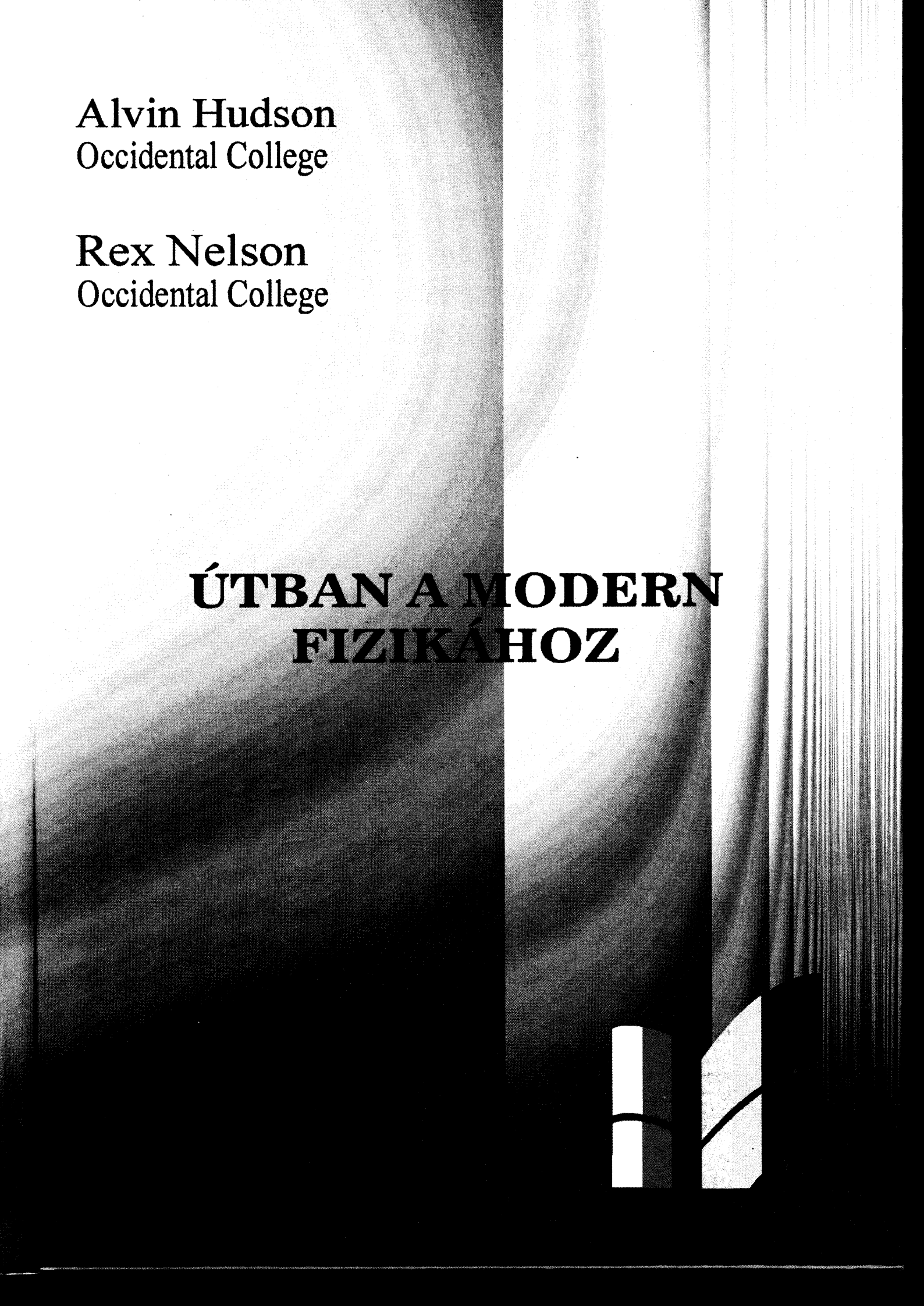
Alvin Hudson
Occidental College

Rex Nelson
Occidental College

ÚTBAN A MODERN FIZIKÁHOZ



TARTALOM

I. FEJEZET
BEVEZETÉS 1
1.1 A fizika 1
1.2 A fizika tárgya 1
1.3 Elmélet és megfigyelés 3
1.4 Miért szükséges a matematika? 4
1.5 Hogyan használjuk ezt a könyvet? 5
II. FEJEZET
EGYENESVONALÚ MOZGÁSOK 7
2.1 Bevezetés 7
2.2 Tér és idő mérése 7
2.3 Mértékegységek átszámítása 11
2.4 Koordinátarendszerek és vonatkoztatási rendszerek 13
2.5 Hely, elmozdulás, sebesség és sebességvektor 14
2.6 A gyorsulás 19
2.7 Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikai egyenletei 20
2.8 A kinematikai egyenletek levezetése differenciálszámítással 24
2.9 Az elmozdulás, sebesség és gyorsulás közötti összefüggés grafikus értelmezése 28
2.10 A dimenzióanalízis 28
2.11 Példák – magyarázattal 29
III. FEJEZET
SÍKBELI ÉS TÉRBELI MOZGÁS
3.1 Bevezetés 41
3.2 Kétdimenziós koordinátarendszerek és a helyzetvektor 41
3.3 A Δr elmozdulásvektor 43
3.4 Vektorok összeadása és kivonása 44
3.5 Térbeli vektorok 48
3.6 A sík- és térbeli mozgás sebessége és gyorsulása 50
3.7 Hajítások 54
IV. FEJEZET
KÖRMOZGÁS 65
4.1 Bevezetés 65
4.2 Síkbeli polárkoordináták 65
4.3 A körmozgás sebessége és gyorsulása 66
4.4 Általános görbe vonalú mozgás 70
V. FEJEZET
A NEWTON-FÉLE MOZGÁSTÖRVÉNYEK 75
5.1 Bevezetés 75
5.2 Megfigyelések és kísérletek a pontszerű részecskék mozgására vonatkozóan 76
5.3 A kísérleti eredmények elemzése 80
5.4 Az impulzus 82
5.5. Newton második törvénye 83
5.6 Tömeg és súly 84
5.7 Newton második törvényének alkalmazása 86
5.8 Húzó- és nyomóerő 89
5.9 Súrlódás 93
5.10 Newton harmadik törvénye 99
Távlatok 115
VI. FEJEZET
MUNKA, ENERGIA, TELJESÍTMÉNY 117
6.1 Bevezetés 117
6.2 A munka 118

6.3 Változó erő munkája ... 122
6.4 A kinetikus energia és a munkatétel ... 126
6.5 A helyzeti (potenciális) energia ... 132
6.6 A súrlódási erő és a súrlódási hő ... 134
6.7 A munkatétel átfogalmazása ... 136
6.8 Belső energiaforrások ... 140
6.9 A teljesítmény ... 142
6.10 A hatásfok ... 144
6.11 Erőátvitel ... 147

VII. FEJEZET
KONZERVATÍV ERŐK ÉS AZ ENERGIAMEGMARADÁS ... 159
7.1 Bevezetés ... 159
7.2 Konzervatív erők ... 160
7.3 Nem-konzervatív erők ... 162
7.4 Konzervatív erők és a potenciális energia ... 162
7.5 A mechanikai energia megmaradása ... 164
7.6 Energiadiagramok ... 169
7.7 Az energiamegmaradás súrlódásos rendszerekben ... 173

VIII. FEJEZET
AZ IMPULZUSMEGMARADÁS ... 183
8.1 Bevezetés ... 183
8.2 Az impulusmegmaradás ... 183
8.3 Az erőimpulzus ... 188
8.4 Folytonosan változó impulzus ... 190
8.5 A rakétamozgás ... 193

IX. FEJEZET
ÜTKÖZÉSEK ... 203
9.1 Bevezetés ... 203
9.2 Rugalmas és rugalmatlan ütközések ... 204
9.3 A tömegközéppont és a tömegközéppont tétel ... 209
9.4 A relatív sebességek meghatározása geometriai módszerrel ... 212
9.5 Pontrendszer impulzusa és mozgási energiája ... 215
9.6 Ütközések leírása tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben ... 218
Távlatok ... 228

X. FEJEZET
FORGATÓNYOMATÉK ÉS FORGÁSI EGYENSÚLY ... 229
10.1 Bevezetés ... 229
10.2 A forgatónyomaték ... 230
10.3 A forgatónyomaték-vektor ... 232
10.4 A súlypont és a tömegközéppont ... 235
10.5 Egyensúly ... 241
10.6 Merev testek statikai egyensúlyban ... 242

XI. FEJEZET
A MEREV TEST FORGÓ MOZGÁSÁNAK KINEMATIKÁJA ... 257
11.1 Bevezetés ... 257
11.2 A forgás kinematikai leírása ... 257
11.3 A forgó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések ... 259
11.4 Gördülés (csúszás nélkül) ... 264

XII. FEJEZET
A FORGÓ MOZGÁS DINAMIKÁJA I (FORGÁS RÖGZÍTETT TENGELY KÖRÜL) ... 269
12.1 Bevezetés ... 269
12.2 A tehetetlenségi nyomaték ... 269
12.3 Folytonos tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározása ... 271
12.4 Az inerciasugár ... 273
12.5 Az impulzusmomentum (perdület) ... 274
12.6 Rögzített szimmetriatengelye körül forgó merev test mozgása ... 276
12.7 A forgó mozgás alapegyenlete ... 277
12.8 Az impulzusmomentum (perdület) megmaradása ... 282
12.9 A forgó testen végzett munka és a forgási energia ... 286
12.10 Dinamikai kiegyensúlyozatlanság ... 289

XIII. FEJEZET
A FORGÓ MOZGÁS DINAMIKÁJA II (FORGÁS MOZGÓ TENGELY KÖRÜL) 299
13.1 Bevezetés 299
13.2 Testek általános mozgása 299
13.3 Felületen való gördülés 300
13.4 A párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel) 304
13.5 Térbeli általános mozgás 307
13.6 A pörgettyű 311
XIV. FEJEZET
A MOZGÁS LEÍRÁSA GYORSULÓ KOORDINÁTARENDSZERBEN, TEHETETLENSÉGI ERŐK 321
14.1 Bevezetés 321
14.2 Fiktív erők 322
14.3 Egyenesvonalú gyorsuló koordinátarendszerek 322
14.4 Forgó koordinátarendszerek 327
14.5 A centrifugális erő és a Coriolis erő 328
14.6 Megjegyzések 334
XV. FEJEZET
REZGÉSEK 343
15.1 Bevezetés 343
15.2 Egyszerű harmonikus rezgő mozgás 344
15.3 A harmonikus rezgő mozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolata 350
15.4 A harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyai 352
15.5 A fonálinga 355
15.6 A torziós inga 357
15.7 A fizikai inga 358
15.8 A rezonancia 361
15.9 Az anyag rugalmas tulajdonságai 369
XVI. FEJEZET
A GRAVITÁCIÓ 375
16.1 Bevezetés 375
16.2 A Kepler törvények 376
16.3 Newton tömegvonzási törvénye 377
16.4 Pontszerű és kiterjedt test között fellépő gravitációs erők 380
16.5 A gravitációs mező 386
16.6 A gravitációs potenciális energia 389
16.7 A szökési sebesség és a kötési energia 390
16.8 A mesterséges holdak mozgásának energiaviszonyai 392
XVII. FEJEZET
FOLYADÉKOK 401
17.1 Bevezetés 401
17.2 A sűrűség 402
17.3 A nyomás 403
17.4 Pascal törvénye és az Arkhimédész törvény 406
17.5 Folyadékok áramlása 409
17.6 A Bernoulli törvény 411
17.7 Példák a Bernoulli effektusra 414
XVIII. FEJEZET
HULLÁMMOZGÁS 423
18.1 Bevezetés 423
18.2 A hullámegyenlet 425
18.3 A hullámegyenlet általános megoldása 427
18.4 A hullámegyenlet megoldása egy speciális esetben 429
18.5 A hullám terjedési sebessége 430
18.6 Síkbeli és térbeli hullámok 432
18.7 A hullámmozgás energiaviszonyai 436
18.8 Hullámok visszaverődése 438
18.9 A szuperpozíció elve, állóhullámok 439
18.10 A Doppler jelenség 442
18.11 A lökéshullámok 444
18.12 A lebegés 444

XIX. FEJEZET
HŐMENNYISÉG ÉS HŐMÉRSÉKLET 453
19.1 Bevezetés 453
19.2 A hőmérséklet 453
19.3 Hőtágulás 456
19.4 A hőmennyiség 460
19.5 Hőfelvétel és fázisátalakulás 462
19.6 Hővezetés 468
19.7 Hőterjedés áramlással 469
19.8 Hőterjedés sugárzással 471
19.9 Az állandó térfogatú gázhőmérő 476
XX. FEJEZET
AZ IDEÁLIS GÁZ ÉS A KINETIKUS GÁZELMÉLET 483
20.1 Bevezetés 483
20.2 Az ideális gáz 484
20.3 Az ideális gázmodell 491
XXI. FEJEZET
A TERMODINAMIKA ELSŐ FŐTÉTELE 503
21.1 Bevezetés 503
21.2 Alapfogalmak 503
21.3 A hő, az energia, a munka és az első főtétel 505
21.4 Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok 508
21.5 Speciális folyamatok és mólhőik 509
21.6 Szabadsági fokok és az ekvipartíció tétele 520
21.7 Vezérfonal egy helyes elmélet megalapozásához 525
21.8 Szilárd testek fajlagos hőkapacitása 526
XXII. FEJEZET
A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE 529
22.1. Bevezetés 529
22.2 A második főtétel 530
22.3. A Carnot körfolyamat 531
22.4 Hőerőgépek hatásfoka 534
22.5 Néhány hőerőgép típus 537
22.6 Az elérhető legnagyobb hatásfok – a Carnot körfolyamat hatásfoka 540
22.7 A Kelvin-féle abszolút hőmérsékleti skála 541
22.8 A termodinamika harmadik főtétele 542
XXIII. FEJEZET
AZ ENTRÓPIA 547
23.1 Bevezetés 547
23.2 Entrópia makroszkópikus szempontból 548
23.3 Entrópia vizsgálata mikroszkópikus szempontból 552
23.4 Az entrópia és a második főtétel 554
23.5. Az entrópia és a nem felhasználható energia 557
23.6 Entrópia és információ 561
23.7 Örökmozgók 561
XXIV. FEJEZET
A COULOMB TÖRVÉNY ÉS AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR 567
24.1 Bevezetés 567
24.2 Elektrosztatikus erők 568
24.3 Vezetők és szigetelők 570
24.4 A Coulomb törvény 571
24.5 Az elektromos erőtér 575
24.6 Az elektromos dipólus 578
24.7 Folytonos töltéseloszlások által létrehozott elektromos erőterek 583
XXV. FEJEZET
GAUSS TÖRVÉNYE 595
25.1 Bevezetés 595
25.2 Az elektromos fluxus 595
25.3 A Gauss törvény 598
25.4 A Gauss törvény és az elektromos vezetők 606

XXVI. FEJEZET
AZ ELEKTROMOS POTENCIÁL 613
26.1 Bevezetés 613
26.2 Az elektromos potenciál 613
26.3 A V potenciál gradiense 625
26.4 Ekvipotenciális felületek 627
XXVII. FEJEZET
KONDENZÁTOR ÉS AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR ENERGIÁJA 635
27.1 Bevezetés 635
27.2 A kapacitás fogalma 635
27.3 Kondenzátorok kapcsolása 640
27.4 Dielektrikumok 642
27.5 A kondenzátor energiája 645
27.6 Az elektromos erőtér energiája 648
XXVIII. FEJEZET
AZ ELEKTROMOS ÁRAM ÉS AZ ELLENÁLLÁS 655
28.1 Bevezetés 655
28.2 Az E elektromotoros erő 655
28.3 Az elektromos áram 657
28.4 Az elektromos ellenállás 660
28.5 Az Ohm törvény 662
28.6 A Joule törvény 663
28.7 Az áramsűrűség és a vezetőképesség 666
XXIX. FEJEZET
EGYENÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖK 675
29.1 Bevezetés 675
29.2 Sorosan és párhuzamosan kapcsolt ellenállások 675
29.3 Sokhurkú áramkörök és a Kirchhoff törvények 678
29.4 A szuperpozíció elve 680
29.5 Alkalmazások 684
29.6 Az RC-körök 690
XXX. FEJEZET
A MÁGNESES ERŐTÉR 705
30.1 Bevezetés 705
30.2 A mágneses erőtér 705
30.3 Töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben 707
30.4 A Lorentz-erő 712
30.5 A mágneses térben levő áramvezetőre ható erő 713
30.6 Mágneses dipólusok 715
30.7 Alkalmazások 718
30.8 A Φ_B mágneses fluxus 724
30.9 Néhány megjegyzés a mértékegységekről 725
XXXI. FEJEZET
A MÁGNESES ERŐTÉR FORRÁSA 733
31.1 Bevezetés 733
31.2 A Biot-Savart törvény 733
31.3 Az Ampère törvény 738
XXXII. FEJEZET
A FARADAY TÖRVÉNY ÉS AZ INDUKTIVITÁS 749
32.1 Bevezetés 749
32.2 A Faraday törvény 749
32.3 A mozgási indukció 752
32.4 A Lenz törvény 757
32.5 Az örvényáramok 758
32.6 Az önindukció 759
32.7 A kölcsönös indukció 761
32.8 RL áramkörök 763
32.9 Az önindukciós tekercs energiája 766

XXXIII. FEJEZET
AZ ANYAG MÁGNESES TULAJDONSÁGAI 775
33.1 Bevezetés 775
33.2 Az anyagok mágneses tulajdonságai 775
33.3 A mágneses térerősség és a mágneses indukcióvektor 780
33.4 A mágneses hiszterézis 782
XXXIV. FEJEZET
VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖK 787
34.1 Bevezetés 787
34.2 Egyszerű váltakozó áramú körök 788
34.3 Sorba kapcsolt RLC-áramkörök 792
34.4 Sorba kapcsolt RLC áramkörök impedanciája 795
34.5 Párhuzamosan kapcsolt RLC áramkörök impedanciája 799
34.6 Rezonancia-jelenségek 801
34.7 A váltakozó áramú áramkörök teljesítménye 805
34.8 Transzformátorok 809
XXXVI. FEJEZET
GEOMETRIAI OPTIKA I. – A FÉNYVISSZAVERŐDÉS 847
36.1 Bevezető 847
36.2 Hullámfrontok és fénysugarak 848
36.3 A Huygens-elv 849
36.4 A fényvisszaverődés síktükrön 850
36.5 Fényvisszaverődés gömbtükrön 854
36.6 A sugárdiagram és a nagyítás 861
XXXVII. FEJEZET
GEOMETRIAI OPTIKA II. – A FÉNYTÖRÉS 869
37.1 Bevezetés 869
37.2 Fénytörés sík felületen 869
37.3 Teljes visszaverődés 874
37.4 Fénytörés gömbfelületen 877
37.5 Vékony lencsék 879
37.6 A dioptria 882
37.7 A vékony lencse sugármenetei és a kép nagysága 883
37.8 Lencserendszerek 886
37.9 Optikai eszközök 888
37.10 Lencsehibák 897
XXXVIII. FEJEZET
FIZIKAI OPTIKA I. – AZ INTERFERENCIA 907
38.1 Bevezetés 907
38.2 Kétréses interferencia 907
38.3 Többréses interferencia 916
38.4 Interferencia vékony rétegeken 918
38.5 A Michelson-féle interferométer 921
XXXIX. FEJEZET
FIZIKAI OPTIKA II. – A DIFFRAKCIÓ 929
39.1 Bevezetés 929
39.2 Elhajlás résen 930
39.3 Elhajlás köralakú nyíláson 937
39.4 Elhajlás rácson 939
39.5 A röntgen-diffrakció 946
39.6 A Fresnel-féle diffrakció – Köralakú nyílások és akadályok 948
39.7 A Fresnel-féle zónalemez 950
39.8 A holográfia 951
XL. FEJEZET
A POLÁROS FÉNY 959
40.1 Bevezetés 959
40.2 A polárszűrő 961
40.3 Polarizáció visszaverődéskor és szóráskor 962
40.4 A kettőstörés 964
40.5 A fázistoló lemezek és a cirkuláris polarizáció 966

