MECHANIKA – Fizika része, a testek, anyagok mozgásállapotával foglalkozik.

Aeromechanika – légnemű
Hidromechanika – cseppfolyós
Szilárd testek mechanikája – szilárd
} anyagok mozgása.

Mechanika részei
- kinematika (mozgás leírása)
- dinamika (mozgás okát is vizsgálja)
  - statika (testre ható erők nyugalmi állapotban)
  - kinetika (mozgásállapot változásai és annak okai)

Szilárd test, ha kicsik az alakváltozásai: merev test

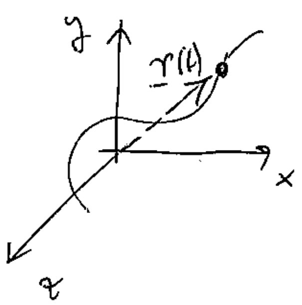
Ha a test kiterjedése elhanyagolható a mozgás pályájához képest: tömegpont vagy anyagi pont.

Mi az erő? A kölcsönhatásokat leíró mennyiség.

Anyagi pontok mozgásának leírása

$\underline{r}(t) \rightarrow$ térgörbe: adott t időpontban hol van.

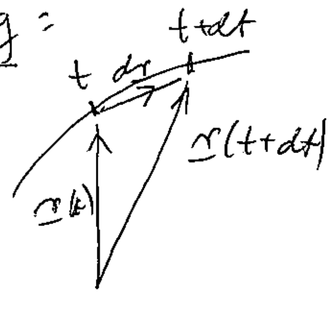
Például (x, y, z) koordináta-rendszerben:



$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$\underline{r}(t)$ térgörbe — a mozgás pályája.

Sebesség:

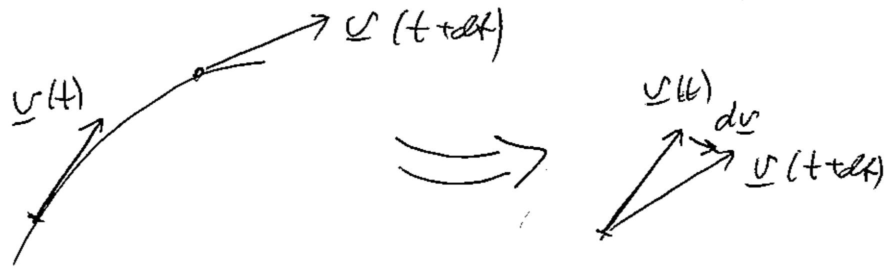


$d\underline{r}$: elmozdulás dt idő alatt.
Iránya: érintő irányú.

Sebesség: $\underline{v} := \frac{d\underline{r}}{dt}$ ez is érintő irányú.

<u>Gyorsulás</u>: a sebesség megváltozása idő-egység alatt:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$



A gyorsulásnak lehet érintő irányú és arra merőleges komponense.

- érintő irányú gyorsulás okozza a sebesség <u>nagyságának</u> a változását.

- érintőre merőleges irányú gyorsulás okozza a sebesség <u>irányának</u> a változását.

<u>Mozgás leírása</u>: $\underline{r}(t)$, $\underline{v}(t)$ és $\underline{a}(t)$, összefüggések:

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \quad ; \quad \underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}(t)}{dt}$$

Fordítva:

$$\underline{v}(t) = \int \underline{a}(t)\,dt \qquad \text{illetve} \qquad \underline{r}(t) = \int \underline{v}(t)\,dt \quad :$$

dt idő alatti sebességváltozások illetve elmozdulások összege.

Mechanika alaptörvényei: Newton-féle axiómák, tapasztalat alapján felállítva.

N1/: Tehetetlenség elve: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer (az inerciarendszer), amelyben minden magára hagyott (erőmentes) pontszerű test nyugalomban van vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez. A mechanika törvényeit erre a rendszerre vonatkoztatjuk.

N2/: A dinamika alapegyenlete: $\underline{F} = m\underline{a}$

N3/: Erő-ellenerő (hatás-ellenhatás) törvénye: Két, egymással kölcsönhatásban levő test egymásra gyakorolt erőhatásának nagysága azonos, de irányuk ellentétes.

N4/: Erőhatások függetlenségének (vagy a szuperpozíció) elve: Anyagi pontra ható több erő hatása azonos az eredő erő hatásával.

Történetileg: mérték $\underline{r}(t)$-t, ebből számolható $\underline{v}$ és $\underline{a}$,

N2 alapján $\underline{F}$ → erőtörvények „katalogusa".

Tapasztalat: $\underline{F}$ függhet $\underline{r}$-től, $\underline{v}$-től és t-től, de a természetben $\underline{a}$-tól nem:

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

Mára alapfeladat: ismert $\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$, számítsuk ki $\underline{r}(t)$ mozgást N2 alapján:

$$m \cdot \frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2} = \underline{F}\left(\underline{r}, \frac{d\underline{r}}{dt}, t\right).$$

Másodrendű közönséges differenciálegyenlet, megoldásához kell kezdőfeltétel, pl. $\underline{r}(0)$, $\underline{v}(0)$.

A Newton-féle mechanika determinisztikus: ha ismert $\underline{r}(0)$ és $\underline{v}(0)$, akkor $\underline{r}(t)$ elvben számolható.

Következmény: Laplace-i világkép:

Igaz:

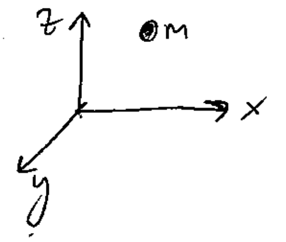
- ha ismerem a mozgásegyenleteket pontosan, és
- a kezdőfeltételeket is pontosan, akkor
- a mozgás pontosan meghatározható.

