

II. HÁZI FELADAT : DISZKRÉT IDEJŰ HÁLÓZATOK VIZSGÁLATA

Név	Seyler Lajos
Neptun kód	EGWIB4
Adatsor száma	1
Beadási határidő:	12. oktatási hét

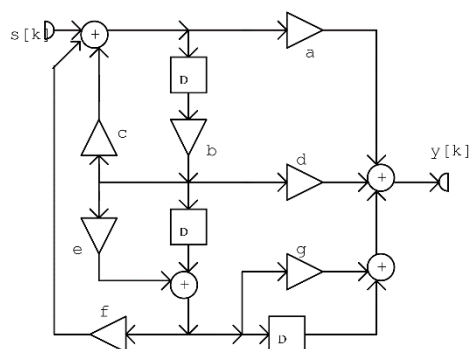
Megjegyzések: Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is **és a feladatlapot is be kell adni**. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását előlről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni, **nem elegendő a végeredményeket közölni!** A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de **a megoldás elvi lépéseit** ekkor is **részletesen** ismertetni kell.

Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

A házi feladat egyes pontjai az alábbi hálózatra vonatkoznak. A hálózat paraméterei az ábra alatti táblázatból határozandók meg. A fejlécben található „Adatsor száma” mező jelöli ki a táblázat megfelelő sorát.

32.



Erősítések

a	b	c	d	e	f	g	1.4.	F	G	p
0,9	-0,8	-0,8	-1	1,2	-1	0,8	-7,5	5,5	-0,8	
0,6	-0,8	1,2	0,4	-0,8	-1	-0,2	8	6	1,2	
0,8	-0,8	-1,4	-0,7	0,6	-1	0,7	8,5	7,2	-1,1	
-0,7	-0,8	0,6	0,4	-1,4	-1	-1	9,5	7,4	0,7	
-0,7	1,6	0,6	0,4	0,8	0,5	-0,3	-8	-7,4	-0,7	
0,4	1,6	-0,6	-0,6	-0,8	0,5	-0,6	7,6	-6	0,6	
1,3	0,5	2	0,5	4	0,8	0,9	-8,4	8,5	-0,6	
-1,2	-0,8	-0,3	-0,7	2,4	-0,5	0,3	9,6	-9	0,85	
-1,1	0,5	-0,4	0,4	-2,5	0,8	0,6	-6,8	7	-1,2	
-0,8	-0,8	0,7	0,4	-1,6	-0,5	-0,9	6,9	5,6	-0,75	

2.2.

S	ϑ_0	ρ
15	$\pi/23$	$-\pi/7$
16	$\pi/22$	$-\pi/8$
17	$\pi/21$	$-0,2\pi$
18	$\pi/20$	$\pi/8$
19	$\pi/19$	$\pi/7$
12	$\pi/18$	$\pi/5$
10	$\pi/17$	$-\pi/6$
20	$\pi/16$	$\pi/6$
21	$\pi/15$	$-\pi/9$
22	$\pi/14$	$\pi/9$

2.3. s[k] értékei

k	0	1	2	3	4	5
8	6	4	2	-1	1	
1	3	5	7	-1	1	
2	3	5	8	0	3	
3	4	5	6	7	-3	
4	4	-3	-2	7	5	
2	2	4	4	2	2	
2	4	6	5	4	-4	
7	5	3	3	1	-2	
2	4	-3	-2	4	2	
3	4	-2	5	-6	4	

1. feladat: Vizsgálat az időtartományban

- 1.1 Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!
- 1.2 Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1 feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenset! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!
- 1.3 Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!
- 1.4 A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \dots, 5$ értékekre!
- 1.5 (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

2. feladat: Vizsgálat a frekvenciatartományban

- 2.1 Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját normálalakban a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, 2\pi)$ tartományon!
- 2.2 Az $s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?
- 2.3 Egy 6 periódusú és $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adóttak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier-sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!
- 2.4 Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier-sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!
- 2.5 Az 1.3-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1 eredményével!
- 2.6 Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!
- 2.7 (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1 és a 2.2 pont eredményeit az ANDI programmal!

3. feladat: Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

- 3.1 Határozza meg a hálózat átviteli függvényét normálalakban a z tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!
- 3.2 Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés-válasz stabilitását!
- 3.3 Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3-ban kapottal! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \dots, 5$ -re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!
- 3.4 Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k](F + G \cdot p^k)$!
- 3.5 Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!
- 3.6 A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4 feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ ütemre!
- 3.7 (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!
- 3.8 (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!

1.1. rész

$$x_1[k+1] = b \cdot c \cdot x_1[k] + b \cdot e \cdot f \cdot x_1[k] + f \cdot x_2[k] + u[k]$$

$$x_2[k+1] = b \cdot x_1[k]$$

$$x_3[k+1] = b \cdot e \cdot x_1[k] + x_2[k]$$

$$y[k] = b \cdot d \cdot x_1[k] + b \cdot e \cdot g \cdot x_1[k] + b \cdot c \cdot a \cdot x_1[k] + b \cdot e \cdot f \cdot a \cdot x_1[k] + f \cdot a \cdot x_2[k] + g \cdot x_2[k] + 1 \cdot x_3[k] + a \cdot u[k]$$

Az állapotváltozós leírás a megadott adatsorral:

$$x_1[k+1] = 1,6 \cdot x_1[k] - 1 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 1 \cdot u[k]$$

$$x_2[k+1] = -0,8 \cdot x_1[k] + 0 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$x_3[k+1] = -0,96 \cdot x_1[k] + 1 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$y[k] = 1,472 \cdot x_1[k] - 0,1 \cdot x_2[k] + x_3[k] + 0,9 \cdot u[k]$$

Ezek alapján

$$A = \begin{pmatrix} 1,6 & -1 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0 \\ -0,96 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1,472 \quad -0,1 \quad 1) \quad D = 0,9$$

1.2 rész

Sajátértékek meghatározása MATLAB segítségével:

```
A=[1.6 -1 0;-0.8 0 0;-0.96 1 0]
la=eig(A)
```

Sajátértékek:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -0,4 \quad \lambda_3 = 2$$

λ_3 nem az egységkörön belül van $\rightarrow$ Nem asszimptotikusan stabilis $\rightarrow$ Nem G-V stabilis

Új paraméterek: b legyen $-0,8$ helyett $0,8$, f legyen -1 helyett $0,5$

Így az állapotváltozós leírás:

$$x_1[k+1] = -0,16 \cdot x_1[k] + 0,5 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 1 \cdot u[k]$$

$$x_2[k+1] = 0,8 \cdot x_1[k] + 0 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$x_3[k+1] = 0,96 \cdot x_1[k] + 1 \cdot x_2[k] + 0 \cdot x_3[k] + 0 \cdot u[k]$$

$$y[k] = -0,176 \cdot x_1[k] + 1,25 \cdot x_2[k] + 1 \cdot x_3[k] + 0,9 \cdot u[k]$$

Ezek alapján

$$A = \begin{pmatrix} -0,16 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0,96 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (-0,176 \quad 1,25 \quad 1) \quad D = 0,9$$

Sajátértékek meghatározása MATLAB segítségével:

```
A=[-0.16 0.5 0;0.8 0 0;0.96 1 0]
la=eig(A)
```