40.6 Az optikai aktivitás ... 969
40.7 Interferenciaszínek és a feszültségoptika ... 970
XLI. FEJEZET
A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET ... 977
41.1 Bevezetés ... 977
41.2 A Galilei-transzformáció ... 978
41.3 A speciális relativitáselmélet alap-posztulátumai ... 982
41.4 Az órák szinkronizálása ... 983
41.5 A Lorentz-transzformáció ... 983
41.6 Az órák összeigazítása ... 986
41.7 A mozgás irányával párhuzamos hosszmérések eredményeinek összehasonlítása ... 988
41.8 A sajátidő és a nyugalmi hossz ... 989
41.9 A relativisztikus impulzus ... 990
41.10 Jegyzet a nyugalmi tömegről ... 994
41.11 A relativisztikus sebességösszeadás ... 994
41.12 A relativisztikus energia ... 996
41.13 A mozgó órák aszinkronitása ... 1001
41.14 Az ikerparadoxon ... 1004
41.15 A relativitáselmélet és az elektromágnesesség ... 1007
41.16 Az általános relativitás elmélete ... 1009
XLII. FEJEZET
A SUGÁRZÁS KVANTUMOS TERMÉSZETE (A hullámok részecsketermészete) ... 1019
42.1 Bevezetés ... 1019
42.2 A feketetest sugárzásának spektruma ... 1020
42.3 A feketetest sugárzás különböző értelmezései ... 1021
42.4 Planck elmélete ... 1024
42.5 A fényelektromos hatás ... 1027
42.6 A Compton-effektus és a párkeltés ... 1034
42.7 Az elektromágneses sugárzás kettős természete ... 1036
XLIII. FEJEZET
A RÉSZECSKÉK HULLÁMTERMÉSZETE ... 1045
43.1 Bevezetés ... 1045
43.2 Az atommodellek ... 1045
43.3 A korrespondencia-elv ... 1051
43.4 A de Broglie-hullámok ... 1052
43.5 A Davisson-Germer-kísérlet ... 1054
43.6 A hullámmechanika ... 1058
43.7 Az alagúteffektus ... 1063
43.8 A határozatlansági elv ... 1064
43.9 A komplementaritási elv ... 1069
43.10 A kvantumelmélet fejlődésének rövid időrendi táblázata ... 1070
XLIV. FEJEZET
ATOMFIZIKA ... 1075
44.1 Bevezetés ... 1075
44.2 A Schrödinger-féle hullámegyenlet ... 1077
44.3 Az elektronspin és a finomszerkezet ... 1081
44.4 A spin-pálya csatolás ... 1081
44.5 A hidrogénatom kvantumállapotai ... 1083
44.6 A hidrogén energiaszint-diagramja ... 1084
44.7 A hidrogén-atom hullámfüggvényei ... 1085
44.8 A Pauli-féle kizárási elv és az elemek periódusos rendszere ... 1089
44.9 A röntgensugarak ... 1092
44.10 A lézer ... 1094
XLV. FEJEZET
ATOMMAGFIZIKA ... 1101
45.1 Bevezetés ... 1101
45.2 Az atommag leírása ... 1102
45.3 Az atommag tömege és kötési energiája ... 1104
45.4 Radioaktív bomlás és felezési idő ... 1108
45.5 A radioaktív bomlás fajtái ... 1111
45.6 Az atommag hatáskeresztmetszete ... 1121

45.7 Magreakciók 1123
45.8 Az atomenergia 1127
A RÉSZECSKEFIZIKA TÖRTÉNETE ÉS JELENLEGI ÁLLÁSA 1135
Bevezetés 1135
Új korszak kezdete 1137
Színek (Colors), Ízek (Flavors), QED és QCD 1138
Színkorlátok 1139
Gyenge folyamatok, generációk, leptonszám 1140
Egyesítés és a jövő 1142
Kozmikus összefüggések 1143
Utószó 1144
Függelék A1
Az 1–23 fejezetek páratlan számozású feladatainak megoldásai A18
A 24–45 fejezetek páratlan számozású feladatainak megoldásai A24

EGYENESVONALÚ MOZGÁSOK

A tudományban – miként a legtöbb dologban – a legjobb az elején kezdeni.
Lewis Carroll

2.1 Bevezetés

A természetről szerzett legtöbb ismeretünk testek mozgásának megfigyeléséből származik. Ebben a fejezetben egy anyagi pont, vagy részecske mozgásának leírásával foglalkozunk. Ezt a területet **kinematikának** nevezzük. Bár a pont geometriai fogalom, és nagyon különbözik olyan mindennnapi tárgyaktól, mint egy ping-pong labda vagy egy autó, látni fogjuk, hogy a kiterjedt testek általános mozgása is könnyen leírható egyetlen pont, a „tömegközéppont" mozgásával, valamint a test tömegközéppont körüli forgásával. A test rezgést is végezhet, de ez a bonyolult mozgás szintén leírható a tömegközépponthoz viszonyítva. Így tanulmányainkat egy pont vagy egy részecske *egydimenziós*, egyenesvonalú mozgásával kezdjük.

A *részecske* szóról egy kicsiny test, mondjuk egy teniszlabda, vagy egy kis anyagcsomó jut eszünkbe. A szót azonban általánosabb értelemben használjuk; egyaránt jelölheti a teniszlabdát, a Földet vagy akár egy galaxist is! Amennyiben egy test mozgásából csak a tömegközéppont elmozdulása érdekel bennünket (elhanyagolva az estleges a forgásokat, rezgéseket, vagy egyéb belső mozgásokat), akkor a test mindig egyetlen részecskének tekinthető.

2.2 Tér és idő mérése

A kinematika a *hol*? és a *mikor*? kérdésével foglalkozik. Bár ezek a kérdések egyszerűek, a válasz mégis bonyolult lehet, ha hétköznapi tapasztalatainkon kívül eső jelenségeket vizsgálunk. Akár a nagy sebességű mozgások fizikája, akár a galaxisközi vagy a szubmikroszkópikus dimenziókban végbemenő események fizikája teljesen különbözik a megszokott elképzelésünktől. (Ezekkel az izgalmas kérdésekkel azonban csak a későbbi fejezetekben foglalkozunk.) E helyütt a Newton féle tér és idő fogalmat fogadjuk el, ami mindennapi tapasztalatainkból fokozatosan fejlődött ki.

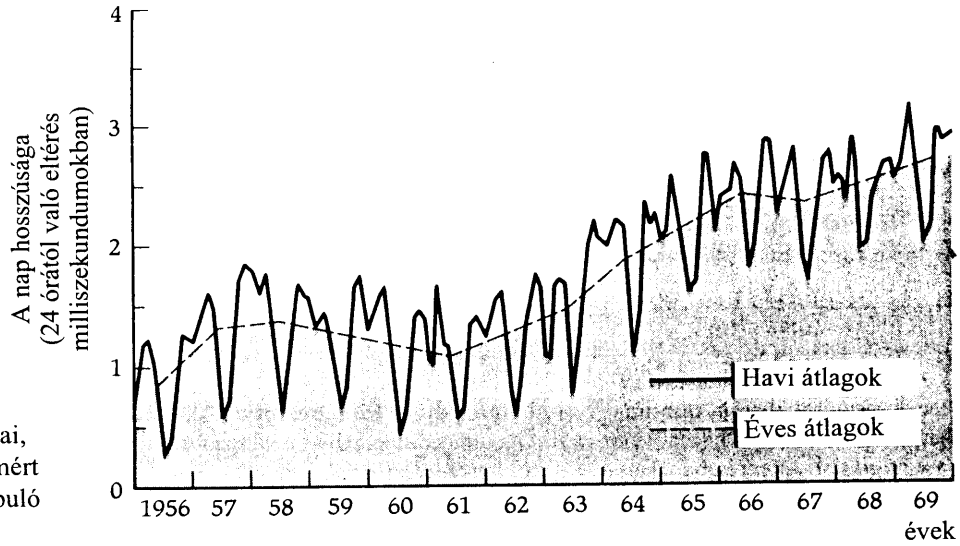
A teret *homogénnek* és *izotropnak* tekintjük. Ez azt jelenti, hogy a tér tulajdonságai nem függnek a helytől és iránytól. Newton szavaival: „Az abszolút tér, mint olyan, nincs kapcsolatban semmiféle külső hatással, mindig ugyanaz és mozdulatlan." Az univerzumban minden test a tér egy adott helyén létezik, és az idő múlásával változtathatja a helyzetét a térben. Egy kiválasztott pontszerű test térbeli helyzetét valamely kiválasztott testhez rögzített *vonatkoztatási rendszerhez* képest adhatjuk meg.

Az idő Newton szerint szintén abszolút, abban az értelemben, hogy egyenletesen telik. Nem gyorsíthatjuk és nem lassíthatjuk. Ismét Newton szavaival élve: „Az abszolút, igazi és matematikai idő önmagától és saját természete szerint egyenletesen folyik bármilyen külső hatás nélkül, s másként folytonosan állandó időnek is nevezzük." Az idő tehát folytonos és állandóan előrehalad, múlása pl. egy óraszerkezettel jelezhető.

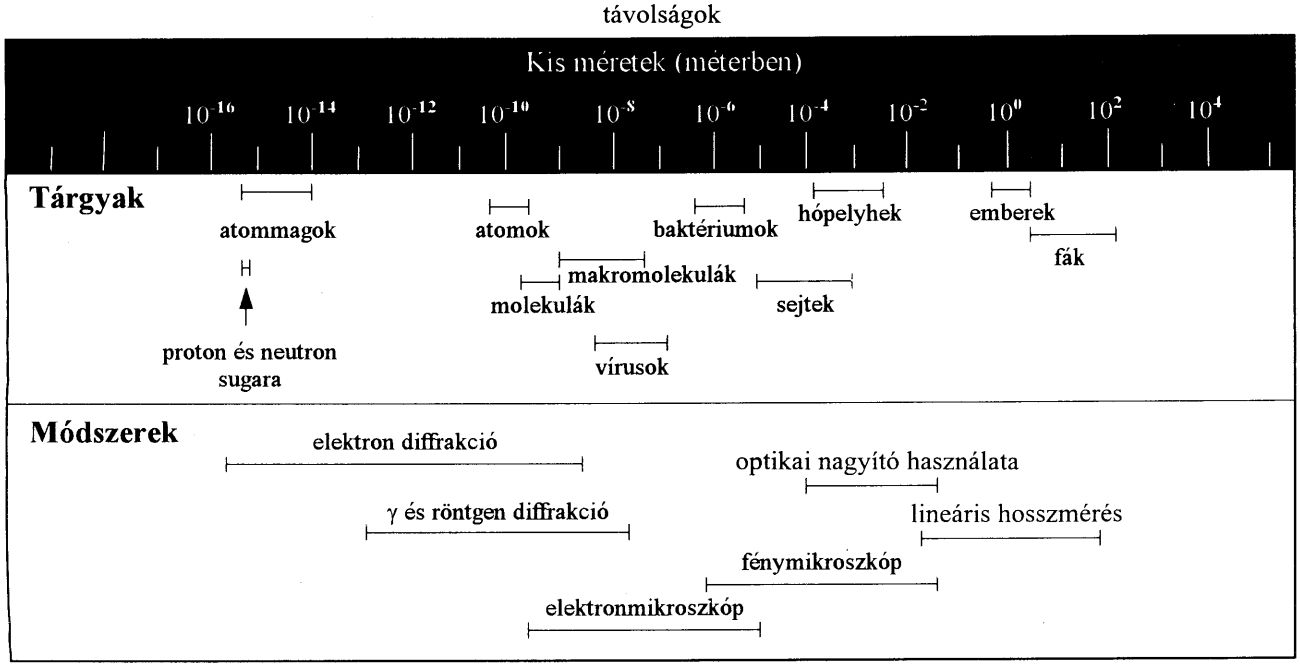
Newton felfogása szerint a tér és az idő tökéletesen független egymástól, bár az nyilvánvaló, hogy minden fizikai objektumnak egyszerre kell léteznie mind a térben, mind pedig az időben. Lehetetlennek látszik, hogy olyan testet képzeljünk el, amely a térben valahol létezik, de időben nem, vagy olyat, amely létezik egy véges időintervallumban, de térbeli helyzete nincsen.

Figyelemreméltó, hogy a térről és időről alkotott hagyományos és józan ésszen alapuló elképzelések egy részéről kiderült, hogy naiv és hibás. A pontosabb kísérletek egészen mást mutatnak, ugyanis ezek nem egyeztek a kísérleti tényekkel. A világ nagyon különbözik attól, amit hétköznapi tapasztalataink alapján elképzelünk. Bár a tér és az idő olyan fogalmak, amelyeket nehéz, vagy talán lehetetlen is más egyszerűbb fogalmakra visszavezetni, a teret és időt is egyértelműen *mérhetjük.* Ezeknek a mennyiségeknek a mérésére olyan műveleteket határozzunk meg, amelyek során szabványosított tér- és idő egységen alapuló hosszúságmérő eszközöket és órákat alkalmazunk. A szabványosított időmérték hosszú ideig a Föld forgására vonatkozó csillagászati megfigyeléseken alapult. A pontos *atomórák* (ezek bizonyos atomok által kibocsátott elektromágneses sugárzás rezgésszámának állandóságán alapulnak) feltalálása óta kiderült, hogy a Föld forgása bonyolult módon változik $1:10^8$ arányban (ami évente kb. 0,3 másodpercnek felel meg). A 2-1 ábra a nap hosszúságának változását mutatja! A méréseket néhányszor 10^{-13} vagy 10^{-14} pontossággal összeegyeztetett atomórákkal végezték. A Föld forgási sebességét olyan tényezők befolyásolják, mint a sarki jégsapkák időszakos olvadása, a szökőár, a napfolt tevékenység (ez a föld légkörének körforgását befolyásolja) valamint a földrengések. A Föld forgásának változása miatt 1967-ben a 13. Általános eme Súly és Mérésügyi Konferencián résztvevő harmincnyolc ország atomi idő-szabványt fogadott el.

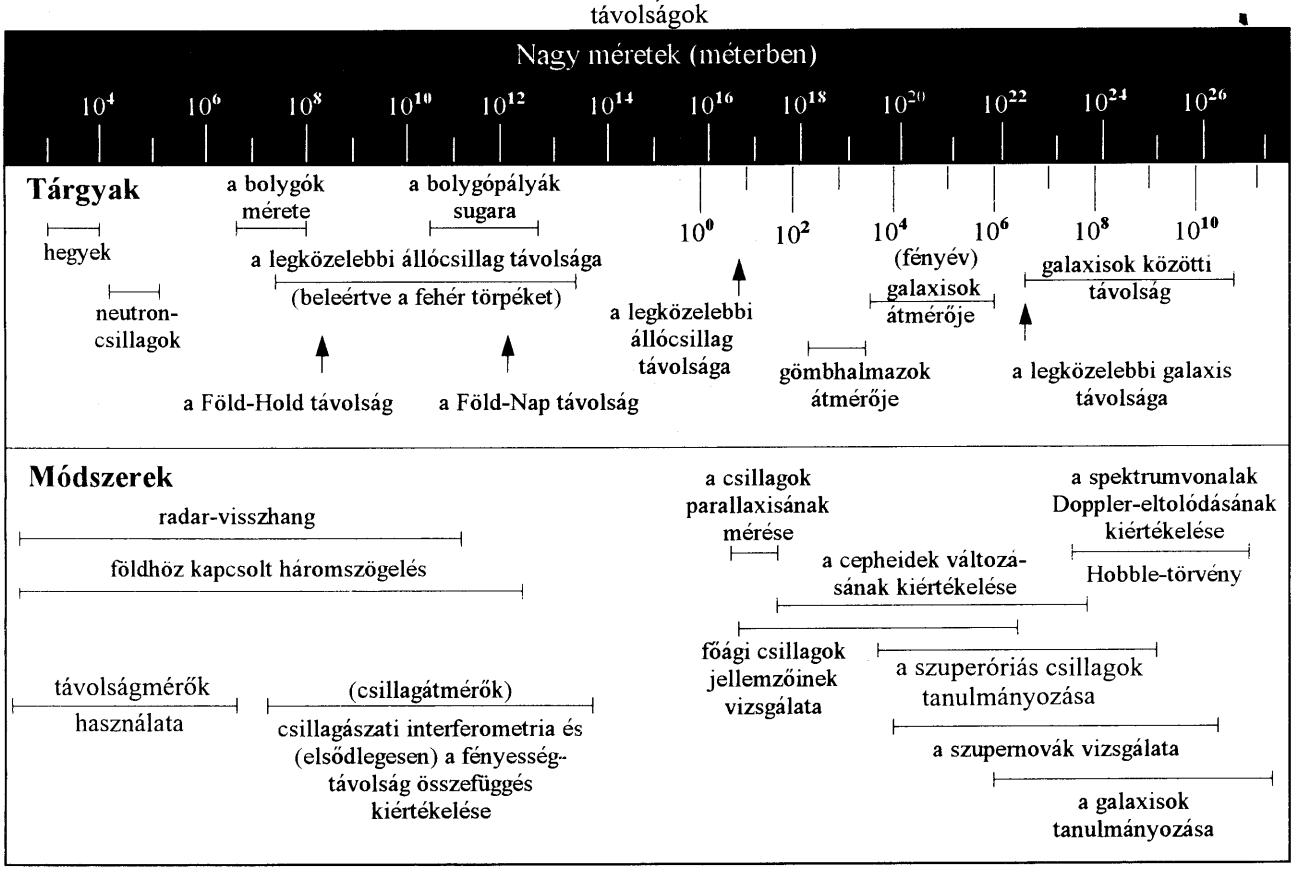
A hosszmérték etalon eredetileg egy, a franciaországi Sèvresben őrzött platina-irídium rúd két jelzése közötti távolság volt. Ezt a méter szabványt úgy választották, hogy a Párizson keresztül haladó délkörnek az északi saroktól az egyenlítőig húzódó szakaszának hossza 10^7 m legyen. A későbbi mérések azonban azt mutatták, hogy a délkörnegyed hosszának tízmilliomod részétől az etalon körülbelül 0,023%-kal eltér.



2-l ábra
A nap hosszúságának a változásai, összehasonlítva az atomórával mért időtartamot a Föld forgásán alapuló időtartam mérésekkel



a)



b)

2-2 ábra

Távolságok és mérésük módszere.
a) A különlegesen kicsiny távolságok sokkal megbízhatóbban mérhetők, mint a nagyon nagyok, mert a kis méretek tartományában több egymást átfedő módszer létezik.
b) A csillagászati távolságok mérése a távolság növekedésével egyre pontatlanabbá válik.
Továbbá a nagy távolságok mérésére szolgáló eljárások kalibrációja (hitelesítése) a kisebb távolságok mérésének helyességén múlik.

Ennél sokkal nagyobb problémát jelentett azonban az, hogy a méter etalon természeti katasztrófák, háborúk, vagy rablótámadás során bármikor megsemmisülhetett volna. További nehézséget okozott a pontos etalonmásolatok elkészítése a felhasználó országok számára. Emiatt 1960-ban a hosszegység szabványt újra meghatározták, és két atomi energiaszint közötti elektronátmenet során kibocsátott fény hullámhosszához kötötték. A legújabb megállapodást 1983-ban fogadták el; eszerint a hosszegységet azzal a távolsággal definiáljuk, amit a vákuumban terjedő fény meghatározott időtartam alatt megtesz. Ily módon a hossz- és időegységként elfogadott hosszúság és időtartam bármikor reprodukálható, ha ismerjük a szükséges berendezések és a megfelelő mérési eljárások leírását. Nem szükséges többé másolatokat készíteni az etalonról! A 2-2 ábra néhány jellegzetes objektum méretének nagyságrendjét és az egyes mérettartományokban használatos mérési módszereket mutatja.

