

Jelek és rendszerek 1

Tantárgykód:
Villamosmérnöki szak, Bsc. képzés

Készítette: Dudás Márton

Bevezető:

A jegyzet a BME VIK első éves villamosmérnök hallgatóinak készült a *Jelek és rendszerek 1* tárgyhoz. Tartalma nagyjából lefedi a tantárgy keretében elsajátítandó tudást, segítséget nyújt annak megismerésében, és mintapéldákon keresztül mutatja be azt. A bemutatott mintapéldákhoz hasonló példákkal fogunk találkozni a gyakorlatokon is, a számítások értsük meg, és gyakoroljuk megfelelő mértékben!

A tárgy erőteljesen épít a Matematika A1 és A2 tárgyak keretein belül elsajátítandó tananyagra. A matematikai levezetések sok esetben nem kerülnek részletes tárgyalásra.

A jegyzet hibákat tartalmazhat. Kellő forráskritikával olvassuk, és a gyanús dolgoknak járjunk alaposan utána a valóságnak! A jegyzet nem helyettesíti az előadásokat és a gyakorlatokat, ezeken az aktív részvétel erősen ajánlott.

Tartalomjegyzék:

1. Amit már tudnunk kéne (röviden)	3. oldal
2. Jelek	4. oldal
3. Hálózatok és rendszerek	7. oldal
4. Kétpólusok	9. oldal
5. Kirchoff-törvények	11. oldal
6. A szuperpozíció elve	12. oldal
7. Csomóponti potenciálok módszere	13. oldal
8. Hurokáramok módszere	14. oldal
9. Helyettesítő generátorok és teljesítményillesztés	15. oldal
10. Csatolt kétpólusok	16. oldal
11. Csatolt kétpólusokat tartalmazó áramkörök analízise	19. oldal
12. Ideális erősítőt tartalmazó hálózatok analízise	20. oldal
13. Kétkapuk karakterisztikák	21. oldal
14. Kétkapuk paraméterek meghatározása	22. oldal
15. Reciprocitás és szimmetria	23. oldal
16. Energetikai megfontolások kétkapuk esetén	25. oldal
17. Kétkapuk helyettesítő kapcsolásai	26. oldal
18. Lezárt kétkapuk jellemzése	33. oldal
19. Kétkapuk összekapcsolása	37. oldal
20. Dinamikus hálózatok	38. oldal
21. Csatolt dinamikus kétpólusok	39. oldal
22. Hálózatszámítási feladat	41. oldal
23. Lineáris, invariáns rendszerek állapotváltozós leírása	45. oldal
24. Az állapotváltozós leírás megoldása részekre bontással	47. oldal
25. Dirac-delta disztribúció és általánosított derivált	51. oldal
26. Vizsgálójelek	52. oldal
27. Elsőrendű rendszerek analízise	53. oldal
28. Másodrendű rendszerek vizsgálata	55. oldal
29. Az állapotváltozós leírás megoldása mátrix-függvényekkel	58. oldal
30. Lineáris invariáns rendszerek válaszanak kifejezése az impulzusválasszal	60. oldal
31. Nemlineáris hálózatok	62. oldal
32. Nemlineáris egyenletrendszerek	65. oldal
33. N umerikus módszerek	67. oldal
34. Egyetlen nemlineáris elemet tartalmazó rezisztív hálózatok analízise	69. oldal
35. Munkaponti linearizálás, másnéven kisjelű analízis	70. oldal
36. Szinuszos állandósult állapot	76. oldal
37. Komplex számítási mód	78. oldal
38. Komplex csúcserőértékek mint időfüggvények	79. oldal
39. Impedancia	80. oldal
40. Speciális kapcsolások	84. oldal
41. Teljesítmény állandósult szinuszos állapotban	89. oldal
42. Teljesítményszámolás állandósult szinuszos állapotban	90. oldal
43. Átviteli tényező és karakterisztika szinuszos hálózatokban	91. oldal
44. Boda és Nyquist diagramok	93. oldal
45. Szinuszos gerjesztésű kétkapuk vizsgálata	94. oldal

Amit már tudnunk kéne (röviden)

Jó ha tudjuk:

Megállapodás szerint az áramokat háromszögbe végződő, míg a feszültségeket sima nyíllal jelöljük.

Ohm törvény:

A feszültség és áramerősség hányadosa állandó, és ez az állandó az ellenállás.

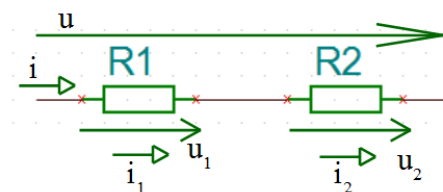
Formálisan: $R = U/I$

Ellenállások soros kapcsolása:

Soros kapcsolás esetén az ellenállások árama megegyezik, feszültségük az ellenállásukkal arányos.

$$i = i_1 = i_2$$

$$u = u_1 + u_2$$



Soros kapcsolások esetén az ellenállások összeadódnak:

$$R_{\text{eredő}} = R_1 + R_2$$

Soros kapcsolás feszültségosztást végez:

$$u_1 = u * \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ellenállások párhuzamos kapcsolása:

Párhuzamos kapcsolás esetén az ellenállások feszültsége megegyezik, áramuk az ellenállásukkal fordítottan arányos.

$$u = u_1 = u_2$$

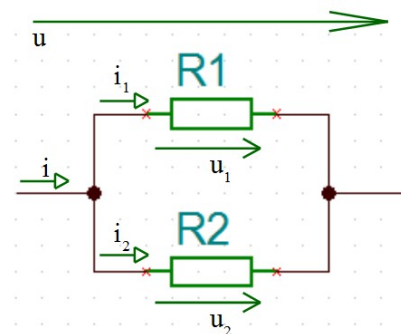
$$i = i_1 + i_2$$

Párhuzamos kapcsolások esetén az ellenállások összeadódnak:

$$R_{\text{eredő}} = R_1 \times R_2 = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

Soros kapcsolás áramosztást végez:

$$i_1 = i * \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



Jelek

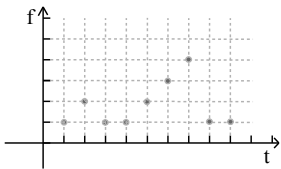
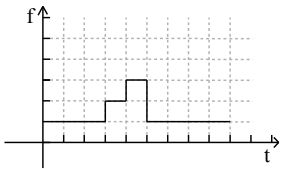
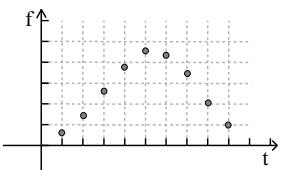
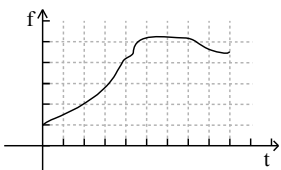
Def.: Fizikai jelenségek matematikai leírását **változónak** nevezzük.

Def.: Fizikai változók számunkra fontos részeinek matematikai leírását **jelek** nevezzük.

A fizikai változók számunkra jellemzően az áramok és a feszültségek lesznek, jelek pedig, az ezeket leíró függvények. A továbbiakban folytonos idejű és értékű, determinisztikus jelekkel foglalkozunk, melyeket matematikai függvényekkel adunk meg.

Jelek osztályozása:

- Idejük szerint:
 - **Diszkrét idejű jelek** (Jele: $f[k]$)
 - Csak diszkrét időpillanatokban vannak értelmezve
 - **Folytonos idejű jelek** (Jele: $f(t)$)
 - Folytonos értékészletű függvénnyel leírható jelek
- Értékük szerint:
 - **Diszkrét értékű jelek** (Kvantált jelek)
 - A függvényérték csak meghatározott értékeket vehet fel.
 - **Folytonos értékű jelek**
 - A függvényérték tetszőleges értékeket vehet fel.
- Meghatározhatóságuk szerint:
 - **Determinisztikus jelek:**
 - Minden időpillanatban meghatározható az értékük.
 - Elvileg megadhatóak, de gyakorlatilag nem biztos, hogy pontosan mérhetőek is.
 - **Sztokasztikus jelek:**
 - Azonos eljárásokat végezve különböző eredményekhez jutunk
 - Bár megadni nem tudjuk őket, tulajdonságaik azonban vannak.
 - MP: dobókockánál minden érték előfordulási valószínűsége $1/6$

	Diszkrét idejű	Folytonos idejű
Diszkrét értékű		
Folytonos értékű		

Def.: **Jel energiája** definíció szerint: $E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$

Def.: Nem periodikus **jel teljesítménye**: $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$

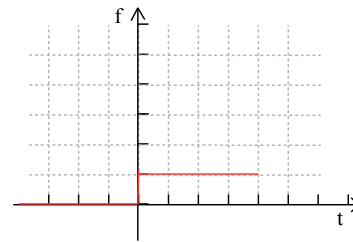
Más szempontok szerint is osztályozhatjuk a jeleket:

- **Belépő jelek:**
 - Minden jel belépő, melyre igaz, hogy $f(t) = 0$ ha $t < 0$
- **Páros jelek:**
 - Egy jel páros, ha $f(t) = f(-t)$
- **Páratlan jelek:**
 - Egy jel páratlan, ha $f(-t) = -f(t)$
- **Korlátos jelek:**
 - Egy jel korlátos, ha $|f(t)| < K$, ahol $K < +\infty$
 - Egy jel korlátos, ha minden t időpillanatban az értéke véges érték.
- **Véges időben korlátos jelek:**
 - Egy jel véges időben korlátos, ha létezik olyan t , amelyre igaz, hogy $|f(t)| < K$ ha $|t| < T$ ahol $K < \infty$ és $T \rightarrow \infty$
- **Abszolút integrálható jelek:**
 - Egy jel abszolút integrálható, ha a jelet leíró függvény abszolútértékét $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig integrálva véges eredményt kapunk.
- **Véges energiájú jelek:**
 - Egy jel véges energiájú jel, ha definíció szerinti energiája véges.
- **Véges teljesítményű jelek:**
 - Egy jel véges teljesítményű jel, mennyiben definíció szerinti teljesítménye véges.
- **Véges idejű jel:**
 - Egy jel véges idejű, ha létezik olyan T időintervallum, amelyen kívül a jel értéke 0.

Speciális jelek:

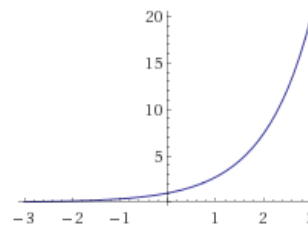
– **Egységugrás (Jele: $\varepsilon(t)$)**

- Függvény, melynek értéke 0, ha $t < 0$ és 1, ha $t > 0$.
- $\varepsilon(t) = 0$, ha $t < 0$ és $\varepsilon(t) = 1$, ha $t > 0$
- A $t=0$ időpillanatban elsőfajú szakadása van.



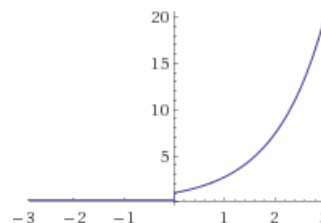
– **Exponenciális jel:**

- Exponenciális függvénnyel leírható jel.
- pl.: $f(t) = e^{-t}$



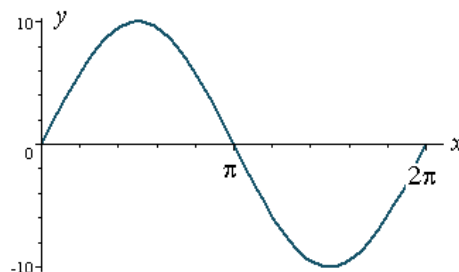
– **Egységugrás és exponenciális jel szorzata:**

- A $t < 0$ intervallumon a függvény értéke 0, a $t > 0$ intervallumon exponenciális függvénnyel leírható függvény.
- pl.: $f(t) = A * \varepsilon(t) * e^{-t}$



– **Periodikus jelek:**

- pl.: $f(t) = A * \cos(\omega * t)$



Hálózatok és rendszerek

A hálózatok összekapcsolt elemekből állnak, és ezek az összekapcsolások összekapcsolási kényszereket szabnak meg.

Hálózatok pár típusa:

Jelfolyam-típusú hálózat:

- A jel adott irányba halad és minden egyes komponensen valami történik vele.

Kirchoff-típusú hálózatok:

- A komponensek két változóval írhatók le.
- Párhuzamos a feszültség és áram iránya.
- A komponensek kétpólusok lehetnek, és ezeket a kétpólusokat kötjük össze csomópontokban.

Ilyen típusú hálózatoknál két dolgot írhatunk fel:

- Elemek karakterisztikája.
- Összekapcsolási kényszerek.

Minden rendszer rendelkezik egy **bemenettel** (gerjesztés, jele: u) és egy **kimenettel** (válasz, jele: y).

Adott gerjesztés hatására minden rendszer egy választ ad, melyet egy függvénnyel írunk le: $y = w(u)$

Def.: Egy rendszer **gerjesztés-válasz stabilis**, ha minden véges, korlátos gerjesztésre véges, korlátos választ ad.

Rendszerek osztályozása:

- Idő szerinti osztályozás:
 - **Folytonos idejű rendszer:**
 - Folytonos idejű gerjesztésre folytonos idejű választ adnak.
 - $u(t)$ és $y(t)$
 - **Diszkrét idejű rendszer:**
 - Diszkrét idejű gerjesztésre diszkrét idejű választ adnak.
 - $u[k]$ és $y[k]$
 - **Vegyes:**
 - Vagy a gerjesztés vagy a válasz nem folytonos idejű.
 - $u[k]$ és $y(t)$ vagy $u(t)$ és $y[k]$
- Meghatározhatóság szerint:
 - **Determinisztikus rendszerek:**
 - Determinisztikus gerjesztésre determinisztikus választ adnak.
 - **Sztokasztikus rendszerek:**
 - Sztokasztikus gerjesztésre sztochasztikus választ adnak.
 - MP: mikrofon $\rightarrow$ hangszóró
 - **Vegyes rendszerek:**
 - Determinisztikus gerjesztésre sztochasztikus választ adnak vagy fordítva.

Folytonos idejű determinisztikus rendszerek osztályozása:

- **Lineáris rendszerek:**
 - Ha $y_1 = w(u_1)$ és $y_2 = w(u_2)$ akkor $y = w(c_1 u_1 + c_2 u_2)$ és $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- **Időinvariáns rendszerek:**
 - Ha $y(t) = w\{u(t)\}$ akkor $y_1(t) = w\{u(t-t')\}$ és $y_1(t-t') = y(t-t')$
Tehát a vizsgálat időpontja tetszőlegesen megválasztható, a rendszer tulajdonságai időfüggetlenek.
- **Kauzális rendszerek:**
 - Minden rendszer akkor és csak akkor kauzális, ha minden belépő gerjesztésre (u) belépő választ (y) ad.
 - A nem kauzális rendszerek „megjósolják” a gerjesztést, így ezek nem realizálhatóak.

Hálózat által reprezentált rendszer:

Bármely hálózatból rendszert kaphatunk, amennyiben kijelölünk egy gerjesztést (jellemzően egy forrást) és egy választ (például egy feszültséget).

Telegen tétel:

Olyan hálózatok esetén, amelyekre a Kirchoff-féle vágástörvény és huroktörvény teljesül, ha két hálózat izomorf gráfokkal írhatóak le, akkor:

$$\sum_{k=1}^b (i'_k * u''_k) = 0$$

i'_k : az első hálózat egy adott ágának árama.

u''_k : a második hálózat ugyan ezen ágának feszültsége.

Megf.: Ha mindkét hálózat szerepét ugyan az a hálózat tölti be, akkor az $u * i$ szorzat az adott ág teljesítménye, és a Telegen-tétel értelmében a teljesítmények előjeles összege zérus, ami megfelel az energiamegmaradás törvényének!

Def.: Adott hálózat **reguláris**, ha a hálózatra helyesen felírt egyenletek egyértelműen megoldhatók.

Def.: **Struktúrálisan nem reguláris** a hálózat, ha feszültségforrásokból hurkot vagy áramforrásokból vágást tartalmaz.

Megf.: Mivel ideális feszültség és áramforrás nem létezik, ezért nem foglalkozunk nem reguláris hálózatokkal.

Kétpólusok

Kétpólusok tulajdonságai:

Karakterisztika:

- Az áram (i) és a feszültség (u) kapcsolatának megadása:
 - **Implicit:** $f(u, i) = 0$
 - **Explicit:** $f(u) = i$ vagy $f(i) = u$

Teljesítmény:

- $P = u \cdot i$

Munka:

- $W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = w(t_2) - w(t_1)$

Munkafüggvény:

- $W(t) = \int_{-\infty}^t P(t) dt$

Kétpólusok energetikai osztályozás:

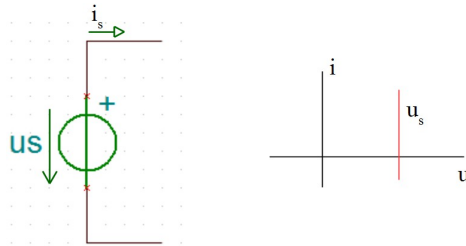
- **Passzív** kétpólusról beszélhetünk, ha $w(t) \geq 0$ minden időpillanatban.
- **Aktív** kétpólusról beszélünk, ha az adott kétpólus nem passzív
- **Veszteségmentes** kétpólusról beszélünk, ha $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$
- **Non-energikus** kétpólusról beszélünk, ha $P(t) = 0$ minden időpillanatban.
 - A non-energikus kétpólus minden esetben passzív!

Kétpólusok osztályozása:

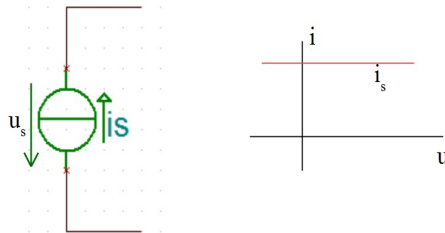
– **Források:**

- Kétpólusok, melyek árama vagy feszültsége adott, és független.

– **Feszültségforrás:**



– **Áramforrás:**



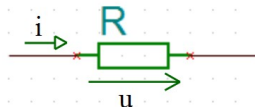
– **Rezisztív kétpólusok:**

- Kétpólus, melyek feszültsége és árama egyértelműen meghatározza egymást, tehát $u(t) = f(i(t))$.
- Adott időpillanatban a feszültség csak az áramtól függ.
- Adott időpillanatban az áram csak a feszültségtől függ.

- Tipikus példa az **ellenállás**:

Karakterisztika:

$$u = R \cdot i$$



– **Lineáris kétpólusok:**

- Ha $u_1 = f(i_1)$ és $u_2 = f(i_2)$ akkor $u = f(c_1 i_1 + c_2 i_2) \rightarrow u = c_1 u_1 + c_2 u_2$
- Tipikus példa az ellenállás.

– **Passzív kétpólusok:**

- Egy kétpólus passzív, ha $w(t) \geq 0$ minden időpillanatban.
- Tipikus példa az ellenállás.

– **Kauzális kétpólusok:**

- Egy kétpólus kauzális, ha $u(t_k)$ csak $i(t)$ -től függ, ahol $t < t_k$
- Tehát a feszültség csak a korábbi áramtól függ.
- Tipikus példa az ellenállás.

Kirchoff-törvények:

- **Áramtörvény** (csomóponti törvény):
 - Minden csomópontra az áramokat előjelesen irányítottan összegezve az eredmény zérus.
 - $\sum_{k=0}^n i = 0$ minden csomópontra.
 - Megegyezés szerint a csomópontból kifolyó áramot tekintjük pozitívnak.
 - Lineárisan független egyenletrendszer kapunk, ha egy csomópont kivételével mindre felírjuk az egyenleteket.
 - n darab csomópont és b darab él esetén $n-1 = r$ független egyenletrendszer kapható.
- **Feszültségtörvény** (huroktörvény):
 - Minden hurokra a feszültségek előjeles összege zérus.
 - $\sum_{k=0}^n u = 0$ minden hurokra.
 - Hurokrendszer lineárisan független, ha a minden hurok tartalmaz olyan élt, ami a többiben nem szerepel.
 - n darab csomópont és b darab él esetén $b-n+1 = m$ független egyenletrendszer kapható.
- **Kirchoff-egyenletek teljes rendszere:**
 - Összesen $2 \cdot k$ darab független egyenlet kapható, mely a következőkből áll:
 - k darab karakterisztikus egyenlet.
 - $n-1$ darab csomóponti egyenlet.
 - $b-n+1$ hurokegyenlet.
- **Minden hálózat egyértelműen megoldható ezekkel az egyenletekkel!**

Hálózatok helyettesítő gráfja:

Amennyiben egy hálózat csomópontjainak egy gráf csúcsait, a kétpólusoknak pedig egy gráf éleit feleltetjük meg, a hálózatot bizonyos szempontokból helyettesítő gráfhoz jutunk.

Definiálhatunk a gráfban hurkot (kör), vágást, valamint feszítőfát, melyeket a Számítástudomány alapjai című tárgyból már ismerünk, s amelyek a továbbiakban segítségünkre lesznek.

Független hurokrendszer generálása:

Válasszunk egy feszítőfát a helyettesítő gráfban. A kiválasztott éleket faágaknak, a ki nem választott éleket kötőágaknak nevezzük. Minden kötőághoz válasszunk egy hurkot, melynek az adott kötőágon kívül minden éle faág. Ha ezt minden kötőághoz megtesszük, akkor független hurokrendszerhez jutunk.

Független vágásrendszer generálása:

Válasszunk egy feszítőfát a helyettesítő gráfban. Minden faélhez keressünk egy vágást, ami csak az adott faélet tartalmazza, ezen kívül pedig tetszőleges számú kötőélet tartalmaz.

A Kirchoff-törvények teljes alakja:

- Minden hurokban a feszültségek összege zérus.
- Minden vágásra az áramok összege zérus.

A szuperpozíció elve:

Ha egy hálózatban csak független források vannak, akkor alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét.

Több forrás esetén az egyes források külön-külön figyelembevételével kapott eredmények összege adja meg az eredő áramokat és feszültségeket.

Csak akkor érdemes használni, ha a feladat elemi módszerekkel megoldható minden különálló forrásra!

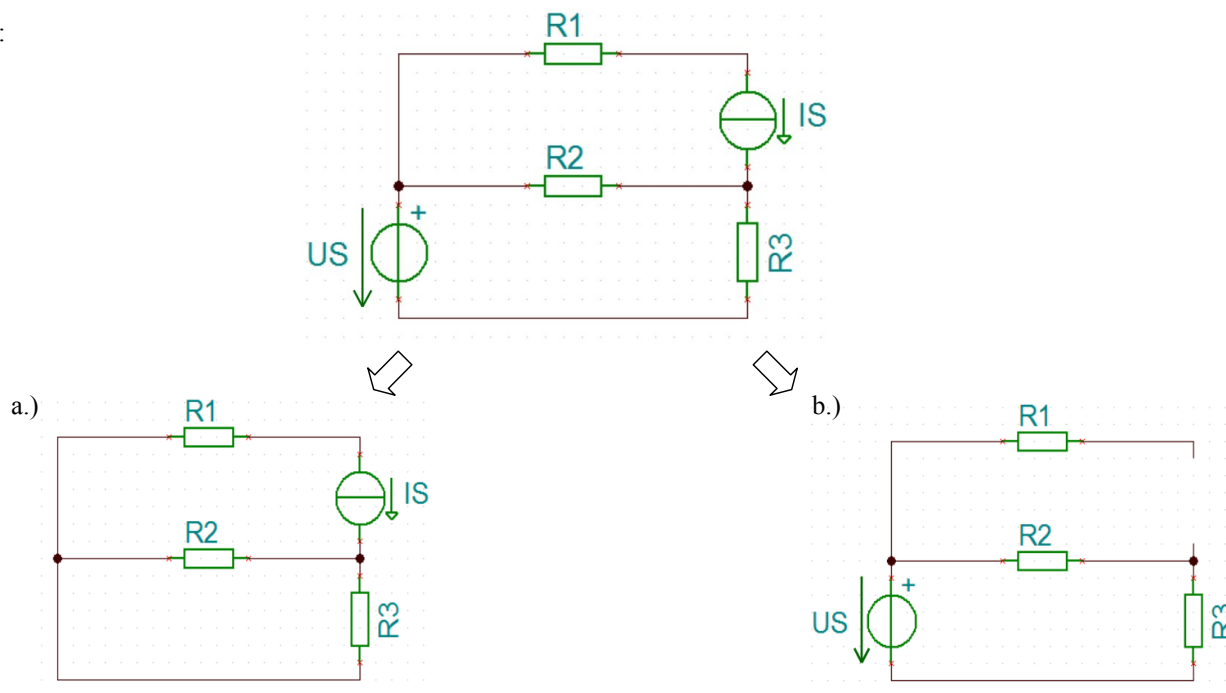
Az egyetlen aktuálisan vizsgált forrás mellett az összes többi **deaktivizálni** kell.

Áramforrások helyettesítése szakadás, feszültségforrások helyettesítése rövidzár.

Jegyezzük meg, hogy el kell hagyni a kört a forrás jeléből.

A szuperpozíció a rendszerek linearitását használja ki!

MP:



Mindig pontosan 1 forrás hatását kell vizsgálnunk, míg a többi deaktivizálva van.

Az eredeti hálózat feszültségeit és áramait az egyes részeredmények összegeként kaphatjuk meg.

Az a.) esetben egy egyszerű hálózatot kell vizsgálnunk, melyben egy párhuzamos tag van sorosan kapcsolva egyetlen ellenállással.

A b.) esetben az R_1 ellenállás kiesik, így egyszerű soros kapcsolással kell számolnunk.

Az egyes esetekben meghatározhatjuk az ellenállások feszültségeit és áramait, a részeredmények előjeles összegeként kapjuk meg az eredeti hálózat jellemzőit.

Gyakori hiba az előjelek figyelembevételének elhagyása!

Csomóponti potenciálok módszere:

Csökkenthetjük az ismeretlenek számát, ha a **csomópontok potenciálját** vezetjük be ismeretlenként. Ekkor n csomópont esetén $n-1$ számú ismeretlent kapunk, mivel egy csomópont potenciálját 0-nak választhatjuk. A módszerben tovább csökkenthetjük az ismeretlenek számát minden egyes független feszültségforrásnál, ugyanis megállapíthatjuk a feszültségforrás két sarka közti potenciálkülönbséget, így egy ismeretlen elég a két csomópont potenciáljának leírásához.

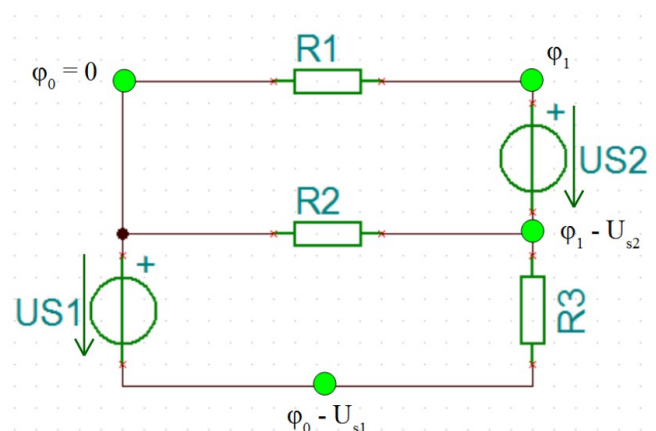
A csomóponti törvényeket a potenciálok és az ellenállások segítségével írjuk fel.

A módszer nem-lineáris hálózatok esetén is működik, mivel nem használja ki a szuperpozíció elvét.

Ismeretleneke minimális száma: $n - 1 - x$, ahol n a csomópontok száma, x pedig a független feszültségforrások száma. A potenciálokat rendszerint φ -vel jelöljük.

A módszer ismerete rendkívül fontos, gyakorlatok alkalmával tanuljuk meg megfelelően a használatát!

MP:



4 csomópont található a hálózatban, így 3 csomóponti potenciált kell bevezetnünk, a negyediket 0-nak választhatjuk. Válasszunk olyan csomópontot 0 értékűnek, ahova sok él fut be.

Azonban van két független feszültségforrás, tehát az ismeretlen csomóponti potenciálok számát 1-re csökkenthetjük.

A csomóponti törvényeket kell felírunk a ki és befolyó áramokra a potenciálok és az ellenállások segítségével. $R=U/I$, tehát $I=U/R$, ahol a feszültséget két potenciál különbségeként írhatjuk fel.

$$\varphi_0 - U_{s1}: \quad \frac{(\varphi_1 - U_{s2}) - (\varphi_0 - U_{s1})}{R_3} - I_{s1} = 0$$

$$\varphi_1: \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{R_3} + I_{s2} = 0$$

$$\varphi_1 - U_{s2}: \quad \frac{(\varphi_1 - U_{s2}) - \varphi_0}{R_2} + \frac{(\varphi_1 - U_{s1}) - (\varphi_0 - U_{s1})}{R_3} - I_{s2} = 0$$

Ismerjük az R és U_s értékeket, valamint tudjuk, hogy $\varphi_0 = 0$. Így ismeretlen számunkra a feszültségforrások árama és a φ_1 potenciál, amiket a 3 egyenlet felhasználásával könnyedén kiszámolhatunk.

A feszültségforrások áramának ismeretlenként való felvételét elkerülhetjük egy trükkel: Ne a feszültségforrás áramát vegyük fel, hanem a vele sorba kötött ellenállás áramát.

Tehát például I_{s1} helyett felvehetjük az R_3 áramát:

$$I_{s1} = \frac{(\varphi_0 - U_{s1}) - (\varphi_1 - U_{s2})}{R_3}$$

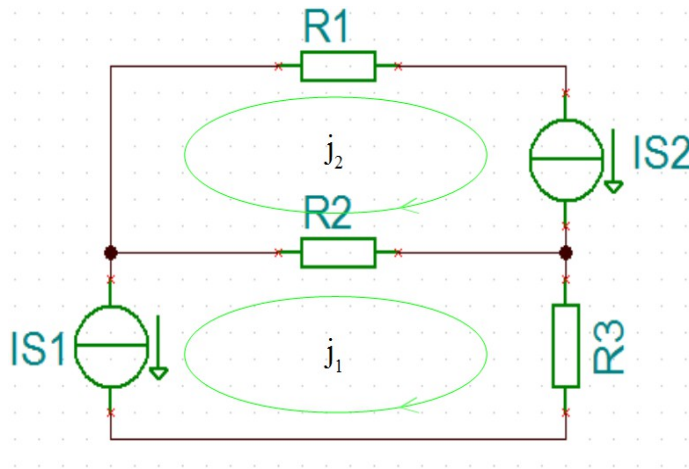
Hurokáramok módszere:

Csökkenthetjük az ismeretlenek számát, ha fiktív hurokáramokat vezetünk be. Az egyes áramokat ekkor a hurokáramokkal kifejezhetjük.

Hurokáramok felvételénél a csomóponti törvények automatikusan teljesülnek. Mivel a módszer kihasználja a szuperpozíció elvét, ezért csak lineáris hálózatokon működik!

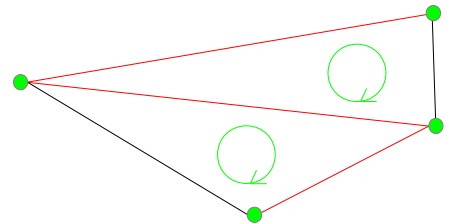
Ha egy áramforráson csak egyetlen hurok megy át, akkor annak a huroknak az árama pontosan megegyezik az áramforrás áramával. A huroktörvényeket a hurokáramok és az ellenállások segítségével írhatjuk fel. Ismeretlenek minimális száma: $b - n + 1 - x$, ahol b az élek száma, n a csomópontok száma, x pedig a független áramforrások száma. De ezt **csak akkor érhetjük el, ha minden áramforráson egyetlen hurok megy át!** A hurokáramokat j -vel jelöljük.

MP:



Először is határozzuk meg, hogy hány független hurok van: $b - n + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$. Ezek megtalálásához fel kell rajzolnunk a hálózat helyettesítő gráfját, és választanunk kell egy feszítőfát.

Minden a feszítőfában (piros élek) nem szereplő élre (fekete élek) kell egy hurok, amelyet csak az adott fekete él és bármennyi piros él határol. A hurkok irányát mi választhatjuk meg. Úgy választjuk a feszítőfát és a hurkokat, hogy minden áramforráson lehetőség szerint 1 hurok menjen át, mivel így annak a huroknak az árama megegyezik az áramforrás áramával.



Írjuk fel a hurkokra a huroktörvényt az alábbiak ismeretében: $R = U/I$ tehát $U = R \cdot I$

$j_1 = I_{s1}$ és $j_2 = I_{s2}$, mivel mindkét áramforráson pontosan 1 hurok megy át.

$$j_1: (j_1 - j_2) \cdot R_2 + j_1 \cdot R_3 - U_{s1} = 0$$

$$j_2: j_2 \cdot R_1 + (j_2 - j_1) \cdot R_2 + U_{s2} = 0$$

Az egyenletekből adódik U_{s1} , U_{s2} .

Az ellenállások áramai a rajtuk átfolyó hurokáramok előjeles összegei.

Azokat a hurokáramokat, amelyek áramát ismerjük, nem szükséges felvennünk ismeretlenként, amennyiben nem kérdezik az áramforrások feszültségét, teljesítményét.

Helyettesítő generátorok és teljesítményillesztés

Helyettesítő generátorok tétele:

Minden kétpólus, amely lineáris elemek összekapcsolásából áll, helyettesítő **Thevenin** vagy **Norton generátorral**.

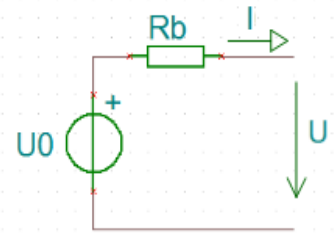
Thevenin generátor:

Valós feszültséggenerátor, mely áll egy ideális feszültségforrásból és egy soros belső ellenállásból.

A generátor karakterisztikája:

$$U = R_b \cdot I + U_0$$

Ha a hálózat kizárólag független forrásokat tartalmaz, az R_b megegyezik a dezaktivizált hálózat ellenállásával.



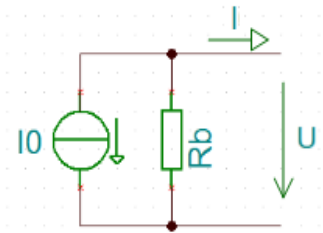
Norton generátor:

Valós áramforrás, mely áll egy ideális áramforrásból és egy párhuzamos belső ellenállásból.

Norton generátor karakterisztikája:

$$I = -I_0 + \frac{1}{R_b} \cdot U$$

Ha a hálózat kizárólag független forrásokat tartalmaz, az R_b megegyezik a dezaktivizált hálózat ellenállásával.



