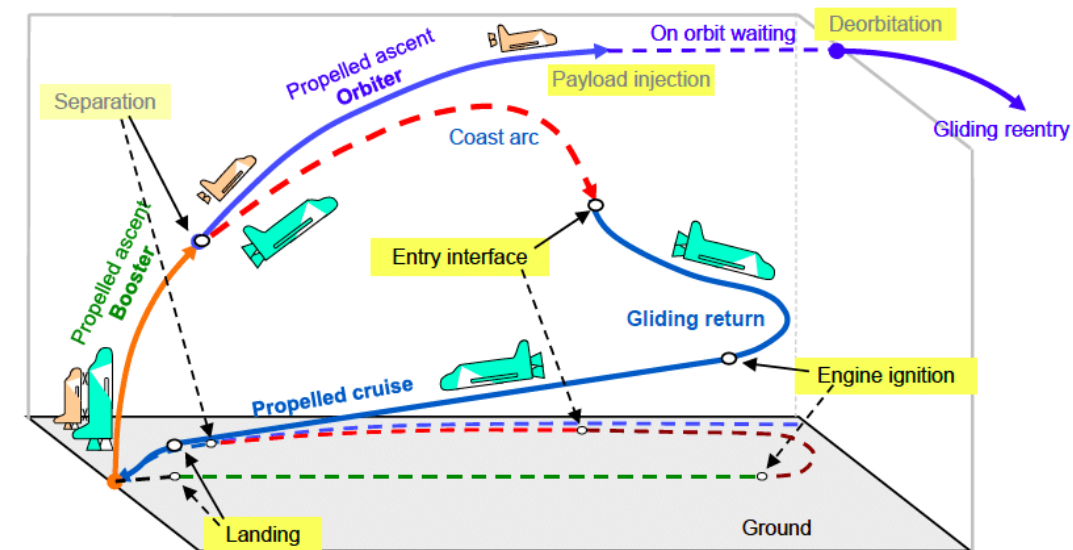
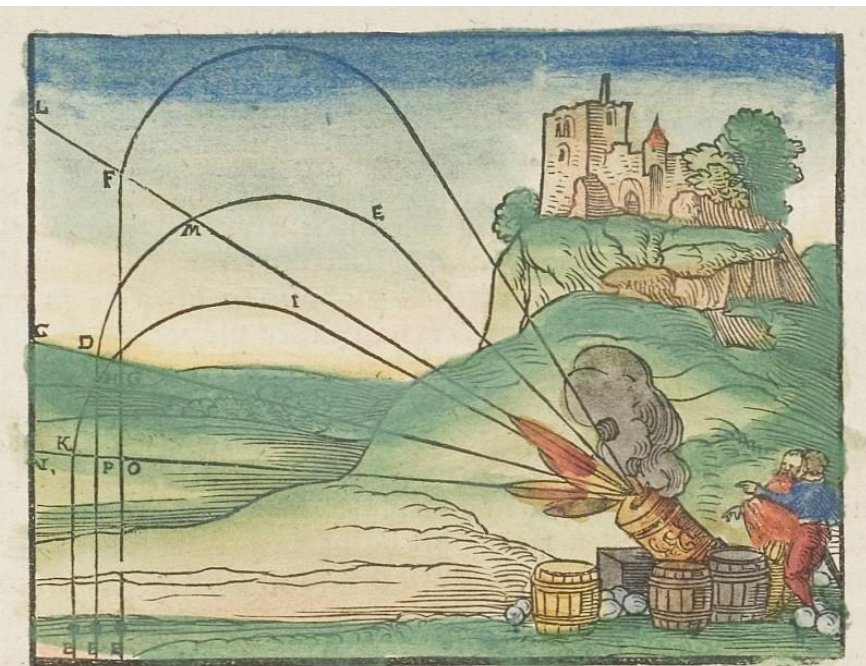


Űrfizika

Számítás tömegpontokkal

Beneda Károly adjunktus



Tartalom

- Hajítások
- Rakétamozgás
- Bolygó pályák

Tartalom

- Hajítások
- Rakétamozgás
- Bolygó pályák

Hajítások - definíció

- Hajításnak nevezzük az olyan mozgást, amelynél a Föld (vagy valamely más égitest) felszínének közelében (ahol a gravitációs gyorsulás közel állandónak tekinthető) leeső pontszerű testnek van kezdősebessége.
- A hajítás mindig két mozgás összegének tekinthető:
 - a test egyrészt a kezdősebességtől függő, de vízszintes irányban egyenes vonalú egyenletes mozgást végez,
 - a mozgás függőleges összetevője pedig egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás.
- A mozgás során a légellenállás elhanyagolható.

Hajítások fajtái

- Függőleges hajítás

A függőleges hajítás kezdősebessége függőleges. Ilyenkor a test egyrészt egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a kezdősebességtől függően felfelé vagy lefelé, másrészt egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással esik lefelé. E két mozgás összege egy függőleges pályán végbemenő, egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás lesz.

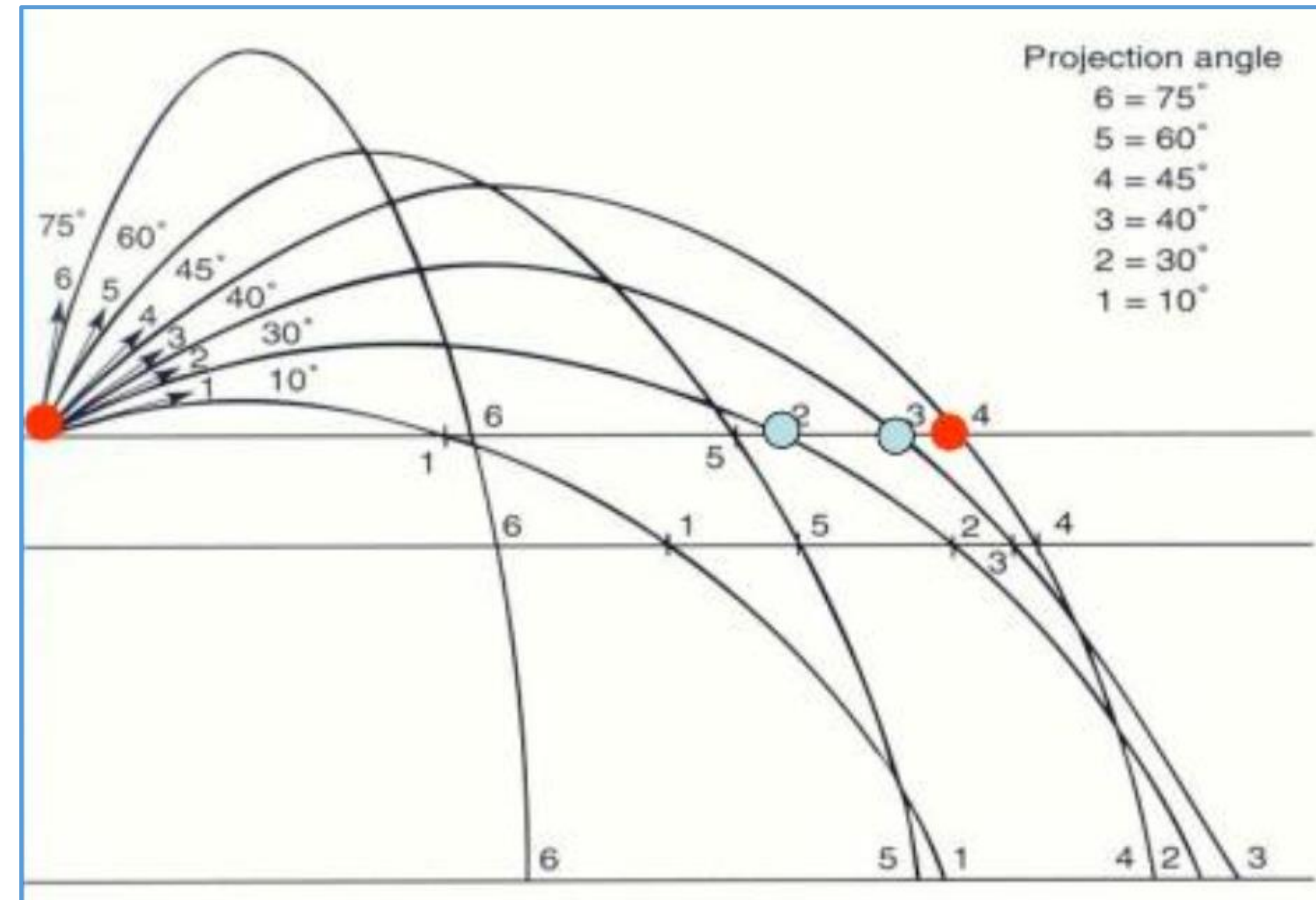
- Vízszintes hajítás

Vízszintes hajításnál a test kezdősebessége vízszintes. A test emiatt vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, másrészt egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással esik lefelé. A két mozgás eredményeként a test egy függőleges síkban fekvő parabolapályán mozog. A parabola tengelypontja (csúcspontja) a test indulási helyénél van, a parabola tengelye függőleges.