Mértékegységek, mértékrendszerek

Az Általános Súly és Mérésügyi Konferencia rendszeresen tart összejöveteleket, amelyen új mértékegységek elfogadását ajánlja. Ebben a könyvben is többnyire a Súly és Mérésügyi Konferencia által javasolt SI rendszerként (Systeme Internationale d'Unites) ismert mérték és rövidítésrendszert használjuk, amit már az egész világon szinte mindenütt elfogadtak.

A jelölésrendszer a következő: azokat a mértékegységeket, amelyeket tudósok tiszteletére neveztek el, kis kezdőbetűvel írjuk, ha a teljes nevet kiírjuk. Rövidítésül azonban a név nagy kezdőbetűjét használjuk. Például: *newton* (N). Az egyes és a többes számban a rövidítés ugyanaz, és a rövidítés után nem teszünk pontot. Ha két mértékegységet együtt használunk, akkor kötőjellel választjuk el őket, rövidített jelüket azonban ponttal. Például: *newton-méter,* de N·m. A mértékegységek osztását törtvonallal, vagy negatív kitevővel jelöljük. Például: m/s vagy $m \cdot s^{-1}$ A több számjegyű mennyiségeket a tizedesvesszőtől jobbra és balra is hármas csoportokra osztva írjuk le. (Pl. 123 456,789 87)

Az idő és hosszúság szabványosított mértékegységei a következők:

Az időtartam egysége: Az időtartam alapegysége a szekundum, vagy másodperc, jele: s. A másodperc, definíció szerint a cézium 133-as izotopjának két meghatározott energiaszintje közötti elektronátmenet során kibocsátott sugárzás periodusidejének 9 192 631 770- szerese.

A hosszúság egysége: A hosszúság alapegysége a méter, jele: m. A méter az a hosszúság, amelyet a vákuumban terjedő fény 1/299 792 458 másodperc alatt megtesz.

A történelem során más idő- és hosszegységeket is használtak. Az Egyesült Államokban gyakran használatos mértékegység volt például a hüvelyk (in), láb (ft), jard (yd) és a mérföld (mi). 1959-ben a jardot az

$$1 \text{ yd} = 0{,}9144 \text{ m} \quad \text{(pontosan)}$$

összefüggéssel definiálták. Ez egyenértékű a hüvelyk

$$1 \text{ in} = 2{,}54 \text{ cm} \quad \text{(pontosan)}$$

definíciójával. Ezek a mértékegységek az angol mértékrendszerből erednek. Könyvünkben alapvetően mindenütt SI mértékegységeket használunk. Az Egyesült Államokban és Angliában régebben használatos egységek alkalmazását a mértékegységek közötti átszámítást bemutató példákra korlátozzuk.

A Nemzetközi Mértékegységrendszer prefixumai (előtagjai)

Az SI rendszerben az alapegységek meghatározott többszöröseit a mértékegységek neve elé tett szavacskákkal, előtagokkal vagy prefixumokkal jelöljük. Az előtagok megmutatják, hogy az egységnek tíz melyik hatványá-



2-3 ábra
Céziumóra az USA Állami Mérésügyi Hivatalában (National Bureau of Standards).

val vett szorzatáról van szó. A 2-1 táblázat az SI rendszer prefixumait mutatja. Néhány régi hosszegységet egyes tudományágakban ma is használunk, bár az SI egységek fokozatosan kiszorítják őket. Kettőt említünk:

$$1 \text{ angström } (\text{Å}) = 10^{-10} \text{ m}$$
$$1 \text{ mikron } (\mu) = 10^{-6} \text{ m}$$

Az *angströmöt* a XIX-ik századi svéd fizikusról A. J. Ångstömről nevezték el, a mikron pedig a „nagyon kicsiny" jelentésű görög szóból származik.

A számértékeket gyakran az igen kényelmes, ún. normál alakban írjuk fel, ahol tíz hatványait használjuk az egy és tíz közé eső értékű számok szorzóiként. Az 1926 számot például $1{,}926\times10^{3}$-ként írjuk fel, a 0,000 371-et pedig $3{,}71\times10^{-4}$-ként. (A számítógépes programokban a tíz hatvány kifejezésére az E betűt használjuk, ekkor az előző két számot 1,296 E3 illetve 3,71E–4 -ként adjuk meg.

2.3 Mértékegységek átszámítása

Ha egy egyenletbe numerikus értékeket helyettesítünk be, akkor mindvégig ugyanazokat a mértékegységeket kell használnunk. Egy összefüggés sebesség jellegű tagjának mértékegységét megadhatjuk pl. m/s -ban, de bármely más hosszúság és idő mérték hányadosában is kifejezhetjük. A számítás azonban csak akkor marad logikailag konzisztens, ha az adott problémában mindig *ugyanazokat* a mértékegységeket használjuk. Minden hosszúságot kifejezhetünk méterben és minden időintervallumot másodpercben, nem keverhetjük össze azonban a métert a kilométerrel, ill. a másodpercet a nappal, vagy az órával.

A mértékegységek átszámításának egy egyszerű módszere az, ha a mért értéket az egymásnak megfelelő új és régi mértékegységek hányadosaival szorozzuk.

2-1.Táblázat. Az SI rendszer prefixumai (előtagjai)

Szorzó-tényező	prefixum	jel	Szorzó-tényező	prefixum	jel
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci*	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi*	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	mikro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto*	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deka*	da	10^{-18}	atto	a

Példák

10^{6} watt = 1 megawatt (1MW)
10^{3} méter = 1 kilométer (1 km)
10^{-3} gramm = 1 milligramm (1 mg)
10^{-9} szekundum = 1 nanoszekundum (1ns)

* A legtöbb kitevő három valamely többszöröse, az ettől eltérőket ritkán használjuk. Kivétel ez alól a centi, ami a méterrel kapcsolatban gyakran előfordul.

10^{-2} méter = 1 centiméter (1 cm)

(További adatokat tartalmaz az A függelék)

Így például a percben mért időtartamot úgy számítjuk át másodpercekre, hogy megszorozzuk a $\frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}}$ hányadossal, a lábban mért hosszúságot a $\frac{12\,\mathrm{in}}{1\,\mathrm{ft}}$ hányadossal szorozva kapjuk meg a hosszúságot hüvelykben.

Ha egy hat hüvelyk per óra sebességgel kúszó kígyó sebességét láb per másodpercben kívánjuk megadni, akkor ezt a következő módon kapjuk meg:

$$6\frac{\cancel{\mathrm{in}}}{\cancel{\mathrm{h}}}\underbrace{\left(\frac{1\cancel{\mathrm{h}}}{60\,\cancel{\mathrm{min}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\mathrm{min}}}{60\,\mathrm{s}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{ft}}{12\,\cancel{\mathrm{in}}}\right)}_{\text{átszámítási tényezők}} = 0{,}000139\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}} = 1{,}39\times10^{-4}\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}$$

Hasonló módon számíthatjuk át egy gépkocsi 72 km/ó-s sebességét m/s-ra:

$$72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\underbrace{\left(\frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}}\right)}_{\text{átszámítási tényezők}} = \frac{72000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A jelölések használatában *javasoljuk*, hogy annak ellenére, hogy nyomtatott szövegekben gyakran használják a ferde vonalat az osztás jelölésére (pl. m/s), *ezt a jelölésmódot szigorúan kerüljük el, ha egyenleteket írunk fel.* Ekkor használjunk mindig vízszintes vonalat törtvonalként, mert így sokkal könnyebb megállapítani, hogy mely mennyiségek vannak a számlálóban és melyek a nevezőben. Ez megkönnyíti a mértékegységek egyszerűsítését és a számokkal való műveleteket is.

Pontosság, értékes jegyek

A fizikai mérések eredményeinek felírásakor különbséget szokás tenni pl. a 4,2 m, ill. 4,20 m alakban felírt adatok között. Az első csak két jegyre pontos, míg a második azt jelzi, hogy az adat három értékes jegy pontossággal van megadva. *Az utolsó leírt számjegyet tekintjük az első bizonytalan jegynek.* Bizonyos mértékig azonban még így is előfordulhat kettős értelmezés. Az 1800 m alakban felírt adat esetén például az utolsó helyen álló két zérus je-

lölhet értékes jegyet, de lehetséges az is, hogy pusztán a tizedesvessző helyét jelöli ki. A normál alak felhasználásával ez a „kétértelműség" elkerülhető. Az $1{,}8 \cdot 10^3$ m alakban felírt szám két értékes jegyet tartalmaz, míg az $1{,}800 \cdot 10^3$ m négyet. A 0,00005 szám – amint az $5 \cdot 10^{-5}$ felírásból azonnal látható – csak egy jegyre pontos, mert a tizedesvesszőt közvetlenül követő zérusok nem értékesek.

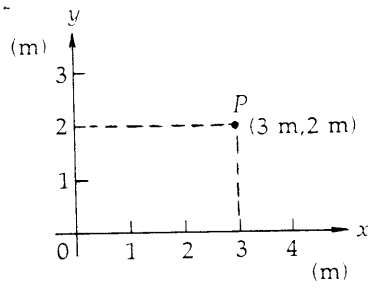
A számok összegében és különbségében a tizedesjegyek számának meg kell egyeznie a *kevesebb* tizedesjegyet tartalmazó tag tizedesjegyeinek számával. Így a 472 + 3,64 összeadás helyes eredménye nem 475,64, hanem a kerekítéssel[1] kapott 476. Hasonlóan általános szabály az, hogy a szorzások és osztások eredménye nem tartalmazhat több értékes jegyet, mint a *kevésbé* pontos tényező. Ezért az 5,7624×2,60 szorzás eredménye nem 14,8824 hanem 14,9 (az értékes jegyek száma ugyanannyi, mint a 2,60 tényezőben). A kerekítéssel azonban célszerű a számolás utolsó lépéséig várni.

Ebben a könyvben az egyszerűség kedvéért gyakorlati szabályt alkalmazzuk. Minden megadott adatot elegendően pontosnak tekintünk ahhoz, hogy a végeredményt három értékes jegyre lehessen kerekíteni. Így pl. a 2 s-ként megadott adatot a számítások során 2,00 s -ként kezeljük.

Tudatában kell lennünk azonban annak, hogy a laboratóriumi mérésekből nyert adatok esetén az értékes jegyeknek a mérési hibák miatt rendkívül nagy jelentősége van, és a mérések kiértékeléséhez a fentieknél sokkal bonyolultabb szabályokat kell elsajátítani. Egyetlen általánosan elfogadott gyakorlatra hívjuk csak fel a figyelmet. Amikor ismerjük a kísérleti eredmények bizonytalanságát, akkor a mérési hibát szokás explicit módon is megadni. Egy távolságadat esetén pl. a következőképpen:7,75 ± 0,04 m. Itt, ha nem használunk más konvenciót, akkor a megjelölt értéktartomány azt jelenti, hogy a valódi érték 66%-os valószínűséggel a megjelölt intervallumba, ill. 34%-os valószínűséggel az intervallumon kívülre esik.

2.4 Koordinátarendszerek és vonatkoztatási rendszerek

Egy térbeli pont helyzetének meghatározásához ismernünk kell egy adott ponttól mért *távolságát*, valamint azt, hogy milyen *irányban* van tőle. Ezek legegyszerűbben úgy adhatók meg, ha először felveszünk egy **koordinátarendszert.** Leggyakrabban a jól ismert *Descartes*[2]*-féle*, vagy derékszögű koordinátarendszert használjuk. A koordinátarendszer felvételéhez ki kell jelölni annak kezdőpontját, az *origót,* és meghatározott irányokat, *a tengelyeket.* Ez lehetővé teszi a térbeli pontok helyzetének azonosítását az origóhoz és a tengelyekhez képest. Kiderül az is, hogy minden koordinátarendszer, amely egymáshoz képest nyugalomban van, igen szoros kapcsolatban van egymással, mert a testek mozgásának fontos jellemzői a különböző koordinátarendszerekben mérve egyenlőek egymással. Egy mozgó test *sebessége* és *gyorsulása* például minden ilyen rendszerben ugyanakkora. Az egymáshoz képest nyugvó koordinátarendszerek összessége **vonatkoztatási rendszert** képez. Vonatkoztatási rendszert kapcsolhatunk például egy atommaghoz, a laborasztalhoz, egy forgó űrállomáshoz, a Naphoz vagy az állócsillagokhoz stb.



2-4 ábra
Egy *P* pont helyzetét a síkban Descartes-féle koordinátákkal adjuk meg $(x_1, y_1) = (3\text{ m}, 2\text{ m})$

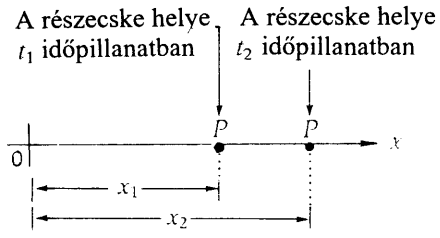
[1] A „kerekítés" azt jelenti, hogy az utolsó megmaradó jegyet változatlanul hagyjuk, ha az elhagyott 5-nél kisebb, de eggyel növeljük, ha az elhagyott jegy 5 vagy nagyobb.

[2] René Descartes (1596-1650) francia matematikus-filozófus, az analitikus geometria kifejlesztője. Ő készített először – a derékszögű koordinátarendszer felhasználásával – grafikonokat függvények ábrázolására.

A 2-4 ábra egy síkbeli Descartes-féle koordinátarendszert mutat be. Tengelyei merőlegesen metszik egymást az origóban, és a tengelyekre egyenlő hosszúságokat (skálát) vittünk fel. Az egységek dimenzióját (többnyire zárójelben) mindkét tengely mellett fel tüntetjük. A tengelyek az origótól indulva kijelölnek egy-egy irányt, amelyeket x-szel és y-nal jelölünk. A koordinátákat a nyíl irányában pozitívnak, az ellentétes irányban pedig negatívnak tekintjük. A sík minden pontja egy számpárral jellemezhető, amelyet x és y *koordinátáknak* nevezünk. Egy pont koordinátái a tengelyektől mért távolságokkal egyenlők. A 2-4 ábrán bejelölt P pont például az y tengelytől 3 m távolságban az x tengelytől pedig 2 m távolságban van; így a P pont x és y koordinátái (3 m, 2 m). Az első szám mindig az x, a második pedig az y koordinátát jelöli.

2.5 Hely, elmozdulás, sebesség és sebességvektor

Ahhoz, hogy egy részecske térbeli mozgását leírjuk, azt is meg kell mondanunk, hogy egy adott pillanatban milyen gyorsan és milyen irányban mozog. Az az elképzelés, hogy egy test egy adott térbeli helyen van és közben mozog, kényes és nehezen érthető probléma és a 2000 évvel ezelőtti filozófusokat is rendkívüli módon izgatta. Zenon (i.e. 450–435) görög filozófus például több, azóta híressé vált paradoxont is alapozott a sebességfogalom zavarbaejtő vonásaira. A nehézségek ma már érthetőek, hiszen a sebesség fogalmát a Newton (1642–1727) és Leibniz (1646–1716) által kifejlesztett differenciálszámítás előtt nem is lehetett pontosan definiálni. A következőkben a sebesség fogalmát nagyon gondosan értelmezzük és magyarázzuk, mert egyike a mechanika legalapvetőbb fogalmainak. Itt vezetjük be azokat a szabványos jelöléseket is, amelyeket a következőkben majd folyamatosan használunk.



2-5 ábra
Az egydimenziós koordinátarendszer origójával és tengelyével jelölhető ki. A tengely pozitív irányát a mellé írt x jelzi.

Vegyünk fel mindenekelőtt egy egydimenziós *koordinátarendszert,* jelöljük ki az origót és a pozitív x tengelyt (2-5 ábra). Tegyük fel, hogy a P részecske a t_1 időpillanatban az x_1 helyen van. Ha a részecske mozog, akkor a t_2 időpillanatban új, x_2 helyre kerül; azt mondjuk, hogy a részecske **elmozdulása** x_2-x_1. Ezt gyakran a görög Δ jellel fejezzük ki, ami általában egy mennyiség *megváltozására* utal. Így az

Elmozdulás $$\Delta x = (x_2 - x_1) \qquad \textbf{(2-1)}$$

A Δx kifejezések mindig az adott x mennyiség *végső* és *kezdeti* értékének különbségét jelentik. A pozitív Δx érték pozitív x irányú, a negatív $-x$ irányú elmozdulást jelöl.

Az **átlagsebességet** a pálya mentén megtett teljes út és a megtételéhez szükséges összes idő hányadosa adja.

Átlagsebesség $$\text{Átlagsebesség} = \frac{\text{Összes út}}{\text{Összes idő}} \qquad \textbf{(2-2)}$$

Tegyük fel például, hogy 3 óra alatt 150 km távolságba jutottunk el. A teljes útra vett átlagsebesség (megtett út)/(összes idő) = 150 km/3 h = 50 km/h. Figyeljük meg, hogy az átlagsebesség nem ad információt a mozgás részleteiről! Lehetséges, hogy az út egy részét 65 km/h – sebességgel tettük meg, majd megálltunk, hogy fényképfelvételt készítsünk, és a továbbiakban 60 km/h sebességgel haladtunk. A most definiált átlagsebesség természetesen a mozgás irányáról sem mond semmit.

A következőkben az egyenesvonalú mozgás irányának figyelembevételére definiáljuk a $v_{átl}$ átlagsebesség-vektort.

$$v_{\text{átl}} = \frac{\text{Elmozdulás}}{\text{Összes idő}}$$

Átlagsebesség Vektor[3]

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad (2\text{-}3)$$

Itt $v_{\text{átl}}$ az elmozdulás előjelétől függően pozitív és negatív is lehet. A pozitív érték azt jelenti, hogy a sebesség a pozitív x irányba mutat, a negatív pedig azt, hogy a sebesség $-x$ irányú. A következő példa segít abban, hogy az átlagsebesség és az átlagsebesség-vektor közötti különbséget világosan megértsük.

2-1 PÉLDA

Egy atléta egyenes úton kocogva 30 perc alatt 6 km-t tesz meg. Ezután megfordul és 20 perc alatt 2 km-t visszagyalogol. Határozzuk meg: a) az atléta elmozdulását a kiinduló helyzethez képest, b) átlagsebességét a teljes úton, c) átlagsebesség-vektorát a teljes úton, d) az átlagsebesség-vektort a futva (kocogva) megtett szakaszon, e) a gyalogolva megtett szakaszra vonatkozó átlagsebesség-vektort.

