Modell: a valóságos rendszer leképezése

Cél: folyamatok tanulmányozása

Probléma: a lényeges paraméterek kiválasztása

Modell típusok:

- fizikai (eredeti rendszer, kisminta, hibrid)
- matematikai (egyenleteken alapul)
- numerikus (alkalmazás)

H.elmélet tárgya: különböző rendszerek, folyamatok közötti hasonlóság felismerése, a hasonlóság feltételeinek megállapítása, a hasonlóság felhasználása.

Két rendszer v. folyamat akkor hasonló ha a két rendszer megfelelő paraméterei között lineáris kapcsolat van.

$$g(x_1\ x_2 \dots x_n) = 0$$

$$h(y_1, y_2 \dots y_n) = 0$$

$$\frac{x_1}{y_1} = c_1 \quad \dots \quad \frac{x_n}{y_n} = c_n \Rightarrow \text{leképezési léptékei}$$

A léptékeknek nem kell megegyezniük, de nem választhatók szabadon.

A fizikai jelenségeket leíró egyenletek tagjainak dimenziója azonos (Fourier szabály)

Mértékegységek: - alapvetőek (alapegységek)
- leszármaztatottak

Dimenzió formula: $[d] = [a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}]$

Pl: $Y = x + n \ln (V^k \cdot Z^s)$

$[V] = [a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \cdot c^{\gamma_1}]$

$[Z] = [a^{\alpha_2} \cdot b^{\beta_2} \cdot c^{\gamma_2}]$

Fizikai folyamat $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \cdot k + \alpha_2 \cdot s &= 0 \\ \beta_1 \cdot k + \beta_2 \cdot s &= 0 \\ \gamma_1 \cdot k + \gamma_2 \cdot s &= 0 \end{aligned}\right\} \text{abszolút szám}$$

A fizikai folyamatokat leíró egyenletek homogének. A homogenitás feltétele:

$f(x, y, z \dots) = 0$

$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z \dots) = \lambda^n f(x, y, z \dots)$

Hasonlósági tételek

(1) RE1 és RE2 hasonlók, akkor mindig alkotható a rendszert jellemző paraméterekből olyan kombinációk, amelyek számértéke mindkét rendszernél megegyezik. Ezek a kombinációk a hasonlósági invariánsok.

A RE1-et leíró egyenlet:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = 0 = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j$$

A RE2-t leíró egyenlet:

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n = 0 = \sum_{j=1}^{n} \phi_j$$

Felt: $\varphi_n \neq 0$; $\phi_n \neq 0$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_n} + \dots + \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} + 1 = 0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi_j}{\varphi_n}$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_n} + \dots + \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_j = f(P_1, P_2, \dots P_m) & P_1 \dots P_m \\ \phi_j = f(R_1, R_2, \dots R_m) & R_1 \dots R_m \end{array}\right\}$$

a két rendszert jellemző paraméterek

Ha a két rendszer hasonló, akkor

$$R_1 = m_1 P_1 \quad \dots \dots \quad R_m = m_m P_m$$

$$\varphi_j = f(P_1, P_2 \dots P_m) = f\left(\frac{R_1}{m_1}, \frac{R_2}{m_2}, \dots \frac{R_m}{m_m}\right) = N_j \phi_j$$

$$\varphi_1 = N_1 \phi_1 \quad ; \quad \varphi_2 = N_2 \phi_2 ; \;\cdots\; \varphi_n = N_n \phi_n$$

$$1 + \frac{N_1}{N_n} \cdot \frac{\phi_1}{\phi_n} + \frac{N_2 \phi_2}{N_n \phi_n} + \cdots + \frac{N_{n-1} \phi_{n-1}}{N_n \phi_n} = 0$$

Homogenitás $\Rightarrow$ $\dfrac{N_1}{N_n} = \dfrac{N_2}{N_n} = \cdots \dfrac{N_{n-1}}{N_n} = 1$

A φ és ϕ rendszerek egyenletei azonosságot adnak, tehát páronként

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_n} = \frac{\phi_1}{\phi_n} \; , \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_n} = \frac{\phi_2}{\phi_n} \quad \text{stb}$$

Hasonló rendszerekben tehát a megfelelő

$\pi = \text{idem} = \dfrac{\varphi_j}{\varphi_n} = \dfrac{\phi_j}{\phi_n}$. Ezeket nevezzük hasonlósági invariánsnak.

<u>Ha</u> $\pi_k = \text{idem}$, akkor $\dfrac{1}{\pi_k}$ is az

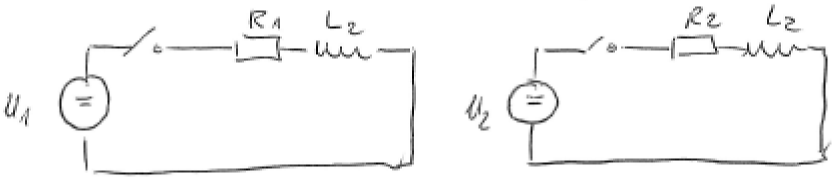
továbbá $k\pi_k$ is – " –

<u>Ha</u> $\pi_k = \text{idem}$ és $\pi_j = \text{idem}$

akkor $\pi_k \cdot \pi_j = \text{idem}$

és $\dfrac{\pi_k}{\pi_j} = \text{idem}$

Példa: R-L kör egyenfeszültségre kapcsolásának hasonlósági feltétele?



