseteq [g = 1] \subseteq [g \ne 0] \subseteq U_i$; ekkor $supp(g) := \overline{[g \ne 0]} \subseteq \overline{U_i} \subseteq \Omega_i$ is igaz. Tehát a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(g_i)_{i\in I}$ rendszert, hogy minden $I \ni i$-re $g_i : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \le g_i \le 1$, valamint $\overline{V_i} \subseteq [g = 1]$ és $supp(g_i) \subseteq \overline{U_i} \subseteq \Omega_i$. Világos, hogy minden $I \ni i$-re $V_i \subseteq U_i \subseteq \Omega_i$, ezért az $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathscr{T}$ topológia szerinti lokális végessége miatt az $(U_i)_{i\in I}$ és $(V_i)_{i\in I}$ rendszerek szintén lokálisan végesek $\mathscr{T}$ szerint. A $(V_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathscr{T}$ szerint lokális véges befedése T-nek, ezért minden $T \ni t$-hez van olyan $i \in I$, hogy $g_i(t) = 1$, így a $\{i \in I | g_i(t) \neq 0\}$ halmaz nem üres és véges. Legyen minden $I \ni i$-re

$$f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{g_i(t)}{\displaystyle\sum_{j \in I;\ g_j(t) \neq 0} g_j(t)}.$$

Nyilvánvaló, hogy $i \in I$ esetén $supp(f_i) \subseteq supp(g_i) \subseteq \overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, és minden $T \ni t$-re $0 \leq f_i(t) \leq 1$, valamint $\displaystyle\sum_{i \in I;\ f_i(t) \neq 0} f_i(t) = 1$. Tehát ha minden $I \ni i$-re az f_i függvény folytonos volna a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor az $(f_i)_{i \in I}$ rendszer az $(\Omega_i)_{i \in I}$ befedésnek alárendelt folytonos egységosztás volna. A definícióból látható, hogy ha a

$$G : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \sum_{i \in I;\ g_i(t) \neq 0} g_i(t)$$

függvény folytonos volna a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni i$-re f_i is folytonos lenne ugyanezen topológiák szerint.

A G függvény folytonosságának bizonyításához legyen $t \in T$ rögzített. Az $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathscr{T}$ szerinti lokális végessége miatt van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ környezete, hogy $I_V := \{i \in I | V \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ véges halmaz. Ha $t' \in V$, akkor $\{i \in I | g_i(t') \neq 0\} \subseteq I_V$, tehát $G(t') = \displaystyle\sum_{i \in I_V} g_i(t')$. Másként fogalmazva: G egyenlő a $\displaystyle\sum_{i \in I_V} g_i$ összegfüggvénnyel a V környezeten. Tehát a folytonosság lokalitása miatt G folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

(iii)$\Rightarrow$(i) Tegyük fel, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér olyan, hogy a T bármely $\mathscr{T}$ szerint lokálisan véges és nyílt befedéséhez létezik annak alérendelt folytonos egységosztás. Legyenek F és F' diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok T-ben. Legyen $I := \{0, 1\}$ és $\Omega_0 := T \setminus F'$, valamint $\Omega_1 := T \setminus F$. Ekkor $(\Omega_i)_{i \in I}$ véges, tehát a $\mathscr{T}$ szerint lokálisan véges $\mathscr{T}$-nyílt befedése T-nek. Legyen $(f_i)_{i \in I}$ egy $(\Omega_i)_{i \in I}$-nek alárendelt folytonos egységosztás. Ekkor $[f_0 \neq 0] \subseteq T \setminus F'$, tehát $F' \subseteq [f_0 = 0]$, továbbá $[f_1 \neq 0] \subseteq T \setminus F$, tehát $F \subseteq [f_1 = 0]$. De minden $t \in T$ esetén $f_0(t) + f_1(t) = 1$. Ebből következik, hogy bármely $r \in]0, 1[$ valós számra az $\Omega := [f_0 > r]$ és $\Omega' := [f_0 < r]$ halmazok $\mathscr{T}$-nyíltak, diszjunktak, valamint $F \subseteq \Omega$ és $F' \subseteq \Omega'$, így a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális. ∎

Definíció. A T halmaz feletti *félmetrikának* (vagy *eltérésnek*) nevezünk minden olyan $d : T \times T \to \mathbb{R}_+$ függvényt, amelyre teljesülnek a következők.

(SM_I) Minden $t \in T$ esetén $d(t, t) = 0$.

(SM_{II}) Minden $t, t' \in T$ esetén $d(t, t') = d(t', t)$ (*szimmetrikusság*).

(SM_{III}) Minden $t, t', t'' \in T$ esetén $d(t, t'') \leq d(t, t') + d(t', t'')$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

A (T, d) párt *félmetrikus térnek* nevezzük, ha d félmetrika a T halmaz felett. Ha (T, d) félmetrikus tér, akkor minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re és $T \ni t$-re

$$B_r(t; d) := \{t' \in T | d(t, t') < r\},$$
$$\overline{B}_r(t; d) := \{t' \in T | d(t, t') \leq r\},$$
$$S_r(t; d) := \{t' \in T | d(t, t') = r\}.$$

Példák 1) Ha T halmaz, akkor minden T feletti metrika félmetrika, továbbá a $T \times T \to \mathbb{R}_+$ azonosan 0 függvény olyan félmetrika T felett, amely nem metrika, ha T legalább két elemű. Minden metrikus tér félmetrikus tér.

2) Legyen T halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$d_f : T \times T \to \mathbb{R}_+; \quad (t, t') \mapsto |f(t) - f(t')|$$

leképezés félmetrika T felett; ezt nevezzük az f *függvény által generált félmetrikának.*

3) A 2. példa általánosításaként legyen T halmaz, F normált tér és $f : T \to F$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$d_f : T \times T \to \mathbb{R}_+; \quad (t, t') \mapsto \|f(t) - f(t')\|$$

leképezés szintén félmetrika T felett.

4) Legyen p félnorma az E valós vagy komplex vektortér felett (VI. fejezet, 2. pont). Ekkor az

$$E \times E \to \mathbb{R}_+; \quad (x, x') \mapsto p(x - x')$$

leképezés félmetrika E felett. Ez a félmetrika pontosan akkor metrika, ha a p félnorma norma.

Állítás. Ha d félmetrika a T halmaz felett, akkor egyértelműen létezik olyan $\mathscr{T}$ topológia T felett, amely szerint minden $t \in T$ esetén a $\{B_r(t; d) | r \in \mathbb{R}^+\}$ halmaz környezetbázisa a t pontnak.

Bizonyítás. Ha létezik ilyen $\mathscr{T}$ topológia, akkor szükségképpen

$$\mathscr{T} = \{ \ \Omega \subseteq T \mid (\forall \ t \in \Omega)(\exists \ r \in \mathbb{R}^+) : \ B_r(t; d) \subseteq \Omega \ \},$$

ezért a keresett topológia egyértelműsége nyilvánvaló, ugyanakkor a létezése azon múlik, hogy az imént felírt $\mathscr{T}$ halmaz topológia-e T felett. Ez viszont pontosan ugyanúgy bizonyítható, ahogy metrikák esetében igazoltuk azt, hogy a metrika által generált topológia eleget tesz az (O_I), (O_{II}) és (O_{III}) feltételeknek (V. fejezet, 2. pont, ahol a bizonyításban csak azt használtuk ki, hogy d félmetrika T felett). ■

Definíció. Ha d félmetrika a T halmaz felett, akkor $\mathscr{T}_d$ jelöli azt a T feletti topológiát, amely szerint minden $t \in T$ esetén a $\{B_r(t; d) | r \in \mathbb{R}^+\}$ halmaz környezetbázisa a t pontnak; ezt a topológiát a *d félmetrika által generált topológiának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a T halmaz feletti $\mathscr{T}$ topológia *félmetrizálható*, ha létezik olyan T feletti d félmetrika, amelyre $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$.

Megjegyezzük, hogy ha T halmaz és $d : T \times T \to \mathbb{R}_+$ az azonosan 0 függvény, akkor $\mathscr{T}_d$ egyenlő a T feletti antidiszkrét topológiával.

Definíció. Ha (M, d) félmetrikus tér, akkor egy M-ben haladó $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezünk a d félmetrika szerint, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Azt mondjuk, hogy az (M, d) félmetrikus tér *teljes*, ha minden M-ben haladó, d

szerinti Cauchy-sorozat konvergens a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint. Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *teljesen félmetrizálható*, ha létezik olyan T feletti d félmetrika, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$ és (M, d) teljes félmetrikus tér.

Megjegyezzük, hogy ha (M, d) félmetrikus tér, akkor minden M-ben haladó, $\mathscr{T}_d$ szerint konvergens sorozat Cauchy-sorozat a d félmetrika szerint; ez ugyanúgy igazolható, mint metrikus terek esetében (V. fejezet, 9. pont).

Definíció. Ha $(d_i)_{i \in I}$ a T halmaz feletti félmetrikák tetszőleges rendszere, akkor a $\sup\limits_{i \in I} \mathscr{T}_{d_i}$ topológiát a $(d_i)_{i \in I}$ *félmetrika-rendszer által generált topológiának* nevezzük és a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$ szimbólummal jelöljük. Ha $(f_i)_{i \in I}$ a T halmazon értelmezett valós értékű függvények tetszőleges rendszere, akkor a $(d_{f_i})_{i \in I}$ félmetrika-rendszer által generált T feletti topológiát az $(f_i)_{i \in I}$ *függvényrendszer által generált topológiának* nevezzük és a $\mathscr{T}_{(f_i)_{i \in I}}$ szimbólummal jelöljük.

Legyen $(d_i)_{i \in I}$ a T halmaz feletti félmetrikák nem üres rendszere. A topológia-szuprémumra vonatkozó korábbi ismereteink és a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$ topológia értelmezése alapján a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i \in I} \Omega_i \;\middle|\; (\Omega_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}{}^{*} \mathscr{T}_{d_i} \right\}$$

halmaz bázisa a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$ topológiának, ahol

$$\prod_{i \in I}{}^{*} \mathscr{T}_{d_i} := \left\{ (\Omega_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{T}_{d_i} \;\middle|\; \{i \in I | \Omega_i \neq T\} \text{ véges halmaz} \right\}.$$

Ha $(\Omega_i)_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I}{}^{*} \mathscr{T}_{d_i}$ és $J := \{i \in I | \Omega_i \neq T\}$, akkor $J \neq \emptyset$ esetén $\bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i = \bigcap\limits_{i \in J} \Omega_i$, míg $J = \emptyset$ esetén $\bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i = T$. Ha $J \neq \emptyset$, akkor $t \in \bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i$ esetén van olyan $(r_i)_{i \in I}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre minden $i \in J$ esetén $B_{r_i}(t; d_i) \subseteq \Omega_i$, tehát $\bigcap\limits_{i \in J} B_{r_i}(t; d_i) \subseteq \bigcap\limits_{i \in J} \Omega_i = \bigcap\limits_{i \in I} \Omega_i$. Ebből következik, hogy egy $\Omega \subseteq T$ halmaz pontosan akkor nyílt a $(d_i)_{i \in I}$ félmetrika-rendszer által generált topológia szerint, ha minden $t \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz, és olyan $(r_i)_{i \in J}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, hogy $\bigcap\limits_{i \in J} B_{r_i}(t; d_i) \subseteq \Omega$ (vagy ami ugyanaz: minden $t \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz, és olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap\limits_{i \in J} B_r(t; d_i) \subseteq \Omega$). Továbbá, a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}} := \sup\limits_{i \in I} \mathscr{T}_{d_i}$ topológia megegyezik a $((T_i, \mathscr{T}_{d_i}), id_T)_{i \in I}$ rendszer által projektívan előállított T feletti topológiával, ezért minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre, és minden $f : T' \to T$ függvényre, az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re az f függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_{d_i}$ topológiák szerint.

Az előzőek alapján könnyen látható, hogy ha $(d_i)_{i \in I}$ a T halmaz feletti félmetrikák nem üres rendszere, akkor a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$ topológia pontosan akkor Hausdorff-topológia, ha minden $t, t' \in T$ ponthoz, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $i \in I$, hogy $d_i(t, t') > 0$.

Állítás. Ha T halmaz és $(f_i)_{i\in I}$ $T\to\mathbb{R}$ függvények rendszere, akkor a $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ topológia egyenlő az $((\mathbb{R},\mathscr{E}_{\mathbb{R}}),f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektívan előállított T feletti topológiával, vagyis $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ az a legkisebb T feletti topológia, amelyre minden $i\in I$ esetén az $f_i:T\to\mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Ha $I=\emptyset$, akkor a definíció alapján $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ megegyezik az T feletti antidiszkrét topológiával; ugyanakkor minden $I\ni i$-re az f_i függvény folytonos a T feletti antidiszkrét topológia és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ szerint, tehát az $((\mathbb{R},\mathscr{E}_{\mathbb{R}}),f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektívan előállított T feletti topológia egyenlő a T feletti antidiszkrét topológiával. Ezért feltehető, hogy $I\neq\emptyset$.

Jelölje $\mathscr{T}$ az $((\mathbb{R},\mathscr{E}_{\mathbb{R}}),f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektívan előállított T feletti topológiát, és $\mathscr{T}':=\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$. Ha $i\in I$ és $r_i\in\mathbb{R}^+$, akkor minden $T\ni t$-re $B_{r_i}(t;d_i)=[|f_i-f_i(t)|<r_i]$, és a jobb oldalon álló halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, hiszen f_i folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Ebből következik, hogy ha $J\subseteq I$ nem üres véges halmaz és $(r_i)_{i\in J}$ $\mathbb{R}^+$-ban haladó rendszer, akkor minden $T\ni t$-re a $\bigcap\limits_{i\in J}B_{r_i}(t;d_i)$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Az állítás előtt álló megjegyzés szerint ezek a halmazok topologikus bázisát alkotják a $\mathscr{T}'$ topológiának, ezért $\mathscr{T}'\subseteq\mathscr{T}$.

A fordított tartalmazás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy minden $i\in I$ esetén az $f_i:T\to\mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, hiszen a definíció szerint $\mathscr{T}$ a legkisebb ilyen tulajdonságú T feletti topológia. Legyen $i\in I$, $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ és $t\in T$. A $B_\varepsilon(t;d_i)$ gömb $\mathscr{T}'$-nyílt környezete t-nek, és világos, hogy $f_i\langle B_\varepsilon(t;d_i)\rangle\subseteq B_\varepsilon(f_i(t);\mathbb{R})$, tehát f_i a t pontban folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. ■

Tétel. (*Teljesen reguláris terek karakterizációs tétele.*) Ha $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) $(T,\mathscr{T})$ teljesen reguláris.

(ii) Létezik $T\to[0,1]$ függvényeknek olyan $(f_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy $\mathscr{T}=\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$.

(iii) Létezik T feletti félmetrikáknak olyan $(d_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy $\mathscr{T}=\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$.

Továbbá, ha $(T,\mathscr{T})$ teljesen reguláris tér és $I\subseteq\mathscr{F}(T;[0,1])$ olyan halmaz, hogy minden $f\in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, valamint minden $F\subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T\setminus F\ni t$-hez létezik olyan $f\in I$, hogy $F\subseteq[f=0]$ és $f(t)=1$, akkor $\mathscr{T}=\mathscr{T}_{(f)_{f\in I}}$.

Bizonyítás. Az állítás triviálisan igaz akkor, amikor $\mathscr{T}$ a T feletti antidiszkrét topológia.

(i)⇒(ii) A $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér teljesen reguláris, ezért van olyan $I\subseteq\mathscr{F}(T;[0,1])$ halmaz, hogy minden $f\in I$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, valamint minden $F\subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T\setminus F\ni t$-hez van olyan $f\in I$, hogy $f(t)=1$ és $F\subseteq[f=0]$. Megmutatjuk, hogy bármely ilyen tulajdonságú I halmazra az $(f)_{f\in I}$ függvényrendszer által generált T feletti topológia egyenlő $\mathscr{T}$-vel.

Jelölje $\mathscr{T}'$ az $(f)_{f\in I}$ függvényrendszer által generált T feletti topológiát, és legyen $t\in T$ rögzített pont.

Legyen $V\in\mathscr{T}(t)$; ekkor van olyan $\Omega\in\mathscr{T}$, hogy $t\in\Omega\subseteq V$. A $T\setminus\Omega$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $t\notin T\setminus\Omega$, így az I függvényhalmaz választása szerint van olyan $f\in I$, hogy $f(t)=1$ és $T\setminus\Omega\subseteq[f=0]$. Az f függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, ezért bármely $r \in]0,1[$ valós számra az $[f > r] = \overset{-1}{f}\langle]r, \rightarrow [\rangle$ halmaz $\mathscr{T}'$-nyílt és $t \in [f = 1] \subseteq [f > r] \subseteq [f \neq 0] \subseteq \Omega \subseteq V$, így $V \in \mathscr{T}'(t)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}(t) \subseteq \mathscr{T}'(t)$.

Megfordítva, legyen $V \in \mathscr{T}'(t)$; ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}'$, hogy $t \in \Omega' \subseteq V$. Legyen $J \subseteq I$ olyan nem üres véges halmaz és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\bigcap_{f \in J} B_r(t; d_f) \subseteq V$. Ha $f \in J$, akkor $B_r(t; d_f) = [|f - f(t)| < r]$, és az f függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, így a $[|f - f(t)| < r]$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Ebből következik, hogy $\bigcap_{f \in J} B_r(t; d_f) \in \mathscr{T}$, így $V \in \mathscr{T}(t)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}'(t) \subseteq \mathscr{T}(t)$.

Tehát minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathscr{T}'(t)$, így $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ teljesül. Ezzel nemcsak az (i)$\Rightarrow$(ii) implikációt, hanem az utolsó állításunkat is igazoltuk.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Triviális.

(iii)$\Rightarrow$(i) Legyen $(d_i)_{i \in I}$ a T halmaz feletti félmetrikáknak olyan rendszere, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$. Ha $i \in I$ és $t \in T$, akkor $d_i(\cdot, t) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, mert a d_i-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség és szimmetria alapján minden $T \ni t_1, t_2$-re fennáll a $|d_i(t_1, t) - d_i(t_2, t)| \leq d_i(t_1, t_2)$ egyenlőtlenség.

Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $t \in T \setminus F$. Ekkor a $T \setminus F$ halmaz a t pontnak $\mathscr{T}$-nyílt környezete, ezért van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{i \in J} B_r(t; d_i) \subseteq T \setminus F$. Ekkor az

$$f := 1 - \inf\left(1, \frac{1}{r} \sup_{i \in J} d_i(\cdot, t)\right) : T \to \mathbb{R}$$

függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá $0 \leq f \leq 1$, és $F \subseteq [f = 0]$, valamint $f(t) = 1$. A definíció alapján ez azt jelenti, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér teljesen reguláris. ■

Az iménti tétel bizonyításának (i)$\Rightarrow$(ii) részéből látható, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér és $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0,1])$ olyan halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(f)_{f \in I}}$. Másfelől láttuk, hogy a $\mathscr{T}_{(f)_{f \in I}}$ topológia megegyezik az $((\mathbb{R}, \mathscr{E}_{\mathbb{R}}), f)_{f \in I}$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológiával. Ebből azonnal következik, hogy ha I ilyen tulajdonságú függvényhalmaz, akkor minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre, és minden $g : T' \to T$ függvényre: a g pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni f$-re az $f \circ g : T' \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

Következmény. Ha $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris Hausdorff-tér és $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0,1])$ olyan halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor a $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ topologikus kockának van olyan topologikus altere, amely homeomorf $(T, \mathscr{T})$-vel (amit úgy fejezünk ki, hogy a $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér *beágyazható* a $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ topologikus kockába).

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{T}' := (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I$, és értelmezzük a

$$\varphi : T \to [0,1]^I; \quad t \mapsto (f \mapsto f(t))$$

leképezést, tehát $t \in T$ esetén $\varphi(t) \in [0,1]^I$ az a függvény, amely minden $f \in I$ függvényhez az $f(t)$ értéket rendeli.

Legyenek $t, t' \in T$ és $t \neq t'$; akkor $t \in T \setminus \{t'\}$ és a $\{t'\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, mert a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér T_1-tér. Ezért az I választása szerint van olyan $f \in I$, hogy $f(t) = 1$ és $\{t'\} \subseteq [f = 0]$, azaz $f(t') = 0$. Tehát $\varphi(t)(f) = 1 \neq 0 = f(t') = \varphi(t')(f)$, vagyis a φ függvény injektív.

Minden $f \in I$ esetén jelölje pr_f az f által meghatározott $[0,1]^I \to [0,1]$ projekciót. A szorzattopológia definíciója alapján a φ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni f$-re a $pr_f \circ \varphi : T \to [0,1]$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint. De $f \in I$ esetén minden $T \ni t$-re $(pr_f \circ \varphi)(t) = f(t)$, azaz $pr_f \circ \varphi = f$, és f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint. Ezért a $\varphi : T \to [0,1]^I$ leképezés folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Tehát a $\varphi : T \to Im(\varphi)$ függvény olyan bijekció, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'|Im(\varphi)$ topológiák szerint.

A bizonyítás utolsó lépéseként megmutatjuk, hogy a $\varphi^{-1} : Im(\varphi) \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'|Im(\varphi)$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. Az állítás előtt álló megjegyzés alapján φ^{-1} pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'|Im(\varphi)$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni f$-re az $f \circ \varphi^{-1} : Im(\varphi) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'|Im(\varphi)$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Ha $f \in I$, akkor nyilvánvalóan $f \circ \varphi^{-1} = pr_f|_{Im(\varphi)}$, vagyis $f \circ \varphi^{-1}$ egyenlő a $pr_f : [0,1]^I \to [0,1]$ projekció-függvény $Im(\varphi)$-re vett leszűkítésével. A szorzattopológia értelmezése alapján minden $f \in I$ esetén a pr_f függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, így $pr_f|_{Im(\varphi)}$ folytonos a $\mathscr{T}'|Im(\varphi)$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint. Ezért minden $I \ni f$-re $f \circ \varphi^{-1}$ folytonos a $\mathscr{T}'|Im(\varphi)$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. ■

Tétel. (*Uriszon beágyazási tétele.*) Minden megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér homeomorf a $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével.

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér. A Lindelöf-tétel szerint minden megszámlálható bázisú topologikus tér Lindelöf-tér, és a Tyihonov-lemma szerint minden reguláris Lindelöf-tér normális. Ezért $(T, \mathscr{T})$ normális T_1-tér, így $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris Hausdorff-tér. Ha létezne olyan $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0,1])$ *megszámlálható* halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor a teljesen reguláris terek karakterizációs tételének következménye alapján a $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ topologikus kockának van olyan topologikus altere, amely homeomorf $(T, \mathscr{T})$-vel. Ekkor I véges, vagy ekvipotens $\mathbb{N}$-nel. Az első esetben $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ homeomorf a $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével, míg a második esetben $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ és $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ homeomorfak. Ezért $(T, \mathscr{T})$ is homeomorf volna a $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével.

Egy ilyen tulajdonságú I függvényhalmaz előállítása céljából vegyük a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térnek egy $\mathfrak{B}$ megszámlálható topologikus bázisát, és legyen $\mathfrak{I} := \{(U,V) \in \mathfrak{B}\times\mathfrak{B} | \overline{U} \subseteq V\}$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális, ezért az Uriszon-tétel alapján minden $\mathfrak{I} \ni (U,V)$-hez van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, $\overline{U} \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] \subseteq V$. Ezért kiválaszthatunk olyan $\left(f_{U,V}\right)_{(U,V)\in\mathfrak{I}}$ rendszert, hogy minden $\mathfrak{I} \ni (U,V)$-re $f_{U,V} : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\overline{U} \subseteq [f_{U,V} = 1]$ és $[f_{U,V} \neq 0] \subseteq V$. Az $\mathfrak{I}$ halmaz megszámlálható, ezért $I := \left\{f_{U,V} \,\middle|\, (U,V) \in \mathfrak{I}\right\} \subseteq \mathscr{F}(T;[0,1])$ olyan megszámlálható függvényhalmaz, amelynek minden eleme folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $t \in T \setminus F$. A $\mathfrak{B}$ halmaz topologikus bázisa a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térnek, ezért vehetünk olyan $V \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $t \in V \subseteq T \setminus F$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér reguláris, ezért a $V \in \mathscr{T}(t)$ környezethez van olyan $W \in \mathscr{T}(t)$, amely $\mathscr{T}$-zárt és $W \subseteq V$. Ekkor $t \in \overset{\circ}{W} \in \mathscr{T}$, így ismét kihasználva azt, hogy $\mathfrak{B}$ topologikus bázisa $(T, \mathscr{T})$-nek kapunk olyan $U \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $t \in U \subseteq \overset{\circ}{W}$. Világos, hogy $\overline{U} \subseteq W \subseteq V$, tehát $(U,V) \in \mathfrak{I}$, és $f_{U,V}(t) = 1$, valamint $F \subseteq T \setminus V \subseteq [f_{U,V} = 0]$. Ez azt jelenti, hogy I olyan függvényhalmaz, amelynek a létezését állítottuk. ■

Következmény. (*Uriszon metrizációs tétele.*) Ha $(T, \mathscr{T})$ T_1-tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) $(T, \mathscr{T})$ reguláris és megszámlálható bázisú.