MEGOLDÁS

Első lépésként, vázlatot készítünk a mozgásról, a 2-6/a ábrán bejelöljük, hogy a koordinátarendszer kezdőpontjául az atléta kiindulási helyét választjuk, valamint megjelöltük a mozgás jellegzetes pontjait is. A következőkben a megoldás során felhasznált jelöléseket és adatokat csoportosítjuk:

	hely	idő
kocogás	$x_0 = 0$	$t_1 = 0$
	$x_1 = 6$ km	$t_1 = 30$ perc
gyaloglás	$x_2 = 4$ km	$t_2 = 50$ perc

a) A futó az $x_0 = 0$ pontból indult és az $x_2 = 4$ km pontba jutott el. A Δx elmozdulás a végső és kezdeti érték különbsége:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4\text{ km} - 0 = 4\text{ km}$$

b) A mozgás során megtett összes út 6 km + 2 km = 8 km, az út megtételéhez szükséges teljes idő pedig 30 perc + 20 perc = 50 perc (2-6/b ábra). A teljes útra vonatkozóan az

$$\text{Átlagsebesség} = \frac{\text{Megtett út}}{\text{Összes idő}} = \frac{8\text{ km}}{50\text{ perc}} = 0{,}160\,\frac{\text{km}}{\text{perc}}$$

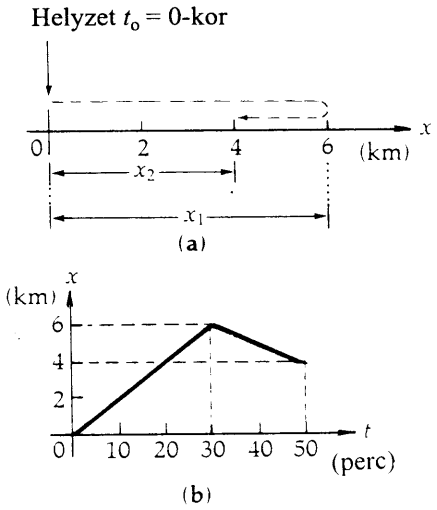
c) A teljes útra vonatkozó átlagsebesség-vektor:

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{4\text{ km} - 0}{50\text{ perc} - 0} = 0{,}080\,\frac{\text{km}}{\text{perc}}$$

Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy a változásokat mindig a *végső és kezdeti érték különbségeként* kell kiszámítani.

d) Az út futva megtett részére számolva; a kezdeti és végső hely- és időkoordináták rendre:

$$x_0 = 0\text{ km},\quad t_0 = 0\text{ perc},\quad x_1 = 6\text{ km},\quad t_1 = 30\text{ perc}\quad .$$



2-6 ábra
A 2-1 példához

[3] Az átlagérték másik jele a betű felett elhelyezett vonás $v_{\text{átl}} = \overline{v}$ (olvasd vé felülvonás)

Így az atléta átlagsebesség-vektora erre a szakaszra

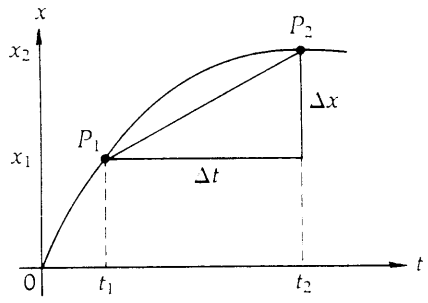
$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{6\,\text{km} - 0}{30\,\text{perc} - 0} = 0{,}200\,\frac{\text{km}}{\text{perc}} \quad \text{(kocogás)}$$

e) A gyalogolva megtett szakaszra a kezdeti és végső hely- és időkoordináták rendre:
$x_1 = 6\,\text{km}$, $t_1 = 30\,\text{perc}$, $x_2 = 4\,\text{km}$, $t_2 = 50\,\text{perc}$, így az atléta átlagsebesség-vektora a gyaloglási szakaszon

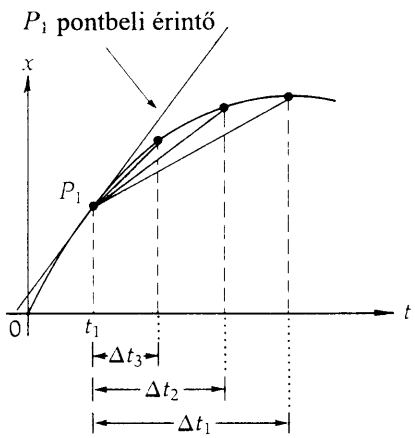
$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{4\,\text{km} - 6\,\text{km}}{50\,\text{perc} - 30\,\text{perc}} = \frac{-2\,\text{km}}{20\,\text{perc}} = -0{,}100\,\frac{\text{km}}{\text{perc}} \quad \text{(séta)}$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a sebesség iránya $-x$.

Figyelmeztetés: Az atléta teljes mozgásának átlagsebesség-vektora nem egyszerűen a futási és gyaloglási szakaszra meghatározott sebességek átlaga, hiszen a két mozgásszakasz nem azonos ideig tartott.



a) A P_1 és P_2 pontokat összekötő egyenes szakasz meredeksége $\Delta x/\Delta t$.



b) A Δt időtartam rövidülésével az adott időtartamhoz tartozó végpontokat összekötő egyenes szakaszok meredeksége a görbe P_1 pontbeli érintőjének iránytangenséhez tart (P_1-et a t_1 időpillanat határozza meg).

2-7 ábra
Egyenes vonalon mozgó részecske hely-idő grafikonja

A PILLANATNYI SEBESSÉG

Az előző szakaszban definiált átlagsebesség és átlagsebesség-vektor csak akkor igazán hasznos, ha a mozgást egészében akarjuk jellemezni. A mozgás finomabb részleteire figyelve definiálható a *pillanatnyi sebesség*, ami a mozgást egy adott időpillanatban jellemzi. Mivel ezt a fogalmat legegyszerűbb grafikus úton bevezetni, tekintsük a 2-7/a ábrát, ami egy mozgó pont helyzetét mutatja az idő függvényében. Az ábrán is látható görbevonalú grafikon esetén arra a következtetésre kell jutnunk, hogy a test a mozgás kezdetekor gyorsabban mozgott, mint a végén. (Ezt onnan vehetjük észre, hogy a helykoordináta a mozgás kezdete közelében 1 másodperc alatt többet változott, mint a mozgás végső szakaszán.)

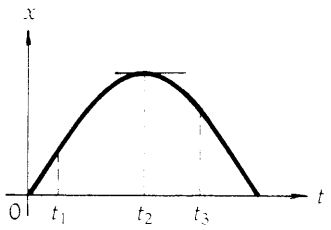
A 2-3 egyenlet szerint a t_1, t_2 időintervallumra az átlagsebesség $v_{\text{átl}} = \Delta x/\Delta t$. Ez az arány a t_1 időpillanathoz tartozó P_1 pontból a t_2 időpillanathoz tartozó P_2 végpontig tartó egyenes meredeksége. Tekintsük most a 2-7/b ábrát. Az egyre rövidebb Δt_2, Δt_3, Δt_4,···, időintervallumokat véve, a kapott egyenesek meredeksége fokozatosan növekszik. Amennyiben a Δt rendkívül kicsinnyé válik, akkor a $\Delta x/\Delta t$ meredekség a görbe t_1 időpillanatbeli érintőjének iránytangenséhez közelít. Ebben a határérték-képzési folyamatban az időintervallum rövidülésével a helykoordináta is egyre kisebb lesz és egyenként mind Δx, mind Δt zérushoz tart. A $\Delta x/\Delta t$ *arány* (melyet *különbségi hányados*nak is nevezünk), egy jól meghatározott értékhez, a t_1 időpillanathoz tartozó érintő iránytangenséhez tart. Ezt az értéket nevezzük a t_1-hez tartozó v **pillanatnyi sebességnek.** A fentiekben leírt határérték-képzési folyamatot matematikailag a következőképpen jelöljük:

Pillanatnyi sebesség, v (a t időpontban)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Szavakban: „A v pillanatnyi sebesség a $\Delta x/\Delta t$ különbségi hányados határértékével egyenlő, midőn Δt zérushoz tart." A határértéket $\Delta x/\Delta t$ -vel jelöljük és az $x(t)$ függvény t szerinti deriváltjának nevezzük. A t-beli pillanatnyi sebesség geometriai jelentése, mint már említettük, az *x(t) függvény grafikonján a t pillanathoz tartozó pontban húzott érintő iránytangense.* (Ha az $x(t)$ görbe alakja analitikusan is megadható, akkor a deriválás algebrai úton is elvégezhető. Néhány függvény deriváltját a G-I függelék tartalmazza.) Megjegyezzük, hogy a *pillanatnyi sebesség* kifejezés helyett, ha nem érthető félre, gyakran röviden csak *sebességet* mondunk.

A 2-8 ábrán a pozitív x tengely mentén mozgó részecske helyzet-idő függvényábrája látható. A részecske először a pozitív x irányba mozog, majd sebességének irányát megváltoztatva visszatér a kiinduló pontba. A t_1 időpontban a görbe meredeksége pozitív, így a pillanatnyi sebesség is pozitív irányba mutat. A t_2 a meredekség 0, ami azt jelzi, hogy (ekkor fordul meg a test) a sebesség zérus. A t_3 időpontban a meredekség negatív, s ez azt mutatja, hogy a sebesség negatív irányú.



2-8 ábra
Egyenes vonalon mozgó részecske helyzet-idő függvényábrája

A **pillanatnyi sebesség** nagysága megegyezik a *pillanatnyi sebesség abszolút értékével.* A következőkben rövid magyarázatot fűzünk a sebességekkel kapcsolatban gyakran zavart okozó néhány tényhez. A sebesség szót – amint már kiderült – sokféle értelemben használjuk, mert maga a fogalom igen sokrétű. Sebességnek nevezzük a pillanatnyi sebességvektort, de gyakran a pillanatnyi sebesség abszolút értékét is. Hasonlóképpen az átlagsebesség szót használjuk a megtett út és összes idő hányadosának jelölésére, s gyakran az átlagsebesség-vektor helyett is. (Az utóbbit a teljes elmozdulás és az ehhez szükséges idő hányadosával értelmeztük.) A rövidített szóhasználat általában nem okoz gondot, amennyiben azonban az említett fogalmakat egyszerre és egymástól megkülönböztetve kívánjuk használni, akkor mindig a fogalom pontos nevét kell használni.* Felhívjuk továbbá a figyelmet arra, hogy ha a pillanatnyi sebesség definíciójához hasonló eljárást követünk a megtett utakkal, akkor a pillanatnyi sebesség abszolút értékével megegyező skaláris sebességhez jutunk. Az átlagsebességek esetén ez nem teljesül, hiszen az átlagsebesség nem egyezik az átlagsebesség-vektor nagyságával. Az indianapolisi 500-as autóverseny győztese pl. (beleértve a depókban való megállásokat is) 256 km/h átlagsebességet ért el. A verseny célpontja azonban megegyezett a starthellyel, így a teljes elmozdulás és ennek megfelelően az átlagsebesség-vektor is zérus. Nagyon fontos tehát, hogy a megtett útra és az elmozdulásra számított átlagsebességek közötti különbséget biztosan értsük. Szerencsére azonban a következőkben többnyire egy adott időpillanatra vonatkozó sebességértékekkel foglalkozunk, ahol az átlagsebességekkel kapcsolatos probléma nem lép fel.

2-2 PÉLDA

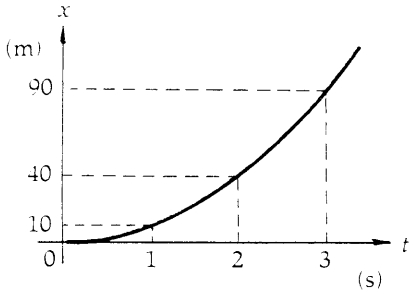
Egy pontszerű test az $x = 10t^2$ függvény szerint változtatja helyzetét, ahol x-et méterekben, t-t pedig másodpercben mérjük. Határozzuk meg; az átlagsebesség-vektort a) 2 s és 3 s közötti időintervallumban, valamint b) a 2,0–2,1 s-ig tartó időintervallumra.

MEGOLDÁS

Vázoljuk fel először az $x(t)$ grafikont (parabolát kapunk). Jelöljünk be néhány jellegzetes hely- és időértéket! (2-9 ábra.) Vezessük be az alábbi jelöléseket:

helyzet	idő
$x_1 = 40$ m	$t_1 = 2{,}0$ s
$x_2 = ?$	$t_2 = 2{,}1$ s
$x_3 = 90$ m	$t_3 = 3{,}0$ s

a) A 2 s és 3 s közötti időintervallumban az átlag sebesség-vektor:



2-9 ábra
A 2-2 példához

* Angol nyelven ezek a fogalmak kevésbé téveszthetők össze, mert külön szó jelöli a sebesség abszolút értékét (speed) és a sebesség vektort (velocity).

$$v_{átl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} = \frac{90\,\text{m} - 40\,\text{m}}{3\,\text{s} - 1\,\text{s}} = \frac{50\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 50{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A $t_2 = 2{,}1$ s időpontban a részecske az $x_2 = 10t^2 = 10 \cdot (2{,}1)^2 = 44{,}1$ m helyen van. A 2,0 s–2,1 s időtartamra vonatkozó átlagsebesség-vektort a

$$v_{átl} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{44{,}1\,\text{m} - 40\,\text{m}}{2{,}1\,\text{s} - 2{,}0\,\text{s}} = \frac{4{,}1\,\text{m}}{0{,}1\,\text{s}} = 41{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

összefüggés adja.

2-3 PÉLDA

A derivált definíciójában szereplő határérték-képzési eljárás illusztrálására hajtsuk végre a $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ műveletet az előző példában szereplő $x = 10t^2$ függvény szerint mozgó részecske pillanatnyi sebesség – idő függvényének meghatározására. Útmutatás: Vizsgáljuk x_2 helyzetét a t_1 és $t_2 = t_1 + \Delta t$ időpontban.

MEGOLDÁS

Tekintsük a $\Delta x = x_2 - x_1$ kicsiny elmozdulást, amelyet a részecske egy rövid $\Delta t = t_2 - t_1$ időtartam alatt tesz meg. Hajtsuk végre ezután a $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ határérték-képzési műveletet midőn Δt tart zérushoz. A t_1 időpillanatban a részecske a

$$x_1 = 10t_1^2$$

helyen, kis idővel később, a $t_2 = t_1 + \Delta t$ időpontban pedig a

$$x_2 = 10(t_1 + \Delta t)^2 = 10\left[t_1^2 + 2t_1\Delta t + (\Delta t)^2\right]$$

$$\Delta x = 20t_1\Delta t + 10(\Delta t)^2$$

helyen található. A Δt idő alatt bekövetkező Δx elmozdulás a

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10\left[t_1^2 + 2t_1\Delta t + (\Delta t)^2\right] - 10t_1^2$$

$$\Delta x = 20\,t_1\,\Delta t + 10(\Delta t)^2$$

alakban adható meg. Következésképpen a $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ különbségi hányados:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 20t_1 + 10(\Delta t)$$

A Δt időtartamot zérushoz közelítve a második tag is zérushoz tart, s eközben az első tag értéke változatlan, így a t_1 időpontban a v_1 pillanatnyi sebesség

$$v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 20t_1$$

adódik. Mivel a t_1 időpontra vonatkozóan semmilyen kikötést sem

tettünk, a kapott összefüggés tetszőleges t időpontban érvényes. Az általános sebesség – idő függvény tehát:

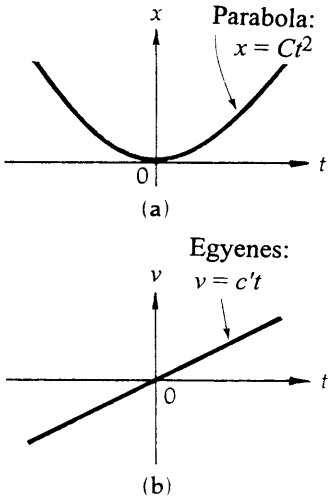
$$v = 20t$$

A $v = v(t)$ grafikon egyenes vonal és pozitív és negatív t értékek esetén egyaránt érvényes. Figyeljük meg, hogy $t = 2$ s esetén $v = 40{,}0$ m/s sebesség adódik. Ez az eredmény igen közel esik az előző példában a 2,0 s – 2,1 s időintervallumra kapott $v_{átl} = 40{,}1$ m/s értékhez.

A későbbiekben gyakran használjuk majd az előző feladatban kapott általános szabályt, ha x másodfokú függvény (azaz $x = Ct^2$, ahol C állandó), akkor a $v = dx/dt$ derivált $v = C't$ lineáris függvény, ahol C' a C-től különböző állandó. Általában fennáll

$$\text{Ha} \quad x = Ct^n, \quad \text{akkor} \quad \frac{dx}{dt} = nCt^{n-1} \qquad \text{(G-I. függelék 5. szabály)}$$

A 2-10 ábra mutatja a másodfokú függvényekre vonatkozó szabályt. A $v = v(t)$ függvényábra minden pontban az $x = x(t)$ függvényábra megfelelő pontbeli érintőjének meredekségét adja meg. Negatív t értékek esetén a meredekség is negatív és abszolút értékben annál nagyobb, minél meredekebb a görbe. A $t = 0$ pontban az érintő iránytangense zérus. Pozitív t-értékekre pedig pozitívvá válik.



2-10 ábra
A b) ábrán látható egyenes vonal minden pontban az a)-ábrán látható parabola érintőjének dx/dt meredekségét adja meg.

2.6 A gyorsulás

A legérdekesebb mozgásfajták azok, amelyeknek a sebessége változik. Mindenki, aki már vezetett autót, s rálépett a gázra, tudja, hogy mindennapi értelemben a *gyorsulás* a gépkocsi sebességének növekedését jelenti. A fizikában azonban ez a kifejezés általánosabb értelmet nyer és a lassulást is magában foglalja. Ha a $\Delta t = t_2 - t_1$ időtartam alatt egy test pillanatnyi sebessége $\Delta v = v_2 - v_1$-értékkel változik, akkor átlagos gyorsulása definíció szerint

Átlagos gyorsulás

$$a_{átl} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \textbf{(2-5)}$$

A definíció tartalmazza mind a gyorsulást ($a_{átl}$ pozitív), mind pedig a lassulást ($a_{átl}$ negatív). A gyorsulás tehát az időegységre eső sebességváltozás. Az SI rendszerben ez m/s osztva másodperccel, azaz m/s^2.

A pillanatnyi gyorsulást a pillanatnyi sebesség definíciójához hasonlóan határértékként értelmezhetjük, azaz a pillanatnyi gyorsulás a $\Delta v/\Delta t$ különbségi hányados határértéke, midőn Δt zérushoz tart[4].

Pillanatnyi gyorsulás

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad \textbf{(2-6)}$$

Szavakban: „a gyorsulás egyenlő a $\Delta v/\Delta t$ különbségi hányados határértékével, midőn Δt zérushoz tart. Ezt a határértéket a sebesség idő szerinti deriváltjának nevezzük és dv/dt-vel jelöljük. a $v = v(t)$ grafikonon a t pillanatbeli a gyorsulást *a sebességgrafikon t időpillanathoz tartozó pontjában meghúzott érintő iránytangense* adja meg. A *gyorsulás* szó az esetek többsé-

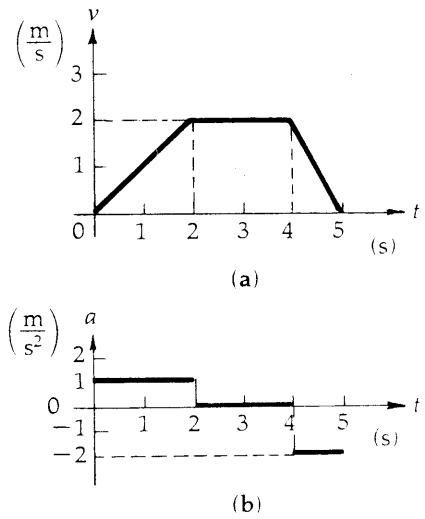
[4] A pillanatnyi gyorsulás második deriváltként is kifejezhető. Mivel

$$a = \frac{dv}{dt}; \quad a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

gében *pillanatnyi gyorsulást* jelent, ha kifejezetten $a_{átl}$-ról kívánunk beszélni, akkor az *átlagos gyorsulás* kifejezést használjuk.

A gyorsulás fogalmának megértését segítheti a következő néhány megjegyzés. Ha egy test sebessége és a gyorsulása azonos előjelű, akkor a test gyorsul. Ha mind v mind a pozitív, akkor a test pozitív irányban, ha pedig v és a is negatív akkor negatív irányban gyorsul. Amennyiben a gyorsulás és a sebesség iránya ellentétes, akkor a test lassul. Ha például v pozitív és a negatív, akkor a test pozitív irányban lassulva mozog. Amennyiben a sebesség negatív és a gyorsulás pozitív, akkor a test negatív irányba mozog és lassul.