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 \qquad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2$$

Legyen a két áramkör hasonló!

$$u_1 = m_u \cdot u_2$$
$$i_1 = m_i \cdot i_2$$
$$L_1 = m_L \cdot L_2$$
$$R_1 = m_R \cdot R_2$$
$$t_1 = m_t \cdot t_2$$

$$m_u \cdot u_2 = m_L \cdot L_2 \cdot \frac{m_i \, di_2}{m_t \cdot dt_2} + m_i \, i_2 \cdot m_R \cdot R_2$$

$$m_u \cdot u_2 = m_L \frac{m_i}{m_t} \cdot L_2 \frac{di_2}{dt_2} + m_i \cdot m_R \cdot i_2 R_2$$

Homogenitásból következik:

$$m_u = \frac{m_L \cdot m_i}{m_t} = m_i m_R$$

$$\frac{m_u}{m_i m_R} = \frac{m_L \cdot \cancel{m_i}}{m_t \cdot \cancel{m_i} m_R} = 1$$

$$\frac{m_u}{m_i \cdot m_R} = 1 = \frac{\frac{u_1}{u_1}}{\frac{i_1}{i_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}}$$

A két rendszerben $\frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{u_2}{i_2 R_2} = \boxed{\tilde{\Pi}_1 = \frac{u}{iR}}$

Továbbá

$$\frac{m_L}{m_t \cdot m_R} = 1 = \frac{\frac{L_1}{L_2}}{\frac{t_1}{t_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}}$$

A két rendszerben: $\frac{L_1}{R_1 t_1} = \frac{L_2}{R_2 t_2} = \boxed{\Pi_2 = \frac{L}{Rt}}$

2 tétel

A fizikai folyamatokat leíró egyenleteket mindig lehetséges olyan alakra hozni, hogy azok a folyamatot befolyásoló paraméterekből alkotott hasonlósági invariánsok közötti összefüggést fejezzék ki.

Ha az egyenletben szereplő paraméterek száma: m; a független paraméterek száma: k; akkor a hasonlósági invariánsok száma: m − k

Segédtétel: ha m − k − 1 invariáns megegyezik, a fennmaradó egy invariáns is azonos értékű.

A jelenséget leíró egyenlet az $(m-k)$ számú invariáns közötti összefüggést adja meg.

$$f(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{m-k}) = 0 \quad \text{alakban}$$

Innen pl: $\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3, \dots \pi_{m-k})$

A (2.) tétel bizonyítása:

A folyamatot leíró egyenlet: $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = 0$

φ_j a P rendszerparaméterek homogén függvénye.

A folyamatot leíró egyenlet: $f(P_1, P_2, \dots P_m) = 0$ alakúra hozható

Az egyenlet paramétereit felírjuk a saját alapegységére vonatkoztatva (paraméterenként)

$$f\left(\frac{P_1}{P_{a1}}, \frac{P_2}{P_{a2}}, \dots \frac{P_m}{P_{am}}\right) = 0$$

Alapegységek szabadon választhatók a k független paraméter számának megfelelő számban.

A független paraméterek számának megállapítása dimenzióanalízissel történik.

Alkalmazzuk a dimenzióformulát:

A P_1 paraméter dimenziója: $[P_1] = [a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \dots q^{\xi_1}]$

Felírjuk valamennyi paraméter dimenzióját

$$[P_1] = [a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \dots q^{\xi_1}]$$
$$[P_2] = [a^{\alpha_2} \cdot b^{\beta_2} \dots q^{\xi_2}]$$
$$\vdots$$
$$[P_m] = [a^{\alpha_m} \cdot b^{\beta_m} \dots q^{\xi_m}]$$

Független paraméterek: amelyek dimenziója egymásból nem származtatott.
Képezzük a dimenziómátrixot ([D]):

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \xi_2 \\ \vdots & & \\ \alpha_m & \beta_m & \xi_2 \end{bmatrix}$$

A D mátrix rangja = független paraméterek számával

Ha k ismert, kiválasztjuk a k független paramétert ($P_1 - P_k$) és ezek dimenzióformuláit logaritmizálva felírjuk:

$$\ln[p_1] = \alpha_1 \ln[a] + \beta_1 \ln[b] + \dots \xi_1 \ln[q]$$

$$\vdots$$

$$\ln[p_k] = \alpha_k \ln[a] + \beta_k \ln[b] + \dots \xi_k \ln[q]$$

Megoldjuk az egyenletrendszert $\ln[a]$, $\ln[b]$, $\ln[q]$-ra

$$\ln[a] = \frac{\begin{vmatrix} \ln[p_1] & \beta_1 \dots \xi_1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \ln[p_k] & \beta_k \dots \xi_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \xi_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \dots & \xi_k \end{vmatrix}} = \ln[p_1]\frac{A_{11}}{D} + \ln[p_2]\frac{A_{21}}{D} + \dots + \ln[p_k]\frac{A_{k1}}{D}$$

Hatványalakban:

$$[a] = [p_1]^{\frac{A_{11}}{D}} \cdot [p_2]^{\frac{A_{21}}{D}} \cdot \ldots \cdot [p_k]^{\frac{A_{k1}}{D}}$$

$$\vdots$$

$$[q] = [p_1]^{\frac{A_{1k}}{D}} \cdot [p_2]^{\frac{A_{2k}}{D}} \cdot \ldots \cdot [p_k]^{\frac{A_{kk}}{D}}$$

Eredmény: az alapegységek a k független paraméter dimenziójával kifejezve.

Behelyettesítve $[a], [b], \ldots [q]$-t az $(m-k)$ nem független paraméter dimenzióformulájába

$$[p_{k+1}] = [p_1]^{\frac{D_{1,k+1}}{D}} \cdot [p_2]^{\frac{D_{2,k+1}}{D}} \cdot \ldots \cdot [p_k]^{\frac{D_{k,k+1}}{D}}$$

$$[p_{k+2}] = [p_1]^{\frac{D_{1,k+2}}{D}} \cdot [p_2]^{\frac{D_{2,k+2}}{D}} \cdot \ldots \cdot [p_k]^{\frac{D_{k,k+2}}{D}}$$

$$\vdots$$

a.) Válasszuk az első k független paraméter alapmennyiségét egyenlőnek a fizikai mennyiséggel.

$$P_{a1} = P_1 \;, \quad P_{a2} = P_2 \;; \ldots \quad P_{ak} = P_k$$

b.) Az $(m-k)$ függő paraméterek alapegységeit a független paraméterekkel fejezzük ki

$$f\Big(\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{k \text{ darab}} \;\; \underbrace{\frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} \cdot P_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot P_k^{x_k}} ; \ldots \frac{P_m}{P_1^{z_1} \cdot P_2^{z_2} \cdots P_k^{z_k}}}_{(m-k) \text{ darab}}\Big) = 0$$

$x_1 \dots x_k$ és $z_1 \dots z_k$ hatványkitevők

pl: $x_2 = \dfrac{D_{2,k+1}}{D}$

$z_2 = \dfrac{D_{2,m}}{D}$

Állítás:
Az $(m-k)$ darab 1-től különböző értékű tört adják a hasonlósági invariánsokat.