(ii) $(T, \mathscr{T})$ homeomorf a $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével.

(iii) $(T, \mathscr{T})$ metrizálható és szeparábilis.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ez a következtetés ekvivalens Uriszon beágyazási tételével (a T_1 terek körében).

(ii)⇒(iii) A $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ euklidészi kocka metrizálható, és nyilvánvaló, hogy metrizálható topologikus tér bármely topologikus altere metrizálható.

(iii)⇒(i) Az V. fejezet 3. pontjában láttuk, hogy szeparábilis metrikus tér megszámlálható bázisú, és az V. fejezet 7. pontjának utolsó tétele alapján metrizálható topologikus tér még normális is (és persze Hausdorff-tér), ezért szükségképpen reguláris. ■

3. Kompakt és lokálisan kompakt terek

Ettől kezdve áttérünk a topologikus terek jelölésével kapcsolatos szokásos konvencióra. Tehát minden topologikus teret egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével jelölünk, ha ez nem okoz félreértést. Hasonló megállapodáshoz tartottuk magunkat a testek, a vektorterek, a metrikus terek és a normált terek esetében is. Továbbá, a $\mathbb{K}$ *test minden részhalmazát az euklidészi topológia (vagyis* $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$*) leszűkítésével ellátva topologikus térnek tekintjük. Tehát a* $\mathbb{K}$ *részhalmazain más topológiát nem veszünk; ha arra mégis szükség volna, akkor azt külön megemlítjük.*

Definíció. A T topologikus terek *kompaktnak* nevezzük, ha a T bármely nyílt befedésének létezik nyílt részbefedése. A T topologikus tér E részhalmazát kompaktnak mondjuk, ha E a T topológiájának leszűkítésével ellátva kompakt tér. A T topologikus tér E részhalmazát *relatív kompaktnak* mondjuk, hogy az $\overline{E}$ halmaz kompakt T-ben.

Tehát a kompaktságot úgy értelmezzük, hogy kompakt terekre a Borel-Lebesgue befedési-tétel (V. fejezet, 5. pont) *definíció szerint* teljesüljön.

Az analízis több fejezetében (például a XV., XVI. és XVII. fejezetekben) megállapodunk abban, hogy csak olyan kompakt tereket tekintünk, amelyek Hausdorff-terek. Ilyen esetekben a "kompakt tér" kifejezés azt fogja rövidíteni, hogy "kompakt Hausdorff-tér". De ez nem azt jelenti, hogy minden kompakt tér automatikusan Hausdorff-tér. Például minden antidiszkrét tér nyilvánvalóan kompakt, de ha az alaphalmaz legalább két elemű, akkor nem Hausdorff-tér (sőt nem is T_1-tér).

Állítás. Legyen T topologikus tér. Az $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha a T nyílt részhalmazainak bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszerére teljesül az, hogy ha $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$, akkor létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $E \subseteq T$ halmaz kompakt, és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$. Az altértopológia tulajdonságai szerint ekkor az $(E \cap \Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer mindegyik tagja nyílt az E toplogikus altérben, és $E = \bigcup\limits_{i\in I} (E \cap \Omega_i)$. Az E kompaktsága miatt van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E = \bigcup\limits_{i\in J} (E \cap \Omega_i)$. Természetesen ekkor $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$ is teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a T nyílt részhalmazainak bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszerére teljesül az, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ esetén van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$. Legyen $(\Omega_i')_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén Ω_i' nyílt részhalmaza az E topologikus altérnek és $E = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i'$. Az altértopológia definíciája alapján kiválaszthatunk olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszert, hogy minden $I \ni i$-re Ω_i nyílt részhalmaza T-nek és $\Omega_i' = E \cap \Omega_i$. Világos, hogy ekkor $E = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i' = \bigcup\limits_{i\in I} (E \cap \Omega_i) \subseteq$

$\bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$, tehát a feltevés alapján van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$. Ezért $E = \bigcup\limits_{i\in J}(E\cap\Omega_i) = \bigcup\limits_{i\in J}\Omega'_i$, így E kompakt halmaz T-ben. ■

Legyen T topologikus tér, $E \subseteq T$ kompakt halmaz, és $(V_t)_{t\in E}$ olyan rendszer, hogy minden $E \ni t$-re V_t a t-nek környezete. Ekkor van olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{t\in H} V_t$. Valóban, a környezetek értelmezése alapján kiválaszthatjuk a T nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_t)_{t\in E}$ rendszerét, amelyre minden $t \in E$ esetén $t \in \Omega_t \subseteq V_t$, tehát $E \subseteq \bigcup\limits_{t\in E}\Omega_t$. Ez azt jelenti, hogy $(\Omega_t)_{t\in E}$ nyílt befedése E-nek, így az E kompaktsága folytán van olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{t\in H}\Omega_t \subseteq \bigcup\limits_{t\in H} V_t$. Ezt az állítást a következőkben gyakran alkalmazzuk.

Állítás. Legyen T topologikus tér és $T' \subseteq T$. Az $E \subseteq T'$ halmaz pontosan akkor kompakt T-ben, ha kompakt a T' topologikus altérben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $E \subseteq T'$ halmaz kompakt a T' topologikus altérben, és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$. Ekkor a $(T'\cap\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer a T' altértopológiája szerint nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}(T'\cap\Omega_i)$. Ezért van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}(T'\cap\Omega_i) \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy E kompakt a T topologikus térben. Megfordítva, tegyük fel, hogy az $E \subseteq T'$ halmaz kompakt a T topologikus térben, és legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ a T' topologikus altérben nyílt halmazok olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}\Omega'_i$. Az altértopológia tulajdonságai szerint kiválasztható a T nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy minden $i \in I$ esetén $\Omega'_i = T'\cap\Omega_i$. Ekkor $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$, így létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$. Minden $I \ni i$-re $\Omega'_i \subseteq T'$, ezért ebből következik, hogy $E \subseteq T' \cap \left(\bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i\right) = \bigcup\limits_{i\in J}(T'\cap\Omega_i) = \bigcup\limits_{i\in J}\Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy E kompakt a T' topologikus altérben. ■

Véges sok véges halmaz uniója véges, ezért nyilvánvaló, hogy topologikus tér véges sok kompakt részhalmazának uniója kompakt. Továbbá, topologikus tér bármely véges részhalmaza nyilvánvalóan kompakt halmaz.

Állítás. Hausdorff-tér minden kompakt részhalmaza zárt. Kompakt tér minden zárt részhalmaza kompakt. Kompakt Hausdorff-térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.

Bizonyítás. A harmadik állítás nyilvánvalóan következik az első kettőből.

Legyen E nem üres kompakt halmaz a T Hausdorff-térben, és $t_0 \in T \setminus E$ rögzített pont. Minden $t \in E$ esetén $t \neq t_0$, ezért létezik t-nek olyan V környezete és t_0-nak olyan U környezete, hogy $V \cap U = \emptyset$. Tehát kiválaszthatunk olyan $(V_t)_{t\in E}$ és $(U_t)_{t\in E}$ rendszereket, hogy minden $E \ni t$-re V_t a t-nek és U_t a t_0-nak olyan környezete T-ben, hogy $V_t \cap U_t = \emptyset$. Az E kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq E$

véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{t\in H} V_t$. Az $E \neq \emptyset$ feltétel alapján $H \neq \emptyset$, így a $U := \bigcap_{t\in H} U_t$ halmaz a t_0-nak olyan környezete T-ben, hogy $U \cap \left(\bigcup_{t\in H} V_t \right) = \emptyset$, következésképpen $U \cap E = \emptyset$, azaz $U \subseteq T \setminus E$. Ez azt jelenti, a $T \setminus E$ halmaz minden pontja belső pont, tehát E zárt halmaz T-ben.

Legyen T kompakt tér és $E \subseteq T$ zárt halmaz. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Legyen α olyan halmaz, hogy $\alpha \notin I$, és $\Omega_\alpha := T \setminus E$, tehát az E zártsága miatt Ω_α nyílt részhalmaza T-nek. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I\cup\{\alpha\}}$ a T nyílt befedése, így a T kompaktsága folytán létezik olyan $J \subseteq I \cup \{\alpha\}$ véges halmaz, amelyre $T = \bigcup_{i\in J} \Omega_i$. Világos, hogy $E \cap \Omega_\alpha = \emptyset$, ezért $E = \bigcup_{i\in J} (E \cap \Omega_i) = \bigcup_{i\in J\setminus\{\alpha\}} (E \cap \Omega_i) \subseteq \bigcup_{i\in J\setminus\{\alpha\}} \Omega_i$. Tehát $J \setminus \{\alpha\} \subseteq I$ olyan véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{i\in J\setminus\{\alpha\}} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy E kompakt halmaz T-ben. ■

De vigyázzunk arra, hogy kompakt térben létezhet nem zárt kompakt részhalmaz; például ha T kompakt, de nem T_1-tér, akkor van olyan $t \in T$, hogy a $\{t\}$ halmaz nem zárt, de kompakt.

Következmény. Ha T topologikus tér, $E \subseteq T$ kompakt halmaz és $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor $E \cap F$ kompakt halmaz T-ben.

Bizonyítás. Az altértopológiák tulajdonságai alapján az $E \cap F$ halmaz zárt az E kompakt topologikus altérben, így az előző állítás szerint $E \cap F$ kompakt az E altértopológiája szerint. Ezért $E \cap F$ kompakt T-ben is. ■

Állítás. Reguláris topologikus térben minden kompakt halmaz relatív kompakt.

Bizonyítás. Legyen T reguláris topologikus tér és $K \subseteq T$ kompakt halmaz. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése $\overline{K}$-nak T-ben. Ha $t \in K$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $t \in \Omega_i$, tehát a T regularitása miatt van olyan V *zárt* környezete t-nek, hogy $V \subseteq \Omega_i$. Tehát kiválasztható olyan $(V_t)_{t\in K}$ rendszer, hogy minden $t \in K$ esetén V_t zárt környezete t-nek és van olyan $i \in I$, amelyre $V_t \subseteq \Omega_i$. Ekkor $(V_t)_{t\in K}$ környezetekkel való befedése a K kompakt halmaznak, ezért van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{t\in H} V_t$. Itt a jobb oldalon zárt halmaz áll, ezért $\overline{K} \subseteq \bigcup_{t\in H} V_t$. Ha $f : H \to I$ olyan függvény, hogy minden $t \in H$ esetén $V_t \subseteq \Omega_{f(t)}$, akkor $Im(f)$ olyan véges részhalmaza I-nek, hogy $\overline{K} \subseteq \bigcup_{i\in Im(f)} \Omega_i$, tehát $\overline{K}$ kompakt halmaz T-ben. ■

Állítás. Minden kompakt Hausdorff-tér normális.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden kompakt Hausdorff-tér *reguláris.* Legyen ugyanis T kompakt Hausdorff-tér, $F \subseteq T$ nem üres zárt halmaz, valamint $t \in T \setminus F$. Minden $s \in F$ esetén $t \neq s$, ezért van olyan U nyílt környezete t-nek és olyan V nyílt környezete s-nek, hogy $U \cap V = \emptyset$. Kiválaszthatunk tehát olyan $(U_s)_{s\in F}$ és $(V_s)_{s\in F}$ rendszereket, hogy minden $F \ni s$-re U_s az t-nek nyílt környezete és V_s az s-nek nyílt környezete és $U_s \cap V_s = \emptyset$. Az F halmaz zárt a

T kompakt térben, tehát F kompakt halmaz, így van olyan $S \subseteq F$ véges halmaz, hogy $F \subseteq \bigcup_{s\in S} V_s$. Az $F \neq \emptyset$ feltétel alapján $S \neq \emptyset$, ezért $U := \bigcap_{s\in S} U_s$ a t-nek nyílt környezete T-ben. Világos, hogy $\Omega := U$ és $\Omega' := \bigcup_{s\in S} V_s$ olyan diszjunk nyílt halmazok T-ben, amelyekre $t \in \Omega$ és $F \subseteq \Omega'$. Ez azt jelenti, hogy T reguláris tér.

Legyen T kompakt Hausdorff-tér, és legyenek $F, F' \subseteq T$ nem üres diszjunkt zárt halmazok T-ben. A T regularitása miatt minden $t \in F$ esetén van olyan U nyílt környezete t-nek és olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $F' \subseteq \Omega'$ és $U \cap \Omega' = \emptyset$. Kiválaszthatunk tehát olyan $(U_t)_{t\in F}$ és $(\Omega'_t)_{t\in F}$ rendszereket, hogy minden $F \ni t$-re U_t nyílt környezete t-nek, Ω'_t nyílt halmaz T-ben, valamint $F' \subseteq \Omega'_t$ és $U_t \cap \Omega'_t = \emptyset$. Az F halmaz zárt a T kompakt térben, ezért F kompakt halmaz, így van olyan $H \subseteq T$ véges halmaz, hogy $F \subseteq \bigcup_{t\in H} U_t$. Az $F \neq \emptyset$ feltétel alapján $H \neq \emptyset$. Ekkor $\Omega := \bigcup_{t\in H} U_t$ és $\Omega' := \bigcap_{t\in H} \Omega'_t$ olyan nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$, $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy T normális tér. ■

Megjegyezzük, hogy kompakt tér triviálisan Lindelöf-tér, és a Tyihonov-lemma szerint reguláris Lindelöf-tér normális (2. pont). Ezért az iménti bizonyítás első részéből a Tyihonov-lemma alapján is következik az állítás. Azonban a fenti bizonyítás nem követeli meg a Lindelöf-terek fogalmának és a Tyihonov-lemmának az ismeretét.

Tehát láttuk, hogy kompakt Hausdorff-tér szükségképpen reguláris is. Azonban a következő példa szerint van olyan kompakt tér T_1-tér, amely nem Hausdorff-tér (és akkor még kevésbé reguláris, hiszen reguláris T_1-tér szükségképpen Hausdorff-tér).

Példa. Legyen T tetszőleges halmaz és

$$\mathscr{T} := \{\emptyset\} \cup \{\, \Omega \in \mathscr{P}(T) \mid T \setminus \Omega \text{ véges halmaz } \}.$$

Ekkor $\mathscr{T}$ topológia T felett, és $(T, \mathscr{T})$ kompakt tér. Valóban, $\mathscr{T}$-re (O_I) teljesül, és ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer $\mathscr{T}$-ben, és minden $I \ni i$-re $\Omega_i \neq \emptyset$, akkor $T \setminus \left(\bigcap_{i\in I} \Omega_i\right) = \bigcup_{i\in I}(T \setminus \Omega_i)$ véges halmaz T-ben, tehát $\bigcap_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$, hiszen véges sok véges halmaz uniója véges, így $\mathscr{T}$-re (O_{II}) is teljesül. Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres rendszer $\mathscr{T}$-ben és van olyan $i \in I$, hogy $\Omega_i \neq \emptyset$, akkor $T \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right) = \bigcap_{i\in I}(T \setminus \Omega_i)$, tehát $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$, hiszen véges halmaz minden részhalmaza véges, így $\mathscr{T}$-re (O_{III}) is teljesül. Tehát $\mathscr{T}$ topológia T felett, és könnyen látható, hogy egy $F \subseteq T$ halmaz pontosan akkor $\mathscr{T}$-zárt, ha $F = T$ vagy F véges. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér kompaktságának bizonyításához legyen $(F_i)_{i\in I}$ a T nem üres $\mathscr{T}$-zárt halmazainak tetszőleges lefelé irányított nem üres rendszere; azt kell igazolni, hogy $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Legyen $I_0 := \{i \in I | F_i \neq T\}$. Ha $I_0 = \emptyset$, akkor $\bigcap_{i\in I} F_i = T \neq \emptyset$, ezért feltehető, hogy $I_0 \neq \emptyset$. Természetesen ekkor $\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I_0} F_i$ teljesül, és minden $I_0 \ni i$-re F_i véges halmaz. A $\{Card(F_i) | i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ halmaz nem üres, ezért van olyan $i_0 \in I_0$, hogy minden $I_0 \ni i$-re $Card(F_{i_0}) \leq Card(F_i)$. Ha $i \in I$, akkor van olyan $j \in I$, hogy $F_j \subseteq F_{i_0} \cap F_i$, így $F_j \subseteq F_{i_0}$, tehát $Card(F_j) = Card(F_{i_0})$, vagyis $F_{i_0} = F_j \subseteq F_i$. Ebből következik, hogy $\bigcap_{i \in I_0} F_i = F_{i_0} \neq \emptyset$, így $(T, \mathscr{T})$ kompakt tér. Világos, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér T_1-tér, mert a T minden egy elemű (sőt véges) részhalmaza zárt $\mathscr{T}$ szerint. Ha T véges, akkor $\mathscr{T}$ egyenlő a T feletti diszkrét topológiával. Azonban végtelen T esetében a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér nem Hausdorff-tér (de kompakt T_1-tér). Legyenek ugyanis $t, t' \in T$ olyan pontok, hogy $t \neq t'$. tegyük fel olyan diszjunkt $\Omega, \Omega' \in \mathscr{T}$ halmazok létezését, amelyekre $t \in \Omega$ és $t' \in \Omega'$. Ekkor $\Omega \neq T$, mert $t' \notin \Omega$, így $T \setminus \Omega$ véges halmaz és $\Omega' \subseteq T \setminus \Omega$, ezért Ω' véges. Hasonlóan, $\Omega' \neq T$, mert $t \notin \Omega'$, így $T \setminus \Omega'$ véges halmaz és $\Omega \subseteq T \setminus \Omega'$, ezért Ω véges. Ebből következik, hogy a $T = \Omega \cup (T \setminus \Omega)$ halmaz is véges. Tehát ha T végtelen, akkor a T bármely két pontjának bármely környezetei metszik egymást, így T nem Hausdorff-tér.

Megjegyezzük, hogy a nem Hausdorff-féle kompakt terek elmélete rendkívüli jelentőséggel bír az általános topológia algebrai topológiai alkalmazásaiban. Azonban az analízisben, majdnem minden természetes módon felbukkanó kompakt tér Hausdorff-tér. Ezért az analízisben szokásos az a konvenció, hogy egy topologikus tér kompaktsága azt jelenti, hogy a tér kompakt Hausdorff-tér. Ebben a pontban még nem követjük ezt a konvenciót, de a XIV. fejezettől kezdve minden kompakt teret eleve szeparáltnak fogunk tekinteni.

Definíció. Egy $\mathfrak{C}$ halmazt *centráltnak* nevezünk, ha $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ és minden $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ nem üres véges halmazra $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}'} C \neq \emptyset$.

Állítás. Ha T topologikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.
(i) T kompakt tér.
(ii) Minden $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmazra $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} \overline{C} \neq \emptyset$.
(iii) Minden $\mathfrak{R} \subseteq \mathscr{P}(T)$ rácsra $\bigcap_{R \in \mathfrak{R}} \overline{R} \neq \emptyset$.
(iv) Ha $(F_i)_{i \in I}$ a T zárt részhalmazainak nem üres lefelé irányított rendszere (vagyis minden $j, k \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $F_i \subseteq F_j \cap F_k$) és $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $F_i = \emptyset$.
(v) Ha $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T nyílt részhalmazainak felfelé irányított rendszere (vagyis minden $j, k \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\Omega_j \cup \Omega_k \subseteq \Omega_i$) és $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = T$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $\Omega_i = T$.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Tegyük fel, hogy T kompakt tér és $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} \overline{C} = \emptyset$. Ekkor $T \neq \emptyset$ és a $(T \setminus \overline{C})_{C \in \mathfrak{C}}$ rendszer nyílt befedése T-nek, ezért van olyan $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ véges halmaz, amelyre $T = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}'} (T \setminus \overline{C})$. De $T \neq \emptyset$, ezért $\mathfrak{C}' \neq \emptyset$, így $T = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}'} (T \setminus \overline{C}) = T \setminus \left(\bigcap_{C \in \mathfrak{C}'} \overline{C} \right)$, vagyis $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}'} \overline{C} = \emptyset$. Ugyanakkor $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}'} C \subseteq \bigcap_{C \in \mathfrak{C}'} \overline{C}$, ezért $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}'} C = \emptyset$ is teljesül, ami ellentmond annak, hogy $\mathfrak{C}$ centrált. Tehát ha T kompakt tér és $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz, akkor $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} \overline{C} \neq \emptyset$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Nyilvánvaló, mert minden rács centrált halmaz.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre teljesülnek a (iv) állítás feltételei, de minden $I \ni i$-re $F_i \neq \emptyset$. Ekkor az $\{F_i|i \in I\}$ halmaz a T zárt részhalmazaiból álló rács, tehát a (iii) alapján $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, ami ellentmond a $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ hipotézisnek.

(iv)$\Rightarrow$(v) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre teljesülnek az (v) állítás feltételei, de minden $I \ni i$-re $\Omega_i \neq T$. Ekkor a $(T \setminus \Omega_i)_{i\in I}$ nem üres halmazrendszer nyilvánvalóan lefelé irányított, és mindegyik tagja nem üres zárt halmaz T-ben. Ezért a (iv) alapján $\bigcap_{i\in I}(T \setminus \Omega_i) = \emptyset$ lehetetlen, így a de Morgan egyenlőség szerint $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \neq T$, ami ellentmond a $\bigcup_{i\in I} \Omega_i = T$ feltételnek.

(v)$\Rightarrow$(i) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése T-nek és A az I nem üres véges részhalmazainak halmaza (ami nem üres, mert $\emptyset \in A$). Minden $A \ni \alpha$-ra legyen $U_\alpha := \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$. Ekkor $\alpha, \beta \in A$ esetén a $\gamma := \alpha \cup \beta$ halmazra $\gamma \in A$ és $U_\alpha \cup U_\beta = U_\gamma$ teljesül, tehát az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer felfelé irányított. Ugyanakkor $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha := \bigcup_{\alpha\in A}\left(\bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i\right) = \bigcup_{i\in I} \Omega_i = T$. Tehát az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer nem üres, felfelé irányított és nyílt befedése T-nek. Ezért az (v) alapján van olyan $\alpha \in A$, hogy $T = U_\alpha := \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$, vagyis $(\Omega_i)_{i\in\alpha}$ véges részbefedés. Ez azt jelenti, hogy T kompakt tér. ■

Következmény. (*Cantor-féle közösrész-tétel.*) Ha T topologikus tér és $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ a T nem üres zárt és kompakt részhalmazainak lefelé irányított nem üres rendszere, akkor $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha_0 \in A$ rögzített. Ha $A' \subseteq A$ nem üres véges halmaz, akkor a $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer lefelé irányítottsága miatt van olyan $\beta \in A'$, hogy $K_\beta \subseteq \bigcap_{\alpha\in A'} K_\alpha$, tehát $\emptyset \neq K_\beta \cap K_{\alpha_0} \subseteq \bigcap_{\alpha\in A'} (K_\alpha \cap K_{\alpha_0})$. Ezért a $\{K_\alpha \cap K_{\alpha_0}|\alpha \in A\}$ halmaz *centrált.* Minden $A \ni \alpha$-ra a $K_\alpha \cap K_{\alpha_0}$ halmaz kompakt és zárt T-ben (mert K_α és K_{α_0} mindketten zártak és kompaktak), ezért $K_\alpha \cap K_{\alpha_0}$ kompakt a K_{α_0} kompakt topologikus altérben is, így az előző állítás (ii) pontja szerint $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha\in A} \overline{K_\alpha \cap K_{\alpha_0}} = \bigcap_{\alpha\in A} (K_\alpha \cap K_{\alpha_0}) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha$. ■

Következmény. (*Bolzano-Weierstrass-tétel.*) A T topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha minden T-ben haladó általánosított sorozatnak létezik olyan általánosított részsorozata, amely konvergens T-ben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T kompakt, és legyen $(t_i)_{i\in I}$ tetszőleges T-ben haladó általánosított sorozat. Minden $I \ni i$-re legyen $F_i := \overline{\{t_j|(j \in I) \wedge (j \geq i)\}}$. Ekkor az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer minden tagja nem üres zárt halmaz T-ben, és az I halmaz felfelé irányítottsága miatt minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $F_i \subseteq F_{i_1}$ és $F_i \subseteq F_{i_2}$; vagyis az $(F_i)_{i\in I}$ rendszer a tartalmazás tekintetében lefelé irányított. Minden $i \in I$ esetén F_i kompakt T-ben, mert zárt és T kompakt. A Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy bármely $t \in \bigcap_{i\in I} F_i$ ponthoz létezik a $(t_i)_{i\in I}$-nek olyan általánosított részsorozata, amely t-hez konvergál.

