Megoldás

1. feladat **25 pont**

- Hol deriválható az
$$f(x) = \ln\left(\left(\frac{2x^3}{e^x}\right)^2 + 2\right)$$
függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!
- Hol deriválható a
$$g(x) = \sqrt[3]{x}\cos x$$
függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!

Megoldás:

- $$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{2x^3}{e^x}\right)^2 + 2} \cdot 2\left(\frac{2x^3}{e^x}\right) \cdot \frac{6x^2e^x - 2x^3e^x}{e^{2x}} \boxed{\mathbf{13p.}} = \frac{12x^5 - 4x^6}{2x^6 + e^{2x}}$$
(Mindenhol deriválható.)
- $$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}_{\to 0+}} = \infty$$ így g a 0-ban nem deriválható. $\boxed{\mathbf{6p.}}$

Mindenhol máshol $g'(x) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\cos x - \sqrt[3]{x}\sin x \boxed{\mathbf{6p.}}$

2. feladat **25 pont**

Adja meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x \cdot \ln x)$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\ln x}$

Megoldás:

(a) $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 0 \boxed{\mathbf{10p.}}$$

(b) $$\lim_{x\to 0+}\left(\underbrace{\sin x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\operatorname{tg} x}_{qto0} = 0 \boxed{\mathbf{10p.}}$$

(c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\sin x}_{\text{korl.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0} = 0 \boxed{\mathbf{5p.}}$$

3. feladat **25 pont**

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{(x-4)^3}{x^5}$$

függvény szigorúan monoton!

Hol van lokális szélsőértéke?

Van-e globális minimuma illetve maximuma?

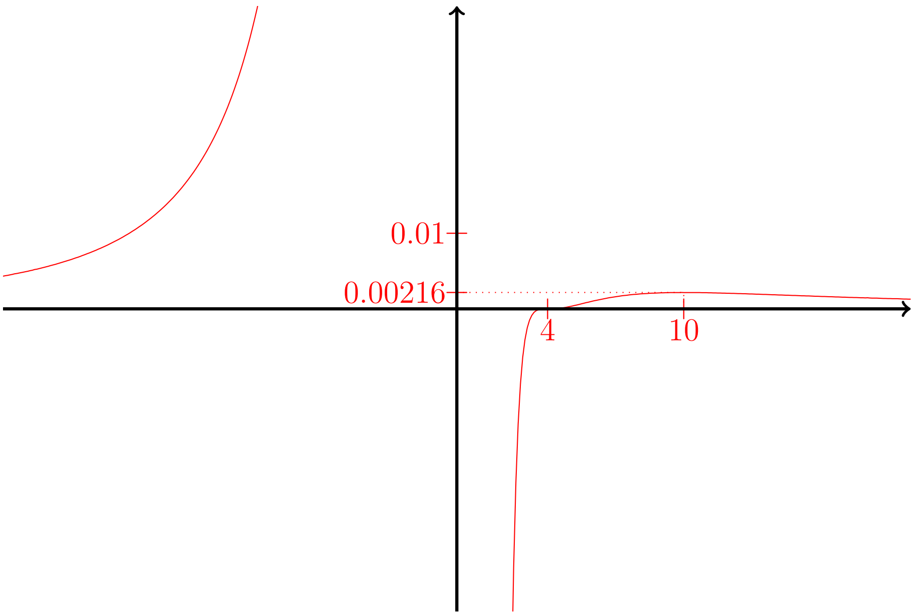
Megoldás: $f'(x) = \frac{3(x-4)^2x^5 - 5(x-4)^3x^4}{x^{10}} = \frac{(x-4)^2(3x-5(x-4))}{x^6} = \frac{(x-4)^2(-2x+20)}{x^6}$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

gyökei $x_1 = 10$ és $x_{2,3} = 4$

	$]-\infty,0[$	$]0,4[$	4	$]4,10[$	10	$]10,\infty[$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
f'	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő a $[10,\infty[$ intervallumon.
Az f függvény szigorúan monoton növő a $]-\infty,0[$ és a $]0,4]$ intervallumokon.
Lokális maximuma van a 10-ben. $\boxed{\textbf{15p.}}$

Globális minimuma és maximuma nincs, mert $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{\overbrace{(x-4)^3}^{\to -64}}{\underbrace{x^5}_{\to 0\pm}} = \mp\infty$ $\boxed{\textbf{5p.}}$



4. feladat **25 pont**

Igazolja , hogy az

$$(x(t), y(t)) = (2t + \sin t, 1 - \cos t)$$

paraméteresen megadott görbe egy $y = f(x)$ függvény grafikonja!

Adja meg $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ paraméterhez tartozó $(x(t_0), y(t_0))$ pontbeli érintő egyenletét, ha létezik!

Megoldás: Mivel $x'(t) = 2 + \cos t > 0$, ezért $x(t)$ szigorúan monoton növő, így létezik inverze. Ha ez $t = \varphi(x)$, akkor $f(x) = y(\varphi(x))$ megfelelő. $\boxed{\textbf{10p.}}$

$x_0 = x(t_0) = x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi + 1$

$f(x_0) = y_0 = y(t_0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

$y'(t) = \sin t$

$f'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}$

Az érintő egyenlete $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \dfrac{1}{2}(x - (\pi + 1)) + 1 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 - \pi}{2}$ $\boxed{\textbf{15p.}}$