Két hasonló jelenség egyenletét vizsgáljuk:

$$f\left(1, 1, \dots 1, \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} P_2^{x_2} \dots P_k^{x_k}}, \dots \frac{P_m}{P_1^{z_1} P_2^{z_2} \dots P_k^{z_k}}\right) \doteq 0$$

$$f\left(1, 1, \dots 1, \frac{R_{k+1}}{R_1^{x_1} R_2^{x_2} \dots R_k^{x_k}}, \dots \frac{R_m}{R_1^{z_1} R_2^{z_2} \dots R_k^{z_k}}\right) = 0$$

Mivel a két jelenség hasonló:

$$R_1 = m_1 P_1$$
$$\vdots$$
$$R_m = m_m P_m$$

Az R paraméterekkel jellemzett folyamat egyenletének $(k+1)$-edik paraméter-hányadosa

$$\frac{m_{k+1} P_{k+1}}{(m_1 P_1)^{x_1} \cdot (m_2 P_2)^{x_2} \dots (m_k P_k)^{x_k}}$$

$$\frac{m_{k+1}}{m_1^{x_1} \cdot m_2^{x_2} \dots m_k^{x_k}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\frac{\dfrac{R_{k+1}}{P_{k+1}}}{\left(\dfrac{R_1}{P_1}\right)^{x_1}\left(\dfrac{R_2}{P_2}\right)^{x_2}\cdots\left(\dfrac{R_k}{P_k}\right)^{x_k}} = 1$$

Tehát:

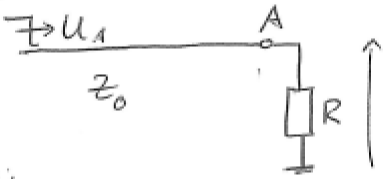
$$\frac{R_{k+1}}{R_1^{x_1} R_2^{x_2} \cdots R_k^{x_k}} = \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_1} P_2^{x_2} \cdots P_k^{x_k}} = \text{idem}$$

Az eljárás tehát nemcsak a hasonlósági invariánsok számát adja meg, hanem az invariánsokat is. Akkor is alkalmazható a módszer, ha nem ismerjük a folyamatot leíró egyenletet, csak a folyamatot befolyásoló paramétereket.

Példa:

Felt: nem ismerjük a hullámvisszaverődés törvényszerűségeit (egyenleteit)

Vizsgáljuk az alábbi hálózatot:



$u_A = ?$ $\quad u_A = f(u_1, z_0, R)$

Eredmény:

3 diagram görbesereg ⇒ nehézkes

A kísérlet tervezésekor:

Paraméterek száma: 4 (u_1, z_0, u_A, R)

Független paraméterek száma: 2 (pl u_1, R)

Két dimenziónélküli hányados képezhető:

$$\frac{u_1}{u_A} = \Pi_1 \quad \text{és} \quad \frac{Z}{R} = \Pi_2$$

$$\frac{u_1}{u_A} = f\left(\frac{Z}{R}\right)$$

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

Egyenlettel is belátható:

$$u_A = u_1 \cdot \frac{2R}{R+Z}$$

$$\frac{u_1}{u_A} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{Z}{R}\right)$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \Pi_2\right) = f(\Pi_2)$$

Kritériális koordináta rendszer

Szigetelési veszteség előre becslése

A kritériális koordinátarendszer tengelyei a szigetelési veszteséget befolyásoló paraméterből alkotott hasonlósági invariánsok

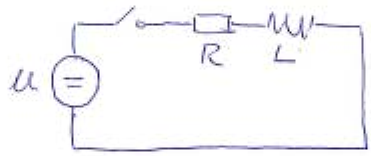
$$\Pi_1 = \frac{P_V}{\varepsilon f U_0^2} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{U}{U_0}$$

P_V : szigetelési veszteség

U_0 : a szigetelés kezdeti feszültsége

ε_0 : dielektromos állandó

f : frekvencia



Határozzuk meg a dimenzióanalízis módszerével a hasonlósági invariánsokat!

Lépések: 1., meghatározzuk a paraméterek számát:

$$m=5\ (i,\ u,\ R,\ L\ t)$$

2. Meghatározzuk a független paraméterek számát.

Dimenziómátrix

$$\begin{array}{c} \\ i \\ u \\ R \\ L \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & M & T & I \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k=3$$

$$D = 2$$

A hasonlósági invariánsok száma: $m-k=5-3=2$

Felvéve a független paramétereknek $(u,\ R,\ t)$-t

A folyamatot meghatározó egyenlet alakja:

$$f\left(\frac{u}{u_a},\ \frac{R}{R_a},\ \frac{t}{t_a},\ \frac{i}{\underbrace{u_a^{x_1}\cdot R_a^{x_2}\cdot t_a^{x_3}}_{=\ i_a}},\ \frac{L}{\underbrace{u_a^{z_1}\cdot R_a^{z_2}\cdot t_a^{z_3}}_{=\ L_a}}\right)=0$$

$$\begin{array}{c} u \\ R \\ t \end{array}\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 1$$

$$\begin{array}{c} i \\ L \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = -1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{D} = 0$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 0 \; ; \quad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 1$$

$$z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{D} = 1$$

A nem független paraméterek dimenziója a függetlenekkel kifejezve

$$[i_a] = u^{1} \cdot R^{-1} \cdot t^{0}$$

$$[L_a] = u^{0} \cdot R^{1} \cdot t^{1}$$

Az egyenlet:

$$f\left(1, 1, 1, \frac{i}{u R^{-1}}, \frac{L}{R \cdot t}\right) = 0$$

A hasonlósági invariánsok:

$$\pi_1 = \frac{iR}{u} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{L}{Rt}$$