Valóban, legyen $t \in \bigcap_{i\in I} F_i$ rögzített, $\mathfrak{F}$ a t pont környezeteinek halmaza T-ben, és $J := \{(i,V)|(V \in \mathfrak{F}) \wedge (t_i \in V)\}$. A J halmazon bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $(i_1,V_1),(i_2,V_2) \in J$ esetén $(i_1,V_1) \leq (i_2,V_2)$ definíció szerint jelentse azt, hogy $i_1 \leq i_2$ és $V_1 \supseteq V_2$. Az I felfelé irányítottsága és az $\mathscr{F}$ szűrő tartalmazás szerinti lefelé irányítottsága miatt J a $\leq$ relációval ellátva felfelé irányított előrendezett halmaz. Értelmezzük most a $\sigma : J \to I$; $(i,V) \mapsto i$ leképezést; ez nyilvánvalóan monoton növő függvény. Az $Im(\sigma)$ halmaz nyilvánvalóan kofinális I-vel, mert $i \in I$ esetén $(i,T) \in J$ olyan, hogy $\sigma((i,T)) := i$ (tehát még $Im(\sigma) = I$ is igaz). Ezért $\left(t_{\sigma(j)}\right)_{j\in J}$ általánosított részsorozata $(t_i)_{i\in I}$-nek. Megmutatjuk, hogy a $\left(t_{\sigma(j)}\right)_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál t-hez T-ben. Valóban, ha V a t-nek környezete T-ben, azaz $V \in \mathfrak{F}$, akkor van olyan $i_V \in I$, hogy $(i_V,V) \in J$, mert $I \neq \emptyset$, és ha $i_0 \in I$ rögzített, akkor $t \in F_{i_0} := \overline{\{t_j|(j \in I) \wedge (j \geq i_0)\}}$ miatt $V \cap \{t_j|(j \in I) \wedge (j \geq i_0)\} \neq \emptyset$, így van olyan $i \in I$, hogy $t_i \in V$, azaz $(i,V) \in J$. Ha $(i_V,V) \in J$, akkor $(i,W) \in J$ és $(i_V,V) \leq (i,W)$ esetén $t_{\sigma(i,W)} = t_i \in V_i \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy a $\left(t_{\sigma(j)}\right)_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál t-hez T-ben.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden T-ben haladó általánosított sorozatnak létezik konvergens általánosított részsorozata. Legyen $(F_i)_{i\in I}$ a T nem üres zárt részhalmazainak nem üres, tartalmazás tekintetében lefelé irányított rendszere; megmutatjuk, hogy ekkor $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Ehhez először a kiválasztási axióma alkalmazásával veszünk egy $(t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i$ rendszert, és az I halmazon bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $i_1,i_2 \in I$ esetén $i_1 \leq i_2$ azt jelentse, hogy $F_{i_1} \supseteq F_{i_2}$. Természetesen ekkor I a $\leq$ relációval ellátva felfelé irányított előrendezett halmaz (amelyen a $\leq$ előrendezés nem szükségképpen antiszimmetrikus), tehát $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat T-ben. A feltevés alapján létezik olyan J felfelé irányított előrendezett halmaz és olyan $\sigma : J \to I$ monoton növő függvény, hogy az $Im(\sigma)$ halmaz kofinális I-vel, és $(t_{\sigma(j)})_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál T-ben egy t ponthoz. Állítjuk, hogy bármely ilyen t pontra $t \in \bigcap_{i\in I} F_i$ teljesül, vagyis minden $I \ni i$-re $t \in F_i$, ami az F_i halmaz zártsága miatt azzal ekvivalens, hogy a t minden V környezetére $V \cap F_i \neq \emptyset$. Legyen ugyanis V környezete t-nek és $i \in I$. A hipotézis szerint a $(t_{\sigma(j)})_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál T-ben t-hez, ezért létezik olyan $j_1 \in J$, hogy minden $j \in J$ esetén, ha $j \geq j_1$, akkor $t_{\sigma(j)} \in V$. Az $Im(\sigma)$ halmaz kofinális I-vel, ezért az i-hez van olyan $j_2 \in J$, hogy $\sigma(j_2) \geq i$. A J halmaz előrendezése felfelé irányított, ezért van olyan $j_0 \in J$, hogy $j_0 \geq j_1$ és $j_0 \geq j_2$. Ekkor $j \in J$ és $j \geq j_0$ esetén $j \geq j_1$, tehát $t_{\sigma(j)} \in V$, és a σ monoton növése miatt $\sigma(j) \geq \sigma(j_2) \geq i$, következésképpen az I halmazon adott előrendezés definíciója alapján $t_{\sigma(j)} \in F_{\sigma(j)} \subseteq F_i$, így $t_{\sigma(j)} \in V \cap F_i$. ■

Lemma. Ha T halmaz és $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz, akkor létezik olyan T feletti $\mathfrak{F}$ szűrő, amely tartalmazza $\mathfrak{C}$-t és egyetlen olyan T feletti szűrőnek sem valódi része, amely tartalmazza $\mathfrak{C}$-t (vagyis $\mathfrak{F}$ tartalmazás tekintében *maximális* $\mathfrak{C}$-t tartalmazó T feletti szűrő).

Bizonyítás. Jelölje $\overline{\mathfrak{C}}$ azon $E \subseteq T$ halmazok halmazát, amelyekhez van olyan $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ nem üres véges halmaz, hogy $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}'} C \subseteq E$. Könnyen látható, hogy $\overline{\mathfrak{C}}$ szűrő T felett és $\mathfrak{C} \subseteq \overline{\mathfrak{C}}$, sőt az is nyilvánvaló, hogy $\overline{\mathfrak{C}}$ a tartalmazás tekintetében legkisebb T feletti szűrő, amely $\mathfrak{C}$-t tartalmazza. Tehát *létezik* T feletti szűrő, amely $\mathfrak{C}$-t tartalmazza, vagyis $\mathfrak{S} := \{\mathfrak{F} | \mathfrak{F}$ szűrő T felett és $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}\}$ nem üres halmaz. A $\mathfrak{S}$ halmazt a $\subseteq$ relációval rendezzük, és megmutatjuk, hogy ez a rendezett halmaz *induktívan* rendezett; ekkor a Zorn-lemma alapján létezik $\mathfrak{S}$-nek maximális eleme, ami olyan szűrő lesz T felett, amelynek a létezését állítottuk.

Legyen $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ olyan $\mathfrak{S}$-ben haladó nem üres rendszer, amelyre minden $i, j \in I$ esetén $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_j$ vagy $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}_i$. Értelmezzük az $\mathfrak{F} := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ halmazt; megmutatjuk, hogy $\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}$. Ha $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, akkor van olyan $i_1 \in I$ és $i_2 \in I$, hogy $F_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$ és $F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$; ekkor $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{i_2}$ esetén $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, így $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}$, illetve $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1}$ esetén $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, így $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}$. Továbbá, ha $E \subseteq T$ olyan halmaz, amelyhez van olyan $F \in \mathfrak{F}$, hogy $F \subseteq E$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $F \in \mathfrak{F}_i$, így $E \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, hiszen $\mathfrak{F}_i$ szűrő T felett. Minden $I \ni i$-re $\emptyset \notin \mathfrak{F}_i$, ezért $\emptyset \notin \mathfrak{F}$. Végül, $I \neq \emptyset$ miatt $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$. Világos, hogy az $\mathfrak{F}$ szűrő a tartalmazás tekintetében felső korlátja az $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ rendszernek az $\mathfrak{S}$ rendezett halmazban. ■

Tétel. (*Tyihonov-tétel.*) Kompakt terek topologikus szorzata kompakt tér.

Bizonyítás. Legyen $(T_i)_{i\in I}$ kompakt terek tetszőleges rendszere, $T := \prod_{i\in I} T_i$, és $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz. Bebizonyítjuk, hogy $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}} \overline{C} \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy a T topologikus szorzattér kompakt.

Az előző lemma alapján vehetünk olyan T feletti $\mathfrak{F}$ szűrőt, hogy $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}$ egyetlen $\mathfrak{C}$-t tartalmazó T feletti szűrőnek sem valódi része. Ha $E \subseteq T$ olyan halmaz, hogy minden $\mathfrak{F} \ni F$-re $E \cap F \neq \emptyset$, akkor $E \in \mathfrak{F}$, hiszen ekkor $\{E\} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz, tehát létezik olyan T feletti $\mathfrak{F}'$ szűrő, hogy $\{E\} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$; ekkor az $\mathfrak{F}$ maximalitása folytán $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$, tehát $E \in \mathfrak{F}$, mert $E \in \mathfrak{F}'$ nyilvánvalóan igaz.

Megmutatjuk, hogy

$$\prod_{i\in I}\left(\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F\rangle}\right) \subseteq \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{C\in\mathfrak{C}} \overline{C}.$$

Legyen $t \in \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{F\in\mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F\rangle}\right)$ rögzített pont, $F \in \mathfrak{F}$ és V a t-nek környezete a T topologikus szorzattérben; azt kell igazolni, hogy $V \cap F \neq \emptyset$. A szorzattopológia definíciója szerint van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és olyan $(V_i)_{i\in J}$ rendszer, hogy minden $J \ni i$-re V_i környezete $pr_i(t)$-nek T_i-ben és $\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{pr_i}\langle V_i\rangle \subseteq V$. Ha $i \in J$, akkor minden $E \in \mathfrak{F}$ esetén $pr_i(t) \in \overline{pr_i\langle E\rangle}$, ezért $V_i \cap pr_i\langle E\rangle \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $i \in J$ esetén minden $\mathfrak{F} \ni E$-re $E \cap \overset{-1}{pr_i}\langle V_i\rangle \neq \emptyset$, így $\overset{-1}{pr_i}\langle V_i\rangle \in \mathfrak{F}$, ezért a J végessége folytán $\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{pr_i}\langle V_i\rangle \in \mathfrak{F}$. Ebből következik, hogy $V \in \mathfrak{F}$, mert $\mathfrak{F}$ szűrő T felett, így $V \cap F \neq \emptyset$.

Végül igazoljuk, hogy $\prod\limits_{i\in I}\left(\bigcap\limits_{F\in\mathfrak{F}}\overline{pr_i\langle F\rangle}\right)\neq\emptyset$. Minden $I\ni i$-re a $\{pr_i\langle F\rangle | F\in\mathfrak{F}\}$ halmaz centrált részhalmaza $\mathscr{P}(T_i)$-nek, mert minden $\mathfrak{F}$-ben haladó $(F_j)_{j\in J}$ nem üres véges rendszerre $F := \bigcap\limits_{j\in J} F_j \in \mathfrak{F}$, tehát $F\neq\emptyset$, így $\emptyset\neq pr_i\langle F\rangle\subseteq\bigcap\limits_{j\in J} pr_i\langle F_j\rangle$. Tehát $i\in I$ esetén a T_i kompaktsága miatt $\bigcap\limits_{F\in\mathfrak{F}}\overline{pr_i\langle F\rangle}\neq\emptyset$. Ebből a kiválasztási axióma alkalmazásával kapjuk, hogy $\prod\limits_{i\in I}\left(\bigcap\limits_{F\in\mathfrak{F}}\overline{pr_i\langle F\rangle}\right)\neq\emptyset$. ■

Következmény. Ha T kompakt tér és I halmaz, akkor a T^I topologikus kocka kompakt tér. Ha T metrizálható kompakt tér és I megszámlálható halmaz, akkor a T^I topologikus kocka szintén metrizálható kompakt tér. A $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka metrizálható kompakt tér.

Bizonyítás. Az első állítás a Tyihonov-tételből és a topologikus kockák értelmezéséből következik. Metrizálható terek megszámlálható rendszerének a topologikus szorzata metrizálható, ezért a második állítás következik az elsőből. A harmadik állítás következik a másodikból és abból, hogy a $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ intervallum (az euklidészi topológiával) metrizálható kompakt tér. ■

Állítás. Ha T, T' topologikus terek, $f: T\to T'$ folytonos függvény és $K\subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $f\langle K\rangle\subseteq T'$ kompakt halmaz.

Bizonyítás. Az állítás pontosan úgy bizonyítható, mint az V. fejezet 5. pontjában metrikus terekre megfogalmazott analóg állítás. ■

Következmény. Ha T kompakt tér, T' Hausdorff-tér és $f: T\to T'$ folytonos bijekció, akkor T Hausdorff-tér, T' kompakt tér és f homeomorfizmus T és T' között.

Bizonyítás. Ha $F\subseteq T$ zárt halmaz, akkor F kompakt, tehát $f\langle F\rangle\subseteq T'$ szintén kompakt, így zárt is, mert T' Hausdorff-tér. Ez azt jelenti, hogy minden $F\subseteq T$ zárt halmazra az $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}\langle F\rangle = f\langle F\rangle$ halmaz zárt T'-ben. Tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény folytonos. ■

Következmény. Ha T topologikus tér, M metrikus tér, $f: T\to M$ folytonos függvény és $K\subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $f\langle K\rangle\subseteq M$ korlátos halmaz.

Bizonyítás. Az $f\langle K\rangle$ halmaz kompakt M-ben, és metrikus térben kompakt halmaz korlátos (V. fejezet, 5. pont). ■

Tétel. (*Weierstrass-féle maximum-minimum elv.*) Ha T topologikus tér, $f: T\to\mathbb{R}$ folytonos függvény és $K\subseteq T$ nem üres kompakt halmaz, akkor $inf(f\langle K\rangle)\in f\langle K\rangle$ és $sup(f\langle K\rangle)\in f\langle K\rangle$, vagyis f a K halmazban minimális és maximális értéket is felvesz.

Bizonyítás. Az előző állításból következik, hogy $f\langle K\rangle$ kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia szerint, és $(\mathbb{R},\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ Hausdorff-tér, tehát $f\langle K\rangle$ zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben, így

$\overline{f\langle K\rangle} = f\langle K\rangle$. Ugyanakkor az infimum és szuprémum definíciója, valamint az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia értelmezése alapján $inf(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle}$ és $sup(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle}$. ■

Most általánosítani fogjuk a Weierstrass-féle maximum-minimum elvet. Ehhez bevezetjük az alulról- és felülről félig folytonos függvények fogalmát.

Definíció. Ha T topologikus tér és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, akkor azt mondjuk, hogy f alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $[f > c]$ (illetve $[f < c]$) halmaz nyílt T-ben.

Megjegyzések. 1) A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha T topologikus tér, akkor az $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha a $-f$ függvény felülről (illetve alulról) félig folytonos.

2) Könnyen látható, hogy ha T topologikus tér, akkor az $f : T \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha alulról is és felülről is félig folytonos. Valóban, a feltétel szükségessége a folytonosság topologikus jellemzéséből következik, míg az elégségesség azért igaz, mert ha f alulról is és felülről is félig folytonos, akkor minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{-1}{f}\langle]a,b[\rangle = [f > a] \cap [f < b]$ nyílt halmaz T-ben, ezért minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}\langle \Omega\rangle$ nyílt halmaz T-ben, hiszen $\mathbb{R}$-ben minden nyílt halmaz előáll (megszámlálható sok) korlátos nyílt intervallum uniójaként.

3) Ha T topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor a $\chi_E : T \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény pontosan akkor alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha E nyílt (illetve zárt) halmaz T-ben. Speciálisan, a $\chi_E : T \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény pontosan akkor folytonos, ha E nyílt-zárt halmaz T-ben.

4) Ha T topologikus tér és $(f_i)_{i \in I}$ olyan nem üres függvényrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról (illetve felülről) félig folytonos függvény, akkor a $\sup\limits_{i \in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ felső burkoló (illetve az $\inf\limits_{i \in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alsó burkoló) szintén alulról (illetve felülről) félig folyonos. Ez nyilvánvalóan következik abból, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\left[\sup\limits_{i \in I} f_i > c\right] = \bigcup\limits_{i \in I} [f_i > c]$ és $\left[\inf\limits_{i \in I} f_i < c\right] = \bigcup\limits_{i \in I} [f_i < c]$, valamint nyílt halmazok uniója nyílt.

5) Ha T topologikus tér és $(f_i)_{i \in I}$ olyan nem üres *véges* függvényrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról (illetve felülről) félig folytonos függvény, akkor az $\inf\limits_{i \in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alsó burkoló (illetve az $\sup\limits_{i \in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ felső burkoló) szintén alulról (illetve felülről) félig folyonos. Ez nyilvánvalóan következik abból, hogy I végessége miatt minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\left[\inf\limits_{i \in I} f_i > c\right] = \bigcap\limits_{i \in I} [f_i > c]$ és $\left[\sup\limits_{i \in I} f_i < c\right] = \bigcap\limits_{i \in I} [f_i < c]$, valamint nyílt halmazok nem üres véges rendszerének metszete nyílt.

Állítás. Legyen T topologikus tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan alulról (illetve felülről) félig folytonos függvény, amelyre $-\infty \notin Im(f)$ (illetve $+\infty \notin Im(f)$). Ekkor f alulról (illetve felülről) korlátos a K halmazon, és ha $K \neq \emptyset$ és zárt, akkor $\inf(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$ és $\sup(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$, vagyis f a K halmazban minimális és maximális értéket is felvesz.

Bizonyítás. Legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan alulról félig folytonos függvény, amelyre $-\infty \notin Im(f)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\Omega_n := [f > -n]$ halmaz nyílt, mert f alulról félig folytonos, és $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, mert $-\infty \notin Im(f)$. Ugyanakkor világos, hogy az $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton növő. A K halmaz kompaktsága miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq \Omega_n$, ezért $f\langle K\rangle$ alulról korlátos halmazt $\mathbb{R}$-ben. Tegyük fel, hogy K zárt is és nem üres. Legyen $c := \inf(f\langle K\rangle)$ és vegyünk tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó zérussorozatot. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n := [f \leq c + \varepsilon_n] \cap K$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[f \leq c + \varepsilon_n]$ zárt halmaz, mert f alulról félig folytonos, így K_n kompakt halmaz T-ben, és $K_{n+1} \subseteq K_n$, valamint $K_n \neq \emptyset$. Továbbá, minden $\mathbb{N} \ni n$-re K_n zárt, mert a K zárt. A Cantor-féle közösrész-tételből következik, hogy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Ha $t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $c \leq f(t) \leq c+\varepsilon_n$, ezért $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt $c = f(t)$, így $\inf(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$. Ebből már következik a felülről félig folytonos függvényekre vonatkozó állítás is (áttérve f-ről a $-f$ függvényre). ■

Állítás. Legyen T metrizálható topologikus tér és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, és $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Bizonyítás. (I) Először tegyük fel, hogy $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz, és $f = \chi_\Omega$. Metrikus térben minden nyílt halmaz F_σ-halmaz, tehát létezik a T zárt részhalmazainak olyan monoton növő $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ (V. fejezet, 7. pont). Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az F_n zárt halmazhoz, és az ezt tartalmazó Ω nyílt halmazhoz van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in T$ esetén $0 \leq g(t) \leq 1$, és $supp(g) \subseteq \Omega$, valamint $F_n \subseteq [g = 1]$ (V. fejezet, 7. pont). Tehát kiválaszthatunk olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $t \in T$ esetén $0 \leq g_n(t) \leq 1$, és $supp(g_n) \subseteq \Omega$, valamint $F_n \subseteq [g_n = 1]$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n := \sup_{0\leq k\leq n} g_k$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq 1$, valamint $\chi_\Omega = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(II) Most tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{R}$ olyan alulról félig folytonos függvény, hogy minden $t \in T$ esetén $0 \leq f(t) \leq 1$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $1 \leq k \leq n$ természetes számra legyen $\Omega_{n,k} := \left[f > \frac{k}{n+1}\right]$ és

$$g_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Omega_{n,k}}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $T \ni t$-re $0 \leq f(t) - g_n(t) \leq \frac{1}{n+1}$. Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ rögzített. Ha $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{n+1}$, akkor minden $1 \leq k \leq n$

természetes számra $t \notin \Omega_{n,k}$, így $g_n(t) = 0$, vagyis $0 \leq f(t) - g_n(t) \leq \dfrac{1}{n+1}$. Ha $\dfrac{1}{n+1} < f(t) \leq 1$, akkor egyértelműen létezik olyan $1 \leq j \leq n$ természetes szám, hogy $\dfrac{j}{n+1} < f(t) \leq \dfrac{j+1}{n+1}$; ekkor a definíció szerint $t \in \Omega_{n,k}$, ha $1 \leq k \leq j$ és $t \notin \Omega_{n,k}$, ha $j+1 \leq k \leq n$, így a definíció alapján

$$g_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \chi_{\Omega_{n,k}}(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{j} \chi_{\Omega_{n,k}}(t) = \frac{j}{n+1},$$

tehát

$$0 < f(t) - \frac{j}{n+1} = f(t) - g_n(t) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ebből következik, hogy $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Az f alulról félig folytonossága miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $1 \leq k \leq n$ természetes számra $\Omega_{n,k}$ nyílt halmaz T-ben, így az (I) alapján vehetünk olyan $(h_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $h_{n,m} : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq h_{n,m}(t) \leq 1$, és $g_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} h_{n,m}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_k := \sup_{m\leq k;\ n\leq k} h_{n,m}$; ekkor $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq f_k(t) \leq f_{k+1}(t) \leq 1$, és $f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$.

(III) Most tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{R}$ *korlátos* alulról félig folytonos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és minden $t \in T$ esetén $a \leq f(t) \leq b$. Legyen $g := \dfrac{f-a}{b-a}$; ekkor $g : T \to \mathbb{R}$ olyan alulról félig folytonos függvény, hogy minden $t \in T$ esetén $0 \leq g(t) \leq 1$, így a (II) alapján van olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq g_n(t) \leq g_{n+1}(t)$, és $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n := a + (b-a)g_n$; ekkor $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $a \leq f_n(t) \leq f_{n+1} \leq b$, és $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(IV) Végül, legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ *tetszőleges* alulról félig folytonos függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n := \inf(n, \sup(f, -n)) : T \to \mathbb{R}$ korlátos alulról félig folytonos függvény, ezért a (III) szerint van olyan $(g_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $g_{n,m} : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $-n \leq g_{n,m}(t) \leq g_{n,m+1}(t) \leq n$, valamint $g_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_{n,m}$. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ esetén $g_n(t) \leq g_{n+1}(t)$ és $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Ebből következik, hogy ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f_k := \sup_{n\leq k;\ m\leq k} g_{n,m}$, akkor $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $f_k(t) \leq f_{k+1}(t)$, és $f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. ■

Tétel. (*Kompakt terek metrizálhatósága.*) Ha T kompakt Hausdorff-tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) T megszámlálható bázisú.

(ii) T homeomorf a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka valamelyik zárt topologikus alterével.

(iii) T metrizálható.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Kompakt Hausdorff-tér reguláris T_1-tér, tehát ha (i) teljesül, akkor T megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér. Ezért Uriszon beágyazási tétele alapján T homeomorf a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka valamelyik K topologikus alterével. Ekkor K szükségképpen kompakt, tehát zárt is a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ Hausdorff-térben.