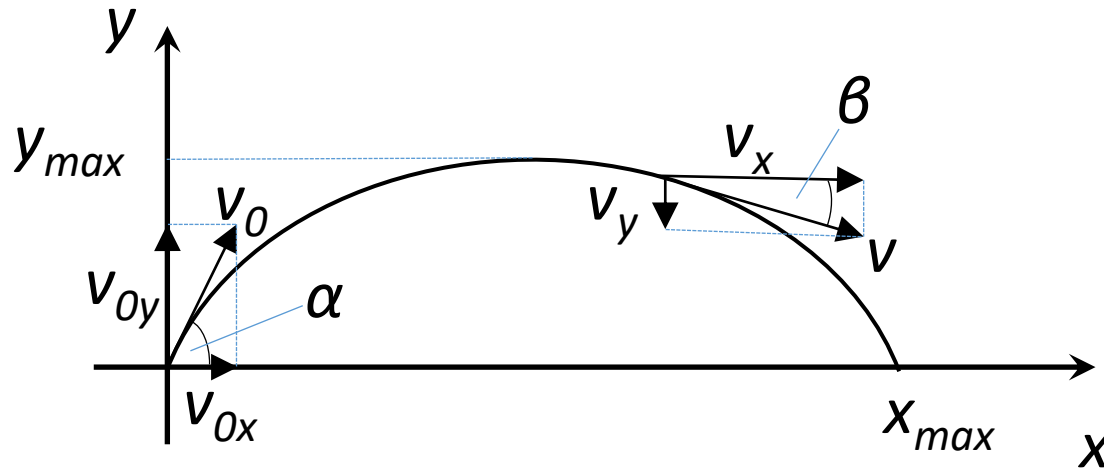
Hajítások fajtái

- Ferde hajítás

Ferde hajításnál a test kezdősebessége nem vízszintes és nem is függőleges. Ilyenkor a test vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, függőlegesen pedig egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással esik lefelé. Ezen mozgások következtében a test egy függőleges síkban fekvő parabolapályán mozog, a parabola tengelye függőleges.



Ferde hajítás kiszámítása



Függőleges irány (felfelé hajítás):

$$v_y = v_{0y} - g t \quad y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$$

Az aktuális sebesség iránya:

$$\beta = \arctg \frac{v_y}{v_x}$$

Kezdeti sebességkomponensek:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Vízszintes irány:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad x = v_x t$$

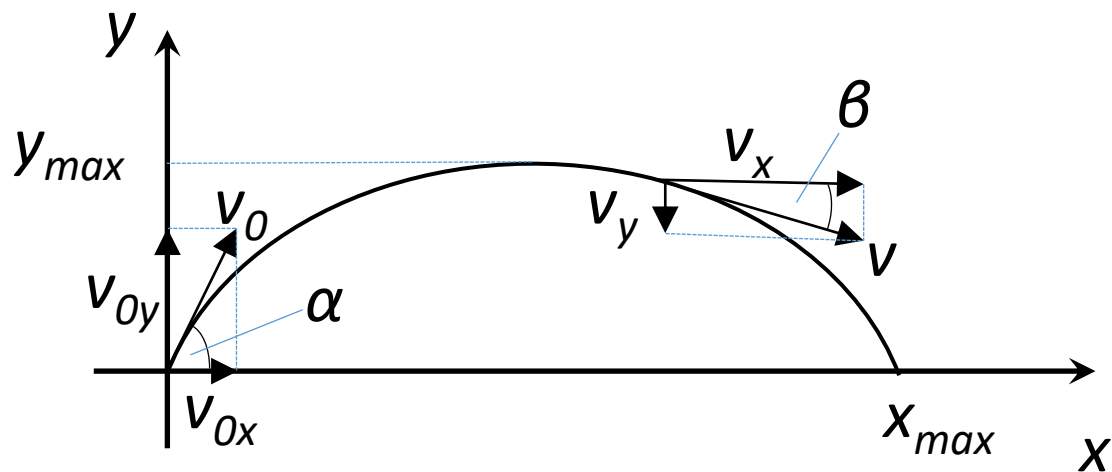
Aktuális sebesség:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Az aktuális helykoordináták:

$$x = v_x t = v_{0x} t \quad y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$$

Ferde hajítás kiszámítása



Pályaalak:

$$x = v_{0x} t \implies t = \frac{x}{v_{0x}} \implies y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

Emelkedés ideje:

$$v_y = 0 \quad 0 = v_{0y} - g t_{em} \implies t_{em} = \frac{v_{0y}}{g}$$

A hajítás távolsága:

$$t_{össz} = 2 t_{em} = 2 \frac{v_{0y}}{g}$$

$$x_{max} = v_{0x} 2 t_{em} = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g}$$

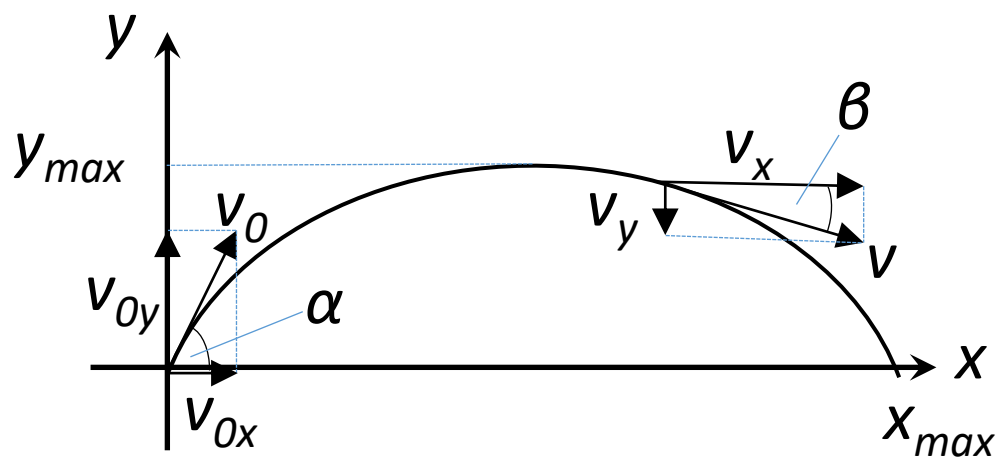
A hajítás magassága:

$$y_{max} = v_{0y} t_{em} - \frac{g}{2} t_{em}^2 = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

A maximális távolság eléréséhez szükséges kezdő-szög:

$$x_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \cos \alpha v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \max \implies \sin 2\alpha = 1 \implies \alpha = 45^\circ$$

Ferde hajítás példa



Milyen hosszan marad súlytalanságban az a repülőgép, amely 720 km/h kezdősebességgel $\theta = 60$ fokos kezdő meredekségű parabolapályát ír le? A gravitációs gyorsulást vegyük a felszínivel megegyezőnek ($9,81 \text{ m/s}^2$). Mekkora a megtett út vízszintes vetülete? Milyen magasra jut a kezdőpozícióhoz képest?

$$t_{\text{össz}} = 2t_{em} = 2 \frac{v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{2 \cdot 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60^\circ}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 35,31 \text{ s}$$

$$x = v_{0x} t = v_0 \cos \theta t = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5 \cdot 35,31 \text{ s} = 3531 \text{ m}$$

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta}{2g} = \frac{\left(200 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,866^2}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1529 \text{ m}$$



Tartalom

- Hajítások
- **Rakétamozgás**
- Bolygó pályák

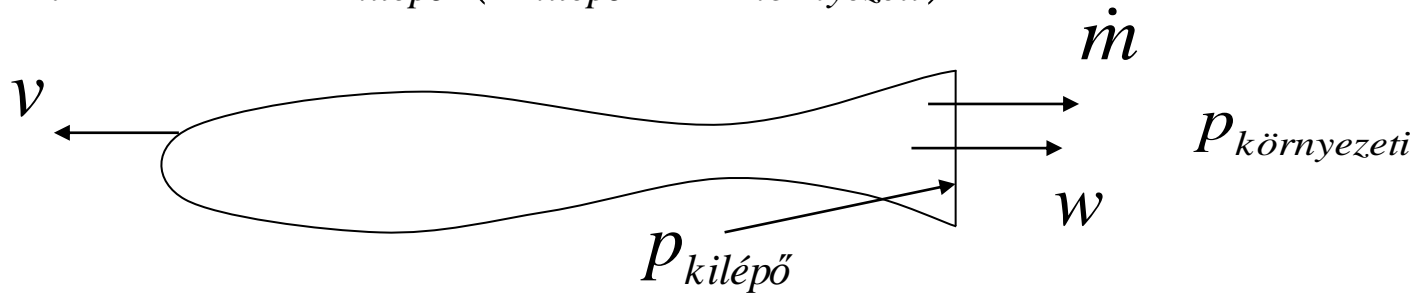
Rakéta mozgás

Környezeti levegőt fel nem használó hajtóművek stacionárius üzemmódban

Tüzelőanyagot és az oxidálószeret is magukkal viszik – 50-100-1000 tonna is lehet, a hasznos tehertől veszik el a helyet.