2-11 ábra
A 2-4 példához



2-4 PÉLDA

Az $x = 0$ pontból induló részecske a 2-11/a ábrán látható sebesség – idő függvény szerint mozog. Vázoljuk fel a pillanatnyi gyorsulást az idő függvényében! Tüntessük fel a mozgás jellegzetes pontjainak megfelelő numerikus értékeket is!

MEGOLDÁS

Az a gyorsulás meghatározására használjuk fel az $a = dv/dt$ összefüggést. A derivált azokban a tartományokban, ahol v lineárisan változik t-vel, megegyezik a $\Delta v/\Delta t$ különbségi hányadossal. A $t_0 = 0$ és $t_1 = 2$ s időintervallumban a függvénygörbe meredeksége pozitív és állandó és az

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_1 - v_0)}{(t_1 - t_0)} = \frac{\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0\right)}{(2\,\text{s} - 0)} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

összefüggéssel adható meg. A $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s közötti időintervallumban a meredekség és így a gyorsulás is zérus. A $t_2 = 4$ s-tól a $t_3 = 5$ s-ig tartó szakaszon a függvénygörbe meredeksége negatív és állandó:

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_3 - v_2)}{(t_3 - t_2)} = \frac{\left(0 - 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(5\,\text{s} - 4\,\text{s})} = -2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

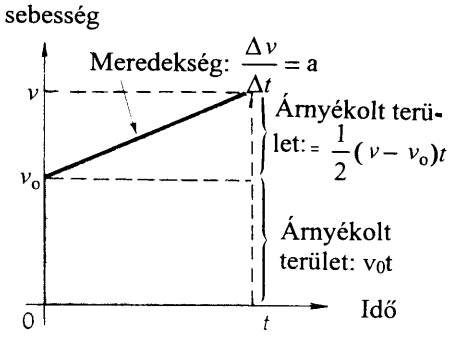
A 2-11/b ábrán a 2-11/a ábrán megadott sebesség – idő függvénynek megfelelő gyorsulás – idő függvény látható.

2.7 Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikai egyenletei

Miután definiáltuk az egyenes vonalon mozgó pontszerű test *x helyzetét, v sebességét és* a *gyorsulását*, most néhány, a feladatmegoldásban rendkívül hasznos kinematikai összefüggést vezetünk le. Ezek az összefüggések semmi olyan új információval nem szolgálnak, amit a helyzetre, sebességre és gyorsulásra vonatkozó definíciók lényegében ne tartalmaznának. Mégis olyan hasznos összefüggéseket fejeznek ki explicit formában, amelyek az egyenesvonalú mozgással kapcsolatos feladatok megoldásának kiindulópontjául szolgálhatnak.

Kiindulásul vegyünk fel egy egydimenziós koordinátarendszert, amelynek tengelye a vizsgált részecske mozgásának irányába mutat. Bár a későbbiekben általánosabb esetekkel is foglalkozunk, most szorítkozzunk az

állandó gyorsulású mozgások vizsgálatára. Ez a mozgás elég gyakori, így mozognak például a Föld közelében szabadon eső testek, amelyek g gyorsulása állandó (feltéve természetesen, hogy a légellenállás elhanyagolható). A következőkben a jelölések egyszerűsítésére az időmérés $t_0 = 0$ kezdeti időpontot mindig a mozgás kezdetével azonosítjuk. Azért, hogy a megoldás a legáltalánosabb kezdeti feltételeket kielégítse, feltesszük, hogy t_0 kezdeti időpontban adott az x_0 kezdeti elmozdulás és v_0 kezdeti sebesség. Állandó gyorsulású mozgások esetén az a pillanatnyi gyorsulás megegyezik az $a_{átl}$ átlagos gyorsulással:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

amiből átrendezéssel a

$$\boxed{v = v_0 + at \qquad \text{(állandó } a \text{ esetén)}} \qquad \textbf{(2-7)}$$

összefüggéshez jutunk. Ez a kinematikai feladatok megoldásában rendkívül hasznos un. első kinematikai egyenlet. Ha ezt a sebesség – idő összefüggést grafikusan ábrázoljuk (2-12 ábra), akkor a kapott egyenesből geometriai megfontolásokkal megkaphatjuk, hogy hogyan változik a részecske helyzete az időben. Gondolkozzunk a következőképpen. Legyen a $t_0 = 0$ időpontban a kezdősebesség v_0. Egy későbbi t időpontban a sebességet a $v = v_0 + at$ egyenes adja, amelynek meredeksége éppen $a = \Delta v/\Delta t$. Az ábrán az egyenes alatti satírozott terület két részre bontható. Az alsó, sötétebb téglalap területe $v_0 t$, a fölső, enyhébben árnyékolt háromszög területe pedig $1/2(v - v_0)t$. Összeadva ezeket a területeket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix}\text{Az egyenes alatti} \\ \text{teljes terület}\end{bmatrix} = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t = \left(v_0 + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2}\right)t$$

$$\text{Terület} = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t$$

Az utóbbi formulában a zárójelben éppen a kezdeti és a végsebesség átlaga szerepel, ami a gyorsulás állandósága miatt a $v_{átl} = \Delta x/\Delta t$ átlagsebesség - vektorral egyenlő. Felhasználva, hogy $t_0 = 0$ következtében fennáll a $\Delta t = t$-összefüggés, a $\Delta x = x - x_0$, valamint a $\Delta x = v_{átl} t$ formulák egybevetéséből azt kapjuk, hogy

$$x - x_0 = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \qquad \text{(állandó } a \text{ esetén)} \qquad \textbf{(2-8)}$$

Összehasonlítva a két utolsó egyenletet, látható, hogy az $x - x_0$ eredő elmozdulás megegyezik a $v = v(t)$ grafikon alatti területtel. Az eredő elmozdulás és a sebesség – idő függvényábra alatti terület[5] egyezése nemcsak állandó gyorsulású mozgásokra, hanem általánosan is igaz, és akkor is felhasználható, ha bonyolult esetekben a sebesség, nem-lineáris függvénye az időnek.

Behelyettesítve a (2-7) egyenletbe a $v = v_0 + at$ összefüggést, majd az eredményt átrendezve megkapjuk a második kinematikai egyenletnek nevezett formulát:

---

[5] A függvényt ábrázoló görbe alatti terület dimenziója a változók által reprezentált fizikai mennyiségek dimenziójának szorzata. Például a 2-11 ábrán *sebességet* szorzunk *idővel*, hogy területet kapjunk, ami most *hosszúság* dimenziójú:

$$\left[\frac{\text{hossz}}{\text{idő}}\right][\text{idő}] = [\text{hossz}]$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{(állandó gyorsulás esetén)} \tag{2-9}$$

A harmadik szintén nagyon hasznos kinematikai egyenlethez úgy juthatunk el, ha a (2-7) és (2-9) egyenletekből eliminálјuk az időt. Eredményül a

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{(állandó } a \text{ esetén)} \tag{2-10}$$

formulát kapjuk.
Ez utóbbi összefüggés olyan feladatok lehet hasznos, amelyekben az időt nem ismerjük.

A kinematikai egyenletek tovább egyszerűsíthetők, ha a koordinátarendszer kezdőpontját ott vesszük fel, ahol a részecske a $t_0 = 0$ időpontban tartózkodik. Ekkor $x_0 = 0$ és így két kinematikai egyenlet is egyszerűbbé válik. Természetesen az origó nem mindig választható meg így, amennyiben azonban ez lehetséges, akkor már kezdettől fogva eggyel kevesebb paraméterrel kell dolgoznunk.

Mivel a **kinematikai egyenletek** a továbbiakban rendkívül hasznosak, mégegyszer összefoglaljuk őket. *Minden egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgással kapcsolatos probléma a következő három egyenlet felhasználásával oldható meg:*

Az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikai egyenletei

$$v = v_0 + at \tag{2-11}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{2-12}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{2-13}$$

(állandó gyorsulás esetén)

További hasznos összefüggéseket kaphatunk az átlagsebesség felhasználásával. Ha a gyorsulás állandó, akkor:

$$v_{\text{átl}} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{2-14}$$

$$x = x_0 + v_{\text{átl}} t \tag{2-15}$$

A fenti egyenletek – mint már hangsúlyoztuk – csak állandó gyorsulás mellett érvényesek. Ha a gyorsulás időben változik, akkor az integrálszámítás felhasználásával nyerhetünk a sebességre és a helykoordinátára vonatkozó összefüggéseket (2-6, 2-7 példa). Megjegyezzük még, hogy bár a helykoordináta jelölésére mindig x-et használtunk, természetesen hasonló egyenletek írhatók fel az y és z irányú egyenesvonalú mozgásokra is.

Megjegyzés az előjelekre vonatkozóan: A kinematikai egyenleteket mindig pontosan a (2-11) – (2-15) formulákkal megadott alakban kell felírni. A kinematikai egyenletek ugyanis bármely koordinátarendszerben azonos formában érvényesek, *tekintet nélkül arra, hogy milyen irányt választottunk pozitívnak, ill. negatívnak.* Egy speciális koordinátarendszer kiválasztása (s ezzel együtt a tengelyirányok kijelölése) tehát nem változtat az általános kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségek közötti kapcsolatokon. A koordinátarendszer választás csak az adatok, ill. a paraméterek előjelét befolyásolja.

A szabadon eső testek gyorsulás-vektora például mindig lefelé mutat. E vektor nagyságát mindig g jelöli.

A gravitációs gyorsulás
a föld felszínén[6] $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$
(három értékes jegyre)

Amennyiben a felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak, akkor a gravitációs gyorsulás helyére a képletekben $-g$-t kell írni, ha választásunk szerint a lefelé mutató irány a pozitív, akkor a gyorsulás $+g$-vel egyenlő.

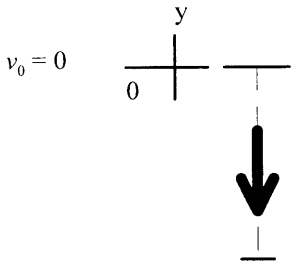
2-5 PÉLDA

Kezdősebesség nélkül elejtettünk egy labdát. A gravitációs gyorsulás 9,81 m/s^2. Hol lesz a labda abban a pillanatban, amikor sebessége 4,9 m/s. Oldjuk meg a problémát úgy is, hogy a felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak és úgy is, hogy a lefelé mutatót.

MEGOLDÁS

A függőleges mozgások esetén a hely jelölésére az y-t használjuk. A koordinátarendszer origója legyen abban a pontban, ahol a labda a $t_0 = 0$ időpillanatban volt. Ekkor a kezdeti helyzet y_0 koordinátája zérus. A választott pozitív irányt egy rövid, a pozitív irány felé mutató tengelydarabkával jelöljük.

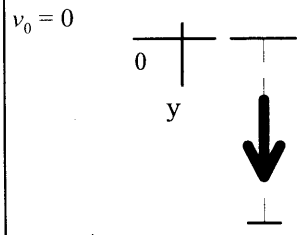
A pozitív irány felfelé mutat



Feltételezve, hogy a *felfelé* mutató irány pozitív, a labda gyorsulása $a_y = -9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Adatok: $a_y = -9{,}8\ \text{m/s}^2$
$v_0 = 0$
$v = -4{,}9\ \text{m/s}$
$y = ?$

A pozitív irány lefelé mutat



Feltételezve,hogy a *lefelé* mutató irány pozitív, a labda gyorsulása $a_y = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Adatok: $a_y = 9{,}8\ \text{m/s}^2$
$v_0 = 0$
$v = 4{,}9\ \text{m/s}$
$y = ?$

Összehasonlítva ezeket a mennyiségeket a kinamatikai egyenletekkel észrevehetjük, hogy a (2-13) egyenletben a keresett ismeretlen kivételével minden más mennyiség értékét ismerjük. Így mindkét esetben ugyanazt a kinematikai egyenletet kell felírnunk.

Általános egyenlet

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

Általános egyenlet

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

[6] Ha másképpen nem rendelkezünk, akkor a tankönyv további részében g-t mindig a fenti értékkel vesszük egyenlőnek. Valójában a Föld forgása miatt g-nek a tenger szintjén mért értéke is változik a földrajzi szélességgel. Ezt a „centrifugális" hatást a 14. fejezetben tárgyaljuk. A g földrajzi szélességgel való változásához az is hozzájárul , hogy a tengerszintnek a Föld középpontjától mért távolsága is változik.

Figyeljük meg, hogy bár előre tudjuk, hogy a baloldali – oszlopban y értéke negatív lesz, mégsem vesszük figyelembe ezt a negatív előjelnek a képletekben való feltüntetésével. A képlet a pozitív irány kiválasztásától függetlenül érvényes. A végeredmény negatív előjelét maga a megoldás adja.

A számértékek behelyettesítése

$$\left(-4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0^2 + 2\cdot\left(-9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(y-0)$$

$$24{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \left(-19{,}62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)y$$

Megoldva y-ra

$$y = \frac{24{,}0\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{-19{,}62\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = -1{,}22\ \mathrm{m}$$

Mivel a *felfelé* mutató irányt választottuk pozitívnak a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a labda 1,22 m-rel kiindulópontja *alatt* éri el a megadott sebességet.

A számértékek behelyettesítése

$$\left(4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0^2 + 2\cdot\left(9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(y-0)$$

$$24{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \left(19{,}62\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)y$$

Megoldva y-ra

$$y = \frac{24{,}0\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{19{,}62\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}22\ \mathrm{m}$$

Mivel a *lefelé* mutató irányt választottuk pozitívnak a pozitív eredmény azt jelenti hogy a labda 1,22 m-rel kiindulópontja *alatt* éri el a megadott sebességet.

2.8 A kinematikai egyenletek levezetése differenciálszámítással

A kinematikai egyenletek az differenciál- és integrálszámítás felhasználás nagyon egyszerűen kaphatók meg. Ez a levezetés azonban csak azok számára lesz érthető, akik az integrál fogalmával és néhány műveleti szabállyal tisztában vannak. (A könyvünkben felhasznált integrálási formulákat a G függelék tartalmazza.)

A

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

definiáló egyenletek a deriválási művelet megfordításával az integrálással a

$$x = \int v\,dt \qquad \text{és} \qquad v = \int a\,dt$$

alakban is kifejezhetők. *Állandó gyorsulás* esetén a sebességre

$$v = \int a\,dt = a\int dt = at + C_1$$

adódik, ahol a C_1 integrálási állandó a „kezdeti feltételek" figyelembevételével határozható meg, azaz $t = 0$ időpontban a sebesség $v = v_0$. Behelyettesítve a kezdeti feltételt a,

$$v = at + C_1$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$v_0 = (a)\cdot(0) + C_1$$

ahonnan $C_1 = 0$. Ezzel éppen az első kinematikai egyenlethez jutottunk:

$$\boxed{v = v_0 + at \qquad \text{(állandó } a \text{ esetén)}}$$

Tovább léphetünk a levezetésben, ha a sebességre kapott kifejezést behelyettesítjük a helykoordinátát meghatározó integrálba.

$$x = \int v dt = \int (v_0 + at) dt$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C_2$$

A C_2 integrálási állandót ismét a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg, azaz abból, hogy $t = 0$ időpontban a mozgó test az x_0 helyen van. Ebből azonnal adódik a második kinematikai egyenlet:

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{(állandó gyorsulás esetén).}}$$

Az első tag a részecske kezdeti helyzete, azaz a helykoordináta a $t = 0$ időpontban, a másik két tag összege pedig éppen a $(0, t)$ időintervallum alábbi eredő elmozdulás. Az eredmény megegyezik a geometriai megfontolások alapján levezetett 2-12 egyenlettel. Ezen nem is csodálkozhatunk, mert a kétféle levezetés – a grafikus és az analitikus – lényegében egyenértékű, hiszen az integrál geometriai jelentése éppen a görbe alatti terület. A harmadik kinematikai egyenlet az első kettőből pusztán algebrai átalakítással adódott, ezért a differenciálszámítás alkalmazása itt nem szükséges.

2-6 PÉLDA

Egy a $t = 0$ időpillanatban a koordinátarendszer origójából induló részecske a pozitív x tengely mentén mozog. Helyzete az idő függvényében az

$$x = 4t^3$$

függvény szerint változik, ahol x értékét méterben t értéket másodpercben mérjük. Határozzuk meg a) a v sebességet, b) és az a gyorsulást a $t = 2$ s időpontban.

MEGOLDÁS

a) Mivel $v = dx/dt$, deriváljuk az $x = x(t)$ összefüggést az idő szerint. (A deriválási szabályokat a G függelék tartalmazza.)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^3\right) = 12t^2$$

ahol v értékét m/s-ban, t értékét másodpercben mérjük.
Vegyük észre, hogy a 12 együttható mértékegysége m/s^3, ami abból adódik, hogy az egyenletnek dimenzióra nézve helyesnek kell lennie. A $t = 2$ s időpontban a sebesség behelyettesítésével:

$$v = \left(12 \frac{m}{s^3}\right)(2\,s)^2 = \boxed{48{,}0 \frac{m}{s}}$$

b) A gyorsulást a sebesség-idő függvény deriváltja adja.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(12t^2\right) = 24t$$

ahol a értéket m/s^2-ben, t értéket másodpercben mérjük
Az egyenletben szereplő 24 együttható mértékegysége m/s^3, ami szintén abból következik, hogy az egyenletnek dimenzióra helyesnek kell lennie. A gyorsulás értéke a $t = 2$ s időpontban:

$$a = \left(24 \frac{m}{s^3}\right)(2\,s) = 48 \frac{m}{s^2}$$

2-7 PÉLDA

Egy szánkón csúszó, nagy gyorsulások hatásának vizsgálatára szolgáló kísérleti rakéta az

$$a = 3t + 5$$

összefüggés szerint gyorsul. Milyen messzire jut el $t = 2$ s időtartam alatt?

MEGOLDÁS

A koordinátarendszer origóját vegyük fel a szán kiinduló helyzetében, azaz $t = 0$ időpontban $x_0 = 0$ és $v_0 = 0$. Az $a = \frac{dv}{dt}$ összefüggésből következik, hogy

$$dv = adt$$

Helyettesítsük be az $a = (3t+5)$ összefüggést és integráljuk[7] az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int_0^v dv = \int_0^t (3t+5)\,dt,$$

$$v_0^v = \left[\frac{3t^2}{2} + 5t\right]_0^t$$

$$v - 0 = \left(\frac{3t^2}{2} + 5t\right) - \left(\frac{3(0)^2}{2} - 5(0)\right) \qquad \textbf{(2-16)}$$

$$v = \frac{3t^2}{2} - 5t\,.$$

A sebesség $v = \frac{dx}{dt}$ definíciójából adódik, hogy $dx = vdt$. Írjuk be az utóbbi összefüggésbe a v függvényre kapott (2-16) eredményt és integráljuk az egyenletet a $t = 0$, $x_0 = 0$ kezdeti feltétellel!