Lineáris hálózatok esetén két méréssel meghatározhatjuk a helyettesítő generátor paramétereit:

Thevenin generátor paramétere:

Üresjárási feszültség $\rightarrow u = u_0$

Rövidzárási áram $\rightarrow i = u_0 / R_b$

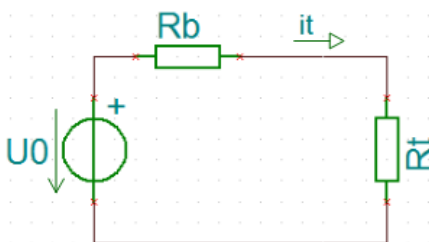
Nortongenerátor paramétere:

Üresjárási feszültség $\rightarrow u = R_b \cdot i_0$

Rövidzárási áram $\rightarrow i = i_0$

Teljesítményillesztés:

Tetszőleges kétpólus esetén határozzuk meg úgy a lezáró (terhelő) ellenállás értékét, hogy R_t teljesítménye maximális legyen. Mivel a tetszőleges kétpólushoz meghatározhatjuk a Thevenin vagy a Norton helyettesítőképet, így elég, ha ezen helyettesítések esetén megoldjuk a problémát:



Meghatározhatjuk a terhelő ellenállás teljesítményét az R_b függvényében:

$$P_{R_t} = u_t \cdot i_t = u_0 \cdot R_t / (R_b + R_t) \cdot u_0 / (R_b + R_t) = u_0^2 \cdot R_t / (R_b + R_t)^2$$

A teljesítményfüggvény független változója R_t , melynek függvényében deriválva, és a deriváltat 0-val egyenlővé téve adódik a teljesítményillesztés feltétele: $R_t = R_b$

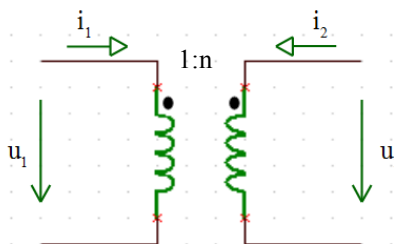
Ekkor a maximális teljesítmény u_0 és R_b függvényében: $P_{\max} = \frac{u_0^2}{4 \cdot R_b}$

Csatolt kétpólusok

Csatolt kétpólusnak nevezünk 2 darab kétpólust, ha valamilyen tulajdonságaik közt kapcsolat áll fenn.

Ideális transzformátor:

Rajzjele a következő:



A két pont a tekercs felett az áramok irányát jelöli, mivel egy rajzon a két tekercs egymástól távolra is kerülhet. Az ideális transzformátort egy áttétel jellemzi, melyet 1:n vagy n:1 formában szokás megadni.

Az ideális transzformátor karakterisztikája:

$$\begin{aligned} u_1 &= n \cdot u_2 \\ i_1 &= -i_2 / n \end{aligned}$$

Ideális transzformátor energiája:

$$P = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 = 0$$

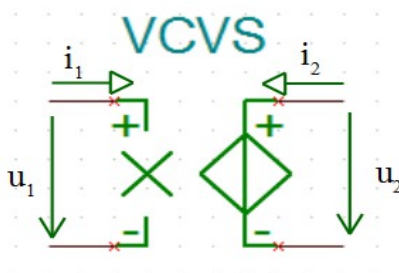
Az ideális transzformátor nonenergikus!

Transzformátort használhatunk impedanciaillesztésre például, egy ideális transzformátor a mögé kötött ellenállást n^2 -szeresére növeli.

Az ideális transzformátor annyira idealizált, hogy egyenárammal is működik!

Feszültségvezérelt feszültségforrás:

Rajzjele a következő:



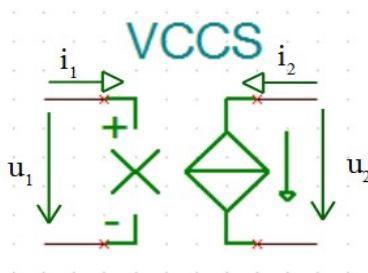
Olyan feszültségforrás, melyet egy szakadáson mért feszültség vezérel. Ez a szakadás lehet például egy ellenállás két pólusa közt mérhető feszültség.

Karakterisztika:

$$\begin{aligned} u_2 &= \alpha \cdot u_1 \\ i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\alpha \text{ mértékegység nélküli arányszám})$$

Feszültségvezérelt áramforrás:

Rajzjele a következő:



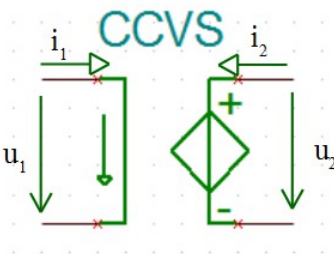
Olyan áramforrás, melyet egy szakadáson mért feszültség vezérel.
Ez a szakadás lehet például egy ellenállás két pólusa közt mérhető feszültség.

Karakterisztika:

$$\begin{aligned} i_2 &= g * u_1 \\ i_1 &= 0 \end{aligned} \quad ([g] = \text{siemens, tehát vezetés dimenziójú arányossági tényező})$$

Áramvezérelt feszültségforrás:

Rajzjele a következő:



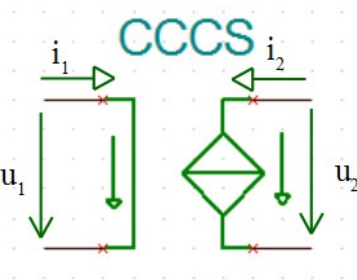
Olyan feszültségforrás, melyet egy rövidzáron mért áram vezérel.
Ez a rövidzár lehet például egy ellenállás után lévő szakasz, melyen az ellenállás árama folyik keresztül.

Karakterisztika:

$$\begin{aligned} u_2 &= r * i_1 \\ u_1 &= 0 \end{aligned} \quad ([r] = \text{ohm, tehát ellenállás dimenziójú arányossági tényező})$$

Áram vezérelt áramforrás:

Rajzjele a következő:



Olyan áramforrás, melyet egy rövidzáron mért áram vezérel.
Ez a rövidzár lehet például egy ellenállás után lévő szakasz, melyen az ellenállás árama folyik keresztül.

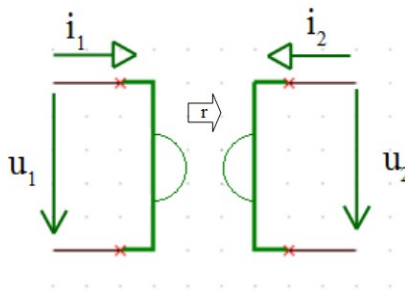
Karakterisztika:

$$\begin{aligned} i_2 &= \mu * i_1 \\ u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\mu \text{ mértékegység nélküli arányszám})$$

Energetikai szempontból a vezérelt források aktív elemek, lehetnek termelők és fogyasztók is.

Girátor:

Rajzjele a következő:



Karakterisztika:

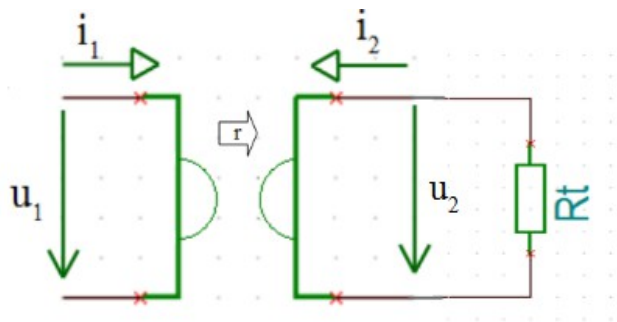
$$\begin{aligned} u_2 &= r \cdot i_1 \\ u_1 &= -r \cdot i_2 \end{aligned}$$

R ellenállás dimenziójú arányossági tényező. Ha g paramétert adnak meg, akkor $g = 1/R$ helyettesítést kell alkalmazni, ahol g vezetés dimenziójú arányossági tényező.

Energia szempontjából a girátor **nonenergikus!**

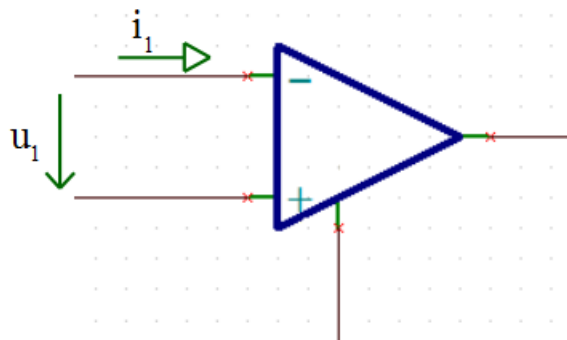
Használhatjuk például ellenállásillesztésre:

$$\frac{u_1}{i_1} = \frac{r^2}{R_t}$$



Ideális erősítő:

Rajzjele a következő:



Az ideális erősítő lényegében egy különleges karakterisztikájú, feszültség vezérelt feszültségforrás.

Karakterisztika:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ i_0 &= 0 \end{aligned}$$

Az ideális erősítő kimenetéről nem tudunk nyilatkozni!

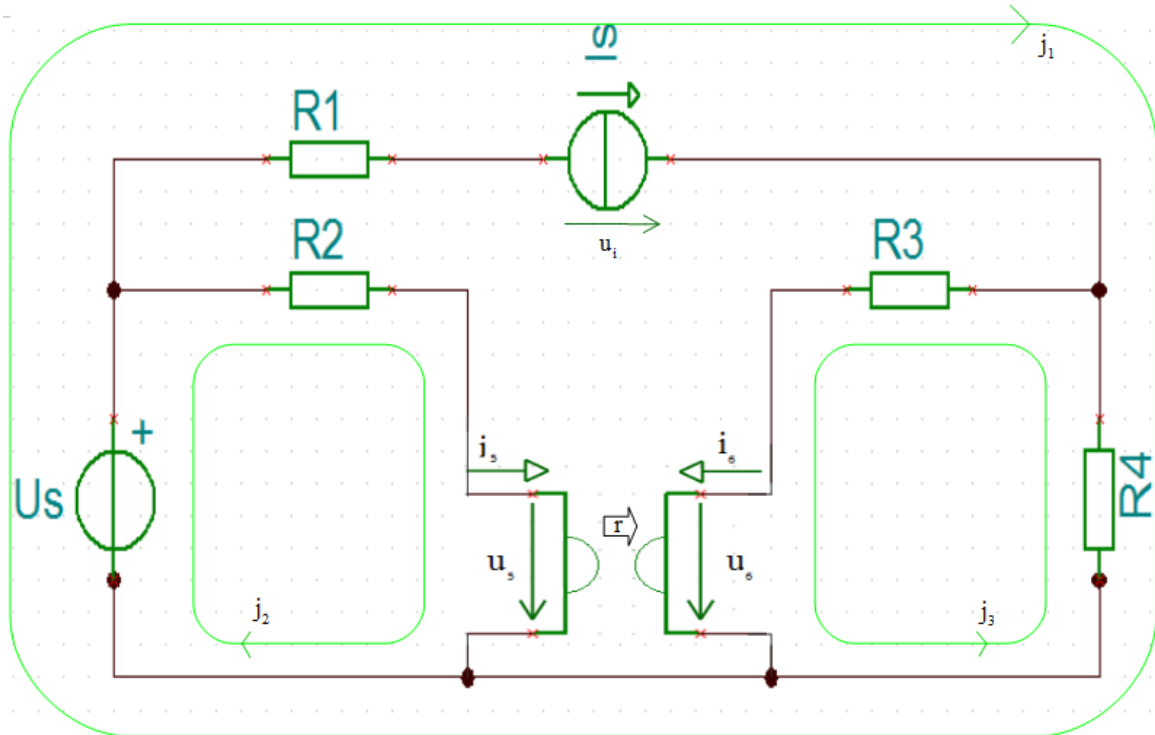
Az ideális erősítő **aktív elem!**

Csatolt kétpólusokat tartalmazó áramkörök analízise

Csatolt kétpólusokat tartalmazó hálózatok analízise ugyan úgy történik, ahogy eddig bármely esetben. Felírhatjuk rájuk a Kirchoff-egyenletek teljes rendszerét, megoldhatjuk hurokáramokkal vagy csomóponti potenciálokkal a feladatot.

A csatolt kétpólusok számának megfelelően $2 \cdot n$ darab egyenlet a kétpólusok karakterisztikus egyenleteiből származik!

MP:



Csomóponti potenciálok módszerével 5 egyenletünk volna, hurokáramokkal azonban 3 is elég lesz. Ettől függetlenül a feladat gond nélkül megoldható a csomóponti potenciálok segítségével is!

$$\dot{\mathbf{i}}_s = \dot{\mathbf{j}}_1$$

$$j_1: \quad -u_s + j_1 * R_1 + u_i + (j_1 - j_3) * R_4 = 0$$

$$j_2: \quad -u_s + j_2^* R_2 + u_5 = 0$$

$$j_3: \quad u_6 + (j_3 - j_1) \cdot R_4 + j_3 \cdot R_3 = 0$$

Ismeretlenek: j_2, j_3, u_i, u_5, u_6 , viszont csak 3 egyenletünk van, szükségünk lesz a girátor karakterisztikus egyenleteire:

$$\mathbf{u}_6 = \mathbf{r}^* \mathbf{i}_5$$

$$\mathbf{u}_5 = -\mathbf{r}^* \mathbf{i}_6$$

Viszont így i_5 és i_6 is bekerült mint ismeretlen, melyeket viszont könnyedén kifejezhetjük j_1, j_2, j_3 segítségével:

$$\mathbf{i}_5 = \mathbf{j}_2$$

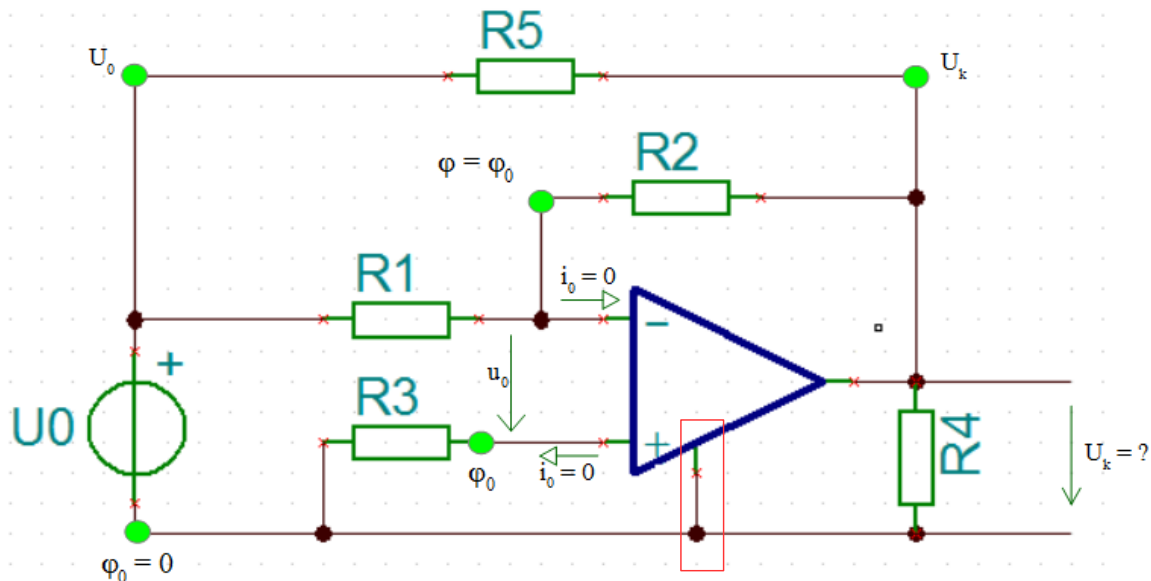
$$i_6 = j_3$$

Az egyenletrendszer megoldható.

Hasonló feladatok a gyakorlatokon elő fognak fordulni, gyakoroljuk be őket!

Ideális erősítő tartalmazó hálózatok analízise

Ideális erősítő tartalmazó hálózat analízise szinte **minden esetben a csomóponti potenciálok módszerével** történik. 0 potenciálnak kell választanunk az erősítő alsó kimeneti lábát. A kimenet árama megegyezik az ezen lábon folyó árammal. A kimenetre egyenletet nem írhatunk fel!



Válasszuk meg a megfelelő ϕ_0 potenciált, mely az erősítő alsó lábához tartozó csomópont **legyen!**

Az ideális erősítő karakterisztikájából tudjuk, hogy $i_0 = 0$, tehát az R_3 ellenálláson nem folyik át áram, ami azt jelenti, hogy a hozzá tartozó potenciál is ϕ_0 . Továbbá tudjuk, hogy $u_0 = 0$ (még mindig a karakterisztikájából adódóan), így tudjuk, hogy R_1 ellenállás jobb oldalán is ϕ_0 a potenciál.

A maradék két potenciál közül a bal oldali a forrásfeszültséggel megegyező potenciál, míg a jobb oldali a keresett érték.

R_1 árama könnyedén meghatározható: $i_1 = U_0/R_1$

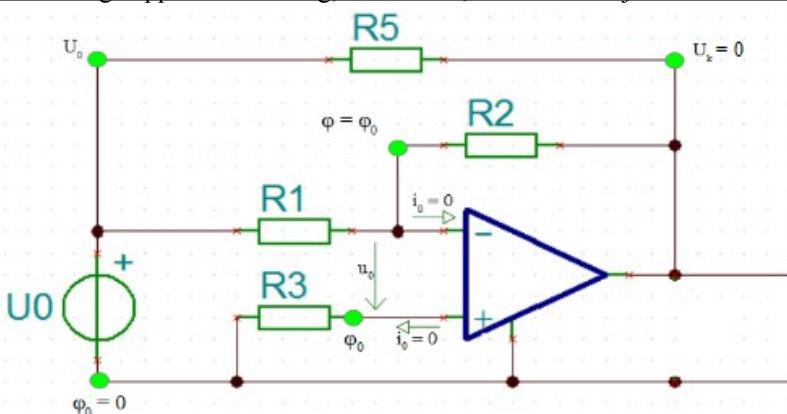
R_2 árama éppen megegyezik R_1 áramával, mivel a bemenet irányába $i_0 = 0$.

Erre a ϕ -vel jelölt csomópontra felírhatjuk a csomóponti törvényt:

$$\frac{(0-U_0)}{R_1} + \frac{(0-U_k)}{R_2} + 0 = 0$$

Ebből átrendezéssel adódik az $U_k/U_0 = R_2/R_1$ összefüggés.

Érdekesség képpen nézzük meg, mi történik, ha rövidre zárjuk a kimenetet:



R_1 ellenálláson továbbra is U_0/R_1 áram folyik át. Azonban R_2 ellenállás mindkét oldala azonos potenciálon van, így rajta nem folyik áram, i_0 definíció szerint 0, így nem teljesül a csomóponti törvény. **Nem reguláris hálózatot kaptunk.**

(Könnyen kitalálható, hogy az erősítő a valóságban ebben az esetben tönkremegy megfelelő védelem nélkül.)

Kétkapu karakterisztikák

Kétkapunak nevezünk két egymáshoz rendelt kétpólust (amely bármiféle kapcsolásból felépülhet), amennyiben őket egyetlen egy módon, 1-1 kétpólussal zárhatjuk le. Ekkor a kétkaput bemenetének és kimenetének feszültsége és árama teljesen jellemzi, míg egy 4 pólus esetén a teljes jellemzéshez 3 feszültség és 3 áram meghatározása szükséges.

Kétkapukat tehát mindig egyféleképpen, 1-1 kétpólussal zárhatjuk le. Semmilyen más lezárás nem megengedett!

A lezárt kétkapuk hálózatot alkotnak.

Hibrid típusú karakterisztikák:

1. Impedancia karakterisztika:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_{11} * i_1 + R_{12} * i_2 \\ u_2 &= R_{21} * i_1 + R_{22} * i_2\end{aligned}$$

2. Admittancia karakterisztika:

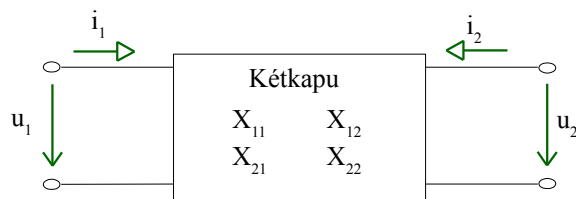
$$\begin{aligned}i_1 &= G_{11} * u_1 + G_{12} * u_2 \\ i_2 &= G_{21} * u_1 + G_{22} * u_2\end{aligned}$$

3. Hibrid karakterisztika:

$$\begin{aligned}u_1 &= H_{11} * i_1 + H_{12} * u_2 \\ i_2 &= H_{21} * i_1 + H_{22} * u_2\end{aligned}$$

4. Inverz hibrid karakterisztika:

$$\begin{aligned}i_1 &= K_{11} * u_1 + K_{12} * i_2 \\ u_2 &= K_{21} * u_1 + K_{22} * i_2\end{aligned}$$



X a megfelelő karakterisztika megfelelő paramétere.

Lánc típusú karakterisztikák:

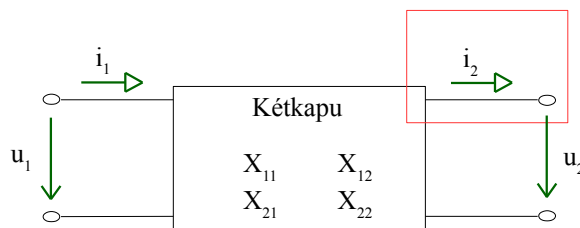
Hasznos lehet sorba kötött kétkapuk esetén, ha az áram referencia irányát nem a kétkapuba befolyónak, hanem a kétkapuból kifolyónak választjuk. Ez a **lánc referencia irány**.

1. Lánc karakterisztika:

$$\begin{aligned}u_1 &= A_{11} * u_2 + A_{12} * i_2 \\ i_1 &= A_{21} * u_2 + A_{22} * i_2\end{aligned}$$

2. Inverz lánc karakterisztika

$$\begin{aligned}u_2 &= B_{11} * u_1 + B_{12} * i_1 \\ i_2 &= B_{21} * u_1 + B_{22} * i_1\end{aligned}$$



X a megfelelő karakterisztika megfelelő paramétere.

A lánc típusú karakterisztikáknak pont a megfordított áramirány a lényege!

Kétkapu paraméterek meghatározása

Csak hálózatra tudunk hálózati egyenleteket felírni, így a kétkapukat valamilyen módon le kell zárunk!

„Extrém lezárások” módszere:

MP:

Határozzuk meg egy adott kétkapu impedanciakarakterisztikáját:

A keresett karakterisztika a következő:

$$u_1 = R_{11} * i_1 + R_{12} * i_2$$

$$u_2 = R_{21} * i_1 + R_{22} * i_2$$

Az R_{ij} értékeket szeretnénk meghatározni úgy, hogy a ki és bemeneteket rövidzárral vagy forrással zárjuk le.

- Zárjuk le a kimenetet szakadással és a bemenetre helyezzünk feszültségforrást.

Ekkor $i_2 = 0$ és u_1 ismert, így R_{11} meghatározható:

$$R_{11} = u_1 / i_1$$

- A bemeneten helyezzünk el szakadást a kimeneten pedig egy áramforrást:

Ekkor $i_1 = 0$ és i_2 ismert, így R_{12} meghatározható:

$$R_{12} = u_1 / i_2$$

Az eljárást folytatva a karakterisztika összes paraméterét meghatározhatjuk. Ehhez azonban összesen 4 mérést kell elvégeznünk, ami pazarlás.

A módszer csak akkor hatékony, ha egyetlen paraméterre vagyunk kíváncsiak.

„Józan lezárások” módszere:

A kapukat áram és feszültségforrásokkal zárjuk le, és felírjuk a hálózati egyenletek egy teljes rendszerét, majd az u_1 és u_2 -t meghatározzuk i_1 és i_2 függvényében, amihez minden más ismeretlent az egyenletek segítségével ki kell küszöbölnünk.

A következő lezárásokkal kapjuk az ideális egyenletrendszereket:

R meghatározásához a kimenetre és a bemenetre is áramforrást helyezzünk.

H meghatározásához helyezzünk áramforrást a bemenetre és feszültségforrást a kimenetre.

G meghatározásához a kimenetre és a bemenetre is feszültségforrást helyezzünk.

K meghatározásához helyezzünk feszültségforrást a bemenetre és áramforrást a kimenetre.

Megj.: Nem minden kétkapu rendelkezik az összes típusú karakterisztikával!

MP.: Ideális erősítő esetén i_2 -t nem fejezhetjük ki, így egyetlen karakterisztikája se lehet, ahol bal oldalon i_2 szerepel.

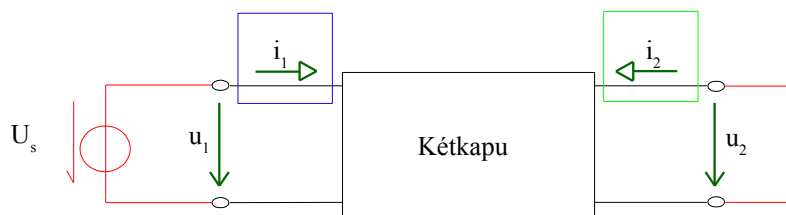
Megj.: Ha létezik legalább 2 karakterisztika, akkor egyikből a másik számítható!

Megj.: Kétkapukra vonatkozó példák esetén első dolgunk, hogy felírjuk a kétkapu karakterisztikáját.

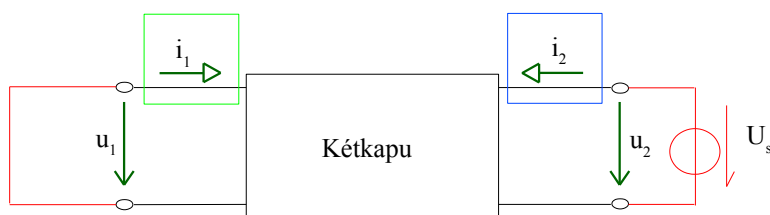
Reciprocitás és szimmetria kétkapuk esetén

A reciprocitást és a szimmetriát két méréssel vizsgálhatjuk.

Zárjuk le egy feszültségforrással a kétkapu primer oldalát (ekkor $U_s = u_1$), és egy rövidzárral a szekunder oldalt. Mérjük meg a primer és a szekunder oldali áramokat (i_1 és i_2).



Cseréljük meg a mérés és a gerjesztés helyét és végezzük el újra a méréseket.



Áll.: **Reciprok a kétkapu**, ha az első esetben mért i_2 megegyezik a második esetben mért i_1 árammal. ■

Áll.: **Szimmetrikus a kétkapu**, ha reciprok és az első esetben mért i_1 megegyezik a második esetben mért i_2 árammal. ■

Áll.: Áramforrással és szakadással való lezárás esetén is vizsgálható a tulajdonság, ebben az esetben a feszültségeket kell mérnünk.

Áll.: Ha a kétkapu csak ideális transzformátorokból és ellenállásokból épül fel, akkor minden esetben reciprok.

Áll.: A girátor, az ideális erősítő és a vezérelt források jellemzően nem reciprokok.

Reciprocitás meghatározására szolgáló alternatív mérés:

1. Primer oldalt zárjuk le i_s áramú áramforrással, mérjük a szekunder oldali rövidzáron átfolyó áramot (i_2).
2. Szekunder oldalt zárjuk le u_s feszültségű feszültségforrással, mérjük a primer oldali szakadás feszültségét (u_1).

Ha teljesül, hogy
$$\frac{i_2}{i_s} = -\frac{u_1}{u_s},$$
 akkor reciprok.

A mérés megfordítva is végezhető.

Reciprocitás és szimmetria meghatározása a karakterisztika ismeretében:

Amennyiben ismerjük az adott kétkapú valamely karakterisztikáját, abból könnyedén meghatározhatjuk, hogy reciprok és szimmetrikus-e.

MP:

Határozzuk meg impedancia karakterisztika esetén a reciprocitáshoz szükséges feltételeket.

Első mérés esetén áramforrással zárjuk le a primer oldalt, melynek árama i_s , és a szekunder oldali szakadáson mérjük a feszültséget. Ekkor a következőket tudjuk:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_s + R_{12} \cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_s + R_{22} \cdot i_2 \\ i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Hiszen szakadással zártuk le a szekunder oldalt})$$

Második mérés esetén cseréljük meg az előző mérés elrendezését, tehát a szekunder oldalon legyen az áramforrás, és a primer oldalt zárjuk le szakadással. Ekkor a következőket tudjuk:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_s \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_s \\ i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Hiszen szakadással zártuk le a primer oldalt})$$

A kétkapú reciprok, ha az első esetben mért u_2 és a második esetben mért u_1 megegyezik. Fejezzük ki tehát u_2 -t az első, és u_1 -et a második mérésből:

$$\begin{aligned} u_2 &= R_{21} \cdot i_s \\ u_1 &= R_{12} \cdot i_s \end{aligned}$$

Ebből egyértelműen látszik, hogy u_1 és u_2 akkor lesz egyenlő, tehát a kétkapú akkor lesz **reciprok**, ha $R_{21} = R_{12}$.

Vizsgáljuk meg milyen feltételek mellett lesz szimmetrikus a kétkapú (ismerjük már a reciprocitás feltételét, és tudjuk, hogy a szimmetriához szükség szerint ennek teljesülnie kell).

Ehhez az szükséges, hogy az első esetben mért u_1 megegyezzen a második esetben mért u_2 -vel. Fejezzük ki tehát az első mérésből u_1 -et, és a második mérésből u_2 -t:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_s \\ u_2 &= R_{22} \cdot i_s \end{aligned}$$

Ebből egyértelműen látszik, hogy u_1 és u_2 akkor lesz egyenlő, tehát a kétkapú akkor lesz **szimmetrikus**, ha $R_{11} = R_{22}$.

Levezetés nélkül nézzük meg az összes karakterisztika esetén a feltételeket:

Reciprocitás	Szimmetria
$R_{12} = R_{21}$	$R_{11} = R_{22}$
$G_{12} = G_{21}$	$G_{11} = G_{22}$
$H_{12} = -H_{21}$	$\det H = 1$
$K_{12} = -K_{21}$	$\det K = 1$
$\det A = +/ - 1$	$A_{22} = +/ - A_{11}$
$\det B = +/ - 1$	$B_{22} = +/ - B_{11}$

$+/-$: Lánc referenciáirányánál $+$, szimmetrikus referenciáirányánál $-$.

Energetikai megfontolások kétkapuk esetén

Def.: Adott kétkapu teljesítménye $P = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2$

Az összefüggést könnyedén bizonyíthatjuk, amennyiben a kétkaput lezárjuk 1-1 kétpólussal.

Def.: Adott kétkapu **passzív**, ha $P > 0$.

Def.: Adott kétkapu **nonenergikus**, ha $P = 0$.

Áll.: Adott kétkapu aktív, ha nem passzív és nem nonenergikus.

A karakterisztikákat behelyettesítve a $P = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2$ összefüggésbe, könnyedén levezethetjük a passzivitás feltételeit bármely karakterisztika esetén.

MP:

Impedancia karakterisztika esetén az alábbi feltételek adódnak a passzivitásra:

$$R_{11}, R_{22} \geq 0 \text{ és } 4 \cdot R_{11} \cdot R_{22} \geq (R_{12} + R_{21})^2$$

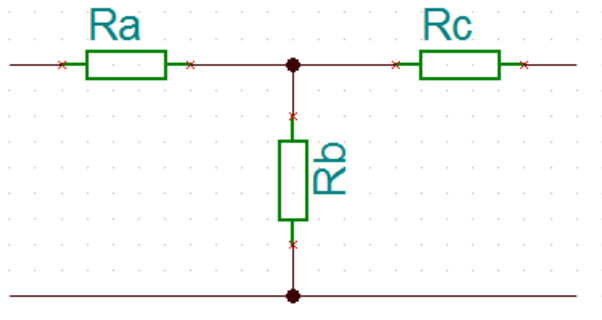
Áll.: Minden hibrid típusú karakterisztikával rendelkező kétkapu esetén a kétkapu passzív, ha teljesülnek az alábbiak:

$$X_{11}, X_{22} \geq 0 \text{ és } 4 \cdot X_{11} \cdot X_{22} \geq (X_{12} + X_{21})^2$$

Kétkapuk helyettesítő kapcsolásai

Reciprok kétkapuk T helyettesítő kapcsolása:

Áll.: A reciprok kétkapuk helyettesíthetők a következő minimális elemszámú kapcsolással:



A kapu karakterisztikája alapján kell megadnunk az R_a , R_b és R_c ellenállások értékét, hogy megkapjuk a helyettesítést.

MP:

Határozzuk meg egy kétkapu impedancia karakterisztikája alapján a T helyettesítését.

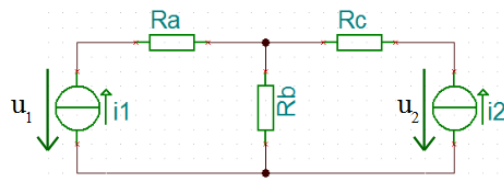
A karakterisztika:

$$u_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2$$

$$u_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2$$

Mivel a helyettesítésre egy impedancia karakterisztikát szeretnénk meghatározni, ezért célszerű volna áramforrásokkal lezárni.

Ezek után írjuk fel a lezárt helyettesítésre a karakterisztikát:



$$u_1 = (R_a + R_b) \cdot i_1 + R_b \cdot i_2$$

$$u_2 = R_b \cdot i_1 + (R_b + R_c) \cdot i_2$$

Ezt kell egyenlővé tennünk a már felírt karakterisztikával, amely az R_{ij} tagokat tartalmazza.

Az R_{ij} -kre a következők adódnak:

$$R_{11} = R_a + R_b$$

$$R_{12} = R_{21} = R_b$$

$$R_{22} = R_b + R_c$$

Miután R_{ij} értékek adóttak, ez egy 3 ismeretlenes egyenletrendszer, melynek létezik megoldása R_a , R_b és R_c -re.

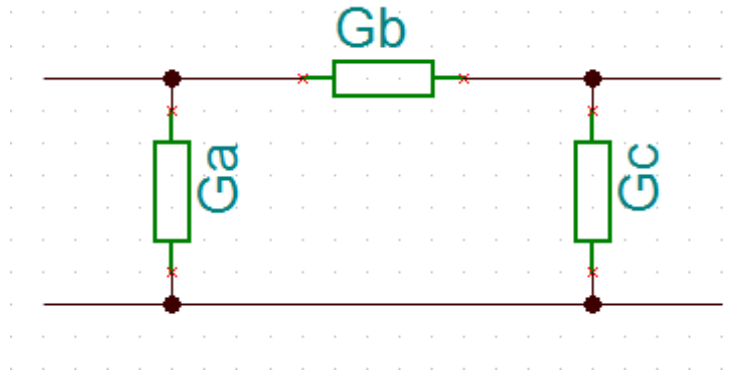
$$R_b = R_{12}$$

$$R_a = R_{11} - R_{12}$$

$$R_c = R_{22} - R_{12}$$

Reciprok kétkapuk Π helyettesítő kapcsolása:

Áll.: A reciprok kétkapu helyettesíthetőek a következő minimális elemszámú kapcsolással:



A kapu karakterisztikája alapján kell megadnunk az G_a , G_b és G_c **vezetések** értékét, hogy megkapjuk a helyettesítést.