Tolóerő nem teljes expanzió esetén:

$$F_t = \dot{m}w + A_{kilépő} (p_{kilépő} - p_{környezeti})$$



Tolóerő teljes expanzió esetén:

$$F_t = \dot{m}w \quad \dot{m} : \text{a hajtóműből távozó gáz tömegárama}$$

Lehet nagyobb v w -nél, akkor is megváltozik a jármű mozgási energiája ellentétben a környezeti levegőt felhasználó hajtóművekkel szemben.



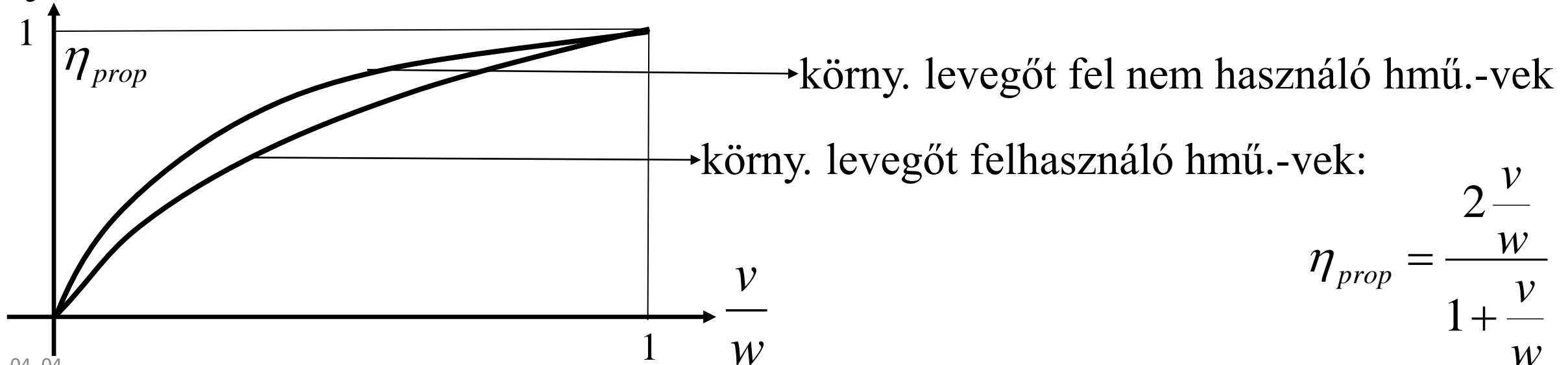
Rakéta mozgás

Környezeti levegőt fel nem használó hajtóművek stacionárius üzemmódban

Propulziós hatásfok teljes expanzió esetén (most $w > v$):

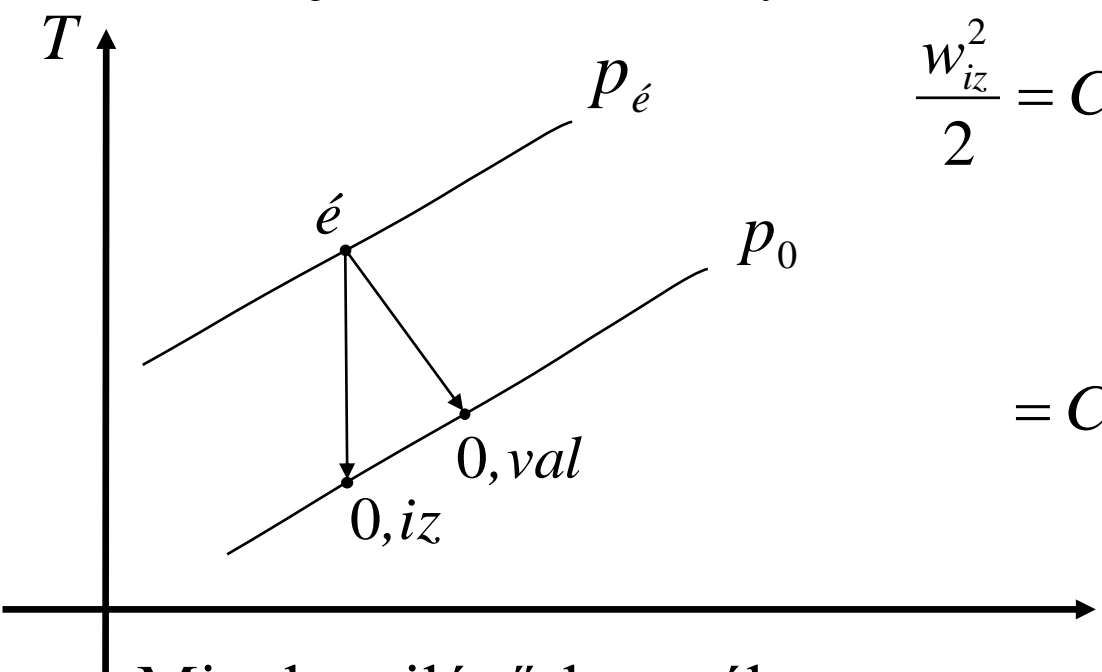
$$\eta_{prop} = \frac{P_{vontatási}}{P_{sugár}} = \frac{\dot{m}wv}{\dot{m}wv + \frac{1}{2}\dot{m}(w-v)^2} = \frac{2wv}{2wv + w^2 - 2wv + v^2} = \frac{2\frac{v}{w}}{1 + \left(\frac{v}{w}\right)^2}$$

Rakétáknál lehet 100 % is, és ekkor is van tolóerő, ellentétben a körny. levegőt használó hajtóművekkel szemben.



Rakéta mozgás

Rakéta hajtómű munkafolyamata T-s diagramban



$$\frac{w_{iz}^2}{2} = C_p (T_é - T_{0,iz}) = C_p T_é \left(1 - \frac{1}{\frac{T_é}{T_{0,iz}}} \right) =$$

$$= C_p T_é \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{p_é}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \right) = C_p T_é \left(1 - \frac{1}{(\pi_{rak})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \right)$$

Mivel a világűrben vákuum van, ezért a π_{rak} 100 ÷ 200 is lehet, illetve legtöbbször nem alakul ki teljes expanzió ($\kappa_{gáz} \approx 1,2$). Termikus hatásfok ideális esetben:

$$\eta_{t,id} = \frac{w_h}{q_{be}} = \frac{w^2/2}{C_p (T_é - T_{0,iz})} = \frac{w^2/2}{C_p T_é} = \left(\approx \frac{w^2/2}{F_{tüz}} \approx \right) 1 - \frac{1}{(\pi_{rak})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \approx 0,6 - 0,7$$

Rakéta mozgás

Az átlagosan 60-70 %-os termikus hatásfok jónak mondható az idáig megismert belső égésű hőerőgépekhez képest.

$$q_{be} = C_p \dot{m}_{lev} \Delta T = B F_{tüz} \eta_{tüz} \longrightarrow C_p (T_e - T_{0,iz}) \approx C_p T_e \approx F_{tüz}$$

(Ideális eset, illetve a tüzelőanyag és oxidálószer együtt lép be az égéstérbe és hagyja el azt. $F_{tüz}$ a tüzelőanyag alsó fűtőértéke, B a tömegárama.)

Termikus hatásfok valóságos esetben: $\eta_{t,val} = \eta_{t,id} \eta_{tüz} \varphi \phi \approx 0,3 - 0,4$

$$\begin{aligned} \text{Tüzelési hatásfok: } & \eta_{tüz} \approx 0,96 - 0,97 \\ \text{Súrlódási veszteség: } & \varphi \approx 0,8 - 0,85 \\ \text{Megszakított expanszió: } & \phi \approx 0,8 - 0,85 \end{aligned}$$

Rakéta mozgás

A tüzelési hatásfok ($\eta_{\text{tüz}}$) okai:

1. 70-80 %-ban tüzelési veszteség (pl. el nem égett tüzelőanyag),
2. 30-20 %-ban hőveszteség.

A súrlódási veszteség (φ) okai:

1. Szilárd hajtóanyagú rakéták: rácsot tesznek a hajtóanyag végére lezárásként, hogy megtartsa a tüzelőanyagot. Ez fojtást jelent illetve örvénylés súrlódás, ütközés és leválás alakul ki.
2. Folyékony hajtóanyagú rakéták: a fúvócsőben örvénylés, súrlódás, ütközés és leválás alakul ki

A megszakított, vagy nem teljes expanzió (ϕ) hatására irreverzibilis, entrópia növekedéssel járó folyamatok jönnek létre a diszkontinuitásokon (pl. lökéshullámokon) keresztüli áthaladás (lefékeződés) következtében.