Sajátértékek:

$$\lambda_1 = 0,5575$$

$$\lambda_2 = -0,7175$$

$$\lambda_3 = 0$$

Minden sajátérték az egységkörön belül helyezkedik el $\rightarrow$ a rendszer G-V stabil

1.3 rész

Az impulzusválasz első 10 ütembeli értéke az állapotváltozós leírás alapján:

k	u[k]	x1[k]	x2[k]	x3[k]	y[k]
0	1	0	0	0	0,9
1	0	1	0	0	-0,17600
2	0	-0,16	0,8	0,96	1,98816
3	0	0,4256	-0,12800	0,64640	0,41149
4	0	-0,13210	0,34048	0,28058	0,72942
5	0	0,19138	-0,10568	0,21367	0,04789
6	0	-0,08346	0,5310	0,07804	0,28411
7	0	0,08990	-0,06677	0,07298	-0,02630
8	0	-0,04777	0,07192	0,01954	0,11785
9	0	0,04360	-0,03821	0,02607	-0,02938
10	0	-0,02608	0,03488	0,00365	0,05184

Az impulzusválasz analitikus alakja:

$$h[k] = D \cdot \delta[k] + C \cdot B \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot C \cdot \{L_1 \cdot \lambda_1^{k-1} + L_2 \cdot \lambda_2^{k-2}\} \cdot B$$

$$h[k] = D \cdot \delta[k] + C \cdot B \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \{K_1 \cdot \lambda_1^{k-1} + K_2 \cdot \lambda_2^{k-2}\} \quad \left(L_i = \prod_{p=1, p \neq i}^3 \frac{A - \lambda_p \cdot E}{\lambda_i - \lambda_p} \right)$$

K_1 és K_2 kiszámítása MATLAB segítségével:

```
A=[-0.16 0.5 0;0.8 0 0;0.96 1 0]
B=[1;0;0]
C=[-0.176 1.25 1]
D=0.9
la=eig(A)
la1=la(2,1) // la (sajátérték vektor) 2. sor 1. oszlop
la2=la(3,1) // la (sajátérték vektor) 3. sor 1. oszlop
L1=(A/la1)*(A-eye(3)*la2)/(la1-la2) //eye(3): 3x3-as egységmátrix
L2=(A/la2)*(A-eye(3)*la1)/(la2-la1)
K1=C*L1*B*la1
K2=C*L2*B*la2
```

Kapott eredmények:

$$K1 = 1,4416$$

$$K2 = 0,5466$$

$$\lambda_1 = 0,5575$$

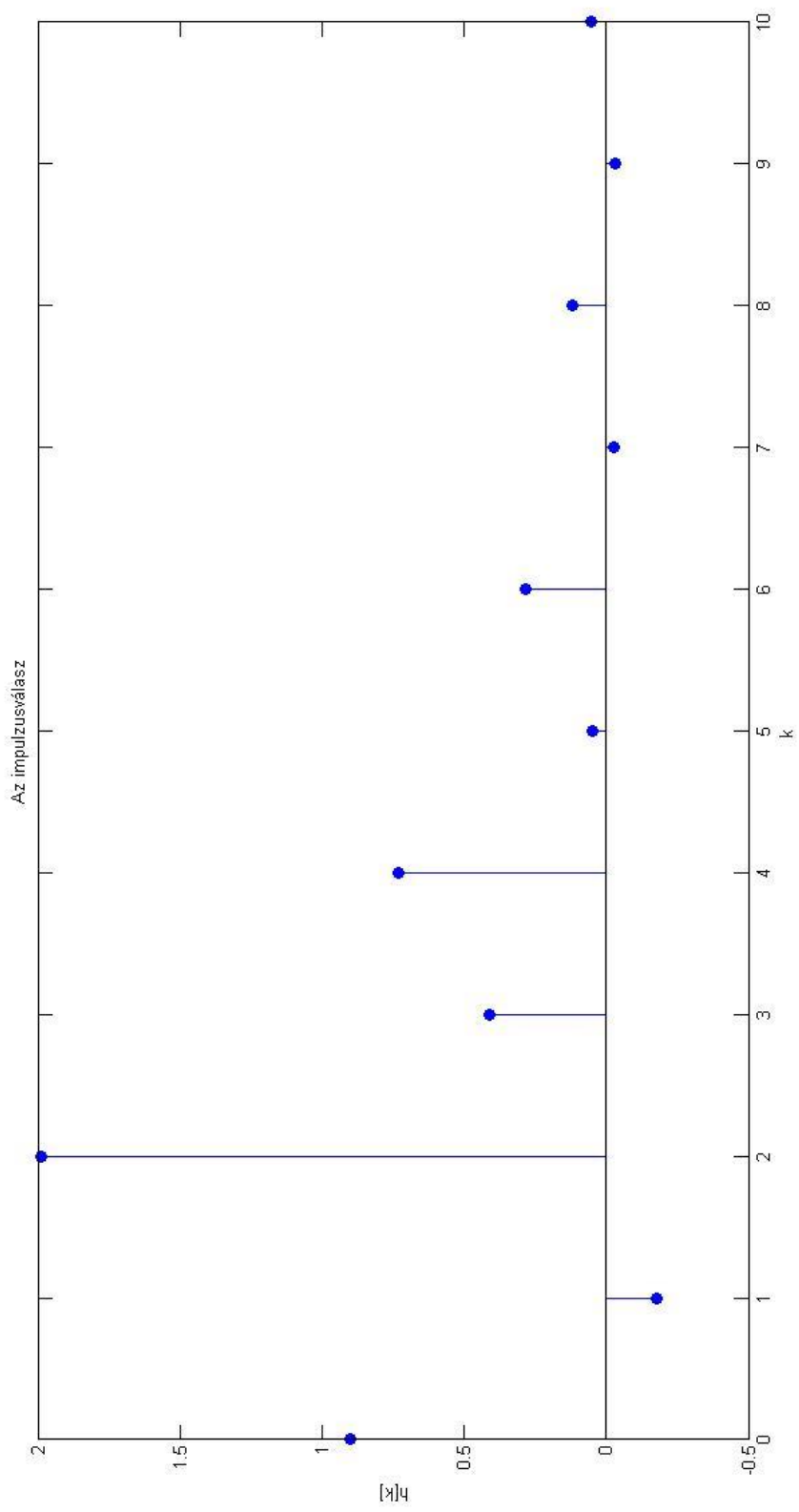
$$\lambda_2 = -0,7175$$

$$C \cdot B = -0,176$$

$$h[k] = 0,9 \cdot \delta[k] - 0,176 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \{1,4416 \cdot 0,5575^{k-2} + 0,5466 \cdot (-0,7175)^{k-2}\}$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
k=0:10;
h=(1.4416*0.5575.^(k-2)+0.5466*(-0.7175).^(k-2))
h(1)=0.9 // 0,9 · δ[k] beillesztése
h(2)=-0.176 // -0,032 · δ[k-1] beillesztése
stem(k,h,'fill')
xlabel('k')
ylabel('h[k]')
title('Impulzusválasz')
```



1.4. rész

Gerjesztés: $u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-7,5 + 5,5 \cdot (-0,8)^k)$

$y[k] = ?$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot h[k-i]$$

Mivel a gerjesztés belépő és a rendszer kauzális, ezért elég 0-tól k-ig összegezni.

$$y[k] = \sum_{i=0}^k u[i] \cdot h[k-i]$$

k	u[k]	h[k]	y[k]
0	-2	0,9	-1,8
1	-11,9	-0,176	-10,358
2	-3,98	1,988	-5,4636
3	-10,316	0,411	-33,06312
4	-5,2472	0,73	-17,16
5	-9,302	0,0479	-38,375

$k = 0$

$$y[0] = u[0] \cdot h[0] = -2 \cdot 0,9 = -1,8$$

$k = 1$

$$y[1] = u[0] \cdot h[1] + u[1] \cdot h[0] = -2 \cdot (-0,176) + (-11,9) \cdot 0,9 = -10,358$$

$k = 2$

$$\begin{aligned} y[2] &= u[0] \cdot h[2] + u[1] \cdot h[1] + u[2] \cdot h[0] = \\ &= -2 \cdot 1,988 + (-11,9) \cdot (-0,176) + (-3,98) \cdot 0,9 = -5,4636 \end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned} y[3] &= u[0] \cdot h[3] + u[1] \cdot h[2] + u[2] \cdot h[1] + u[3] \cdot h[0] = \\ &= -2 \cdot 0,411 + (-11,9) \cdot 1,988 + (-3,98) \cdot (-0,176) + (-10,316) \cdot 0,9 = -33,06312 \end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned} y[4] &= u[0] \cdot h[4] + u[1] \cdot h[3] + u[2] \cdot h[2] + u[3] \cdot h[1] + u[4] \cdot h[0] = \\ &= -2 \cdot 0,73 + (-11,9) \cdot 0,411 + (-3,98) \cdot 1,988 + (-10,316) \cdot (-0,176) + (-5,2472) \cdot 0,9 \\ &= -17,16 \end{aligned}$$

$k = 5$

$$\begin{aligned} y[5] &= u[0] \cdot h[5] + u[1] \cdot h[4] + u[2] \cdot h[3] + u[3] \cdot h[2] + u[4] \cdot h[1] + u[5] \cdot h[0] = \\ &= -2 \cdot 0,0479 + (-11,9) \cdot 0,73 + (-3,98) \cdot 0,411 + (-10,316) \cdot 1,988 + (-5,2472) \cdot (-0,176) + (-9,302) \cdot 0,9 = -38,375 \end{aligned}$$

2.1. rész

MATLAB kód: `[szam,nev]=ss2tf(A,B,C,D)`

$$szam = [0,9000 \quad -0,032 \quad 1,6 \quad 0,8]$$

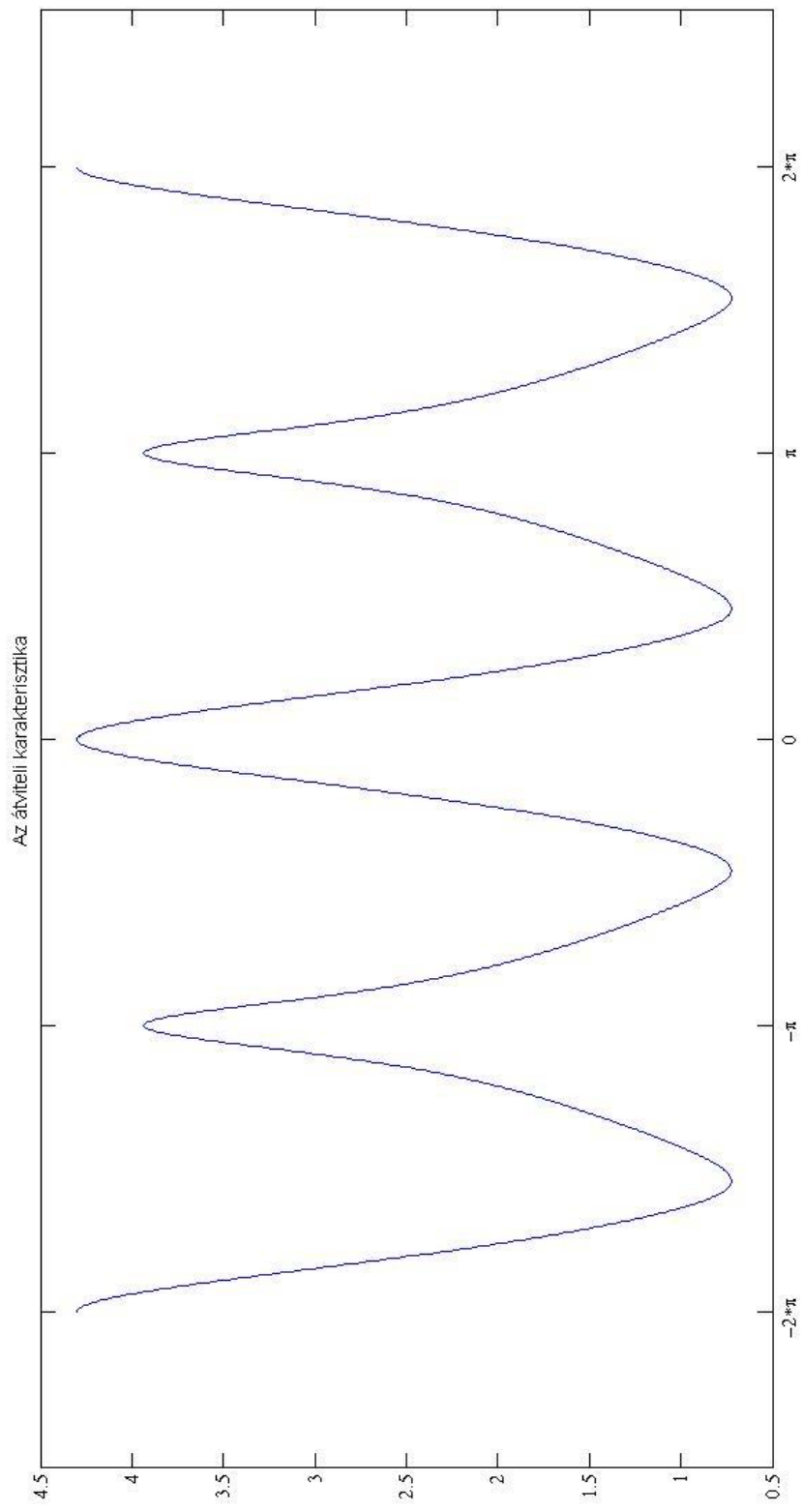
$$nev = [1 \quad 0,16 \quad -0,4 \quad 0]$$

Tehát az átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,9 \cdot e^{j3\cdot\vartheta} - 0,032 \cdot e^{j2\cdot\vartheta} + 1,6 \cdot e^{j\vartheta} + 0,8}{1 \cdot e^{j3\cdot\vartheta} + 0,16 \cdot e^{j2\cdot\vartheta} - 0,4 \cdot e^{j\vartheta}}$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
te=-2*pi:0.01:2*pi;
Hejt=(0.9*exp(i*3*te)-0.032*exp(i*2*te)+1.6*exp(i*te)+0.8)./(1*exp(i*3*te)+
0.16*exp(i*2*te)-0.4*exp(i*te));
absH=abs(Hejt);
plot(te,absH);
title('Amplitúdó karakterisztika');
set(gca,'XTick',-2*pi:pi:2*pi);
set (gca,'FontName','Symbol');
set(gca,'XTickLabel',{'-2*p',' -p','0','p','2*p'});
```