3. Tétel

Két folyamat hasonlóságának szükséges és elégséges feltétele:

1., A hasonlósági invariánsok számszerű megegyezése mindkét folyamatnál, valamint

2., A kezdeti feltételek között a léptékek által meghatározott aránypár álljon fenn

Bizonyítás:

Hasonlóság szüks. és elégs. felt:

lépték: $\frac{P_i}{R_i} = m_i$

k független paraméter $\Rightarrow$ k lépték szabadon választható

m-k lépték mindkét rendszerben való megegyezése:

$$\frac{m_{k+j}}{m_1^{y_1} \cdots m_k^{y_k}} = 1 \qquad \text{m-k darab összefüggés}$$

nevező léptékei szabadon választhatók, a számláló következmény, tehát a többi (m-k) lépték kötött

A hasonlósági invariánsok meghatározási módjai

1. Az egyenletet nem ismerjük

   Dimenziómátrix

2.) Az egyenletet ismerjük.

   - Bármely taggal osztható.
   - Ha transzcendens fv.-t tartalmaz az egyenlet: az argumentum hasonlósági invariáns n tagból álló egyenlet + „a" a transzcendens függvények száma.
   - A differenciál és integrál jelekre nem kell tekintettel lenni
   - A hasonlósági invariánsok száma: n − 1 + a

A két módszer összehasonlítása:

a.) A dimenziómátrix módszerrel kapott invariánsok az alapesetek

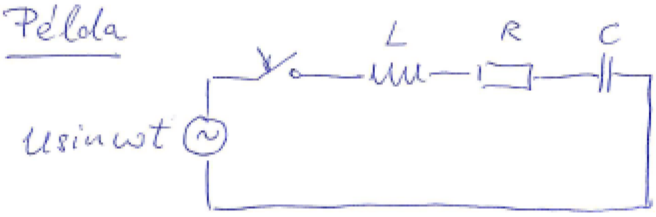
b.) A transzcendens fv. argumentumában szereplő invariáns az egyenlet végigosztás esetén változatlan, míg a dimenziómátrix módszernél nem. Ez lehet előny.

c.) Ha az egyenlet nem ismert, a paramétereket „érzés" alapján vesszük fel, ez okozhat hibát.

III. táblázat

Függetlennek felvett paraméterek	Dimenziómátrix alapján				Végigosztással				Végigosztás módja
					alapvariánsok			transzcendens	
	π_1	π_2	π_3	π_4	π_1	π_2	π_3	π_4	
u, R, C	$\frac{iR}{u}$	$\frac{L}{R^2C}$	$\frac{t}{RC}$	$RC\omega$	$\frac{L.i}{t.u}$	$\frac{i\,t}{uC}$	$\frac{iR}{u}$	ωt	$\frac{\varphi_j}{\varphi_1}$
u, R, L	$\frac{iR}{u}$	$\frac{R^2C}{L}$	$\frac{Rt}{L}$	$\frac{\omega L}{R}$	$\frac{t.u}{iL}$	$\frac{t^2}{L.c}$	$\frac{Rt}{L}$	ωt	$\frac{\varphi_j}{\varphi_2}$
i, C, t	$\frac{uC}{it}$	$\frac{RC}{t}$	$\frac{LC}{t^2}$	ωt	$\frac{u\,C}{i.t}$	$\frac{LC}{t^2}$	$\frac{RC}{t}$	ωt	$\frac{\varphi_j}{\varphi_3}$
i, L, ω	$\frac{U}{iL\omega}$	$\frac{R}{L\omega}$	$CL\omega^2$	ωt	$\frac{u}{i\,R}$	$\frac{L}{R\,t}$	$\frac{t}{RC}$	ωt	$\frac{\varphi_j}{\varphi_4}$

<u>Példa</u>



Hasonlósági invariánsok meghatározása
<u>egyenlet végigosztás</u> módszerrel

$$u \sin \omega t = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

tagok száma: $n = 4$
transzc. fv. $a = 1$
idemek száma: $i = n - 1 + a = 4$

$$\pi_1 = \omega t;\quad \pi_2 = \frac{Li}{ut};\quad \pi_3 = \frac{Ri}{u};\quad \pi_4 = \frac{it}{uC}\quad \Big| \, /:u$$

<u>dimenziómátrix</u> módszerrel

$$m = 7\ (u,\ i,\ R,\ C,\ L,\ t,\ \omega)$$

Mátrix rangja:
$$R_D = 3$$
Hasonlósági invariánsok száma:
$$i = m - k = 7 - 3 = 4$$

	L	M	T	i
u	2	1	-3	-1
R	2	1	-3	-2
C	-2	-1	4	2
i	0	0	0	1
L	2	1	-2	-2
t	0	0	1	0
ω	0	0	-1	0

Választunk

i	0	0	1
L	2	-2	-2
ω	0	-1	0

$D = +1(-2) = -2$

u	2	-3	-1
R	2	-3	-2
C	-2	4	2
t	0	1	0

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{u}{iL\omega} & \pi_4 &= \omega t \\ \pi_2 &= \frac{R}{L\omega} \\ \pi_3 &= CL\omega^2 \end{aligned}}$$

$$f\left(1, 1, 1, \frac{u}{i_a^{x_1} L_a^{x_2} \omega_a^{x_3}}; \frac{R}{i_a^{y_1} L_a^{y_2} \omega_a^{y_3}}; \frac{C}{i_a^{w_1} L_a^{w_2} \omega_a^{w_3}}; \frac{t}{i_a^{z_1} L_a^{z_2} \omega_a^{z_3}}\right)$$