Rakéta mozgás

Rakéta hajtóműből kiáramló gáz sebességének meghatározása

$$\frac{w^2}{2} = \eta_{t, val} C_p (T_e - T_{0, iz}) \approx \eta_{t, val} C_p T_e \approx \eta_{t, val} F_{tüz} \rightarrow w \approx \sqrt{2\eta_{t, val} F_{tüz}}$$

Folyékony hajtóanyagú rakéták esetén pl. ha $F_{tüz} = 43 \cdot 10^6$ J/kg (tipikus finomított kerozin):

$$w \approx 4000 - 5000 \text{ m/s} \longrightarrow P_{rak} = \dot{m} \frac{w^2}{2} = 1 \frac{4000^2}{2} = 8 \text{ MW} / (\text{kg} / \text{s})$$

Gázturbinás sugárhajtóművek esetén pl.: $P_{gt} = \dot{m} \frac{w^2}{2} = 1 \frac{800^2}{2} = 0,32 \text{ MW} / (\text{kg} / \text{s})$

Szilárd hajtóanyagú rakéták esetén pl. ha $F_{tüz} = 4 \cdot 10^6$ J/kg:

$$w \approx 1400 - 1500 \text{ m/s} \longrightarrow P_{rak} = \dot{m} \frac{w^2}{2} = 1 \frac{1500^2}{2} = 1,1 \text{ MW} / (\text{kg} / \text{s})$$

Rakéta mozgás

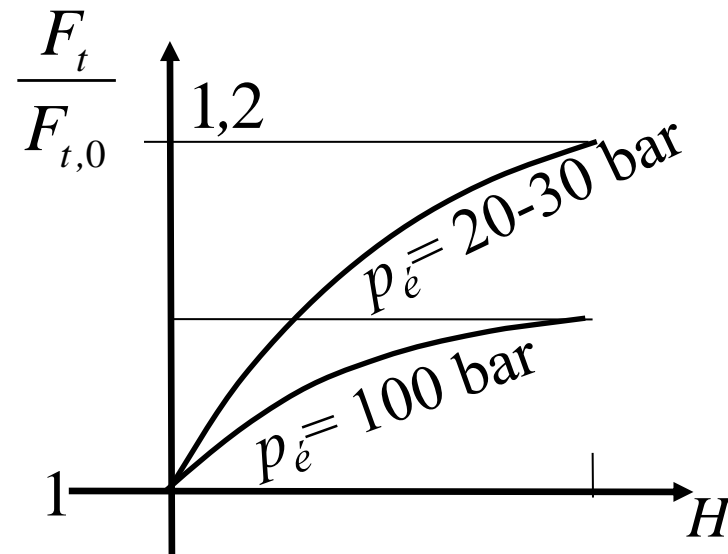
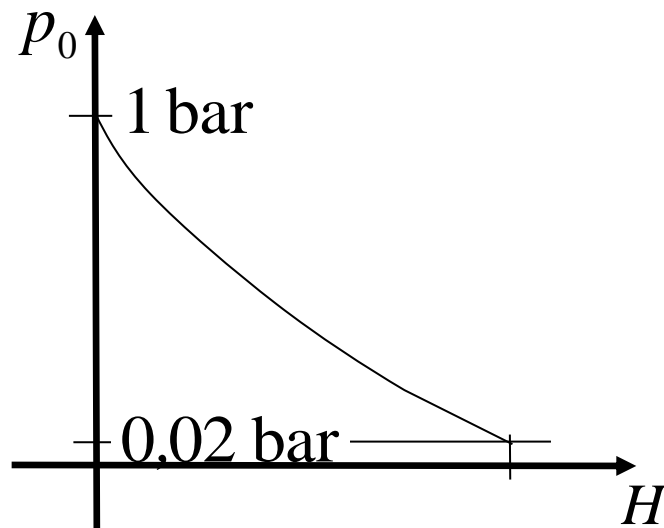
Rakéta hajtómű tolóereje és fajlagos tolóereje

$$F_t = \dot{m}w + A_{kilépő} (p_{kilépő} - p_{környezeti}) = \dot{m}w + A_{kilépő} p_{kilépő}$$

$$F_{t,fajl.} = w + A_{kilépő} / \dot{m} p_{kilépő} \quad \stackrel{=0}{=} \text{a világűrben;}$$

Ha a fajlagos tolóerő nő, akkor a tolóerő is nő ebben az esetben.

Rakéta tolóerejének változása a magasság függvényében: ha $H \uparrow$, akkor $p \downarrow$ és $\pi_{rak} \uparrow$
kb. 10-20 %-kal.



p_e : égésvégi végnyomás

$F_{t,0}$: tolóerő a földön

Ha p_e kisebb, jobban érezhető a változás százalékosan.

Rakéta mozgás

A maximális repülési sebesség meghatározása; Ciolkovszkij (Konstantin E. Tsiolkovsky, orosz rakétakutató, 1857-1935) képletének levezetése

Egyszerűsítő feltételek: nincs az atmoszférának ellenállása, nincs gravitáció és az expanzió légüres térbe történik.

\dot{m} : a hajtóműből távozó gáz tömegárama

A rakéta tolóereje:

$$F_t = \dot{m} F_{t,fajl} = - \frac{dm}{dt} F_{t,fajl}$$

A rakéta mozgásegyenlete (Newton II. törvénye):

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} F_{t,fajl} - \cancel{Mg} - \cancel{F_{légellenállás}}$$

$$M dv = - dm F_{t,fajl} - \cancel{Mg} dt \longrightarrow dv = - \frac{dm}{M} F_{t,fajl} \quad M \text{ a rakéta aktuális tömege}$$

A rakéta maximális repülési sebessége:

$$v_{max} = \int_0^{v_{max}} dv = - F_{t,fajl} \int_{M_{összes}}^{M_{üres}} \frac{dm}{M} = - F_{t,fajl} \ln \frac{M_{üres}}{M_{összes}} = F_{t,fajl} \ln \frac{M_{összes}}{M_{üres}}$$

Rakéta mozgás

A maximális repülési sebesség meghatározása; Ciolkovszkij (Konstantin E. Tsiolkovsky, orosz rakétakutató, 1857-1935) képletének levezetése

Egyszerűsítő feltételek: nincs az atmoszférának ellenállása, nincs gravitáció és az expanzió légüres térbe történik.

\dot{m} : a hajtóműből távozó gáz tömegárama

A rakéta tolóereje:

$$F_t = \dot{m} F_{t,fajl} = - \frac{dm}{dt} F_{t,fajl}$$

A rakéta mozgásegyenlete (Newton II. törvénye):

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} F_{t,fajl} - \cancel{Mg}$$

$$M dv = - dm F_{t,fajl} - \cancel{Mg dt} \longrightarrow dv = - \frac{dm}{M} F_{t,fajl} \quad M \text{ a rakéta aktuális tömege}$$

A rakéta maximális repülési sebessége:

$$v_{max} = \int_0^{v_{max}} dv = - F_{t,fajl} \int_{M_{összes}}^{M_{üres}} \frac{dm}{M} = - F_{t,fajl} \ln \frac{M_{üres}}{M_{összes}} = F_{t,fajl} \ln \frac{M_{összes}}{M_{üres}}$$

Rakéta mozgás

A maximális repülési sebesség meghatározása; Ciolkovszkij (Konstantin E. Tsiolkovsky, orosz rakétakutató, 1857-1935) képletének levezetése

A rakéta maximális repülési sebessége:

$$v_{max} = \int_0^{v_{max}} dv = -F_{t,fajl} \int_{M_{összes}}^{M_{üres}} \frac{dm}{M} = -F_{t,fajl} \ln \frac{M_{üres}}{M_{összes}} = F_{t,fajl} \ln \frac{M_{összes}}{M_{üres}}$$

$$M_{összes} = M_{üres} + M_{tüza} \quad v_{max} = F_{t,fajl} \ln \frac{M_{összes}}{M_{összes} - M_{tüza}} = F_{t,fajl} \ln \frac{1}{1 - \frac{M_{tüza}}{M_{összes}}}$$