2.2. rész

$$u[k] = U \cdot \cos(\vartheta_0 \cdot k + \rho) = 15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{23} \cdot k - \frac{\pi}{7}\right) \quad \rightarrow \quad \bar{U} = 15 \cdot e^{-j\frac{\pi}{7}}$$

$$\bar{H} = H(e^{j\vartheta}) \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{23}} = 3,9079 - 1,3999 \cdot j = 4,1511 \cdot e^{-j\cdot 0,344}$$

$$\bar{Y}_g = \bar{U} \cdot \bar{H} = 62,267 \cdot e^{-j\cdot 0,793}$$

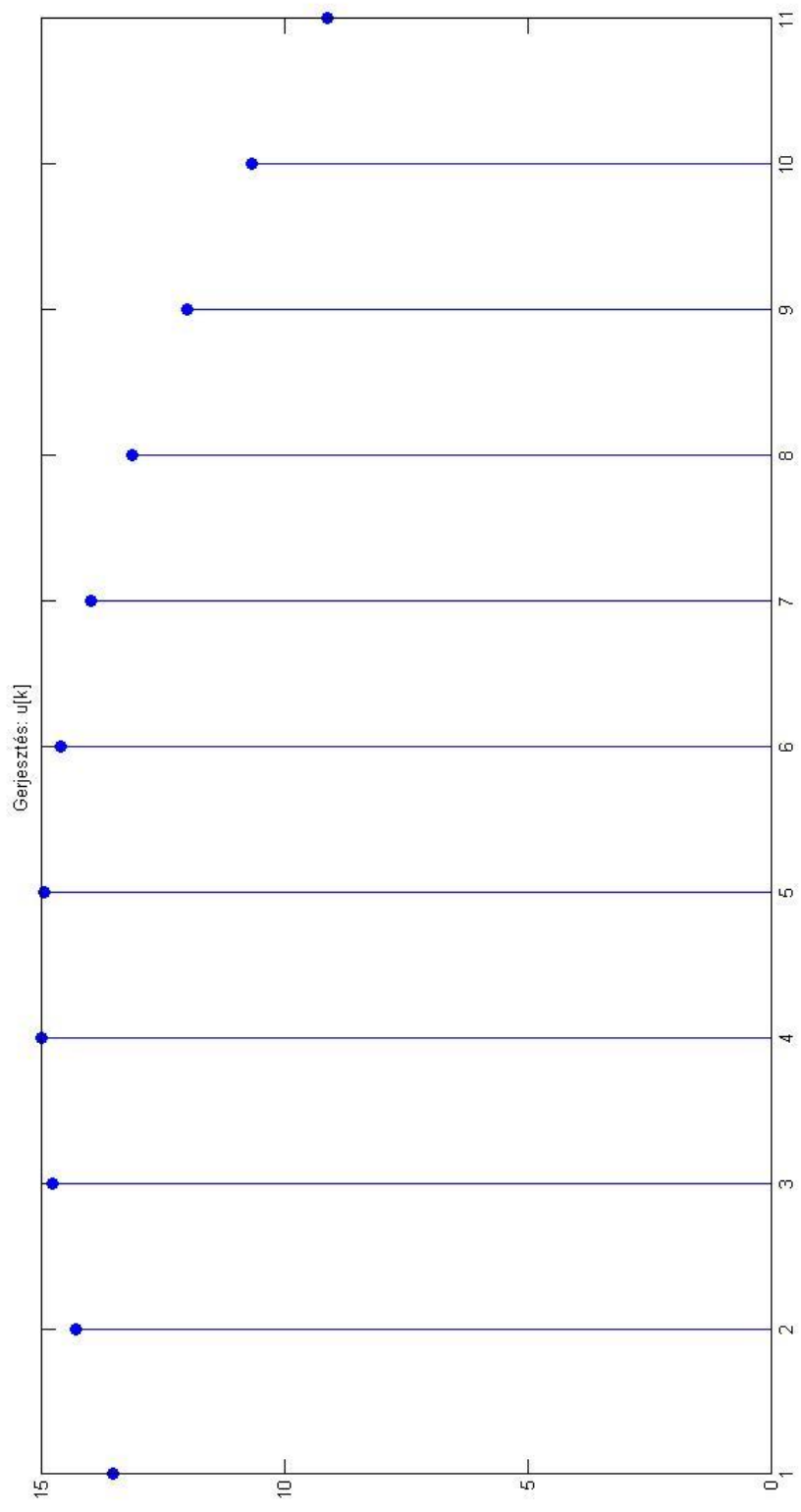
$$y_g[k] = 62,267 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{23} \cdot k - 0,793\right)$$

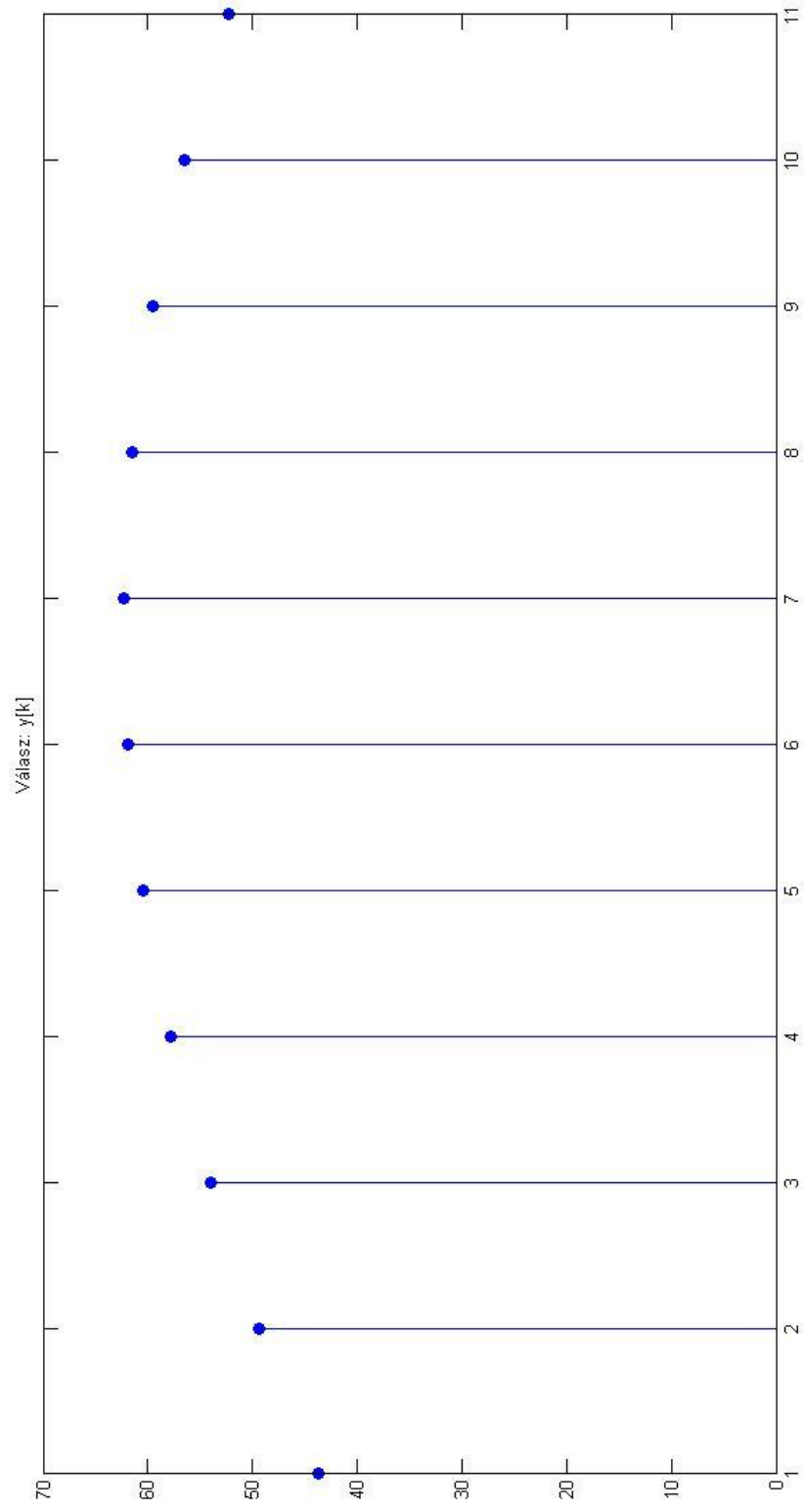
A jelek periodikusak, periódus: $L = 46$, mert $\vartheta_0 = \frac{\pi}{23} = \frac{2\pi}{L}$, ahol L a periódus