MP:

Határozzuk meg egy kétkapu admittancia karakterisztikája alapján a T helyettesítését.

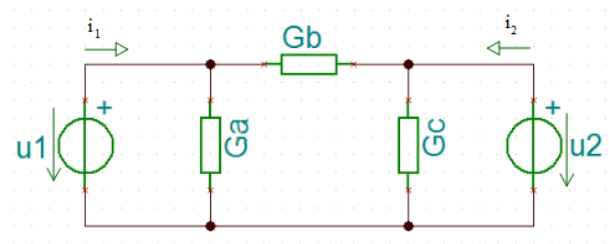
A karakterisztika:

$$\begin{aligned} i_1 &= G_{11} * u_1 + G_{12} * u_2 \\ i_2 &= G_{21} * u_1 + G_{22} * u_2 \end{aligned}$$

Admittancia karakterisztika esetén feszültségforrásokkal kell lezárunk a helyettesítő kapcsolást.

Ezek után írjuk fel a lezárt helyettesítésre a karakterisztikát (csomóponti potenciálok módszerével írjuk fel a két csomóponti egyenletet):

$$\begin{aligned} i_1 &= (G_a + G_b) * u_1 + (-G_b) * u_2 \\ i_2 &= (-G_b) * u_1 + (G_b + G_c) * u_2 \end{aligned}$$



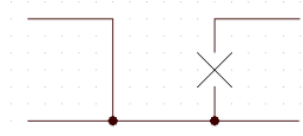
Ezt egyenlővé téve a megadott karakterisztikával és az egyenletrendszert megoldva:

$$\begin{aligned} G_a &= G_{11} + G_{12} \\ G_b &= -G_{12} \\ G_c &= G_{22} - G_{12} \end{aligned}$$

Mint a T, mint a Π helyettesítés értékeit meghatározhatjuk a fentebbi módon bármely hibrid karakterisztikával rendelkező kétkapu esetén.

Előfordulhat olyan eset, ahol se T, se Π helyettesítést nem tudunk felírni.

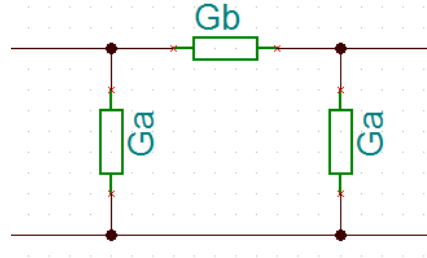
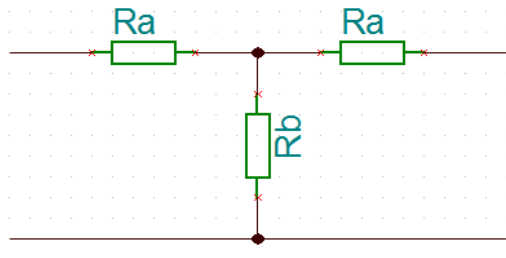
Tipikusan ilyen az ideális transzformátor, vagy a mellékelt rajzon szereplő bugyuta kétkapu.



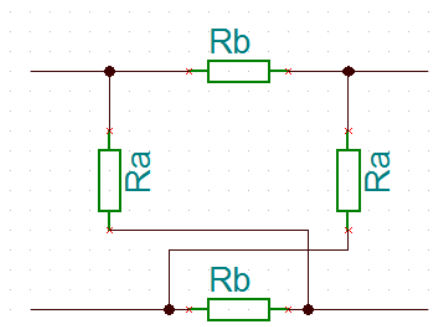
Szimmetrikus kétkapu helyettesítése:

Áll.: Szimmetrikus kétkapu T helyettesítő kapcsolásában $R_a = R_c$.

Áll.: Szimmetrikus kétkapu II helyettesítő kapcsolásában $G_a = G_c$.

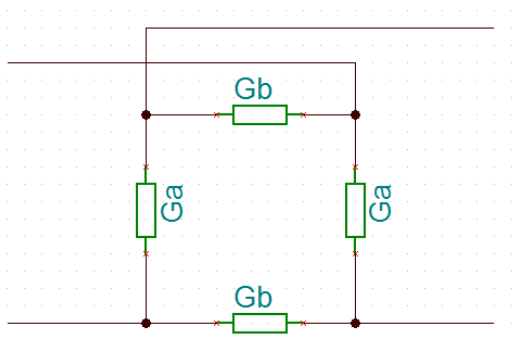


Szimmetrikus kétkapukra létezik másik két fajta helyettesítő kapcsolás is:



$$R_a = R_{11} - R_{12}$$

$$R_b = R_{22} + R_{12}$$



$$G_a = G_{11} - G_{12}$$

$$G_b = G_{22} + G_{12}$$

Ezen helyettesítő kapcsolások azonban nem minimális elemszámúak.

Nem reciprok kétkapuk természetes helyettesítő kapcsolása:

MP:

Nem reciprok kapukat már nem tudunk annyira egyszerűen helyettesíteni, vezérelt forrásokra van szükségünk. Impedancia karakterisztika esetén a következő módon néz ki a helyettesítés:



A következő karakterisztikával rendelkező kétkaput szeretnénk helyettesíteni:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} * i_1 + R_{12} * i_2 \\ u_2 &= R_{21} * i_1 + R_{22} * i_2 \end{aligned}$$

A primer oldalon az R_{11} ellenálláson i_1 pontosan $R_{11} * i_1$ feszültséget ejt, míg az áramvezérelt feszültségforrás feszültsége pontosan $R_{12} * i_2$, így tehát a kettő összege adja az u_1 -et, ami meg is felel a karakterisztikának. A fentebbi gondolatmenet a szekunder oldalon is megfelelő.

MP:

Nézzük meg admittancia karakterisztika esetén a természetes helyettesítést:



A következő karakterisztikát szeretnénk elérni:

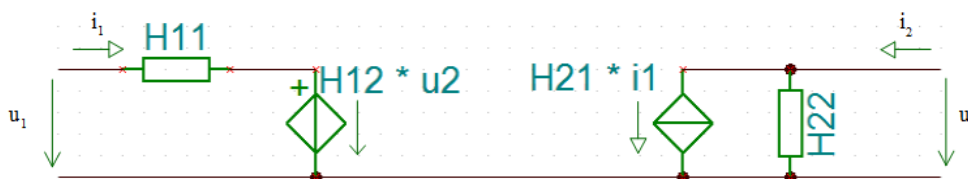
$$\begin{aligned} i_1 &= G_{11} * u_1 + G_{12} * u_2 \\ i_2 &= G_{21} * u_1 + G_{22} * u_2 \end{aligned}$$

Nézzük az előbb használt gondolatmenetet fordítva:

Az i_1 áram a $G_{11} * u_1$ áram és a $G_{12} * u_2$ áram összege. $G_{11} * u_1$ áram könnyedén előállítható, ha egy G_{11} értékű vezetést párhuzamosan kötjük u_1 -el. A $G_{12} * u_2$ áramot pedig egy áramforrással állíthatjuk elő, amelyet az u_2 vezérel, és amely egy G_{12} arányossági tényezővel rendelkezik. A szekunder oldal pont ugyan így állítható elő.

MP:

Állítsuk elő egy hibrid karakterisztikával rendelkező kétkapu helyettesítését.



A következő karakterisztikát szeretnénk előállítani:

$$\begin{aligned} u_1 &= H_{11} * i_1 + H_{12} * u_2 \\ i_2 &= H_{21} * i_1 + H_{22} * u_2 \end{aligned}$$

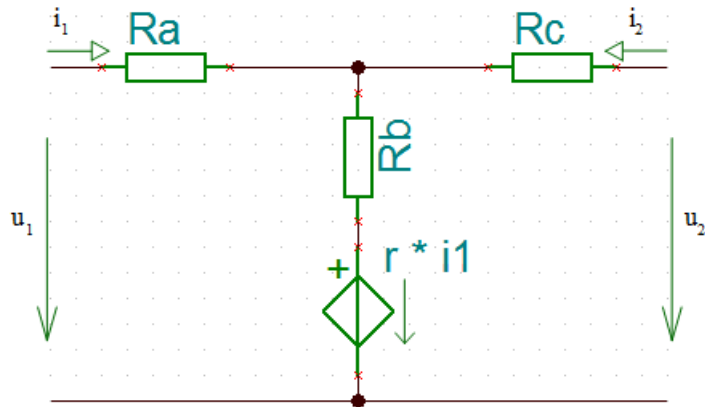
Csak kombinálnunk kell az impedancia és az admittanciakarakterisztikák esetében már meghatározott kapcsolásokat. A primer oldal úgy viselkedik, mintha impedancia karakterisztikánk volna, a szekunder oldal pedig olyan, mintha ott admittancia karakterisztikánk lenne.

Az inverz hibrid karakterisztikával rendelkező kétkapu helyettesítéséhez a fentebbi kapcsolást kell megfordítanunk.

Nem reciprok kétkapuk hibrid T helyettesítő kapcsolása:

Nem reciprok esetén használhatjuk a T helyettesítést, de ki kell egészítenünk a hálózatot egy vezérelt forrással is. A forrás megválasztásánál több lehetőségünk is van, de nem választhatunk például olyan hálózatot, ahol a vezérelt áramforrást saját árama vezérli, ugyanis az ilyen áramforrás egy ellenállásként működik.

Nézzük az alábbi esetet:



Határozzuk meg a karakterisztikáját a fentebbi hálózatnak:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_a \cdot i_1 + R_b \cdot (i_1 + i_2) + r \cdot i_1 \\u_2 &= R_c \cdot i_2 + R_b \cdot (i_1 + i_2) + r \cdot i_1\end{aligned}$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\begin{aligned}u_1 &= (R_a + R_b + r) \cdot i_1 + R_b \cdot i_2 \\u_2 &= (R_b + r) \cdot i_1 + (R_c + R_b) \cdot i_2\end{aligned}$$

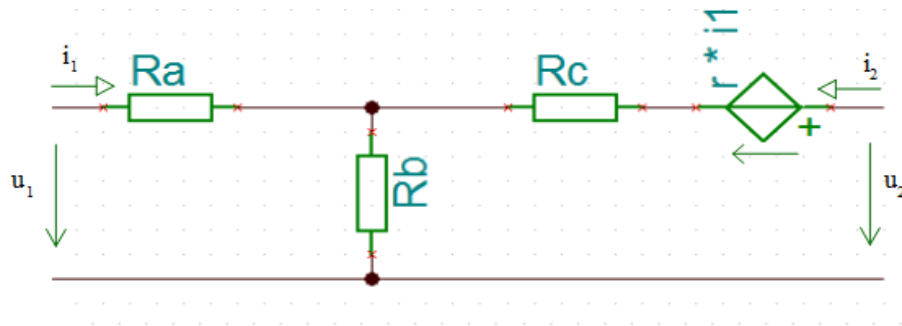
i_1 és i_2 szorzóit kell egyenlővé tennünk R_{ij} -ekkel.

$$\begin{aligned}R_{11} &= (R_a + R_b + r) \\R_{12} &= R_b \\R_{21} &= (R_b + r) \\R_{22} &= (R_c + R_b)\end{aligned}$$

Ekkor egy egyenletrendszerhez jutunk, melynek megoldása:

$$\begin{aligned}R_a &= R_{11} - R_{21} \\R_b &= R_{12} \\R_c &= R_{22} - R_{12} \\r &= R_{21} - R_{12}\end{aligned}$$

Nézzük az alábbi hibrid T helyettesítő kapcsolást:



Írjuk fel a helyettesítés karakterisztikáját:

$$\begin{aligned} u_1 &= (R_a + R_b) \cdot i_1 + R_b \cdot i_2 \\ u_2 &= (R_b + r) \cdot i_1 + (R_c + R_b) \cdot i_2 \end{aligned}$$

Ismét egyenlővé kell tennünk a szorzó tényezőket a megfelelő R_{ij} értékekkel, majd az egyenletrendszer megoldása után a következő értékek adódnak:

$$\begin{aligned} R_a &= R_{11} - R_{12} \\ R_b &= R_{12} \\ R_c &= R_{22} - R_{12} \\ r &= R_{21} - R_{12} \end{aligned}$$

Áll.: Amennyiben létezik impedanciakarakterisztika, létezik (hibrid-)T helyettesítés.

Ne lepődjünk meg azon se, ha negatív értékeket kapunk!

Nem reciprok kétkapuk hibrid II helyettesítő kapcsolása:

A II kapcsolást, akár csak a T-t, tudjuk használni nem reciprok kétkapuk esetén is, de mint a T-nél, itt is kiegészítésre van szükségünk. A vezérelt forrás helyét most is elég sokféleképpen választhatjuk meg.

MP:

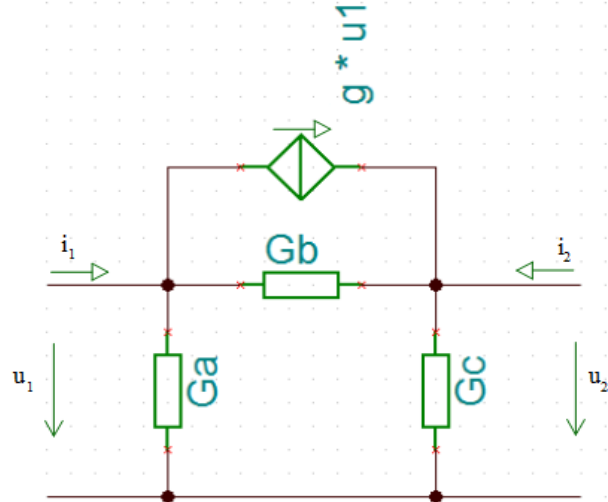
Nézzük az alábbi kapcsolást példálul, és határozzuk meg a paramétereket admittancia karakterisztikának megfelelően:

Ismét írjuk fel a helyettesítés karakterisztikáját
(csomóponti potenciálok segítségével például):

$$\begin{aligned} i_1 &= G_a * u_1 + G_b * (u_1 - u_2) + g * u_1 \\ i_2 &= G_c * u_2 + G_b * (u_2 - u_1) - g * u_1 \end{aligned}$$

Rendeznünk kell az egyenleteket:

$$\begin{aligned} i_1 &= (G_a + G_b + g) * u_1 + (-G_b) * u_2 \\ i_2 &= (-G_b - g) * u_1 + (G_c + G_b) * u_2 \end{aligned}$$



Az admittancia karakterisztikával egyenlővé téve és az egyenletrendszert megoldva, ahogy azt már jópárszor megcsináltuk más esetekben, a következő eredményt kapjuk a kérdéses paraméterekre:

$$\begin{aligned} G_a &= G_{11} + G_{21} \\ G_b &= -G_{12} \\ G_c &= G_{22} + G_{12} \\ g &= G_{12} - G_{21} \end{aligned}$$

MP:

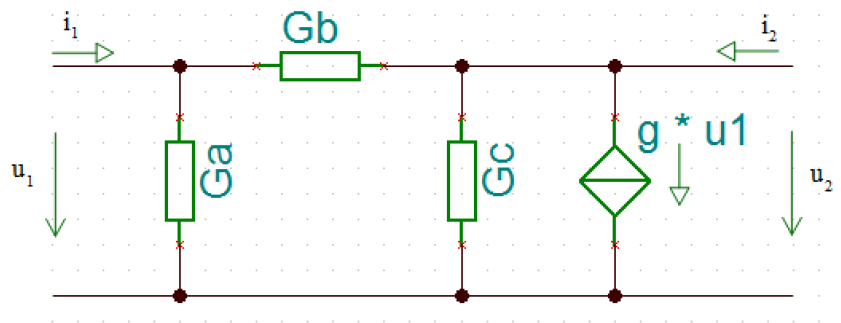
Nézzünk meg egy másik helyettesítést is:

A helyettesítés karakterisztikája:

$$\begin{aligned} i_1 &= G_a * u_1 + G_b * (u_1 - u_2) \\ i_2 &= g * u_1 + G_c * u_2 + (u_2 - u_1) * G_b \end{aligned}$$

A karakterisztikát rendezve:

$$\begin{aligned} i_1 &= (G_a + G_b) * u_1 + (-G_b) * u_2 \\ i_2 &= (-G_b + g) * u_1 + (G_c + G_b) * u_2 \end{aligned}$$



A rendezett karakterisztikát ismét egyenlővé tesszük az admittancia karakterisztikával, a következő megoldást kapjuk:

$$\begin{aligned} G_a &= G_{11} + G_{12} \\ G_b &= -G_{12} \\ G_c &= G_{22} + G_{12} \\ g &= G_{21} - G_{12} \end{aligned}$$

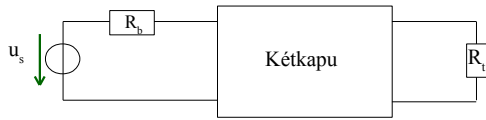
Áll.: Amennyiben létezik admittanciakarakterisztika, létezik (hibrid-)II helyettesítés.

Ne lepődjünk meg azon se, ha negatív értékeket kapunk!

Lezárt kétkapuk jellemzése

Adott kétkapú esetén többféle tulajdonságot kell jellemeznünk.

Zárjunk le egy tetszőleges kétkaput a primer oldalon Thevenin generátorral, a szekunder oldalon pedig egy ellenállással.



Ekkor az alábbi kérdéseket tehetjük fel:

- Mennyi a primer oldalról nézve a **bemeneti ellenállása** a kétkapunknak?
- Milyen **thevenin generátorral helyettesíthetjük** a hálózatot a szekunder oldalról nézve?
- Milyen **transzfer jellemzőkkel** bír a hálózat?
 - **Feszültségátviteli jellemzők:** $H_u = u_{\text{lezárás}} / u_1$
 - **Áramátviteli jellemzők:** $H_i = i_{\text{lezárás}} / i_1$
 - **Impedanciaátviteli jellemzők:** $R_r = u_{\text{lezárás}} / i_1$
 - **Admittanciaátviteli jellemzők:** $G_r = i_{\text{lezárás}} / u_1$

A transzfer jellemzők mindig csak meghatározott lezárás mellett érvényesek!

Jellemzők megállapítása a karakterisztikák ismeretében:

MP:

Határozzuk meg a fent felsorolt tulajdonságokat egy impedancia karakterisztikával adott kétkapú esetében:

A bemenő ellenállás meghatározása:

Ismerjük a kapu karakterisztikáját:

$$u_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2$$

$$u_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2$$

Megállapításokat tehetünk a korábbi ismereteink alapján:

- Tudjuk, hogy a szekunder oldali feszültség a terhelőellenállás és a szekunder oldali áram szorzatával megadható.

$$u_2 = - R_t i_2 \quad (\text{Figyeljünk az előjelre!})$$

- Tudjuk, hogy a primer oldalról látható ellenállás a primer oldali feszültség és a primer oldali áram hányadosa.

$$R_{be} = u_1 / i_1$$

A karakterisztika második egyenletéből fejezzük ki i_1 -et, majd az átrendezett egyenletbe írjuk be az első észrevételünkből adódó egyenletet, hogy megkapjuk i_2 -t i_1 függvényében.

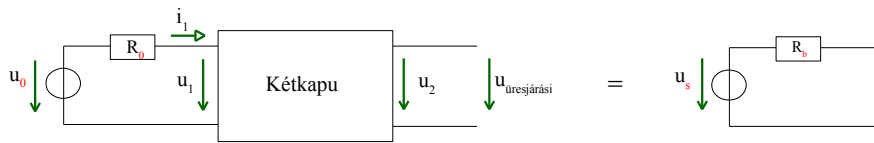
$$i_2 = -i_1 \cdot \frac{R_{21}}{R_t + R_{22}}$$

Az így kapott egyenletet helyettesítsük be a karakterisztika első egyenletébe, majd osszunk i_1 -gyel. Ekkor a következő eredményt kapjuk:

$$R_{be} = u_1 / i_1 = R_{11} - \frac{R_{12} \cdot R_{21}}{R_t + R_{22}}$$

A szekunder oldali helyettesítés meghatározása:

Határozzuk meg a helyettesítő Thevenin generátort.



Helyettesítő generátorhoz két mérést kell elvégeznünk.

Első mérés célja, az üresjáráti feszültség meghatározása.

Ismét a rendelkezésünkre áll az impedancia karakterisztika, ezzel dolgozhatunk.

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2 \end{aligned}$$

Fel kell írunk a primer oldalra egy hurokegyenletet, amely a következő módon néz ki:

$$R_0 i_1 + u_1 - u_0 = 0$$

Mivel a szekunder oldal nincs lezárva (egy szakadással van lezárva), ezért tudjuk azt is, hogy $i_2 = 0$

Tehát az egyenleteink a következőkre módosulnak:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_1 \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_1 \\ R_0 i_1 + u_1 - u_0 &= 0 \end{aligned}$$

A hurokra felírt egyenletbe helyettesítsük be az első egyenletet, majd fejezzük ki i_1 -et.

Mivel az üresjárási feszültség megegyezik u_2 -vel, ezért az u_2 -re felírt egyenletbe helyettesítsük be azt, amit i_1 -re kaptunk. Ekkor a következő összefüggéshez jutunk:

$$u_{\text{üresjárási}} = u_2 = R_{21} \cdot u_0 / (R_0 + R_{11})$$

Második mérés célja a rövidzárási áram meghatározása:

A karakterisztika és a felírt hurokegyenlet most is a rendelkezésünkre áll.

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2 \\ R_0 i_1 + u_1 - u_0 &= 0 \end{aligned}$$

A számítás annyiban módosul, hogy jelenleg rövidzárral zárjuk le a szekunder oldalt, így nem i_2 , hanem u_2 lesz 0, és tudjuk, hogy a rövidzárási áram megegyezik $-i_2$ -vel.

Az egyenletrendszer addig kell alakítatnunk, míg meg nem kapjuk i_2 -t.

A sikeres rendezés után az eredmény:

$$i_{\text{rövidzáras}} = i_2 = R_{21} / (R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} + R_{22}R_0) \cdot u_0$$

A két eredményből meghatározhatjuk a Thevenin generátor u_s feszültségét és R_b belső ellenállását:

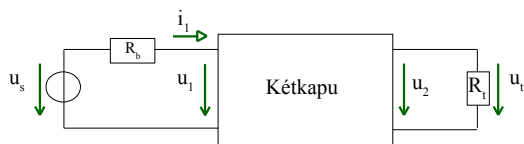
A generátor u_s feszültsége megegyezik u_2 értékével: $u_s = u_2 = u_{\text{üresjárási}}$

Az R_b belső ellenállás megegyezik az u_s feszültség és a rövidzárási áram hányadosával. $R_b = u_s / i_{\text{rövidzáras}}$

Átviteli tényezők meghatározása:

Tudjuk, hogy a transzferellenállás a következőktől függ:

$$R_{\text{transzfer}} = u_t / i_1$$



Most is induljunk ki a karakterisztikákból:

$$u_1 = R_{11} * i_1 + R_{12} * i_2$$

$$u_2 = R_{21} * i_1 + R_{22} * i_2$$

A karakterisztikák mellett tudjuk u_t értékét is Ohm törvénye alapján:

$$u_t = u_2 = -i_2 R_t$$

Ez utóbbi egyenletet írjuk be a karakterisztika második egyenletébe:

$$u_2 = R_{21} * i_1 - u_t / R_t * R_{22}$$

Ebből kifejezhetjük u_2 -t és oszthatunk i_1 -gyel. Ekkor meg is kapjuk a keresett összefüggést:

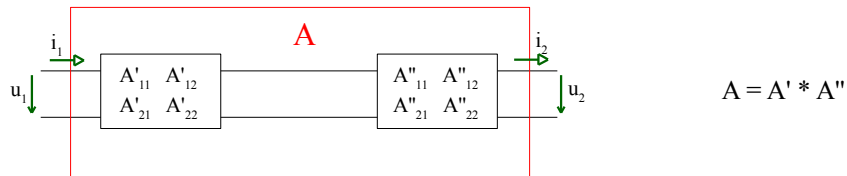
$$u_2 / i_1 = \frac{R_t * R_{21}}{R_t + R_{22}}$$

Kétkapuk összekapcsolása:

Sorba kapcsolt kétkapuk:

Pont az ilyen esetek miatt definiáltuk a láncreferenciáirányt és a lánckarakterisztikákat.

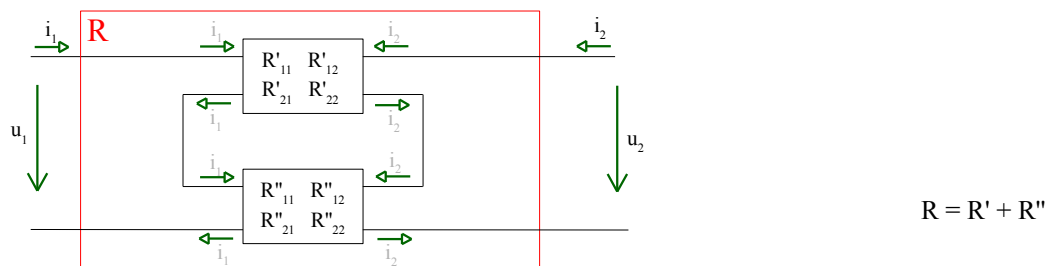
Amennyiben a kétkapuk rendelkeznek lánckarakterisztikával, az eredő karakterisztika mátrixszorzásként könnyedén megkapható.



Strukturális kétkapuk:

Ezek olyan kétkapuk, amelyek a külső szemlélő számára látható kétkapun belül biztosítják a kapuk viselkedését.

Ez esetben az eredő karakterisztikát mátrixösszegzésként kaphatjuk meg.



Dinamikus hálózatok:

Dinamikus hálózatokról kell beszélnünk, amikor a feszültségek és áramok pillanatnyi értéke nem elegendők már a hálózatok jellemzéséhez.

Dinamikus kétpólusok:

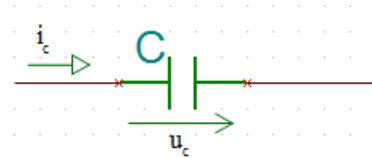
- **Kapacitás:**

- Karakterisztika:

$$u(t) = 1/C * \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

Jellemzően egy másik formáját fogjuk használni a karakterisztikának:

$$i(t) = C * u(t)'$$



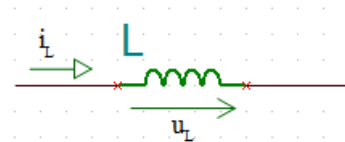
- **Induktivitás:**

- Karakterisztika:

$$i(t) = 1/L * \int_{-\infty}^t u(t) dt$$

Jellemzően egy másik formáját fogjuk használni a karakterisztikának:

$$u(t) = L * i(t)'$$



Energetika:

- A kapacitás és induktivitás **teljesítménye:**

$$p_c(t) = u_c * i_c = C * u_c * u_c' = \frac{d}{dt} (1/2 * C * u_c(t)^2)$$

$$p_L(t) = u_L * i_L = L * i_L * i_L' = \frac{d}{dt} (1/2 * L * i_L(t)^2)$$

- A kapacitás és induktivitás által **tárolt energia:**

$$W_c(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = 1/2 * C * u_c(t)^2$$

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = 1/2 * L * i_L(t)^2$$

Áll.: Valós esetben (ahol $L > 0$ és $C > 0$) $W_L > 0$ és $W_c > 0$, tehát ezek a kétpólusok passzívok.

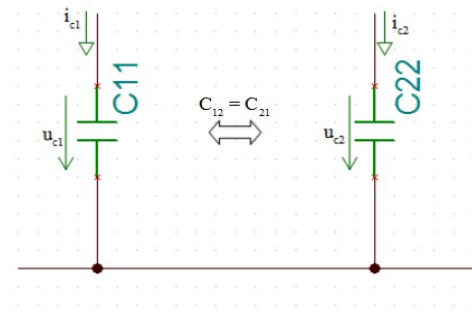
Áll.: Ideális esetben ezek a kétpólusok nonenergikusak.

Csatolt dinamikus kétpólusok

– Csatolt kapacitás

– Karakterisztika

$$\begin{aligned} i_{c1} &= C_{11} * u_{c1}' + C_{12} * u_{c2}' \\ i_{c2} &= C_{21} * u_{c1}' + C_{22} * u_{c2}' \end{aligned}$$



A C_{11} és C_{22} az úgynevezett **sajátkapacitások**, míg a C_{12} és C_{21} az úgynevezett **csatolt kapacitások**. A **reciprocitás** feltétele a $C_{12} = C_{21}$, amely valós esetben szükségszerűen teljesül. Valós esetben C_{12} és C_{21} negatívak.

– Energetika:

– Teljesítmény:

$$p(t) = u_1 * i_1 + u_2 * i_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} * C_{11} * u_{c1}^2 + \frac{1}{2} * C_{22} * u_{c2}^2 + C_{12} * u_{c1} * u_{c2} \right)$$

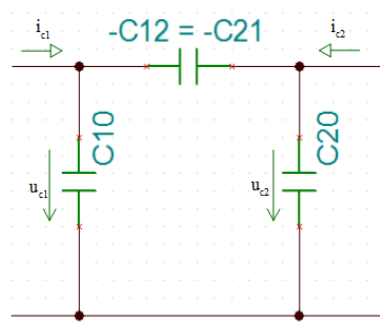
– Tárolt energia:

$$W = \frac{1}{2} * C_{11} * u_{c1}^2 + \frac{1}{2} * C_{22} * u_{c2}^2 + C_{12} * u_{c1} * u_{c2}$$

– A csatolt kapacitás **passzív**, ha $C_{11} * C_{22} \geq C_{12}^2$

A csatolt kapacitások a valóságban passzív és veszteséges elemek!

Két csatolt kapacitáshoz realizálható Π helyettesítő kapcsolás, amely nem tartalmaz csatolt kapacitásokat:

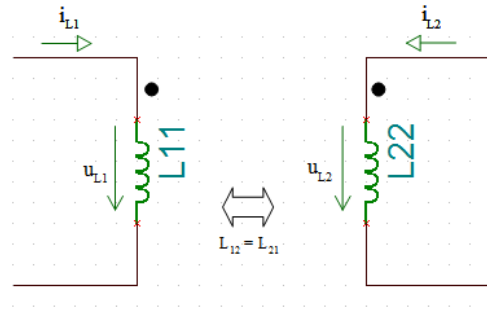


$$\begin{aligned} C_{10} &= C_{11} + C_{12} \\ C_{20} &= C_{22} + C_{12} \end{aligned}$$

- Csatolt induktivitás

- Karakterisztika

$$\begin{aligned} u_{L1} &= L_{11} * i_{L1}' + L_{12} * i_{L2}' \\ u_{L2} &= L_{21} * i_{L1}' + L_{22} * i_{L2}' \end{aligned}$$



A L_{11} és L_{22} az úgynevezett **sajátinduktivitások**, míg a L_{12} és L_{21} az úgynevezett **csatolt induktivitások**.

A reciprocitás feltétele az $L_{12} = L_{21}$, amely valós esetben szükségszerűen teljesül.

Valós esetben L_{12} és L_{21} lehetnek akár pozitívak, akár negatívak.

A pontoknak szerepe van, a referenciairányokat határozzák meg, hogy a csatolt induktivitások előjele megegyezzen a megadottal.

- Energetika:

- Teljesítmény:

$$p(t) = u_1 * i_1 + u_2 * i_2 = d/dt \left(\frac{1}{2} L_{11} * i_{L1}^2 + \frac{1}{2} L_{22} * i_{L2}^2 + L_{12} * i_{L1} * i_{L2} \right)$$

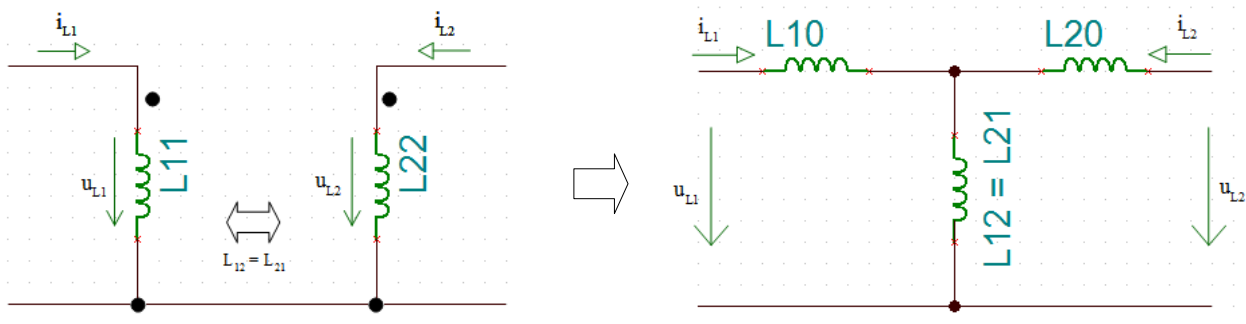
- Tárolt energia:

$$W = \frac{1}{2} L_{11} * i_{L1}^2 + \frac{1}{2} L_{22} * i_{L2}^2 + L_{12} * i_{L1} * i_{L2}$$

- A csatolt induktivitás **passzív**, ha $L_{11} * L_{22} \geq L_{12}^2$

A csatolt induktivitások a valóságban passzív és veszteséges elemek.

Két csatolt induktiváshoz realizálható T helyettesítőkép, amennyiben a csatolt induktivitások hárompólust alkotnak, azaz a két tekercsnek egy-egy pontja azonos potenciálon van.



$$\begin{aligned} L_{10} &= L_{11} - L_{12} \\ L_{20} &= L_{22} - L_{12} \end{aligned}$$

Hálózatszámítási feladat

A hálózatszámítás célja a kétpólusok áram és feszültségfüggvényeinek megadása a $0 \leq t < \infty$ intervallumon. A feladat megoldhatóságához **adottak kell legyenek** a következők:

- Hálózat struktúrája
- Karakteristikák a $0 < t < \infty$ intervallumon
- Gerjesztések időfüggése a $0 \leq t < \infty$ intervallumon
- A hálózat előélete a $-\infty < t < 0$ intervallumon

Regularitás:

A helyesen felírt egyenletek tetszőleges forrásmennyiségek ($u_s(t)$ és $i_s(t)$ időfüggvények) esetében egyértelműen megoldhatók, és véges időben véges forrásmennyiségek eredményeként véges időben véges feszültség és áramértékeket kapunk.

Következmény:

Reguláris hálózatok esetén a kapacitás feszültsége és az induktivitás árama véges időben véges gerjesztések esetén folytonos függvénnel írható le.

Véges időben véges gerjesztések esetén a kondenzátor feszültsége és az induktivitás árama nem ugorhat.

Kezdeti érték probléma:

Véges időben véges gerjesztésekre nem ugorhat sem a **kapacitás feszültsége** sem az **induktivitás árama**.

Ha ezen értékek adottak a $t = -0$ időpillanatban, akkor a hálózat előélete adottnak tekintett!

