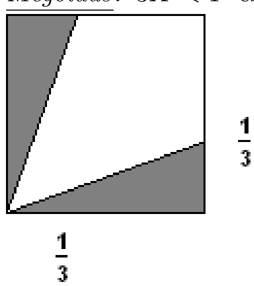
Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat megoldása

1. csoport

1. András, Béla és Csaba sorsot húznak. Névsor szerint haladva visszatevés nélkül kivesznek egy-egy golyót egy dobozból, melyben eredetileg öt fehér és egy fekete színű golyó volt. Az veszít, aki a feketét húzza. Kinek mennyi rá az esélye?
   Megoldás: Jelölje A: András húzza a feketét; B: Béla húzza a feketét; C: Csaba húzza a feketét.
   $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3} = \frac{1}{3}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{5\cdot1}{6\cdot5} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{1}{3}$
   $\mathbf{P}(C) = \frac{5\cdot4\cdot1}{6\cdot5\cdot4} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{1}{3}$

2. A $[0,1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több mint háromszorosa lesz a másiknak?
   Megoldás: $3X < Y$ és $3Y < Y \Longrightarrow p = \frac{1}{3}$



3. Legyen $X \in E(1)$ és $Y = \left[\frac{X}{2}\right]$. $\mathbf{E}Y = ?, \boldsymbol{\sigma}Y = ?$
   Megoldás: $2Y + 1 \in G\left(1 - e^{-1}\right) \Longrightarrow 2\mathbf{E}Y + 1 = \frac{1}{1-e^{-1}} \Longrightarrow$
   $\mathbf{E}Y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-1}} - 1\right)$
   $\boldsymbol{\sigma}^2(2Y+1) = 4\boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} \Longrightarrow \boldsymbol{\sigma}Y = \frac{\sqrt{e^{-1}}}{2\cdot(1-e^{-1})}$

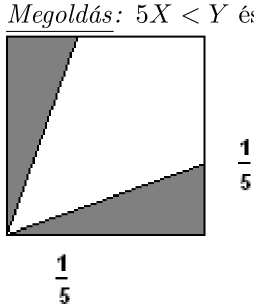
4. Az X, Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, ha $0 < u < 1$ és $0 < v < u^2$. Határozza meg az X peremsűrűségfüggvényét, $f_X(u)$-t! $\mathbf{E}X = ?$
   Megoldás: $f_X(u) = \int\limits_0^{u^2} \frac{1}{\sqrt{v}} dv = [2\sqrt{v}]_0^{u^2} = 2u, u \in (0,1)$.
   $\mathbf{E}X = \int\limits_0^1 2u^2 du = \frac{2}{3}$

5. Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan hárman nincsen reklamáció. Poisson eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább öt reklamáció érkezik?
   Megoldás: $\mathbf{P}(X=0) = \frac{3}{20} = e^{-\lambda} \Longrightarrow \lambda = \ln\frac{20}{3}$.
   $\mathbf{P}(X \geq 5) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{4} \mathbf{P}(X=i) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{4} \frac{\left(\ln\frac{20}{3}\right)^i}{i!} \cdot \frac{3}{20}$

Valószínűségszámítás zárthelyi dolgozat megoldása
2. csoport

1. András, Béla és Csaba sorsot húznak. Névsor szerint haladva visszatevés nélkül kivesznek egy-egy golyót egy dobozból, melyben eredetileg hét fehér és egy fekete színű golyó volt. Az veszít, aki a feketét húzza. Kinek mennyi rá az esélye?
   <u>*Megoldás:*</u> Jelölje A: András húzza a feketét; B: Béla húzza a feketét; C: Csaba húzza a feketét.
   $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{8} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{3}{8}$
   $\mathbf{P}(B) = \frac{7\cdot1}{8\cdot7} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{3}{8}$
   $\mathbf{P}(C) = \frac{7\cdot6\cdot1}{8\cdot7\cdot6} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3} = \frac{2}{8}$

2. A $[0,1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több mint ötszöröse lesz a másiknak?
   <u>*Megoldás:*</u> $5X < Y$ és $5Y < Y \Longrightarrow p = \frac{1}{5}$



3. Legyen $X \in E(2)$ és $Y = [2X]$. $\mathbf{E}Y = ?, \boldsymbol{\sigma}Y = ?$
   <u>*Megoldás:*</u> $\frac{Y}{2} + 1 \in G\left(1 - e^{-2}\right) \Longrightarrow 0.5 \cdot \mathbf{E}Y + 1 = \frac{1}{1-e^{-2}} \Longrightarrow$
   $\mathbf{E}Y = 2\left(\frac{1}{1-e^{-2}} - 1\right)$
   $\boldsymbol{\sigma}^2(0.5 \cdot Y + 1) = 0.25 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{e^{-2}}{(1-e^{-2})^2} \Longrightarrow \boldsymbol{\sigma}Y = 2\frac{\sqrt{e^{-2}}}{(1-e^{-2})}$

4. Az X, Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$, ha $0 < u < 1$ és $0 < v < u^2$. Határozza meg az Y peremsűrűségfüggvényét, $f_Y(v)$-t! $\mathbf{E}Y = ?$
   <u>*Megoldás:*</u> $f_Y(v) = \int\limits_{\sqrt{v}}^{1} \frac{1}{\sqrt{v}} du = \frac{1-\sqrt{v}}{\sqrt{v}}, v \in (0,1)$.
   $\mathbf{E}Y = \int\limits_0^1 \sqrt{v} - v dv = \left[\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} - \frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

5. Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legfeljebb három reklamáció érkezik?
   <u>*Megoldás:*</u> $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{10} = e^{-\lambda} \Longrightarrow \lambda = \ln 10$.
   $\mathbf{P}(X \leq 3) = \sum\limits_{i=0}^{3} \mathbf{P}(X = i) = \sum\limits_{i=0}^{3} \frac{(\ln 10)^i}{i!} \cdot \frac{1}{10}$