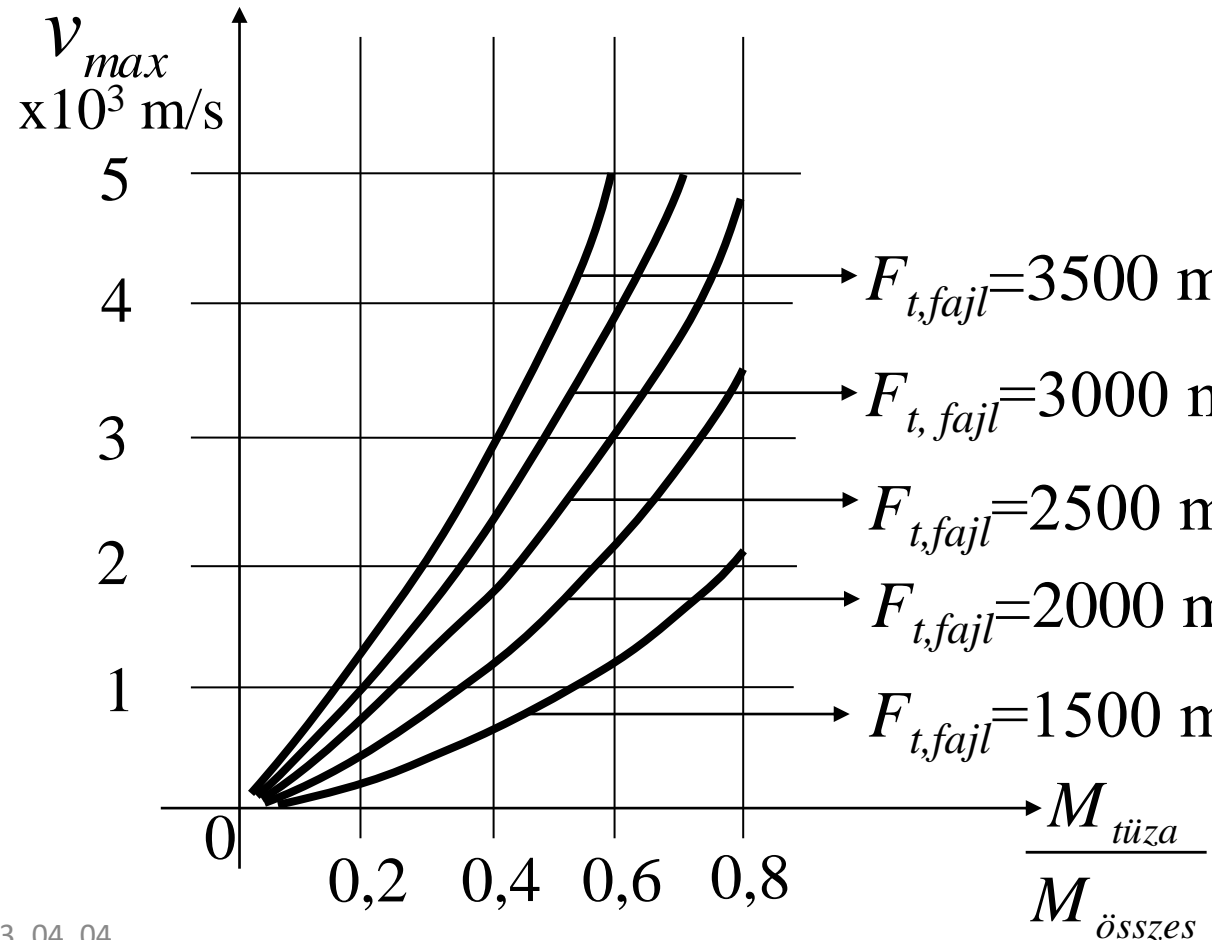
$\frac{M_{tüza}}{M_{összes}} \approx 0,5 - 0,7$ kisebb rakéták, és kb. 0,85 nagyobbak esetén.

Határesetek: $\frac{M_{tüza}}{M_{összes}} = 0 \rightarrow v_{max} = 0$, $\frac{M_{tüza}}{M_{összes}} = 1 \rightarrow v_{max} = \infty$

Többfokozatú rakétáknál a v_{max} -ok összeadódnak. Pl. óriásrakéták 3-4-5 fokozattal is rendelkezhetnek. A v_{max} fokozatosan nő. Például a 3. fokozat 5000 m/s-ra gyorsít, majd leválik és a 4. ennél a sebességnél kezd gyorsítani 7000 m/s-ig.

Rakéta mozgás

A maximális repülési sebesség meghatározása; Ciolkovszkij (Konstantin E. Tsiolkovsky, orosz rakétakutató, 1857-1935) képletének levezetése



$$v_{max} = F_{t,fajl} \ln \frac{1}{1 - \frac{M_{tüza}}{M_{összes}}}$$

$$F_{t,fajl} = 3500 \text{ m/s}$$

$$F_{t,fajl} = 3000 \text{ m/s, pl. folyékony hajtóanyagú rakéta}$$

$$F_{t,fajl} = 2500 \text{ m/s, pl. rakéták nagyobb fűtőértékű tüza.-gal}$$

$$F_{t,fajl} = 2000 \text{ m/s}$$

$$F_{t,fajl} = 1500 \text{ m/s, pl. szilárd hajtóanyagú rakéta}$$

Rakéta mozgás

A maximális repülési sebesség meghatározása; Ciolkovszkij (Konstantin E. Tsiolkovsky, orosz rakétakutató, 1857-1935) képletének levezetése

$$v_{max} = F_{t,fajl} \ln \frac{M_{összes}}{M_{összes} - M_{tüze}} = F_{t,fajl} \ln \frac{M_{összes}}{M_{összes} - t \dot{m}}$$

A maximális repülési sebesség eléréséhez szükséges t idő:

$$t = \frac{M_{összes}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{1}{e^{\left(\frac{v_{max}}{F_{t,fajl}} \right)}} \right) \quad \dot{m} : \text{ a hajtóműből távozó gáz tömegárama}$$

Az adott feltételek (pl. t , \dot{m}) melletti szükséges összes tüzelőanyag-tömeg szintén meghatározható.

Rakéta mozgás

Űrhajók mozgása a Naprendszerben – gravitációs katapult: hintamanőver

Ahogy az űrhajók a külső bolygók felé utaznak, sebességük jelentősen csökken, mivel a Nap közelségéből kilépve annak erős gravitációs mezeje ellenében haladnak. Ez olyan, mintha egy folyóban próbálnának felfelé úszni. Néhány ok, amiért egy űrhajónak gyorsulnia kell a küldetés teljes röppályája alatt, a következő:

- a Naprendszer külső bolygóinak ésszerű időn belüli elérése, amelyben a küldetés céljai továbbra is értelmesek maradnának, és nem járnának le,
- egy távoli bolygó pályájára való belépéshez az űreszköznek meg kellene felelnie a szükséges keringési sebességnek.

A rakétahajtóművek valóban nagyszerű energiaforrást jelentenek, amely lehetővé teszi az űrhajók gyorsítását és lassítását. Az űrmissziókat azonban a lehető legszűkebb hajtóanyagköltségvetéssel kell megtervezni, mivel a pályamanőverekhez szükséges üzemanyagtömeg bármilyen növekedése jelentősen nagyobb hajtóanyagigényt igényel a Föld gravitációjából való kilépéshez.

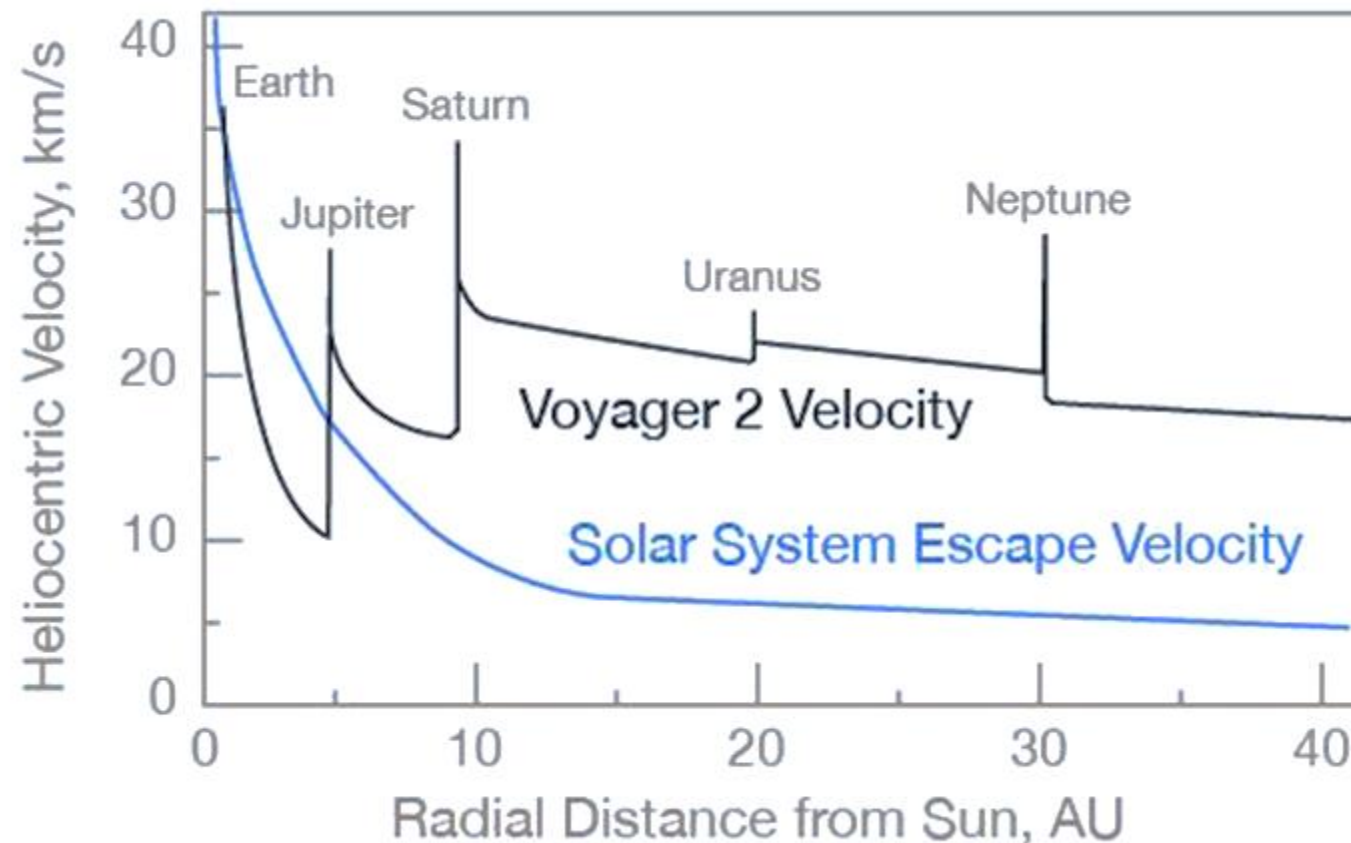
Rakéta mozgás

Űrhajók mozgása a Naprendszerben – gravitációs katapult: hintamanőver

Az előzőekből adódóan, a hintamanőver alapvető fontosságú az új bolygóközi küldetések kifejlesztésénél. A cél az, hogy optimalizálják a Földről a külső bolygókra való utazást anélkül, hogy jelentős mennyiségű hajtóanyagot és időt kellene ráfordítani. Ezt úgy érték el, hogy a megközelített bolygók gravitációs mezőinek előnyeit kihasználva, azokat csúzliként használva „katapultálódtak” volna, néha több mint kétszeresére növelve a kezdeti sebességüket egy-egy bolygóhoz való elrepülés után. A következő oldali ábra a Voyager 2 héliocentrikus sebességének hivatalos ábráját mutatja a Naptól való távolság függvényében, szemléltetve a gravitációs katapult felhasználását az űrszonda felgyorsítására több bolygó esetén, például a Jupiter, a Szaturnusz és az Uránusz melletti elrepülésekor. Látható, hogy az űreszköz a Jupiterhez 10 km/s körüli sebességgel ér el, és az elrepülés után 20 km/s fölött áll.