A hálózat ekkor **helyettesíthető a $t = +0$ időpillanatban egy rezisztív hálózattal**, amely a kapacitások helyett feszültségforrásokat, az induktivitások helyett pedig áramforrásokat tartalmaz, ahol a forrásmennyiségek megfelelnek az adott induktivitások és kapacitások áramainak és feszültségeinek a $t = -0$ időpillanatban.

Ha a $t = +0$ időpillanatbeli rezisztív helyettesítő hálózat reguláris, akkor az eredeti hálózat is reguláris.

A $t = 0$ időpillanatot rendszerint valamilyen változáshoz, például egy kapcsoló be vagy kikapcsolásához rendeljük hozzá.

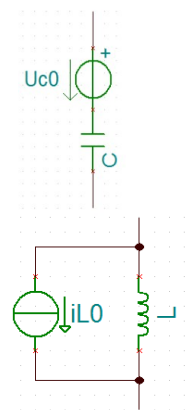
Állandósult gerjesztés esetén, az egyensúly beállta után ($t = \infty$) a **kapacitást szakadással**, az **induktivitást rövidzárral** helyettesíthetjük.

A **kapacitások és induktivitások helyettesíthetőek** a $t = t_a$ **időpillanattól** egy forrással, és egy energiamentes induktivitással, vagy kapacitással.

Tekintsük a karakterisztikájukat:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} * \int_{-\infty}^t i_c(t) dt = \underbrace{\frac{1}{C} * \int_{-\infty}^{t_a-} i_c(t) dt}_{u_{c0} = u_{cta-}} + \underbrace{\frac{1}{C} * \int_{t_a-}^{t_a+} i_c(t) dt}_0 + \underbrace{\frac{1}{C} * \int_{t_a+}^{+\infty} i_c(t) dt}_{\text{Energiamentes kapacitás}}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} * \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \underbrace{\frac{1}{L} * \int_{-\infty}^{t_a-} u_L(t) dt}_{i_{L0} = i_{Lta-}} + \underbrace{\frac{1}{L} * \int_{t_a-}^{t_a+} u_L(t) dt}_0 + \underbrace{\frac{1}{L} * \int_{t_a+}^{+\infty} u_L(t) dt}_{\text{Energiamentes induktivitás}}$$

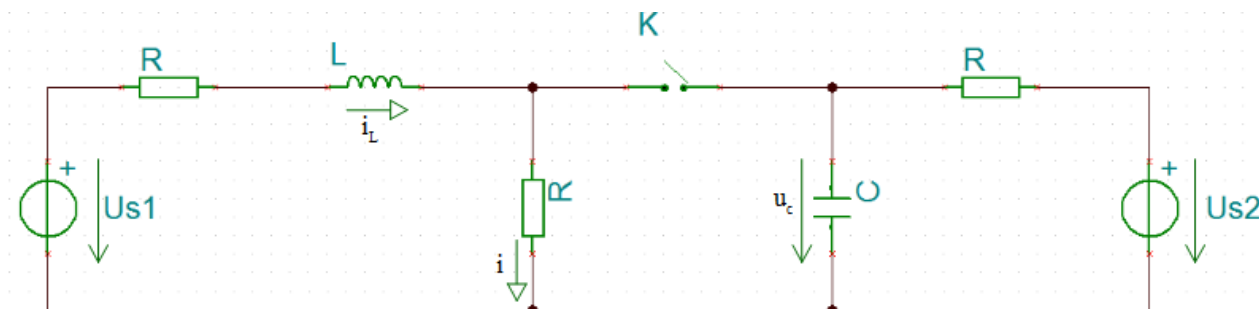


MP:

Adott a következő hálózat, melyről tudjuk, hogy egyensúlyi állapotban van.

A $t = 0$ időpillanatban a kapcsolót zárjuk.

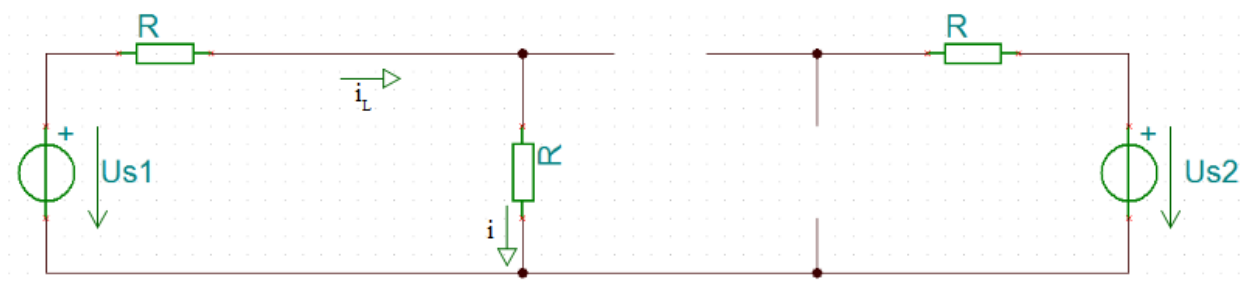
Határozzuk meg a kiindulási ($t = -0$) és a kezdeti ($t = +0$) értékeit a bejelölt i áramnak.



A kiindulási értékek meghatározása:

Tudjuk, hogy a $t = -0$ időpillanatban a kapcsoló nyitva van, és a hálózat állandósult állapotban van. Ekkor helyettesíthetjük a hálózatunk egy rezisztív hálózattal, ahol az induktivitást rövidzár, a kapacitást szakadás helyettesíti.

$t = -0$ helyettesítés:



Ekkor könnyedén meghatározhatjuk az i áramot, és ezek mellett meg kell határoznunk az induktivitás áramát, és a kapacitás feszültségét is:

$$i = u_{s1} / 2R$$

$$i_L = u_{s1} / 2R \quad \text{Mivel az } i \text{ áram folyik át az induktivitáson is.}$$

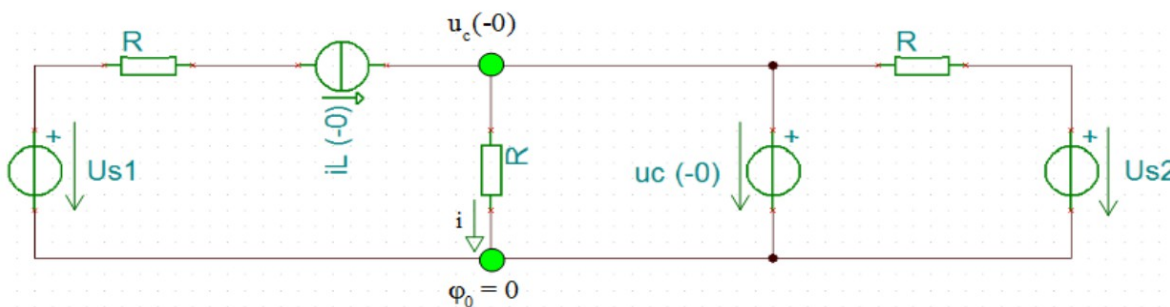
$$u_c = u_{s2} \quad \text{Mivel az } R \text{ ellenálláson nem folyik áram, így rajta nem esik feszültség sem.}$$

A kezdeti értékek meghatározása:

Tudjuk, hogy a tekercs árama és a kondenzátor feszültsége nem ugorhat, így őket a $t = +0$ időpillanatban egy áramforrással és egy feszültségforrással helyettesíthetjük, melyek forrásmennyiségei megegyeznek a $t = -0$ időpillanatban felvett értékekkel. Ez lesz segítségünk a kezdeti értékek meghatározásakor.

Fontos azonban, hogy a $t = +0$ időpillanatban a kapcsoló már zárva van!

$t = +0$ helyettesítés:



Ekkor könnyedén meghatározhatjuk a keresett értékeket:

$i_L = u_{s1} / 2R$ Nem ugorhat, így meg kell, hogy egyezzen a $t = -0$ időpillanatban kapott értékkel.
 $u_c = u_{s2}$ Nem ugorhat, így meg kell, hogy egyezzen a $t = -0$ időpillanatban kapott értékkel.

$i = u_c(-0) / R = u_{s2} / R$ **Ez az érték ugorhat!**

MP:

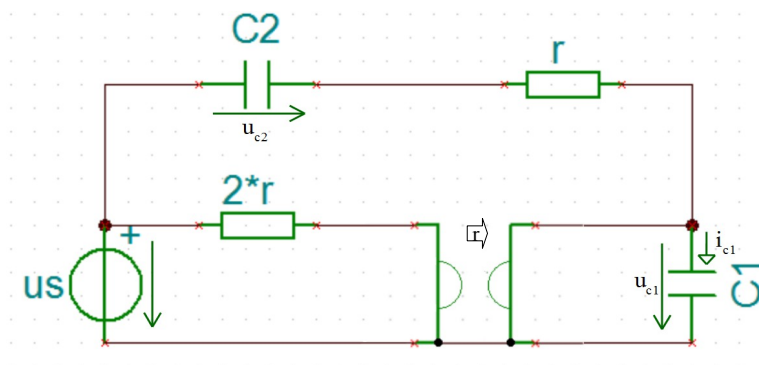
Adott a következő hálózat, mely egyensúlyi állapotban van.

Vizsgáljunk kikapcsolási jelenséget, a gerjesztés:

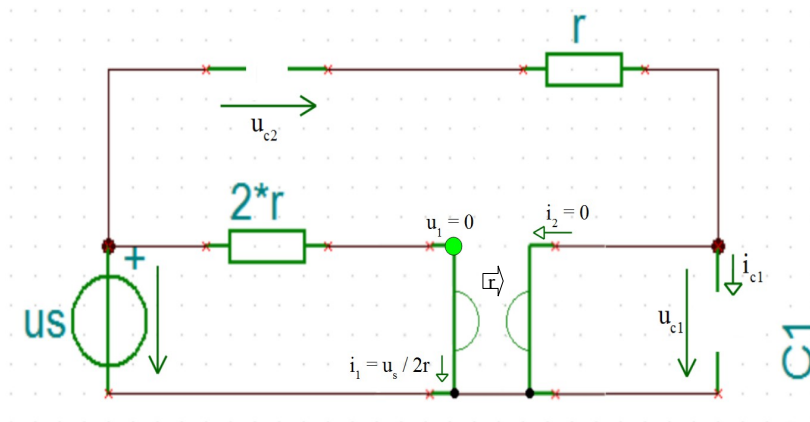
$$u_{s1}(t) = u_0 \text{ ha } t < 0 \text{ és } u_{s1}(t) = 0 \text{ ha } t > 0$$

A válasz a C_1 kondenzátor árama.

Nem állapotváltoz, így ugorhat!



A $t = -0$ pillanatban a hálózat nyugalomban van, így helyettesíthető egy rezisztív hálózattal:



A kapacitásokat szakadással helyettesíthetjük!

Ekkor a hálózat adottságait és a girátor karakterisztikáját kihasználva meghatározhatjuk a kiindulási értékeket:

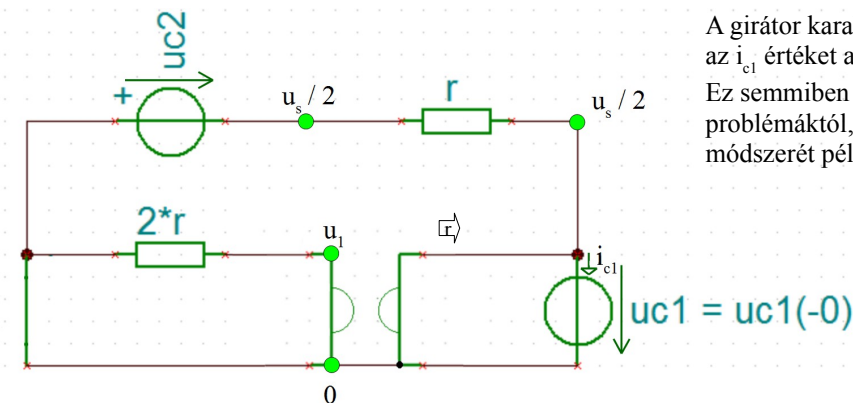
$$\begin{aligned} u_1 &= -r * i_2 = 0 \\ u_2 &= r * i_1 = u_s / 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} i_{c1} &= 0 \\ u_{c1}(-0) &= u_s / 2 \\ u_{c2}(-0) &= u_s / 2 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a kondenzátorok feszültsége nem ugorhat, így őket a $t = +0$ időpillanatban egy-egy feszültségforrással helyettesíthetjük, melyek forrásmennyiségei megegyeznek a $t = -0$ időpillanatban felvett értékekkel.

Ez lesz segítségünk a kezdeti értékek meghatározásakor.



A girátor karakterisztikáját kihasználva meghatározhatjuk az i_{c1} értéket a $t = +0$ időpillanatban.

Ez semmiben nem különbözik az eddigi hálózatszámítási problémáktól, használhatjuk a csomóponti potenciálok módszerét például.

$$i_{c1} = -2 * u_s / r$$

$$u_{c1} = u_{c1}(-0)$$

Lineáris, invariáns rendszerek állapotváltozós leírása:

Állapotváltozós leírása csak rendszernek lehet, így a hálózatunkon ki kell jelölnünk egy gerjesztést (rendszerint valamely forrásmennyiség) és egy választ (valamely kétpólus feszültsége vagy árama)!

Állapotváltozók:

Állapotváltozóknak nevezzük egy rendszer változóinak egy olyan halmazát, amik eleget tesznek a következőknek:

- Ha ismertek az állapotváltozók értékei a $t = t_a$ időpillanatban, és ismert a rendszer leírása a $t \geq t_a$ intervallumon, és ismert a gerjesztés a $t > t_a$ időintervallumon, akkor megadhatók az állapotváltozók értékei a $t > t_a$ időintervallumon.
- Ha ismertek az állapotváltozók értékei a $t = t_a$ időpillanatban, és ismert a rendszer leírása a $t = t_a$ időpillanatban, akkor megadható a rendszer válasza a $t = t_a$ időpillanatban.
- Az állapotváltozók száma minimális, tehát $n-1$ változót tartalmazó halmaz nem tehet eleget az előző pontoknak.

Az állapotváltozókat $\underline{x}(t)$ vektorral jelölhetjük, ahol $x = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$

Állapotváltozós leírás normálalakja:

$$\underline{x}' = \underline{A} * \underline{x} + \underline{B} * u$$

$$y = \underline{C}^T * \underline{x} + \underline{D} * u$$

A: $n*n$ -es mátrix

B: oszlopvektor

C^T : sorvektor

D: konstans

x: állapotváltozókat tartalmazó vektor.

u: gerjesztés (később gerjesztésvektor)

y: válasz

Két állapotváltozós esetben a leírás így értelmezhető:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

$$x_1' = A_{11} * x_1 + A_{12} * x_2 + b_1 * u$$

$$x_2' = A_{21} * x_1 + A_{22} * x_2 + b_2 * u$$

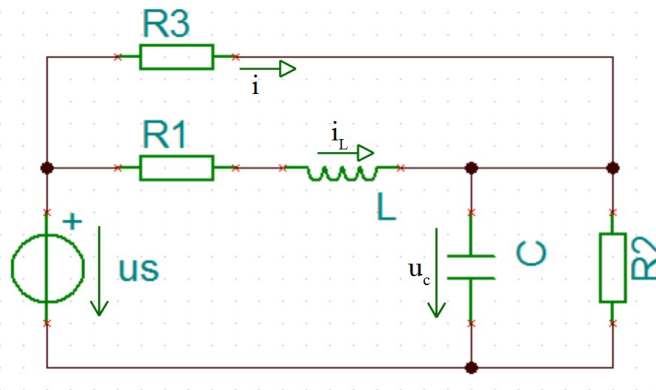
$$y = C_1 * x_1 + C_2 * x_2 + d * u$$

Nagyon figyeljünk az állapotváltozók sorrendjére.
A sorrend felvétele tetszőleges, de utána tartsuk meg!

Ha a rendszer bármely paramétere lehet válasz, a **kapacitások áramai** és az **induktivitások feszültségei** lesznek az **állapotváltozók**!

MP:

Nézzük, hogyan határozhatjuk meg az állapotváltozós leíráshoz szükséges egyenleteket.



A megbeszéltek szerint az állapotváltozó a kapacitás feszültsége és az induktivitás árama:

Állapotváltozók: i_L , u_c

Ahhoz, hogy rendszerről beszélhessünk, ki kell jelölnünk a gerjesztést és a választ!

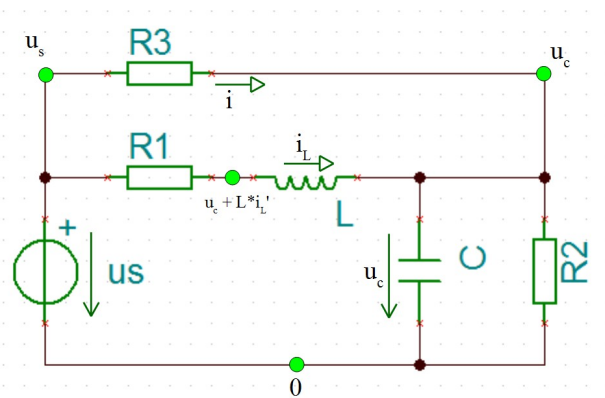
Gerjesztés: u_s

Válasz: i

A keresett egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} * \mathbf{x} + \mathbf{B} * \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^T * \mathbf{x} + \mathbf{D} * \mathbf{u} \end{aligned}$$

Az egyenleteket nem kapjuk meg egyből, fel kell vennünk egy egyenletrendszert, melyet megfelelően rendezhetünk. A már megtanult módszerek továbbiakban is működnek, így vegyünk fel csomóponti potenciálokat, és írjuk fel a csomóponti egyenleteket.



A csomóponti egyenletek:

$$u_c: \frac{u_c - u_s}{R_3} + C * u_c' + \frac{u_c}{R_2} - i_L = 0$$

$$u_c + L * i_L': \frac{u_c + L * i_L' - u_s}{R_1} = i_L$$

A válasz kifejezése:

$$i = (u_s - u_c) / R_3$$

Felvettük az egyenletrendszert. A feladatunk, hogy úgy rendezzük az egyenleteket, hogy azokból meghatározhassuk az A mátrixot, a B és C^T vektorokat és a D konstanst.

A keresett alak:

$$x_1' = A_{11} * x_1 + A_{12} * x_2 + b_1 * u$$

$$x_2' = A_{21} * x_1 + A_{22} * x_2 + b_2 * u$$

$$y = C_1 * x_1 + C_2 * x_2 + d * u$$

Az egyenletrendszer rendezése után kapott eredmények:

$$u_c' = - \left(\frac{1}{C * R_3} + \frac{1}{C * R_2} \right) * u_c + \frac{1}{C} * i_L + \frac{-1}{C * R_3} * u_s$$

$$i_L' = \frac{-1}{L} * u_c + \frac{-R_1}{L} * i_L + \frac{1}{L} * u_s$$

$$i = \frac{-1}{R_3} * u_c + 0 * i_L + \frac{1}{L} * u_s$$



$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} - \left(\frac{1}{C * R_3} + \frac{1}{C * R_2} \right) & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R_1}{L} \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{C * R_3} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}^T &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_3} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az állapotváltozós leírás megoldása részekre bontással

Az állapotváltozós leírás normálalakjának meghatározása már ismert.

A feladatot a következő egyenletrendszer megtalálásáig meg tudjuk oldani:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} * \mathbf{x} + \mathbf{B} * \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^T * \mathbf{x} + \mathbf{D} * \mathbf{u}\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a probléma differenciál-egyenletrendszerre vezet. A differenciál-egyenletrendszer megoldását nem vezetjük le, fogadjuk el, hogy a továbbiakban vázolt megoldások működnek.

Amit már tudunk:

- Meghatároztuk az egyenletek normál alakját.
- Adott $x(-0)$ értéke, melyből meghatározhatjuk $x(+0)-t$.
 - Véges gerjesztés esetén $x(+0) = x(-0)$, mivel az állapotváltozók értékei nem ugorhatnak.
- Adott a gerjesztés a $t \geq 0$ időintervallumon.

Az általunk keresett érték az $y(t)$ a $t \geq 0$ időintervallumon.

Amennyiben a listából valami hiányzik, a feladat nem megoldható.

Könnyen beláthatjuk, hogy $y(t)$ meghatározásához $x(t)$ értékét kell ismernünk a $t \geq 0$ intervallumon.

Ha az ismert, akkor $y(t)$ a harmadik egyenletbe behelyettesítve adódik.

Így a továbbiakban $x(t)$ meghatározása lesz a célunk.

Igazolható, hogy az állapotvektorok felbonthatóak egy **gerjesztett** és egy **szabad összetevőre**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_g + \mathbf{x}_f$$

1. Szabad megoldások meghatározása (homogén egyenlet összes megoldásának meghatározása):

A szabad megoldások meghatározásánál azzal a feltételezéssel élünk, hogy a gerjesztés 0.

A következő egyenlet megoldásait keressük:

$$\dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{A} \mathbf{x}_f$$

Összes lehetséges megoldást akkor kapjuk, ha meghatározzuk a $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásait (az **A mátrix sajátértékeit**) és **minden sajátérték egyszeres**.

A sajátértékek lehetnek valósak vagy konjugált komplex gyökpárok:

$$\text{Ha } \lambda_i = a + j*b, \text{ akkor } \lambda_{i+1} = a - j*b \quad (\text{ahol } j*b \text{ a komplex szám képzetes része})$$

Ekkor a megoldás:

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{M}_1 * \mathbf{S}_1 * e^{\lambda_{-1} * t} + \mathbf{M}_2 * \mathbf{S}_2 * e^{\lambda_{-2} * t} + \dots + \mathbf{M}_n * \mathbf{S}_n * e^{\lambda_{-n} * t}$$

Ahol $\mathbf{S}_i$ -k az $\mathbf{A}$ mátrix λ_i sajátértékeihez tartozó sajátvektorai, $\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_n$ pedig tetszőleges konstansok, melyeket szabadon megválaszthatunk, és mint azt látni fogjuk, ezek megfelelő megválasztására szükségünk is lesz a helyes megoldás megtalálásához.

Elsőrendű rendszerben, ahol egyetlen dinamikus kétpólusunk van, az $\mathbf{A}$ mátrix egyetlen elemet tartalmaz. Ekkor egyetlen λ értékünk lesz, mely könnyedén meghatározható, $\lambda = A$.

A λ sajátérték helyett gyakran a $\delta = -\lambda$ **csillapítási tényezőt** vagy a $\tau = -1/\lambda$ **időállandót** használjuk.

2. Gerjesztett megoldás (inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása):

A következő egyenlet megoldásait keressük:

$$\mathbf{x}_g' = \mathbf{A}\mathbf{x}_g + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

A gerjesztett összevező megadására nem létezik általános módszer.

Azonban ha a gerjesztés egyszerű függvénnyel írható le, akkor az úgynevezett próbafüggvények segítségével meghatározhatjuk a gerjesztett összetevőt úgy, hogy hasonló alakban keressük, ismeretlen együtthatókkal.

Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott függvényekkel leírható gerjesztés esetén a gerjesztett összetevőt ($\mathbf{x}_g$) milyen alakban kell keresnünk:

Gerjesztést leíró függvény:	Gerjesztett összetevő próbafüggvénye:
f_0	F_0
$f_0 + f_1 * t + \dots f_n * t^n$	$F_0 + F_1 * t + \dots F_n * t^n$
$f_1 * \cos(\omega * t) + f_2 * \sin(\omega * t)$ ($f_1, f_2 = 0$ megengedett)	$F_1 * \cos(\omega * t) + F_2 * \sin(\omega * t)$
$f_0 * e^{-\gamma * t}$	$F_0 * e^{-\gamma * t}$
$f_0 * e^{-\gamma * t}$ ($-\gamma = \lambda$)	$F_0 * e^{-\gamma * t} + F_1 * e^{-\gamma * t}$

Amennyiben a gerjesztés egyszerű függvények összege vagy szorzata, a választ is hasonló alakú függvények összegeként vagy szorzataként kell keresnünk. Ezt sokszor ki fogjuk használni.

Nézzük az $\mathbf{x}_g$ meghatározását **konstans gerjesztésre**:

Konstans gerjesztés esetén a választ is konstans függvény formájában kell keresnünk.

Tudjuk azonban, hogy a konstans függvény deriváltja 0, így az egyenlet bal oldalán a 0 érték áll.

Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{B}$ vektor és az $\mathbf{u}$ gerjesztés értékei ismertek, az $\mathbf{x}_g$ vektort szeretnénk meghatározni.

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_g + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Rendezzük az egyenletet:

$$-\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}_g$$

Mátrixokat tudunk invertálni, és tudunk velük szorozni is, csak figyeljünk, melyik oldalról szorzunk!

Szorozzunk bal oldalról az $\mathbf{A}$ mátrix inverzével, ekkor az $\mathbf{x}_g$ előtti $\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A}$ tényezők egyszerűsítik egymást, az $\mathbf{E}$ egységmátrixot eredményezve, amelyet ki se kell írunk.

Az $\mathbf{x}_g$ tehát meghatározható a következő egyenlettel:

$$\mathbf{E} * \mathbf{x}_g = \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{B}\mathbf{u})$$

3. Kezdeti érték beállítása:

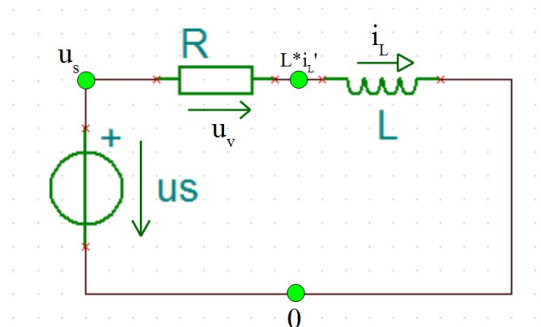
Az utolsó teendőnk, hogy megválasszuk az M konstansokat.

Az $M_1, M_2 \dots M_n$ konstansokat úgy kell megválasztanunk, hogy a megoldás eleget tegyen a kiindulási feltételeknek:

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{x}_f(+0) + \mathbf{x}_g(+0)$$

MP:

Nézzük meg egy elsőrendű rendszer esetében az állapotváltozós leírás megoldását:



A gerjesztés:
 $u(t) = \varepsilon(t)$

Állapotváltozós leírása csak rendszernek van, így ki kell jelölnünk a gerjesztést és a választ. Legyenek ezek az u_s forrásfeszültség, és az R ellenállás u_v feszültsége.

A keresett alak:

$$\dot{x}_1 = A_1 * x_1 + b_1 * u$$

$$y = C_1 * x_1 + d * u$$

A kiinduló egyenletek a csomóponti törvényekből:

$$\frac{L * \dot{i}_L - u_s}{R} = i_L$$

$$u_v = R * i_L$$

Az állapotváltozós leírás normál alakját a kiinduló egyenletekből könnyedén megkapjuk:

$$\dot{i}_L = \frac{R}{L} * i_L + \frac{1}{L} * u_s$$

$$u_v = R * i_L$$

A normál alakból meghatározhatjuk az A mátrixot, a B és C^T vektorokat és a D konstans. Elsőrendű rendszer esetén ezek mind konstans értékek.

$$\begin{aligned} A &= R/L \\ B &= 1/L \\ C^T &= R \\ D &= 0 \end{aligned}$$

Határozzuk meg az A mátrix sajátértékét:

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\frac{R}{L} - \lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{R}{L}$$

A sajátérték meghatározása 1×1 -es mátrix esetén egyszerű, elsőrendű rendszer esetén egyetlen sajátértékünk van.

Határozzuk meg a sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$$As = \lambda s$$

$$\frac{R}{L} * s = \frac{R}{L} * s$$

$$s = 1$$

Elsőrendű rendszerben a sajátérték mindig 1.

A sajátértékek és sajátvektorok kiszámításának módja a Matematika A2 tárgy szerves részét képezi.

A szabad megoldás meghatározása:

$$x_f = M_1 * S_1 * e^{\lambda_1 * t} = M_1 * 1 * e^{R/L * t}$$

M_1 tetszőleges konstans, és ahogy azt már tárgyaltuk, a kezdeti értékek beállításánál kap majd konkrét értéket.

A gerjesztett megoldás meghatározása:

$$x_g' = Ax_g + Bu$$

A gerjesztés $\varepsilon(t)$ függvénnyel írható le, ami konstans függvény, így a választ is konstans függvény formájában kell keresnünk.

A konstans függvény deriváltja 0, az egyenlet bal oldalára ez kerülhet, az A mátrix, B vektor és a gerjesztés értékei pedig ismert, ezeket helyettesítsük be az egyenlet jobb oldalába:

$$0 = \frac{R}{L} * x_g + \frac{1}{L} * \varepsilon(t)$$

A $t > 0$ időpillanat után alkalmazva a korábban levezetett összefüggést, miszerint:

$$x_g = A^{-1}(-Bu)$$

$$x_g = \frac{L}{R} * \frac{-1}{L} * 1 = \frac{-1}{R}$$

$$x_g = \frac{-1}{R}$$

A kezdeti érték beállítása:

A kiindulási és kezdeti értékek meghatározásával már foglalkoztunk.

Most meghatározásuk nagyon egyszerű, hiszen a hálózat gerjesztése 0 volt a $t < 0$ időintervallumon, más forrás nincs, tehát az összes áram és feszültség, így az állapotváltozóink értéke is 0 a $t = -0$ időpillanatban.

Tudjuk, hogy az állapotváltozóink nem ugorhatnak, így értékük a $t = +0$ pillanatban is 0.

Ezt a tudást alkalmazva az egyenleten:

$$x(+0) = x_f(+0) + x_g(+0)$$

$$0 = x_f(+0) + x_g(+0)$$

Helyettesítsük be a korábban kiszámolt értékeket:

$$0 = M_1 * 1 * e^{R/L * (+0)} + \frac{-1}{R}$$

A $t = +0$ értéket behelyettesítettük a szabad megoldásnál t helyére!

Egyetlen egy érték van az egyenletben, amit nem határoztunk meg, ez pedig az M_1 konstans.

Ahhoz, hogy az egyenlet teljesüljön, az M_1 konstansnak a következő értéket kell felvennie:

$$M_1 * 1 * e^{R/L * (+0)} = \frac{1}{R}$$

$$M_1 * 1 * 1 = \frac{1}{R}$$

$$M_1 = \frac{1}{R}$$

A megoldás több állapotváltozós rendszerben sem különbözik. Az egyenletrendszer amit vektorokkal és mátrixokkal írtunk fel, valójában több egyenletre tagolható, ahogy azt már láttuk két állapotváltozó esetén.

Dirac-delta disztribúció és általánosított derivált

A bekapcsolási és átkapcsolási jelenségek fontos szereppel bírnak a „*hálózatok életében*”.

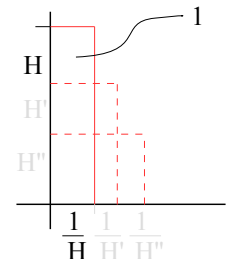
A gerjesztésben az ilyen esetek pillanat szerű véges ugrások, azonban ha a válasz a gerjesztés deriváltjától függ, akkor az ugrások pillanataiban végtelen változások keletkeznek.

Az ugrással rendelkező függvények deriválásához be kell vezetnünk az **általánosított derivált** fogalmát is.

Definiáljunk egy négyszögimpulzust, amelynek magassága H , szélessége pedig $\frac{1}{H}$.
Ezen négyszögimpulzus alatti terület $H \cdot \frac{1}{H} = 1$.

Ha $H \rightarrow 0$, akkor $\frac{1}{H} \rightarrow \infty$, így egy olyan végtelen értéket kaphatunk, amelyet tudunk integrálni, és amely integráltja pontosan 1, amennyiben az integrálási tartományba belesik a 0 időpont.

Az így definiált impulzust **dirac-deltának** nevezzük, és $\delta(t)$ -vel jelöljük.



A definiált disztribúciónak (~függvénynek) számunkra hasznos tulajdonságai vannak:

- Ha $\delta(t - \tau) = 0$ akkor $t \neq \tau$
- $\delta(t) = 0$ ha $t \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
- $\int_a^b \delta(t - \tau) dt = 1$ csakis akkor, ha $a < \tau < b$

Mire tudjuk ezt használni:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$ Mivel $\delta(t - \tau) = 1$, ha $t = \tau$

Általánosított derivált:

A dirac-delta ismeretében már definiálhatjuk az **általánosított derivált**át, mely olyan függvényekre is alkalmazható, melyek első fajú szakadással (véges ugrással) rendelkeznek.

Def.: f függvény általánosított deriváltja az a függvény, melyet integrálva megkapjuk az eredeti függvényünket.

$$f(t) = \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau \rightarrow \text{Ekkor } f'(t) \text{ az } f(t) \text{ általánosított deriváltja.}$$

Az általánosított deriválnak a továbbiakban hasznos formája: $f'(t) = \varepsilon(t) * f'(t) + \delta(t) * f(0)$

Az ugrásválasz deriváltjaként kaphatjuk majd meg az impulzusválaszt, amelynek 0-ban ugrása lehet.

Elsőfajú szakadással rendelkező függvények esetén minden véges ugrásnál az ott felvett értéket szorozni kell dirac-deltával, ekkor kaphatjuk meg a deriváltfüggvényt.

MP:

Ha az f függvénynek t_0 -ban szakadása van:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau + \delta(\tau) * f(t_0) d\tau = \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau + f(t_0)$$

MP:

Az egységugrás általánosított deriváltja: $\varepsilon'(t) = \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 0, \text{ ha } t < 0 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1, \text{ ha } t > 0$$

Ezek az értékek pedig pontosan az egységugrásnak felelnek meg.

Vizsgálójelek:

A rendszerszámítás lényege, hogy meghatározzuk a választ tetszőleges gerjesztésre. Azonban vannak nevezetes gerjesztések, melyekhez definiálunk nevezetes válaszokat.

Ugrásválasz:

Def.: Egy rendszer ugrásválasza az a válasz, amit az $\varepsilon(t)$ (egységugrás) gerjesztésre ad.

Jele: $g(t)$

Formálisan: $y(t) = g(t)$, ha $u(t) = \varepsilon(t)$

Ugrásválasz vizsgálatánál a következő hasznos megállapításokat tehetjük:

$x(-0) = 0$ Mivel a gerjesztés konstans 0 a $t < 0$ intervallumon.
 $x(+0) = x(-0)$ Mivel a gerjesztés véges, és ebben az esetben az állapotváltozók nem ugorhatnak.

Rendszer ugrásválaszát már korábbi példában is meghatároztuk. Minden válasz ugrásválasz volt, ahol gerjesztést az $\varepsilon(t)$ függvény írta le.

Impulzusválasz:

Def.: Egy rendszer impulzusválasza az a válasz, amit a $\delta(t)$ (dirac-delta) gerjesztésre ad.

