**Valószínűségszámítás zárthelyi**
**2016. május 6.**

**1.** Két szabályos kockát feldobunk. Jelentse $X$ a páros dobások számát, $Y$ pedig a dobott számok összegét. Adjuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlását! Függetlenek?
*Megoldás*: Az alábbi táblázatban az oszlopok tetején szerepelnek az $X$ lehetséges értékei, a sorok elején pedig az $Y$ értékkészletének megfelelő számok állnak. Az $(i,j)$ koordinátáknak megfelelő cellában a $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$ valószínűségek találhatók. $X \in B(2, \frac{1}{2})$.

| $X$ / $Y$ | 0 | 1 | 2 | $Y$ peremeloszlása |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ |
| 3 | 0 | $\frac{2}{36}$ | 0 | $\frac{2}{36}$ |
| 4 | $\frac{2}{36}$ | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ |
| 5 | 0 | $\frac{4}{36}$ | 0 | $\frac{4}{36}$ |
| 6 | $\frac{3}{36}$ | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{5}{36}$ |
| 7 | 0 | $\frac{6}{36}$ | 0 | $\frac{6}{36}$ |
| 8 | $\frac{2}{36}$ | 0 | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ |
| 9 | 0 | $\frac{4}{36}$ | 0 | $\frac{4}{36}$ |
| 10 | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ |
| 11 | 0 | $\frac{2}{36}$ | 0 | $\frac{2}{36}$ |
| 12 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| $X$ peremeloszlása | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

.

Látható, hogy $X$ *nem* független $Y$-tól, hiszen pl..$\mathbf{P}(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 2) \cdot \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{9}{36^2}$.

**2.** Az $X, Y$ valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x-y)^2 & ,0 < x,y < 1 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Mennyi az $a$ paraméter értéke? Számolja ki a két változó kovarianciáját.
*Megoldás*:

$$1 = a\int_0^1\int_0^1 x^2 - 2xy + y^2 dxdy = a\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - x^2y + xy^2\right]_0^1 dy = a\int_0^1 \frac{1}{3} - y + y^2 dy =$$

$$= a\left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 6$$

$$f_X(t) = f_Y(t) = 6\int_0^1 x^2 - 2xt + t^2 dx = 6\left[\frac{1}{3} - t + t^2\right] = 6t^2 - 6t + 2, 0 < t < 1$$

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \int_0^1 6t^3 - 6t^2 + 2tdt = \left[\frac{3t^4}{2} - 2t^3 + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{E}(XY) = 6\int_0^1\int_0^1 xy \cdot (x^2 - 2xy + y^2)dxdy =$$

$$= 6\int_0^1 \left[ \tfrac{x^4}{4}y - \tfrac{2x^3}{3}y^2 + \tfrac{x^2}{2}y^3 \right]_0^1 dy =$$

$$= 6\int_0^1 \tfrac{y}{4} - \tfrac{2y^2}{3} + \tfrac{y^3}{2}dy = 6\left[ \tfrac{y^2}{8} - \tfrac{2y^3}{9} + \tfrac{y^4}{8} \right]_0^1 = 6 \cdot (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9}) = \tfrac{1}{6}$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{12}$$

**3**. Egyszerre dobálunk fel ismételten egy szabályos kockát és egy szabályos pénzérmét. Akkor állunk meg, amikor azt tapasztaljuk, hogy a kockán 6-os van és/vagy a pénzen fej. Mekkora annak a valószínűsége, hogy úgy fogjuk befejezni a dobás-sorozatot, hogy 6-ost kaptunk a kockán és a pénzen írást.

*Megoldás*: Jelölje $X$ az első 6-osig tartó dobásszámot, $Y$ az első *fejig* tartó dobásszámot. A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{5^{i-1}}{12^i} = \tfrac{1}{12}\sum_{i=0}^{\infty}(\tfrac{5}{12})^i = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{5}{12}} = \tfrac{1}{7}$$

**4**. Legyenek $X \in B(2, \tfrac{1}{3})$ és $Y \in Po(1)$ függetlenek. Legyen továbbá $Z = X - Y$ és $V = 2X + Y$. Számolja ki $Z$ és $V$ korrelációs együtthatóját.

*Megoldás*: $\sigma^2 Z = \sigma^2 X + \sigma^2 Y = \tfrac{4}{9} + 1 = \tfrac{13}{9}, \sigma^2 V = 4\sigma^2 X + \sigma^2 Y = \tfrac{16}{9} + 1 = \tfrac{25}{9}$

$\operatorname{cov}(Z, V) = 2\sigma^2 X - \sigma^2 Y = \tfrac{8}{9} - 1 = -\tfrac{1}{9}$

$\mathrm{R}(Z, V) = \frac{\operatorname{cov}(Z,V)}{\sigma Z \cdot \sigma V} = \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{5}{3}} = -\tfrac{1}{65}\sqrt{13} = -0.05547$

**5**. Legalább hány megfigyelés kell ahhoz, hogy egy 2-nél nem nagyobb szórású valószínűségi változó értékeinek átlaga 95%-os valószínűséggel a várható érték 0,1 sugarú környezetébe essen?

*Megoldás*: A Csebisev-egyenlőtlenségből: $\mathbf{P}(|\bar{X}_n - m| < 0,1) \geq 1 - \frac{\sigma^2 X}{n(0,1)^2} =$

$= 1 - \frac{4}{n \cdot 0,1^2} \geq 0,95 \Rightarrow 0,05 \geq \frac{4}{n \cdot 0,1^2} \Rightarrow n \geq \frac{4}{0,05 \cdot 0,1^2} = 8000$