(ii)$\Rightarrow$(iii) A $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka metrizálható, és metrizálható topologikus tér bármely topologikus altere metrizálható, ezért (ii)-ből nyilvánvalóan következik (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Legyen d olyan metrika T felett, amely a T topológiát generálja, és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Minden $\mathbb{N}\ni n$-re a $(B_{\varepsilon_n}(t;d))_{t\in T}$ gömb-rendszer nyílt befedése T-nek, ezért T kompaktsága folytán létezik olyan $D\subseteq T$ véges halmaz, hogy $T=\bigcup\limits_{t\in D}B_{\varepsilon_n}(t;d)$. Kiválaszthatunk tehát a T véges részhalmazainak olyan $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $T=\bigcup\limits_{t\in D_n}B_{\varepsilon_n}(t;d)$. Legyen $D:=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}D_n$ és $\mathfrak{B}:=\{B_{\varepsilon_n}(t;d)|(n\in\mathbb{N})\wedge(t\in D_n)\}$. Világos, hogy $\mathfrak{B}$ olyan megszámlálható halmaz, amelynek minden eleme nyílt részhalmaz T-ben.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{B}$ a T-nek topologikus bázisa, tehát T megszámlálható bázisú. Ehhez legyen Ω nyílt halmaz T-ben és $t\in\Omega$. Olyan $n\in\mathbb{N}$ számot és $t'\in D_n$ pontot keresünk, hogy $t\in B_{\varepsilon_n}(t';d)\subseteq\Omega$. Ehhez először veszünk olyan $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ számot, amelyre $B_\varepsilon(t;d)\subseteq\Omega$, majd választunk olyan $n\in\mathbb{N}$ számot, hogy $\varepsilon_n\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $t\in T=\bigcup\limits_{t'\in D_n}B_{\varepsilon_n}(t';d)$ miatt van olyan $t'\in D_n$, hogy $t\in B_{\varepsilon_n}(t';d)$. Könnyen látható, hogy ekkor $B_{\varepsilon_n}(t';d)\subseteq\Omega$, mert ha $t''\in B_{\varepsilon_n}(t';d)$, akkor $d(t'',t)\leq d(t'',t')+d(t',t)<\varepsilon_n+\varepsilon_n<\varepsilon$, vagyis $t''\in B_\varepsilon(t;d)\subseteq\Omega$. ■

Azonban létezik olyan kompakt tér, amely szeparábilis M_1-tér, de nem metrizálható (mert nem megszámlálható bázisú). Legyen például

$$\mathscr{T}:=\{\ \Omega\in\mathscr{P}(\mathbb{R})\mid(\forall\ t\in\Omega)(\exists\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+):]-t-\varepsilon,-t[\cup[t,t+\varepsilon[\subseteq\Omega\ \}.$$

Ekkor $\mathscr{T}$ topológia $\mathbb{R}$ felett és a $([-1,1],\mathscr{T}|[-1,1])$ topologikus altér kompakt szeparábilis M_1-tér, de nem M_2-tér.

Megjegyezzük, hogy az előző metrizációs tétel szerint a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka olyan metrizálható kompakt tér, amely abban az értelemben *univerzális* a metrizálható kompakt terek számára, hogy a zárt topologikus alterei (homeomorfia erejéig) az összes metrizálható kompakt teret megadják.

Definíció. Egy topologikus terek *lokálisan kompaktnak* nevezünk, ha Hausdorff-tér és minden pontjának létezik kompakt környezete. A T topologikus tér E részhalmazát lokálisan kompaktnak mondjuk, ha az E topologikus altér lokálisan kompakt tér.

Állítás. Minden lokálisan kompakt tér reguláris. Lokálisan kompakt térben minden pontnak létezik kompakt halmazokból álló környezetbázisa.

Bizonyítás. Legyen T lokálisan kompakt tér, $F\subseteq T$ zárt halmaz és $t\in T\backslash F$. Legyen V a t-nek kompakt környezete. Ha $V\cap F=\emptyset$, akkor $\Omega:=\overset{\circ}{V}$ és $\Omega':=T\setminus V$ olyan diszjunkt nyílt halmazok T-ben, hogy $t \in \Omega$ és $F \subseteq \Omega'$. (Itt kihasználtuk, hogy a V kompakt halmaz zárt, mert T Hausdorff-tér.) Tegyük fel, hogy $V \cap F \neq \emptyset$; ekkor $V \cap F$ nem üres kompakt halmaz T-ben és $t \in T \setminus (V \cap F)$. A T topologikus tér Hausdorff-tér, ezért kiválaszthatunk olyan $(\Omega_s)_{s \in V \cap F}$ és $(V_s)_{s \in V \cap F}$ rendszereket, hogy minden $V \cap F \ni s$-re V_s nyílt környezete s-nek, Ω_s nyílt környezete t-nek és $\Omega_s \cap V_s = \emptyset$. Ekkor $V \cap F \subseteq \bigcup\limits_{s \in V \cap F} V_s$, tehát a $V \cap F$ kompaktsága folytán van olyan $S \subseteq V \cap F$ véges halmaz, amelyre $V \cap F \subseteq \bigcup\limits_{s \in S} V_s$. A $V \cap F \neq \emptyset$ feltétel alapján $S \neq \emptyset$. Értelmezzük az $\Omega := \overset{\circ}{V} \cap \left(\bigcap\limits_{s \in S} \Omega_s \right)$ és $\Omega' := (T \setminus V) \cup \left(\bigcup\limits_{s \in S} V_s \right)$ halmazokat. Az Ω halmaz véges sok nyílt halmaz metszete, tehát nyílt, és világos, hogy $t \in \Omega$. A V halmaz kompakt, így zárt a T Hausdorff-térben, így Ω' nyílt halmazok (véges) rendszerének az uniója, tehát nyílt. Nyilvánvaló, hogy $F \subseteq \Omega'$, mert ha $t' \in F$ és $t' \in V$, akkor $t' \in V \cap F \subseteq \bigcup\limits_{s \in S} V_s \subseteq \Omega'$, míg $t' \in F$ és $t' \notin V$ esetén $t' \in T \setminus V \subseteq \Omega'$. Végül, $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$ is teljesül, mert ha $t' \in \Omega$, akkor $t' \in \overset{\circ}{V} \subseteq V$, tehát $t' \notin T \setminus V$, valamint $t' \notin \bigcup\limits_{s \in S} V_s$ is igaz, mert $t' \in \bigcap\limits_{s \in S} \Omega_s$, és a $\bigcap\limits_{s \in S} \Omega_s$ és $\bigcup\limits_{s \in S} V_s$ halmazok diszjunktak, ezért $t' \notin \Omega'$. Ezzel megmutattuk, hogy T reguláris tér.

Legyen $t \in T$ és V a t tetszőleges környezete. Legyen V' a t-nek kompakt környezete. Láttuk, hogy T reguláris, ezért létezik t-nek olyan V'' környezete, amely zárt és $V'' \subseteq V$. Ekkor $V' \cap V''$ olyan kompakt környezete t-nek, amely részhalmaza V-nek, tehát a t kompakt környezeteinek halmaza a t-nek környezetbázisa T-ben. ■

Következmény. Ha T lokálisan kompakt tér és $\mathfrak{B}$ topologikus bázisa T-nek, akkor a $\mathfrak{B}_c := \{U \in \mathfrak{B} | U \text{ relatív kompakt}\}$ halmaz is topologikus bázisa T-nek.

Bizonyítás. Legyen Ω nyílt halmaz T-ben és $t \in \Omega$. A $\mathfrak{B}$ halmaz topologikus bázis T-ben, ezért van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in V \subseteq \Omega$. A V halmaz nyílt, tehát környezete t-nek, így a T lokális kompaktsága és az előző állítás szerint van olyan W kompakt környezete t-nek, hogy $W \subseteq V$. Ekkor $\overset{\circ}{W}$ a t-nek nyílt környezete, ezért van olyan $U \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in U \subseteq \overset{\circ}{W}$. A W halmaz zárt, mert T Hausdorff-tér, következésképpen $\overline{U} \subseteq W$, tehát $\overline{U}$ kompakt halmaz. Ez azt jelenti, hogy $U \in \mathfrak{B}$ relatív kompakt halmaz és $t \in U \subseteq \Omega$. ■

Következmény. Ha T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$.

Bizonyítás. Ha $t \in K$, akkor Ω nyílt környezete T-nek, ezért létezik a t-nek olyan V kompakt környezete, hogy $V \subseteq \Omega$; ekkor $\overset{\circ}{V}$ olyan relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $t \in \overset{\circ}{V}$ és $\overline{\overset{\circ}{V}} \subseteq \Omega$. Ezért kiválaszthatunk olyan $(U_t)_{t \in K}$ rendszert, amelyre minden $t \in K$ esetén U_t relatív kompakt nyílt környezete t-nek és $\overline{U_t} \subseteq \Omega$. Ekkor $(U_t)_{t \in K}$ nyílt befedése K-nak, így a K kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{t \in H} U_t$. Az $U := \bigcup\limits_{t \in H} U_t$ halmaz nyílt, $K \subseteq U$, és $\overline{U} = \bigcup\limits_{t \in H} \overline{U_t}$, tehát $\overline{U}$ kompakt (mert véges sok kompakt halmaz uniója kompakt), így $\overline{U} \subseteq \Omega$ is teljesül. ■

Állítás. Ha T Hausdorff-tér és $E \subseteq T$ lokálisan kompakt halmaz, akkor van olyan $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $E = \overline{E} \cap \Omega$. Ha T lokálisan kompakt tér, akkor egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor lokálisan kompakt, ha létezik olyan $\Omega \subseteq T$ nyílt és $F \subseteq T$ zárt halmaz, hogy $E = \Omega \cap F$.

Bizonyítás. Legyen E Hausdorff-tér és $E \subseteq T$ lokálisan kompakt halmaz. Kiválasztható olyan $(V_t)_{t\in E}$ rendszer, hogy minden $E \ni t$-re V_t a t-nek kompakt környezete az E topologikus altérben. Az altértopológia és a környezetek definíciója szerint kiválasztható olyan $(\Omega_t)_{t\in E}$ rendszer, hogy minden $E \ni t$-re Ω_t nyílt halmaz T-ben és $t \in E \cap \Omega_t \subseteq V_t$. Legyen $\Omega := \bigcup\limits_{t\in E} \Omega_t$; ez olyan nyílt halmaz T-ben, amelyre megmutatjuk, hogy $E = \overline{E} \cap \Omega$ teljesül. Valóban, legyen $t \in \overline{E} \cap \Omega$ tetszőleges. Létezik olyan $s \in E$, hogy $t \in \Omega_s$. Ha a V halmaz környezete t-nek T-ben, akkor $V \cap \Omega_s$ is környezete t-nek T-ben, tehát $t \in \overline{E}$ miatt $E \cap (V \cap \Omega_s) \neq \emptyset$, vagyis $V \cap (E \cap \Omega_s) \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy t eleme az $E \cap \Omega_s$ halmaz T-beli lezártjának, tehát $E \cap \Omega_s \subseteq V_s$ miatt $t \in \overline{V_s}$. De V_s kompakt az E topologikus altérben, így T-ben is kompakt, tehát zárt T-ben, mert T Hausdorff-tér. Ezért $t \in V_s$ és $V_s \subseteq E$, vagyis $t \in E$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{E} \cap \Omega \subseteq E$. A fordított tartalmazás triviálisan igaz.

Tegyük fel, hogy T lokálisan kompakt tér, $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $F \subseteq T$ zárt halmaz. Megmutatjuk, hogy $F \cap \Omega$ lokálisan kompakt halmaz T-ben. Legyen ugyanis $t \in F \cap \Omega$ tetszőleges; ekkor Ω környezete t-nek T-ben, tehát létezik t-nek olyan V kompakt környezete T-ben, amelyre $V \subseteq \Omega$. Az F halmaz zártsága miatt az $F \cap V$ halmaz kompakt T-ben és $F \cap V = F \cap (V \cap \Omega) = (F \cap \Omega) \cap V$, vagyis $F \cap V$ olyan környezete t-nek az $F \cap \Omega$ topologikus altérben, amely T-ben kompakt. De $F \cap V \subseteq F \cap \Omega$, így $F \cap V$ kompakt az $F \cap \Omega$ topologikus altérben is. Ez azt jelenti, hogy az $F \cap \Omega$ topologikus altér lokálisan kompakt. ■

Következmény. Hausdorff-tér lokálisan kompakt sűrű részhalmaza nyílt.

Bizonyítás. Ha T Hausdorff-tér és $E \subseteq T$ lokálisan kompakt sűrű halmaz T-ben, akkor az előző állítás szerint van olyan $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $E = \overline{E} \cap \Omega = T \cap \Omega = \Omega$, tehát E nyílt halmaz T-ben. ■

Az előző állításból következik, hogy $\mathbb{Q}$ nem lokálisan kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

Tétel. (*Egypontú kompaktifikáció létezése és egyértelműsége.*) Legyen T lokálisan kompakt tér.

a) Létezik olyan T' kompakt Hausdorff-tér, hogy T topologikus altere T'-nek és $T' \setminus T$ egy elemű halmaz.

b) Ha T' és T'' olyan kompakt Hausdorff-terek, amelyeknek T topologikus altere, és amelyekre $T' \setminus T$ és $T'' \setminus T$ egy elemű halmazok, akkor létezik egyetlen olyan $f : T' \to T''$ homeomorfizmus, amelyre $f|_T = id_T$.

Bizonyítás. a) Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin T$ (ilyen létezik, különben T az összes halmazok halmaza volna), és $T' := T \cup \{\omega\}$. Jelölje $\mathscr{T}$ a T topológiáját és $\mathscr{T}_\omega := \{T' \setminus K | K$ kompakt halmaz T-ben$\}$. Megmutatjuk, hogy $\mathscr{T}' := \mathscr{T} \cup \mathscr{T}_\omega$ olyan topológia T' felett, hogy $(T', \mathscr{T}')$ kompakt Hausdorff-tér és $\mathscr{T}'|T = \mathscr{T}$.

Vilgos, hogy $T' = T' \setminus \emptyset \in \mathscr{T}_\omega \subseteq \mathscr{T}'$, tehát $\mathscr{T}'$-re (O_I) teljesül. Két $\mathscr{T}$-beli halmaz metszete eleme $\mathscr{T}$-nek, mert $\mathscr{T}$-re (O_{II}) teljesül. Két $\mathscr{T}_\omega$-beli halmaz metszete eleme $\mathscr{T}_\omega$-nak, mert a T bármely két kompakt részhalmazának az uniója kompakt T-ben. Ha $\Omega \in \mathscr{T}$ és $K \subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $\Omega \cap (T' \setminus K) = \Omega \cap (T \setminus K) \in \mathscr{T}$, mert Ω nyílt T-ben és K zárt T-ben, hiszen K kompakt és T Hausdorff-tér. Ezért $\mathscr{T}'$-re teljesül az (O_{II}) tulajdonság. A $\mathscr{T}$-re teljesül (O_{III}), továbbá a T kompakt részhalmazai tetszőleges nem üres rendszerének a metszete kompakt T-ben, így bármely $\mathscr{T}_\omega$-ban haladó nem üres rendszer uniója eleme $\mathscr{T}_\omega$-nak. Ha $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $K \subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $\Omega \cup (T' \setminus K) = \{\omega\} \cup (\Omega \cup (T \setminus K)) = \{\omega\} \cup (T \setminus (K \setminus \Omega)) \in \mathscr{T}_\omega$, mert $K \setminus \Omega$ kompakt halmaz T-ben. Ezért $\mathscr{T}'$-re (O_{III}) is teljesül, vagyis $\mathscr{T}'$ topológia T felett.

Ha $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor $\Omega = \Omega \cap T \in \mathscr{T}'|T$, hiszen $\Omega \in \mathscr{T}'$. Megfordítva, legyen $\Omega \in \mathscr{T}'|T$; ekkor van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $\Omega = \Omega' \cap T$. Ha $\Omega' \in \mathscr{T}$, akkor $\Omega = \Omega' \in \mathscr{T}$. Ha $\Omega' \in \mathscr{T}_\omega$, akkor van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $\Omega' = T' \setminus K$; ekkor $\Omega = (T' \setminus K) \cap T = T \setminus K \in \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}'|T$.

Megmutatjuk, hogy $(T', \mathscr{T}')$ kompakt Hausdorff-tér. Legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén az $\Omega'_i \subseteq T'$ halmaz $\mathscr{T}'$-nyílt és $T' = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega'_i$. Létezik olyan $i(\omega) \in I$, amelyre $\omega \in \Omega'_{i(\omega)}$. Természetesen ekkor $\Omega'_{i(\omega)} \in \mathscr{T}_\omega$, így van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $\Omega'_{i(\omega)} = T' \setminus K$. A K halmaz a $\mathscr{T}'$ topológia szerint is kompakt, mert $\mathscr{T}'|T = \mathscr{T}$ és K kompakt a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ezért van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega'_i$. Világos, hogy az $(\Omega'_i)_{i\in\{i(\omega)\}\cup J}$ halmaz véges részbefedés, ami azt jelenti, hogy $(T', \mathscr{T}')$ kompakt tér. Ha $t \in T$, akkor a T lokális kompaktsága folytán van olyan $V \in \mathscr{T}(t) \subseteq \mathscr{T}'(t)$ környezet, amely kompakt a $\mathscr{T}$ szerint; ekkor $\omega \in T' \setminus V \in \mathscr{T}_\omega$, így $T' \setminus V \in \mathscr{T}'(\omega)$ és $V \in \mathscr{T}'(t)$, és ezek diszjunkt halmazok. Ezért $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér.

b) Legyenek T' és T'' olyan kompakt Hausdorff-terek, hogy T topologikus altere T'-nek és T''-nek, valamint a $T' \setminus T$ és $T'' \setminus T$ halmazok egy eleműek. Legyen $\{\omega'\} = T' \setminus T$ és $\{\omega''\} = T'' \setminus T$, továbbá értelmezzük azt az $f : T' \to T''$ függvényt, amelyre $f(\omega') := \omega''$ és minden $t \in T$ esetén $f(t) := t$. Ez az egyetlen olyan $T' \to T''$ függvény, amely kiterjesztése az id_T identikus függvénynek. Minden $t \in T$ esetén a T halmaz nyílt környezete t-nek T'-ben, ezért a folytonosság lokalitása alapján f folytonos t-ben. Tehát azt kell igazolni, hogy f az ω' pontban folytonos. Legyen V környezete az $f(\omega') = \omega''$ pontnak T''-ben. Létezik olyan $\Omega \subseteq T''$ nyílt halmaz, hogy $\omega'' \in \Omega \subseteq V$. A $K := T'' \setminus \Omega$ halmaz zárt, tehát kompakt a T'' kompakt térben, és $\omega'' \in \Omega$ miatt $K \subseteq T$, így K kompakt T-ben is, hiszen T topologikus altere T''-nek. Ezért K kompakt T'-ben, mert T topologikus altere T'-nek is, következésképpen K zárt T'-ben, mert T' Hausdorff-tér. Tehát $T' \setminus K$ nyílt környezete ω'-nek T'-ben, és $\omega' \in T' \setminus K = T' \setminus \overset{-1}{f}\langle K\rangle = \overset{-1}{f}\langle T'' \setminus K\rangle = \overset{-1}{f}\langle \Omega\rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle V\rangle$, tehát $\overset{-1}{f}\langle V\rangle$ az ω' pontnak környezete T'-ben, így f folytonos az ω' pontban. Tehát az $f : T' \to T''$ függvény folytonos bijekció, következésképpen homeomorfizmus a T' és T'' kompakt terek között. ■

Definíció. A T lokálisan kompakt tér *egypontú* (vagy *Alekszandrov-féle*) *kompaktifikációjának* nevezünk minden olyan T' kompakt Hausdorff-teret, amelynek T topologikus altere, és amelyre $T' \setminus T$ egy elemű halmaz. Ha T' egypontú kompaktifikációja a T lokálisan kompakt térnek, akkor a $T' \setminus T$ halmaz elemét a *végtelen távoli pontnak* nevezzük T'-ben.

Tehát minden lokálisan kompakt térnek *létezik* egypontú kompaktifikációja és bármely két egypontú kompaktifikációja kitüntetett módon, topologikusan azonosítható egymással, tehát az egypontú kompaktifikáció (ilyen értelemben) *egyértelmű.* Az egypontú kompaktifikáció fogalmának alkalmazásaként könnyen bebizonyítható a következő állítás.

Állítás. Minden lokálisan kompakt tér teljesen reguláris.

Bizonyítás. Minden lokálisan kompakt tér homeomorf bármely egypontú kompaktifikációjának valamelyik topologikus alterével. Ugyanakkor kompakt Hausdorff-tér normális T_1-tér, tehát teljesen reguláris, továbbá teljesen reguláris tér minden topologikus altere teljesen reguláris. ■

Láttuk, hogy a kompakt Hausdorff-terek normálisak, ezért alkalmazható rájuk a 2. pontban igazolt Uriszon-tétel, a Tietze-tétel, és az egységosztás-tétel. Azonban a lokálisan kompakt terek nem szükségképpen normálisak, ezért az imént említett tételekben megfogalmazott tulajdonságok csak korlátozott formában teljesülhetnek rájuk. Az egypontú kompaktifikáció fogalmának alkalmazásával könnyen bebizonyíthatjuk ezeknek a tételeknek lokálisan kompakt terekre vonatkozó változatát.

Tétel. (*Uriszon-tétel lokálisan kompakt terekre.*) Ha T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, hogy $0 \le f \le 1$, $K \subseteq [f = 1]$ és $supp(f) \subseteq \Omega$.

Bizonyítás. Legyen $U \subseteq T$ olyan relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$. Legyen T' egypontú kompaktifikációja T-nek. A K halmaz kompakt T'-ben, tehát zárt is T'-ben, mert T' Hausdorff-tér. Az U halmaz nyílt T'-ben, mert T nyílt topologikus altere T'-nek. A T' kompakt Hausdorff-tér normális, ezért az Uriszon-tétel alapján van olyan $f' : T' \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $0 \le f' \le 1$, $K \subseteq [f' = 1]$ és $[f' \neq 0] \subseteq U$. Ekkor az $f := f'|_T : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, $0 \le f \le 1$, $k \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] = [f' \neq 0] \cap T \subseteq U$, így $supp(f) := \overline{[f \neq 0]} \subseteq \overline{U}$, tehát f kompakt tartójú és $\overline{U} \subseteq \Omega$ miatt $supp(f) \subseteq \Omega$. ■

Tétel. (*Tietze-tétel lokálisan kompakt terekre.*) Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$. Ha az $f : K \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a K altértopológiája szerint, akkor létezik olyan $g : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $g|_K = f$ és $supp(g) \subseteq \Omega$.

Bizonyítás. Legyen T' egypontú kompaktifikációja T-nek. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel alapján rögzítünk olyan $\varphi : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvényt, hogy $0 \le \varphi \le 1$, $K \subseteq [\varphi = 1]$ és $supp(\varphi) \subseteq \Omega$. A K halmaz kompakt T'-ben is, ezért zárt, mert T' Hausdorff-tér. Alkalmazva a Tietze-tételt a T' normális térre, a $K \subseteq T'$ zárt halmazra, és az $f : K \to \mathbb{R}$ altéren folytonos függvényre kapjuk olyan $f' : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény létezését, amelyre $f'|_K = f$. Ekkor az $g := \varphi.(f'|_T) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos kiterjesztése f-nek és $supp(g) \subseteq supp(\varphi) \subseteq \Omega$, tehát g kompakt tartójú is. ■

Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz, $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$, és $f : K \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a

K altértopológiája szerint, valamint $\alpha \leq f \leq \beta$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $\alpha \leq \beta$. Ekkor van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ folytonos kompakt tartójú függvény, amely f-nek kiterjesztése, $supp(g) \subseteq \Omega$ és $\alpha \leq g \leq \beta$ teljesül. Valóban, a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Tietze-tétel szerint van olyan $g' : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, amely kiterjesztése f-nek és $supp(g') \subseteq \Omega$. Ekkor a $g := \inf(\beta, \sup(\alpha, g'))$ függvény szintén folytonos kiterjesztése f-nek, $supp(g) \subseteq supp(g') \subseteq \Omega$, és $\alpha \leq g \leq \beta$ nyilvánvalóan teljesül.

Tétel. (*Egységosztás-tétel lokálisan kompakt terekre.*) Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan véges rendszere, hogy $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Ekkor létezik olyan $(f_i)_{i \in I}$ rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folyonos függvény, $0 \leq f_i \leq 1$, $supp(f_i) \subseteq \Omega_i$, és $K \subseteq \left[\sum_{i \in I} f_i = 1\right]$, valamint $\sum_{i \in I} f_i \leq 1$ a T halmazon mindenütt.