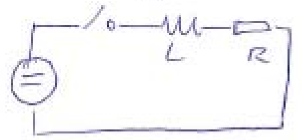
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = +1; \quad x_2 = \frac{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}}{-2} = +1; \quad x_3 = \frac{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{matrix}}{-2} = +1$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0 \qquad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \qquad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$w_1 = \frac{\begin{matrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}}{-2} = 0 \qquad w_2 = \frac{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}}{-2} = -1 \qquad w_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = -2$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0 \qquad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0 \qquad z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -1$$

Egyszerű áramkörök tranziens folyamatainak hasonlósága



$$u = iR + L\frac{di}{dt} \quad /:iR$$

$$\frac{u}{iR} = 1 + \frac{L}{iR}\frac{di}{dt}$$

$$\pi_1 = \frac{u}{iR} = \frac{\frac{u}{R}}{i} = \frac{i_\infty}{i} \; ; \quad \pi_2 = \frac{L}{Rt} = \frac{\frac{L}{R}}{t} = \frac{T}{t}$$

Legyen két különböző paraméterű L-R kör

$$\pi_1 = \frac{i_{1\infty}}{i_1} = \frac{i_{2\infty}}{i_2} \Rightarrow \frac{i_{1\infty}}{i_{2\infty}} = \frac{i_1}{i_2} = m_i$$

$$\pi_2 = \frac{T_1}{t_1} = \frac{T_2}{t_2} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{t_1}{t_2} = m_t$$

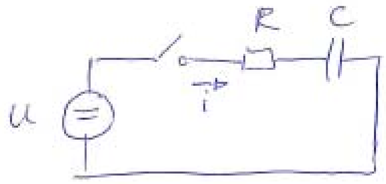
π_1 : az áramléptéket szabja meg

π_2 : az időléptéket szabja meg

Az m_i és m_t egymástól függetlenül, szabadon választható, a két feltételt minden soros R-L kör. egyenfeszültségre kapcsolása teljesíti:

önmodellező folyamat

A hasonlósági invariánsok teljesülése nem kritériuma a hasonlóságnak, hanem a léptéket szabják meg.



$$u = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt \quad /:iR$$

$$\frac{u}{iR} = 1 + \frac{1}{iRC}\int i\,dt$$

$$\Pi_1 = \frac{u}{iR} = \frac{\frac{u}{R}}{i} = \frac{i_0}{i}$$

$$\Pi_2 = \frac{t}{RC} = \frac{t}{T}$$

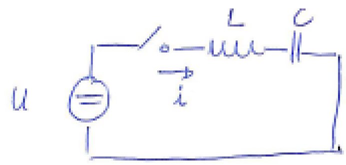
i_0 : áram $t = 0$ -ban

$T = RC$ időállandó

A hasonlósági invariánsok csupán az áram és idő léptéket határozzák meg, nem kritériumai a hasonlóságnak.

$$m_i = \frac{i_{01}}{i_{02}} \; ; \quad m_t = \frac{T_1}{T_2}$$

Önmodellező folyamatról van szó.



$$u = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \quad \Big/ : L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{1}{L\frac{di}{dt}}\,u = 1 + \frac{\frac{1}{C}\int i\,dt}{L\frac{di}{dt}}$$

$$\pi_1 = \frac{ut}{Li} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{t^2}{LC}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_2^* = \sqrt{\pi_2} = \frac{t}{\sqrt{LC}} = t\omega_0$$

π_1-ből az áramlépték adódik:

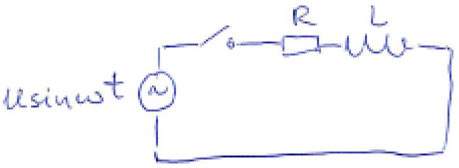
$$\frac{u_1 t_1}{L_1 i_1} = \frac{u_2 t_2}{L_2 i_2} \Rightarrow m_i = \frac{i_1}{i_2} = \frac{u_1 t_1 L_2}{u_2 t_2 L_1}$$

$$m_i = m_u \cdot m_t \cdot \frac{1}{m_L}$$

π_2^*-ből az időlépték adódik: $t_1\omega_{01} = t_2\omega_{02}$

$$m_t = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}$$

Ez a folyamat is önmodellező



$$u \sin\omega t = iR + L\frac{di}{dt} \quad / iR$$

$$\frac{u}{iR}\sin\omega t = 1 + \frac{L}{iR}\frac{di}{dt}$$

$\pi_1 = \omega t$; $\pi_2 = \frac{L}{Rt}$; $\pi_3 = \frac{u}{iR}$

Áramlépték (π_3): $\frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{u_2}{i_2 R_2} \Rightarrow m_i = \frac{i_1}{i_2} = \frac{u_1 R_2}{u_2 R_1}$

Az időlépték π_1 alapján: $\omega_1 t_1 = \omega_2 t_2 \Rightarrow m_t^{\pi_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

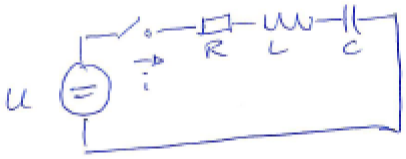
Az időlépték π_2 alapján: $\frac{L_1}{R_1 t_1} = \frac{L_2}{R_2 t_2} \Rightarrow m_t^{\pi_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{L_1 R_2}{L_2 R_1} = \frac{T_1}{T_2}$

Ha $m_t^{\pi_1} = m_t^{\pi_2}$ akkor hasonló a két folyamat, mert csak egy időlépték lehet.