Jele: $h(t)$

Formálisan: $y(t) = h(t)$, ha $u(t) = \delta(t)$

impulzusválasz vizsgálatánál a következő hasznos megállapításokat tehetjük:

$x(-0) = 0$ Mivel a gerjesztés konstans 0 a $t < 0$ intervallumon.
 $x(+0) \neq x(-0)$ Végtelen gerjesztés esetén nem teljesül az egyenlőség!

Nézzük ez hogyan lehetséges:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

A gerjesztésünk azonban a dirac-delta, amelyhez képest az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ értéke elhanyagolhatóan kicsi:

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \mathbf{B} \cdot \delta(t) \quad \text{a } t = 0 \text{ pillanatban.}$$

Mindkét oldalt integrálva a következő eredményt kapjuk:

$$x(+0) = x(-0) + B$$

Az azonban már megállapítottuk, hogy az $x(-0)$ értéke 0, tehát tovább egyszerűsödik az egyenlet:

$$x(+0) = B$$

Dirac-delta gerjesztés esetén a gerjesztett összetevőről is nyilatkozhatunk és nyilatkoznunk is kell: $x_g = 0$

A szabad összetevő és az M konstansok meghatározása a már ismertett módszerrel történik.

A válasz meghatározása a korábbiakhoz hasonlóan az $y = C^T \cdot x + D \cdot u$ egyenletbe behelyettesítéssel adódik.

Az impulzusválasz **dimenziója** a következő: $\frac{[\text{válasz}]}{[\text{gerjesztés}]}$
[idő]

Az ugrásválasz ismeretében az **impulzusválaszt** az **ugrásválasz általánosított deriváltjaként** kapjuk meg!

Elsőrendű rendszerek analízise

Ezekben az esetekben egyetlen állapotváltozónk, azaz egy energiatárolónk van a hálózatunkban. A problémával már foglalkoztunk, azonban csak a kiindulási és kezdeti értékeket vizsgáltuk, most a választ is meg fogjuk határozni.

Áll.: Egy állapotváltozós rendszer esetén a választ meghatározhatjuk a következő egyenlet segítségével:

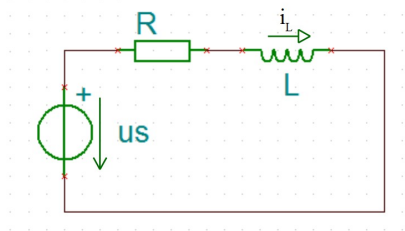
$$y(t) = y_{\infty} + (y(+0) - y_{\infty}) * e^{-t/\tau}$$

Ahol y_{∞} a válasz abban az esetben, ha $t \rightarrow \infty$, τ pedig az időállandó.

Az állítást könnyen beláthatjuk az állapotváltozós leírással és annak megoldásával.

MP:

Nézzük a bizonyítást egy konkrét példán bemutatva:



Egyetlen hurokegyenletet kell felírnunk az állapotváltozó meghatározásához:

$$-u_s + R * i_L + L * i_L' = 0$$

Az egyenletet rendezve a következő alakhoz jutunk, mely az állapotváltozós leírás normálalakja:

$$i_L' = -\frac{R}{L} * i_L + \frac{1}{L} * u_s$$

Az A mátrixot és a B vektort könnyedén leolvashatjuk.

1. A szabad megoldás meghatározása:

$$i_{L,f} = M_1 * S_1 * e^{\lambda * t} = M * 1 * e^{-R/L * t}$$

2. A gerjesztett megoldás meghatározása konstans gerjesztés esetén:

$$0 = A * x_g + B * u \rightarrow x_g = A^{-1}(B * u)$$

$$i_{L,g} = u_s / R$$

3. Kezdeti értékek beállítása:

$$x(+0) = x_f(+0) + x_g(+0)$$

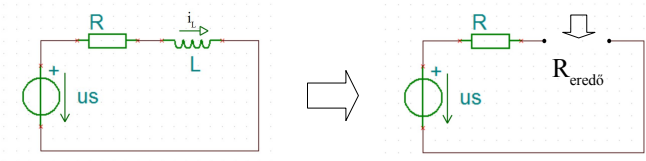
$$i_L(+0) = i_{L,f}(+0) + i_{L,g}(+0) = M * 1 * e^{-R/L * 0} + u_s / R \rightarrow M = i_L(+0) - u_s / R$$

Az állapotváltozó értéke tehát: $i_L = (i_L(+0) - u_s / R) * e^{-R/L * t} + u_s / R$

Könnyen beláthatóak az alábbiak: $i_L(+0)$, $i_{L,\infty}$, $e^{-t/\tau}$, $i_{L,\infty}$

Egy állapotváltozós rendszerben az időállandó: $\tau = \frac{L}{R_{\text{eredő}}}$ vagy $\tau = C * R_{\text{eredő}}$

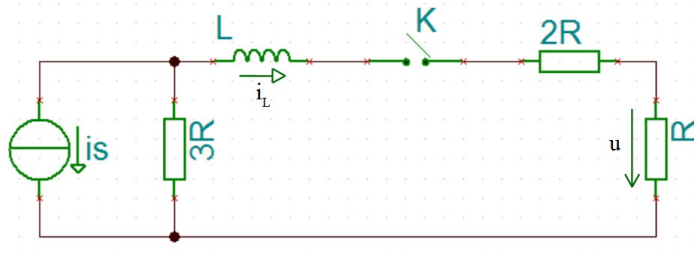
$R_{\text{eredő}}$ a dinamikus elem kivételével keletkező kétpólus ellenállása a dinamikus elem helyéről nézve.



Amennyiben a hálózat csatolt kétpólusokat is tartalmaz, el kell végeznünk a Thevenin vagy Norton helyettesítést, és az ott kapott ellenállásérték lesz az eredő ellenállás!

MP:

A $t = 0$ időpillanatban a kapcsolót zárjuk. Határozzuk meg az u feszültséget a $t > 0$ intervallumon.

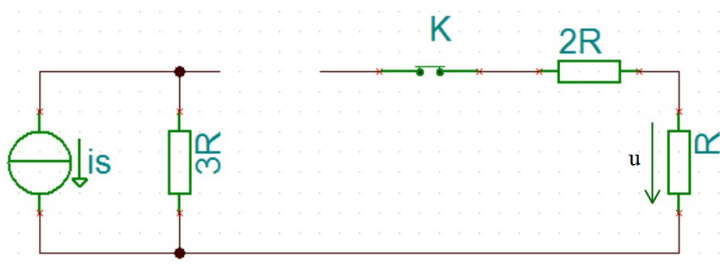


A korábban meghatározott képlet a következő:

$$y(t) = y_{\infty} + (y(+0) - y_{\infty}) * e^{-t/\tau}$$

Határozzuk meg az u feszültséget a $t = +0$ és a $t \rightarrow \infty$ időpillanatban:

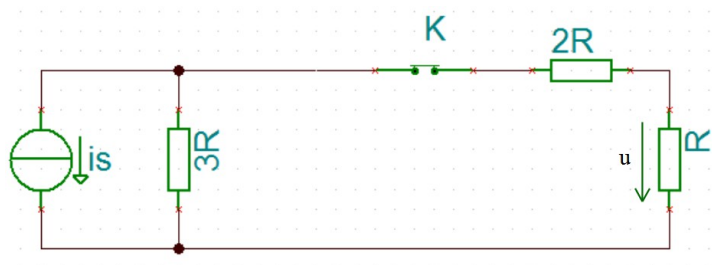
Tudjuk az i_L -t a -0 időpillanatban (0, hiszen nem folyhat a tekercsen áram), és amennyiben a gerjesztés véges, ez nem ugrophat, tehát a $+0$ időpillanatban is a 0 értéket veszi fel. Ebben az esetben az induktivitásunkat a $t = +0$ -ban egy szakadással tudjuk helyettesíteni.



Magától értetődő, hogy ebben az esetben az u feszültség 0, mivel nem folyik át az ellenálláson áram.

$$u(+0) = 0$$

$t \rightarrow \infty$ esetén az induktivitás árama nem változik, ekkor a feszültsége 0, így egy rövidzárral helyettesíthetjük:



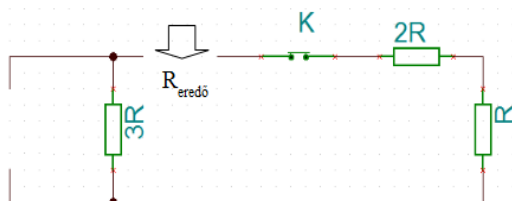
Ebben az esetben az u feszültséget egy áramosztás után kaphatjuk:

$$u_{\infty} = R * i_s / 2$$

Határozzuk meg a τ időállandót:

Csatolt kétpólusok hiányában használhatjuk a $\tau = L / R_{\text{eredő}}$ összefüggést.

Ehhez azonban meg kell határoznunk a dezaktivizált hálózat bemenő ellenállását:



Egyszerű számítás után: $R_{\text{eredő}} = 6 * R$

Mindent tudunk most már a válasz meghatározásához a $t > 0$ időtartományban:

$$u(t) = R * i_s / 2 + (0 - R * i_s / 2) * e^{-t * 6 * R / L}$$

Másodrendű rendszerek vizsgálata

A következőkben vizsgáljunk másodrendű (két állapotváltozós) rendszereket. Magától értetődő, hogy a állapotvektorunk két állapotváltozót tartalmaz.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Ekkor a normálalakban szereplő mátrixok és vektorok a következő méreteket öltik:

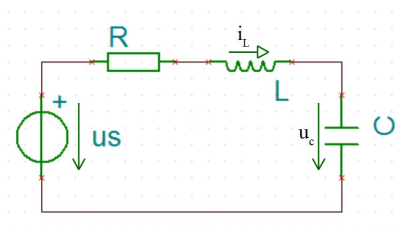
$$\underline{A}: 2 \times 2 \quad \underline{B}: 2 \times 1 \quad \underline{C}: 1 \times 2 \quad \underline{D}: 1 \times 1$$

A szabad megoldást már sokszor megtárgyaltuk:

$$\mathbf{x}_f(t) = \mathbf{M}_1 * \mathbf{S}_1 * e^{\lambda_1 t} + \mathbf{M}_2 * \mathbf{S}_2 * e^{\lambda_2 t} \quad \text{Ahol } \mathbf{S}_i \text{ és } \lambda_i \text{ az } \mathbf{A} \text{ mátrix sajátvektorai és az ezekhez tartozó sajátértékek.}$$

MP:

A másodrendű rendszerek vizsgálatánál legyen a mintapéldánk a soros rezgőkör:



Gerjesztése: u_s forrásfeszültség

Válasza: $i = i_L$ áram

Például a következő kiindulási egyenletrendszer írhatjuk fel:

$$u_s(t) = R * i_L(t) + L * i_L'(t) + u_c(t)$$

$$i_L(t) = C * u_c'(t)$$

$$\mathbf{i} = i_L$$

A kiindulási egyenleteinkből rendezés után a következő egyenletrendszerhez jutunk, mely megfelel a normálalakkal szemben támasztott követelményeknek, és amelyből kiolvashatjuk $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^T$ és $\mathbf{D}$ értékeit:

$$i_L' = -\frac{R}{L} * i_L - \frac{1}{L} * u_c + \frac{1}{L} u_s$$

$$u_c' = \frac{1}{C} * i_L$$

$$\mathbf{i} = i_L$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a karakterisztikus egyenletét az $\mathbf{A}$ mátrixnak és határozzuk meg a sajátértékeit:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$$

A következő egyenletet kapjuk, oldjuk meg a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} * \lambda + \frac{1}{L * C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{(L * C)}}}{2}$$

1. Két valós gyök adódik:

$$(R^2/L^2 > 4/(L \cdot C))$$

λ_1 és λ_2 megadott paraméterek esetén könnyedén számolhatóak, melyek után az S_1 és S_2 sajátvektorokat is könnyedén megkaphatjuk.

Ebben az esetben a szabad megoldás:

$$x_f(t) = M_1 \cdot S_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + M_2 \cdot S_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Definiáltuk az **időállandót**, amelyet τ -val jelölünk: $\tau_i = \frac{-1}{\lambda_i}$

Egy n -ed rendű rendszernek n darab időállandója van, a legnagyobb időállandó a **domináns időállandó**.

A szabad megoldást megadhatjuk az időállandók segítségével is:

$$x_f(t) = M_1 \cdot S_1 \cdot e^{-t/\tau_1} + M_2 \cdot S_2 \cdot e^{-t/\tau_2}$$

Korábban többször említettük, hogy a hálózat nyugalomban van.

Rendszerint a $t = 5\tau$ időpillanat után már elhanyagolhatóan tér el a hálózat az egyensúlyi állapottól.

2. Konjugált komplex gyökpár adódik:

$$(R^2/L^2 < 4/(L \cdot C))$$

Ebben az esetben $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ alakban kapjuk, ahol $j\omega$ a komplex szám képzetes része (matematikában i). Konjugált komplex gyökpárról lévén szó tudjuk, hogy egymás konjugáltjai.

$$\lambda_1 = \lambda_2^* \quad (\lambda_1 = \sigma + j\omega \text{ és } \lambda_2 = \sigma - j\omega)$$

Ebben az esetben S sajátvektorok is egymás konjugáltjai lesznek.

$$S_1 = S_2^*$$

Az M_1 és M_2 szabadon megválasztható konstansoknak ebben az esetben egymás konjugáltjainak kell lenniük!

Matematikai jártasságunk révén helyettesíthetjük őket a következő módon:

$$M_1 = |M_1| \cdot e^{j\varphi} \text{ és } M_2 = |M_1| \cdot e^{-j\varphi}$$

Írjuk fel a szabad összetevő első egyenletét i_L -re, és helyettesítsünk be a fentebbi észrevételeknek megfelelően. Kiemelések után a következő értékeket kapjuk:

$$i_L(t) = e^{\sigma t} \cdot |M_1| \cdot S_{1x} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} + (S_{1x}^*) \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t}$$

A zölddel kiemelt részek $e^{j\varphi}$ és $e^{-j\varphi}$ helyére kerültek. Gondoljuk át az exponenciális függvény tulajdonságait, és nézzük meg a sajátértékek értékét, ha nem világos, hogy miért is tehattük ezt meg.

Mivel konjugált komplex gyökpárunk volt, ezért az összegüknek valósnak kell lennie.

Matematika A1 tárgyból már megtanultuk a következőt: $2 \cdot \cos(x) = e^{jx} + e^{-jx}$

Vegyük észre, hogy az általunk meghatározott egyenlet is tartalmazza a cosinus függvényt, mely a $\cos(\omega t + \delta)$ alakot ölti általánosságban (ahol δ értéke konkrét értékek esetén számolható).

Az $e^{\sigma t}$ érték lesz a burkolója a cosinus függvénynek, így egy exponenciálisan lecsengő cosinus függvényt kapunk válaszul.

A σ -t **csillapítási tényezőnek** nevezzük. A következő összefüggés érvényes:

$$\tau_i = \frac{-1}{\sigma_i} = \frac{-1}{\text{Re}(\lambda_i)}$$

Amennyiben az ellenállás értéke 0, a sajátértékekre a $\lambda_{1,2} = \pm j/\sqrt{L \cdot C} = \pm j\omega$ érték adódik.

Ekkor nincs csillapítási tényező, a rendszer nem csillapodik, hanem $T=2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ **periódusidővel** rezeg.

3. Kettős gyök adódik:

$$(R/L)^2 = 4/LC$$

Ekkor a példánkban maradva:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -R/2L$$

A szabad összetevő ekkor a következő alakot ölti:

$$x_f(t) = M_1 * S * e^{\lambda_1 t} + M_2 * S * t * e^{\lambda_1 t}$$

Aszimptotikus stabilitás:

Ebben a témakörben azt vizsgáljuk, hogy hogyan viselkedik a hálózat, ha a gerjesztés 0, és $t \rightarrow \infty$, tehát kikapcsolás után a rendszerben vajon beáll-e az egyensúly?

A szabad megoldás általános alakja:

$$x_f(t) = \sum_{i=1}^N M_i * S_i * e^{\lambda_i t}$$

A gerjesztett megoldás értéke 0, mivel a gerjesztés 0.

Nézzük, hogy a sajátértékek függvényében mi történik a rendszerrel, ha $t \rightarrow \infty$:

- Ha $\lambda_i < 0$ akkor $e^{\lambda_i * t}$ exponenciálisan tart 0-hoz.
- Ha $\lambda_i > 0$ akkor $e^{\lambda_i * t}$ exponenciálisan tart végtelenhez.
- Ha $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ és $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ akkor $e^{\lambda_i * t}$ exponenciálisan oszcillálva tart 0-hoz.
- Ha $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ és $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ akkor $e^{\lambda_i * t}$ exponenciálisan oszcillálva tart végtelenhez.

Def.: Egy rendszer **aszimptotikusan stabilis**, ha a $t > t_0$ időintervallumon 0 gerjesztés hatására, a rendszer állapotváltozóinak értékei a 0-hoz tartanak, amennyiben $t \rightarrow \infty$.

Formálisan: Rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a $t \geq 0$ intervallumon $u(t) = 0$ esetén $x(t) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$.

Áll.: Rendszer aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha minden λ_i -re: $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

A komplex számsík bal félsíkját néha **stabilitási tartománynak** nevezik.

A rendszer csak akkor stabilis, ha minden λ a bal félsíkra esik.

Az állapotváltozós leírás megoldása mátrix-függvényekkel

A mátrixfüggvények olyan mátrixok, amelyek független változót tartalmaznak.
Levezetések nélkül, nézzük meg, hogyan használhatunk mátrixfüggvényeket a megoldáshoz.

Cayle-Hamilton tétel:

Minden mátrix kiegyenlíti a saját karakterisztikus egyenletét.

A sajátértékek helyére ha magát a mátrixot írjuk a karakterisztikus egyenletbe, akkor az egyenlet teljesül.

Következmény: $n \times n$ -es mátrix esetén A bármely hatványa előállítható az $A^1 \dots A^n$ hatványok lineáris kombinációjával.

Lagrange mátrixok:

Ha minden λ sajátérték különböző, és egyik sem 0, akkor az A mátrix hatványát felírhatjuk a következő módon:

$$A^k = \lambda_1^k * L_1 + \dots + \lambda_n^k * L_n$$

Ahol az L_i mátrixok az úgynevezett Lagrange mátrixok, melyek meghatározása a következő módon történik:

$$L_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left(\frac{A - \lambda_k * E}{\lambda_i - \lambda_k} \right)$$

A számítás ellenőrzéséhez használjuk a $\sum_{i=1}^n L_i = E$ összefüggést!

Egyszeres, nem 0 sajátértékek esetén a mátrix-függvények felírhatóak a Lagrange mátrixok és az f függvények segítségével, így definiálhatjuk mátrixfüggvények deriváltját és integráltját.

Amennyiben $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ a mátrix hatványait egy picit más alakban kell felírunk:

$$A^k = \lambda_1^k * L_1 + \dots + \lambda_i^k * H_1 + \lambda_i^k * k * H_2$$

Mátrixfüggvények definiálása:

A mátrixfüggvényeket az adott függvény Taylor-sorának segítségével definiálhatjuk.

$$e^{A*t} = \sum_{i=0}^{\infty} (A*t)^i / i! = E + A*t + A^2*t^2 / 2 + A^3*t^3 / 6 + \dots + A^n*t^n / n! + \dots$$

A Cayle-Hamilton tételt és a Lagrange mátrixokat felhasználva a következőt írhatjuk fel:

$$e^{A*t} = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^0 * L_i \right) + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^1 * L_i * t \right) + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^2 * L_i * t^2 / 2 \right) + \dots$$

Ha átcsoportosítjuk a tényezőket, akkor a következő alakhoz jutunk:

$$e^{A*t} = L_1 * \sum_{k=1}^n \lambda_1^k / k! * t^k + L_2 * \sum_{k=1}^n \lambda_2^k / k! * t^k + \dots + L_n * \sum_{k=1}^n \lambda_n^k / k! * t^k$$

Észre kéne vennünk a következőt:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_i^k / k! * t^k = e^{\lambda_i * t}$$

Így egyszeres sajátértékek esetén a mátrixfüggvényünk a következő alakot ölti:

$$e^{A*t} = L_1 * e^{\lambda_1 * t} + L_2 * e^{\lambda_2 * t} + \dots + L_n * e^{\lambda_n * t}$$

A mátrixfüggvények nem képezik szerves részét a tananyagnak, nehéz hozzájuk fizikai magyarázatot kötni.
Ízlés szerint vagy a mátrixfüggvényeket, vagy az összetevőkre bontást tanuljuk meg megfelelő szinten!

Impulzusválasz megadása mátrixfüggvényekkel

Az impulzusválasz meghatározásánál ismert a hálózat előlétele, és ismert a gerjesztés:

$$\begin{aligned}x(-0) &= 0 \\ u(t) &= \delta(t)\end{aligned}$$

Ismételjük át az állapotegyenletünket:

$$\begin{aligned}\underline{x}' &= \underline{A} * \underline{x} + \underline{B} * u \\ y &= \underline{C}^T * \underline{x} + D * u\end{aligned}$$

Az állapotegyenletnek meghatározták a kiindulási állapotot is figyelembe vevő megoldását, mely a következő:

$$x(t) = e^{At} * x(-0) + \int_{-0}^t e^{-A*\tau} * B * u(\tau) d\tau$$

Mivel impulzusválaszmeghatározásánál $x(-0) = 0$, így az egyenlet tovább redukálódik:

$$x(t) = \int_{-0}^t e^{-A*\tau} * B * u(\tau) d\tau = \int_{-0}^t e^{-A*\tau} * B * \delta(\tau) d\tau$$

A válasz kifejezésébe ezt kellene behelyettesítenünk:

$$\begin{aligned}h(t) &= C^T * e^{At} * B + D * \delta(t) \\ x(t) &= e^{At} * B\end{aligned}$$

Egyszeres, nem 0 sajátértékek esetén:

$$\begin{aligned}L_i &= \varepsilon(t) * \sum_{i=0}^N \frac{A - \lambda_k * E}{\lambda_i - \lambda_k} \\ h(t) &= \varepsilon(t) * \sum_{i=0}^N C^T * L_i * B * e^{\lambda_i * t}\end{aligned}$$

Milyen értékű a válasz, ha van pozitív λ ?

Exponenciálisan növekszik és a végtelenhez tart, kivéve, ha $C^T * L_i * B = 0$

Ha minden λ_i valós és negatív, akkor minden λ_i -hez hozzárendelhető egy τ időállandó:

$$\tau_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

Ha $\lambda_i = \lambda_{i+1} * = a + j * b$

$$\begin{aligned}e^{a * t} * \cos(b * \tau + \varphi) \\ \tau = \frac{-1}{a}\end{aligned}$$

Ha az utolsó előtti és az utolsó sajátérték kettős:

$$\begin{aligned}e^{At} &= \sum_{i=1}^{n-2} \left[e^{\lambda_i * t} L_i \right] + e^{\lambda_{-n} * t} H_{01} + t * e^{\lambda_{-n} * t} H_{02} \\ h(t) &= \varepsilon(t) * \sum_{i=1}^{n-2} \left[e^{\lambda_i * t} C^T * L_i \right] + C^T * e^{\lambda_{-n} * t} * H_{01} + C^T * t * e^{\lambda_{-n} * t} * H_{02} \\ x(t) &= e^{At} * x(-0) = \sum_{i=0}^n e^{\lambda_{-i} * t} L_i * x(-0)\end{aligned}$$

Lineáris invariáns rendszerek válaszáinak kifejezése az impulzusválasszal

Az impulzusválasznak fizikai tartalmat nehéz tulajdonítani, ugyanis dirac impulzust nem tudunk előállítani, felmerülhet tehát a kérdés, hogy mégis mire tudjuk használni?

Lineáris invariáns rendszerek esetében egy gerjesztésre adott választ az impulzusválasszal ki tudjuk fejezni, és ezt fogjuk megnézni a továbbiakban.

A dirac-delta impulzust már definiáltuk, definiáljuk a következőket:

$$\delta_T(t) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T} \quad \text{A dirac-delta definíciója. A dirac-deltát akkor kapjuk, ha } T \rightarrow 0.$$

$$p_T(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T) \quad \text{Az előző kifejezés számlálója.}$$

$$d_T(t) = 1/T * p_T(t) \quad \text{Az első kifejezés más alakban kifejezve.}$$

Ekkor $u(t)$ közelíthető:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k*T) * p_T(t-k*T)$$

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k*T) * \delta_T(t-k*T)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} h_T(t) = h(t)$$

Invarianciából következik:

$$u(t)\text{-re adott válasz: } y(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) * T * h_T(t-kt)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) * T * \delta_T(t-kt) = T \rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) * h(t-\tau) d\tau$$

Konvolúció tétel:

Ha ismert egy lineáris invariáns rendszer impulzusválasza, akkor tetszőleges gerjesztésre adott válasz:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) * h(t-\tau) d\tau$$

Áll.: Bizonyítható, hogy minden rendszer kauzális akkor és csak is akkor, ha az impulzusválasza belépő, azaz a $t < 0$ időintervallumon az impulzusválasszal értéke 0.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) * h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} u(\tau) * h(t-\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) * h(t-\tau) d\tau$$

Az első egyenlőség akkor igaz, ha a gerjesztés belépő gerjesztés.

A második egyenlőség akkor igaz, ha a rendszer kauzális, azaz belépő gerjesztésre belépő választ ad.

MP:

Vizsgáljunk egy lineáris, invariáns rendszert, melynek impulzusválasza a $h(t) = \varepsilon(t) * A_0 * e^{-a*t}$, és adjuk meg a választ, amennyiben a gerjesztés a $u(t) = \varepsilon(t) * U_0 * e^{-u*t}$

A válasz megadásához nyilvánvalóan a konvolúció tételt kell alkalmaznunk:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) * h(t-\tau) d\tau$$

Mivel mindkét tényezőben $\varepsilon(t)$ szerepel, ezért az integrálás alsó határa 0 is lehet, és mivel az impulzusválasz belépő, ezért $t < \tau$ esetén értéke 0, tehát az integrálás felső határa t is lehet, mivel ez után már konstans 0 függvényt integrálnánk:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) * h(t-\tau) d\tau$$

Helyettesítsük be a megadott impulzusválaszt és gerjesztést:

$$y(t) = \varepsilon(t) * \int_0^t U_0 * e^{-u*\tau} * A_0 * e^{-a*(t-\tau)} d\tau$$

Azokat az összetevőket, melyek nem tartalmaznak τ -t, kiemelhetjük az integrál elé, ahogy azt már máskor megszoktuk. Használjuk fel az exponenciális függvény ismert tulajdonságait (zölddel jelölve az erre vonatkozó részt):

$$y(t) = \varepsilon(t) * U_0 * A_0 * e^{-a*t} * \int_0^t e^{-(a-u)*\tau} d\tau = \varepsilon(t) * U_0 * A_0 * e^{-a*t} * [e^{-(a-u)*\tau} / (-(a-u))]_0^t = \varepsilon(t) * U_0 * A_0 * e^{-a*t} * (e^{-(a-u)*t} - 1) / (-(a-u))$$

Stabilitás:

Definiáljunk stabilitással kapcsolatos fogalmakat, melyek egy részével már találkoztunk:

- **Aszimptotikus stabilitás:**
 - Def.: Adott rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a magárahagyott rendszer állapotváltozói 0-hoz tartanak.
 - Áll.: rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha minden sajátérték valós része < 0
- **Gerjesztés-válasz stabilitás:**
 - Def.: Rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha minden véges gerjesztésre véges választ ad.
 - Tétel: rendszer gerjesztés-válaszstabilis akkor és csak akkor, ha a $h(t)$ abszolút integrálható, azaz:
 $\int_0^{\infty} h(t) dt < \infty$
 - Áll.: Aszimptotikusan stabilis rendszer gerjesztés-válasz stabilis. Az állítás visszafelé nem teljesül.
- **Hálózat stabilitás:**
 - Def.: Hálózat stabilis, ha a hálózathoz kapható minden rendszer aszimptotikusan stabilis.

Nemlineáris hálózatok:

Azokat a hálózatokat nevezzük nemlineárisnak, amelyekre nem igaz a szuperpozíció elve, tehát a hálózatszámítási módszereink közül a szuperpozíció nem használható ezen anyagrészben.

Az eltérés az eddigiektől annyi, hogy a karakterisztikákat nem lineáris ($y = a \cdot x + b$) függvényekkel írhatjuk le ezentúl, így az analitikus számolás sok esetben lehetetlenné válik, közelítenünk kell a megoldást.

Nemlineáris karakterisztikák:

Nemlineáris karakterisztikák megadását többféle módon is megtehetjük:

- Képlettel: függvények segítségével megadjuk az adott elemre jellemző karakterisztikát.
- Táblázattal: táblázat segítségével pontonként megadjuk az adott karakterisztika összetartozó értékeit.
- Grafikonnal: grafikonon ábrázoljuk az adott elemre jellemző karakterisztikát.
- Szakaszonként lineáris közelítéssel: a karakterisztikát szakaszonként lineáris függvényekkel közelítjük.

Nemlineáris rezisztív elemek:

A nemlineáris rezisztív elemek a valósághoz közelebb állnak, mint idealizált, lineáris társaik.

A nemlineáris elemeket rajzokon felülvonással jelöljük.

Nemlineáris ellenállás:

Implicit karakterisztika megadása:

$$f(u_N, i_N) = 0$$

$$\text{pl: } a \cdot u_N^2 + b \cdot u_N \cdot i_N + c \cdot i_N^2 = 0$$

Feszültség vezérelt áramkarakterisztika megadása:

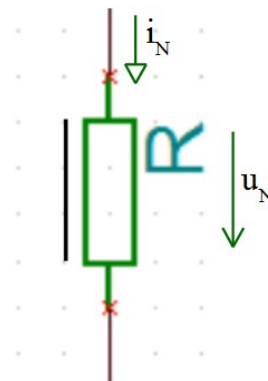
$$i_N = I(u_N)$$

$$\text{pl: } i_N = a \cdot u_N^2 + b \cdot u_N$$

Áram vezérelt feszültségkarakterisztika megadása:

$$u_N = U(i_N)$$

$$\text{pl: } u_N = a \cdot i_N^2 + b \cdot i_N$$



Az ilyen elemekre általában teljesül a következő: $I(0) = U(0) = 0$

A dióda például egy nemlineáris rezisztív elem.

A karakterisztikáját megadhatjuk mint áramvezérelt feszültségkarakterisztika vagy mint feszültségvezérelt áramkarakterisztika például:

$$i_N = I_0 \cdot (e^{U/U_t} - 1)$$

$$u_N = U_0 \cdot \ln(i_N/I_S + 1)$$

Egy valós dióda esetén például: $U_0 = 26\text{mV}$, $I_S = 1\text{nA}$

Nemlineáris csatolt rezisztív elemek:

Implicit karakterisztika megadása:

$$f_1(u_{N1}, i_{N1}, u_{N2}, i_{N2}) = 0$$

$$f_2(u_{N1}, i_{N1}, u_{N2}, i_{N2}) = 0$$

$$\text{pl: } a \cdot u_{N1}^2 + b \cdot u_{N2} \cdot i_{N2} + c \cdot i_{N1}^2 = 0$$

$$d \cdot u_{N1}^2 + e \cdot u_{N1} \cdot i_{N2} + f \cdot i_{N2}^2 = 0$$

Feszültség vezérelt áramkarakterisztika megadása:

$$i_{N1} = I_1(u_{N1}, u_{N2})$$

$$i_{N2} = I_2(u_{N1}, u_{N2})$$

$$\text{pl: } i_{N1} = a \cdot u_{N1}^2 + b \cdot u_{N2}$$

$$i_{N2} = c \cdot u_{N2}^2 + d \cdot u_{N1}$$

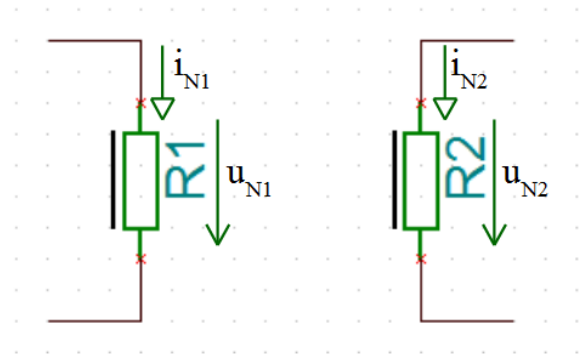
Áram vezérelt feszültségkarakterisztika megadása:

$$u_{N1} = U_1(i_{N1}, i_{N2})$$

$$u_{N2} = U_2(i_{N1}, i_{N2})$$

$$\text{pl: } u_{N1} = a \cdot i_{N1}^2 + b \cdot i_{N2}$$

$$u_{N2} = c \cdot i_{N2}^2 + d \cdot i_{N1}$$



Nemlineáris dinamikus elemek:

A nemlineáris dinamikus elemek a valósághoz közelebb állnak, mint idealizált, leináris társaik. Rajzokon a nemlineáris elemeket egy felülvonással jelöljük.

Nemlineáris kapacitás:

A kapacitást nemlineáris esetben a töltése (q) jellemzi.

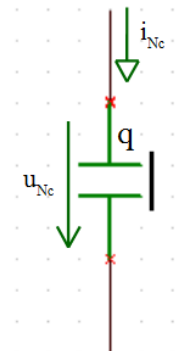
$$\text{Karakterisztika: } i_{Nc} = q'$$

$$U(q) = u_{Nc}$$

Ahol U egy nemlineáris függvény.

Nemlineáris kapacitások esetén az állapotváltozó a kapacitás töltése lesz.

A C kapacitásnak itt is adhatunk értelmet, azonban ebben az esetben nem konstans, hanem feszültségfüggő érték lesz: $i_{Nc} = C(u_{Nc}) \cdot du_{Nc}/dt$



Nemlineáris induktivitás:

Az induktivitást nemlineáris esetben a fluxusa (Ψ) jellemzi.

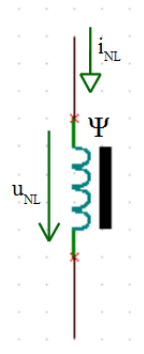
$$\text{Karakterisztika: } u_L = \Psi'$$

$$I(\Psi) = i_{NL}$$

Ahol I egy nemlineáris függvény.

Nemlineáris induktivitások esetén az állapotváltozó az induktivitás fluxusa lesz.

Az L induktitásnak itt is adhatunk értelmet, azonban ebben az esetben nem konstans, hanem áramfüggő érték lesz: $u_{NL} = L(i_{NL}) \cdot di_{NL}/dt$



Eddig nem nyúltunk hozzá az összekapcsolási kényszerekhez, csak a karakterisztikák bonyolodtak.