Bizonyítás. Először megmutatjuk olyan $(U_i)_{i \in I}$ halmazrendszer létezését, hogy minden $I \ni i$-re U_i relatív kompakt nyílt részhalmaza T-nek, $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, és $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Valóban, kiválaszthatunk olyan $(V_t)_{t \in K}$ halmazrendszert, hogy minden $K \ni t$-re V_t olyan relatív kompakt nyílt környezete t-nek, amelyhez létezik olyan $i \in I$, hogy $\overline{V_t} \subseteq \Omega_i$. A K kompaktsága miatt van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Minden $i \in I$ esetén legyen $H_i := \{t \in H | \overline{V_t} \subseteq \Omega_i\}$, és értelmezzük az $U_i := \bigcup_{t \in H_i} V_t$ halmazt. Nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén U_i olyan nyílt halmaz, hogy $\overline{U_i} = \bigcup_{t \in H_i} \overline{V_t} \subseteq \Omega_i$, és láthatóan U_i relatív kompakt, mert minden $H_i \ni t$-re $\overline{V_t}$ kompakt halmaz. Ha $t \in K$, akkor van olyan $s \in H$, hogy $t \in V_s$, és létezik olyan $i \in I$, hogy $\overline{V_s} \subseteq \Omega_i$; ekkor $s \in H_i$ és $t \in V_s \subseteq U_i$. Ez azt jelenti, hogy $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, tehát $(U_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, amelynek a létezését állítottuk.

Minden $I \ni i$-re alkalmazzuk a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel az $\overline{U_i}$ kompakt halmazra és Ω_i nyílt halmazra; tehát kiválasztunk olyan $g_i : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, hogy $0 \leq g_i \leq 1$, $\overline{U_i} \subseteq [g_i = 1]$ és $supp(g_i) \subseteq \Omega_i$. Újra alkalmazzuk az Uriszon-tételt a K kompakt halmazra és az $\bigcup_{i \in I} U_i$ nyílt halmazra; tehát veszünk olyan $g : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvényt, hogy $0 \leq g \leq 1$, $K \subseteq [g = 1]$ és $supp(g) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Ezután minden $I \ni i$-re értelmezzük az

$$f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(t) g_i(t)}{\sum_{j \in I} g_j(t)} & ; \text{ha } t \in \bigcup_{j \in I} U_j, \\[2ex] 0 & ; \text{ha } t \in T \setminus \bigcup_{j \in I} U_j \end{cases}$$

függvényt, amelyre $0 \leq f_i \leq 1$ és $supp(f_i) \subseteq supp(g_i) \subseteq \Omega_i$ nyilvánvalóan teljesül, továbbá

$$K = K \cap [g = 1] \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap [g = 1] \subseteq \left[\sum_{i \in I} f_i = 1\right],$$

és természetesen $\sum_{i\in I} f_i \leq g \leq 1$. Ezért elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén f_i *folytonos* függvény. Legyen $i \in I$ rögzített. A folytonosság lokalitása alapján nyilvánvaló, hogy f_i folytonos az $\bigcup_{j\in I} U_j$ nyílt halmaz minden pontjában. Továbbá, $f_i = 0$ a $T \setminus supp(g_i)$ halmazon, ami a $T \setminus \bigcup_{j\in I} U_j$ halmaz minden pontjának nyílt környezete, ezért ismét a folytonosság loakalitása miatt f_i folytonos a $T \setminus \bigcup_{j\in I} U_j$ halmaz minden pontjában. Tehát $T = (T \setminus supp(g)) \cup \left(\bigcup_{j\in I} U_j\right)$ miatt f_i folytonos függvény. ■

Állítás. Legyen T lokálisan kompakt tér és jelölje $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ a $T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát.

a) Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ alulról félig folytonos függvény, akkor

$$f = \sup_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ 0\leq\varphi\leq f} \varphi.$$

b) Ha $f : T \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú felülről félig folytonos függvény, akkor

$$f = \inf_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ f\leq\varphi} \varphi.$$

Bizonyítás. a) Legyenek $t \in T$ és $c \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $c < f(t)$. Elegendő olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényt találni, amelyre $0 \leq \varphi \leq f$ és $c \leq \varphi(t)$. Az f alulról félig folytonossága miatt a $[c < f]$ halmaz nyílt környezete t-nek. A lokálisan terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazzuk a $\{t\}$ kompakt halmazra és $[c < f]$ nyílt halmazra. Létezik tehát olyan $\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, hogy $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(t) = 1$ és $supp(\psi) \subseteq [c < f]$. Ekkor a $\varphi := c\psi$ függvény kompakt tartójú, folytonos, és $\varphi(t) = c$. Ha $s \in [c < f]$, akkor nyilvánvaló, hogy $0 \leq \varphi(s) := c\psi(s) \leq c < f(s)$, ugyanakkor $s \in T \setminus [c < f]$ esetén $\varphi(s) = 0 \leq f(s)$, tehát $0 \leq \varphi \leq f$.

b) Először megjegyezzük, hogy f *felülről korlátos*, mert az f felülről félig folytonossága miatt az $([f < n])_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő halmazsorozat mindegyik tagja nyílt halmaz, és $+\infty \notin Im(f)$ miatt $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f < n]$, így a $supp(f)$ kompakt halmazhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $Im(f) \subseteq [f < n]$, tehát minden $T \ni t$-re $f(t) < n$. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazva a $supp(f)$ kompakt halmazra és T nyílt halmazra kapjuk olyan $\psi_0 \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ létezését, amelyre $0 \leq \psi \leq 1$ és $supp(f) \subseteq [\psi_0 = 1]$. Ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $f \leq C$, akkor a $\psi := C\psi_0 \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényre $f \leq \psi$ teljesül.

Rögzítsünk olyan $\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $f \leq \psi$. Ekkor $\psi - f : T \to \mathbb{R}_+$ alulról félig folytonos függvény, tehát az a) alapján írható, hogy

$$f = \psi - (\psi - f) = \psi - \sup_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ 0\leq\varphi\leq\psi-f} \varphi = \inf_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ 0\leq\varphi\leq\psi-f} (\psi - \varphi) =$$

$$= \inf_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ 0\leq\varphi;\ f\leq\psi-\varphi} (\psi - \varphi) = \inf_{\varphi'\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ f\leq\varphi'\leq\psi} \varphi',$$

ahol kihasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy

$$\{\psi-\varphi|(\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R}))\wedge(0\le\varphi)\wedge(f\le\psi-\varphi)\}=\{\varphi'|(\varphi'\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R}))\wedge(f\le\varphi'\le\psi)\}$$

teljesül. Ugyanakkor

$$\inf_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ f\le\varphi}\varphi\le\inf_{\varphi'\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ f\le\varphi'\le\psi}\varphi'$$

nyilvánvalóan igaz, ezért

$$\inf_{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R});\ f\le\varphi}\varphi\le f$$

is teljesül. A fordított egyenlőtlenség triviális, ezért itt egyenlőség áll. ■

Állítás. Legyen T lokálisan kompakt tér, T' Hausdorff-tér és $\pi : T \to T'$ folytonos és nyílt szürjekció. Ekkor minden $K' \subseteq T'$ kompakt halmazhoz van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, amelyre $\pi\langle K\rangle = K'$.

Bizonyítás. Legyen $K' \subseteq T'$ kompakt halmaz. A T lokális kompaktsága miatt van olyan $(V_t)_{t\in T}$ rendszer, hogy minden $T \ni t$-re V_t kompakt környezete a t pontnak. A π függvény nyílt szürjekció, ezért a $(\pi\langle\overset{\circ}{V_t}\rangle)_{t\in T}$ halmazrendszer nyílt befedése T'-nek. A K' kompaktsága folytán van olyan $H \subseteq T$ véges halmaz, hogy $K' \subseteq \bigcup_{t\in H}\pi\langle\overset{\circ}{V_t}\rangle$. Legyen $K := \overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle \cap \left(\bigcup_{t\in H} V_t\right)$. A K' halmaz zárt T'-ben, mert kompakt és T' Hausdorff-tér. A π függvény folytonos, ezért $\overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle \subseteq T$ zárt halmaz, ugyanakkor $\bigcup_{t\in H} V_t$ kompakt halmaz T-ben, így $K \subseteq T$ kompakt halmaz. Állítjuk, hogy $\pi\langle K\rangle = K'$ teljesül. Valóban, $\pi\langle K\rangle \subseteq \pi\langle\overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle\rangle \subseteq K'$; továbbá $t' \in K' \subseteq \bigcup_{t\in H}\pi\langle\overset{\circ}{V_t}\rangle$ esetén van olyan $t \in H$, hogy $t' \in \pi\langle\overset{\circ}{V_t}\rangle$; ekkor létezik olyan $s \in V_t$, hogy $\pi(s) = t' \in K'$, tehát $s \in \overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle \cap V_t \subseteq K$, vagyis $t' = \pi(s) \in \pi\langle K\rangle$, ami azt jelenti, hogy $K' \subseteq \pi\langle K\rangle$ is teljesül. ■

Definíció. Legyen T topologikus tér. A $H \subseteq T$ halmazt *sehol sem sűrűnek* nevezzük, ha $\overset{\circ}{\overline{H}} = \emptyset$. Az $E \subseteq T$ halmazt *első kategóriájúnak* nevezzük, ha E előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. A T nem első kategóriájú részhalmazait *második kategóriájúaknak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a T topologikus tér *Baire-tér*, ha a T minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.

Legyen T topologikus tér. Egy $H \subseteq T$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha a $T\setminus\overline{H}$ halmaz sűrű. A T véges sok sehol sem sűrű részhalmazának uniója sehol sem sűrű. Egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik a T zárt sehol sem sűrű részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ezek az állítások ugyanúgy bizonyíthatók, mint metrikus terek esetében (XII. fejezet, 2. pont).

Tétel. (*Baire-féle kategóriatétel.*) Minden teljesen félmetrizálható és minden lokálisan kompakt tér Baire-tér.

Bizonyítás. A teljesen félmetrizálható topologikus terekre lényegében ugyanúgy bizonyíthatunk, mint a XII. fejezet 2. pontjában. Az összes különbség annyi, hogy az ottani, kiválasztási axiómával kombinált rekurzió alkalmazásával előállított $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozatnak nem vehetjük *az* x határértékét, hanem csak *egy* x limeszpontját, amely a teljes félmetrizálhatóság miatt létezik. Ezután az indirekt bizonyítást ugyanúgy lehet befejezni.

Lokálisan kompakt terekre szintén indirekt bizonyítunk. Legyen tehát T lokálisan kompakt tér, és tegyük fel, hogy $\Omega \subseteq T$ nem üres, első kategóriájú nyílt halmaz. Legyen $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat, amelynek mindegyik tagja sehol sem sűrű zárt halmaz T-ben és $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva igazoljuk olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezését, hogy $K_0 \subseteq \Omega \setminus H_0$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq T$ kompakt halmaz, $\overset{\circ}{K}_n \neq \emptyset$, valamint $K_{n+1} \subseteq \overset{\circ}{K}_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n+1} H_k\right)$.

A H_0 halmaz sehol sem sűrű és zárt, így $\overset{\circ}{H} = \emptyset$, tehát $\Omega \neq \emptyset$ miatt $\Omega \setminus H_0 \neq \emptyset$. Ha $t \in \Omega \setminus H_0$, akkor $\Omega \setminus H_0$ nyílt környezete t-nek, tehát létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $t \in U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega \setminus H_0$. Legyen $K_0 := \overline{U}$; ekkor K_0 kompakt halmaz T-ben, $K_0 \subseteq \Omega \setminus H_0$ és $\overset{\circ}{K}_0 \supseteq U \neq \emptyset$.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és tegyük fel, hogy $(K_j)_{j\in n}$ olyan rendszer, hogy $K_0 \subseteq \Omega \setminus H_0$, és minden $n \ni j$-re $K_j \subseteq T$ kompakt halmaz, $\overset{\circ}{K}_j \neq \emptyset$, valamint $j+1 < n$ esetén $K_{j+1} \subseteq \overset{\circ}{K}_j \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{j+1} H_k\right)$. Az $\overset{\circ}{K}_{n-1}$ halmaz nyílt és nem üres, továbbá $\bigcup\limits_{k=0}^{n} H_k$ sehol sem sűrű zárt halmaz, ezért $\overset{\circ}{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} H_k\right) \neq \emptyset$. Ha t eleme ennek a halmaznak, akkor létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $t \in U \subseteq \overline{U} \subseteq \overset{\circ}{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} H_k\right)$. Legyen $K_n := \overline{U}$; ekkor K_n kompakt részhalmaza T-nek, $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} H_k\right)$ és $\overset{\circ}{K}_n \supseteq U \neq \emptyset$. Tehát a $(K_j)_{j\in n+1}$ rendszer olyan, hogy $K_0 \subseteq \Omega \setminus H_0$, és minden $n+1 \ni j$-re $K_j \subseteq T$ kompakt halmaz, $\overset{\circ}{K}_j \neq \emptyset$, valamint $j+1 < n+1$ esetén $K_{j+1} \subseteq \overset{\circ}{K}_j \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{j+1} H_k\right)$.

Rögzítsünk egy olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, amelynek létezését igazoltuk az imént. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_{n+1} \subseteq K_n$ és $K_n \neq \emptyset$ kompakt halmaz, ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$; legyen $t \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor $t \in K_0 \subseteq \Omega$, ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $t \in K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} H_k\right)$, tehát $t \notin \bigcup\limits_{k=0}^{n} H_k$. Ezért $t \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, vagyis $t \in \Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n\right)$, ami ellentmond az $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$ feltételnek. ■

Definíció. Ha $(U_i)_{i\in I}$ és $(V_j)_{j\in J}$ halmazrendszerek, akkor azt mondjuk, hogy $(V_j)_{j\in J}$ *finomítása* $(U_i)_{i\in I}$-nek, ha minden $j \in J$ esetén van olyan $i \in I$, hogy

$V_j \subseteq U_i$. Azt mondjuk, hogy a T topologikus tér *parakompakt*, ha a T bármely nyílt befedésének létezik olyan finomítása, amely lokálisan véges nyílt befedése T-nek. A T topologikus tér E részhalmazát parakompaktnak mondjuk, ha az E topologikus altér parakompakt tér.

Például, ha $(U_i)_{i\in I}$ tetszőleges halmazrendszer, akkor minden $J \subseteq I$ halmazra $(U_i)_{i\in J}$ finomítása $(U_i)_{i\in I}$-nek. Ugyanakkor topologikus tér részhalmazainak bármely véges rendszere nyilvánvalóan lokálisan véges. Ezért minden kompakt tér parakompakt, vagyis a parakompaktság a kompaktság fogalmának általánosítása.

Lemma. Legyen T parakompakt tér és $F, F' \subseteq T$ olyan zárt halmazok, hogy minden $t \in F$ pontnak van olyan V környezete és van olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $F' \subseteq \Omega'$ és $V \cap \Omega' = \emptyset$. Ekkor léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$, $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$.

Bizonyítás. A hipotézis alapján kiválaszthatunk olyan $(V_t)_{t\in F}$ és $(\Omega'_t)_{t\in F}$ rendszereket, hogy minden $t \in F$ esetén V_t nyílt környezete t-nek és $\Omega'_t \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $F' \subseteq \Omega'_t$ és $V_t \cap \Omega'_t = \emptyset$. Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin F$ és $V_\omega := T \setminus F$. Ekkor $(V_t)_{t\in\{\omega\}\cup F}$ nyílt befedése T-nek tehát a T parakompaktsága miatt vehetjük a T-nek olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ lokálisan véges nyílt befedését, amely finomítása a $(V_t)_{t\in\{\omega\}\cup F}$ halmazrendszernek. Ha $i \in I$, akkor van olyan $t \in \{\omega\} \cup F$, hogy $\Omega_i \subseteq V_t$, és ha $F \cap \Omega_i \neq \emptyset$, akkor $t \neq \omega$, különben $\Omega_i \subseteq V_\omega = T \setminus F$, vagyis $F \cap \Omega_i = \emptyset$ teljesülne. Legyen $J := \{i \in I | F \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ és $\Omega := \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$. A J definíciója szerint $F \subseteq \Omega$, mert $(\Omega_i)_{i\in I}$ befedése T-nek. Kiválasztunk olyan $\tau : J \to F$ függvényt, hogy minden $i \in J$ esetén $\Omega_i \subseteq V_{\tau(i)}$.

Bebizonyítjuk olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz létezését, amelyre $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer lokális végessége miatt kiválaszthatunk olyan $(V_{t'})_{t'\in F'}$ rendszert, hogy minden $F' \ni t'$-re $V_{t'}$ olyan nyílt környezete t'-nek, hogy az $\{i \in I | V_{t'} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Minden $t' \in F'$ esetén legyen $I(t') := J \cap \{i \in I | V_{t'} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$; ez is véges halmaz. Ha $t' \in F'$ olyan, hogy $I(t') = \emptyset$, akkor minden $J \ni i$-re $V_{t'} \cap \Omega_i = \emptyset$; legyen ekkor $U_{t'} := V_{t'}$. Ha $t' \in F'$ olyan, hogy $I(t') \neq \emptyset$, akkor minden $J \ni i$-re az $U_{t'} := V_{t'} \cap \bigcap\limits_{j\in I(t')} \Omega'_{\tau(j)}$ halmaz nem metszi Ω_i-t. Valóban, $\Omega_i \subseteq V_{\tau(i)}$ miatt

$$\Omega_i \cap V_{t'} \cap \bigcap_{j\in I(t')} \Omega'_{\tau(j)} = \big(\Omega_i \cap V_{\tau(i)}\big) \cap V_{t'} \cap \bigcap_{j\in I(t')} \Omega'_{\tau(j)} =$$

$$= (\Omega_i \cap V_{t'}) \cap \bigcap_{j\in I(t')} \Big(\Omega'_{\tau(j)} \cap V_{\tau(i)}\Big),$$

és ha ez nem volna üres, akkor $\Omega_i \cap V_{t'} \neq \emptyset$, így $i \in I(t')$, tehát $\Omega'_{\tau(i)} \cap V_{\tau(i)} \neq \emptyset$ is teljesülne, holott minden $F \ni t$-re (így a $t := \tau(t)$ pontra is) $V_t \cap \Omega'_t = \emptyset$. Ugyanakkor $t' \in F'$ és $I(t') \neq \emptyset$ esetén minden $I(t') \ni j$-re $F' \subseteq \Omega'_{\tau(j)}$, ezért a $V_{t'} \cap \bigcap\limits_{j\in I(t')} \Omega'_{\tau(j)}$ halmaz nyílt környezete t'-nek; legyen ekkor $U_{t'} := V_{t'} \cap \bigcap\limits_{j\in I(t')} \Omega'_{\tau(j)}$.
Tehát $(U_{t'})_{t'\in F'}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $F' \ni t'$-re $U_{t'}$ nyílt környezete

t'-nek, és minden $i \in J$ esetén $\Omega_i \cap U_{t'} = \emptyset$. Ezért $t' \in F'$ esetén $\Omega \cap U_{t'} = \emptyset$ is teljesül, így az $\Omega' := \bigcup_{t' \in F'} U_{t'}$ halmaz nyílt, $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. ■

Állítás. Minden parakompakt Hausdorff-tér normális.

Bizonyítás. Legyen T parakompakt Hausdorff-tér és $F, F' \subseteq T$ diszjunkt zárt halmazok. Ha $t' \in F'$, akkor az előző lemmát alkalmazhatjuk az F és $\{t'\}$ zárt halmazokra, mert T Hausdorff-tér. Tehát minden $t' \in F'$ ponthoz léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ diszjunkt nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$ és $t' \in \Omega'$. Ezért ismét alkalmazhatjuk az előző lemmát az F és F' diszjunkt zárt halmazokra, amiből következik az állítás. ■

A 2. pontban láttuk, hogy normális terekre érvényes az egységosztás-tétel c) pontjában megfogalmazott állítás. A parakompakt Hausdorff-terek speciális normális terek, ezért várható, hogy ezekre erősebb egységosztás-tétel is igaz. A pontos állítás a következő.

Tétel. (*Egységosztás-tétel parakompakt terekre.*) Parakompakt Hausdorff-tér bármely nyílt befedéséhez létezik annak alárendelt folytonos egységosztás.

Bizonyítás. Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedése a T parakompakt Hausdorff-térnek, és vegyük a T-nek olyan $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ lokálisan véges nyílt befedését, amely finomítása $(\Omega_i)_{i \in I}$-nek. Az előző állítás szerint T normális tér, ezért a normális terekre vonatkozó egységosztás-tétel alapján létezik $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$-nak alárendelt folytonos egységosztás; legyen $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ ilyen függvényrendszer. Tehát minden $A \ni \alpha$-ra $g_\alpha : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $0 \leq g_\alpha \leq 1$, $supp(g_\alpha) \subseteq U_\alpha$, és minden $t \in T$ esetén $\sum_{\alpha \in A;\ g_\alpha(t) \neq 0} g_\alpha(t) = 1$. Kiválasztunk olyan $\iota : A \to I$ függvényt, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $U_\alpha \subseteq \Omega_{\iota(\alpha)}$. Minden $i \in I \setminus Im(\iota)$ esetén legyen f_i a $T \to \mathbb{R}$ azonosan nulla függvény, továbbá minden $Im(\iota) \ni i$-re legyen $f_i : T \to \mathbb{R}$ az a függvény, amely minden $t \in T$ ponthoz az

$$f_i(t) := \sum_{\alpha \in A;\ g_\alpha(t) \neq 0;\ \iota(\alpha) = i} g_\alpha(t)$$

értéket rendeli. Megmutatjuk, hogy az $(f_i)_{i \in I}$ függvényrendszer $(\Omega_i)_{i \in I}$-nek alárendelt folytonos egységosztás.

Ha $i \in Im(\iota)$, $t \in T$ és V olyan környezete t-nek, hogy az $A_V := \{\alpha \in A | V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ halmaz véges, akkor $f_i = \sum_{\alpha \in A_V;\ \iota(\alpha) = i} g_\alpha$ teljesül a V halmazon, ezért a folytonosság lokalitása miatt f_i folytonos a t pontban. Ebből látható, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.

Ha $i \in Im(\iota)$, akkor

$$[f_i \neq 0] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha) = i} [g_\alpha \neq 0] \subseteq \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha) = i} supp(g_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha) = i} U_\alpha \subseteq \Omega_i,$$

továbbá a $(supp(g_\alpha))_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha) = i}$ halmazrendszer lokálisan véges, és mindegyik tagja zárt, így $\bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha) = i} supp(g_\alpha)$ is zárt halmaz T-ben, következésképpen fennállnak a

$supp(f_i) := \overline{[f_i \neq 0]} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha)=i} supp(g_\alpha) \subseteq \Omega_i$ összefüggések. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re $supp(f_i) \subseteq \Omega_i$.

Az $\left(\bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha)=i} supp(g_\alpha) \right)_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges. Valóban, ha $t \in T$ és V olyan környezete t-nek, hogy az $A_V := \{\alpha \in A | V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ halmaz véges, akkor $i \in I$ és $V \cap \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha)=i} supp(g_\alpha) \neq \emptyset$ esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy $\iota(\alpha) = i$ és $\emptyset \neq V \cap supp(g_\alpha) \subseteq V \cap U_\alpha$, így $\alpha \in A_V$, vagyis

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, V \cap \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha)=i} supp(g_\alpha) \neq \emptyset \right\} \subseteq \iota\langle A_V \rangle,$$

és persze $\iota\langle A_V \rangle$ véges halmaz. Ebből következik, hogy a $(supp(f_i))_{i \in I}$ halmazrendszer is lokálisan véges, hiszen láttuk, hogy minden $i \in I$ esetén $supp(f_i) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha)=i} supp(g_\alpha)$.

Végül, ha $t \in T$, akkor könnyen látható, hogy

$$1 = \sum_{\alpha \in A;\ g_\alpha(t) \neq 0} g_\alpha(t) = \sum_{i \in I;\ f_i(t) \neq 0} \left(\sum_{\alpha \in A;\ g_\alpha(t) \neq 0;\ \iota(\alpha)=i} g_\alpha(t) \right) = \sum_{i \in I;\ f_i(t) \neq 0} f_i(t)$$

teljesül ■

Állítás. Ha $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan pontonként véges (például diszjunkt) befedése a T topologikus térnek, hogy minden $\alpha \in A$ esetén T_α parakompakt nyílt részhalmaza T-nek, akkor T is parakompakt.

