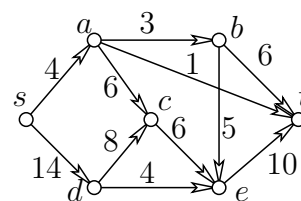
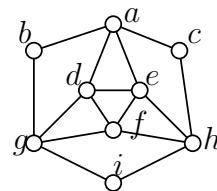


A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának idopontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

- Van-e az ábrán látható gráfnak Euler ill. Hamilton köre? Ha van, mi abban a csúcsok sorrendje?
- Az ábrán látható gráfon a Dijkstra algoritmus segítségével állapítsuk meg a legrövidebb  $st$ -út hosszát, valamint határozzuk meg, milyen sorrendben határozza meg az algoritmus a  $dist(s, v)$  távolságokat (azaz milyen sorrendben kerülnek véglegesítésre a csúcsok  $s$ -től mért távolságai).
- Bizonyítsuk be, hogy a fenti ábrán látható hálózatban a maximális folyam nagyság (folyamérték) pontosan 14. Elérhető-e két él kapacitásának alkalmas megnövelésével, hogy a maximális folyam nagyság pontosan 16 legyen?
- Egy  $G$  páros gráfot akkor nevezünk *kiegyensúlyozottnak*, ha  $G$  csúcsainak bármely 2 színnel történő kiszínezésekor a két színosztály mérete megegyezik. Igazoljuk, hogy  $r \geq 1$  esetén ha egy  $G$  páros gráf  $r$ -reguláris (azaz  $G$  minden csúcsának foka  $r$ ), akkor  $G$  kiegyensúlyozott.
- Jelölje  $n \geq 3$  esetén  $C'_n$  azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy  $C_n$ -hez hozzávesszük az egymással nem szomszédos  $x$  és  $y$  pontokat, amelyeket összekötünk  $C_n$  minden csúcsával. Határozzuk meg  $C'_n$  kromatikus számát,  $\chi(C'_n)$ -et minden  $n \geq 3$  esetén.
- Jelölje  $n \geq 2$  esetén  $G_n$  az a gráfot, amit  $C_{2n}$ -ből úgy kapunk, hogy annak minden csúcsát éllel összekötjük a vele átellenes csúccsal (ami tehát tőle legtávolabb van a körön). Síkbarajzolható-e a  $G_n$  gráf?



*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404;27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Pácsonyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

# A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2011.11.29.)

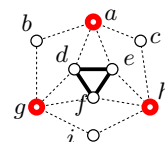
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésén az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e az ábrán látható gráfnak Euler ill. Hamilton köre? Ha van, mi abban a csúcsok sorrendje?

Létezik Euler kör, pl  $bgihcadfedgfheab$ . (4 pont)

Ha a gráfon az ábrán látható  $a, g, h$  csúcsokat töröljük, akkor 4 komponensű gráfot kapunk. (3 pont)



Márpedig ha létezne Hamilton kör, akkor 3 csúcs törlés után legfeljebb 3 komponens keletkezhetne a Hamilton kör létezésére tanult szükséges feltétel miatt. (2 pont)

Az ábrán látható gráfnak tehát nincs Hamilton köre. (1 pont)

2. Az ábrán látható gráfon a Dijkstra algoritmus segítségével állapítsuk meg a legrövidebb  $st$ -út hosszát, valamint határozzuk meg, milyen sorrendben határozza meg az algoritmus a  $dist(s, v)$  távolságokat (azaz milyen sorrendben kerülnek véglegesítésre a csúcsok  $s$ -től mért távolságai).

Azt kell meghatározni, hogy milyen sorrendben kerülnek a be a gráf csúcsai abba az  $U$  halmazba, ami azokat a csúcsokat tartalmazza, ahova a legrövidebb utakat már ismerjük. Természetesen az első csúcs maga  $s$  lesz. (1 pont)

Az algoritmus kezdetén felírjuk minden egyes csúcsra az  $s$ -ből oda vezető él hossza alapján adódó felső becslést az adott csúcs távolságára, így a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	$\infty$	$\infty$	14	$\infty$	$\infty$

táblázatot kapjuk. (1 pont)

A második csúcs tehát  $a$  lesz, innen javítunk a következő csúcs választása előtt. (1 pont)

Ezután az  $ab$ ,  $ac$  és  $at$  éleken javítva adódik a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	7	10	14	$\infty$	5

táblázat, így a harmadik csúcs a  $t$  lesz. (2 pont)

$t$ -ből nem javítunk, a negyedik csúcs tehát  $b$ . (1 pont)

A  $be$  élen javítva a

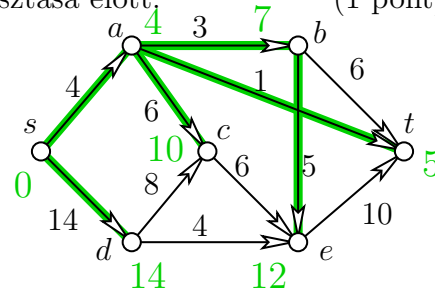
s	a	b	c	d	e	t
0	4	7	10	14	12	5

táblázatot kapjuk, így az ötödik csúcs  $c$  lesz. (1 pont)

A  $ce$  élen nincs javulás, a hatodik csúcs tehát  $e$  lesz, (1 pont)

$e$ -ből nem kell javítani, így a utolsónak bevett csúcs a  $d$ . (1 pont)

A végső sorrend tehát  $s, a, t, b, c, e, d$ , az  $s$  és  $t$  távolsága pedig 5. (1 pont)



3. Bizonyítsuk be, hogy a fenti ábrán látható hálózatban a maximális folyamagnagyság (folyamérték) pontosan 14. Elérhető-e két él kapacitásának alkalmas megnövelésével, hogy a maximális folyamagnagyság pontosan 16 legyen?