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(\frac{3t^2}{2} + 5t\right)dt,$$

$$[x]_0^x = \left[\frac{3t^3}{6} + \frac{5t^2}{2}\right]_0^t$$

$$x - 0 = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{5t^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{2} + \frac{5(0)^2}{2}\right)$$

$$x(2) = \frac{t^3}{2} - \frac{5t^2}{2}$$

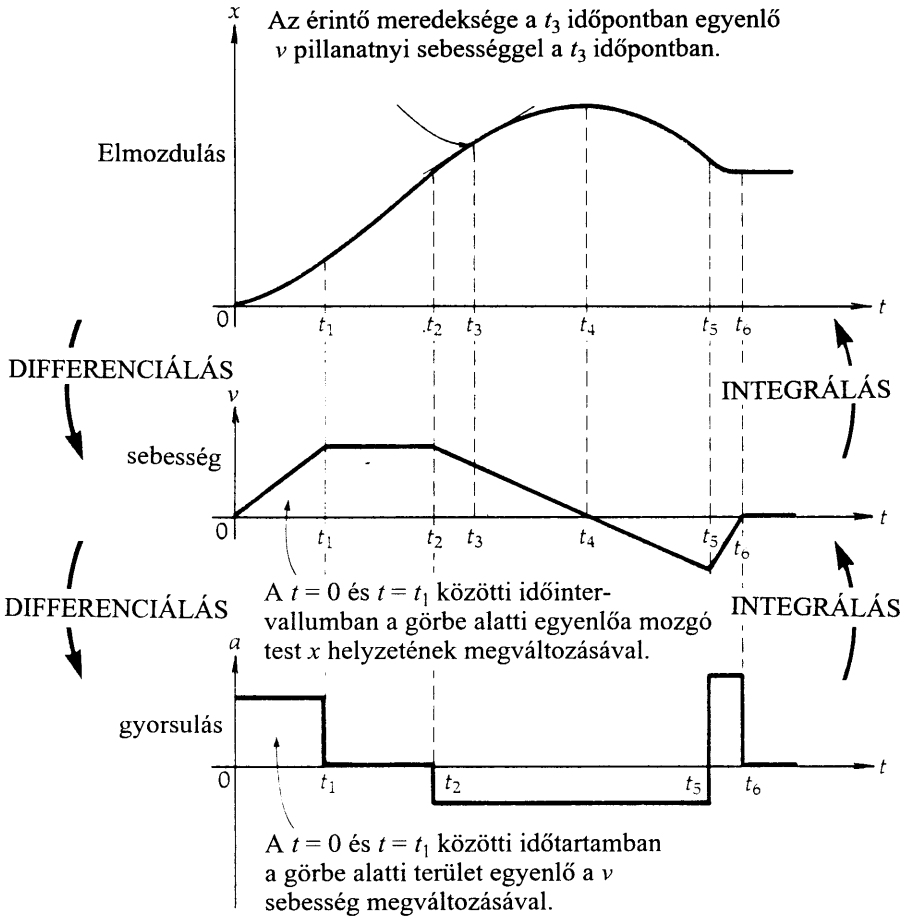
$t = 2$ esetén

$$x = \frac{(2)^3}{2} - \frac{5(2)^2}{2} = \boxed{14{,}0\ \text{m}}$$

---

[7] A hatványfüggvény integrálási szabálya(G-II Függelék)

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$



2-13 ábra

Az ábra bemutatja az origóból a zérus kezdősebességgel induló és a pozitív x tengely mentén mozgó test elmozdulás-, sebesség- és gyorsulás- idő függvényét. A $t = 0$ és $t = t_1$ közötti időtartamban az elmozdulás-időgörbe meredeksége egyenletesen nő, és ennek megfelelően nő a sebesség is. A t_1 és t_2 intervallumban a görbe meredeksége állandó, ezért a sebesség is konstans. A t_4 időpontban az elmozdulás-időgörbe meredeksége zérus, így a sebesség is zérus. A (t_4–t_5) időintervallumban az elmozdulás- időgörbe meredeksége negatív, így itt a sebesség is negatív. Végül t_6 időpont után a test nyugalomba kerül, tehát a sebesség is zérus. Az ábra jól mutatja, hogy a sebesség az elmozdulás-idő függvényábra meredekségével egyenlő ($\Delta x/\Delta t = v$). A sebesség-idő görbe meredeksége pedig a gyorsulás ($\Delta v/\Delta t$) = 0.

Integrálással fordított irányban végezhetjük a műveleteket. Kezdetben a gyorsulás állandó. Az idő múlásával a gyorsulás-idő ábra alatti terület adja a sebességet (amelynek értéke kezdetben zérus). Mivel a terület egyenletesen nő, a sebesség változását egy egyenes szemlélteti. Hasonlóképpen a sebességgörbe alatti terület növekedése meghatározza a elmozdulás-idő függvényt. (Ez utóbbi szintén zérusról indul. Megmutatható, hogy mivel a sebesség-idő görbe egyenes vonal, az elmozdulás parabolikusan változik az idővel.) A t_4 és t_6 közötti időtartamban a sebességgörbe az y tengely alá kerül, így a görbe alatti terület negatív, ez azt jelenti, hogy az elmozdulás csökken. Példánkban a sebességgörbe alatti teljes terület pozitív, ezért az elmozdulás végső értéke is pozitív. A gyorsulásgörbe alatti összterület zérus, azaz a végsebesség – miként a kezdeti is – zérus.

2.9 Az elmozdulás, sebesség és gyorsulás közötti összefüggés grafikus értelmezése

Az $x(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ mennyiségek grafikus ábrázolása érdekes és hasznos összefüggések felismerésére vezet. Tegyük fel, hogy ismerjük egy adott mozgás $x(t)$ elmozdulás-idő függvényét. A sebesség, mint megállapítottuk, az $x(t)$ függvény időszerintideriváltja, azaz minden pillanatban megegyezik az $x(t)$ függvénygörbéhez húzott *érintő meredekségével* (2-13 ábra). Hasonlóképpen a gyorsulást egy adott pillanatban a sebesség-idő függvénygörbe *érintőjének meredeksége* adja meg. Ezek az összefüggések lehetővé teszik a sebesség – idő és gyorsulás – idő függvények görbéinek grafikus meghatározását a hely – idő függvénygörbe alapján.

Az eljárás azonban fordítva is működik. Egy függvény integrálása geometriailag a *függvénygörbe alatti terület meghatározása*. Így adott v(t) sebesség-idő függvény esetén az elmozdulás-idő függvényt úgy kaphatjuk meg, hogy a sebesség-idő görbe alatti területet a $t = 0$ időponttól kezdve ábrázoljuk az idő függvényében. (Ez az eljárás nem adja meg a kezdő pont x_0 koordinátáját, hiszen ez a kezdeti feltételekből adódó integrálási állandó. Fizikailag x_0 értéke a koordinátarendszer kezdőpontjának megválasztásától függ.) Az $a(t)$ gyorsulás-idő függvényből a fentiekhez hasonlóan kaphatjuk meg a sebesség-idő függvényt.

2.10 A dimenzióanalízis

Alapvetően a fizikai egyenletek csak akkor teljesülhetnek, ha a bennük szereplő tagok **dimenziója** azonos. Ennek alapján egy egyenlet „összhangja" ellenőrizhető. Mit jelentenek a dimenziók? A sebesség dimenzióját például úgy kapjuk, hogy hosszúságot osztunk idővel. Ezt [v] = [L/T] összefüggéssel jelöljük. Vegyük észre, hogy a dimenzió nem azonos a mértékegységgel! A *hosszúság* és *idő* dimenziót jelent, amelyek mértékegysége pl. méter, kilométer, ill. másodperc, óra, év stb. Ahogyan a hétköznapi életben almákat nem adhatunk össze autókkal, ugyanúgy a fizikai egyenletekben sem adhatók össze nem „összeillő" tagok. Az egyenletekben csak *azonos dimenziójú tagok szerepelhetnek.*

Példaként vizsgáljuk meg a dimenziók egyezése szempontjából a következő kinematikai egyenletet.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Dimenziók:
$$[L] = [L] + \left[\frac{L}{T}\right][T] + \frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{[T]}\left[T^2\right]$$

Az egyenletben szereplő numerikus együtthatóknak (a jobb oldal utolsó tagjában 1/2) nincs dimenziójuk, így a dimenzióanalízis szempontjából nincs jelentőségük, elhagyhatók. A dimenziókkal az algebrai mennyiségekhez hasonlóan számolhatunk. Az azonos dimenziókkal, pl. törtet egyszerűsíthetünk, így adott esetben azt kell kimutatnunk, hogy az egyenlet minden tagja hosszúság dimenziójú.

$$[L] = [L] + \left[\frac{L}{T}\right][T] + \left[\frac{L}{T^2}\right]\left[T^2\right]$$

$$[L] = [L] + [L] + [L]$$

A dimenzióanalízis a feladatmegoldás során a számolási és egyes esetekben az elvi hibák felderítésének hasznos módszere. Amennyiben egy egyenletben nem összeillő dimenziók szerepelnek, hibát követtünk el. Természetesen a dimenzióbeli egyezés még nem biztosíték arra, hogy helyesen számoltunk, hiszen a dimenzió nélküli számértékekben tévedhettünk.

2.11 Példák – magyarázattal

A fizika tankönyvek példái első pillantásra gyakran unalmasnak és együgyűnek tűnnek. Semmi izgalmat nem érzünk, ha azt kell kiszámítanunk, hogy hová jut el 2 s alatt egy elhajított tárgy, vagy mennyi idő alatt csúszik le a lejtőn egy jégdarab. Az adott feladatok mögött azonban figyelmet lekötő gondolatok, rejlenek. A newtoni mechanika az alkotó emberi szellem egyik csúcsteljesítménye. A mechanika tanulás kezdetén azonban – ahhoz, hogy a fizikai gondolat élesen kirajzolódjék – egyszerű, a lényegtelen részletek özönétől mentes problémákkal kell foglalkoznunk. Így mindig rá tudunk mutatni az adott probléma leírása mögött húzódó *gondolkozási módszerre* is. Ez az a módszer, ami pl. lehetővé tette, hogy ember lépjen a Holdra!

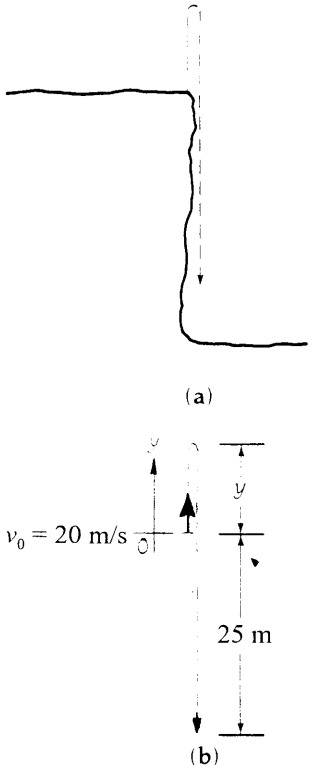
Ebben a fejezetben olyan példákat választottunk, amelyek megoldási módszere tetszőleges kinematikai feladat megoldására alkalmazható. A megoldások elkerülhetetlenül hosszadalmasak és részletesek, hiszen „hangosan gondolkozunk", hogy megmutassuk a mechanikai problémák megoldására használható általános módszereket. Természetesen az olvasótól (diáktól) nem várunk hasonló részletességgel kidolgozott feladatmegoldásokat. A „jó matematikai stílus" azonban éppoly természetes követelmény, mint az irodalmi esszékben a szép magyar fogalmazás. Gyakran néhány magyarázó szó elegendő ahhoz, hogy egy feladat gondolatmenete könnyen követhető legyen. Alkalmazzuk ezeket a magyarázatokat. (Emlékeztetünk arra a sok bosszúságra, amit a túlságosan tömören megírt tankönyvek megértése okoz.) Legyen a megoldás minden lépése kristálytiszta! *Különösen fontos, hogy a kezdeti lépés világos legyen, s biztosan kiderüljön, hogy a megoldás milyen alapelvre épül fel.* Ez azzal a további előnnyel is jár majd, hogy a tanulás során mindenki egyre logikusabban rendezi gondolatait, s a házifeladatok megoldása is könnyebbé válik.

2-8 PÉLDA

Egy labdát a 2-14/a ábrán látható módon 20 m/s sebességgel felfelé hajítottunk egy szakadék széléről. A nehézségi gyorsulás értékét vegyük 10 m/s^2-nek! a) Milyen magasra emelkedik a kiinduló ponttól a labda? b) Mennyi idő múlva lesz a labda 25 m-rel kezdeti helyzete alatt?

MEGOLDÁS

1. Ismerjük fel a *feladattípust*; a labda egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgást végez, tehát alkalmazhatók a kinematikai egyenletek!
2. Készítsünk *vázlatot* a feladathoz ! (2-13/b ábra) Vegyünk fel egy függőlegesen felfelé mutató y tengelyű koordinátarendszert! Az origó legyen a labda elhajítási helye!
3 Állítsuk össze az ismert adatokat és az ismeretleneket! (Ügyeljünk arra, hogy összeillő mértékegységeket használjunk! Ez most nem okoz gondot, mert az adatok SI-mértékben vannak megadva.)



2-14 ábra
2-8 példához

a) Határozzuk meg először, hogy milyen magasra jut a labda! „Részproblémaként" a pályájának csúcspontján zérus végsebességet elérő, felfelé hajított labda problémájával kell foglalkoznunk.

$y_0 = 0$
$v_0 = 20$ m/s
$a = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Az y irányt felfelé választottuk pozitívnak,ezért a lefelé mutató gyorsulás negatív.)
$v = 0$
$y = ?$

4. *Hasonlítsuk össze az adatokat és az ismeretleneket a kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségekkel!* Megállapítható, hogy a (2-13) egyenletben a keresett távolság kivételével minden más paramétert ismerünk. Írjuk fel az általános képletet, oldjuk meg y-koordinátára, majd helyettesítsük be az adatokat[8]!

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + y_0 = \frac{0 - (20)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2\left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} + 0 = 20\,\text{m}$$

b) Most azt a teljes időtartamot keressük, amit a labda a levegőben tőlt, mindaddig amíg 25 m-rel a kiindulásipont alá érkezik. Vegyük észre, hogy a mozgást nem szükséges két részre bontani. Nem kell tehát először meghatározni azt az időtartamot, amíg a labda a csúcspontra ér, majd ehhez hozzáadni a csúcspontból való esés idejét. *A kinematikai egyenletek, függetlenül attól, hogy a labda felfelé vagy lefelé mozog, mindaddig változatlan formában érvényesek, amíg a labda pusztán a gravitáció hatására mozog.* Így a kezdő- és véghelyzet koordinátáját a képletbe beírva a kapott egyenletből meghatározható a mozgás időtartama anélkül, hogy bármilyen közbülső idő tartamot figyelembe kellene venni. A b) kérdés természetesen új problémát vet fel, ekkor a végsebesség már nem zérus az $y = -25$ m helyzetben, s a meghatározandó ismeretlen a t idő.

$y_0 = 0$
$v_0 = 20$ m/s
$a = -10$ m/s²
$y = -25$ m
$t = ?$
$v = ?$

(Ha ezt az új adatsort hasonlítjuk össze a kinematikai egyenletekkel, akkor megállapíthatjuk, hogy a (2-12) egyenletben a t idő az egyetlen ismeretlen paraméter. Mint mindig, ismét az általános egyenlettel kezdjük.)

Az általános egyenlet: $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Az egyenlet másodfokú, ezért először t csökkenő hatványai szerint rendezzük, majd behelyettesítjük az adatok számértékeit:

$$y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0$$

[8] Ezt a lépést illetően két iskola létezik. A tanárok egy része amellett van, hogy a feladatot először paraméteresen oldjuk meg, s a számértékeket csak a végén helyettesítsük be. („Kevesebb a hiba, ha betűkkel számolunk, mint ha numerikusan.") Mások azt javasolják, hogy a számértékeket azonnal helyettesítsük be a kiinduló egyenletekbe. („Szabaduljunk meg azonnal a zérus értékű tagoktól, és szerezzünk gyakorlatot a hibátlan numerikus számolásban!") E módszerek között a könyvet tanító tanárok bizonyára választanak majd.

$$\frac{1}{2}(-10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(t^2)+(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}})(t)+[0-(-25\ \text{m})]=0$$

Egyszerűsítve, majd tényezőkre bontva az egyenletet[9], azt kapjuk, hogy

$$t^2-4t-5=0 \qquad \text{(ahol } t\text{-t másodpercben mérjük)}$$
$$(t-5)(t+1)=0$$
$$t=5\ \text{s} \quad \text{és} \quad t=-1\text{s}.$$

Mivel a kinematikai egyenlet a mozgást csak $t > t_0$ esetére írja le, ebben a példában az egyenlet negatív gyökérnek nincs fizikai értelme. A megoldás tehát

$$\boxed{t = 5{,}00\ \text{s}.}$$

Hamis gyökök

A kinematikai feladatok megoldásakor – amint az előző példában adódó $t = -1$ is mutatja – gyakran kapunk olyan megoldást, amelynek nincs fizikai értelme. A másodfokú egyenlet negatív gyöke fizikailag a következő feladat megoldásaként értelmezhető. Egy labdát az $y = 0$ pont alatt 25 m-rel függőlegesen felfelé hajítottunk. A labda a $t = 0$ időpillanatban 20 m/s sebességgel érkezett az $y = 0$ pontba. Mennyi idővel ezelőtt hajítottuk el a labdát? Ilyen és hasonló problémák általában másodfokú egyenletre vezető feladatok megoldásakor merülnek fel. (A kinematikában többnyire akkor, ha az idő az ismeretlen.) A $t = 0$ időpontnak, mint a mozgás kezdetének a megválasztásával rögzítjük azokat a kezdeti feltételeket, amelyek mellett a kinematikai egyenletek meghatározzák a mozgás lefolyását. A kinematikai egyenletek azonban a *$t = 0$ időpillanat előtt, azaz a múltra vonatkozóan is teljesülhetnek – ha az egyéb feltételek változatlanok.* A 2-8 példában azonban ezek nem teljesülnek.

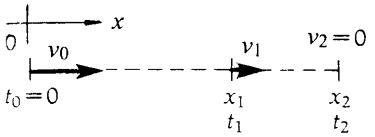
Egyes feladatokban azonban mindkét megoldás *értelmes lehet.* Ha például azt kérdeztük volna, hogy mikor lesz a labda 9,5 m magasan az elhajítás helye felett, akkor két megoldást kaptunk volna, amelyek mindegyike helyes és kielégíti a feladat feltételeit. A labda ugyanis felfelé haladva és visszafelé esve is átmegy ezen a ponton, s ez két különböző időpillanatban következik be. *Minden olyan feladatban, amelynek megoldása során több végeredményt kapunk, a fizikai feltételeket kell megvizsgálnunk, s ennek alapján kell elfogadni vagy elvetni a megoldásokat.*

2-9 PÉLDA

Egy gépkocsi 54 km/ó sebességről 4 m/s² lassulással egyenletesen lefékez. a) Mekkora utat tesz meg a fékezés első két másodpercében? b) Mekkora sebességgel mozog a 2 s időtartam végén az autó? c) Mennyi idő alatt áll meg a gépkocsi? d) Mekkora a teljes fékút?

MEGOLDÁS

A gépkocsi mozgása egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás, tehát alkalmazhatók a kinematikai egyenletek. Készítsünk először



2-15 ábra
2-9 példához

[9] Ha a szorzattá alakítás „ránézésre" nem megy, akkor a másodfokú egyenlet általános megoldóképletét használjuk a gyökök meghatározására (E Függelék).

Ha $ax^2+bx+c=0$, akkor $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

vázlatot a mozgásról, vegyünk fel olyan koordinátarendszert, melynek kezdőpontjában van a gépkocsi $t = 0$ időpontban. (2-15 ábra) Két különböző távolságot kell bejelölnünk, az a) és b) kérdés az első két másodpercben megtett úttal, a c) és d) pedig a teljes fékúttal kapcsolatos. A továbbiakban az „1" index az első, a „2" index pedig a második szakaszra vonatkozik.

a) Legyen x_1 a $t_1 = 2$ s alatt megtett út. A mértékegységek egyeztetésére az 54 km/ó kezdősebességet m/s-egységekre számítjuk át. Ehhez az (1 m/s)(3,6 km/ó) átszámítási tényezővel kell megszorozni az 54 km/ó sebességet.

$$v_o = 54\ \frac{\text{km}}{\text{ó}} \underbrace{\left(\frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{ó}}} \right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A gépkocsi lassul, tehát gyorsulása negatív. Állítsuk össze az ismert adatokat és az ismeretleneket:

$a = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$t_1 = 2$ s
$x_o = 0$
$x_1 = ?$

(Látható, hogy a (2-12) egyenletből a keresett távolság meghatározható. Így induljunk ki ebből a képletből és helyettesítsük be az adatokat!)