Bizonyítás. Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ tetszőleges nyílt befedése T-nek. Minden $\alpha \in A$ esetén $(T_\alpha \cap \Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedése a T_α topologikus altérnek, ezért a T_α halmaz parakompaktsága folytán kiválaszthatunk olyan $((\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in A}$ rendszer, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $(\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha}$ olyan lokálisan véges nyílt befedés a T_α topologikus altérben, amely finomítása a $(T_\alpha \cap \Omega_i)_{i \in I}$ halmazrendszernek.

Minden $A \ni \alpha$-ra T_α nyílt T-ben, ezért az $(\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha}$ halmazrendszer mindegyik tagja T-ben is nyílt, így az $(\Omega_{\alpha,j})_{\alpha \in A,\ j \in J_\alpha}$ halmazrendszer nyílt befedése T-nek. Továbbá, minden $\alpha \in A$ és $j \in J_\alpha$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\Omega_{\alpha,i} \subseteq T_\alpha \cap \Omega_i \subseteq \Omega_i$, tehát az $(\Omega_{\alpha,j})_{\alpha \in A,\ j \in J_\alpha}$ halmazrendszer finomítása az $(\Omega_i)_{i \in I}$ halmazrendszernek.

Megmutatjuk, hogy az $(\Omega_{\alpha,j})_{\alpha \in A,\ j \in J_\alpha}$ halmazrendszer lokálisan véges. Legyen ugyanis $t \in T$ rögzített pont. A $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ halmazrendszer pontonkénti végessége folytán az $A(t) := \{\alpha \in A | t \in T_\alpha\}$ halmaz véges és persze nem üres, hiszen $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ befedése T-nek. Ha $\alpha \in A_(t)$, akkor az $(\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha}$ halmazrendszer lokális végessége miatt létezik t-nek olyan U_α környezete T_α-ban, hogy $J'_\alpha := \{j \in J_\alpha | U_\alpha \cap \Omega_{\alpha,j} \neq \emptyset\}$ véges halmaz. Ekkor $U := \bigcap_{\alpha \in A(t)} U_\alpha$ környezete t-nek T-ben. Ha $\alpha \in A$ és $j \in J_\alpha$ olyanok, hogy $U \cap \Omega_{\alpha,j} \neq \emptyset$, akkor $\Omega_{\alpha,j} \cap U_\alpha \neq \emptyset$, tehát $j \in J'_\alpha$, vagyis

$$\{(\alpha, j) | (\alpha \in A) \wedge (j \in J_\alpha) \wedge (U \cap \Omega_{\alpha,j} \neq \emptyset)\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A(t)} (\{\alpha\} \times J'_\alpha)$$

teljesül, és itt a jobb oldalon véges halmaz áll. ■

Definíció. A T topologikus teret σ-*kompaktnak* nevezzük, ha létezik a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. A T topologikus tér E részhalmazát σ-kompaktnak mondjuk, ha az E topologikus altér σ-kompakt tér.

Ha T nem megszámlálhatóan végtelen halmaz, akkor T a diszkrét topológiával ellátva lokálisan kompakt, de nem σ-kompakt topologikus tér, tehát lokálisan kompakt tér nem feltétlenül σ-kompakt. Nyilvánvaló, hogy minden kompakt tér σ-kompakt, tehát a σ-kompaktság a kompaktság fogalmának általánosítása. Vigyázzunk arra, hogy σ-kompakt Hausdorff-tér nem szükségképpen lokálisan kompakt (ilyenekre példákat látunk majd a XIV. fejezetben, a Banach-Alaoglu-tétellel kapcsolatban).

Ha T topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor az E egy részhalmaza pontosan akkor kompakt T-ben, ha kompakt az E topologikus altérben; ezért E pontosan akkor σ-kompakt halmaz T-ben, ha előáll a T megszámlálható sok kompakt részhalmazának uniójaként.

Lemma. Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, akkor létezik a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$.

Bizonyítás. Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T kompakt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezését, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re Ω_n relatív kompakt nyílt halmaz T-ben és $\overline{\Omega_n} \cup K_n \subseteq \Omega_{n+1}$; egy ilyen halmazsorozat nyilvánvalóan eleget tesz a követelményeknek.

Az Ω_0 halmaz a T tetszőleges relatív kompakt nyílt részhalmaza lehet, például $\Omega_0 := \emptyset$ is megfelel. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$, és legyen $(\Omega_i)_{i\in n}$ olyan rendszer, hogy minden $n \ni i$-ra Ω_i relatív kompakt nyílt halmaz T-ben és $i+1 < n$ esetén $\overline{\Omega_i} \cup K_i \subseteq \Omega_{i+1}$. Ekkor $\overline{\Omega_{n-1}} \cup K_{n-1}$ kompakt részhalmaza T-nek, tehát van olyan $\Omega_n \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $\overline{\Omega_{n-1}} \cup K_{n-1} \subseteq \Omega_n$. Ekkor az $(\Omega_i)_{i\in n+1}$ rendszer olyan, hogy minden $n+1 \ni i$-ra Ω_i relatív kompakt nyílt halmaz T-ben és $i+1 < n+1$ esetén $\overline{\Omega_i} \cup K_i \subseteq \Omega_{i+1}$. ■

Állítás. Minden σ-kompakt lokálisan kompakt tér parakompakt.

Bizonyítás. Legyen T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, és $(U_i)_{i\in I}$ nyílt befedése T-nek; megmutatjuk, hogy $(U_i)_{i\in I}$-nek létezik olyan finomítása, amely lokálisan véges nyílt befedése T-nek.

Először vegyük a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amely befedése T-nek és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$. Legyen minden $m \in \mathbb{Z}$ *negatív* egész számra $\Omega_m := \emptyset$. Természetesen ekkor minden $\mathbb{Z} \ni m$-re $\overline{\Omega_m} \subseteq \Omega_{m+1}$ teljesül.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített és $K_n := \Omega_n \setminus \overline{\Omega_{n-1}}$. A K_n halmaz kompakt T-ben és $K_n \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$. Ha $t \in K_n$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $t \in U_i$, tehát

$U_i \cap \left(\Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}\right)$ olyan nyílt környezete t-nek, amely részhalmaza $\Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$-nek. Ezért kiválaszthatunk olyan $(W_t)_{t \in K_n}$ rendszert, hogy minden $t \in K_n$ pontra W_t nyílt környezete t-nek és $W_t \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$, és van olyan $i \in I$, hogy $W_t \subseteq U_i$. Ekkor K_n kompaktsága miatt van olyan $H \subseteq K_n$ véges halmaz, hogy $K_n \subseteq \bigcup_{t \in H} W_t$.

Az előzőek alapján kiválaszthatunk olyan $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $((V_{n,t})_{t \in H_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H_n \subseteq K_n$ véges halmaz, és $(V_{n,t})_{t \in H_n}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $K_n \subseteq \bigcup_{t \in H_n} V_{n,t}$, valamint minden $H_n \ni t$-re $t \in V_{n,t} \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$ és létezik a t-hez (és n-hez) olyan $i \in I$, hogy $V_{n,t} \subseteq U_i$. Legyen $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times H_n)$. Nyilvánvaló, hogy a $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ halmazrendszer nyílt befedése T-nek, mert $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ befedése T-nek. Triviális továbbá az, hogy $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ finomítása az $(U_i)_{i \in I}$ halmazrendszernek, ezért a T parakompaktságához elég volna azt igazolni, hogy $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ lokálisan véges T-ben.

Ehhez legyen $t \in T$ rögzített és $m := \min\{n \in \mathbb{N} | t \in \Omega_n\}$. Az m definíciója szerint $t \in \Omega_m$ és $t \notin \Omega_{m-1}$, következésképpen $t \notin \overline{\Omega_{m-2}}$, hiszen $\overline{\Omega_{m-2}} \subseteq \Omega_{m-1}$. Ez az jelenti, hogy a $V := \Omega_m \setminus \overline{\Omega_{m-2}}$ nyílt környezete t-nek. Ha $(n,s) \in J$ olyan, hogy $V_{n,s} \cap V \neq \emptyset$, akkor $V_{n,s} \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}} \subseteq T \setminus \Omega_{n-2}$ és $V \subseteq \Omega_m$ miatt $n \leq m+1$, különben $n - 2 \geq m$ teljesülne, így $\Omega_{n-2} \supseteq \Omega_m$, tehát igaz volna a $V_{n,s} \cap V \subseteq (T \setminus \Omega_{n-2}) \cap \Omega_m = \emptyset$ összefüggés. Ez azt jelenti, hogy

$$\{\ (n,s) \in J \mid V_{n,s} \cap V \neq \emptyset\ \} \subseteq \bigcup_{n \in m+2} (\{n\} \times H_n)\,,$$

és itt a jobb oldalon véges halmaz áll. Ezért a $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ halmazrendszer lokálisan véges. ■

A bizonyításból látható, hogy σ-kompakt lokálisan kompakt tér bármely nyílt befedésének létezik olyan megszámlálható (indexhalmazú) finomítása, amely lokálisan véges nyílt befedés.

Tétel. (*Lokálisan kompakt tér parakompaktságának jellemzése.*) Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) T parakompakt tér.

(ii) Létezik a T-nek relatív kompakt nyílt halmazokból álló lokálisan véges befedése.

(iii) Létezik a T-nek σ-kompakt nyílt halmazokból álló diszjunkt befedése.

(iii)$'$ Létezik a T-nek σ-kompakt nyílt halmazokból álló pontonként véges befedése.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Jelölje $\mathscr{T}_c$ a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak halmazát. Ekkor $(U)_{U \in \mathscr{T}_c}$ nyílt befedése T-nek, ezért a T parakompaktsága miatt vehetjük a T-nek olyan $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedését, amely lokálisan véges finomítása az $(U)_{U \in \mathscr{T}_c}$ halmazrendszernek. Tehát minden $I \ni i$-hez van olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $\Omega_i \subseteq U$, így Ω_i is relatív kompakt nyílt halmaz.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T relatív kompakt nyílt halmazokból álló lokálisan véges befedése. Jelölje R azon $(t,t') \in T \times T$ párok halmazát, amelyekhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(i_k)_{k \in n+1}$ rendszer I-ben, hogy $t \in \Omega_{i_0}$, $t' \in \Omega_{i_n}$ és minden $k < n$

természetes számra $\Omega_{i_k} \cap \Omega_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. Könnyen látható, hogy R ekvivalencia-reláció T felett. Az $(\Omega)_{\Omega \in T/R}$ halmazrendszer diszjunkt befedése T-nek, ezért elég volna azt igazolni, hogy minden $\Omega \in T/R$ halmaz *nyílt* és *σ-kompakt* halmaz T-ben.

Ha $\Omega \in T/R$, akkor $t \in \Omega$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $t \in \Omega_i$; ekkor az R reláció értelmezése alapján triviális, hogy minden $\Omega_i \ni t'$-re $(t, t') \in R$, vagyis $t' \in \Omega$, így $\Omega_i \subseteq \Omega$. Ezért minden $\Omega \in T/R$ halmaz nyílt T-ben, és ebből az is következik, hogy minden $\Omega \in T/R$ halmaz zárt is T-ben, hiszen $T \setminus \Omega = \bigcup_{\Omega' \in T/R;\ \Omega' \neq \Omega} \Omega'$ is nyílt T-ben. Tehát csak azt kell igazolni, hogy minden $\Omega \in T/R$ halmaz σ-kompakt.

Legyen $\Omega \in T/R$ és $t \in \Omega$ rögzített. Rekurzióval értelmezzük *azt* az $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozatot, amelyre $U_0 := \bigcup_{i \in I;\ t \in \Omega_i} \Omega_i$ és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $U_n := \bigcup_{i \in I;\ \Omega_i \cap U_{n-1} \neq \emptyset} \Omega_i$.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $I_n \subseteq I$ *véges* halmaz, hogy $U_n = \bigcup_{i \in I_n} \Omega_i$ és minden $I_n \ni i$-re $\Omega_i \subseteq \Omega$. Ez $n = 0$ esetén igaz, mert $I_0 := \{i \in I | t \in \Omega_i\}$ véges halmaz, hiszen az $(\Omega_i)_{i \in I}$ befedés pontonként (sőt lokálisan) véges, és a definíció szerint $U_0 = \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$, továbbá $t \in \Omega$ miatt és az R reláció értelmezése alapján minden $I_0 \ni i$-re $\Omega_i \subseteq \Omega$. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ és $I_n \subseteq$ olyan véges halmaz, hogy $U_n = \bigcup_{i \in I_n} \Omega_i$ és minden $I_n \ni i$-re $\Omega_i \subseteq \Omega$. A rekurzív definíció szerint $U_{n+1} = \bigcup_{i \in I;\ \Omega_i \cap U_n \neq \emptyset} \Omega_i$. Az $\overline{U_n}$ halmaz kompakt, mert az indukciós hipotézis alapján U_n véges sok relatív kompakt halmaz uniója. Az $(\Omega_i)_{i \in I}$ befedés lokális végessége miatt kiválaszthatunk olyan $(V_s)_{s \in \overline{U_n}}$ rendszert, hogy minden $\overline{U_n} \ni s$-re V_s nyílt környezete s-nek, és az $\{i \in I | \Omega_i \cap V_s \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Legyen $H \subseteq \overline{U_n}$ olyan véges halmaz, hogy $\overline{U_n} \subseteq \bigcup_{s \in H} V_s$. Ekkor

$$\{\ i \in I \mid \Omega_i \cap U_n \neq \emptyset\ \} \subseteq \{\ i \in I \mid \Omega_i \cap \bigcup_{s \in H} V_s \neq \emptyset\ \} \subseteq \bigcup_{s \in H} \{\ i \in I \mid \Omega_i \cap V_s \neq \emptyset\ \},$$

tehát az $I_{n+1} := \{i \in I | \Omega_i \cap U_n \neq \emptyset\}$ halmaz véges, és a rekurzív definíció alapján $U_{n+1} = \bigcup_{i \in I_{n+1}} \Omega_i$. Ha $i \in I_{n+1}$ és $t' \in \Omega_i \cap U_n$, akkor $t' \in \Omega$, hiszen az indukciós hipotézis következtében $U_n \subseteq \Omega$; ezért az R reláció értelmezése alapján $\Omega_i \subseteq \Omega$. Ezzel a teljes indukciót végrehajtottuk.

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén U_n relatív kompakt nyílt halmaz T-ben, mert véges sok relatív kompakt nyílt halmaz uniója relatív kompakt nyílt halmaz, továbbá $U_n \subseteq \Omega$. Megmutatjuk, hogy $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Valóban, legyen $t' \in \Omega$, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan I-ben haladó $(i_k)_{k \in n+1}$ rendszert, hogy $t \in \Omega_{i_0}$, $t' \in \Omega_{i_n}$ és minden $k < n + 1$ természetes számra $\Omega_{i_k} \cap \Omega_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. Ekkor minden $k \leq n$ természetes számra $\Omega_{i_k} \subseteq U_k$ teljesül. Ha nem így volna, akkor értelmezhetnének az

$$m := \min\{\ k \in \mathbb{N} \mid (k \leq n) \wedge (\Omega_{i_k} \setminus U_k \neq \emptyset)\ \}$$

számot. Világos, hogy $\Omega_{i_0} \subseteq U_0$, hiszen $t \in \Omega_{i_0}$; ezért $m > 0$. Ekkor viszont $\Omega_{i_{m-1}} \subseteq U_{m-1}$ és $\Omega_{i_{m-1}} \cap \Omega_{i_m} \neq \emptyset$, tehát $U_{m-1} \cap \Omega_{i_m} \neq \emptyset$, így az U_m értelmezése szerint $\Omega_{i_m} \subseteq U_m$, holott $\Omega_{i_m} \setminus U_m \neq \emptyset$. Tehát minden $k \leq n$ természetes számra $\Omega_{i_k} \subseteq U_k$, így $t' \in \Omega_{i_n} \subseteq U_n$. Ezzel megmutattuk, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq \Omega$ és Ω zárt T-ben, ezért $\overline{U_n} \subseteq \Omega$, így $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ is teljesül. De minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{U_n}$ kompakt halmaz T-ben, ezért az Ω halmaz σ-kompakt.

(iii)$\Rightarrow$(iii)$'$ Nyilvánvaló, mert minden diszjunkt halmazrendszer pontonként véges.

(iii)$'$ $\Rightarrow$(i) Ha $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ pontonként véges nyílt befedése T-nek és minden $A \ni \alpha$-ra T_α σ-kompakt részhalmaza T-nek, akkor minden $\alpha \in A$ esetén a T_α topologikus altér lokálisan kompakt és σ-kompakt, így az előző állítás szerint parakompakt nyílt halmaz T-ben; tehát T is parakompakt. ■

Következmény. Ha a T lokálisan kompakt tér parakompakt és összefüggő, akkor T σ-kompakt.

Bizonyítás. A hipotézis és az előző tétel alapján létezik olyan $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ diszjunkt halmazrendszer, amely befedése T-nek és minden $A \ni \alpha$-ra a T_α halmaz nyílt és σ-kompakt T-ben. Minden $\alpha \in A$ esetén $T \setminus T_\alpha = \bigcup_{\beta\in A\setminus\{\alpha\}} T_\beta$, ezért T_α zárt T-ben. A T összefüggősége alapján minden $A \ni \alpha$-ra $T_\alpha = T$ vagy $T_\alpha = \emptyset$. Tehát $A \neq \emptyset$ esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy $T = T_\alpha$, így T σ-kompakt. Ha $A = \emptyset$, akkor $T = \emptyset$, tehát T σ-kompakt. ■

Tétel. (*Lokálisan kompakt tér metrizálhatóságának jellemzése.*) Ha T lokálisan kompakt tér, és T' egypontú kompaktifikációja T-nek, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) T megszámlálható bázisú.

(ii) T' metrizálható kompakt tér.

(iii) T metrizálható és σ-kompakt.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) A kompakt terek metrizálhatóságának jellemzési tétele alapján elég azt megmutatni, hogy ha T megszámlálható bázisú, akkor T' is megszámlálható bázisú. Jelölje ω a végtelen távoli pontot T'-ben, és legyen $\mathfrak{B}$ megszámlálható topologikus bázisa T-nek. Tudjuk, hogy a $\mathfrak{B}_c := \{U \in \mathfrak{B} | U \text{ relatív kompakt}\}$ halmaz szintén topologikus bázisa T-nek. Ebből következik, hogy $T = \bigcup_{U\in\mathfrak{B}_c} \overline{U}$, ezért a T topologikus tér σ-kompakt. Ezért létezik a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$.

Megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{B} \cup \{T' \setminus \overline{\Omega_n} | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz topologikus bázisa a T' kompakt térnek. Valóban, legyen Ω' tetszőleges nyílt részhalmaza T'-nek. Ha $\omega \in \Omega'$, akkor $T' \setminus \Omega'$ olyan kompakt halmaz T'-ben, amely része T-nek, tehát ez T-ben is kompakt halmaz, így létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $T' \setminus \Omega' \subseteq \Omega_n \subseteq \overline{\Omega_n}$, tehát $\omega \in T' \setminus \overline{\Omega_n} \subseteq \Omega'$ teljesül. Ha $t \in T \cap \Omega'$, akkor van olyan $U \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in U \subseteq T \cap \Omega'$, mert a $T \cap \Omega'$ halmaz nyílt T-ben, és $\mathfrak{B}$ topologikus bázisa T-nek.

(ii)$\Rightarrow$(ii) Metrizálható topologikus tér minden topologikus altere metrizálható, ezért ha (ii) teljesül, akkor T metrizálható, hiszen T topologikus altere T'-nek. Továbbá, metrizálható topologikus tér M_1-tér, ezért ha ω a végtelen távoli pont T'-ben és (ii) teljesül, akkor létezik az ω nyílt környezeteinek olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy az $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz környezetbázisa ω-nak T'-ben. Ekkor a $(T' \setminus U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat befedése T-nek, hiszen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{\omega\}$. Továbbá, minden $\mathbb{N} \ni n$-re $T' \setminus U_n$ kompakt halmaz T'-ben és részhalmaza T-nek, ezért T-ben is kompakt. Ebből következik, hogy a T topologikus tér σ-kompakt.

(iii)$\Rightarrow$(i) Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T kompakt részhalmazainak olyan sorozata, amely befedése T-nek. A hipotézis alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re a K_n topologikus altér kompakt és metrizálható, ezért a kompakt terek metrizálhatóságának jellemzése alapján a K_n topologikus altér megszámlálható bázisú, így szeparábilis is. Kiválasztunk olyan $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $D_n \subseteq K_n$ megszámlálható sűrű halmaz a K_n topologikus altérben. Ha $t \in T$ és V környezete t-nek T-ben, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $t \in K_n$, és ekkor $V \cap K_n$ környezete t-nek a K_n topologikus altérben, következésképpen $\emptyset \neq (V \cap K_n) \cap D_n = V \cap D_n$. Ez azt jelenti, hogy az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ megszámlálható halmaz sűrű a T topologikus térben, vagyis T szeparábilis. Ugyanakkor T metrizálható is, ezért megszámlálható bázisú. ■

4. Folytonos függvények lokálisan kompakt terek felett

Jelölés. Ha T és T' topologikus terek, akkor $\mathscr{C}(T;T')$ jelöli a $T \to T'$ folytonos függvények halmazát.

Definíció. Legyen T halmaz, T' Hausdorff-tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to T'$ függvény. Ekkor $\lim\limits_{i,\ I} f_i$ jelöli azt a $T \rightarrowtail T'$ függvényt, amelyre

$$Dom\left(\lim_{i,\ I} f_i\right) := \{t \in T \mid \text{az } (f_i(t))_{i\in I} \text{ általánosított sorozat konvergens } T'\text{-ben}\},$$

továbbá minden $t \in Dom\left(\lim\limits_{i,\ I} f_i\right)$ esetén

$$\left(\lim_{i,\ I} f_i\right)(t) := \lim_{i,\ I} f_i(t).$$

A $\lim\limits_{i,\ I} f_i$ függvényt az $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított függvénysorozat *pontonkénti limeszfüggvényének* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat *pontonként konvergens* az $E \subseteq T$ halmazon, ha $E \subseteq Dom\left(\lim\limits_{i,\ I} f_i\right)$.

Tehát az előző definíció feltételei mellett az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat akkor és csak akkor pontonként konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, ha

$$(\forall\, t \in E)(\exists\, t' \in T')(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'))(\exists\, j \in I)(\forall\, i \in I):\ (i \geq j\ \Rightarrow\ f_i(t) \in V')$$

teljesül, ahol $\mathscr{T}'$ jelöli a T' topológiáját.

A *pontonkénti approximáció problémája* a következőképpen fogalmazható meg. Legyen T halmaz, T' Hausdorff-tér és $H \subseteq \mathscr{F}(T;T')$. Azt kérdezzük, hogy milyen tulajdonságúak azok az $f : T \rightarrowtail T'$ függvények, amelyekhez létezik olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $f = \lim\limits_{i,\ I} f_i$; ezeket a függvényeket mondjuk H-beli függvényekkel *pontonként approximálhatóknak*.

Metrikus térbe érkező függvények általánosított sorozatára értelmezhető az egyenletes konvergencia fogalma.

Definíció. Legyen T halmaz, M metrikus tér, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Azt mondjuk, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat *egyenletesen konvergens* az $E \subseteq T$ halmazon, ha pontonként konvergens az E halmazon, és az $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$ pontonkénti limeszfüggvényre

$$\lim_{i,\ I}\left(\sup_{t\in E} d(f_i(t), f(t))\right) = 0$$

teljesül.

Tehát - az előző definíció feltételei mellett - az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, ha pontonként konvergens az E halmazon, és az $f := \lim_{i,\ I} f_i$ pontonkénti limeszfüggvényre

$$(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I) : \ (i \geq j \ \Rightarrow \ \sup_{t\in E} d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon)$$

teljesül, ahol d jelöli az M metrikáját. Ez úgy is írható, hogy

$$(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I)(\forall\ t \in E) : \ (i \geq j \ \Rightarrow \ d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon).$$

Legyen T halmaz, M metrikus tér, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, akkor $(f_i)_{i\in I}$ az E minden részhalmazán is egyenletesen konvergens. Ha $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan *véges* rendszer, hogy minden $\alpha \in A$ esetén $E_\alpha \subseteq T$ és $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az E_α halmazon, akkor $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$ halmazon is.