Rakéta mozgás

Űrhajók mozgása a Naprendszerben – gravitációs katapult: hintamanőver

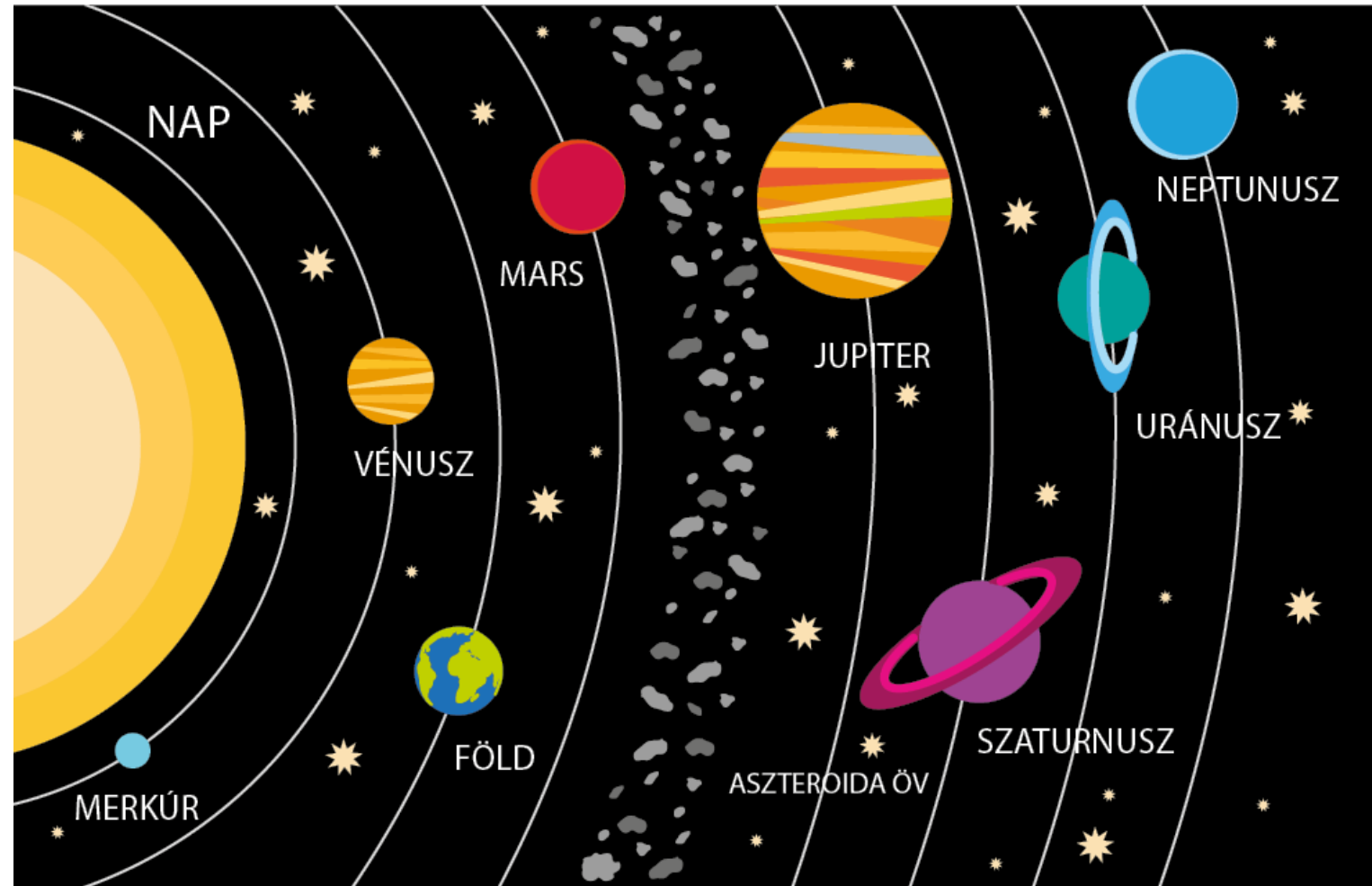


Tartalom

- Hajítások
- Rakétamozgás
- Bolygó pályák

Bolygó pályák

A Naprendszer bolygói



Bolygó pályák

A bolygók mozgására a gravitáció jelentős hatást gyakorol

Newton II. törvénye: $F = m \cdot a = m \cdot g$,

Newton gravitációs törvénye: $F = m \cdot \frac{G \cdot M}{r^2}$,

az előzőekből: $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$

Ahol:

A gravitációs gyorsulás: g

Bolygó tömege: M

Gravitációs állandó: G

A bolygó tömegközéppontjának és a vizsgált pontnak a távolsága: r

Például a Föld felszínén:

$$G = 6.67384 \times 10^{-11} \quad [m^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}]$$

$$m_{\text{Föld}} = 5.97 \times 10^{24} \quad [kg]$$

$$r_{\text{Föld sugara}} = 6378 \times 10^3 \quad [m]$$

$$g = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \times 10^{24}}{(6378 \times 10^3)^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Bolygó pályák

Szabadesés a gravitációs erőter hatására

$$v_y = v_{0y} - g t \quad y_{vég} = y_{kezdeti} + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$$

Példa:

$$\begin{aligned} y_{vég} &= 0 \quad [m] \\ y_{kezdeti} &= 50 \quad [m] \\ v_0 &= 0 \quad [m/s] \end{aligned}$$

$$t = \sqrt{\frac{-50 \cdot 2}{-g}}$$

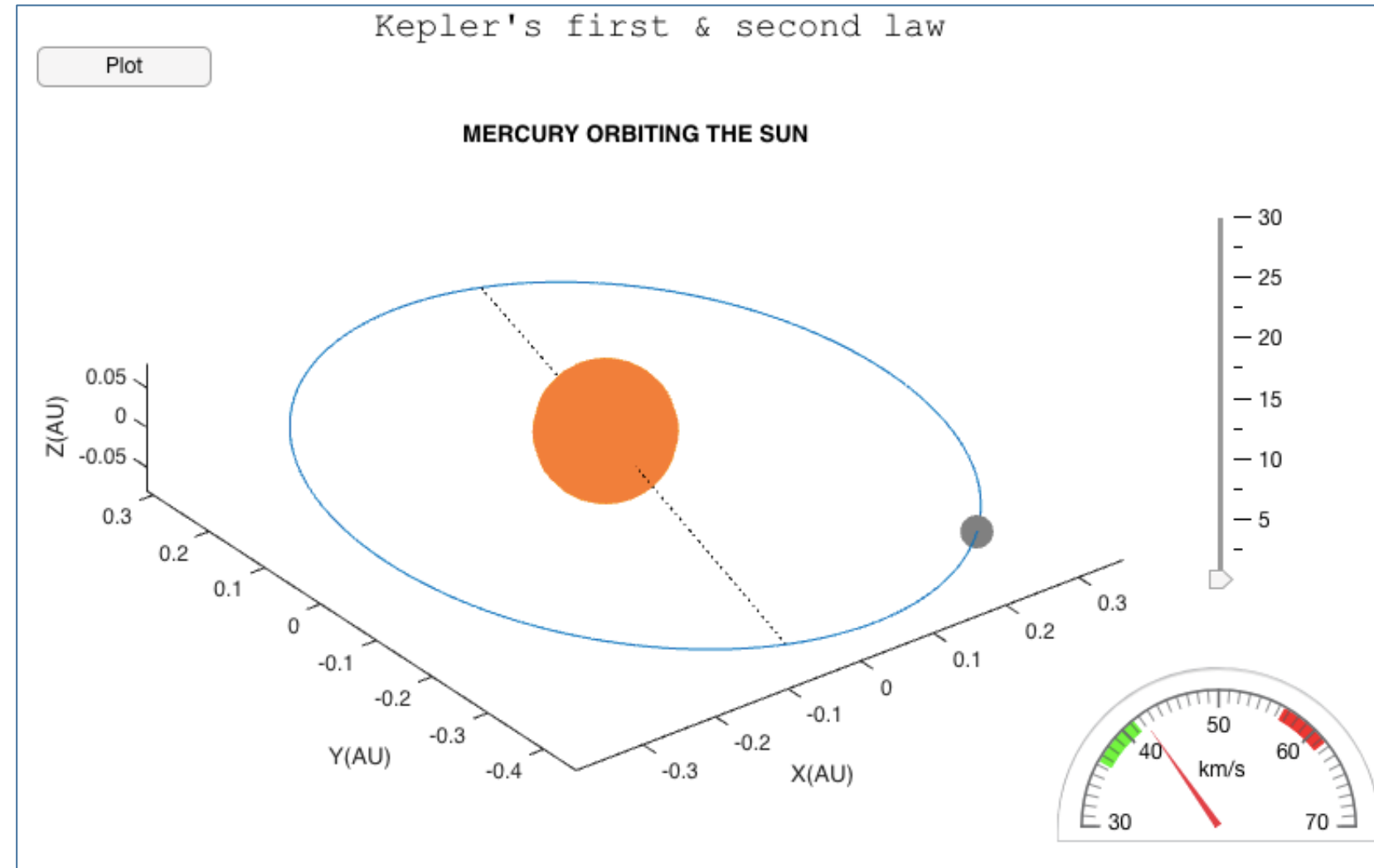
$$\begin{aligned} g_{Merkur} &= 3.7 \quad [m/s^2] \\ g_{Föld} &= 9.8 \quad [m/s^2] \\ g_{Jupiter} &= 24.8 \quad [m/s^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{Merkur} &= 5.2 \text{ s} \\ t_{Föld} &= 3.2 \text{ s} \\ t_{Jupiter} &= 2.1 \text{ s} \end{aligned}$$