Nemlineáris csatolt dinamikus elemek:

Nemlineáris csatolt kapacitás:

Karakterisztika:

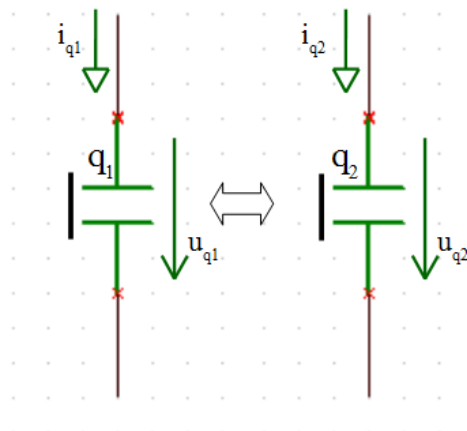
$$i_{q1} = q_1'$$

$$i_{q2} = q_2'$$

$$q_1 = Q_1(u_{q1}, u_{q2})$$

$$q_2 = Q_2(u_{q1}, u_{q2})$$

$Q(u_{q1}, u_{q2})$ egy-egy (nemlineáris) függvény.



Nemlineáris csatolt induktivitás:

Karakterisztika:

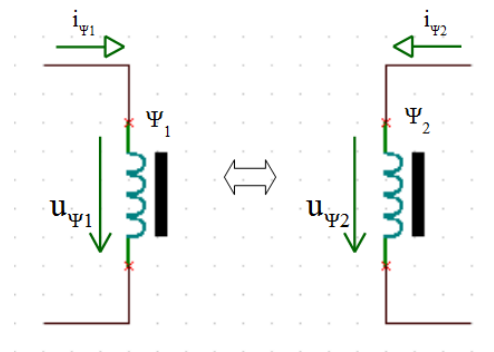
$$u_{\psi1} = \Psi_1'$$

$$u_{\psi2} = \Psi_2'$$

$$\Psi_1 = \underline{\Psi}_1(i_{\psi1}, i_{\psi2})$$

$$\Psi_2 = \underline{\Psi}_2(i_{\psi1}, i_{\psi2})$$

$\underline{\Psi}(i_{\psi1}, i_{\psi2})$ egy-egy (nemlineáris) függvény.



Nemlineáris dinamikus elemek által végzett munka:

A munka definíciójába behelyettesítve és az elemek karakterisztikáját kihasználva a következő eredményekhez juthatunk:

Kapacitás:

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u_q * i_q dt = \int_{t_1}^{t_2} u_q * (dq/dt) dt = \int_{Q(u_{q1})}^{Q(u_{q2})} u_q dq$$

Induktivitás:

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u_{\psi} * i_{\psi} dt = \int_{t_1}^{t_2} i_{\psi} * (d\Psi/dt) dt = \int_{\Psi(i_{\psi1})}^{\Psi(i_{\psi2})} i_{\psi} d\Psi$$

Nemlineáris egyenletrendszerek:

Mielőtt az egyenletrendszerekről beszélnénk, vezessünk be pár jelölést:

- b : ágak száma
 - b_{LR} : lineáris, rezisztív elemek száma
 - b_{LD} : lineáris dinamikus elemek száma
 - b_{NR} : nem lineáris rezisztív elemek száma
 - b_{ND} : nemlineáris dinamikus elemek száma
- $$b = b_{LR} + b_{LD} + b_{NR} + b_{ND}$$
- Segédváltozók: u_ψ, i_q
 - Kanonikus változók: $u_s, i_s; u_N, i_N; q, \Psi; u_{Nc}, i_{NL}; u_c, i_L$
 - Állapotváltozók: $q, \Psi; u_c, i_L$
 - Egyenletek teljes rendszere: $2*b$ darab egyenletet tartalmazó egyenletrendszer.
 - Redukált egyenletrendszer: $b_{LR} + b_{LD} + b_{ND} + b_{NR}$ darab egyenletet tartalmazó egyenletrendszer, mely a lineáris elemkarakterisztikákat már behelyettesítve tartalmazza.
 - Kanonikus egyenletrendszer: egyenletrendszer, melyben csak nemlineáris paraméterek szerepelnek ismeretlenként.

A nemlineáris elemek kezeléséhez segédváltozók használata szükséges, ezen segédváltozók a nemlineáris induktivitások feszültsége és a nemlineáris kapacitások áramai.

A kirchoff egyenletekbe nem kerülhet bele a q töltés és a Ψ fluxus, kizárólag ezeknek deriváltjai.

Az $i_q = q'$ és a $u_\psi = \Psi'$ lineáris egyenleteknek számítanak, azonban a rezisztív nemlineáris karakterisztikák nem!

Kanonikus egyenletrendszer:

A kanonikus egyenletrendszert egyszer felírjuk, de valószínűleg a ZH-n kívül többet nem találkozunk már vele.

A felírása nem nehéz, analitikus megoldást azonban nem adunk rá (nem lehetséges), numerikus módszereket fogunk alkalmazni (a számítógép).

Fontos megjegyezni, hogy adott kanonikus egyenletrendszer több formában létezhet!

A válasz formáját a nemlineáris karakterisztikák határozzák meg.

A kanonikus egyenletrendszer változói:

- Állapotváltozók: $\underline{x}_a; \underline{x}_w$ (lineáris: u_c, i_L); (nemlineáris: q, Ψ)
- Nemlineáris dinamikus elemek segédváltozói: $\underline{w}$ (u_q és i_ψ)
- Nemlineáris rezisztív elemek változói: $\underline{u}_N; \underline{i}_N$
- Gerjesztések: $\underline{u}_s$

Az állapotváltozós leírás normálalakja:

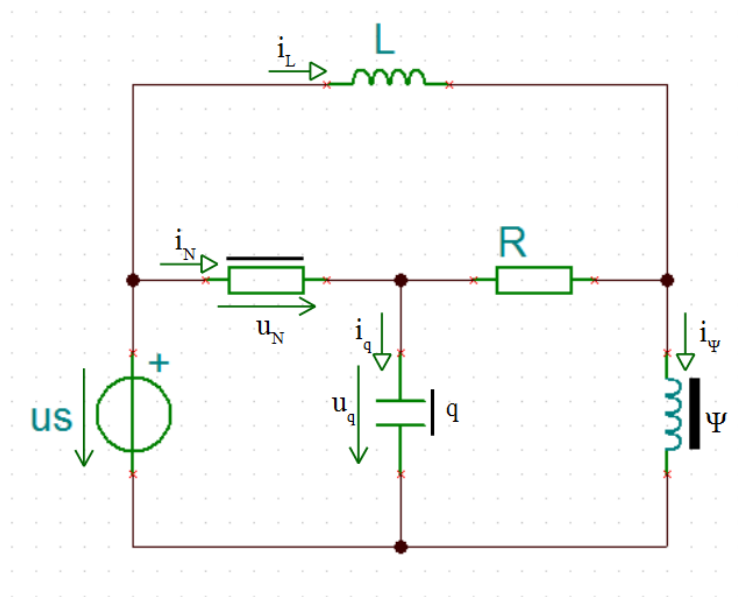
$$\begin{pmatrix} \underline{x}_a' \\ \underline{x}_w' \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{xa} \underline{x}_a + \mathbf{K}_{xw} \underline{w} + \mathbf{K}_{xu} \underline{u}_N + \mathbf{K}_{xi} \underline{i}_N + \mathbf{K}_{xs} \underline{u} \quad b_{LD} + b_{ND} \text{ darab}$$

$$0 = \mathbf{K}_{Na} \underline{x}_a + \mathbf{K}_{Nw} \underline{w} + \mathbf{K}_{Nu} \underline{u}_N + \mathbf{K}_{Ni} \underline{i}_N + \mathbf{K}_{Ns} \underline{u} \quad b_{NR} \text{ darab}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_w &= \mathbf{F}_w(\underline{w}) \\ \mathbf{F}_N(\underline{u}_N, \underline{i}_N) \end{aligned} \quad b_{ND} + b_{NR} \text{ darab}$$

$$\underline{y} = \mathbf{K}_{xa} \underline{x}_a + \mathbf{K}_{xw} \underline{w} + \mathbf{K}_{xu} \underline{u}_N + \mathbf{K}_{xi} \underline{i}_N + \mathbf{K}_{xs} \underline{u} \quad \text{Válasz kifejezése}$$

MP:



Kanonikus változók:

$u_s, u_N, i_N, q, \Psi, u_{NL}, i_{NL}, i_L$

Állapotváltozók:

q, Ψ, i_L

Írjuk fel a kanonikus egyenletrendszer:

A:

Az állapotváltozók deriváltjai kifejezve a kanonikus változókkal **(kivéve q, Ψ)** :

$$\Psi' = u_q - R(i_\Psi - i_L)$$

A nemlineáris induktivitás feszültsége kifejezve az u_q feszültséggel.

$$q' = i_N + i_L - i_\Psi$$

A nemlineáris kapacitás árama kifejezve a többi (kanonikus) árammal.

$$i_L' = 1/L * (u_N + R(i_\Psi - i_L))$$

Az induktivitás $u_L = L * i_L'$ karakterisztikájából kifejezve.

B:

A nemlineáris ellenállásokra felírt egyenletek:

$$u_N = u_s - u_q$$

A két potenciáli különbsége.

C:

Nemlineáris rezisztív és dinamikus karakterisztikák kifejezve a kanonikus változókkal **(kivéve q, Ψ)** :

$$\Psi = \Psi(i_N)$$

$$q = Q(u_q)$$

D:

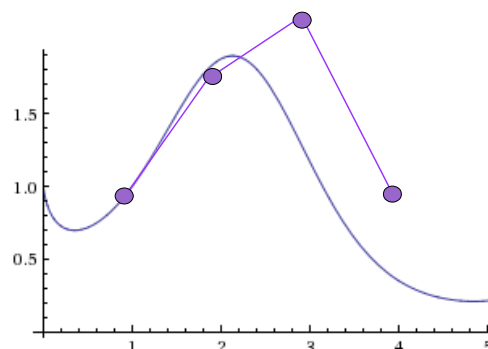
A válasz kifejezése.

Numerikus módszerek

A nemlineáris egyenletrendszerek megoldása a legtöbb esetben analitikusan komoly probléma. Numerikus módszereket kell alkalmaznunk a (közelítő) megoldás megtalálásához. Az alábbiakban röviden tanulmányozunk pár ilyen numerikus megoldást.

Előrelépő Euler-módszer:

A módszer arra épül, hogy első deriváltakkal közelíthetünk egy függvényt. Válasszunk egy lépéstávolságot (példában legyen 1), és egy kezdőpontot (példában legyen ez is 1). Vizsgáljuk meg a függvényünk deriváltját a kiindulási pontban, majd amíg el nem érjük a következő pontot, addig a függvényt közelítsük a kiszámolt deriválttal. Ha elértük a következő lépést, akkor számoljuk újra a függvény deriváltját ebben a pontban, és az új meredekséggel rajzoljuk tovább a függvényünk.

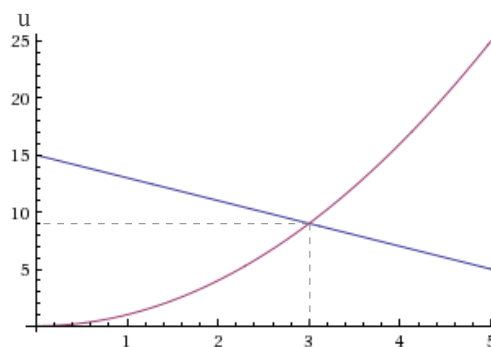


A példán is látható, hogy az eljárás rendkívül egyszerű, de nem túl pontos.

Grafikus megoldás:

A módszer nagyon személetes és egyszerűen alkalmazható abban az esetben, ha egyetlen egy nemlineáris rezisztív elemet tartalmaz a hálózatunk. Ekkor a nemlineáris elem eltávolítva egy kétpólus adódik, amelyet helyettesíthetünk Thevenin vagy Norton ekvivalenssel (generátorral).

A generátor karakterisztikáját (mely egy lineáris karakterisztika) egy grafikonon ábrázolva a nemlineáris karakterisztikával, megkereshetjük azok metszéspontját, és a metszéspont jelenti számunkra a megoldást.

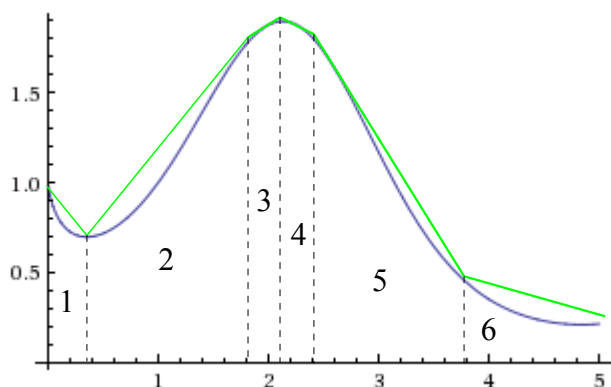


A módszer természetesen pontos megoldást nem adhat, azonban megfelelő mértékben közelítheti azt.

A helyettesítő generátor karakterisztikáját az $u = u_0 - R \cdot i$ egyenletű egyenes testesíti meg, melyet **munkaegyenest** is szokás nevezni.

Szakaszonkénti lineáris közelítés:

A függvényt közelíthetjük, ha szakaszokra bontjuk, és minden egyes szakaszony lineáris függvényekkel helyettesítjük. Így minden szakaszon lineáris függvényekkel számolhatunk, mely nem okoz nagy nehézséget. Minél kisebb szakaszokra bontjuk a függvényünk, annál pontosabb megoldást kapunk.



Jelen példában 6 szakaszra osztottuk a karakterisztikát.

Minden szakaszra meghatározható a szakaszon érvényes lineáris közelítés, így analitikusan is számolhatunk.

A módszer akár kombinálható a grafikus megoldással is.

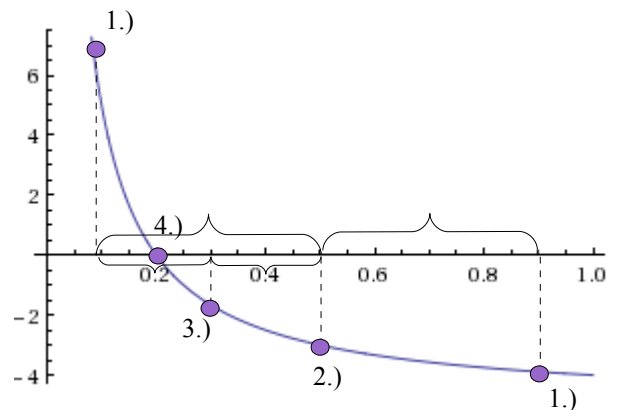
Iterációs módszerek:

Az összes problémánk visszavezethető az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására, így csak ezen problémára kell megoldást találnunk.

Beskatulyázás:

Válasszunk véletlenszerűen két pontot a függvényen. Amennyiben azt tapasztaljuk, hogy a két pontban meghatározott függvényértékek előjele eltérő, a két pont közt, szakaszfelezések útján próbáljunk eljutni a tengelymetszethez.

A véletlenszerű választást algoritmizálhatjuk különböző elvek alapján.



A módszer nem stabil! Nem minden kezdeti értékre talál megoldást, és nem biztos, hogy megoldásra vezet!

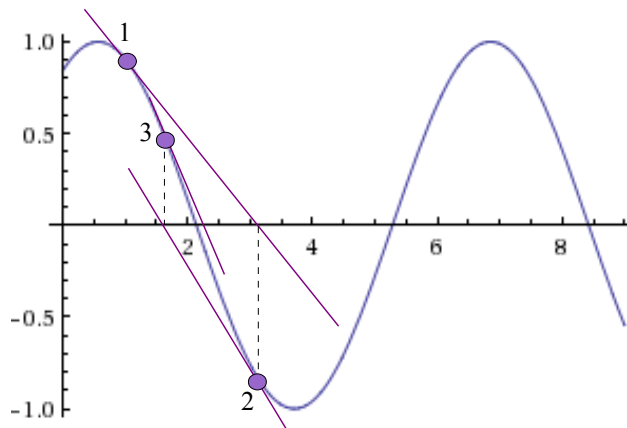
Newton módszer:

Válasszunk véletlenszerűen egy pontot, majd határozzuk meg ezen pontban az érintő egyenletét. Keressük meg az érintő x tengely metszetét, és a metszethez határozzuk meg a függvényértéket, majd határozzuk meg az ezen függvényértékhez tartozó érintő egyenletét is. Az eljárást rekurzívan folytassuk, amíg kellő pontosságú eredményhez nem jutunk.

Az eljárás beskatulyázásnál jelentősen hatékonyabb, és stabilabb, azonban a megoldás itt sem garantált.

Az általános rekurzív lépés:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Newton-Raphson eljárás:

A Newton módszer általánosítása több dimenziós esetre.

A problémát több dimenzióban is az $F(x) = 0$ problémára vezethetjük vissza, ám itt $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény.

Az általános rekurzív lépés:

$$F(x_i) + F'(x_i) * (x_{i+1} - x_i) = 0$$

Az F függvény deriváltja ebben az esetben egy mátrix, ahogy azt az Matematika A2 tárgyból megtudhatjuk.

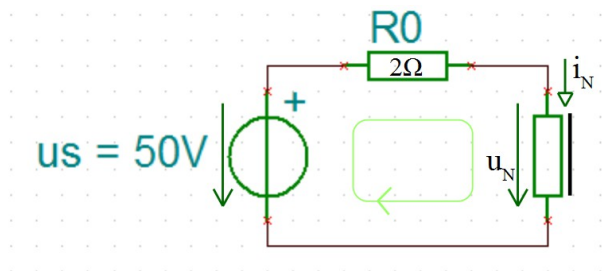
Egyetlen nemlineáris elemet tartalmazó rezisztív hálózatok analízise

Minden egyetlen nemlineáris rezisztív elemet tartalmazó hálózat analízise visszavezethető egy Norton vagy Thevenin generátorból és egy nemlineáris elemből álló hálózat analízisére, ha a nemlineáris elem eltávolítjuk, és az eltávolítás után maradt kétpóluson elvégezzük a Thevenin vagy Norton helyettesítést.

A helyettesítő generátor meghatározását lásd korábban.

Innentől csak a lezárt generátor problémájával kell foglalkoznunk.

MP:

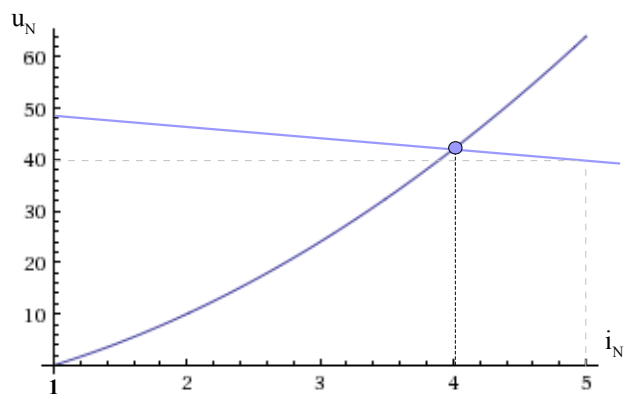


Adott a nemlineáris karakterisztika:

$$\begin{aligned} u_N &= 2i_N^2 + 4i_N - 6 & \text{ha } i_N > 1 \\ u_N &= 0 & \text{ha } i_N < 1 \end{aligned}$$

Ne felejtsük el a koherens egységrendszert!

Grafikus megoldás szerkesztéssel:



A parabolát a lineáris egyenes még egy pontban metszené, azonban ne feledjük, hogy a karakterisztikánk nem parabola a teljes számegyenesen, csak annak egy részén.

Az analitikus megoldás:

A megoldáshoz egyetlen hurokegyenletet elég felírunk, így két ismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad u_N &= 2i_N^2 + 4i_N - 6 & \text{ha } i_N > 1 & \quad \text{Karakterisztika} \\ u_N &= 0 & \text{ha } i_N < 1 & \end{aligned}$$

$$\text{II.} \quad -u_s + R_0 \cdot i_N + u_N = 0 \quad \text{Hurokegyenlet}$$

Helyettesítsük be a hurokegyenletbe a karakterisztikát és a megadott értékeket:

$$-50 + 2i_N + u_N = -50 + 2i_N + [2i_N^2 + 4i_N - 6] = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$i_N = \frac{-3 \pm \sqrt{9+112}}{2} \rightarrow \boxed{i_N = -7} \quad \text{vagy} \quad \boxed{i_N = 4\text{A}}$$

A -7 nyilvánvalóan nem jó megoldás, mert ekkor az u_N 0 lenne, és ellentmondásra jutnánk. A rossz megoldás megjelenését az okozta, hogy a teljes számegyenesen parabolaként kezeltük a nemlineáris karakterisztikát. Az $i_N = 4\text{A}$ összhangban van a grafikus megoldással is.

Munkaponti linearizálás, másnéven kisjelű analízis

Tekintsünk egy olyan hálózatot, amelynek gerjesztése egy konstans érték közelében, relatív kicsi amplitúdóval (általában periodikus változással fogunk találkozni, de ez nem feltétel) változik.

$$\text{MP: } u(t) = U + \tilde{u}(t) \quad \rightarrow \quad u(t) = 100\text{V} + 2\text{V} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Ebben az esetben a konstans értéknek megfelelő munkapontban a hálózatot helyettesíthetjük egy lineáris hálózattal. Így a számítást két részre bonthatjuk, először egy konstans gerjesztésű nemlineáris hálózatot kell analizálnunk, majd a lineáris helyettesítő hálózatot kell vizsgálnunk melynek gerjesztése viszont a periodikus összetevő.

A megoldás a két kiszámolt válasz összege lesz, ami csak közelítő érték, azonban ha a konstans értékhez képest a periodikus gerjesztés amplitúdója kellően kicsi, a megoldás megfelelő pontosságú lesz.

A kellően kicsit nem definiáljuk. Amennyiben $u(t) = 10 + 0.2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ gerjesztéshez hasonlóval találkozunk például, sejthetjük, hogy, a munkaponti linearizálás módszerét kell használnunk.

A módszer a szuperpozíció elvét alkalmazza, mely nemlineáris esetben nem teljesül, azonban megfelelő körülmények mellett mégis használható.

Munkaponti stabilitás:

Egy rendszernek több munkapontja létezhet, hogy mely munkapont alakul ki az függ a gerjesztéstől, és az adott munkapont stabilitásától.

Tekintsünk egy golyót egy gödörben és tekintsük ugyan ezt a golyót egy dombon.

A gödör egy stabilis munkapont, mivel a golyót kis mértékben kitérítve, az a munkapontba tér vissza, a domb tetején nyugvó golyó azonban kis mértékű kitérítés után elgurul, így az nem stabilis.

A munkapont akkor és csak akkor stabilis, ha a munkapontban linearizált rendszer aszimptotikusan stabilis.

A nem stabilis munkapontok ki sem alakulhatnak.

A stabilis munkapont létrejöhet, de létrejötte nem garantált.

Munkaponti linearizálás lépései:

1. Munkapont meghatározása:

A gerjesztés a konstans gerjesztés, így a lineáris és nemlineáris kondenzátorokat szakadás a tekercseket rövidzár helyettesíti. Az analízist egy nemlineáris rezisztív hálózaton kell elvégeznünk.

2. Linearizálás a „dinamikus” paraméterekkel:

Ellenállás **dinamikus ellenállása**: $R_d = du/di \mid_{\text{munkapontban vizsgálva}}$

Kondenzátor **dinamikus kapacitása**: $C_d = dq/du \mid_{\text{munkapontban vizsgálva}}$

Tekercs **dinamikus induktivitása**: $L_d = d\psi/di \mid_{\text{munkapontban vizsgálva}}$

3. Linearizált hálózat analízise:

Linearizált dinamikus hálózat analízise a gerjesztés változó összetevőjével.

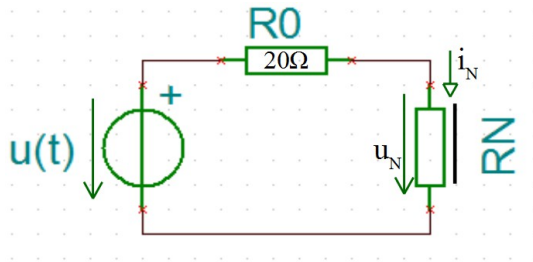
4. A válasz meghatározása:

A linearizált hálózaton alkalmazzuk a szuperpozíció elvét: $y(t) = Y + \tilde{y}(t)$

A válasz a munkapontban pontos, és a munkapont környezetében megfelelő pontosságú.

MP:

Az összes egyetlen egy nemlineáris elemet tartalmazó eset visszavezethető egy lezárt helyettesítőgenerátorra, így a megoldást is csak ilyen példán vizsgáljuk. Használjuk például a csomóponti potenciálok módszerét.



Gerjesztés: $u(t) = 10V + 0.2 * \cos(\omega * t)$

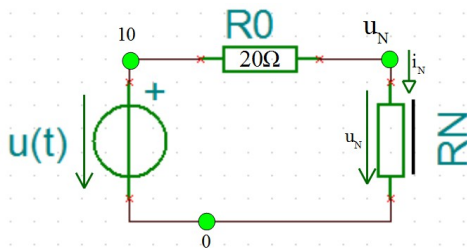
Nemlineáris karakterisztika:

$$\begin{aligned} u_N &= 10 * i_N^2 + i_N & \text{ha } i_N > 0 \\ u_N &= 0 & \text{ha } i_N < 0 \end{aligned}$$

A válasz a bejelölt u_N feszültség.

Munkapont meghatározása:

Ebben az esetben a gerjesztés a konstans érték: $u(t) = 10V$



A csomóponti egyenlet:

$$\frac{u_N - 10}{20} = -i_N \rightarrow u_N = -20 * i_N + 10$$

A nemlineáris karakterisztika:

$$u_N = 10 * i_N^2 + i_N$$

Mivel a nemlineáris karakterisztika másodfokú polinom, így analitikusan megoldható a feladat.

Amennyiben bonyolultabb karakterisztikánk volna, csak numerikus módszerekre támaszkodhatnánk.

Az egyenletrendszer megoldásai:

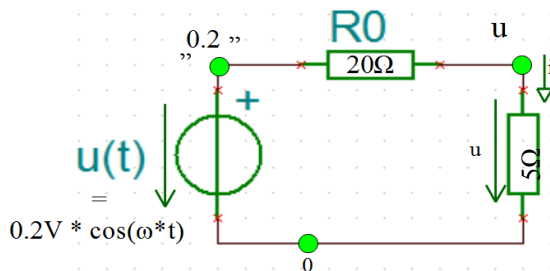
$$\begin{aligned} i_N &= -2.5A & \rightarrow & u_N = 60V \\ i_N &= 0.4A & \rightarrow & u_N = 2V \end{aligned}$$

Ez azonban nem felel meg a karakterisztikának!
Ez a megoldás helyes.

Határozzuk meg a dinamikus helyettesítést a munkapontban: $R_d = u_N / i_N = 2V / 0.4A = 5\Omega$

A válasz a munkapontban az u_N feszültség: $Y = 2V$

Munkaponti lineáris helyettesítés:



Ezen hálózat analízise (a periodikus gerjesztéstől eltekintve, mellyel később foglalkozunk) rutin feladat.

A választ határozzuk meg egyszerű feszültségosztás segítségével (fogadjuk el, hogy most működik):

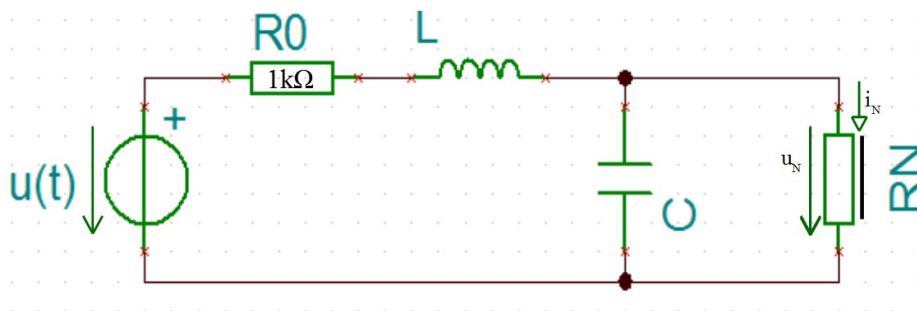
$$\tilde{y}(t) = 0.2V * \frac{5}{25} * \cos(\omega * t) = 0.04V * \cos(\omega * t)$$

A teljes válasz:

$$y(t) = Y + \tilde{y}(t) = 2V + 0.04V * \cos(\omega * t)$$

MP:

Határozzuk meg a stabil és instabil munkapontokat:



$$C = 1\text{nF}$$

$$L = 1\text{mH}$$

$$u(t) = 20\text{V} + 0.1\text{V} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Ismert a nemlineáris ellenállás karakterisztikája:

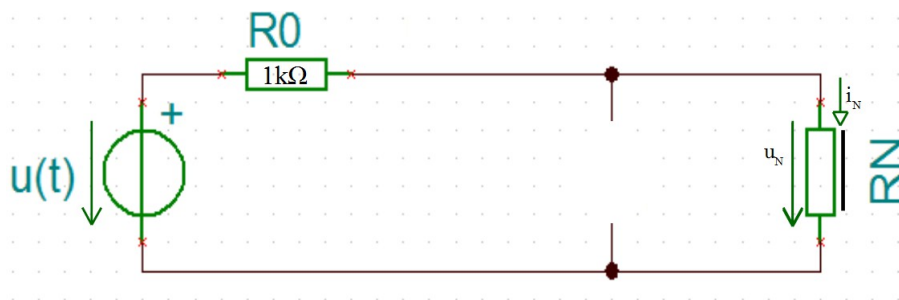
$$u_N = \frac{1}{i_N} \quad \text{ha} \quad i_N > 0 \quad \text{és} \quad u_N > 0$$

Határozzuk meg a koherens egységrendszert is:

$$[\text{V}, \text{mA}] \quad \rightarrow \quad [\text{k}\Omega, \text{nF}, \text{mH}]$$

A munkapont meghatározása:

A dinamikus elemek helyettesíthetők konstans gerjesztés esetén. Jelen példában helyettesítés után egyből Thevenin generátort kapunk, mely a nemlineáris ellenállással van lezárva.



Egyetlen csomóponti egyenletre van szükségünk:

$$\frac{u_N - 20}{1} + i_N = 0$$

Ismert a nemlineáris rezisztív karakterisztika:

$$u_N = \frac{1}{i_N}$$

A kapott egyenlet tehát:

$$u_N = 20 - 1 \cdot i_N = 1 / i_N$$

Átszorzás után másodfokú egyenletet kapunk, így ismét meg tudjuk oldani analitikusan:

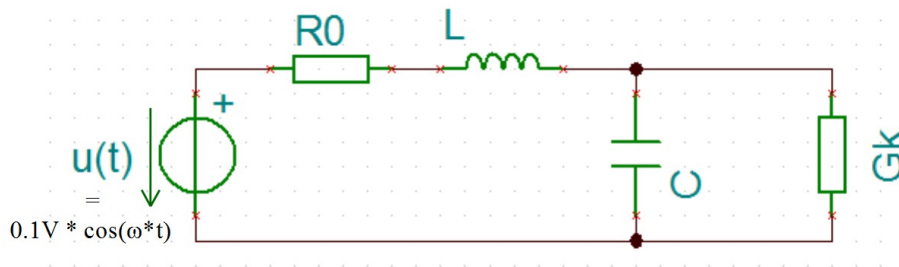
$$i_N = 0.05\text{mA} \quad \text{és} \quad i_N = 19.95\text{mA}$$

Az előző példában a megoldások közül az egyik nem volt valós, most azonban mind a két megoldás megfelelő. Hogy melyik alakul ki, az a munkapontok stabilitásától és a gerjesztéstől függ.

A linearizált hálózat a munkapontban:

Ahelyett, hogy elvégeznénk a dinamikus értékek kiszámolását mindkét különböző megoldáshoz, paraméteresen számolunk tovább, de természetesen tökéletes megoldás az is, ha a két különböző értékkel két külön hálózatot analizálunk.

Az eredeti hálózat nemlineáris ellenállását helyettesítsük egy lineáris vezetéssel (G_K) és analizáljuk az így kialakuló lineáris, másodrendű dinamikus hálózatot, melynek gerjesztése már csak a szinuszos komponens!



Az állapotváltozós leírásból megkapható az A mátrix, az egyenletek felírásától és rendezésétől tekintünk el:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-G_K}{C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}$$

Ebből felírhatjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda^2 + \left(\frac{G_K}{C} + \frac{R}{L} \right) \lambda + \frac{G_K * R + 1}{L * C} = 0$$

A karakterisztikus polinom **Hurwitz-polinom**, ha az összes sajátérték valós része negatív.

Hurwitz-kritérium:

Annak szükséges feltétele, hogy a karakterisztikus polinom Hurwitz-polinom legyen, az hogy a karakterisztikus polinom összes együtthatója pozitív legyen.

Másodrendű esetben a Hurwitz-kritérium **szükséges és elégséges** feltétel!

A Hurwitz kritérium alapján összesen két feltételt kaphatunk a stabilitásra, amely esetünkben csak 1:

$$G_K > -1\text{mS} \quad [\text{mS}] = \text{millisiemens}$$

A linearizált hálózatban G_K értékét könnyedén meghatározhatjuk:

$$G_K = di_N / du_N \big|_{\text{munkapontban vizsgálva}} = \frac{-1}{u_N^2} \big|_{\text{munkapontban vizsgálva}} = -i_N^2$$

Helyettesítsük be a fentebb kiszámolt értékeket a végeredménybe, és nézzük melyik felel meg a kritériumnak:

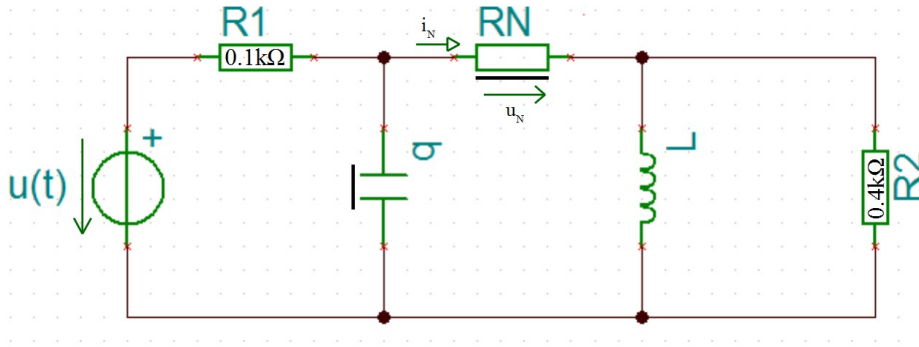
$$i_N = 0.05\text{mA} \quad G_K = -0.0025\text{mS} \quad > -1\text{mS} \quad \text{Ezen munkapont tehát stabil.}$$

$$i_N = 19.95\text{mA} \quad G_K = -398.0025\text{mS} \quad < -1\text{mS} \quad \text{Ezen munkapont nem stabil.}$$

Természetesen ezt a Hurwitz-kritérium nélkül is ki tudtuk volna számolni, azt ugyanis gond nélkül tudjuk

ellenőrizni egyébként is, hogy egy hálózat aszimptotikusan stabilis-e.