Állítás. Legyen T halmaz, M metrikus tér és $\mathscr{F}^b(T; M)$ a $T \to M$ korlátos függvények halmaza a sup-metrikával ellátva (V. fejezet, 11. pont). Legyen $f \in \mathscr{F}^b(T; M)$ és $(f_i)_{i\in I}$ $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben haladó általánosított sorozat. Az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor konvergál f-hez a sup-metrika szerint, ha $f = \lim_{i,\ I} f_i$ és az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(f_i)_{i\in I}$ konvergál f-hez a $\mathscr{T}_{\mathbf{d}}$ topológia szerint, ahol $\mathbf{d}$ sup-metrika $\mathscr{F}^b(T; M)$. Minden $T \ni t$-re és $I \ni i$-re $d(f_i(t), f(t)) \leq \mathbf{d}(f_i, f)$, ahol d jelöli az M feletti metrikát. Ebből látható, hogy minden $t \in T$ esetén $f(t) = \lim_{i,\ I} f_i(t)$, vagyis $f = \lim_{i,\ I} f_i$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $\sup_{t\in T} d(f_i(t), f(t)) \leq \mathbf{d}(f_i, f) \leq \varepsilon$, tehát minden $T \ni t$-re $d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f = \lim_{i,\ I} f_i$ és az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon. Legyen V az f környezete $\mathscr{F}^b(T; M)$-ben a $\mathscr{T}_{\mathbf{d}}$ topológia szerint. Vegyünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\overline{B}_\varepsilon(f; \mathbf{d}) \subseteq V$. Az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergenciája miatt van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in I$ és $t \in T$ esetén, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon$, vagyis minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $\mathbf{d}(f_i, f) := \sup_{t\in T} d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén $f_i \in \overline{B}_\varepsilon(f; \mathbf{d}) \subseteq V$, azaz $(f_i)_{i\in I}$ konvergál f-hez a sup-metrika szerint. ■

Definíció. Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Azt mondjuk, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat *lokálisan egyenletesen konvergens* az $E \subseteq T$ halmazon, ha minden $t \in E$ pontnak létezik olyan V környezete T-ben, hogy $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $E \cap V$ halmazon.

Tehát - az előző definíció feltételei mellett - az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor lokálisan egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, ha pontonként konvergens az E halmazon, és az $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$ pontonkénti limeszfüggvényre

$$(\forall\ t \in E)(\exists\ V \in \mathscr{T}(t))(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I) : (i{\geq}j{\Rightarrow} \sup_{s\in E\cap V} d(f_i(s), f(s)){\leq}\varepsilon)$$

teljesül, ahol $\mathscr{T}$ jelöli a T topológiáját és d jelöli az M metrikáját. Ez úgy is írható, hogy

$$(\forall\ t \in E)(\exists\ V \in \mathscr{T}(t))(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I)(\forall\ s \in E \cap V) :$$
$$(i \geq j\ \Rightarrow\ d(f_i(s), f(s)) \leq \varepsilon).$$

Állítás. Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon, akkor $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens. Ha T lokálisan kompakt és $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens, akkor $(f_i)_{i\in I}$ lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon és legyen $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$. Rögzítünk egy $K \subseteq T$ kompakt halmazt, és kiválasztunk egy olyan $(V_t)_{t\in T}$ rendszert, hogy minden $t \in K$ pontra V_t nyílt környezete t-nek, és $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens V_t-n. Ekkor a K kompaktsága miatt van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{t\in K} V_t$. Világos, hogy $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $\bigcup\limits_{t\in H} V_t$ halmazon, ezért a K halmazon is egyenletesen konvergens.

Megfordítva, ha $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens és T lokálisan kompakt, akkor $(f_i)_{i\in I}$ a T minden pontjának valamely környezetén egyenletesen konvergens, így $(f_i)_{i\in I}$ lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon. ■

Az *egyenletes* (illetve *lokálisan egyenletes*) *approximáció problémája* a következőképpen fogalmazható meg. Legyen T halmaz (illetve topologikus tér), M metrikus tér és $H \subseteq \mathscr{F}(T; M)$. Azt kérdezzük, hogy milyen tulajdonságúak azok az $f : T \rightarrowtail M$ függvények, amelyekhez létezik olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $f = \lim\limits_{i,\ I} f_i$, és $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen (illetve lokálisan egyenletesen) konvergens a T halmazon; ezeket a függvényeket mondjuk H-beli függvényekkel *egyenletesen* (illetve *lokálisan egyenletesen*) *approximálhatóknak.*

A következő tétel teljes jellemzést ad arra, hogy topologikus tér egy pontjában folytonos függvények általánosított sorozatának pontonkénti limeszfüggvénye folytonos legyen az adott pontban.

Tétel. Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Tegyük fel, hogy $(f_i)_{i\in I}$ pontonként konvergens a T halmazon, és legyen $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$. Ha $t \in T$ olyan pont, hogy minden $I \ni i$-re f_i folytonos t-ben, akkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) Az f függvény folytonos a t pontban.

(ii) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan olyan $j \in I$, hogy minden $i \in I$, $i \geq j$ indexhez létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$ -re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül.

(iii) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $j \in I$ esetén létezik olyan $i \in I$, $i \geq j$ index, és létezik a t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül.

(iv) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $i \in I$ és olyan V környezete t-nek T-ben, hogy minden $V \ni t'$ -re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és az f függvény t-beli folytonossága alapján vegyük a t-nek olyan $V(\varepsilon)$ környezetét T-ben, hogy minden $V(\varepsilon) \ni t'$-re $d(f(t'), f(t)) < \varepsilon/3$. Az f definíciója alapján az $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $f(t)$-hez M-ben, így van olyan $j \in I$, hogy minden $i \in I$, $i \geq j$ indexre $d(f_i(t), f(t)) < \varepsilon/3$ teljesül. Ha $i \in I$ olyan, hogy $i \geq j$, akkor az f_i függvény t-beli folytonossága alapján létezik t-nek olyan V_i környezete T-ben, hogy minden $V_i \ni t'$-re $d(f_i(t'), f_i(t)) < \varepsilon/3$ teljesül; ekkor a $V := V(\varepsilon) \cap V_i$ halmaz olyan környezete t-nek T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re

$$d(f_i(t'), f(t')) \leq d(f_i(t'), f_i(t)) + d(f_i(t), f(t)) + d(f(t), f(t')) < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz találtunk olyan $I \ni j$-t, hogy minden $i \in I$, $i \geq j$ indexhez létezik a t-nek olyan V környezete, amelynek minden t' elemére $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül, így (ii) következik (i)-ből.

(ii)⇒(iii) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és a (ii) alapján vegyünk olyan $j_\varepsilon \in I$ indexet, hogy minden $i \in I$, $i \geq j_\varepsilon$ indexhez létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $j \in I$ esetén az I felfelé irányítottsága miatt vehetünk olyan $I \ni i$-t, hogy $i \geq j$ és $i \geq j_\varepsilon$; ekkor az i-hez létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül. Ezért (iii) közetkezik (ii)-ből.

(iii)⇒(iv) Logikai trivialitás, mert $I \neq \emptyset$.

(iv)⇒(i) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és az $\varepsilon/3$ számhoz a (iv) alapján vegyünk olyan $i \in I$ indexet és a t-nek olyan V' környezetét T-ben, hogy minden $V' \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon/3$ teljesül. Speciálisan, $t \in V'$ miatt $d(f_i(t), f(t)) < \varepsilon/3$ is teljesül. Az f_i függvény folytonos t-ben, ezért létezik t-nek olyan V'' környezete T-ben, hogy minden $V'' \ni t'$-re $d(f_i(t'), f_i(t)) < \varepsilon/3$ teljesül. Ekkor $V := V' \cap V''$ olyan környezete t-nek T-ben, hogy minden $t' \in V$ pontra

$$d(f(t'), f(t)) \leq d(f(t'), f_i(t')) + d(f_i(t'), f_i(t)) + d(f_i(t), f(t)) < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy f folytonos a t pontban. ■

Tétel. Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i \in \mathscr{C}(T;M)$. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon, akkor $\lim_{i,\ I} f_i \in \mathscr{C}(T;M)$

Bizonyítás. Jelölje d az M metrikáját, $f := \lim_{i,\ I} f_i$, és legyen $t \in I$ rögzített pont. Vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. A T pontnak olyan V környezetét keressük T-ben, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(t);d)$ teljesül.

Először vegyük a t-nek olyan V_1 környezetét, amelyen az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens, vagyis $\lim_{i,\ I}\left(\sup_{t'\in V_1} d(f_i(t'),f(t'))\right) = 0.$ Ekkor az $\varepsilon/3$ számhoz vehetünk olyan $j \in I$ indexet, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq j$, akkor $\sup_{t'\in V_1} d(f_i(t'),f(t')) \leq \varepsilon/3$ teljesül. Tehát ha $i \in I$ és $i \geq j$, akkor minden $V_1 \ni t'$-re $d(f_i(t'),f(t')) \leq \varepsilon/3$. Ezért $i \in I$ és $i \geq j$ esetén $d(f_i(t),f(t)) \leq \varepsilon/3$ is igaz, hiszen $t \in V_1$. A hipotézis alapján az $f_j : T \to M$ függvény folytonos a t pontban, tehát a t-nek van olyan V_2 környezete T-ben, hogy minden $t' \in V_2$ esetén $d(f_j(t'),f_j(t)) < \varepsilon/3$ teljesül. Tehát $V := V_1 \cap V_2$ olyan környezete t-nek T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re

$$d(f(t'),f(t)) \leq d(f(t'),f_j(t')) + d(f_j(t'),f_j(t)) + d(f_j(t),f(t)) < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

vagyis $f\langle V\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(t);d)$. ■

Figyeljük meg, hogy az előző állítás bizonyításában csak azt használtuk fel, hogy $f = \lim_{i,\ I} f_i$ és minden $t \in T$ pontnak van olyan V környezete T-ben, hogy $\inf_{i\in I}\left(\sup_{t'\in V} d(f_i(t'),f(t'))\right) = 0$. Ez határozottan gyengébb feltételnek tűnik annál, hogy $(f_i)_{i\in I}$ lokálisan egyenletesen konvergál f-hez a T halmazon.

Jelölés. Ha E halmaz, F normált tér és f olyan függvény, hogy $E \subseteq Dom(f)$ és $Im(f) \subseteq F$, akkor

$$|||f|||_E := \sup_{t\in E} \|f(t)\|,$$

ha $E \neq \emptyset$, míg $|||f|||_\emptyset := 0$; továbbá a $|||f|||_{Dom(f)}$ szimbólum helyett az egyszerűbb $|||f|||$ jelet alkalmazzuk.

Emlékeztetünk arra, hogy ha T halmaz és F normált tér, akkor a $T \to F$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;F)$ halmaza a pontonként értelmezett műveletekkel ellátva vektortér ugyanazon test felett, amely felett F vektortér, és az $\mathscr{F}^b(T;F) \to \mathbb{R}_+$; $f \mapsto |||f|||_T$ *sup-normával* ellátva normált tér, és a $|||\cdot|||_T$ norma éppen a sup-metrikát generálja (V. fejezet, 11. pont).

Definíció. Ha T lokálisan kompakt tér és F normált tér, akkor egy $f : T \to F$ függvényt *végtelenben eltűnőnek* nevezünk, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy minden $T \setminus K \ni t$-re $\|f(t)\| < \varepsilon$. Ha T lokálisan kompakt tér és F normált tér, akkor $\mathscr{K}(T;F)$ jelöli a $T \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát, és $\overline{\mathscr{K}}(T;F)$ jelöli a $T \to F$ végtelenben eltűnő folytonos függvények halmazát.

Állítás. Ha T lokálisan kompakt tér és F normált tér, akkor $\overline{\mathscr{K}}(T;F)$ egyenlő a $\mathscr{K}(T;F)$ függvényhalmaz sup-norma szerinti lezártjával $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben.

Bizonyítás. Legyen $f \in \overline{\mathscr{K}}(T;F)$. Vegyünk tetszőleges $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zárussorozatot $\mathbb{R}^+$-ban. Az f függvény végtelenben eltűnő, ezért kiválaszthatjuk a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T \setminus K_n$ esetén $\|f(t)\| < \varepsilon_n$. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazva kiválasztunk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $0 \le \varphi_n \le 1$ és $K_n \subseteq [\varphi_n = 1]$. Ekkor a $\mathscr{K}(T;F)$-ben haladó $(\varphi_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a T halmazon. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\varepsilon_n < \varepsilon$, akkor minden $n > N$ természetes számra és $T \setminus K_n \ni t$-re $\|f(t) - (\varphi_n f)(t)\| = (1 - \varphi_n(t))\|f(t)\| < \varepsilon_n < \varepsilon$, míg $\varphi_n f = f$ a K_n halmazon.

Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{K}(T;F)$-ben, amely egyenletesen konvergál az $f : T \to F$ függvényhez a T halmazon. Az előző tétel alapján f folytonos. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $T \ni t$-re $\|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon$. Ha $t \in T \setminus supp(f_n)$, akkor $f_n(t) = 0$ miatt $\|f(t)\| \le \|f(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t)\| < \varepsilon$, vagyis az ε számhoz a $K := supp(f_n)$ kompakt halmaz olyan, hogy minden $T \setminus K \ni t$-re $\|f(t)\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy f végtelenben eltűnő. ■

A topologikus tér zárt részhalmazainak általánosított sorozatokkal való jellemzése alapján az előző állítás úgy is megfogalmazható, hogy lokálisan kompakt téren értelmezett, normált térbe ható korlátos függvény pontosan akkor végtelenben eltűnő és folytonos, ha egyenletesen approximálható kompakt tartójú folytonos függvényekkel. Tehát az előbbi állítás szintén az egyenletes approximáció témakörébe tartozik.

Definíció. Ha T halmaz és H olyan halmaz, amelynek elemei T-n értelmezett függvények, akkor azt mondjuk, hogy H *szétválasztó* T *felett*, ha minden $T \ni t, t'$-re, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $f \in H$, hogy $f(t) \neq f(t')$.

Például, a Hahn-Banach-tételből következik, hogy egy normált tér felett a folytonos lineáris funkcionálok halmaza szétválasztó (VI. fejezet, 2. pont). A definíció szerint nyilvánvaló, hogy ha T teljesen reguláris T_1-tér, akkor a $\mathscr{C}(T;[0,1])$ függvényhalmaz szétválasztó T felett.

A következő állításban megfogalmazzuk a pontonkénti approximáció problémája megoldhatóságának természetes *szükséges* feltételét, abban a speciális esetben, amikor lokálisan kompakt téren értelmezett, $\mathbb{K}$-ba érkező függvények approximációjáról van szó.

Állítás. Ha T lokálisan kompakt tér és $H \subseteq \mathscr{F}(T;\mathbb{K})$ olyan részhalmaz, hogy minden $f : T \to [0,1]$ kompakt tarójú folytonos függvényhez van olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$, akkor H szétválasztó T felett.

Bizonyítás. Ha $t, t' \in T$ és $t \neq t'$, akkor a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel szerint a $\{t\}$ kompakt halmazhoz és a $T \setminus \{t'\}$ nyílt halmazhoz van olyan $f : T \to [0,1]$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $\{t\} \subseteq [f = 1]$ (azaz $f(t) = 1$) és $supp(f) \subseteq T \setminus \{t'\}$, tehát $f(t') = 0$. A hipotézis szerint van olyan H-ban haladó $(f_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, hogy $f := \lim_{i,\ I} f_i$. Ekkor $1 = f(t) := \lim_{i,\ I} f_i(t)$, így van olyan $i_1 \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_1$, akkor $f_i > 1/2$. Ugyanakkor $0 = f(t') := \lim_{i,\ I} f_i(t')$, így van olyan $i_2 \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_2$, akkor $f_i < 1/2$. Az I előrendezett halmaz felfelé irányított, ezért van olyan $i \in I$, hogy $i \geq i_1, i_2$; ekkor $f_i(t) > 1/2 > f_i(t')$ és $f_i \in H$. ■

Definíció. Ha T halmaz, akkor egy $H \subseteq \mathscr{F}(T; \mathbb{R})$ függvényhalmazt T feletti *lineáris függvényhálónak* nevezünk, ha H lineáris altere a $\mathscr{F}(T; \mathbb{R})$ függvénytérnek, és minden $h \in H$ esetén a $|h| : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto |h(t)|$ függvény eleme H-nak.

Állítás. Ha T halmaz és $H \subseteq \mathscr{F}(T; \mathbb{R})$ lineáris altér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) H lineáris függvényháló T felett.

(ii) Minden $f, f' \in H$ esetén az $\inf(f, f') : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \min(f(t), f'(t))$ függvény eleme H-nak.

(iii) Minden $f, f' \in H$ esetén az $\sup(f, f') : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(f(t), f'(t))$ függvény eleme H-nak.

(iv) Minden $f \in H$ esetén a $f^+ : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(f(t), 0)$ függvény eleme H-nak.

(v) Minden $f \in H$ esetén a $f^- : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(-f(t), 0)$ függvény eleme H-nak.

Bizonyítás. Ha $f, f' : T \to \mathbb{R}$ függvények, akkor

$$\inf(f, f') = \frac{1}{2}(f + f' - |f - f'|), \quad \sup(f, f') = \frac{1}{2}(f + f' + |f - f'|),$$

$$\sup(f, f') = -\inf(-f, -f'), \quad f^+ = \sup(f, 0), \quad f^- = f^+ - f, \quad |f| = f + 2f^-.$$

Ezekből azonnal következik az állítás. ■

Ha H lineáris függvényháló a T halmaz felett és $(f_i)_{i \in I}$ tetszőleges nem üres véges rendszer H-ban, akkor a

$$\sup_{i \in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \max_{i \in I} f_i(t),$$
$$\inf_{i \in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \min_{i \in I} f_i(t)$$

függvények elemei H-nak. Ez az előző állításból az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval következik.

Jelölés. Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{R}$ azonosan 1 függvényt 1_T jelöli.

Tétel. (*Stone-tétel.*) Legyen T kompakt Hausdorff-tér és H olyan lineáris függvényháló T felett, hogy $1_T \in H \subseteq \mathscr{C}(T; \mathbb{R})$. A H halmaz pontosan akkor sűrű $\mathscr{C}(T; \mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint, ha H szétválasztó T felett.

Bizonyítás. Ha $T = \emptyset$, akkor az állítás triviálisan igaz (és érdektelen), ezért feltehető, hogy $T \neq \emptyset$. Csak az elégségesség szorul bizonyításra, tehát feltesszük, hogy H szétválasztó T felett.

Először megjegyezzük, hogy minden $t, t' \in T$ és $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ esetén, ha $t \neq t'$, akkor létezik olyan $f \in H$, hogy $f(t) = \alpha$ és $f(t') = \alpha'$. Valóban, a H halmaz szétválasztó T felett, tehát van olyan $h \in H$, hogy $h(t) \neq h(t')$; ekkor az $f := \left(\frac{\alpha h(t') - \alpha' h(t)}{h(t') - h(t)}\right).1_T + \left(\frac{\alpha' - \alpha}{h(t') - h(t)}\right).h \in H$ függvényre $f(t) = \alpha$ és $f(t') = \alpha'$ teljesül.

Legyen $f \in \mathscr{C}(T; \mathbb{R})$ rögzített függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $h \in H$, amelyre $|||f - h||| \leq \varepsilon$ teljesül.

Ha $t, t' \in T$ és $t \neq t'$, akkor létezik olyan $h \in H$, hogy $h(t) = f(t)$ és $h(t') = f(t')$. Ha $t, t' \in T$ és $t = t'$, akkor $h := f(t).1_T \in H$ olyan, hogy $h(t) = f(t)$ és $h(t') = f(t')$. Ezért kiválaszthatunk olyan $(h_{(t,t')})_{(t,t') \in T \times T}$ rendszert, hogy minden $(t, t') \in T \times T$ esetén $h_{(t,t')}(t) = f(t)$ és $h_{(t,t')}(t') = f(t')$.

Legyen $t' \in T$ rögzített pont. Ha $t \in T$, akkor $h_{(t,t')}(t) = f(t) < f(t) + \varepsilon$, vagyis $t \in [h_{(t,t')} - f < \varepsilon]$, és a $h_{(t,t')} - f : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, tehát a $[h_{(t,t')} - f < \varepsilon]$ halmaz nyílt környezete t-nek. A T kompaktsága miatt létezik olyan $(t_i)_{i \in I}$ véges rendszer T-ben, amelyre $T = \bigcup_{i \in I} [h_{(t_i,t')} - f < \varepsilon]$. Világos, hogy $I \neq \emptyset$, mert $T \neq \emptyset$. Legyen $h := \inf_{i \in I} h_{(t_i,t')}$; ekkor $h \in H$ és $t \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $h_{(t_i,t')}(t) < f(t) + \varepsilon$, tehát $h(t) < f(t) + \varepsilon$. Ugyanakkor $h(t') := \min_{i \in I} h_{(t_i,t')}(t') = f(t')$.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $t' \in T$ esetén van olyan $h \in H$, hogy minden $T \ni t$-re $h(t) < f(t) + \varepsilon$ és $h(t') = f(t')$. Kiválaszthatunk tehát olyan $(h_{t'})_{t' \in T}$ rendszert, hogy minden $T \ni t'$-re $h_{t'} \in H$, $h_{t'}(t') = f(t')$ és minden $T \ni t$-re $h_{t'}(t) < f(t) + \varepsilon$.

Ha $t' \in T$, akkor $h_{t'}(t') = f(t') > f(t') - \varepsilon$, vagyis $t' \in [h_{t'} - f > -\varepsilon]$, és a $h_{t'} - f : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, így $[h_{t'} - f > -\varepsilon]$ nyílt környezete t'-nek. A T kompaktsága miatt létezik olyan $(t'_j)_{j \in J}$ véges rendszer T-ben, hogy $T = \bigcup_{j \in J} [h_{t'_j} - f > -\varepsilon]$. Világos, hogy $J \neq \emptyset$, mert $T \neq \emptyset$. Értelmezzük a $h := \sup_{j \in J} h_{t'_j}$ függvényt. Ekkor $h \in H$, és $t \in T$ esetén van olyan $j \in J$, hogy $h_{t'_j}(t) > f(t) - \varepsilon$, tehát $h(t) > f(t) - \varepsilon$. Ugyanakkor minden $T \ni t$-re és $J \ni j$-re $h_{t'_j}(t) < f(t) + \varepsilon$, tehát $h(t) < f(t) + \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $T \ni t$-re $f(t) - \varepsilon < h(t) < f(t) + \varepsilon$, következésképpen $|||h - f||| \leq \varepsilon$. ■

Emlékeztetünk arra, hogy ha T halmaz, akkor az $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ függvényhalmaz a pontonként értelmezett összeadással, számmal vett szorzással és a szorzással ellátva *algebra* a $\mathbb{K}$ test felett (IV. fejezet, 2. pont); ennek részalgebráit nevezzük T feletti *függvényalgebráknak.* Tehát egy $A \subseteq \mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ halmaz pontosan akkor függvényalgebra T felett, ha minden $f, g \in A$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $f + g, fg, \lambda f \in A$ és $A \neq \emptyset$.

Megjegyezzük, hogy ha T halmaz és A lineáris altere $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$-nak, akkor A

pontosan akkor függvényalgebra T felett, ha minden $f \in A$ esetén $f^2 \in A$. Ez abból következik, hogy minden $f, g : T \to \mathbb{K}$ függvényre $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$.

Lemma. Minden $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmazhoz létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a K halmazon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$.

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy elegendő olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését igazolni, amelynek mindegyik tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény, és egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a $[-1, 1]$ intervallumon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$. Valóban, legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ilyen sorozat és $K \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges kompakt halmaz. Ekkor van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $K \subseteq [-c, c]$, és ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén bevezetjük a

$$\widetilde{p}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto c \cdot p_n\,(t/c)$$

függvényt, akkor $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek minden tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény, minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\widetilde{p}_n(0) = 0$, valamint

$$\sup_{t\in K} |\widetilde{p}_n(t) - |t|| \leq \sup_{t\in[-c,c]} |c \cdot p_n\,(t/c) - |t|| = c \cdot \sup_{t\in[-c,c]} |p_n\,(t/c) - |t/c|| =$$

$$= c \cdot \sup_{t\in[-1,1]} |p_n\,(t) - |t||\,,$$

és a jobb oldal tart 0-hoz, ha n tart végtelenhez, ezért $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a K halmazon.