Az $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer G-V stabilis.

Ábrázolása MATLAB segítségével:

```
k=0:10;  
u=15*cos(pi/23*k-pi/7)  
stem(u,'fill');  
title('Gerjesztés: u[k]')  
  
y=62.267*cos(pi/23*k-0.793);  
stem(y,'fill');  
title('Válasz: y[k]')
```





2.3. rész

A periodikus jel értékei

0	1	2	3	4	5
8	6	4	2	-1	1

$$L = 6$$

$$\vartheta_0 = \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi}{3}$$

Fourier-sorfejtés: $X_p^c = \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} (x[k] \cdot e^{-j \cdot k \cdot p \cdot \vartheta_0})$

$$X_0^c = \frac{1}{6} \cdot (8 + 6 + 4 + 2 - 1 + 1) = \frac{20}{6}$$

$$X_1^c = \frac{1}{6} \cdot \left(8 + 6 \cdot e^{-j \frac{\pi}{3}} + 4 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j \pi} - 1 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-j \frac{5\pi}{3}} \right) = \frac{4}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot j = 1,965 \cdot e^{-j \cdot 0,0825}$$

$$X_2^c = \frac{1}{6} \cdot \left(8 + 6 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} + 4 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j 2\pi} - 1 \cdot e^{-j \frac{8\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-j \frac{10\pi}{3}} \right) = \frac{5}{6}$$

$$X_3^c = \frac{1}{6} \cdot (8 + 6 \cdot e^{-j \pi} + 4 \cdot e^{-j 2\pi} + 2 \cdot e^{-j 3\pi} - 1 \cdot e^{-j 4\pi} + 1 \cdot e^{-j 5\pi}) = \frac{1}{3}$$

$$X_4^c = X_2^{c*} = \frac{5}{6}$$

$$X_5^c = X_1^{c*} = \frac{4}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot j = 1,965 \cdot e^{j \cdot 0,0825}$$

Komplex alak:

$$u[k] = \frac{20}{6} + \left(\frac{4}{3} - j \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} \right) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}} + \frac{5}{6} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot e^{j \cdot k \cdot \pi} + \frac{5}{6} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{4\pi}{3}} + \left(\frac{4}{3} + j \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} \right) \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{5\pi}{3}}$$

Valós alak:

$$X_0 = X_0^c$$

$$X_p^A = 2 \cdot \text{Re}\{X_p^c\} \text{ és } X_p^B = -2 \cdot \text{Im}\{X_p^c\}, \text{ ahol } 0 < p < \frac{L}{2} = 3$$

$$X_3^A = X_3^c \quad X_3^B = 0 \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^3 (X_p^A \cdot \cos(p \cdot k \cdot \vartheta_0) + X_p^B \cdot \sin(p \cdot k \cdot \vartheta_0))$$

$$u[k] = \frac{20}{6} + \frac{8}{3} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{3} \cdot \cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Ellenőrzés MATLAB segítségével:

k=0:5

Valós alakra

$$x1=20/6+(4/3-j*5/6*\text{sqrt}(3))*\exp(j*k*\text{pi}/3)+5/6*\exp(j*k*2*\text{pi}/3)+1/3*\exp(j*k*\text{pi})$$

$$+5/6*\exp(j*k*4*\text{pi}/3)+(4/3+j*5/6*\text{sqrt}(3))*\exp(j*k*5/3*\text{pi})$$

Komplex alakra

$$x2=20/6+(8/3)*\cos(k*\text{pi}/3)+(5/3*\text{sqrt}(3))*\sin(k*\text{pi}/3)+(5/3)*\cos(k*2*\text{pi}/3)+(1/3)*\cos(k*\text{pi})$$

2.4. rész

$$u[k] = \frac{20}{6} + \frac{8}{3} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{3} \cdot \cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Használjuk a következő azonosságot:

$$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = k \cdot \sin(x + \varphi), \text{ ahol}$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{és} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{k}$$

$$\text{Ez alapján: } u[k] = \frac{20}{6} + 3,29 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} + 1,07\right) + \frac{5}{3} \cdot \cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,9 \cdot e^{j3 \cdot \vartheta} - 0,032 \cdot e^{j2 \cdot \vartheta} + 1,6 \cdot e^{j\vartheta} + 0,8}{1 \cdot e^{j3 \cdot \vartheta} + 0,16 \cdot e^{j2 \cdot \vartheta} - 0,4 \cdot e^{j\vartheta}}$$

$$\bar{Y}_p = \bar{U}_p \cdot \bar{H}_p, \text{ ahol } \bar{H}_p = H(e^{j\vartheta_p})$$