Bolygó pályák

Kepler első törvénye

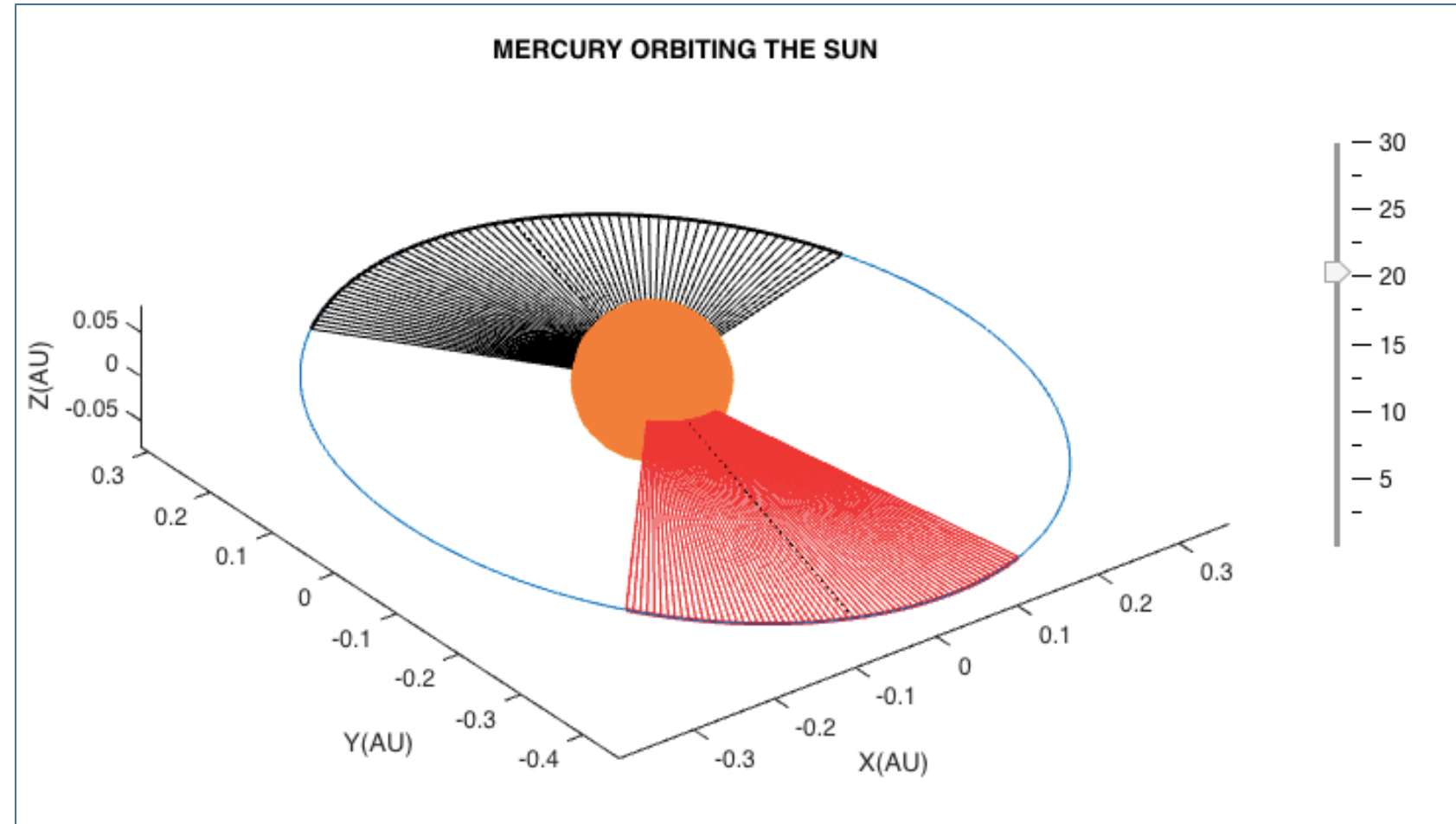
Kepler első törvénye kimondja, hogy a bolygók ellipszis alakú pályán keringenek a Nap körül. A Nap ennek az ellipszisnek az egyik fókuszában helyezkedik el, ezért a bolygó-Nap távolsága az ellipszispályán keresztül folyamatosan változik.



Bolygó pályák

Kepler második törvénye

Kepler második törvénye kimondja, hogy a Nap és a bolygó közötti vonal egyenlő idő alatt egyenlő területeket söpör végig, így a bolygó keringési sebessége nem marad állandó a pályája során, hanem valójában fordítottan változik a Naptól való távolsággal. Ezért egy bolygó akkor éri el a legnagyobb sebességét, amikor a legközelebb van a Naphoz (perihélium vagy periapszis), és akkor a legkisebb sebességét, amikor a legtávolabb van a Naptól (aphélium vagy apoapszis).