Nem igaz:

- ha pontosan ismerem a mozgásegyenleteket, de
- a kezdőfeltételeket csak közelítőleg ismerem, akkor
- közelítőleg meghatározható a mozgás.

ok: káosz. Pl. háromtestprobléma!

Példa: Szabadesés:

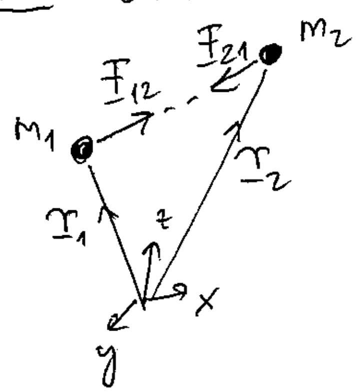


$$\underline{F}(x,y,z)=\begin{bmatrix}0\\0\\-mg\end{bmatrix}$$ → mozgásegyenletek:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

$$m\cdot\frac{d^2z}{dt^2}=-mg$$

Példa: Gravitáció: Newton, 1665



$$\underline{F}_{12}=-\gamma\cdot\frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}\cdot(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$$

ahol $\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$

[irány nélkül: $F_{12}=\gamma\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ahol r a két test távolsága.]

Két test esetén megoldható, de a háromtestprobléma már kaotikus.

Példa: Rugóval rögzített test: $F(x)$ visszatérítő erő.

$$F(x)=m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ha x kicsi, Taylor-sorba fejthető: $F(x)=\underbrace{F(0)}_{0}+\frac{dF}{dx}\Big|_{x=0}\cdot x+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2}\Big|_{x=0}x^2+\ldots}_{\approx 0}$

$\Rightarrow F(x)\approx -kx$ ahol $k=-\frac{dF}{dx}\Big|_{x=0}$ a rugóállandó.

Mozgásegyenlet: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$ → harmonikus rezgés.

Rakétamozgás

Rakéta: a szállított üzemanyag elégésekor keletkezett gázok gyors kiáramlása hajtja. 

Newton 2. törvénye, de most változik a tömeg!

$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v})$, ahol m és $\underline{v}$ is időfüggő: $m(t)$, $\underline{v}(t)$.

$m\underline{v}$ neve: impulzus (mozgásmennyiség).

Mi történik kis dt idő alatt?

- előtte: $m(t)\underline{v}(t)$ az impulzus.
- utána: $m(t)$ csökken dm-mel: $m(t) \to m(t) - dm$, ahol dm a kiáramló gáz dt idő alatt.

A rakéta sebessége: $\underline{v}(t) \to \underline{v}(t) + d\underline{v}$

Az impulzus megváltozása:

– rakéta: $\frac{d(m\underline{v})}{dt}$, – gáz: $-\frac{dm}{dt}\cdot \underline{v}_g$, ahol $\underline{v}_g$ a gáz sebessége. Azaz: Newton 2:

$$\frac{d(m\underline{v})}{dt} - \frac{dm}{dt}\cdot\underline{v}_g = \underline{F}$$

, ahol $\underline{F}$ a külső erő (pl. gravitáció, légellenállás).

Legyen $\underline{v}_{rel} = \underline{v}_g - \underline{v}$ a gáz sebessége a rakétához képest:

$$\frac{dm}{dt}\cdot\underline{v} + m\frac{d\underline{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\left(\underline{v}_{rel} + \underline{v}\right) = \underline{F} \Rightarrow m\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{F} + \frac{dm}{dt}\cdot\underline{v}_{rel}$$

Egyenes vonalú mozgás (pl. z irányban):

$\underline{v} \to v$, $\underline{v}_{rel} \to -v_{rel}$ (gáz sebessége ellentétes irányú):

$$m\frac{dv}{dt} = F \underbrace{- \frac{dm}{dt}\cdot v_{rel}}_{\text{„visszalökési erő"}}.$$

Ⓐ Ha $F=0$ (nincs külső erő), és v_{rel} = állandó:

$$dv = -v_{rel}\cdot\frac{dm}{m} \to \int_{v_0}^{v} dv = -v_{rel}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \Rightarrow v - v_0 = -v_{rel}(\ln m - \ln m_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 - v_{rel}\cdot\ln\frac{m(t)}{m_0}}$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség, m_0 a kezdeti össztömeg, $m(t)$ egy t időpontban a tömeg.

Ciolkovszkij-egyenlet

Ha a rakéta kezdeti M_0 tömege $M_0 = M_{üa} + M_{rak}$,
ahol $M_{üa}$ az üzemanyag, M_{rak} a rakéta tömege,
akkor az elérhető maximális sebesség:

$$v_{max} = v_0 - v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{M_{rak}}{M_0}\right).$$

(B) Ha F a nehézségi erő, akkor feladatunk közben
$F = -mg$, ezzel:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel} \Rightarrow dv = -g \cdot dt - v_{rel} \cdot \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = -g\int_0^t dt - v_{rel}\int_{M_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} \rightarrow v(t) - v_0 = -gt - v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{M_0}\right)$$

Ha a tömeg kiáramlása egyenletes: $m(t) = M_0 - \mu t$,
ahol μ = állandó az időegység alatt kiáramló gáztömeg,
akkor

$$v(t) = v_0 - gt - v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{M_0 - \mu t}{M_0}\right)$$

Most a maximális sebesség, amikor $M_0 - \mu t = M_{rak}$ azaz

$$t = \frac{M_0 - M_{rak}}{\mu};$$

$$v_{max} = v_0 - g \cdot \frac{M_0 - M_{rak}}{\mu} - v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{M_{rak}}{M_0}\right)$$