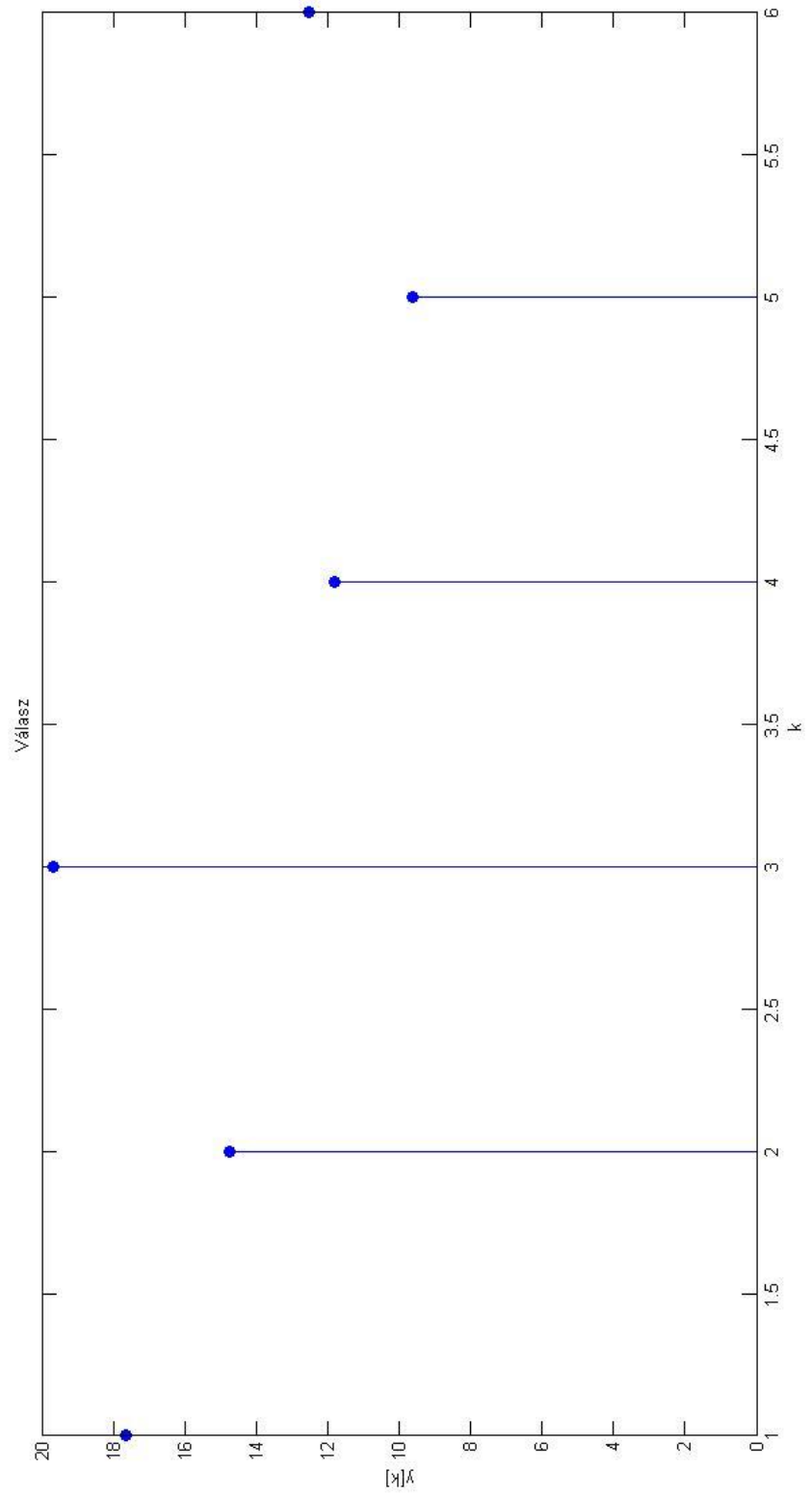
p	ϑ_p	$\bar{U}_p$	$\bar{H}_p$	$\bar{Y}_p$
0	0	$\frac{20}{6}$	4,3	14,333
1	$\frac{\pi}{3}$	$3,29 \cdot e^{j1,07}$	$1,184 \cdot e^{-j2,217}$	$3,895 \cdot e^{-j1,147}$
2	$\frac{2 \cdot \pi}{3}$	$\frac{5}{3}$	$1,38 \cdot e^{j1,4044}$	$2,3 \cdot e^{j1,4044}$
3	π	$\frac{1}{3}$	3,9364	1,312

Válasz:

$$y[k] = 14,333 + 3,895 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} - 1,147\right) + 2,3 \cdot \cos\left(2 \cdot k \cdot \frac{\pi}{3} + 1,4044\right) + 1,312 \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
k=0:5;
yk=14.333+3.895*cos(k*pi/3-1.147)+2.3*cos(2*k*pi/3+1.4044)+1.312*cos(k*pi);
stem(yk,'fill');
ylabel('y[k]');
xlabel('k');
title('Válasz');
```



2.5. rész

$$h[k] = 0,9 \cdot \delta[k] - 0,176 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \{1,4416 \cdot 0,5575^{k-2} + 0,5466 \cdot (-0,7175)^{k-2}\}$$

Ennek Fourier-transzformáltja:

$$H(e^{j\vartheta}) = 0,9 - 0,176 \cdot e^{-j\vartheta} + \frac{1,4416 \cdot e^{-j2\vartheta}}{1-0,5575 \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{0,5466 \cdot e^{-j2\vartheta}}{1+0,7175 \cdot e^{-j\vartheta}} = \dots = \frac{0,9 \cdot e^{j3\vartheta} - 0,032 \cdot e^{j2\vartheta} + 1,6 \cdot e^{j\vartheta} + 0,8}{1 \cdot e^{j3\vartheta} + 0,16 \cdot e^{j2\vartheta} - 0,4 \cdot e^{j\vartheta}}$$

Ez megegyezik a 2.1. részben kapott átviteli karakterisztikával.

2.6. rész

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{0,9 \cdot e^{j3\vartheta} - 0,032 \cdot e^{j2\vartheta} + 1,6 \cdot e^{j\vartheta} + 0,8}{1 \cdot e^{j3\vartheta} + 0,16 \cdot e^{j2\vartheta} - 0,4 \cdot e^{j\vartheta}}$$

Osztás $e^{j3\vartheta}$ -val, hogy negatív kitevőket kapjunk.

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{0,9 - 0,032 \cdot e^{-j\vartheta} + 1,6 \cdot e^{-j2\vartheta} + 0,8 \cdot e^{-j3\vartheta}}{1 + 0,16 \cdot e^{-j\vartheta} - 0,4 \cdot e^{-j2\vartheta}}$$

$$\bar{Y} \cdot (1 + 0,16 \cdot e^{-j\vartheta} - 0,4 \cdot e^{-j2\vartheta}) = \bar{U} \cdot (0,9 - 0,032 \cdot e^{-j\vartheta} + 1,6 \cdot e^{-j2\vartheta} + 0,8 \cdot e^{-j3\vartheta})$$

$e^{-j \cdot k \cdot \vartheta}$ -ás szorzó k-val való időbeli eltolást jelent, vagyis a hálózat rendszeregyenlete:

$$y[k] + 0,16 \cdot y[k-1] - 0,4 \cdot y[k-2] = 0,9 \cdot u[k] - 0,032 \cdot u[k-1] + 1,6 \cdot u[k-2] + 0,8 \cdot u[k-3]$$

3.1. rész

z-tartománybeli egyenletek:

$$z \cdot X_1 = -0,16 \cdot X_1 + 0,5 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 1 \cdot U$$

$$z \cdot X_2 = 0,8 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot U$$

$$z \cdot X_3 = 0,96 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot U$$

$$Y = -0,176 \cdot X_1 + 1,25 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 + 0,9 \cdot U$$

Ebből:

$$A = \begin{pmatrix} -0,16 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0,96 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (-0,176 \quad 1,25 \quad 1) \quad D = 0,9$$

MATLAB kód:

$$[szam,nev] = ss2tf(A,B,C,D)$$

$$szam = [0,9 \quad -0,032 \quad 1,6 \quad 0,8]$$

$$nev = [1 \quad 0,16 \quad -0,4 \quad 0]$$

Tehát:

$$H(z) = \frac{0,9 - 0,032 \cdot z^{-1} + 1,6 \cdot z^{-2} + 0,8 \cdot z^{-3}}{1 + 0,16 \cdot z^{-1} - 0,4 \cdot z^{-2}} = H(e^{j\vartheta}) \Big|_{e^{j\vartheta}=z}$$

3.2. rész

Pólusok: Ahol a nevező nulla

Kiszámításuk MATLAB segítségével:

```
roots(nev);
```

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -0,7175$$

$$p_3 = 0,5575$$

Zérusok : ahol a számláló nulla

Kiszámításuk MATLAB segítségével:

```
roots(szam);
```

$$z_1 = 0,2408 + 1,3909 \cdot j$$

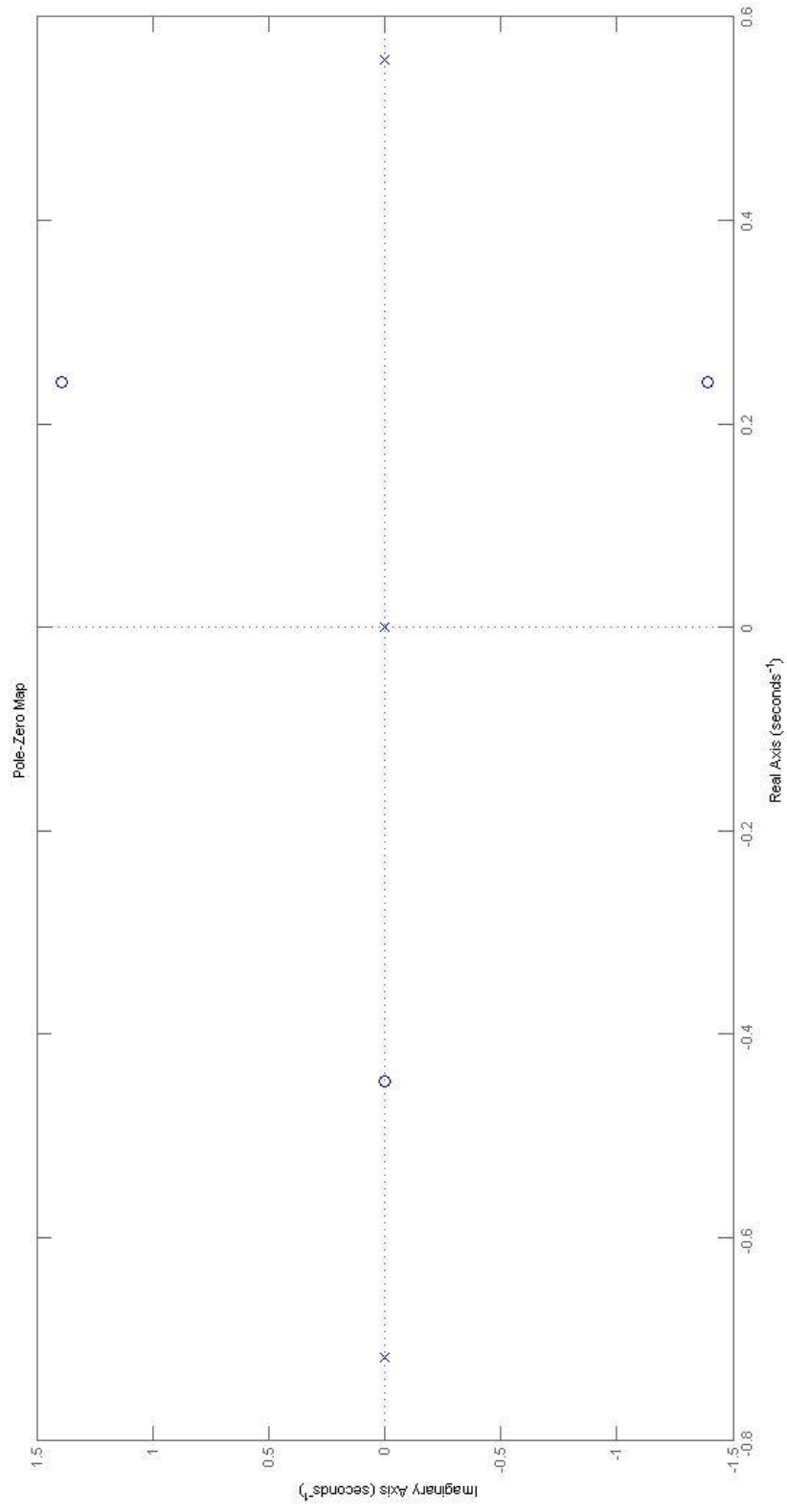
$$z_2 = 0,2408 - 1,3909 \cdot j$$

$$z_3 = -0,4461$$

A pólusok az egységkörön belül helyezkednek el, ezért a hálózat G-V stabil.

Ábrázolása MATLAB segítségével:

```
pzmap(szam,nev);
```



3.3. rész

$$H(z) = \frac{0,9 \cdot z^3 - 0,032 \cdot z^2 + 1,6 \cdot z + 0,8}{1 \cdot z^3 + 0,16 \cdot z^2 - 0,4 \cdot z}$$

Nevezőből kiemelve z-t: $H(z) = z^{-1} \cdot \frac{0,9 \cdot z^3 - 0,032 \cdot z^2 + 1,6 \cdot z + 0,8}{1 \cdot z^2 + 0,16 \cdot z - 0,4}$

Részletlörtre bontás MAPLE segítségével:

$$[r,p,k]=\text{residue}([0.9 \ -0.032 \ 1.6 \ 0.8],[0 \ 1 \ 0.16 \ -0.4])$$

$$r = [0,5466 \quad 1,4416]$$

$$p = [-0,7175 \quad 0,5575]$$

$$k = [0,9 \quad -0,176]$$

Ennek alapján: $H(z) = z \cdot z^{-2} \cdot \left(0,9 \cdot z - 0,176 + \frac{0,5466}{z - (-0,7175)} + \frac{1,4416}{z - 0,5575} \right)$

$$H(z) = 0,9 - 0,176 \cdot z^{-1} + z^{-2} \cdot \left(\frac{0,5466}{z - (-0,7175)} \cdot z + \frac{1,4416}{z - 0,5575} \cdot z \right)$$

Így már tagonként transzformálható:

$$h[k] = 0,9 \cdot \delta[k] - 0,176 \cdot \delta[k - 1] + \varepsilon[k - 2] \cdot \{0,5466 \cdot (-0,7175)^{k-2} + 1,4416 \cdot 0,5575^{k-2}\}$$

Megegyezik az 1.3-as feladatban kapott eredménnyel.

Ellenőrzés polinom-osztással:

$$\begin{array}{r} (0,9 - 0,032 \cdot z^{-1} + 1,6 \cdot z^{-2} + 0,8 \cdot z^{-3}) : (1 + 0,16 \cdot z^{-1} - 0,4 \cdot z^{-2}) = 0,9 - 0,176 \cdot z^{-1} + 1,988 \cdot z^{-2} + 0,412 \cdot z^{-3} + 0,73 \cdot z^{-4} + 0,048 \cdot z^{-5} \\ \underline{0,9 + 0,144 \cdot z^{-1} - 0,36 \cdot z^{-2}} \\ 0 - 0,176 \cdot z^{-1} + 1,96 \cdot z^{-2} + 0,8 \cdot z^{-3} \\ \underline{-0,176 \cdot z^{-1} - 0,02816 \cdot z^{-2} + 0,0704 \cdot z^{-3}} \\ 0 + 1,98816 \cdot z^{-2} + 0,7296 \cdot z^{-3} \\ \underline{1,98816 \cdot z^{-2} + 0,3181 \cdot z^{-3} - 0,7952 \cdot z^{-4}} \\ 0 + 0,4115 \cdot z^{-3} + 0,7952 \cdot z^{-4} \\ \underline{0,4115 \cdot z^{-3} + 0,0658 \cdot z^{-4} - 0,1646 \cdot z^{-5}} \\ 0 + 0,7294 \cdot z^{-4} + 0,1646 \cdot z^{-5} \\ \underline{0,7294 \cdot z^{-4} + 0,116704 \cdot z^{-5} - 0,223 \cdot z^{-6}} \\ 0 - 0,047896 \cdot z^{-5} + 0,29176 \cdot z^{-6} \quad \dots \end{array}$$

A kapott eredmény inverz z-transzformálásával kapjuk a választ:

$$h[k] = 0,9 \cdot \delta[k] - 0,176 \cdot \delta[k - 1] + 1,988 \cdot \delta[k - 2] + 0,412 \cdot \delta[k - 3] + 0,73 \cdot \delta[k - 4] - 0,048 \cdot \delta[k - 5] \dots$$

3.4. rész

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-7,5 + 5,5 \cdot (-0,8)^k)$$

$$Z\{u[k]\} = \frac{-7,5 \cdot z}{z-1} + \frac{5,5 \cdot z}{z - (-0,8)} = U(z)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z)$$

$$H(z) = \frac{0,9 \cdot z^3 - 0,032 \cdot z^2 + 1,6 \cdot z + 0,8}{1 \cdot z^3 + 0,16 \cdot z^2 - 0,4 \cdot z}$$

$$U(z) = \frac{-7,5 \cdot z \cdot (z+0,8) + 5,5 \cdot z \cdot (z-1)}{(z-1) \cdot (z+0,8)} = \frac{-2 \cdot z^2 - 11,5 \cdot z}{(z^2 - 0,2 \cdot z - 0,8)}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{-1,8 \cdot z^5 - 10,35 \cdot z^4 - 2,814 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 - 9,2 \cdot z}{z^5 - 0,04 \cdot z^4 - 1,232 \cdot z^3 - 0,048 \cdot z^2 + 0,32 \cdot z}$$

Részlettrökre bontás MAPLE segítségével:

$$[r,p,k]=\text{residue}([-1.8 \ -10.286 \ -2.814 \ -20 \ -9.2],[1 \ -0.04 \ -1.232 \ -0.048 \ 0.32])$$

$$r = [-32,2368 \quad -47,2629 \quad 38,8752 \quad 30,2665]$$

$$p = [1 \quad -0,8 \quad -0,7175 \quad 0,5575]$$

$$k = [-1.8]$$

Ennek alapján:

$$Y(z) = -1,8 - \frac{32,24}{z-1} - \frac{47,26}{z+0,8} + \frac{38,88}{z+0,7175} + \frac{30,27}{z-0,5575} =$$

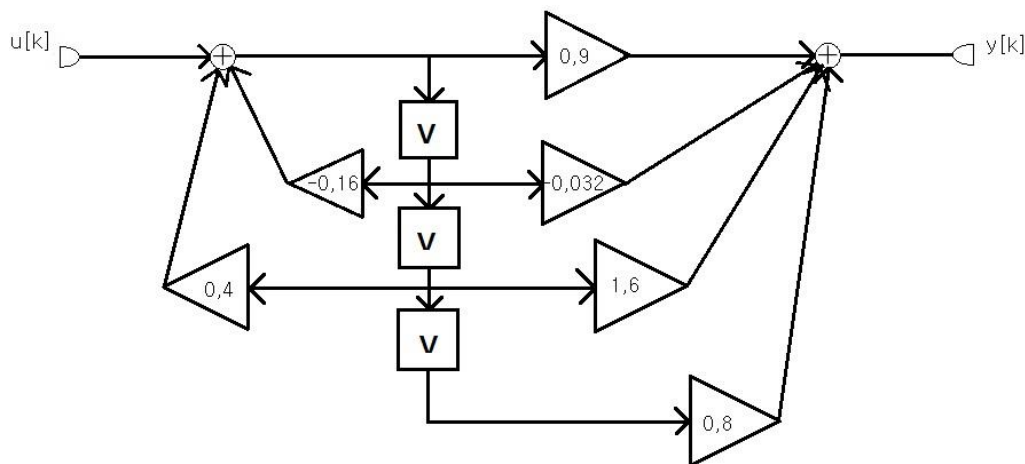
$$= -1,8 + z^{-1} \cdot \left(-\frac{32,24}{z-1} \cdot z - \frac{47,26}{z+0,8} \cdot z + \frac{38,88}{z+0,7175} \cdot z + \frac{30,27}{z-0,5575} \cdot z \right)$$

$$y[k] = Z^{-1}\{Y(z)\} =$$

$$= -1,8 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot (-32,24 - 47,26 \cdot (-0,8)^{k-1} + 38,88 \cdot (-0,7175)^{k-1} + 30,27 \cdot 0,5575^{k-1})$$

3.5. rész

$$H(z) = \frac{0,9-0,032 \cdot z^{-1}+1,6 \cdot z^{-2}+0,8 \cdot z^{-3}}{1+0,16 \cdot z^{-1}-0,4 \cdot z^{-2}}$$



Rendszeregyenlet:

$$y[k] + 0,16 \cdot y[k-1] - 0,4 \cdot y[k-2] = 0,9 \cdot u[k] - 0,032 \cdot u[k-1] + 1,6 \cdot u[k-2] + 0,8 \cdot u[k-3]$$

3.6. rész

Gerjesztés

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-7,5 + 5,5 \cdot (-0,8)^k)$$

A válasz analitikus alakja

$$y[k] = -1,8 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot (-32,24 - 47,26 \cdot (-0,8)^{k-1} + 38,88 \cdot (-0,7175)^{k-1} + 30,27 \cdot 0,5575^{k-1})$$

Rendszeregyenlet

$$y[k] + 0,16 \cdot y[k-1] - 0,4 \cdot y[k-2] = 0,9 \cdot u[k] + 0,112 \cdot u[k-1] + 1,24 \cdot u[k-2] + 0,8 \cdot u[k-3]$$

Ellenőrzés

k	$u[k]$	$y[k]$ analitikus	$y[k]$ rendszer egyenlet
0	-2	-1,8	-1,8
1	-11,9	-10,35	-10,358
2	-3,98	-5,4529	-5,46392
3	-10,316	-33,0626	-33,0660128
4	-5,2472	-17,1591	-17,17537395
5	-9,3	-38,3694	-38,37003489
6	-6,06	-22,5169	-22,535664
7	-8,65	-38,4154	-38,41114772
8	-6,577	-25,6283	-25,64698197