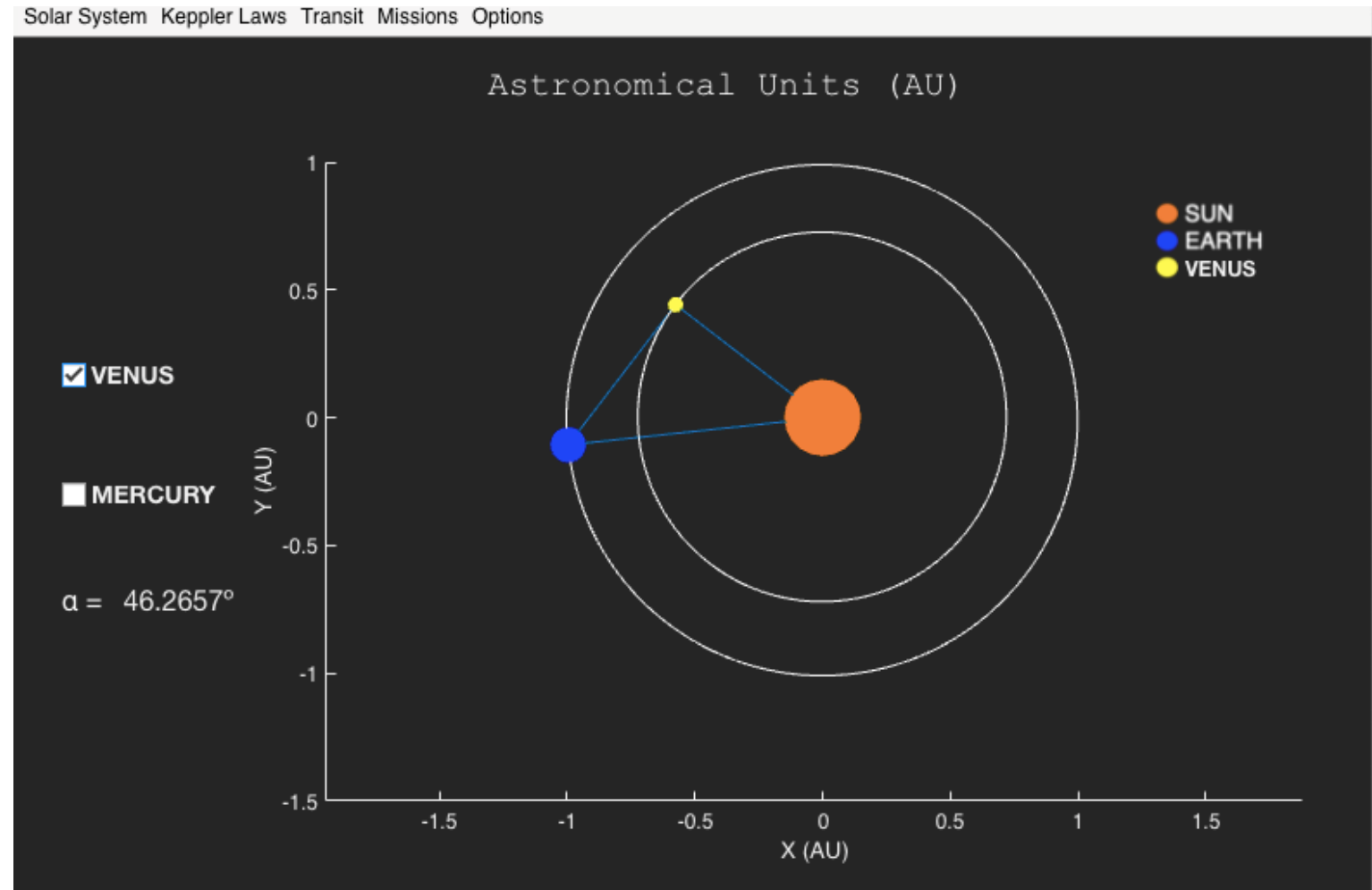


Bolygó pályák

A Csillagászati egység

A csillagászati egység (CsE, Astronomical Unit, AU) egy hosszúsági egység, amely nagyjából megegyezik a Föld-Nap távolsággal ($1,495978707 \times 10^{11}$ m).

Elsősorban a Naprendszerbeli távolságok mérésére használják. Ezért a belső bolygók (azaz a Nap és a Föld közötti pályán keringő bolygók) átlagos keringési sugara $r < 1$ AU, a külső bolygóké pedig > 1 AU.



Bolygó pályák

Kepler harmadik törvénye

Kepler alkotta meg a bolygómozgás harmadik törvényét (vagy harmonikus törvényét), amely jól szemléltette a kapcsolatot a bolygó pályájának teljesítéséhez szükséges idő és a bolygó Naphoz viszonyított távolsága között. Konkrétan a harmonikus törvény kimondta, hogy egy bolygó keringési idejének négyzete (T^2) arányos az ellipszis alakú pálya fél nagytengelyének hosszával (a^3). Ez a csillagászati mechanikában korszakalkotó áttörést jelentett, mivel lehetővé tette a tudósok számára, hogy a Naprendszer legtávolabbi bolygóiról is kiszámítsák a keringési periódusokat, ha ismert volt azok Naphoz viszonyított távolsága.

Ha bármely keringő testre $T^2/a^3 = K$, akkor mivel a Föld és a Merkúr is a Nap körül kering, a következő kifejezés írható fel (A számítások megkönnyítése érdekében ajánlott időegységként az éveket (365,2 nap), hosszegységként pedig az AU-t (149 597 871) használni).

$$\frac{T_{\{Föld\}}^2}{a_{\{Föld\}}^3} = \frac{T_{\{Merkur\}}^2}{a_{\{Merkur\}}^3} \quad \frac{1^2}{1^3} \cdot (0.39)^3 = T_{\{Merkur\}}^2 \quad T_{\{Merkur\}} = 0.244 \text{ év} = 88.9 \text{ nap}$$

Bolygó pályák

Kepler harmadik törvénye érdekes, hogy bármilyen átmeneti pályára is igaz lesz! Ha pl. egy Hohmann pályán a Földről a Marsra megyünk (a bolygók hatássféráján kívül, a Nap vonzása alatt):

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{(149,6 + 227,9) \cdot 10^6 \text{ km}}{2} = 188,75 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Keringési ideje (a Nap gravitációs mutatója $\mu_{\text{Nap}} = 1,327 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$, a repülési idő ennek a fele, mert az ellipszis felét futja be a transzfer alatt az űreszköz):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\text{Nap}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{6,725 \cdot 10^{24}}{1,327 \cdot 10^{11}}} = 44\,727\,523 \text{ s} = 517,68 \text{ nap}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{517,68^2}{188,75^3} = \frac{267992}{6724514} = 0,03985$$

$$\frac{T_{\text{Föld}}^2}{a_{\text{Föld}}^3} = \frac{365,24^2}{149,59^3} = \frac{133400}{3347401} = 0,03985$$

Bolygó pályák

Égitestek elhaladása egymás előtt (Tranzit)

Az űrkutatásban alapvető fontosságú az olyan fogalmak megértése, mint a takarások, az átvonulások vagy a fogyatkozások. A Naprendszer-megfigyelések egy vagy több égitestet érintő rendkívüli eseményekre összpontosítanak, hogy többet tudjanak meg azok fizikai tulajdonságairól.

- A **takarás (occultation)** akkor következnek be, amikor egy égitestet egy másik égitest elrejt, amely az első és a megfigyelő között halad el.
- **Áthaladás (tranzit)** akkor fordulnak elő, amikor a megfigyelőhöz legközelebbi égitest nem takarja el teljesen a legtávolabbi égitestet.
- A **napfogyatkozások (eclipses)** azokat a fedéseket jelentik, amelyek során a megfigyelőre árnyék vetül.

Pályák – példák 1.

Egy űrobjektum keringési ideje körpályán $\tau = 96 \text{ min}$. Mennyi a pálya h magassága és a v sebesség? A Föld átlagos sugara $R = 6371 \text{ km}$, a gravitációs mutatója pedig $\mu = 398601 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$.

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \rightarrow a^3 = \frac{\mu \tau^2}{4\pi^2} = \frac{398601 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \cdot (5760\text{s})^2}{39,48} = 3,3498 \cdot 10^{11} \text{km}^3 \rightarrow a = 6945 \text{km}$$

$$h = a - R = 6945 \text{km} - 6371 \text{km} = 574 \text{km}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{398601 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}}{6945 \text{km}}} = 7,576 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Pályák – példák 2.

Egy űreszközt az egyenlítői síkban Föld közeli, $P_e = 300$ km magasságú pályáról geostacionárius, $A_p = 35786$ km magasságú pontba küldjük. Mennyi lesz a sebessége, amikor a valódi anomália $\nu = 90^\circ$? A Föld egyenlítői sugara 6378 km, a gravitációs mutatója 398601 km^3/s^2 .

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{(35786 + 6378) + (300 + 6378)}{2} \text{ km} = 24421 \text{ km}$$

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{P_e + R}{a} = 1 - \frac{300 + 6378}{24421} = 0,72655$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} = \frac{24421 \text{ km}(1 - 0,727^2)}{1} = 11529,9 \text{ km}$$

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{398601 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \left(\frac{2}{11529,9 \text{ km}} - \frac{1}{24421 \text{ km}} \right)} = 7,2677 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Pályák – példák 3.

Egy tipikus Molnyija-pálya apogeuma 40000 km, perigeuma 500 km magasságban van. Hány műholdra van szükség a teljes lefedettséghez, ha azokat a $\nu_1 = 169,8^\circ$ és a $\nu_2 = 190,2^\circ$ valódi anomáliák között tudjuk használni? A Föld átlagos sugara 6371 km, a gravitációs mutató $398601 \frac{km^3}{s^2}$. (Vegyük észre, hogy a két megadott szögérték 180° -ra szimmetrikus.)

Határozzuk meg először az excentricitást:

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{6871km}{26621km} = 0,7419$$

Utána kalkuláljuk az excentrikus anomáliát:

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}$$

$$\cos E_1 = \frac{e + \cos \nu_1}{1 + e \cos \nu_1} = \frac{0,7419 + (-0,9842)}{1 + 0,7419(-0,9842)} = \frac{-0,2423}{0,2698} = -0,898 \rightarrow \begin{matrix} E_1 = 153,9^\circ \\ E_2 = 206,1^\circ \end{matrix}$$

Pályák – példák 3.

Ezt követően számoljuk ki a közepes anomáliát a két szélső pontban:

$$M = E - e \sin E \rightarrow \begin{cases} M_1 = E_1 - e \sin E_1 = 2,686 - 0,7419 \cdot 0,4399 = 135,2^\circ \\ M_2 = E_2 - e \sin E_2 = 3,597 + 0,7419 \cdot 0,4399 = 224,8^\circ \end{cases}$$

Definíció szerint a közepes anomália a közepes szögsebességből számítható a T periódusidő, a τ pericentrumbeli idő és a t tetszőleges idő alapján (τ -t vegyük zérusnak):

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - \tau) \rightarrow t = T \frac{M}{2\pi}; \Delta t = T \frac{\Delta M}{2\pi}$$

Ehhez először a periódusidőre lesz szükség:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{(26621 \text{ km})^3}{398601 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}}} = 43200 \text{ s} = 12 \text{ h}$$

Ez alapján tehát egy műhold tartózkodási ideje: $\Delta t = T \frac{\Delta M}{2\pi} = 12 \text{ h} \frac{0,5\pi}{2\pi} = 3 \text{ h}$, vagyis 4 műhold kell!