Tehát a hasonlóság feltétele: $m_t^{\pi_1} = m_t^{\pi_2} \Rightarrow$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

A soros R-L kör váltakozó feszültségre kapcsolása nem önmodellező



$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \quad /:iR$$

$$\frac{u}{iR} = 1 + \frac{L}{iR}\frac{di}{dt} + \frac{1}{CiR}\int i\,dt$$

$$\pi_1 = \frac{u}{iR} \; ; \qquad \pi_2 = \frac{L}{Rt} = \frac{T_L}{t} \; ; \; \pi_3 = \frac{t}{RC} = \frac{t}{T_C}$$

Nem önmodellező a folyamat.

A hasonlóság feltétele:

$$T_L = T_C$$

Az önmodellező folyamat jellemzői:

- Két hasonlósági invariánsa van

(Két hasonlósági invariáns esetén elég egy invariáns teljesülése, a második automatikusan teljesül. Az pedig a lépték megfelelő megválasztásával teljesül)

- $m \leq k + 2$
- $m' = k$ (m' a megvalósított paraméterek száma: pl. ellenállás, induktivitás, kapacitás, feszültség)

Ha a megvalósítható paraméterek száma nem nagyobb a függetlenül választható paraméterek számánál, a léptékekre előírt összefüggések minden esetben teljesíthetők, a folyamat önmodellező.

Hullámfolyamat ideális távvezetéken

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -L' \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial l} = -C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$1 = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \cdot \frac{\partial l}{\partial u}$$

$$1 = -C' \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial l}{\partial i}$$

$$\pi_1 = \frac{L' i l}{t \cdot u} = \frac{L i}{u \cdot t} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{C' \cdot u \cdot l}{t \cdot i} = \frac{C \cdot u}{i \cdot t}$$

Képezzük:

$$\pi_1^* = \sqrt{\pi_1 \cdot \pi_2} = \frac{\sqrt{LC}}{t} = \frac{T}{t}$$ (T : a befutási idő)

$$\pi_2^* = \sqrt{\frac{\pi_1}{\pi_2}} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{u}{i}} = \frac{Z}{R}$$ (Z : a távvezeték hullámellenállása)

$$\pi_1^* \Rightarrow \frac{T_1}{t_1} = \frac{T_2}{t_2} \Rightarrow m_t = \frac{t_1}{t_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

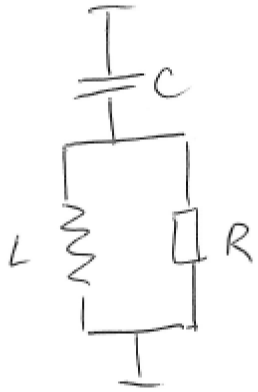
$$\pi_2^* \Rightarrow \frac{Z_1}{R_1} = \frac{Z_2}{R_2} \Rightarrow m_R = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

önmodellező

$m = 6 \ (u, i, l, t, L', C')$
$k = 4$
$m' = 4 \ (u, l, L', C')$

Veszteséges távvezetéken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= -L' \frac{\partial i}{\partial t} - R' i \\ \frac{\partial i}{\partial l} &= -C' \frac{\partial u}{\partial t} - G' u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &m = 8 \ (u, i, l, t, L', C', R', G') \\ &k = 4 \end{aligned}$$



$$Z_{Gott} = \frac{1}{j\omega C} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}$$

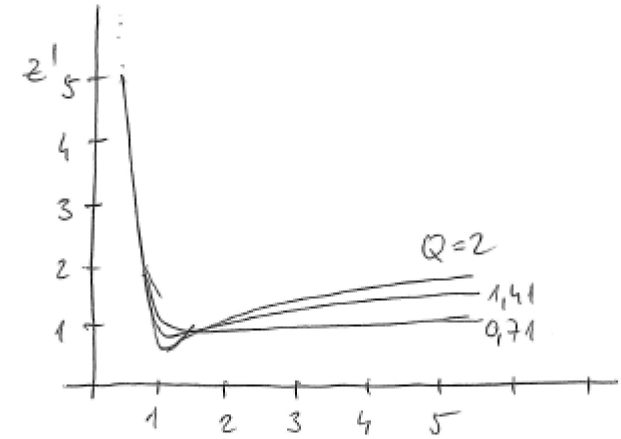
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f' = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

$$X_0 = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}$$

$$Q = \frac{R}{X_0}$$

$$Z' = \frac{Z}{X_0}$$



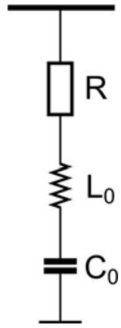
A legfontosabb mechanikai, villamos és mágneses mennyiségek mértékegységei SI rendszerben

Villamos és mágneses egységek

A mennyiségek megnevezése	jelölése	Mértékegységek	Dimenzió képlet kitevői L	M	T	I	A mértékegység kiszámításának képlete	MKSA egység
Áramerősség	i	A	0	0	0	1	-	alapegység
Munka és Energia	W	J	2	1	-2	0	$W = F \cdot l$	Nm
Teljesítmény	P	W	2	1	-3	0	$P = W/t$	J/s
Vill. töltés	q	C	0	0	1	1	$q = i \cdot t$	A s
Vill. eltolás	D	C/m^2	-2	0	1	1	$D = q/A$	C/m^2
Feszültség (potenciálkül. elektromot. erő)	u	V	2	1	-3	-1	$u = W/q$	W/A
Térerősség	E	V/m	1	1	-3	-1	$E = F/q$	V/m
Ellenállás	r	Ω	2	1	-3	-2	$r = u/i$	V/A
Kapacitás	C	F	-2	-1	4	2	$C = q/u$	C/V
Mágneses fluxus	ϕ	Wb(Weber)	2	1	-2	-1	$\phi = -u_{ind} t$	V s
Mágneses indukció	B	Vs/m^2	0	1	-2	-1	$B = \phi/A$	Vs/m^2
Induktivitás	L	H	2	1	-2	-2	$L = \phi/i$	Vs/A
Mágneses gerjesztés	Θ	A	0	0	0	1	$\Theta = n \cdot i$	A
Mágneses térerősség	H	A/m	-1	0	0	1	$H = \Theta/l$	A/m

5.7.1.2.1 Soros rezgőkör

Az 5.7.2 fejezetben ismertetett szűrő csoport alkotó elemei a soros hangolt rezgőkörök, amelyek egy-egy szűrendő frekvenciára vannak hangolva. A szűrő pontos hangolt állapota általában nem marad meg örökké a paraméterek kis megváltozásai következtében. Vizsgáljuk meg a soros hangolt rezgőkör impedancia-frekvencia karakterisztikáját. A soros rezgőkör egyvonalas rajzát az 5.7.3 ábra mutatja.