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x_1 = 0 + (15\frac{\text{m}}{\text{s}})(2\,\text{s}) + \frac{1}{2}\left(-5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4\ \text{s}^2) = 30\ \text{m} - 10\ \text{m} = 20\ \text{m}$$

b) Az első 2 s elteltével az autó sebességét a (2-10) egyenletből határozhatjuk meg. Behelyettesítve az adatokat:

$$v_1 = v_0 + a t_1$$

$$v_1 = 15\frac{\text{m}}{\text{s}} + (-5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2\,\text{s}) = (15 - 10)\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) A megállás pillanatára vonatkozóan (c) és d) kérdés) a következő adatokkal és ismeretlenekkel kell dolgoznunk:

$v_o = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_2 = 0$
$a = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$t_2 = ?$
$x_o = 0$
$x_2 = ?$

A kinematikai egyenleteket áttekintve látható, hogy (2-11)-ből a kérdéses idő meghatározható. A

$$v_2 = v_o + a t_2$$

képletből indulva, s kifejezve t_2-t behelyettesíthetjük az adatok számértékét:

$$t_2 = \frac{v_2 - v_o}{a} = \frac{0 - 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3\ \text{s}$$

d) Minthogy a fékezési időt már meghatároztuk, az x_2 fékutat akár a (2-12), akár a 2-13 képletből kifejezhetjük. Példaként a (2-13) képletet írjuk fel. Kifejezve x_2-t és behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy:

$$v_2^2 = v_0^2 + 2a(x_2 - x_0)$$

$$x_2 = \frac{v_2^2 - v_o^2}{2a} - x_o = \frac{0 - \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} - 0 = 22{,}5 \text{ m}$$

2-10 PÉLDA

Egy motoros 180 km/ó sebességgel száguld az autópályán, ahol a maximális megengedett sebesség 120 km/ó. Egy útjelző tábla mögött álló rendőrmotoros észleli ezt, és abban a pillanatban, amint a száguldó motoros a tábla mellett elhalad, nyugalomból indulva egyenletes gyorsulással utána ered. Mennyi idő alatt éri utol, ha gyorsulása 5 m/s^2 ?

MEGOLDÁS

A megoldás első lépéseként vegyünk fel egy koordinátarendszert, melynek kezdőpontja az útjelző táblánál van és x tengelye a mozgás irányába mutat. (2-16 ábra). Az M index a motoros, a P index pedig a rendőr mozgásának adatait jelöli.

A következő feladat a sebesség értékegységének átszámítása $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ egységre.

$$(v_M)_o = \left(180 \frac{\text{km/ó}}{}\right) \underbrace{\left(\frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6 \frac{\text{km/ó}}{}}\right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Csoportosítsuk az ismert adatokat és az ismeretleneket:

Motoros	**Rendőr**
$(v_M)_o = 50$ m/s	$(v_P)_o = 0$
$a_M = 0$	$a_P = 5$ m/s^2
$v_M = 50$ m/s	$v_P = ?$
$x_M = ?$	$x_P = ?$
$t_M = ?$	$t_P = ?$

A 2-16 ábra vázlata jól mutatja, hogy a motoros és a rendőr ugyanakkora utat tesz meg a találkozásig, s a két mozgás időtartama is egyenlő. Így a t idő esetén az indexeket elhagyhatjuk. Mindkét esetben a (2-12) egyenlet alkalmazható, és mivel az elmozdulások egyenlők

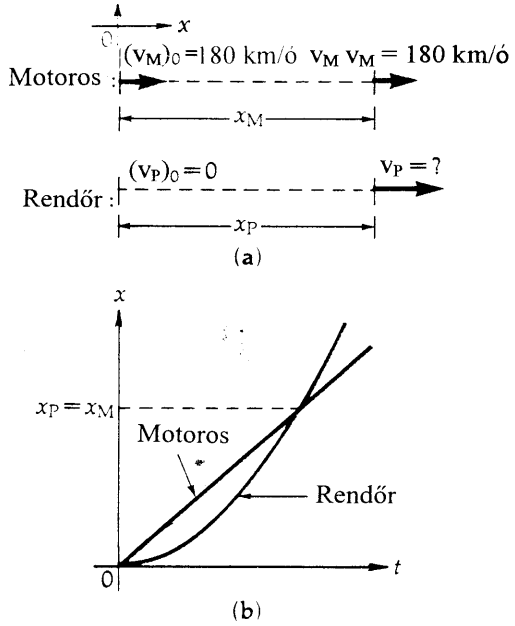
$$x_m = x_p;$$

$$(v_m)_0 t + \frac{1}{2} a_m t^2 = (v_P)_0 + \frac{1}{2} a_p t^2$$

összefüggés adódik. Rendezve, majd t-re megoldva az egyenletet, az adatok behelyettesítésével a

$$\frac{1}{2}(a_M - a_P) t^2 = \left((v_P)_0 - (v_M)_0\right) t$$

2-16 ábra
2-10 példához



$$t = \frac{\left[(v_P)_O - (v_M)_O\right]}{\frac{1}{2}(a_M - a_P)} = \frac{0 - 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{1}{2}\left(0 - 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 20\ \text{s}$$

eredményt kapjuk.

A fenti példán jól megfigyelhetjük, hogy a vázlat milyen hasznos segítséget ad a megoldás kulcsának felismeréséhez! A vázlat kiemeli a probléma döntő pontját, „a találkozást", azaz azt, hogy mindkét személy ugyanoda és ugyanabban a pillanatban érkezik. Az adott esetben még az is fennáll, hogy ugyanonnan és ugyanakkor indultak. Ezeken a tényeken – amelyek a megoldásban döntő szerepet játszanak – a vázlat nélkül esetleg könnyen átsiklanánk. Általában *a fizika feladatok megoldásának fontos kezdő lépése, hogy jó vázlatot készítsünk, amelyen a jelöléseket, s emellett annyi további információt rögzítünk, amennyit csak lehetséges.* A jó ábra segíti gondolkozásunkat! Egyszerű lehetőséget ad a jelölések bevezetésére, s alkalmas lehet arra, hogy váratlan, s a probléma egyszerű megoldására vezető összefüggéseket fedezzünk fel.

Összefoglalás

Az egyenesvonalú mozgások leírásakor bevezettük az egydimenziós koordinátarendszert, kijelöltük az origót és az x (vagy y, ill. z) tengely pozitív irányát. Ezután definiáltuk a következő mennyiségeket:

Helyzet: x

Elmozdulás: $\Delta x = x_2 - x_1$

Átlagsebesség-vektor: $v_a = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}$

Átlagos gyorsulás: $a_a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_2 - v_1)}{(t_2 - t_1)}$

Az így bevezetett mennyiségeknek *nagyságuk* (a mértékegységgel együtt) és pozitív, ill. negatív irányuk van. A Δ szimbólum a szóban forgó mennyiség megváltozását jelzi. Pl. $\Delta v = v_2 - v_1$. (Figyeljük meg, hogy a változást mindig az adott mennyiség végső és *kezdeti értékeinek különbsége* adja meg!)

A kinematikai jellemzők *pillanatnyi értékének* definíciója a következő:

Helyzet: x

Sebesség: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

Gyorsulás: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

A megtett út segítségével képzett *ds/dt időderivált* megegyezik a *pillanatnyi sebesség* abszolút értékével. (Az átlagsebességekre vonatkozó analóg állítás nem igaz, hiszen az *s/t* átlagsebesség többnyire nem egyenlő az átlagsebesség-vektorral.)

A fenti definíciókból néhány, a feladatmegoldásban rendkívül hasznos **kinematikai egyenlet** vezethető le. Ezek a következők:

Kinematikai egyenletek

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{(állandó gyorsulás esetén)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Az állandó gyorsulású mozgások esetén hasznos lehet az alábbi két összefüggés is:

$$v_{\text{átl}} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$x = x_0 + v_{\text{átl}} t$$

Ezek az összefüggések csak állandó gyorsulás mellett érvényesek. Ha a gyorsulás az időben változik, akkor a

$$v = \int a dt \qquad \text{és} \qquad x = \int v dt$$

összefüggéseket kell használni.

A formulák egyszerűbbé válnak, ha a koordinátarendszer origóját a $t_0 = 0$ és a $x_0 = 0$ feltételeknek megfelelően választjuk meg. Az y és z irányú mozgásra hasonló kinematikai összefüggések írhatók fel.

A mozgásokkal kapcsolatos feladatok a következő, szabványos módszerrel oldhatók meg:

(1) *Megállapítjuk, hogy milyen típusú feladattal van dolgunk.* Ha a gyorsulás állandó, a kinematikai egyenleteket alkalmazzuk.

(2) *Vázlatot készítünk.* Kijelöljük a kezdőpontot és a pozitív tengelyirányokat, valamint feltüntetjük az alkalmazott jelöléseket. Az ábrára annyi információ kerüljön amennyi világossá teszi a feladatok különböző részei közötti összefüggéseket.

(3) *Csoportosítsuk az ismert adatokat és a keresett mennyiségeket.* Ügyeljünk arra, hogy azonos mértékrendszert használjunk – ha szükséges számítsuk át az adatokat.
Hasonlítsuk össze az adatsort a kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségekkel. Ha lehetséges, akkor az origót a $t = 0$ időponthoz tartozóan vegyük fel, hogy x_0 ne szerepeljen a kinematikai egyenletekben.

(4) A megoldás után vizsgáljuk meg, hogy a kapott eredménynek van-e „értelme". A furcsának tűnő eredmény arra utalhat, hogy hibát követtünk el.

A gravitációs gyorsulás nagyságát g-vel jelöljük ($g = 9{,}81$ m/s^2). A Föld felszíne közelében g lefelé mutat. Az, hogy előjele pozitív vagy negatív, attól függ, hogy a pozitív irányt felfelé vagy lefelé vesszük fel.

A *dimenzióanalízis* az egyenletek mérték szerinti összehasonlításának megállapítására szolgál. Csak azonos mértékegységben kifejezett mennyiségeket szabad összeadni.

Kérdések

1. Ha olyan vonalzóval rendelkezünk, amellyel interpoláció alkalmazásával a milliméter tized részéig tudunk mérni, akkor hány százalékos hibával mérhető meg e könyv egy lapjának hossza és vastagsága? Az utóbbi esetben érdemes egy kicsit elgondolkozni, mert található olyan módszer, amellyel a mérés hibája nagymértékben csökkenthető.
2. Tárgyaljuk meg azokat a módszereket, amelyekkel a Föld-Hold távolság mérhető.
3. Soroljon fel néhány ismétlődő jelenséget, amely az idő mérésére szolgálhat!
4. Tudjuk, hogy ha egy egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor az egyenlőség továbbra is fennáll. Hol a hiba a következő okoskodásban: 10 fillér = 0,1 Ft. 100 fillér = 0,01 Ft. (Megjegyzés: Próbáljuk ki a 10 cm = 0,1 m egyenlőséggel is!)
5. Alapozható-e mértékrendszer a tömeg, hosszúság és sebesség alapmennyiségekre?
6. Robinson Crusoe a lakatlan szigeten nem rendelkezett hossz, tömeg és idő mérésére szolgáló eszközökkel. Hogyan dolgozhatott volna ki mérési eljárásokat és mértékrendszert?
7. Mozoghat egy tárgy észak felé, ha gyorsulása délre mutat?
8. Megfordulhat-e egy test mozgásának iránya, ha gyorsulása mindvégig állandó?
9. Ellenkezőjére változhat-e egy test gyorsulásának iránya, ha közben mozgásának iránya nem változik?
10. Filmfelvételt készítettünk különböző, pusztán a gravitáció hatására mozgó testekről (a légellenállás befolyása itt elhanyagolható). A filmet fordított irányban játsszuk le. Érvényesek-e a kinematikai egyenletek a filmen látható mozgásra? (Az eljárás a $t \longrightarrow -t$ cserének felel meg.)
11. Soroljunk fel néhány olyan jelenséget, amely akkor is valóságosnak tűnne, ha a róla készült filmet fordítva játszanánk le! Gyűjtsünk olyan jelenségeket is, amelyek esetén könnyen felismerhető lenne, hogy a filmet fordítva vetítettük! Milyen általános különbségek állapíthatók meg a két jelenségcsoport között?
12. Egy szabadon eső testről készült film szerint a test lefelé mozog és lefelé is gyorsul. Felfelé vagy lefelé gyorsulna a fordítva vetített filmen látható tárgy[10] ?

[10] Átvéve a „*Gondolkodtató fizika*" I. kötet L.Epstein és P.Hewitt (1979) 14. old., Insight Kiadó, 614 Vermont Street, San Francisco, USA 94107

Feladatok

2.3 Mértékegységek átszámítására

2A-1 A legközelebbi csillag 4×10^3 km távolságban van tőlünk. Ha Napunkat (a Nap átmérője $1{,}4\times10^9$ m) egy 7 mm átmérőjű cseresznyemaggal szemléltetjük, akkor milyen távol lesz a szomszédos cseresznyemag?

2A-2 Diszkosz alakú galaxisunk átmérője 10^5 fényév. Legközelebbi galaxis szomszédunk, az Androméda, mintegy 2 millió fényév távolságban van tőlünk. Galaxisunkat egy 25 cm átmérőjű kistányérral jelképezzük. Milyen távolságra tegyük tőle a következő kistányért?

2A-3 Az égbolton a távolságok oly nagyok, hogy a csillagászok a következő speciális távolságegységeket is bevezették:

1 fényév: Az a távolság, amit a vákuumban terjedő fény 1 év alatt megtesz (a fény sebessége 300×10^8 m/s).

1 csillagászati egység (AU): A Földpálya átlagos sugara. A Nemzetközi Csillagászati Egyesülés definíciója szerint

$1\ \text{AU} \equiv 149600 \times 10^6\ \text{m}$.

1 parsec (pc): Az a távolság, amelyből 1 AU hosszúságú szakasz 1 szögmásodperces látószögben látható.

Fejezzük ki a fényévet és a parsec-et méterben!

2A-4 Az atomok átmérője körülbelül 10^{-10} m, az atommagoké pedig kb. 10^{-15} m. Hány mm lenne az atommag átmérője, ha az atom átmérőjét 2 m-re nagyítanánk?

2A-5 Érdemes megjegyezni, hogy egy évben körülbelül $\pi \times 10^7$ másodperc van. Hány százalékos hibát jelent ez a közelítés?

2A-6 Anélkül, hogy az átszámítási tényezőknek utánanézne, határozza meg, hogy hány másodpercből áll egy év! Az eredményt fejezze ki tudományos jelölésrendszerben! (Érdemes észrevenni, hogy az értékes jegyek 0,5%-os pontossággal megegyeznek π-vel. Így könnyebb megjegyezni az év és a másodperc közötti fontos átszámítási tényezőt.)

2A-7 Hány Hold méretű test térfogata lenne egyenlő a Föld térfogatával? (A szükséges adatok az L Függelékben találhatók meg.)

2B-8 A távoli galaxisok fényének vörös eltolódásából a fizikusok arra következtettek, hogy minden galaxis távolodik tőlünk, és a távolodás sebessége arányos a galaxis távolságával. Ezt fejezi ki a $v = Hr$ *Hubble-törvény*, ahol v az r távolságban elhelyezkedő galaxis távolodási sebessége, H pedig az ún. *Hubble-konstans*. H értékét nem ismerjük pontosan, a jelenlegi becslések szerint értéke 50 és 90 km/s/Mpc (Mpc=megaparsec) közé esik. a) Tegyük fel, hogy $H = 55$ km/s/Mpc! Számítsuk át ezt az értéket m/s per 10^6 fényévre! b) Gondolatban fordítsuk meg minden galaxis sebességének irányát, de tegyük fel, hogy a sebesség nagysága a továbbiakban változatlan! Ennek alapján megbecsülhetjük, hogy mennyi idővel ezelőtt volt minden galaxis egy pontban. Az „Univerzum korát" ekkor a

$$t = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{sebesség}} \text{ összefüggés alapján } \frac{r}{Hr} = \frac{1}{H} \text{ -ra}$$

becsülhetjük. (A becslés természetesen önkényes és sok tekintetben pontatlan. Ez az eredmény valószínűleg túlbecsült, mert az Univerzum kezdeti tágulási sebessége a testek közötti kölcsönös vonzás miatt bizonyára sokat csökkent, míg jelenlegi értékét elérte.) Határozzuk meg az univerzum így becsült korát billió években! c) Mennyi lenne ez a kor, ha a Hubble-konstans értékét $H = 90$ km/s/Mpc-nek választanánk?

2B-9 Határozzuk meg percekben az egy óra és az egy mikroévszázadnyi időtartam közötti eltérést! Melyik hosszabb?

2B-10 Bizonyos olajok a víz felszínén molekula-vastagságnyi rétegben terülnek szét. Becsüljük meg egy olajmolekula méretét, ha egy 2,5 mm átmérőjű csepp szétterülve 9 cm átmérőjű, kör alakú foltot alkot a víz felszínén!

2.5 Helyzet, elmozdulás, sebesség és sebességvektor

2A-11 A fény terjedési sebessége közel 3×10^8 m/s. Határozzuk meg, hogy mennyi idő alatt teszi meg a fény az egy atommag átmérőjével (2×10^{-15} m) egyenlő távolságot!

2A-12 Egy gépkocsi 28 km-es utat tett meg végcéljáig. Az út első 9 km-es szakasza városi utakon vezetett, ahol az autó 27 km/ó átlagsebességgel mozgott. Az út fennmaradó részén a gépkocsi autópályán haladt. A teljes menetidő 41 perces volt. Mekkora volt a kocsi átlagsebessége az autópályán?

2A-13 A kaliforniai San Andreas törésvonal két oldalának összeillő alakzataiból a geológusok arra a következtetésre jutottak, hogy a két, eredetileg folytonosan illeszkedő sziklafal mintegy 20 milló év alatt 325 km-t csúszott el egymáshoz képest. Határozzuk meg az elmozdulás átlagsebességét centiméter per évben! Megjegyzés: A Hollister közelében fekvő területen az elcsúszás sebessége jelenleg körülbelül 6 cm/év, körülbelül ilyen sebességgel nőnek a körmeink.

2A-14 Határozzuk meg, km/s-ben, hogy milyen sebességgel mozog a Föld Nap körüli pályáján. (Az adatokat vegyük az L függelékből.)

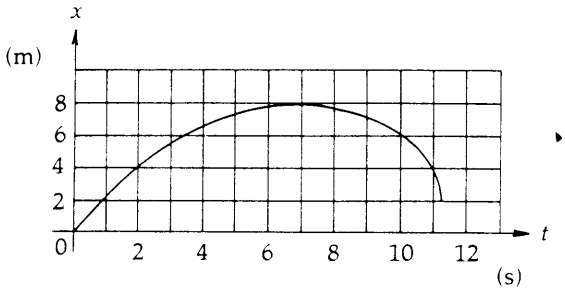
2A-15 Egyes amerikai autópályákon kb. 1,6 kilométerenként (mérföldenként) számozott oszlopokat helyeznek el, hogy segítsék az autósokat sebességmérő órájuk ellenőrzésében. Mekkora idő telik el két oszlop közötti távolság megtétele során, ha a gépkocsi sebessége 110 km/óra?

2A-16 A Los Angeles és San Francisco közötti kb. 680 km-es távolságot egy gépkocsi 8 óra alatt teszi meg. Mekkora az átlagsebessége? Fejezzük ki az eredményt km/ó-ban és m/s-ben is!

2B-17 Egy autós 1 km-t 15 km/ó sebességgel tett meg. Mekkora sebességgel kell megtennie a következő kilométert, hogy a teljes két kilométeres útszakaszon az átlagsebessége 30 km/ó legyen?