(II) Megmutatjuk, hogy ha létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál a $\sqrt{\cdot}$ függvényhez a $[0, 1]$ intervallumon és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n(0) = 0$, akkor létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a $[-1, 1]$ intervallumon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$. Valóban, a $\left(q_n \circ id_{\mathbb{R}}^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat mindegyik tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(q_n \circ id_{\mathbb{R}}^2\right)(0) = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in [-1, 1]$ esetén $\left|q_n(t^2) - \sqrt{t^2}\right| = \left|q_n(t^2) - |t|\right|$, amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[-1,1]} \left|q_n(t^2) - |t|\right| \right) = 0,$$

vagyis $\left(q_n \circ id_{\mathbb{R}}^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál $|\cdot|_{\mathbb{R}}$-hez a $[-1, 1]$ intervallumon.

Ezért az (I) alapján elegendő ilyen tulajdonságú $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot találni.

(III) Legyen $\mathfrak{P}$ az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvények halmaza, és értelmezzük a

$$g : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}; \quad q \mapsto q + \frac{1}{2}\left(id_{\mathbb{R}} - q^2\right)$$

leképezést. Jelölje $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a g függvény és az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvény, mint kezdőpont által generált iterációs sorozatot. Tehát $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a sorozat, amelyre

q_0 az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvény, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény és

$$q_{n+1} = q_n + \frac{1}{2}\left(id_{\mathbb{R}} - q_n^2\right).$$

Megmutatjuk, hogy a $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra teljesülnek a (II)-ben megfogalmazott tulajdonságok, vagyis minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n(0) = 0$ és $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál az $\sqrt{\cdot}$ függvényhez a $[0,1]$ intervallumon, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|q_n(t) - \sqrt{t}\right|\right) = 0.$$

A definíció szerint $q_0(0) = 0$, és ha az $n \in \mathbb{N}$ számra $q_n(0) = 0$ teljesül, akkor $q_{n+1}(0) = q_n(0) + \frac{1}{2}(-q_n(0)^2) = 0$, ezért a teljes indukció elve alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n(0) = 0$.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $[0,1] \ni t$-re $0 \le q_n(t) \le \sqrt{t}$. Ez triviálisan teljesül, ha $n = 0$, mert minden $\mathbb{R} \ni t$-re $q_0(t) = 0$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $[0,1] \ni t$-re $0 \le q_n(t) \le \sqrt{t}$. Ekkor

$$\sqrt{t} - q_{n+1}(t) = \sqrt{t} - q_n(t) - \frac{1}{2}\left(t - q_n(t)^2\right) =$$

$$= \sqrt{t} - q_n(t) - \frac{1}{2}(\sqrt{t} - q_n(t))(\sqrt{t} + q_n(t)) = (\sqrt{t} - q_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t))\right),$$

és az indukciós hipotézis szerint $\sqrt{t} - q_n(t) \ge 0$, valamint $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t)) \le \frac{1}{2}(\sqrt{t} + \sqrt{t}) = \sqrt{t} \le 1$, ezért $\sqrt{t} - q_{n+1}(t) \ge 0$ teljesül, továbbá $0 \le q_n(t) \le \sqrt{t}$ alapján $q_{n+1}(t) = q_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - q_n(t)^2\right) \ge q_n(t) \ge 0$. Ebből az is látható, hogy a $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat monoton növő.

Ugyancsak teljes indukcióval igazoljuk, hogy $t \in [0,1]$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\sqrt{t} - q_n(t) \le \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}.$$

Ha $n = 0$, akkor itt triviális egyenlőség van, mert $q_0(t) = 0$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre teljesül ez az egyenlőtlenség. Ekkor az indukciós hipotézis és $q_n(t) \ge 0$ miatt

$$\sqrt{t} - q_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - q_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t))\right) \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t))\right) \le \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) \le \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}},$$

mert átrendezéssel triviálisan adódik, hogy

$$\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \le \frac{1}{2 + (n+1)\sqrt{t}}.$$

Nyilvánvaló, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in [0,1]$ esetén $\dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \leq \dfrac{2}{n}$, ezért $0 \leq \sqrt{t} - q_n(t) \leq \dfrac{2}{n}$, amiből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\sqrt{t} - q_n(t)\right| \leq \frac{2}{n}$$

teljesül, így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\sqrt{t} - q_n(t)\right| \right) = 0.$ ■

Jelölés. Megállapodunk abban, hogy ha T halmaz és $f : T \to \mathbb{K}$ függvény, akkor $\overline{f}$ jelöli a $T \to \mathbb{K};\ t \mapsto \overline{f(t)}$ függvényt, és az $\overline{f}$ függvényt az f *konjugáltjának* nevezzük.

Tétel. (*Stone-Weierstrass-tétel.*) Legyen T kompakt Hausdorff-tér és A olyan függvényalgebra T felett, amelyre $1_T \in A \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ és minden $f \in A$ esetén $\overline{f} \in A$. Az A halmaz pontosan akkor sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint, ha A szétválasztó T felett.

(**Megjegyzés**. Természetesen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén minden $A \ni f$-re $\overline{f} = f \in A$ automatikusan teljesül, de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén a konjugáltakra vonatkozó feltétel nem triviális és szükséges.)

Bizonyítás. Csak az elégségességet kell igazolunk, tehát feltesszük, hogy A szétválasztó T felett.

(I) Először a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetre bizonyítunk. Jelölje $\overline{A}$ az A halmaz sup-norma szerinti lezártját $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben. Ekkor $\overline{A}$ lineáris altere $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-nek, mert normált tér lineáris alterének lezártja lineáris altér. Továbbá, $1_T \in A \subseteq \overline{A}$ teljesül. Az A szétválasztó T felett, ezért $A \subseteq \overline{A}$ miatt $\overline{A}$ még inkább szétválasztó T felett. Ezért a Stone-tétel alapján elég azt igazolni, hogy $\overline{A}$ lineáris függvényháló T felett, vagyis minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Valóban, ha így volna, akkor a Stone-tétel alapján $\overline{A}$ sűrű volna $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint, ugyanakkor zárt is, tehát $\overline{A} = \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ teljesülne.

Megmutatjuk, hogy ha minden $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$ teljesül, akkor $\overline{A}$ lineáris függvényháló T felett. Valóban, legyen $f \in \overline{A}$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan A-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} |||f_n - f||| = 0$. A feltevés szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f_n| \in \overline{A}$, továbbá $||||f_n| - |f|||| \leq |||f_n - f|||$, ezért az $\overline{A}$-ben haladó $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a sup-normában konvergál $|f|$-hez. Ebből következik, hogy $|f| \in \overline{A}$, hiszen $\overline{A}$ zárt $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint.

Tehát elég azt igazolni, hogy $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$, vagyis $|f|$ egyenletesen approximálható a T halmazon A-beli függvényekkel. Legyen $f \in A$ rögzített. Az $Im(f)$ halmaz kompakt $\mathbb{R}$-ben, ezért az előző lemma szerint létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál az $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ függvényhez az $Im(f)$ halmazon. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|||p_n \circ f - |f|||| = \sup_{t\in T} |p_n(f(t)) - |f(t)|| = \sup_{\lambda\in Im(f)} |p_n(\lambda) - |\lambda|| = |||p_n - |\cdot|_{\mathbb{R}}|||,$$

tehát a $(p_n \circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a sup-norma szerint konvergál az $|f|$ függvényhez. Ugyanakkor minden $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(c_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n$, hogy $p = \sum_{k\in n} c_k id_{\mathbb{R}}^k$, következésképpen $p \circ f = \sum_{k\in n} c_k f^k \in A$, mert A valós függvényalgebra T felett és $1_T \in A$. Ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n \circ f \in A$, így $|f| \in \overline{A}$ teljesül.

(II) Most feltesszük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Legyen $A_{\mathbb{R}} := \{f \in A | Im(f) \subseteq \mathbb{R}\}$. Nyilvánvaló, hogy $A_{\mathbb{R}}$ valós függvényalgebra T felett, és $A_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$, valamint $1_T \in A_{\mathbb{R}}$. Továbbá, minden $f \in A$ esetén $\mathfrak{Re} \circ f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in A$ és $\mathfrak{Im} \circ f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in A$, ezért $\mathfrak{Re} \circ f, \mathfrak{Im} \circ f \in A_{\mathbb{R}}$. Ez azt jelenti, hogy minden $A \ni f$-hez léteznek olyan $f_1, f_2 \in A_{\mathbb{R}}$, amelyekre $f = f_1 + if_2$. Ebből triviálisan következik, hogy ha A szétválasztó T felett, akkor $A_{\mathbb{R}}$ is szétválasztó T felett. A valós függvényalgebrákra vonatkozó Stone-Weierstrass tételt (vagyis az (I) állítást) alkalmazva $A_{\mathbb{R}}$-re kapjuk, hogy ha A szétválasztó T felett, akkor $A_{\mathbb{R}}$ a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben. Ekkor $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ esetén minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz léteznek olyan $g_1, g_2 \in A_{\mathbb{R}}$, hogy $|||\mathfrak{Re} \circ f - g_1||| < \varepsilon/2$ és $|||\mathfrak{Im} \circ f - g_2||| < \varepsilon/2$, így a $g := g_1 + ig_2 \in A$ függvényre

$$|||f - g||| \le |||\mathfrak{Re} \circ f - g_1||| + |||\mathfrak{Im} \circ f - g_2||| < \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy A sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint. ■

Megjegyezzük, hogy a Stone-Weierstrass-tétel (I) részének bizonyításában szereplő $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ polinomiális függvénysorozatra *nem használtuk ki*, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$. Ha $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $K \subseteq [a, b]$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén p_n jelöli az $[a, b] \to \mathbb{R};\ t \mapsto |t|$ függvény n-edik *Bernstein-polinomját* (V. fejezet, 8. pont), akkor a $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a K halmazon, azonban *nem minden* $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül a $p_n(0) = 0$ egyenlőség.

Tétel. (*Stone-Weierstrass-tétel lokálisan kompakt terekre.*) Legyen T lokálisan kompakt tér és A olyan függvényalgebra T felett, amelyre $A \subseteq \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ és minden $f \in A$ esetén $\overline{f} \in A$. Az A halmaz pontosan akkor sűrű $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint, ha A szétválasztó T felett és minden $T \ni t$-hez van olyan $f \in A$, hogy $f(t) \neq 0$.

Bizonyítás. Csak az elégségességet kell igazolnunk, tehát feltesszük, hogy A szétválasztó T felett, és minden $T \ni t$-hez van olyan $f \in A$, hogy $f(t) \neq 0$. Legyen T' egypontú kompaktifikációja T-nek, és jelölje ω a végtelen távoli pontot T'-ben. Legyen

$$\widetilde{A} := \{\ c.1_{T'} + f^\circ \mid (c \in \mathbb{K}) \wedge (f \in A)\ \},$$

ahol $f \in A$ esetén f° jelöli az f függvény 0-val vett kiterjesztését T-ről T'-re, tehát $f^\circ(\omega) := 0$ és minden $T \ni t$-re $f^\circ(t) = f(t)$. Nyilvánvaló, hogy $\widetilde{A}$ olyan függvényalgebra T' felett, amelyre $1_{T'} \in \widetilde{A} \subseteq \mathscr{C}(T';\mathbb{K})$, valamint minden $\widetilde{A} \ni f$-re $\overline{f} \in \widetilde{A}$. Az A halmaz szétválasztó T felett, és minden $T \ni t$-hez van olyan $f \in A$, hogy $f(t) \neq 0$, ezért $\widetilde{A}$ szétválasztó T' felett. Valóban, $\widetilde{A}$ nyilvánvalóan szétválasztja a T pontjait, és ha $t \in T$, valamint $f \in A$ olyan, hogy $f(t) \neq 0$, akkor $f^\circ \in \widetilde{A}$ és $f^\circ(t) = f(t) \neq 0 = f^\circ(\omega)$. A Stone-Weierstrass tételt alkalmazzuk a T'

kompakt Hausdorff-térre és az $\widetilde{A}$ függvényalgebrára; tehát $\widetilde{A}$ sűrű $\mathscr{C}(T';\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint.

Legyen $f \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ rögzített függvény. Ekkor $f^\circ \in \mathscr{C}(T';\mathbb{K})$, tehát van olyan $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{K}$-ban és olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat A-ban, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |||c_n.1_{T'} + f_n^\circ - f^\circ||| = 0$. Ekkor a $(c_n.1_{T'} + f_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként is konvergens a T' halmazon, ezért $0 = f^\circ(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n + f_n^\circ(\omega)) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |||f_n^\circ - f^\circ||| = 0$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor nyilvánvalóan $|||f_n - f||| = |||f_n^\circ - f^\circ|||$, ezért f eleme az A halmaz sup-norma szerinti lezártjának. ∎

Emlékeztetünk arra, hogy ha T halmaz és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, akkor a

$$\sup_{i\in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \sup_{i\in I} f_i(t),$$
$$\inf_{i\in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \inf_{i\in I} f_i(t)$$

függvényeket az $(f_i)_{i\in I}$ függvényrendszer *felső* (illetve *alsó*) *burkolójának* nevezzük (VIII. fejezet, 6. pont). Itt a jobb oldalon álló szuprémumot és infimumot az $\overline{\mathbb{R}}$ rendezett halmazban kell venni.

Tétel. (*Dini-tétel.*) Legyen T lokálisan kompakt tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben haladó általánosított sorozat, amely monoton növő (tehát minden $I \ni i, j$-re, ha $i \leq j$, akkor $f_i \leq f_j$). Ha $f := \sup\limits_{i\in I} f_i \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, akkor $f = \lim\limits_{i,\ I} f_i$ és az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat *egyenletesen konvergens* a T halmazon, vagyis minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in I$, $i \geq i_\varepsilon$ és $t \in T$ esetén $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $t \in T$, akkor az $\mathbb{R}$-ben haladó $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított sorozat monoton növő, és a hipotézis szerint $\sup\limits_{i\in I} f_i(t) = f(t) < +\infty$, ezért $(f_i(t))_{i\in I}$ konvergens $\mathbb{R}$-ben és $f(t) = \lim\limits_{i,\ I} f_i(t)$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Először arra a speciális esetre bizonyítunk, amikor minden $I \ni i$-re $f_i \geq 0$. A hipotézis szerint f kompakt tartójú és minden $I \ni i$-re $0 \leq f_i \leq f$, ezért $supp(f_i) \subseteq supp(f)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i \in I$ esetén az f (előírt) folytonossága miatt az $\Omega_i(\varepsilon) := [f - f_i < \varepsilon]$ halmaz nyílt T-ben, és világos, hogy $supp(f) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i(\varepsilon)$. Ebből a $supp(f)$ kompaktsága miatt következik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz létezése, amelyre $supp(f) \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i(\varepsilon)$. Ugyanakkor az $(\Omega_i(\varepsilon))_{i\in I}$ általánosított halmazsorozat a tartalmazás tekintetében monoton növő, mert az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat monoton növő. Továbbá, az I előrendezett halmaz felfelé irányított, nem üres, és J véges, ezért van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in J$ esetén $i \leq i_\varepsilon$; ekkor $\bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i(\varepsilon) \subseteq \Omega_{i_\varepsilon}(\varepsilon)$ teljesül. Tehát $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén $supp(f) \subseteq \Omega_{i_\varepsilon}(\varepsilon) \subseteq \Omega_i(\varepsilon)$, ezért $T = \Omega_i(\varepsilon)$, hiszen f és f_i a $T \setminus supp(f)$ halmazon a 0-val egyenlők. Tehát ha $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$, akkor minden $T \ni t$-re

$f_i(t) - \varepsilon < f_i(t) \leq f(t) < f_i(t) + \varepsilon$, vagyis $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy az $(f_i)_{i \in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Most elvetjük azt a hipotézist, hogy minden $I \ni i$-re $f_i \geq 0$. Legyen $\alpha \in I$ rögzített és $I_\alpha := \{i \in I | i \geq \alpha\}$. Az I_α halmaz az I felett előrendezés leszűkítésével ellátva szintén felfelé irányított előrendezett halmaz, továbbá az $(f_i - f_\alpha)_{i \in I_\alpha}$ általánosított függvénysorozat $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben halad, monoton növő, és $\sup_{i \in I_\alpha}(f_i - f_\alpha) = \left(\sup_{i \in I_\alpha} f_i\right) - f_\alpha \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, mert nyilvánvalóan $\sup_{i \in I_\alpha} f_i = \sup_{i \in I} f_i$. Ugyanakkor minden $I_\alpha \ni i$-re $f_i - f_\alpha \geq 0$, ezért az előzőek alapján az $(f_i - f_\alpha)_{i \in I_\alpha}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon. Ebből azonnal következik, hogy az $(f_i)_{i \in I}$ általánosított függvénysorozat is egyenletesen konvergens a T halmazon. ■

A Dini-tétel gyakran alkalmazott speciális esete a következő: ha T lokálisan kompakt tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben haladó sorozat, amely monoton növő és $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, akkor f egyenlő az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvényével, és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Tétel. (*Kompakt terek metrizálhatósága.*) Ha T kompakt Hausdorff-tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(i) T metrizálható.

(ii) Minden M szeparábilis metrikus térre a $\mathscr{C}(T;M)$ függvénytér a sup-metrikával ellátva szeparábilis.

(iii) A $\mathscr{C}(T;[0,1])$ függvénytér a sup-metrikával ellátva szeparábilis.

(iv) Létezik olyan $H \subseteq \mathscr{C}(T;[0,1])$ megszámlálható halmaz, amely szétválasztó T felett.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Jelölje d_M az M metrikáját, és legyen d olyan metrika T felett, amely a T topológiáját generálja. Rögzítsünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozatot, és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$C_{m,n} := \{\, f \in \mathscr{C}(T;M) \mid (\forall\ (t,t') \in T \times T) : d(t,t') \leq \varepsilon_m \Rightarrow d_M(f(t), f(t')) \leq \varepsilon_n \,\}.$$

A (T,d) pár kompakt metrikus tér, ezért a Heine-tétel (V. fejezet, 8. pont) alapján minden $T \to M$ folytonos függvény egyenletesen folytonos a d és d_M metrikák szerint. Tehát minden $\mathbb{N} \ni n$-hez és $\mathscr{C}(T;M) \ni f$-hez van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $(t,t') \in T \times T$ esetén, ha $d(t,t') < \delta$, akkor $d_M(f(t), f(t')) < \varepsilon_n$; ugyanakkor $\lim_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$ miatt van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_m < \delta$, ezért $f \in C_{m,n}$. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathscr{C}(T;M) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{m,n}$. A T halmaz teljesen korlátos a d metrika szerint (V. fejezet, 5. pont), ezért kiválasztható olyan $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $T_m \subseteq T$ véges halmaz és $T = \bigcup_{t \in T_m} B_{\varepsilon_m}(t; d)$. Legyen $D \subseteq M$ megszámlálható sűrű halmaz (a d_M metrika szerint). Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén minden $\varphi : T_m \to D$ függvényre legyen

$$C_{m,n,\varphi} := \{\, f \in C_{m,n} \mid (\forall\ t \in T_m) : \ d_M(f(t), \varphi(t)) \leq \varepsilon_n \,\}.$$

Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $f : T \to M$ tetszőleges függvény, akkor $\overline{D} = M$ miatt minden $t \in T_m$ pontra $D \cap \overline{B}_{\varepsilon_n}(f(t); d_M) \neq \emptyset$, tehát a T_m végessége folytán $\prod_{t \in T_m} \left(D \cap \overline{B}_{\varepsilon_n}(f(t); d_M)\right) \neq \emptyset$, és ha φ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\varphi : T_m \to D$ olyan függvény, hogy minden $T_m \ni t$-re $d_M(f(t), \varphi(t)) \leq \varepsilon_n$. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re

$$C_{m,n} = \bigcup_{\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)} C_{m,n,\varphi}.$$

Értelmezzük most a

$$\Phi := \{\ (m, n, \varphi) \mid (m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)) \wedge (C_{m,n,\varphi} \neq \emptyset)\ \} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\{m\} \times \mathbb{N} \times \mathscr{F}(T_m; D))$$

halmazt. Minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\{m\} \times \mathbb{N} \times \mathscr{F}(T_m; D)$ megszámlálható halmaz, ezért Φ is megszámlálható. A kiválasztási axióma alkalmazásával vegyünk egy

$$\left(f_{(m,n,\varphi)}\right)_{(m,n,\varphi) \in \Phi} \in \prod_{(m,n,\varphi) \in \Phi} C_{m,n,\varphi}$$

elemet. Megmutatjuk, hogy az $\{f_{(m,n,\varphi)} | (m, n, \varphi) \in \Phi\}$ megszámlálható halmaz sűrű $\mathscr{C}(T; M)$-ben a d_M által meghatározott sup-metrika szerint. Legyen $f \in \mathscr{C}(T; M)$ rögzített, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\varepsilon_n \leq \varepsilon/4$. Láttuk, hogy

$$\mathscr{C}(T; M) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{m,n} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)} C_{m,n,\varphi} \right),$$

ezért vehetünk olyan $m \in \mathbb{N}$ számot és $\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)$ függvényt, hogy $f \in C_{m,n,\varphi}$. Ekkor $C_{m,n,\varphi} \neq \emptyset$, ezért $(m, n, \varphi) \in \Phi$. Állítjuk, hogy $\sup_{t \in T} d_M(f(t), f_{(m,n,\varphi)}(t)) \leq \varepsilon$. Legyen ugyanis $t \in T$ tetszőleges; ekkor $T = \bigcup_{s \in T_m} B_{\varepsilon_m}(s; d)$ miatt létezik olyan $s \in T_m$, hogy $t \in B_{\varepsilon_m}(s; d)$, vagyis $d(t, s) < \varepsilon_m$. A definíció szerint $C_{m,n,\varphi} \subseteq C_{m,n}$, ezért $f \in C_{m,n}$, így $d_M(f(t), f(s)) \leq \varepsilon_n$. Ugyanakkor a $C_{m,n,\varphi}$ halmaz definíciója, $f \in C_{m,n,\varphi}$ és $s \in T_m$ alapján $d_M(f(s), \varphi(s)) \leq \varepsilon_n$. Továbbá, $f_{(m,n,\varphi)} \in C_{m,n,\varphi}$, tehát $s \in T_m$ miatt $d_M\left(f_{(m,n,\varphi)}(s), \varphi(s)\right) \leq \varepsilon_n$, és $f_{(m,n,\varphi)} \in C_{m,n}$, valamint $d(t, s) < \varepsilon_m$ miatt $d_M\left(f_{(m,n,\varphi)}(t), f_{(m,n,\varphi)}(s)\right) \leq \varepsilon_n$. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$d_M(f(t), f_{(m,n,\varphi)}(t)) \leq d_M(f(t), f(s)) + d_M(f(s), \varphi(s)) +$$

$$+ d_M\left(\varphi(s), f_{(m,n,\varphi)}(s)\right) + d_M\left(f_{(m,n,\varphi)}(s), f_{(m,n,\varphi)}(t)\right) \leq 4\varepsilon_n \leq \varepsilon.$$

Ezért $\sup_{t \in T} d_M(f(t), f_{(m,n,\varphi)}(t)) \leq \varepsilon$ teljesül.

(ii)⇒(iii) Triviális, mert a $[0,1]$ intervallum az euklidészi metrikával ellátva szeparábilis.

(iii)⇒(iv) Ha $H \subseteq \mathscr{C}(T;[0,1])$ olyan halmaz, amely sűrű a sup-metrika szerint, akkor H szükségképpen szétválasztó T felett.

(iv)⇒(i) A (iv)-ből következik olyan $\mathscr{C}(T;[0,1])$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezése, hogy az $\{f_n|n\in\mathbb{N}\}$ függvényhalmaz szétválasztó T felett. Ekkor a

$$\varphi : T \to [0,1]^{\mathbb{N}}; \quad t \mapsto (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$$

függvény injektív és folytonos a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ feletti szorzattopológia szerint, mert ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $pr_n : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$; $f \mapsto f(n)$ az n-edik projekció-függvény, akkor $pr_n \circ \varphi = f_n : T \to [0,1]$ folytonos függvény. Az $Im(\varphi)$ topologikus altér Hausdorff-tér, és láttuk, hogy $\varphi : T \to Im(\varphi)$ folytonos bijekció. Tehát a T kompaktsága miatt φ *homeomorfizmus* a T topologikus tér és az $Im(\varphi)$ topologikus altér között. Ugyanakkor az $Im(\varphi)$ topologikus altér metrizálható, mert a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka is az. Ezért T metrizálható topologikus tér. ■