# A számítástudomány alapjai

**1. ZH javítókulcs**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését: ennek feltétele az is, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása is kiderüljön a dolgozatból.**
**Természetesen az alább ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott részpontszámok járnak.**

1. A le- és felszállás meggyorsítása érdekében a Balkáni Közlekedési Társaság 20 napon keresztül, kísérleti jelleggel egy új, ajtó nélküli villamost közlekedtet. A villamos vezetésére egyelőre csak 15 dolgozónak van képesítése, azonban arra is vigyázni kell, hogy bármely négy egymást követő napon négy különböző dolgozó vezesse a kísérleti járművet. Hányféle lehet az említett 20 napon a kísérleti villamost vezetők sorrendje?

   Az első napi vezető 15-féle lehet. (2 pont)
   A második napon 14, a harmadik napon 13, míg a negyedik napon 12 lehetséges személyből választható a vezető. (2 pont)
   Az ezt követő napok mindegyikén a 15 lehetséges vezetőből az előző három napi vezető nem nem vezethet, (1 pont)
   de a maradék 12 személy bármelyike igen. (2 pont)
   Mivel minden egyes választást az előzményektől függetlenül tudunk megtenni, ezért a lehetőségek száma a napi vezetőválasztási lehetőségek számának szorzata. (1 pont)
   Összesen 16 napon választhatunk 12 lehetőségből[1], ezért a feladat kérdésére a válasz $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12^{16}$. (2 pont)

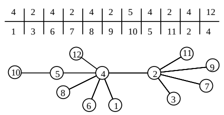
2. Megadható-e 17 ponton három egymással izomorf $G_1$, $G_2$ és $G_3$ gráf úgy, hogy bárhogyan is választunk ki a 17 pont közül két különbözőt, az e pontokat összekötő élt a $G_1, G_2$ és $G_3$ gráfok közül pontosan az egyik tartalmazza?

   Mivel $G_1, G_2$ és $G_3$ izomorf gráfok, ugyanannyi élük van. (2 pont)
   Tudjuk, hogy a $K_{17}$ teljes gráf minden élét pontosan az egyik $G_i$ tartalmazza, (1 pont)
   ezért $K_{17}$-nek épp 3-szor annyi éle van, mint $G_1$-nek. (2 pont)
   A $K_{17}$ teljes gráf éleinek száma $\binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 8 \cdot 17$, ami nem osztható 3-mal. (3 pont)
   Ebből adódóan $G_1$ élszáma $\frac{1}{3} \cdot \binom{17}{2}$ nem egész, és ez ellentmondás. (1 pont)
   Tehát nem létezhetnek a feladatban leírt tulajdonságú gráfok. (1 pont)

3. Hány él indul a 4242425424 Prüfer kódú fa maximális fokszámú csúcsából?

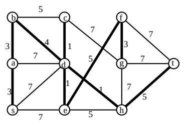
   Az órán azt tanultuk, hogy a Prüfer kódban minden csúcs éppen eggyel kevesebbszer fordul elő, mint a fokszáma. (4 pont)
   Eszerint a legnagyobb fokszámú csúcs az, amelyik legtöbbször előfordul a kódban. (2 pont)
   Ez a csúcs a 4-es, és 5-ször fordul elő, (1 pont)
   ezért a fokszáma 6. (2 pont)
   A kérdésben szereplő fa csúcsainak maximális fokszám tehát 6. (1 pont)

   Természetesen nem tilos a Prüfer kód visszafejtésével a fát meghatározni, és abban megkeresni a maximális fokszámot:




   A Prüfer kód hossza 10, ezért a keresett fa csúcsai 1-től 12-ig vannak számozva, és a Prüfer kódot kiegészíthetjük az utolsónak feljegyzett 12-es csúccsal. (1 pont)
   Az órán ismertetett módszerrel meghatározzuk, melyik leveleket töröltük, (4 pont)
   ezzel megkapjuk a fa éleit a törlések sorrendjében. (2 pont)
   Az ábrán látható a felrajzolt fa, (1 pont)
   amiben a maximális fokszám a 6. (2 pont)

4. Határozzuk meg a lenti ábrán látható gráf irányítatlan változatában egy minimális súlyú feszítőfa súlyát, ahol az élekre írt számok az adott él súlyát jelentik!



   Kruskal algoritmusa alapján, az élekről növekvő súlysorrendben, mohó módon eldöntve, hogy bevegyük-e a fába a kapunk egy minimális súlyú feszítőfát. (3 pont)
   Helyes ábra a kapott fáról. (5 pont)
   A kapott fa súlya 26. (2 pont)

5. Tegyük fel, hogy az $F$ fának 17 csúcsa van és bármely csúcsának fokszáma 4 vagy 1. Határozzuk meg, legalább hány élt kell $F$-be behúzni ahhoz, hogy a keletkező gráfnak legyen Euler körsétája!