5.7.3 ábra A soros L-R-C kör mint hangolt rezgőkör

Az áramkör bemenő impedanciája a frekvencia függvényében

$$Z_{sz} = R + j\left(\omega L_0 - \frac{1}{\omega C_0}\right) \qquad (5.7.2)$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$ rezonancia körfrekvencia

$$X_0 = \omega_0 L_0 = \frac{1}{\omega_0 C_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}};$$

$$Q_0 = \frac{X_0}{R}$$ jósági tényező

$$n = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}; \qquad h = \frac{\omega_0}{314} = \frac{\omega}{n \cdot 314}$$ rendszám

$$s = \frac{f - f_0}{f_0} = n - 1$$ relatív elhangolódás

A bevezetett jelöléseket az 5.7.2 egyenletbe behelyettesítve, a szűrő impedanciája:

$$Z_{sz} = R + jX_0\left(n - \frac{1}{n}\right)$$

a rezonancia ellenállásra viszonyított szűrő impedancia:

$$\frac{Z_{sz}}{R} = 1 + jQ_0\left(n - \frac{1}{n}\right) = 1 + jQ_0\, s\left(\frac{s+2}{s+1}\right) \qquad (5.7.3)$$

kis elhangolódásokra $|s| << 1$, és a szűrő impedancia relatív értéke

$$\frac{Z_{sz}}{R} = 1 + jQ_0 2s \qquad (5.7.4)$$

A relatív szűrő impedancia abszolut értéke:

$$\left|\frac{Z_{sz}}{R}\right| = \sqrt{1+Q_0^2\,4s^2} \tag{5.7.5}$$

Az 5.7.5 egyenlet a soros hangolt rezgőkör kis elhangolódásokra érvényes általános egyenlete.

Definiáljuk a sávszélességet a híradástechnikában szokásos módon a $\left|\frac{Z_{sz}}{R}\right| = \sqrt{2}$ helyhez tartozó frekvenciák különbségével: $\Delta f = f_2 - f_1$

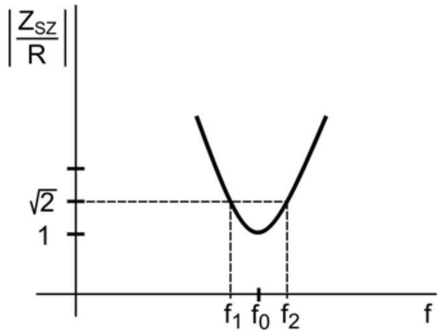
A relatív sávszélesség: $\Delta f = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = s_2 - s_1$; (5.7.6)

A sávszélre hangolódott szűrő impedanciájának valós és képzetes része egyenlő. Az f_1 illetve f_2 pontokon a szűrő szűrési hatása –3dB és fázisszöge -45º illetve +45º.

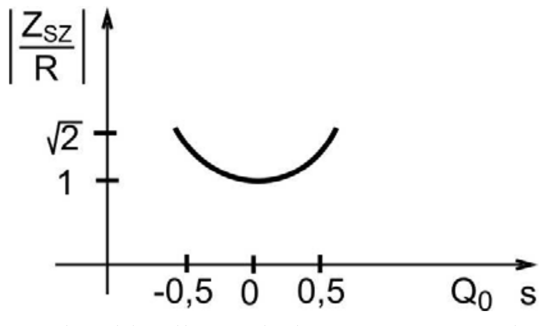
$$Q_0 2s = 1 \quad \rightarrow \quad 2s = \Delta s = \frac{1}{Q_0} \tag{5.7.8}$$

Tehát a szűrő jósági tényezője és a relatív sávszélesség szorzata egyet ad eredményül.

Az 5.7.4 ábra a sávszélesség definicióját érzékelteti, az 5.7.5 ábrán pedig a soros rezgőkör kis elhangolódásra érvényes általános karakterisztikáját ismertetjükaz 5.7.5 egyenlet alapján.



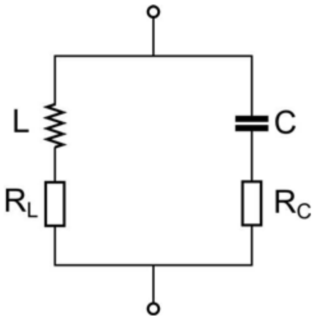
5.7.4 ábra Soros rezgőkör sávszélességének szemléltetése



5.7.5 ábra Soros rezgőkör kis elhangolódására érvényes általános karakterisztikája

5.7.1.2.2 Párhuzamos rezgőkör

A szűrőcsoportban több soros R-L-C kör van egymással párhuzamosan kapcsolva. Amint azt az 5.7.2 fejezetben bemutatjuk, ilyen esetben az eredő impedancia frekvencia függvénynek a két zérushelye között mindig van pólushelye.A pólushelyen a rendszer párhuzamos rezonanciát mutat. Ekkor helyettesíthető az impedancia rendszer az 5.7.6 ábra szerinti egyetlen párhuzamos rezgőkörrel.