MP:



Nemlineáris kapacitás karakterisztikája:

$$q = Q(u_c) = 0.3 \cdot u_c + 0.004 \cdot u_c^2$$

Nemlineáris ellenállás karakterisztikája:

$$u_N = U(i_N) = 0.5 \cdot i_N^{3/2} \quad \text{ha } i_N > 0 \text{ egyébként } 0.$$

Gerjesztés:

$$u(t) = 20V \text{ ha } t < 0$$

$$u(t) = 22V \text{ ha } t > 0$$

Hogy jön ez ide?

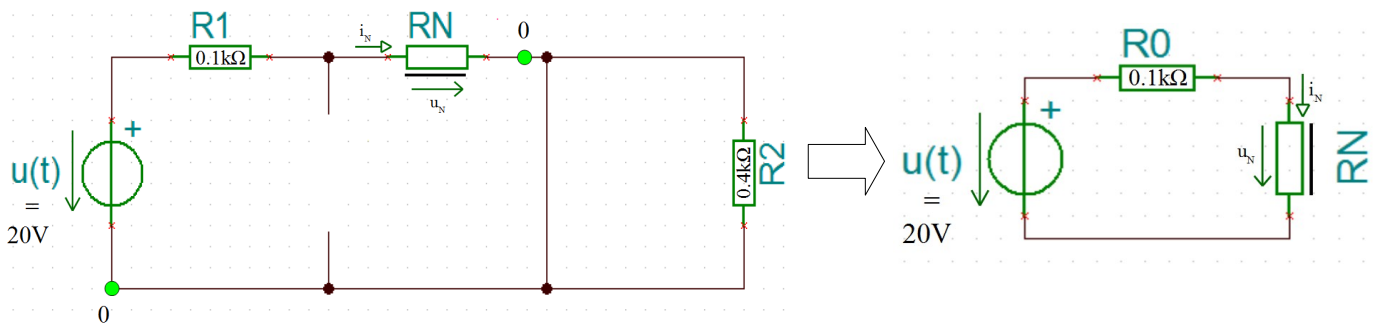
Könnyedén észrevehetjük, hogy a gerjesztés felírható a következő formában is:

$$u(t) = 20V + 2V \cdot \varepsilon(t)$$

Így már alkalmazhatjuk a munkaponti linearizálást.

A munkapont meghatározása:

A gerjesztés a konstans 20V, végezzük el a helyettesítéseket:



Helyettesítés után a Thevenin-helyettesítést nem kell elvégeznünk, egyből generátort kapunk.

Ekkor egy csomóponti egyenletet és a nemlineáris ellenállás karakterisztikáját felhasználva meghatározhatjuk az i_N értékét:

$$i_N = 0.2A$$

$$\text{ha } i_N < 0$$

Ez nyilvánvalóan nem valós megoldás.

$$i_N = 0.5 \cdot i_N^{3/2} + 0.1 \cdot i_N - 20$$

$$\text{ha } i_N > 0$$

Ez jó megoldás.

Utóbbi egyenlettel tovább kell számolnunk, a **numerikus** eljárás (számítógép) eredménye:

$$i_N = 11.25 \text{ mA}$$

A munkaponti helyettesítések meghatározása:

Az előző pontban kiszámoltuk i_N értékét, számoljuk ki mellé u_N -t is a karakterisztika segítségével, mivel a kapacitás feszültsége megegyezik az u_N feszültséggel!

$$i_N = 11.25 \text{ mA} \quad \rightarrow \quad u_N = 18.87 \text{ V} \quad \text{A karakterisztikából leolvassa.}$$

Ekkor a dinamikus értékek:

$$R_d = du_N/di_N \mid \text{ munkapontban vizsgálva} = 2.50 \text{ k}\Omega$$

$$C_d = dq/du_c \mid \text{ munkapontban vizsgálva} = 4.50 \text{ }\mu\text{F}$$

Nemlineáris ellenállás karakterisztikája:

$$u_N = U(i_N) = 0.5 \cdot i_N^{3/2} \quad \text{ha } i_N > 0 \text{ egyébként } 0.$$

$$du_N/di_N = 0.5 \cdot 2/3 \cdot (i_N)^{1/2}$$

Nemlineáris kapacitás karakterisztikája:

$$q = Q(u_c) = 0.3 \cdot u_c + 0.004 \cdot u_c^2$$

$$dq/du_c = 0.3 + 2 \cdot 0.004 \cdot u_c$$

Így megkaptuk a lineáris helyettesítő hálózat paramétereit.

3. A linearizált hálózat analízise:

Megkaptuk tehát a linearizált hálózatot, mely ismét egy másodrendű, dinamikus hálózat.

Egyetlen fontos dologra kell csupán figyelni az analízis során, hogy **a gerjesztés a $2V \cdot \varepsilon(t)$!**

Ha választ is kijelöltünk volna, akkor először a konstans gerjesztésre kéne meghatároznunk azt, majd a helyettesített linearizált hálózatnak a kétszeres ugrásválaszát kéne meghatároznunk a gerjesztés mivoltából következően.

Ezek mindegyik rutin feladat, itt tovább nem tárgyaljuk.

4. A válasz meghatározása:

A válasz a két meghatározott válasz összege lesz.

A gerjesztésből következően új munkapont alakul ki a rendszerben!

A linearizált hálózat választ gyakran tranziens megoldásnak nevezzük.

Szinuszos állandósult állapot

Az olyan lineáris rendszereket, amelyek gerjesztésének időfüggvénye szinuszos függvénnyel írható le, szinuszos rendszereknek nevezzük.

$$u(t) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Amplitúdó: U

Frekvencia, más néven körfrekvencia: ω

Kezdőfázis: φ

A válasz meghatározásánál fontos, hogy **lineáris, invariáns** rendszereket vizsgáljunk.

A választ állandósult állapotban szeretnénk meghatározni, amelyhez előbb definiálnunk kell az állandósult állapotot szinuszos gerjesztések esetére.

Konstans gerjesztéseknél már volt szó állandósult állapotról, azonban most picit más jelentést kell adnunk ennek. Nem magától értetődő, de fogadjuk el, hogy szinuszos gerjesztés esetén a hálózatban minden áram és feszültség is szinuszosan fog változni. Innentől kezdve van értelme állandósult állapotot definiálni.

Periodikus gerjesztés esetén állandósult állapotában van a rendszer, ha minden feszültségre és áramra igaz az, hogy a periodikus gerjesztés periódusidejével eltolva, értéke nem változik, tehát:

$$u(t) = u(t-T)$$

$$i(t) = i(t-T)$$

Állandósult állapot akkor következhet be, ha a válasz szabad összetevője lecsengett.

Ebből következik, hogy szinuszos állandósult állapot **csak gerjesztés-válasz stabilis rendszernél** fordulhat elő.

Képzeljünk el egy olyan szituációt, ahol végtelen idővel az adott időpont előtt bekapcsoltunk egy gerjesztés-válasz stabilis rendszert (valójában tudjuk, hogy az időállandó ötszöröse jó közelítéssel végtelennek számít már), és véges időben analizáljuk azt. Ekkor az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását keressük a végtelen sok megoldás közül.

Az állandósult állapot meghatározására szolgáló feltételeknek megfelelő ekvivalens kezdeti érték problémát készíthetünk. A kezdeti érték problémát pedig egyértelműen megoldhatjuk.

Kanyarodjunk vissza az állapotváltozós leírás normálalakjához:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}^T\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

A kezdeti érték probléma a következő volt:

Adott $\mathbf{x}(-0)$ és $u(t)$ a $t \geq 0$ intervallumon.

Periodikus gerjesztésre a következők adottak:

$u(t)$ a $-\infty < t$ intervallumon.

$$u(t) = u(t - T)$$

Könnyen belátható, hogy a két probléma ekvivalens.

Utóbbi feltétele, hogy $y(t) = y(t-T)$, ami csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-T)$

A megoldás meghatározása mátrixfüggvényekkel:

Amennyiben a gerjesztés véges, az állapotváltozó folytonos lesz, ezért a -0 és +0 inentől nem lesz megkülönböztetve.

$$x(T) = e^{A \cdot T} * x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} * B * u(\tau) d\tau$$

Állandósult állapotban:

$$x(T) = x(0)$$

$$x(0) = e^{A \cdot T} * x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} * B u(\tau) d\tau$$

$$x(0) (E - e^{A \cdot T}) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} * B u(\tau) d\tau$$

$$x(0) = (E - e^{A \cdot T})^{-1} \int_0^T e^{A(T-\tau)} * B u(\tau) d\tau$$

A mátrixfüggvények nem képezik a matematika A1 és A2 tárgyak szerves részét. Ha nem értjük őket ne csüggedjünk, a próbafüggvényekkel is megoldáshoz juthatunk.

Megoldás meghatározása próbafüggvényekkel:

Az állapotváltozós leírás második lépését eddig csak konstans függvényekre használtuk, azonban a próbafüggvények szinuszos esetben is megoldásra vezethetnek.

A következőket kell tennünk:

1. Megvizsgáljuk a rendszer stabilitását.
2. Próbafüggvényeket használunk, akár csak konstans gerjesztés esetén.

MP:

1 állapotváltozós rendszer esetén a megoldás a következő formát ölti:

$$x' = a * x + b * u$$

$$y = c * x + d * u$$

$$u(t) = U * \cos(\omega * t + \varphi)$$

Tudjuk, hogy egyensúlyi állapotban a hálózat minden értéke szinuszos, így az állapotváltozó is:

$$x = x_a * \cos(\omega * t) + x_b * \sin(\omega * t)$$

Ekkor a derivált:

$$x' = -\omega * x_a * \sin(\omega * t) + \omega * x_b * \cos(\omega * t)$$

Felírva az egyenletet:

$$-\omega * x_a * \cos(\omega * t) + \omega * x_b * \sin(\omega * t) =$$

$$= a * x_a * \cos(\omega * t) + a * x_b * \sin(\omega * t) + b * \cos(\varphi) * U * \cos(\omega * t) - b * \sin(\varphi) * U * \sin(\omega * t)$$

Látszólag két ismeretlent tartalmaz az egyenlet (x_a , x_b), azonban valójában ez két egyenletet jelent.

Megoldást akkor kaphatunk, ha a szinusz és coszinusz függvények együtthatói külön-külön megegyeznek.

A trigonometrikus azonosságok ismeretében x_a és x_b könnyedén meghatározhatóak.

A megoldás működik, de nem ezt fogjuk használni!

Komplex számítási mód

A kezdeti érték problémával nem fogunk többet számolni, mivel túlságosan bonyolult, sokkal egyszerűbben eredményre fogunk jutni a komplex számolási módot használva, azonban ne felejtjük el meghatározni, hogy a hálózatunk stabilis-e!

Elevenítsük fel, hogy hogyan is tudunk leírni komplex számokat:

$$U = a + jb = U \cdot e^{j\varphi}$$

Néhány fontos azonosság:

$$\cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$$

$$\sin(a) = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$$

$$e^{ja} = \cos(a) + j\sin(a)$$

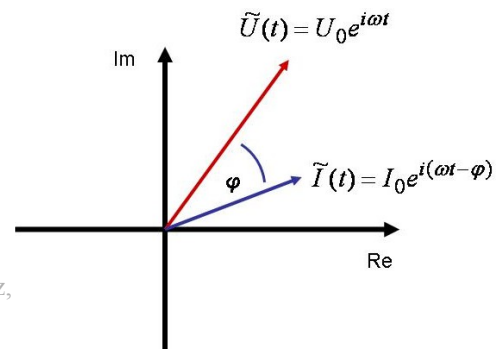
Fázorok:

A fázorokra a komplex számok ábrázolására szolgál.

A komplex számokat ezentúl a következő módonon jelöljük: $\tilde{U}$

Az $\tilde{U}$ -et egy vektorként fogjuk értelmezni a komplex számsíkon.

Szinuszos hálózatok esetén, ahol minden áram és feszültség komplex lesz, sokszor nem fogjuk a komplex számokat külön jelölni!



Egy vektort a hosszával és egy szöggel tudunk jellemezni, ez a komplex számoknál is működni fog.

Legegyszerűbben úgy képzelhetjük el a fázorokat, hogy a tengelyeket állónak tekintjük és elképzeljük a vektorokat, amik a körfrekvenciájuknak megfelelően körbe forognak.

Mivel a hálózatunk invariáns, ezért tetszőleges irányba felhetejük az első vektorunkat, csak a vektorok közti fázisszögek lényegesek számunkra!

Kapacitív jellegű a fázorára, ha az áram megelőzi a feszültséget.

Induktív jellegű a fázorára, ha a feszültség megelőzi az áramot.

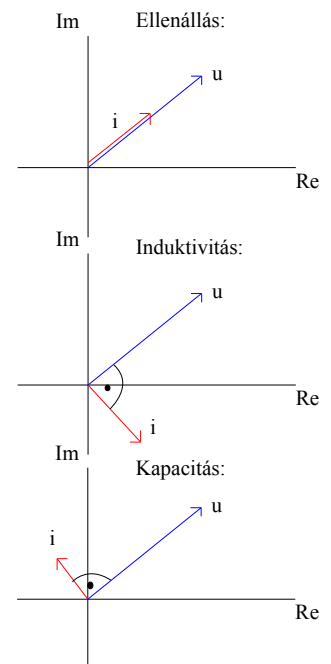
A kondenzátor feszültsége és árama közt 90 fokos fáziseltolás található, a feszültség késik az áramhoz képest.

Az induktivitás feszültsége és árama közt szintén 90 fokos fáziseltolás található, az áram siet a feszültséghez képest.

Jegyezzük meg, hogy az állapotváltozók vannak lemaradva.

A fázorokra előnye, hogy akár meg is szerkeszthetjük segítségével a megoldásokat.

Energetikai megfontolásokat végezve arra a megállapításra juthatunk, hogy a feszültség és áram fázisszöge akkor haladhatja meg a 180 fokot, ha az áram és a feszültség egy termelőhöz tartozik.



Komplex csúcsértékek mint időfüggvények

Bizonyítható, hogy a szinuszos időfüggvényeinknek egyértelműen megfeleltethetők komplex csúcsértékek!

$$\begin{aligned} u_a(t) &= U_a * \cos(\omega * t + \varphi_a) &<=>& \tilde{U}_a = U_a * e^{j * \varphi_a} \\ u_b(t) &= U_b * \cos(\omega * t + \varphi_b) &<=>& \tilde{U}_b = U_b * e^{j * \varphi_b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \operatorname{Re}(\tilde{U}_a * e^{j * \omega * t}) \\ u_b(t) &= \operatorname{Re}(\tilde{U}_b * e^{j * \omega * t}) \end{aligned}$$

Ezzel a megfeleltetéssel az időfüggő egyenleteinket komplex egyenletekre cserélhetjük!

Komplex csúcsértékek deriválása:

$$u_g(t) = u_a(t)' = -\omega * U_a * \sin(\omega * t + \varphi_a) = U_a * \omega * \cos(\omega * t + \varphi_a + \pi/2)$$



$$\tilde{U}_g = \omega * U_a * e^{j * \varphi_a} * e^{j * \pi/2} = j * \omega * \tilde{U}_a$$

Bizonyítható, hogy minden komplex csúcsértékre teljesül: $\tilde{U}' = j * \omega * \tilde{U}$

Bizonyítható, hogy időfüggvények lineáris kombinációjának egyértelműen megfeleltethető az őket reprezentáló komplex csúcsértékek lineáris kombinációja.

Jegyezzük meg a következőt, mert gyakran használt összefüggés lesz: $-j = 1/j$

MP:

Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$x' = a * x + b * U * \cos(\omega * t + \varphi)$$

Feleltessük meg $U * \cos(\omega * t + \varphi)$ -nek $\tilde{U}$ -t.

Tudjuk, hogy x sinusos, feleltessünk meg neki $\tilde{X}$ -et.

Ekkor az egyenlet a következő képpen módosul:

$$j * \omega * \tilde{X} = a * \tilde{X} + b * \tilde{U}$$

Így a megoldást könnyedén meghatározhatjuk:

$$\tilde{X} = \frac{b}{-a + j * \omega} * \tilde{U} = X * e^{j * \varphi}$$

Impedancia

A már megismert elemek karakterisztikáit szinuszos gerjesztés esetén állandósult állapotban komplex számokkal kifejezhetjük, amelynek segítségével a számítást visszavezethetjük rezisztív hálózatok analizálására, és komplex egyenletek megoldására:

Viszsgáljuk meg a már ismert elemek karakterisztikáit:

- Ellenállás:

$$\begin{aligned} u(t) &= U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) & \Leftrightarrow \tilde{U} \\ i(t) &= I \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho) & \Leftrightarrow \tilde{I} \end{aligned}$$

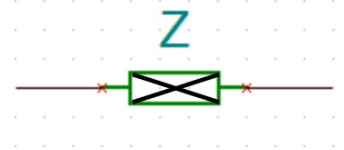
$$R = u/i = \tilde{U} / \tilde{I} = Z$$

- Induktivitás:

$$\begin{aligned} i(t) &= U \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho) & \Leftrightarrow \tilde{I} \\ u(t) &= L \cdot di/dt = L \cdot \omega \cdot j \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho + \pi/2) & \Leftrightarrow \tilde{U} = L \cdot \omega \cdot j \cdot \tilde{I} \end{aligned}$$

$$u/i = \tilde{U} / \tilde{I} = j \cdot \omega \cdot L = Z$$

Az impedancia jelölése:



- Kapacitás:

$$\begin{aligned} u(t) &= U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) & \Leftrightarrow \tilde{U} \\ i(t) &= C \cdot du/dt = C \cdot \omega \cdot j \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho + \pi/2) & \Leftrightarrow \tilde{I} = C \cdot \omega \cdot j \cdot \tilde{U} \end{aligned}$$

$$u/i = \tilde{U} / \tilde{I} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = Z$$

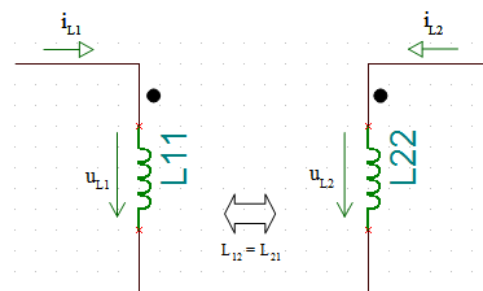
- Csatolt induktivitás:

Karakterisztika

$$\begin{aligned} u_{L1} &= L_{11} \cdot i_{L1}' + L_{12} \cdot i_{L2}' \\ u_{L2} &= L_{21} \cdot i_{L1}' + L_{22} \cdot i_{L2}' \end{aligned}$$

Szinuszos gerjesztés esetén:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= j \cdot \omega \cdot L_{11} \cdot \tilde{I}_1 + j \cdot \omega \cdot M \cdot \tilde{I}_2 \\ \tilde{U}_2 &= j \cdot \omega \cdot L_{22} \cdot \tilde{I}_2 + j \cdot \omega \cdot M \cdot \tilde{I}_1 \end{aligned}$$



($j \cdot \omega$ a már ismert deriválási szabály miatt szerepel az egyenletekben.)

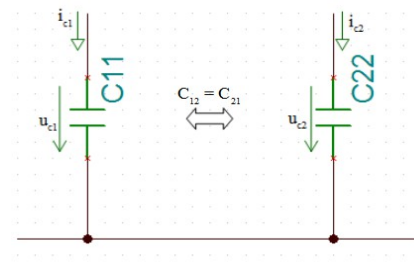
- Csatolt kapacitás

Karakterisztika

$$\begin{aligned} i_{c1} &= C_{11} \cdot u_{c1}' + C_{12} \cdot u_{c2}' \\ i_{c2} &= C_{21} \cdot u_{c1}' + C_{22} \cdot u_{c2}' \end{aligned}$$

A karakterisztika nem változik különösebben:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= j \cdot \omega \cdot C_{11} \cdot \tilde{U}_1 + j \cdot \omega \cdot C_{12} \cdot \tilde{U}_2 \\ \tilde{I}_2 &= j \cdot \omega \cdot C_{22} \cdot \tilde{U}_2 + j \cdot \omega \cdot C_{12} \cdot \tilde{U}_1 \end{aligned}$$



($j \cdot \omega$ a már ismert deriválási szabály miatt szerepel az egyenletekben.)

- Egyéb csatolt kétpólusok:

Az ideális transzformátoron kívül minden rezisztív csatolt kétpólus karakterisztikája változatlan, az i áramot $\tilde{I}$ az u feszültséget $\tilde{U}$ helyettesíti a karakterisztikákban.

Az impedanciát az alábbi módon írhatjuk fel:

$$Z = R + j \cdot X$$

R-t **rezisztanciának**, míg X-et **reaktanciának** nevezzük.

A rezisztív elemek impedanciája tisztán valós, míg a dinamikus elemek impedanciája tisztán képzetes. Az elemek összekapcsolásával érhetjük el a különböző komplex értékeket.

MP:

Határozzuk meg az induktivitás és kapacitás rezisztanciáját és reaktanciáját.

Segítségül eláruljuk, hogy két komplex szám egyenlő, ha valós és képzetes részeik külön-külön egyenlőek.

Induktivitás:

$$Z = R + j \cdot X = 0 + j \cdot \omega \cdot L$$

Könnyedén megállapíthatjuk, hogy $R = 0$ és $X_L = \omega \cdot L$

Kapacitás:

$$Z = R + j \cdot X = 0 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Használjuk fel a képzetes rész reciprokának tulajdonságát: $-j = \frac{1}{j}$

Könnyedén megállapíthatjuk, hogy $R = 0$ és $X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$

Amennyiben az elemeinket a hálózatban impedanciájukkal helyettesítjük, egy fiktív rezisztív hálózathoz jutunk, ahol minden feszültség és áram komplex érték.

Belátható, hogy ezen hálózatokon az összes már megtanult hálózatszámítási módszer alkalmazható, így komplex egyenletek megoldásával a válasz meghatározható.

A helyettesített hálózatban minden hálózati elemet impedanciája helyettesít, az időfüggvényeket pedig a komplex csúcsertékek reprezentálják.

Fizikai jelentést a képzetes résznek nem tulajdonítunk, csupán a számolást egyszerűsítjük a komplex értékekkel.

Ebben az esetben, mivel az időfüggvények összegének megfeleltethetők a komplex csúcsertékek összegei, a Kirchoff egyenletek formája nem változik meg, az ágtörvények a rezisztív hálózatoknál megismert formát öltik.

Fontos megjegyeznünk, hogy a körfrekvenciát adottnak és konstansnak tételeztük fel.

Amennyiben a rendszernek több, akár különböző körfrekvenciájú gerjesztése van, a szuperpozíció elvét használva határozhatjuk meg a megoldást, azonban elsődleges feladatunk mindig a stabilitás meghatározása!

Helyettesítőgenerátor **adott körfrekvenciára** szinuszos gerjesztés esetén is meghatározható.

Azonban a körfrekvencia megváltozása esetén a helyettesítés használhatatlanná válik!

Numerikus számolásnál figyeljünk a komplex számok visszaváltására.

A $\tan(\varphi)$ a főértéket adja vissza. Végig kell gondolnunk azonban, hogy a szám melyik síknegyedben van, és ennek megfelelően korrigálnunk kell a fázisszöveget!

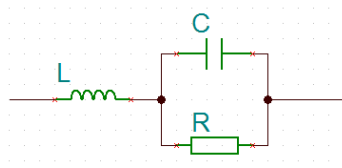
Időinvariáns rendszerek esetén egy fázisszöveget szabadon megválaszthatunk, ennek megfelelően valójában csak fáziskülönbségeket mondhatunk meg, abszolút fázist nem.

Az esetek jelentős hányadában a forrás fázisát fogjuk 0-nak választani. Ettől több forrás esetén, illetve akkor, ha valamilyen megfontolásból egy másik fázist szeretnénk 0-nak választani, természetesen eltérhetünk.

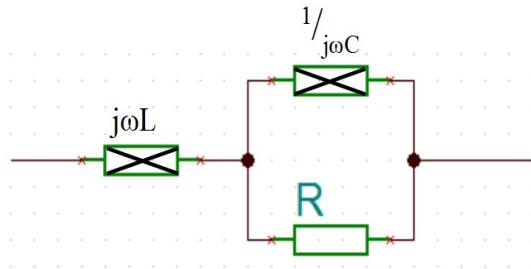
MP:

Határozzuk meg az alábbi kétpólus impedanciáját, ha koherens egységrendszerben adottak az alábbi értékek:

$$\begin{aligned} L &= 0.5 \\ C &= 12 \\ R &= 0.1 \\ \omega &= 0.5 \end{aligned}$$



Helyettesítsünk az impedanciákkal, és ahogy már említettük minden megismert módszer működik, a soros és párhuzamos kapcsolásokkal történő számolás is:



Az egyenlet:

$$Z_{\text{eredő}} = j\omega L + (R \times \frac{1}{j\omega C}) = j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Már csak a komplex számokkal kell megbirkóznunk, de előbb helyettesítsünk be, mert úgy könnyebb továbbszámolni:

$$Z_{\text{eredő}} = j \cdot 0.25 + (0.1 / j \cdot 6) / (0.1 + 1/j \cdot 6)$$

Ilyenkor gyakori trükk a nevező konjugáltjával szorozni, ahogy azt már Matematika A1 tárgyból megtanulhattuk. A számolást analitikusan is tovább folytathatjuk, azonban sok számológép képes komplex számokkal számolni. A példa kedvéért most meghatározzuk analitikusan a végeredményt, a továbbiakban azonban a számológép által meghatározott értékekre fogunk hagyatkozni.

$$\begin{aligned} j \cdot 0.25 + \frac{0.1 / j \cdot 6}{0.1 + 1/j \cdot 6} &= j \cdot 0.25 + \left[\frac{0.1 / j \cdot 6}{0.1 + 1/j \cdot 6} \cdot \frac{0.1 - 1/j \cdot 6}{0.1 - 1/j \cdot 6} \right] = j \cdot 0.25 + \frac{0.01 / 6 \cdot j + 0.1 / 36}{0.01 + 1/j \cdot 36} = 0.0735 + j \cdot 0.25 + \frac{0.01 / 6 \cdot j}{0.01 + 1/j \cdot 36} \\ &= 0.0735 + j \cdot 0.206 \end{aligned}$$

Az impedancia induktív jellegű (mivel a reaktancia pozitív, amennyiben negatív lenne, kapacitív jellegű lenne), így helyettesíthető egy ellenállással és egy induktivitással:



A helyettesítő paramétereket könnyedén meghatározhatjuk:

Az ellenállás értéke megegyezik az impedancia valós részével (sorosan az impedanciák összegződnek):

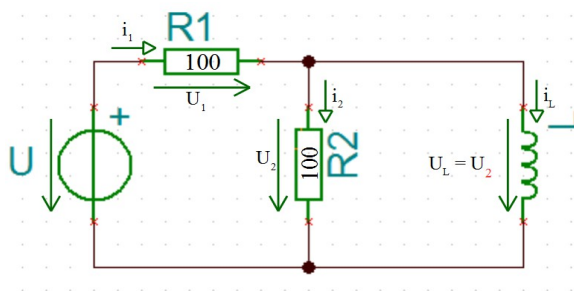
$$R = 0.0735$$

Az induktivitás értéke arányos adott körfrekvencián az induktivitás képzetes részével: $j \cdot \omega \cdot L = j \cdot 0.206$
Ebből az **adott körfrekvenciához** tartozó helyettesítő paraméter:

$$L = 0.412$$

Természetesen párhuzamos helyettesítés is létezik, azonban a replusz művelettel számolni jóval nehezebb, így ezt a helyettesítést nem végezzük el, de ugyan ilyen logika alapján realizálható.

MP:



Koherens egységrendszerben adottak, valamint tudjuk:

$$L = 2$$

$$U = U_{\text{komplex}} = 100$$

$$\omega = 50$$

Válasszuk a forrás fázisszögét 0-nak, és rajzoljuk meg a fázorábráját az összes áramnak és feszültségnek. Helyettesítsük az elemeket impedanciájukkal, és alkalmazzuk az ismert hálózatszámítási módszereket.

A helyettesítést most nem rajzoljuk le. Egyből az egyenleteket írjuk fel:

$$I_1 = \frac{U}{R + R \times (j\omega L)} = \frac{100}{100 + 100 \times (j \cdot 50 \cdot 2)} = \dots = 0.6 - 0.2j$$

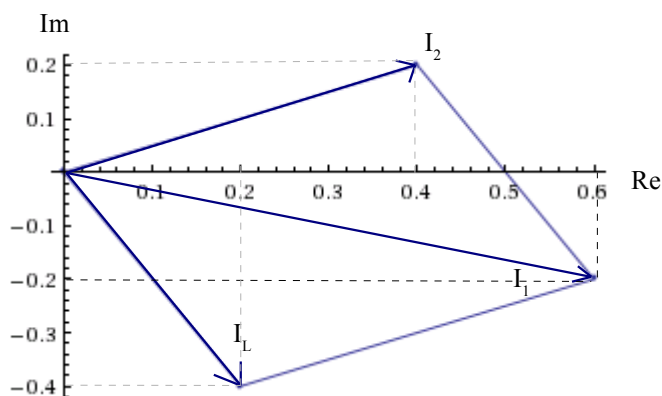
$$U_2 = U - I_1 \cdot R = 100 - (0.6 - 0.2j) \cdot 100 = 40 + 20j$$

$$I_2 = U_2 / R = \frac{40 + 20j}{100} = 0.4 + 0.2j$$

$$I_L = I_1 - I_2 = 0.2 - 0.4j$$

Jól látható, hogy működik az áramosztás, a feszültségosztás, a feszültségek és áramok összeadhatóak és kivonhatóak. Az egyetlen nehézséget a komplex számokkal való számolás jelenti a feladatokban.

Rajzoljuk meg az áramok fázor ábráját:

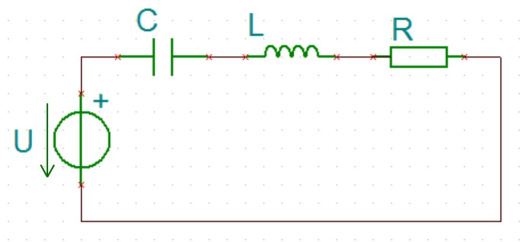


A megoldást a vektorok ismeretében akár meg is szerkezhethetjük.

A megoldás megkeresése előtt nem vizsgáltuk, hogy a rendszerünk gerjesztés-válasz stabilis-e, ez azonban nyilvánvalóan teljesül egy passzív és nonenergikus elemkből felépülő rendszer esetén.

Speciális kapcsolások

Soros rezgőkör:



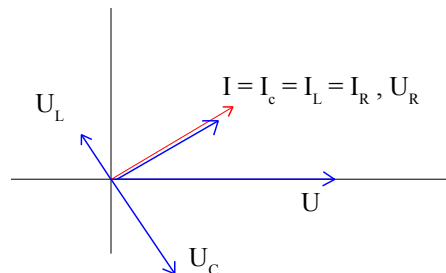
Nézzük milyen egyenleteket írhatunk fel:

$$U = U_c + U_L + U_R$$

$$U_R = I \cdot R$$

$$U_L = I \cdot j\omega L$$

$$U_c = I / j\omega C$$



Könnyedén megrajzolhatjuk a fázor ábrát is a rezgőkörhöz.

Megfelelő paraméterek mellett például a fentebbi kapacitív jellegű fázorábrát kaphatjuk.

Rezonancia:

Vizsgáljuk azt a hálózatot, ahol az induktivitás és a kapacitás reaktanciája megegyezik, azaz:

$$1/\omega \cdot C = \omega \cdot L$$

Ebben az esetben a rezgőkör akkor is képes rezegni, ha magára hagyjuk.

Könnyedén meghatározhatjuk az ehhez szükséges rezonanciafrekvenciát is az előző egyenletből átszorzással:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

A rezonanciafrekvencián a kondenzátor és az induktivitás feszültsége ellentétes irányú és egyenlő nagyságú, így eredőjük zérus. Ekkor tehát a rezgőkör feszültsége kizárólag az R ellenállástól és az I áramtól függ. Ideális esetben a veszteség 0, így az ellenállással nem kell számolnunk. A gyakorlatban azonban minden rezgőkör veszteséges.

Amennyiben meghatározzuk az ideális soros rezgőkör ($R = 0$) eredő impedanciáját, a következő képlet adódik:

$$Z = j\omega \cdot L + \frac{1}{j\omega \cdot C}$$

Amennyiben megkeressük az impedancia minimumát, azt tapasztaljuk, hogy a soros rezgőkör impedancia minimuma a rezonanciafrekvencián adódik.

A 0 és végtelenhez tartó körfrekvenciák esetén vagy az induktivitás vagy a kapacitás szakadásként viselkedik, így ebben az esetben a rezgőkör impedanciája végtelenül nagyra nő.

A soros rezgőkör a rezonanciafrekvencia alatt induktív jellegű, míg rezonanciafrekvencia felett kapacitív jellegű impedanciát mutat.

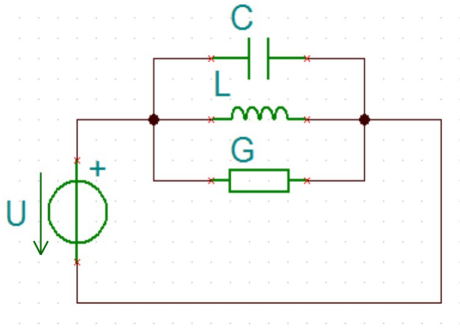
Jósági tényező:

A jósági tényező megadja a képzetes és a valós teljesítmények arányát.

Értékét rezonanciafrekvencián szokás megadni, és Q-val jelölik.

$$Q = \frac{\omega \cdot L}{R} = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot C}$$

Párhuzamos rezgőkör:



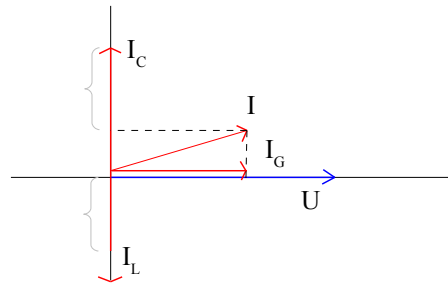
Nézzük milyen egyenleteket írhatunk fel:

$$I = I_C + I_L + I_G$$

$$I_G = U * G$$

$$I_L = U / j\omega L$$

$$I_C = U * j\omega C$$



Könnyedén megrajzolhatjuk a fázor ábrát is a rezgőkörhöz.

Megfelelő paraméterek mellett például a fentebbi kapacitív jellegű fázorábrát kaphatjuk.

Rezonancia:

Vizsgáljuk azt a hálózatot, ahol az induktivitás és a kapacitás reaktanciája megegyezik, azaz:

$$1/\omega * C = \omega * L$$

Ebben az esetben a rezgőkör akkor is képes rezegni, ha magára hagyjuk.