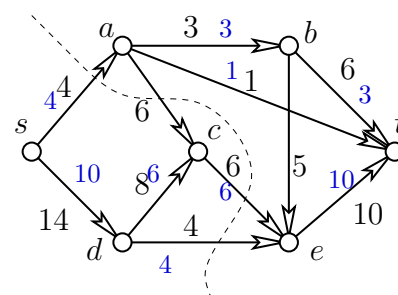
Az ábrán kisebb számokkal egy 14 nagyságú folyamot (2 pont)

és egy 14 kapacitású  $st$ -vágást meghatározó ponthalmaszt jelöltünk. (2 pont)

Ezért a megadott hálózatban a maximális folyamagnagyság valóban 14. (1 pont)

Ha azonban a  $de$  és  $et$  élek kapacitását legalább 2-vel növeljük, akkor az  $sdet$  úton tudunk további 2 egységnyi folyamot küldeni, (3 pont)

és a jelölt vágás kapacitása is 16-ra változik. (1 pont)



Ezért a feladat második kérdésére igen a válasz: két él kapacitásának növelésével elérhető, hogy a maximális folyam nagyság pontosan 16 legyen. (1 pont)

4. Egy  $G$  páros gráfot akkor nevezünk *kiegyensúlyozottnak*, ha  $G$  csúcsainak bármely 2 színnel történő kiszínezésekor a két színosztály mérete megegyezik. Igazoljuk, hogy  $r \geq 1$  esetén ha egy  $G$  páros gráf  $r$ -reguláris (azaz  $G$  minden csúcsának foka  $r$ ), akkor  $G$  kiegyensúlyozott.

Legyenek  $A$  és  $B$  a  $G$  színosztályai a  $G$  egy két színnel történő színezése esetén. Azt kell megmutatnunk, hogy  $|A| = |B|$ . (2 pont)

Mivel  $G$  minden élének egyik végpontja  $A$ -ban, a másik pedig  $B$ -ben van, ezért  $G$  éleinek számát megkaphatjuk úgy is, mint az  $A$ -beli csúcsok fokszámösszegét, de úgy is, hogy a  $B$ -beli pontok fokszámait adjuk össze. (4 pont)

Mivel minden fokszám  $r$ , ezért  $r \cdot |A| = |E| = r \cdot |B|$  adódik, (3 pont)

ahonnan  $r \geq 1$  miatt ebből  $|A| = |B|$  következik, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

Ha a gyakorlaton szerepelt, hogy  $r$ -reguláris páros gráfnak van teljes párosítása ( $r > 0$  esetén), akkor teljes megoldás az is, ha valaki innen vezeti le a kiegyensúlyozottságot.

5. Jelölje  $n \geq 3$  esetén  $C'_n$  azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy  $C_n$ -hez hozzávesszük az egymással nem szomszédos  $x$  és  $y$  pontokat, amelyeket összekötünk  $C_n$  minden csúcsával. Határozzuk meg  $C'_n$  kromatikus számát,  $\chi(C'_n)$ -et minden  $n \geq 3$  esetén.

Tekintsük  $C'_n$  egy színezését. Ebben az  $x$  csúcs színét nem kaphatja meg  $C_n$  egyetlen pontja sem, ezért  $C'_n$  színezéséhez legalább eggyel több színre van szükség, mint  $C_n$  színezéséhez. (3 pont)

Másrészt ha  $C_n$ -t kiszíneztük néhány színnel, akkor  $x$ -t és  $y$ -t egy újabb színnel színezve a  $C'_n$  egy jó színezését kapjuk. (2 pont)

Ezek szerint  $\chi(C'_n) = \chi(C_n) + 1$ . (1 pont)

Az órán olyat tanítottak, hogy  $\chi(C_n)$  attól függően 2 ill. 3, hogy  $n$  páros avagy páratlan-e. (2 pont)

Ezek szerint  $\chi(C'_n)$  páros  $n$ -re 3, páratlanra pedig 4. (2 pont)

6. Jelölje  $n \geq 2$  esetén  $G_n$  az a gráfot, amit  $C_{2n}$ -ből úgy kapunk, hogy annak minden csúcsát éllel összekötjük a vele átellenes csúccsal (ami tehát tőle legtávolabb van a körön). Síkbarajzolható-e a  $G_n$  gráf?

Ha  $n = 2$ , akkor  $G_n = K_4$ , ami síkbarajzolható. (2 pont)

Ha azonban  $n \geq 3$ , akkor  $G_n$  már nem síkbarajzolható, mert tartalmaz  $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot, és ehhez elég, ha csupán három átellenes csúcspárt összekötő átló van behúzva. A részgráf az ábrán látható, kiskocka jelöli a házakat, petty a kutakat. (7 pont)

A válasz tehát, hogy  $G_n$  kizárólag  $n = 2$  esetén síkbarajzolható. (1 pont)

Érdekes megfigyelni, hogy  $G_3 = K_{3,3}$ . Aki csak ennyit tesz, az kapjon 5 pontot.