5.7.6 A párhuzamos L-R-C kör mint rezgőkör

Az 5.7.6 ábra alapján az admittancia eredője a bemeneti pontokra:

$$Y_P = Y_L + Y_C = G + jB = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C + \frac{1}{j\omega C}} \qquad (5.7.9)$$

Valós és képzetes részekre bontva az admittanciát:

$$G = \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad B = \frac{-\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{1/\omega C}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (5.7.10)$$

Veszteséges esetben a fázisrezonancia és az amplitúdó rezonancia szétválnak, A fázisrezonancia akkor lép fel amikor a képzetes részr fennáll

B=0

Ekkor a körfrekvencia:

$$\omega_{\text{fázisrez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L/C - R_L^2}{L/C - R_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{Z_0^2 - R_L^2}{Z_0^2 - R_C^2}} \qquad (5.7.11)$$

a gyakorlatban:

$R_L << \omega L$ és $R_C << \frac{1}{\omega C}$, és $R_C << R_L$ ezért

$$Z_P = \frac{1}{Y_P} \approx \frac{L/C}{R_L + R_C + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad \text{és} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ valamint } Z_{rez} \approx \frac{L}{R_L C}$$

(5.7.12)

A rezonancia impedanciát megadhatjuk más formában is:

$$Z_{rez} = \omega_0 L Q_0 = \frac{1}{\omega_0 C} Q_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} Q_0 \text{, ahol } Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R_L} \qquad (5.7.13)$$

Az előbbi feltételek mellett, bevezetve *n* korábban ismertetett értelmezését, a párhuzamos rezgőkör impedanciáját és rezonancia ellenállását is egyszerű alakban írhatjuk:

$$n = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad |Z_P| = \frac{L/C}{(R_L + R_C)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{Z_P}{Z_{rez}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}};$$

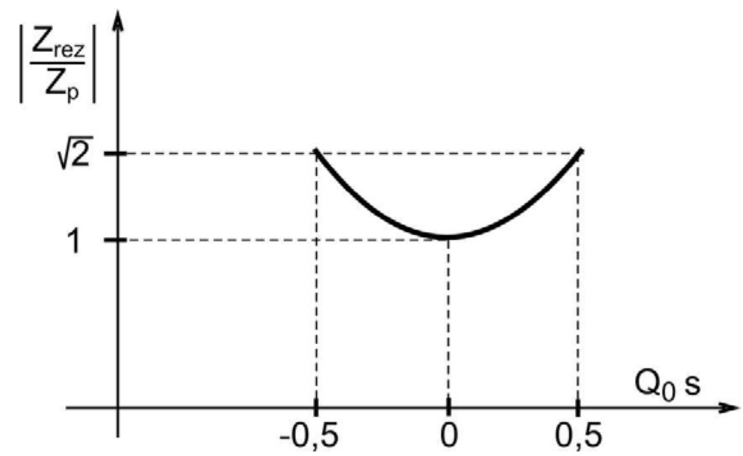
(5.7.14)
Alkalmazzuk a már ismert jelölést az elhangolódásra:
$n = s + 1$
A párhuzamos rezgőkör kis elhangolódásra érvényes általános egyenletéhez jutottunk, ami a soros rezgőköri 5.7.5 egyenlet duálja.

$$\left|\frac{Z_P}{Z_{rez}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4s^2 Q_0^2}} \tag{5.7.15}$$

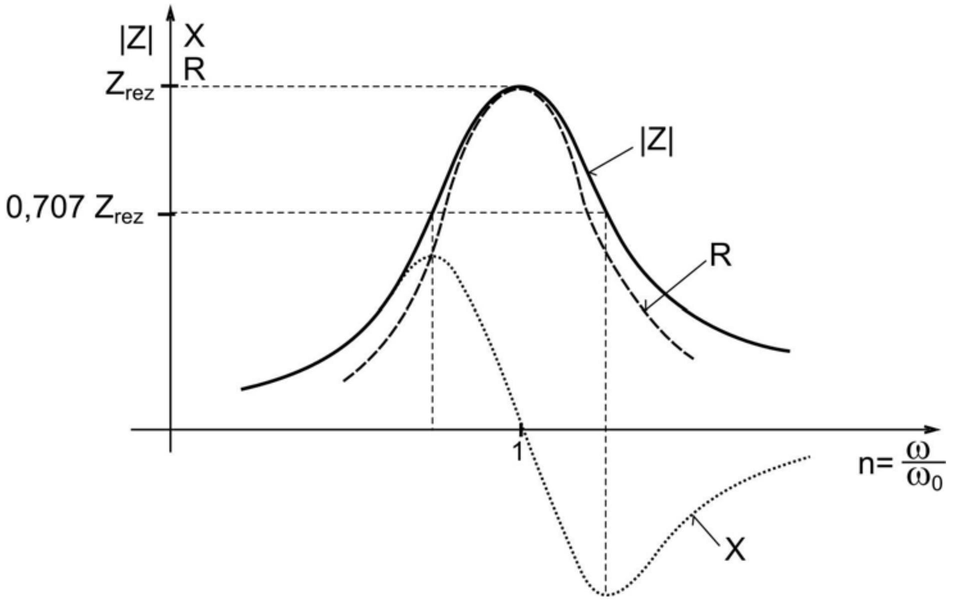
A párhuzamos rezgőkör 5.7.15 egyenletét az 5.7.7 ábrán láthatjuk.
A párhuzamos rezgőköri impedanciát Z=R+jX alakban felírva, az 5.16 egyenletet kapjuk:

$$R = \frac{L/C\,(R_L + R_C)}{(R_L + R_C)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad X = \frac{L/C\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_L + R_C)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{5.7.16}$$

Az 5.16 egyenlet összetevőit az 5.7.8 ábrán láthatjuk a rezonancia frekvenciára viszonyított relatív frekvencia függvényében



5.7.7 ábra Párhuzamos rezgőkör kis elhangolódására érvényes általános karakterisztikája



5.7.8 ábra Párhuzamos rezgőkör impedancia karakterisztikája a relatív frekvencia függvényében