Könnyedén meghatározhatjuk az ehhez szükséges rezonanciafrekvenciát is az előző egyenletből átszorzással:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L * C}}$$

A rezonanciafrekvencián a kondenzátor és az induktivitás feszültsége ellentétes irányú és egyenlő nagyságú, így eredőjük zérus. Ekkor tehát a rezgőkör feszültsége kizárólag az R ellenállástól és az I áramtól függ. Ideális esetben a veszteség 0, így az ellenállással nem kell számolnunk. A gyakorlatban azonban minden rezgőkör veszteséges.

Amennyiben meghatározzuk az ideális párhuzamos rezgőkör ($G = 0$) eredő impedanciáját, a következő adódik:

$$Z = \frac{L\omega}{1 - \omega^2 LC}$$

Ha behelyettesítjük a kiszámolt képletbe a rezonanciafrekvencia értékét, azt kapjuk, hogy az impedancia végtelen, ebben az esetben tehát a rezgőkör szakadással modellezhető.

Jósági tényező:

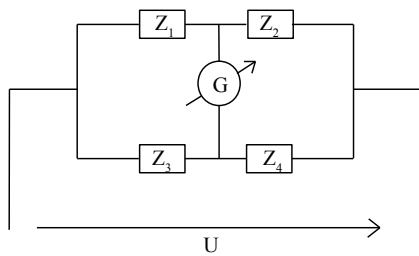
A jósági tényező megadja a képzetes és a valós teljesítmények arányát.

Értékét rezonanciafrekvencián szokás megadni, és Q-val jelölik.

$$Q = \frac{\omega * C}{G} = \frac{1}{G * \omega * L}$$

Hídkapcsolások:

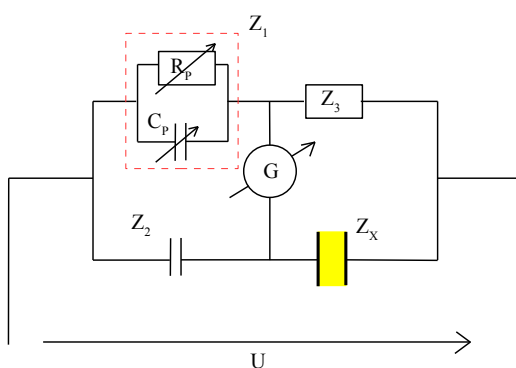
Wheatstone-híd:



A híd akkor nevezzük kiegyenlítettnek, ha a középére kapcsolt galvanométer, ami egy nagyon érzékeny árammérő berendezés, 0 áramot mutat. Ez akkor következik be, amikor a Z_1 és Z_2 impedanciák a feszültséget pont ugyan olyan arányban osztják, mint a Z_3 és Z_4 impedanciák, képlettel: $Z_1 / Z_2 = Z_3 / Z_4$. Természetesen mivel impedanciákról van szó, az áram és a feszültség mindenhol szinuszos, így őket a komplex csúcsértékekkel reprezentáljuk.

A híd alkalmas ismeretlen impedancia meghatározására amennyiben a másik három impedancia nagy pontossággal ismert, és közülök az egyik állítható nagyságú.

Schering-híd:



A Schering-híd nagy pontosságú, valós kapacitás meghatározására szolgál (olyan frekvencián, ahol a kapacitás helyettesítő modellje még megfelelő pontosságú).

Amennyiben a Galvanométer 0 áramot mutat, a két középső csomópont potenciálja megegyezik.

Ekkor felírhatjuk a híd kiegyenlítettségének egyenletét:

$$Z_X / Z_2 = Z_3 / Z_1$$

Amelyet átrendezve megadjuk az ismeretlen Z_X impedanciát.

$$Z_X = Z_3 * Z_2 / Z_1 = R_3 * C_1 / C_2 + \frac{1/j\omega * R_3}{C_2 * R_1}$$

Owen-híd:

Egy haramdik típusú mérőhíd az Owen-híd is, melynél szintén a híd kiegyenlítettségéből vezethetők le a kétpólus paraméterei.

Fontos megjegyezni, hogy az összes ilyen mérőhíd csak megfelelő frekvenciasávban működik, ahol a helyettesítés kellő pontossággal megegyezik a gyakorlattal!

MP:

Többször említve volt, hogy szuperpozícióval számolhatunk.

Tételezzük fel, hogy az alábbi feszültséget számoltuk, és rajzoljuk meg a fázorábráját:

$$U(t) = 20 * \sin(\omega * t) - 10 * \cos(\omega * t)$$

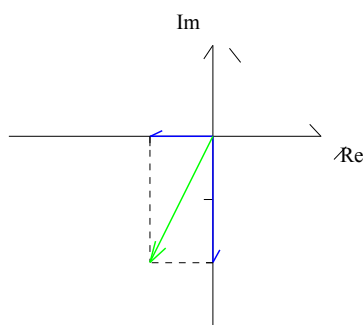
Első dolgunk, hogy a sinus függvényt cosinus függvényre cseréljük:

$$20 * \sin(\omega * t) = 20 * \cos(\omega * t - \pi/2)$$

Ekkor már meghatározhatjuk a komplex csúcserőtekeket:

$$U(t) = 20 * \cos(\omega * t - \pi/2) - 10 * \cos(\omega * t) = 20 * e^{j * \pi/2} + -10 * e^{j * 0}$$

A komplex csúcserőtekeket már csak fel kell rajzolnunk és meg kell szerkesztenünk a megoldást:

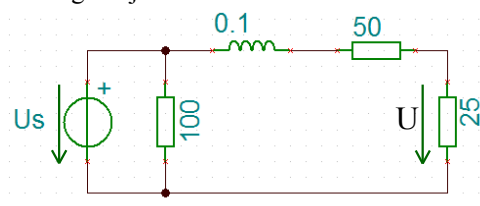


$$|U| = \sqrt{10^2 + 20^2}$$

$$\varphi = \pi + \arctg(20/10)$$

MP:

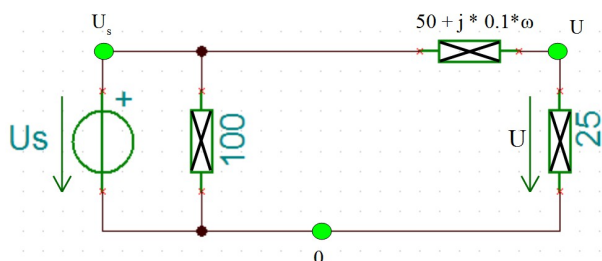
Határozzuk meg a kijelölt U választ. Az értékek koherens egységrendszerben adóttak.



A gerjesztés 25V-os, szinuszos feszültség, a körfrekvenciával paraméteresen számoljunk.

A feladatot oldjuk meg a csomóponti potenciálok módszerével, azonban hogy egyszerűbb dolgunk legyen, előbb a sorbakapcsolt tekercset és ellenállást helyettesítsük egyetlen impedanciával.

Minden mást is helyettesítsünk impedanciájával.



Egyetlen csomóponti egyenletet kell felírnunk az U feszültségre:

$$\frac{U - 25}{50 + j * 0.1 * \omega} + U/25 = 0$$

Az egyenletet már csak meg kell oldanunk:

$$\frac{U - 25}{50 + j * 0.1 * \omega} + U/25 = 0$$

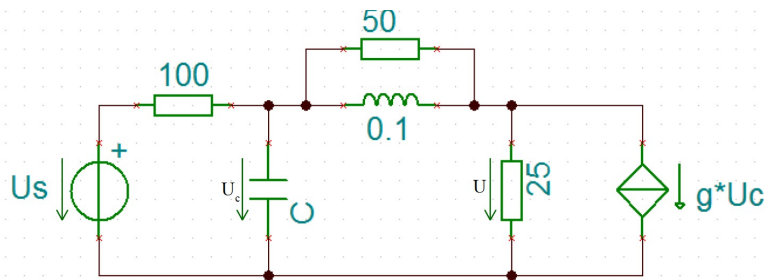
...

$$U = \frac{625 * 75 - 62.5 * j * \omega}{75^2 + 0.01 * \omega^2}$$

MP:

Bonyolítsuk a feladatot vezérelt forrással. Határozzuk meg a bejelölt U feszültséget.

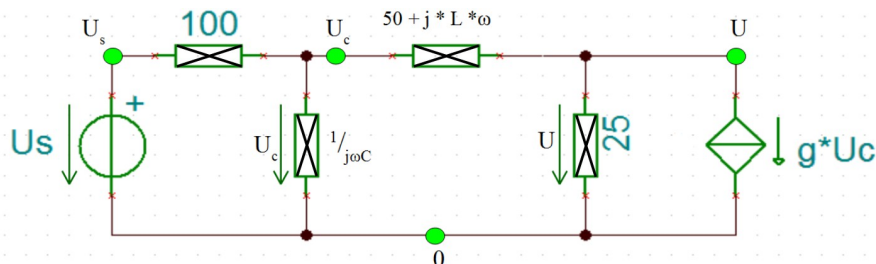
A gerjesztés adott körfrekvenciájú (számoljunk paraméteresen vele) szinuszos gerjesztés, melynek csúcserőértéke 50V.



Mivel vezérelt forrás van a rendszerben, ezért szuperpozíciót nem alkalmazhatunk.

Ennek megfelelően használjuk ismét a csomóponti potenciálok módszerét.

Az egyszerűsítés érdekében a tekercset és a vele párhuzamosan kapcsolt ellenállást ismét egy impedanciaként kezelhetjük.



Itt már nem elég egyetlen potenciált felvennünk, az egyenletrendszer:

$$\frac{U_c - U_s}{100} + U_c * j * \omega * C + \frac{U_c - U}{50 + j * L * \omega} = 0$$

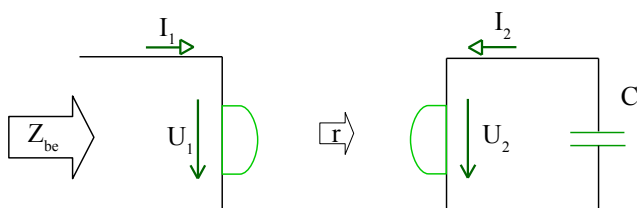
$$\frac{U - U_c}{50 + j * L * \omega} + U/25 + g * U_c = 0$$

A komplex egyenletrendszer két ismeretlent tartalmaz, U -t és U_c -t, tehát megoldható.

A megoldástól tekintünk el, a nevezőben lévő komplex szám konjugáltjával való bővítés után már egyszerű.

MP:

Határozzuk meg az alábbi girátoros kapcsolás bemenő impedanciáját adott körfrekvencián.



Bár teljesítményekről még nem beszéltünk, de most tegyünk pár energetikai megfontolást. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a hatásos teljesítmény az impedancia valós részével függ össze. A girátor nonenergikus, és a kapacitás is veszteségmentes, tehát azt várjuk, hogy a bemenő impedancia tisztán képzetes legyen.

A kapacitást az impedanciája helyettesíti, a girátor karakterisztikáját kihasználva meghatározhatjuk a $Z = U_1/I_1$ értékét.

Meghatározhatjuk az U_2 feszültséget, és így a kondenzátoron átfolyó áramot: $U_2 = r * U \rightarrow -I_2 = r * U * j * \omega * C$

Meghatározhatjuk U ismeretében az I_2 áramot: $-I_2 = -(-U/r)$

$$\text{Tehát: } U/r = r * U * j * \omega * C \Rightarrow Z = U/I = \boxed{r^2 * C} * \omega * j \quad r^2 * C \text{ már induktív !}$$

A girátor tehát kapacitív jellegű impedanciát induktív jellegűvé alakít, és fordítva.

Nyomatott áramkörök esetén ez hasznos, kapacitást ugyanis könnyű készíteni, de induktivitást nem.

Teljesítmény állandósult szinuszos állapotban

Szinuszos gerjesztésnél, állandósult állapotban a pillanatnyi teljesítménynél sokkal lényegesebb lesz az egy periódusra jutó teljesítmény átlaga.

Állandósult állapotban minden áram és feszültség szinuszos, viszont rendkívül fontos észrevétel az, hogy az adott kétpólus árama és feszültsége valamilyen fáziszöget zár be egymással!

$$\begin{aligned}u(t) &= U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \\i(t) &= I \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho)\end{aligned}$$

A teljesítményt korábban is az áram és a feszültség szorzata adta, ezt most sem változik:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t + \rho)$$

Ahhoz viszont, hogy ezt a képletet használni tudjuk, szükségünk lesz a trigonometrikus azonosságok ismeretére, és a következő alakra kell alakítanunk:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \rho) \cdot [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi)] + \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi - \rho) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi)$$

A fentebbi alakból már kiolvashatóak a számunkra hasznos képletek, de ne ilyedjünk meg, nem ilyen formában fogjuk használni őket.

$$\textbf{Hatásos pillanatnyi teljesítmény: } P = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \rho) \cdot [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi)] \quad [P] = W$$

$$\textbf{Meddő pillanatnyi teljesítmény: } Q = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi - \rho) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi) \quad [Q] = \text{var}$$

A hatásos teljesítmény és munka most is hasonló kapcsolatban áll, mint eddig:

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \rho) \cdot [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi)] \, dt$$

A levezetést most is elhagyva:

$$w(t_2 - t_1) \sim (t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \rho)$$

A **hatásos teljesítmény** az egy periódusra vett hatásos pillanatnyi teljesítmény átlaga.

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \rho) \cdot [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi)] \, dt = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \rho)$$

Az integrálásoknál nagyon sokszor kihasználjuk, hogy egy perióduson integrált szinuszos függvény integrálja 0, sőt, számunkra gyakran az is elég, ha elhanyagolhatóan kicsi érték.

A **látszólagos teljesítmény**:

$$S = \frac{1}{2} \cdot U \cdot (I^*) \quad [S] = V \cdot A$$

A $\cos(\varphi - \rho)$ a **teljesítménytényező**, melyet gyakran λ -val jelölünk.

$$\lambda = P / |S|$$

Def.: Az **effektív érték** (négyzetes középérték) meghatározza azt az egyenáramot, amely egységnyi idő alatt azonos munkát végez, mint a vizsgált váltakozó áram.

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \, dt}$$

Teljesítményszámolás állandósult szinuszos állapotban

Az előbbieken felírt bonyolult egyenletek után nézzük meg, hogyan számolhatunk egyszerűen.
A komplex számítási mód továbbra is a segítségünkre van, és nagyban megkönnyíti helyzetünket.

Ahogy azt már megszoktuk, most is rendeljük hozzá az $u(t)$ és $i(t)$ időfüggvényeinkhez az őket reprezentáló komplex csúcsértékeket.

Ekkor a látszólagos teljesítmény az alábbi alakot ölti:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{U} \cdot (\tilde{I}^*) = P + jQ$$

Minket ennek a vektornak a hossza érdekel, amikor a látszólagos teljesítményről beszélünk, így a következőkre jutunk:

$$S = |\tilde{S}|$$

Figyeljünk arra, hogy a $*$ operátor egyes helyeken szorzást jelent, míg más helyeken konjugálást!
A konjugálást mindig külön zárójelezni fogjuk, hogy ne legyen összekeverhető.

A továbbiakban is teljesül a teljesítmények összegére vonatkozó tétel, azaz:

$$\begin{aligned} \sum Q_i &= 0 \\ \sum P_i &= 0 \end{aligned}$$

Kétpólusok teljesítménye:

Tekintsünk egy tetszőleges kétpólust, melynek impedanciája a következő:

$$Z = R + jX \quad (\text{A vezetéshez hasonlóan itt is létezik az impedancia reciproka: } Y = 1/Z = G + jB)$$

Ezen kétpólus teljesítménye a fentebb tárgyaltak értelmében:

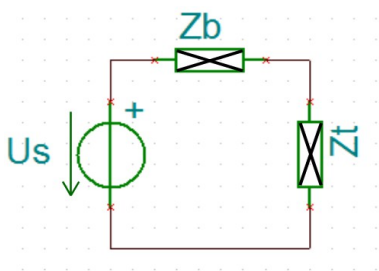
$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{U} \cdot ((\tilde{U} / Z)^*) = \frac{1}{2} \cdot |\tilde{U}|^2 / (Z^*) = \frac{1}{2} \cdot U^2 / (Z^*) = \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot Z$$

Kihasználtuk a komplex számok azon tulajdonságát, miszerint $z \cdot (z^*) = |z|^2$

Ahogy azt már megállapítottuk a hatásos teljesítmény a látszólagos teljesítmény valós, míg a meddő teljesítmény a látszólagos teljesítmény képzetes része lesz. Erre vonatkozólag példákat is fogunk látni.

Teljesítményillesztés:

A teljesítményillesztés problémájával már korábban is találkoztunk, most azonban szinuszos gerjesztés esetén kell meghatároznunk a terhelőimpedanciát úgy, hogy azon a lehető legnagyobb teljesítményt kapjuk.



Levezethető, hogy a teljesítmény akkor lesz maximális, amikor a lezáró impedancia és a belső impedancia valós része megegyezik, és amikor a képzetes részek egymás ellentettjei.

Tehát: $P_{\max} \rightarrow Z_t = (Z_b^*)$

Ekkor a maximálisan átvihető teljesítmény:

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{8 \cdot R_b} \quad \text{Ahol } R_b = \operatorname{Re}(Z_b)$$

Átviteli tényező és karakterisztika szinuszos hálózatokban

Lineáris, invariáns, gerjesztésválasz stabilis rendszerben ω körfrekvenciájú szinuszos gerjesztés esetén a rendszer **átviteli tényezője** a választ jellemző időfüggvény komplex csúcserőértékének és az időfüggő gerjesztés komplex csúcserőértékének hányadosa.

A definíció bonyolult hangzik, azonban a dolog lényegesen egyszerűbb, csupán ki kell számolnunk a válasz/gerjesztés hányadost az adott, feltételeknek megfelelő rendszerben, és megkaptuk az átviteli tényezőt. Másként megfogalmazva, az átviteli tényező olyan konstans, amellyel megszorozva a gerjesztést, megkapjuk a választ.

Az átviteli tényezőt $\bar{H}$ -val jelöljük, és komplex érték, mert a gerjesztés és válasz egymáshoz képest fázisban eltolódhat.

Az átviteli tényező csak adott ω körfrekvencián értelmezett.

Az átviteli tényezőnek lehet dimenziója: 1, Ohm, Siemens

Az átviteli tényező meghatározása az állapotváltozós leírásból:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^T\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Ha az időfüggvényeket helyettesítjük, akkor a már ismert deriválási szabály miatt az alábbi egyenlet adódik:

$$\mathbf{j}^*\omega\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{U}} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{j}^*\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{B} * \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{E: egységmátrix}$$

Amennyiben a fentebbi képletet behelyettesítjük a válasz kifejezésébe:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \left[\mathbf{C}^T (\mathbf{j}^*\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] * \tilde{\mathbf{U}}$$

Ebből az átviteli tényezőt a gerjesztéssel való átosztás után azonnal meg is kapjuk:

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{Y}} / \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{C}^T (\mathbf{j}^*\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Átvitelit karakterisztika:

Az átviteli tényező megértése után az **átviteli karakterisztika** már nagyon könnyen emészthető. Annyi a dolgunk, hogy a körfrekvenciával mint paraméterrel számolunk, és ekkor megkapjuk minden egyes körfrekvenciához a hozzá tartozó átviteli tényezőt. Ez lényegében egy függvény, mely egy valós értékhez, a körfrekvenciához, egy komplex értéket, az adott körfrekvencián érvényes átviteli tényezőt rendel.

A továbbiakban a következő jelölést fogjuk használni: $H(\mathbf{j}^*\omega)$

$$H(\mathbf{j}^*\omega) = \mathbf{C}^T (\mathbf{j}^*\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Ez a függvény egy törtfüggvény, melynek a számlálója legfeljebb n -ed fokú, és amelynek nevezője mindenképpen n -ed fokú (tehát valódi törtfüggvény).

Az átviteli karakterisztika tulajdonságai:

- $H(\mathbf{j}^*\omega) = (H(-\mathbf{j}^*\omega))^*$
- $H(\mathbf{j}^*\omega) = K(\omega) * e^{j\varphi(\omega)}$

Ahol: $K(\omega)$ az **amplitúdó karakterisztika**:
 $\varphi(\omega)$ a **fázis karakterisztika**:

$$\begin{aligned} K(\omega) &= |H(\mathbf{j}^*\omega)| \\ \varphi(\omega) &= \arg\{H(\mathbf{j}^*\omega)\} \end{aligned}$$

Az átviteli karakterisztika ábrázolása:

Átviteli karakterisztika valós számok halmazából képez a komplex számok halmazába.

Hogyan ábrázoljunk egy ilyen függvényt?

Kézenfekvőnek tűnik, hogy ábrázoljuk két külön diagramon a valós és a képzetes részt.

Ismerjük azonban a polár koordinátás leírást, így egy, a továbbiakban jobban használható ábrázolási módot is használhatunk, ábrázoljuk külön diagrammon az abszolútértéket, egy másik diagramon pedig a fázist.

Tehát külön kell ábrázolnunk a $K(\omega)$ -t és a $\varphi(\omega)$ -t.

Tegyük fel, hogy kiszámoltuk az alábbi átviteli karakterisztikát egy hálózathoz:

$$H(j*\omega) = 4 / (10 + j*\omega*2)$$

Állítsuk elő a $K(\omega)$ -t:

$$K(\omega) = 4 / \sqrt{10^2 + 4*\omega^2}$$

Állítsuk elő a $\varphi(\omega)$ függvényt:

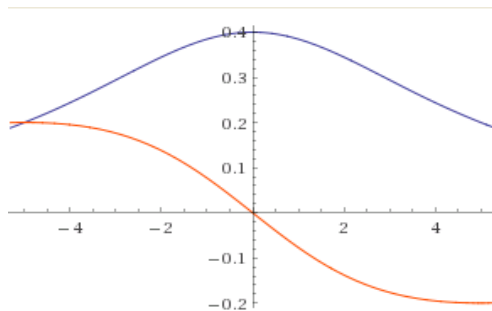
$$\varphi(\omega) = \arg\{4 / (10 + 2*j*\omega)\}$$

Az argumentumot ebben az esetben úgy kell érteni, hogy a számláló konjugáltjával bővítünk, kiszámoljuk a komplex értéket $A + jB$ alakban, és vesszük az $\arctg(B/A)$ értéket, majd kompenzálunk annak megfelelően, hogy a vektor melyik síknegyedbe esik, mivel az $\arctg$ függvény, csak a főértéket adja vissza.

Ekkor egy körfrekvenciától függő $\arctg$ függvényt kapunk, amelyet ábrázolhatunk (no nem kézzel általában).

A függvényeket ábrázolhatjuk, ha meghatározzuk a függvények pár pontját. Használjuk fel a páros és páratlan tulajdonságokat.

Egy koordináta-rendszerben ábrázolva a két függvényt:



Bode és Nyquist diagramok

Bode-diagram:

Előnyös lehet, ha a klasszikus ábrázolás helyett áttérünk logaritmikus skálákra. Ennek fizikai tartalma van, amelyet itt nem tárgyalunk.

Az amplitúdókarakterisztika helyett vezessük be az alábbi karakterisztikát:

$$k(\omega) = 20 * \lg(K(\omega))$$

A karakterisztika jellege nem változott, csupán transzformáltuk. Innentől kezdve a skálázás logaritmikus lesz.

Használjuk az úgynevezett **Bode-diagramot**, mely a komplex függvényünket két diagramon, logaritmikus beosztással ábrázolja.

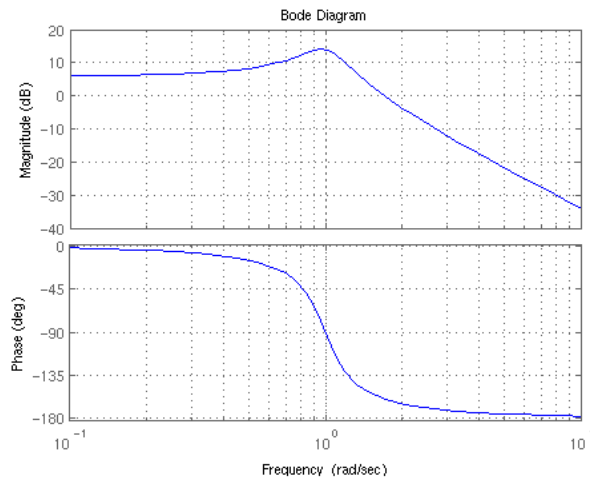
A Bode diagram egy nagyon fontos tulajdonsága, hogy a karakterisztikánkat, ha szorzatokra bontjuk, amely szorzatok Bode-diagramjait könnyedén meghatározhatjuk, akkor az eredő Bode-diagram a szorzatok diagramjainak összege lesz. Ez a tulajdonság abból származik, hogy a szorzatok logaritmus összege alakban írható fel, a komplex számok szorzása esetén pedig a fáziszögek összeadódnak.

Így elemi Bode-diagramok segítségével bonyolultabb karakterisztikákat is megrajzolhatunk.

Természetesen ezt sem kézzel fogjuk megtenni általában, hanem számítógépes segítséggel.

A diagrammról bővebben a Jelek és Rendszerek 2 tárgy keretein belül tanulni fogunk.

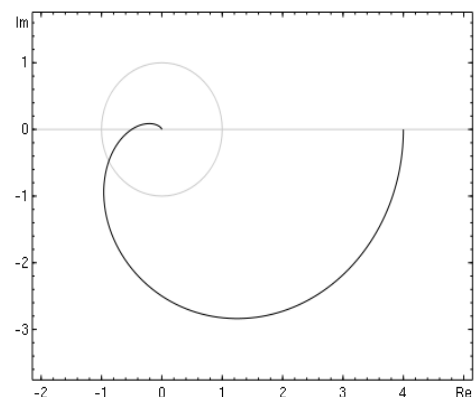
Matlab által kirajzolt Bode-diagram:



Nyquist diagram:

A Bode-diagramtól eltérően a Nyquist-diagram a függvényt polár koordináta-rendszerben ábrázolja.

Erről az ábrázolásmódról is részletesen fogunk beszélni, például stabilitás-vizsgálatra használható.



Fontos megjegyezni, hogy a fentebbiek negatív frekvenciákra is értelmezve vannak, aminek egyelőre nem látjuk értelmét, de a továbbiakban fontossá fog válni.

Szinuszos gerjesztésű kétkapuk vizsgálata:

A korábban tárgyalt kétkapukhoz képest két fontos változást kell eszközölnünk:

- A kétkapuk belül nem tartalmazhatnak független forrást.
- A kétkapuk tartalmazhatnak dinamikus elemeket.

Amennyiben a gerjesztés $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ alakú, a kétkapukat ugyan úgy jellemezhetjük karakterisztikáikkal ahogy azt már megszoktuk, azonban ebben az esetben az értékek komplex értékek lesznek.

Apró változás, hogy az impedancia-karakterisztika jele ebben az esetben Z , míg az admittancia-karakterisztikát Y -nal jelöljük.

MP:

Impedancia-karakterisztika:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1 &= Z_{11} * \tilde{I}_1 + Z_{12} * \tilde{I}_2 \\ \tilde{U}_2 &= Z_{21} * \tilde{I}_1 + Z_{22} * \tilde{I}_2\end{aligned}$$

Lánckarakterisztikák esetén ne feledjük a láncreferenciáirányokat!

Reciprocitás és szimmetria:

A reciprocitás és a szimmetria pont ugyan úgy értelmezhető, mint eddig, a feltételek sem változnak.

Passzivitás:

A passzivitás picit megváltozik.

Passzív a kétkapu, ha a **hatásos teljesítmény** nagyobb, mint 0.

A kétkapu oldalainak hatásos teljesítménye:

$$\begin{aligned}P_1 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} * \tilde{U}_1 * (\tilde{I}_1^*) \right) \\ P_2 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} * \tilde{U}_2 * (\tilde{I}_2^*) \right)\end{aligned}$$

$$P = P_1 + P_2$$

A fentebbi képletből levezethető a passzivitás feltétele:

$$Z_{ij} = R_{ij} + j * X_{ij}$$

$$\text{A kétkapu passzív, ha } Z_{11}, Z_{22} > 0 \quad \text{és} \quad 4 * R_{11} * R_{22} \geq (R_{12} + R_{21})^2 + (X_{12} - X_{21})^2$$

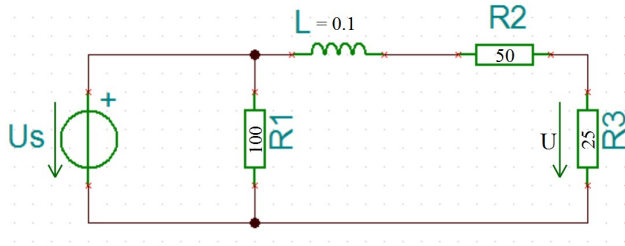
Szimmetrikus kétkapuk hullámparaméterei:

Hullámimpedanciának nevezzük azt az értéket, amellyel a szimmetrikus kapu szekunder oldalát lezárva, a kapu primer oldali bemenő impedanciája éppen megegyezik a lezárás impedanciájával.

MP:

Határozzuk meg az alábbi hálózat átviteli karakterisztikáját:

A gerjesztés U_s , a válasz a bejelölt U feszültség.



A feladatot konkrét számértékekkel már egycsér megcsináltuk csomóponti potenciálokat alkalmazva.

Most az átviteli karakterisztika meghatározásához használjunk egyszerű feszültséosztást:

$$U = U_s \cdot 25 / (25 + (50 + j\omega \cdot 0.1))$$

Az egyenletből az átviteli karakterisztika egyetlen egy átosztással adódik:

$$H(j\omega) = U / U_s = 25 / (75 + j\omega \cdot 0.1)$$

Határozzuk meg az amplitúdó és fáziskarakteristikákat:

$$K(\omega) = |H(j\omega)| = 25 / \sqrt{75^2 + \omega^2 \cdot 0.01}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg(25 / (75 + j\omega \cdot 0.1))$$

A számításunk ellenőrzésére nevezetes pontokban rezisztív hálózattal helyettesíthetjük a hálózatunkat.

Amennyiben a körfrekvencia 0, a tekercs rövidzárként, a kondenzátor pedig szakadásként viselkedik.

A fentebbi hálózatunkban ekkor a bejelölt U feszültség feszültségoztással $U/3$ értéknek adódik.

Ha a körfrekvencia értékét behelyettesítjük a meghatározott egyenletbe, a megoldásunk helyes egy adott frekvenciára.

Amennyiben a körfrekvencia a végtelenhez tart, a tekercs szakadásként, a kondenzátor pedig rövidzárként viselkedik.

A fentebbi hálózatunkban ekkor a bejelölt U feszültségre a 0 érték adódik.

Ha a körfrekvencia értékét behelyettesítjük a meghatározott egyenletbe, a megoldásunk helyes egy adott frekvenciára.

MP:

Számoljuk ki az alábbi kétpólus teljesítményét, R , L és az I áram függvényében:



Számoljuk ki a kétpólus eredő impedanciáját:

$$Z = R + j\omega \cdot L$$

A látszólagos teljesítményre vonatkozó képletet felírva:

$$S = \frac{1}{2} \cdot U \cdot (I^*) = \frac{1}{2} \cdot (Z \cdot I) \cdot (I^*) = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot Z = \frac{1}{2} \cdot R \cdot I^2 + \frac{1}{2} \cdot j\omega \cdot L \cdot I^2$$

Könnyedén meghatározhatjuk a látszólagos, a hatásos és meddő teljesítményt, valamint a teljesítménytényezőt:

$$S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot I^2 + \frac{1}{2} \cdot j\omega \cdot L \cdot I^2 \quad \text{VA}$$

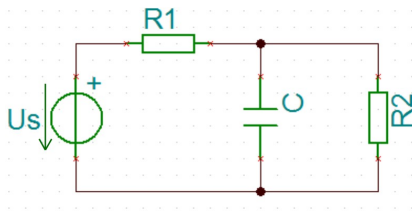
$$P = \frac{1}{2} \cdot R \cdot I^2 \quad \text{W}$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot j\omega \cdot L \cdot I^2 \quad \text{var}$$

$$\lambda = P / S = R / (R + j\omega \cdot L)$$

MP:

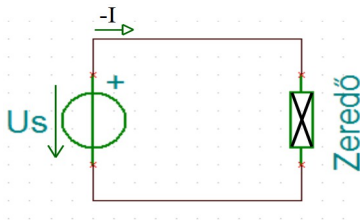
Határozzuk meg a forrás teljesítményét az alábbi hálózatban:



A forrás 100V csúcserőértékű, szinuszos gerjesztés.

$$R_1 = R_2 = 1/\omega C = 10\Omega$$

Határozzuk meg az eredő impedanciáját a hálózatnak:



$$Z_{\text{eredő}} = R_1 + (R_2 \times 1/j\omega C) = 10 + \frac{10 \cdot -j \cdot 10}{10 + -j \cdot 10} = 10 + \frac{-j \cdot 10}{1 - j} = 15 - 5j$$

Ne felejtsük a komplex számok pár tulajdonságát. $1/j = -j$; $z \cdot (z^*) = |z|^2$; $j \cdot j = -1$

Figyeljünk arra, hogy az áram iránya ellentétes a feszültség irányával, mivel az egyetlen forrás csak termelő állapotban lehet, így teljesítménye negatívnak kell, hogy adódjon.

Az áramot továbbra is meghatározhatjuk, mint a feszültség és az impedancia hányadosa:

$$-I = U_s / Z_{\text{eredő}} = \frac{100}{15 - 5j} = 100 \cdot \frac{15 + 5j}{15^2 + 5^2} = 6 + 2j$$

Írjuk fel a teljesítményre vonatkozó összefüggést:

$$S = \frac{1}{2} \cdot U \cdot (I^*) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot -(6 - 2j) = -300 + 100j$$

Könnyedén leolvashatjuk a hatásos és a meddő teljesítményt:

$$P = -300 \text{ W}$$

$$Q = 100 \text{ var}$$

A forrás hatásos teljesítménye mindenképpen negatívnak kell, hogy adódjon, mivel teljesítményt ad le. Az ilyen jellegű példánál ellenőrizhetjük számításainkat, a hatásos és meddő teljesítmények összege 0-t kell eredményezzen!

Maradjunk a példánál és határozzuk meg az R_2 ellenállás teljesítményét is. A rajta eső teljesítmény mindenképpen pozitív kell legyen, mivel nem termelhet.

Egy egyszerű áramosztót felírva az ellenállásra:

$$U_2 = U_s \cdot \frac{R_2 \times 1/j\omega C}{R_1 + (R_2 \times 1/j\omega C)} = 30 - 10j$$

A teljesítményre vonatkozó összefüggést felírva, és kihasználva, hogy $I = U/Z$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (30 - 10j) \cdot \frac{30 - 10j}{10} = 50$$

A másik ellenállás teljesítménye:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (100 - (30 - 10j)) \cdot ((100 - (30 - 10j))/10)^* = 250$$

Az ellenállásoknak valóban csak hatásos teljesítménye lehet, és összegük valóban 300W, tehát az eredményünk nem biztos, hogy rossz.