   Legyen az $F$ fa első és negyedfokú csúcsinak száma rendre $n_1$ ill. $n_4$! Ezzel a jelöléssel $F$ csúcsainak száma $n_1 + n_4 = 17$, ahonnan $n_4 = 17 - n_1$. (1 pont)
   A fákról tanultak szerint $F$ éleinek száma eggyel kevesebb, mint ahány csúcsa van, azaz $|E(F)| = 16$. (1 pont)
   Azt is mondták az órán, hogy véges gráfban a fokszámösszeg kétszerese az élszámnak, (1 pont)
   azaz $32 = 2 \cdot 16 = 1 \cdot n_1 + 4 \cdot n_4 = n_1 + 4 \cdot (17 - n_1) = 68 - 3n_1$, (1 pont)
   ahonnan $3n_1 = 36$, $n_1 = 12$ adódik. (1 pont)
   Ha $F$-be további éleket húzunk be, akkor $F$ összefüggő lévén, a kapott gráf összefüggő marad. (1 pont)
   Pontosan akkor lesz tehát a keletkező gráfnak Euler körsétája, ha úgy veszünk be új éleket, hogy minden fokszám páros lesz. (1 pont)
   Mivel $F$-ben pontosan az elsőfokú pontok a páratlan fokúak (amiből pontosan 12 van), (1 pont)
   és egy él behúzása pontosan két pont fokszámának paritását változtatja meg, ezért legalább 6 élt kell behúzni, hogy legyen Euler körséta a gráfban. (1 pont)
   Ennyi él behúzása elegendő is, hiszen ha 6 diszjunkt éllel lefedjük $F$ leveleit, akkor csakugyan olyan gráfot kapunk, amelynek minden fokszáma páros. (1 pont)

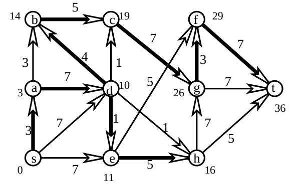
6. Bizonyítsuk be, hogy $n$ házaspár tagjai leültethetőek egy $2n$ személyes kerek asztal köré úgy, hogy mindenki mellett vagy a házastársa, vagy azonos nemű ismerőse, vagy olyan ellentétes nemű személy ül, akit nem ismer. (Tegyük fel, hogy ha valaki ismeri egy házaspár egyik tagját, akkor ismeri a másikat is, továbbá, hogy az ismeretség kölcsönös.)

   Tekintsük azt a $G$ gráfot, aminek csúcsai az egyes személyek, él pedig akkor fut két személy között, ha egymás mellé ülhetnek, (1 pont)
   azaz, ha házastársak, vagy azonos nemű ismerősök, vagy különböző nemű, egymást nem ismerő személyek. (1 pont)
   A feladat állítása egyenértékű azzal, hogy $G$-nek létezik Hamilton köre. (1 pont)
   Dirac tétele szerint ehhez elegendő azt megmutatni, hogy minden csúcs foka legalább $n$, hisz $G$-nek $2n$ pontja van. (2 pont)
   Vegyük észre, hogy $G$ bármely csúcsának pontosan $n$ a foka, (1 pont)
   hisz egy tetszőleges személynek megfelelő csúcshoz bármely házaspárból pontosan egy olyan csúcs van, amivel össze van kötve: (1 pont)
   a saját házastársával, az ismerős házaspárok közül az azonos nemű személlyel, ill. a nem ismerős házaspárokból az ellentétes neművel. (2 pont)
   Dirac idézett tételének feltételei teljesülnek, tehát $G$-ben létezik Hamilton kör, azaz csakugyan lehetséges a kívánt ültetés. (1 pont)

7. Tegyük fel, hogy a $G$ egyszerű gráf három olyan feszítőfát tartalmaz, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $G$-nek van $K_5$-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja!

   Jelölje $n$ a $G$ gráf csúcsainak számát! Ekkor $G$ minden egyes feszítőfája $n-1$ élt tartalmaz a tanultak szerint. (2 pont)
   Mivel a feladatban leírt három feszítőfának nincs közös éle, ezért $G$-nek legalább $3(n-1) = 3n-3$ éle van. (3 pont)
   Azt is tanultuk, hogy egy $n$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n-6$ éle lehet, (2 pont)
   márpedig $G$-nek ennél több éle van. Minthogy $G$ egyszerű, semmiképp sem lehet síkbarajzolható. (1 pont)
   Kuratowski tanult tétele szerint $G$ ekkor tartalmaz $K_5$-tel vagy $K_{3,3}$-mal izomorf részgráfot, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

8. Az ábrán látható PERT problémára határozzuk meg a feladat végrehajtásához szükséges minimális időt és a kritikus tevékenységeket.



   A gráf egy topologikus sorrendje szerint meghatároztuk a legkorábbi kezdési időpontokat, amit a csúcsokba írt számok jelölnek, és az ezen időpontokat meghatározó éleket megvastagítottuk. (6 pont)
   Eszerint a szükséges minimális idő 36. (2 pont)
   Kritikus tevékenységek azok, melyek kritikus úton vannak, azaz amelyekből $t$ elérhető vastagított éleken. (1 pont)
   Eszerint $e$ és $h$ kivételével minden tevékenység kritikus. (1 pont)

[1] Hát ezt elrontottam: természetesen 17-ről van szó, és a helyes végeredmény is természetesen $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12^{17}$. FT