

# Sztochasztika 2 aláíráspótló pótpótZH

2014. május 29. 8:00

Felsőbb matematika informatikusoknak D

Munkaidő: 60 perc. Minden feladat 6,67 pontot ér.

1. Egy orvosi rendelőben minden beteg vizsgálata alatt újabb betegek érkehetnek a váróba. Számuk véletlen, független az előzményektől, és legfeljebb 2. Ezen belül  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel 2 beteg érkezik,  $\frac{1}{4}$  valószínűséggel 1, a maradék  $\frac{1}{4}$  valószínűséggel pedig egy sem.

Az első beteg, Pistike, érkezésekor azonnal bemehet a rendelőbe, mi pedig őt egymagát nevezzük a betegek „nulladik generációjának”. Azok a betegek, akik Pistike vizsgálata alatt érkeznek, alkotják az „első generációt”. Akik az első generáció tagjainak vizsgálata alatt érkeznek, alkotják a „második generációt”. És így tovább, az  $n$ -edik generáció tagjainak vizsgálata alatt érkezők lesznek az  $n + 1$ -edik generáció. A doktor néni akkor tart kávészünetet, ha egy beteg vizsgálatának befejezésekor a várótermet üresen találja.

Jelölje  $Z_n$  az  $n$ -edik generáció tagjainak számát,  $N$  pedig a doktor néni első kávészünetéig megvizsgált összes beteg számát.

- a.) Mi  $Z_1$  generátorfüggvénye?  
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy a második generáció üres?  
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a doktor néni előbb-utóbb tart kávészünetet?  
d.) Mennyi  $N$  várható értéke?
2. Egy 9700 kg teherbírású repülőgépre 2500 kicsi, 1000 közepes és 200 nagy csomagot tesznek fel. Ezek tömegei véletlenek és függetlenek. Egy kis csomag legfeljebb 2 kiló lehet, de átlagosan csak 1 szokott lenni. Egy közepes csomag legfeljebb 5 kiló lehet, de átlagosan csak 3 szokott lenni, míg egy nagy csomag legfeljebb 25 kiló lehet és átlag 17 szokott lenni. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a gép túlterhelt.
3. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje  $X_t$  ( $t \geq 0$ ) a parkolóban lévő autók számát  $t$  perc elteltével.
- (a) Modellezzük  $X_t$ -t folytonos idejű Markov láncsal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)  
(b) Számoljuk ki  $X_t$  stacionárius eloszlását.  
(c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?  
(d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?  
(e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?