2B-18 Egy futó a 100 m-es vágtaszámot 10,3 s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó 10,8-as idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták a teljes távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

2B-19 A 2-17 ábra egy egyenes vonalú pályán mozgó részecske elmozdulás-idő függvényábráját mutatja. a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$s és $t_2 = 5$s időintervallumra! b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége? c) Mekkora a $t = 10$s időpontban a pillanatnyi sebesség?



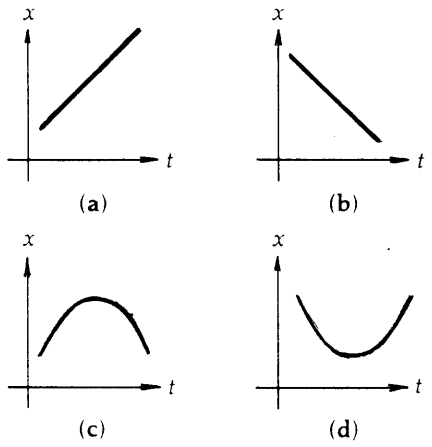
2-17 ábra
A 2B-19 feladathoz

2.6 Gyorsulás

2A-20 Egy motorkerékpár 5 s alatt gyorsul fel 0-ról 97 km/ó értékre. a) Mekkora az átlagos gyorsulása m/s^2-ben? b) Hányadrésze ez a gyorsulás a nehézségi gyorsulásnak?

2A-21 Egy baseball-labda 10 m/s-os végsebességgel röpül ki a dobó kezéből. Mekkora volt a labda átlagos gyorsulása, ha tudjuk, hogy a dobó keze 0,8 m hosszú szakaszon egyenes vonalban gyorsította a labdát?

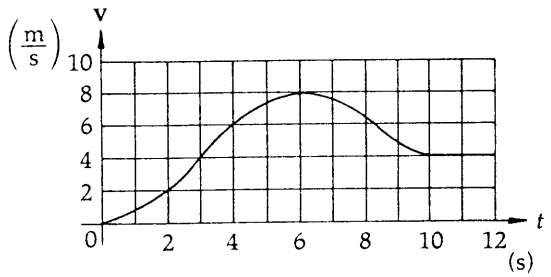
2B-22 A 2-18 ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



2-18 ábra
A 2B-22 feladathoz

2A-23 Egy golfütés során a kezdetben nyugvó labda 31 m/s-os sebességgel repült el. Mekkora volt a labda átlagos gyorsulása, ha az ütő 1,17 ms időtartamig érintkezett a labdával?

2A-24 A 2-19 ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő függvényábráját mutatja. a) Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a $t_0 = 0$ és $t = 6$ s időtartamban? b) Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban! c) Mikor zérus a gyorsulás? d) Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



2-19 ábra
A 2A-24 feladathoz

2A-25 Egy asztronauta leejtett egy kalapácsot a Holdon. A kalapács 1,55 s alatt ért a talajra. Az L Függelékben megtalálható a Hold vonzása miatt fellépő gravitációs gyorsulás. Határozzuk meg ennek felhasználásával a kalapács végsebességét!

2B-26 Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik. a) Mekkora a kocsi gyorsulása? b) Ezután az autó egyenletesen lassulva 12 s alatt megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon? c) Mekkora az átlagos gyorsulás a mozgás teljes 21 s időtartama alatt?

2.7 Az egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás

2A-27 Leejtettünk egy követ 2 m magasról. Mennyi idő alatt érkezik a talajra?

2A-28 Egy 10 m/s sebességgel haladó teherautó 10 s alatt egyenletesen gyorsulva megkétszerezi sebességét. a) Határozzuk meg a gyorsulását! b) Mekkora utat tesz meg ezalatt a teherautó?

2A-29 Egy labdát 16 m/s sebességgel felfelé hajítottunk. a) Mennyi idő alatt ér pályájának csúcspontjára? b) Mekkora a labda sebessége abban a pillanatban, amikor 8 m-rel van az elhajítási hely felett és felfelé mozog? c) Határozzuk meg a labda maximális magasságát!

2A-30 Egy labdát 20 m/s kezdősebességgel feldobtunk. a) Mennyi idő alatt éri el pályájának csúcspontját? b) Milyen magasan van ekkor? c) Mekkora sebességgel érkezik vissza a labda kiinduló helyére?

2A-31 Egy 20 m/s sebességgel haladó gépkocsi egyenletesen felére csökkenti sebességét $a = 2$ m/s^2 értéknek megfelelően. a) Mennyi idő szükséges ehhez? b) Mekkora utat tesz meg ezalatt?

2A-32 Egy labdát 12 m/s sebességgel függőlegesen felfelé hajítottunk. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik a) 1 s és b) 2 s időpontban az elhajítás után?

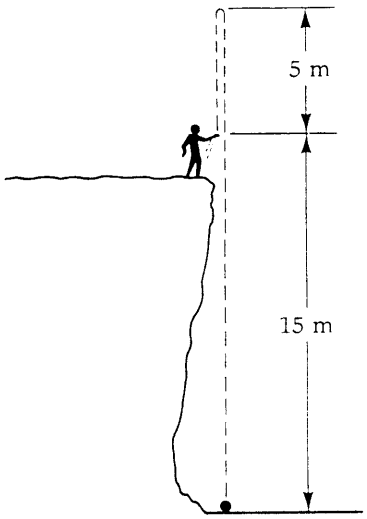
2B-33 Egy követ 50 m mély kútba ejtettünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! (A hang terjedési sebessége 330 m/s.)

2B-34 Egy gépkocsi 15 m/s-os egyenletes sebességgel egyenes úton halad. Abban a pillanatban, amikor egy parkoló motoros rendőr mellé ér, a rendőr 2 m/s^2 állandó gyorsulással üldözni kezdi: a) Mennyi idő alatt éri utol a rendőr az autót? b) Mennyi utat tesz meg ezalatt a rendőr és mekkora a sebessége a találkozás pillanatában?

2B-35 Egy érmét 4 m/s sebességgel dobtunk fel. Mennyi idő alatt ér 0,50 m magasra? Miért kapunk két eredményt?

2B-36 Egy labdát a 2-20 ábrának megfelelően egy szakadék széléről felfelé hajítottunk. A labda 5 m magasra emelkedik, majd 15 m mélyen ér talajt a szakadék alján. a) Mekkora volt a labda kezdősebessége? b) Mekkora sebességgel csapódik a talajba? c) Mennyi ideig tartózkodik a labda a levegőben?

2B-37 Egy mozgó pont 4 m/s sebességgel a pozitív x irányban mozogva halad át a koordinátarendszer origóján. Bizonyos idő elteltével, az $x = 4$ m pontban, sebessége –2 m/s (azaz negatív x irányban mozog). Tegyük fel, hogy a gyorsulás állandó. a) Mekkora a gyorsulás? b) Mennyi idő telik el míg a mozgó pont az origóból az $x = 4$ m koordinátájú pontot negatív irányban haladva eléri? c) Milyen távolságra jut el a mozgó pont a pozitív x irányban?



2-20 ábra
A 2B-36 feladathoz

2B-38 Egy csapból egyenletesen csöpög a víz a 30 cm-rel lejjebb elhelyezett mosogatóba. A csepegés üteme olyan, hogy amikor egy csepp becsapódik, akkor a következő már a levegőben van és a harmadik éppen leszakad a csapról. Határozzuk meg, hogy hány csepp esik le percenként.

2.8 A kinematikai egyenletek levezetése differenciálszámítás felhasználásával

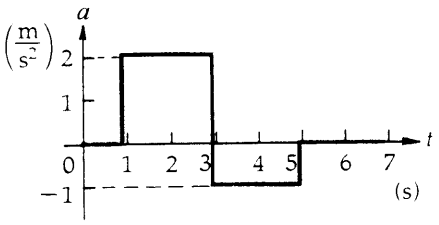
2B-39 Egy részecske az $a = 12t$ (SI-egységekben) összefüggésnek megfelelő gyorsulással mozog az x tengely mentén. A $t = 0$ időpontban a részecske nyugalomban van és az origóban található. Határozzuk meg a) a pillanatnyi sebesség-idő függvényt és b) a hely-idő függvényt.

2B-40 Egy, az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v = 4 + 2t - 3t^2$ egyenlet adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen $v = +5$ m/s sebességgel halad át. a) Határozzuk meg a mozgás elmozdulás-idő függvényét! b) Mekkora a részecske legnagyobb sebessége $+x$ irányban?

2B-41 Egy, az x tengely mentén mozgó részecske helyzetét SI-egységekben az $x = 2 + 3t - 4t^2$ összefüggés adja meg. a) Mi az egyes tagok együtthatóinak a dimenziója? b) Vezessük le a sebesség-idő és c) a gyorsulás-idő függvényt! Határozzuk meg továbbá d) a részecske maximális x irányú elmozdulását és e) azt az időpontot, amikor ez bekövetkezik!

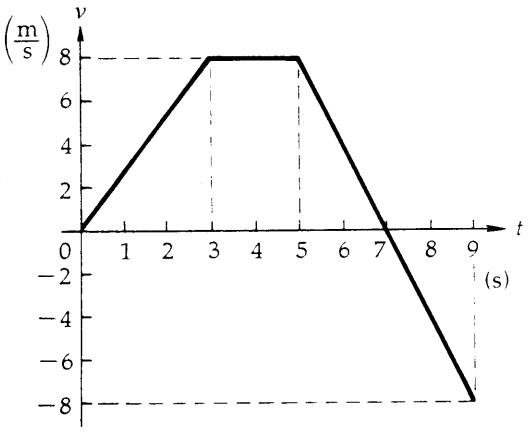
2.9 Az elmozdulás, sebesség és gyorsulás grafikus szemléltetése

2B-42 Egy részecske az $x = 2$ m helykoordinátájú pontból indul és a 2-21 ábra gyorsulás-idő függvénygörbéjének megfelelően mozog. Vázoljuk fel a fontosabb numerikus értékek feltüntetésével a) a sebesség-idő, b) a hely-idő grafikont a mozgás első 7 másodpercére!



2-21 ábra
A 2B-42 feladathoz

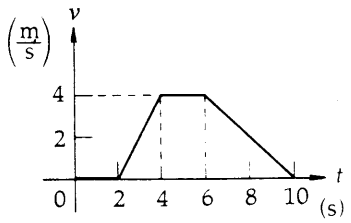
2B-43 A 2-22 ábrán egy egyenes úton haladó rendőrmotoros pályájának sebesség-idő függvényábrája látható. Másoljuk át ezt az ábrát egy papírlap közepére. a) Rajzoljuk meg az elmozdulás-idő függvényábrát pontosan az előző ábra fölé úgy, hogy az időtengely éppen a sebesség-idő függvény időtengelye fölé essen. b) Rajzoljuk meg ehhez hasonlóan a gyorsulás-idő függvényábrát a sebesség-idő ábra alatt. Az ábrákon tüntessük fel az elmozdulás- ill. gyorsuláskoordináta nagyságát a jellegzetes pontokban. c) Mekkora a motoros pillanatnyi gyorsulása a $t = 6$ s időpontban? d) Határozzuk meg a motoros helyzetének a koordinátáját a $t = 6$ s időpontban. e) Mi lesz a végső helyzete a motorosnak a $t = 9$ s időpontban?



2-22 ábra
A 2B-43 feladathoz

2B-44 Egy motoros nyugalomból indul és egyenletesen gyorsulva 8 s alatt 24 m/s sebességet ér el. Ezután 12 másodpercig ezzel a sebességgel mozog, majd fékezni kezd és 6 másodperc alatt megáll. Készítsünk vázlatot a hely-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényről! A függvényábrák törés- és inflexiós pontjain tüntessük fel a megfelelő koordinátaértékeket is! A függvényábrákat a 2-13 ábrához hasonlóan rendezve, egymás fölött párhuzamos időtengelyekkel rajzoljuk meg!

2B-45 A 2-23 ábra egy egydimenziós mozgást végző test sebességét mutatja. Vázoljuk fel az elmozdulás-idő és a gyorsulás-idő függvényábrákat. Tüntessük fel a megfelelő numerikus értékeket is azokon a pontokon, ahol a sebességfüggvény meredeksége megváltozik! A $t = 0$ időpillanatban a test az $x = 2$ m helyen van. A függvényábrákat rendezzük a 2-13 ábrához hasonló módon!



2-23 ábra
A 2B-45 feladathoz

2.10 Dimenzióanalízis

2A-46 Ellenőrizzük a $v^2 = v_o^2 + 2ax$ kinematikai egyenletben a dimenziók egyezését!

2B-47 A fonálinga T periódusidejének azt az időt nevezzük, ami alatt a mozgás egy teljes ciklusa lezajlik. A fonálinga lengésideje az inga l hosszától és a g nehézségi gyorsulástól függ. A periódusidő ennek megfelelően T = (konstans) l^a, g^b alakban adható meg. Állapítsuk meg az a és b kitevők értékét dimenzióanalízis segítségével! (Gondosan fogalmazzunk, a megoldás jól érthető legyen!)

2B-48 Ha a légellenállás elhanyagolható, akkor az elhajított testek R vízszintes hajítási távolsága csak a θ hajítási szögtől, a v_0 kezdősebességtől és a g nehézségi gyorsulástól függ. a) Határozzuk meg dimenzióanalízissel, hogy adott hajítási szög mellett hogyan függ a hajítási távolság a kezdősebességtől és a nehézségi gyorsulástól! Emlékeztetünk arra, hogy a fizikában a szöget többnyire a dimenzió nélküli radiánban mérjük. b) Hányszorosára nő a hajítási távolság, ha a kezdeti sebességet megkétszerezzük? c) Hogyan változna a hajítási távolság a Holdon, ahol a gyorsulás 1/9-ed része a földinek?

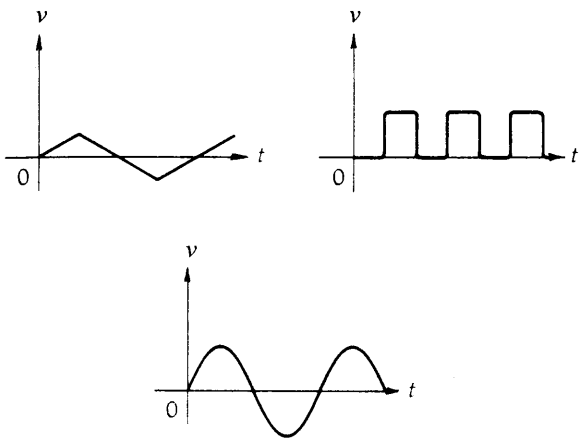
További feladatok

2C-49 Egy 3 m/s sebességgel süllyedő hőlégballonból homokzsákot ejtenek ki. a) Határozzuk meg a homokzsák sebességét a Földhöz képest a kiejtés után 1 másodperccel. b) Milyen távolságba jut egy másodperc alatt a homokzsák a ballontól, ha a zsák kiejtésének pillanatában a ballon süllyedési sebessége 2 m/s-ra csökken?

2C-50 Egy lift 0,2 m/s^2 gyorsulással indul és ugyanekkora lassulással áll meg az egymástól 4 m távolságban lévő emeletek között. Mekkora az a minimális időtartam ami szükséges két szomszédos emelet közötti távolság megtételéhez?

2C-51 Egy 45 m magas hídról követ ejtettünk egy folyóba. Mekkora v kezdeti sebességgel hajítottuk utána 1 másodperc múlva a következő kavicsot, ha egyszerre érkeztek a vízbe?

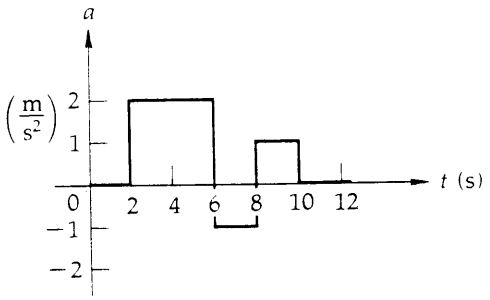
2C-52 Másoljuk le a 2-24 ábrán látható sebesség-idő függvényábrákat! Közvetlenül az átmásolt grafikonok alatt rajzoljuk meg a megfelelő elmozdulás-idő és gyorsulás-idő függvényábrákat! Az $x = 0$ helyzetet a $t = 0$ időpontban vegyük fel és minden időtengelyen használjuk ugyanazt a léptéket!



2-24 ábra
A 2C-52 feladathoz

2C-53 Egy felfelé dobott könnyű labda helykoordinátája az $y = 7t–49t^2$ függvény szerint változik, ahol y-t méterben, t-t pedig másodpercben mérjük. Határozzuk meg a) a labda v_0 kezdősebességét a $t_0 = 0$,pillanatban b) sebességét a $t = 1{,}26$ s időpillanatban, valamint c) a gyorsulását!

2C-54 Egy, az origóból induló test a 2-25 ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és elmozdulás-idő függvényábráját. Tüntessük fel a $t = 2$, 6, 8 és 10 időpontokhoz tartozó sebesség- és helykoordináták értékét!



2-25 ábra
A 2C-54 feladathoz

2C-55 Egy földalatti vasút a tervek szerint maximálisan 1,5 m/s^2 gyorsulással, ill. lassulással mozoghat. a) Határozzuk meg, hogy minimálisan mekkora idő szükséges két állomás közötti 800 m távolságú út megtételéhez! b) Határozzuk meg, hogy ennek során milyen maximális sebességet ér el a szerelvény!

2C-56 Egy épület tetőpárkányáról lehulló tégla 0,2 s idő alatt halad el egy 2 m magas ablak előtt. Milyen magasan van a párkány az ablak felső széle felett?

2C-57 Idegen égitestekről érkezett betolakodók ellen vívott űrütközetben a földi űrhajó (A űrhajó) 300 m/s sebességgel üldözi az idegeneket (B űrhajó), akik 270 m/s

sebességgel menekülnek. A két űrhajó ugyanazon egyenes mentén mozog és a sebességeket ugyanahhoz az inerciarendszerhez képest ismerjük. Amikor a két űrhajó távolsága 8000 m-re csökken, az *A* hajó parancsnoka 75 m/s^2 gyorsulással mozgó rakétát lő ki. Mennyi idő alatt éri el a rakéta a betolakodót? (A számításokat a már felhasznált inerciarendszerben végezzük!)

2C-58 Egy forgalmi lámpa olyan kereszteződésben áll, ahol 40 km/ó sebességkorlátozás érvényes. A kereszteződés felé a maximálisan megengedett sebességgel gépkocsi közeledik. A kocsi maximális lassulása 2 m/s^2, a vezető reflexideje 0,5 s. a) Tegyük fel, hogy a gépkocsi maximális sebességgel haladt és 3 m/s^2 egyenletes lassulással fékezett. Milyen messzire volt a lámpától a fékezés megkezdésének pillanatában (amikor a lámpa éppen sárgára váltott), ha éppen a stop-vonalon állt meg. b) Milyen hosszú volt a sárga jelzés időtartama, ha a lámpa pontosan a kocsi megállásának pillanatában váltott pirosra?

2C-59 A 42 km és 194 méter hosszú Los Angeles-i maratoni távot 1987-ben Art Boileau nyerte 2 óra 13 perc és 9 másodperces idővel. a) Mennyi volt Art Boileau átlagsebessége? b) A 34 km-es jelzésnél Boileau 2,5 perccel vezetett a második helyen futó ellenféllel szemben, aki a célvonalon 30 másodperccel a győztes után haladt át. Tegyük fel, hogy Boileau a távot végig egyenletes sebességgel tette meg, valamint, hogy amikor a győztes a 34 km-es jelhez érkezett, akkor a második helyen futó is vele azonos sebességgel futott. Mekkora átlagos gyorsulással kellett ezután a második helyen futó atlétának mozognia?

2C-60 Két autó vakmerően frontálisan rohan egymás felé ütközési próbapályán. Sebességük rendre 25 m/s és 35 m/s. A két vezető ugyanabban az időpontban lép a fékre és megállásig egymással egyenlő és egyenletes lassulással mozog. Ezzel a lassulással 20 m/s kezdősebességről indulva 4,7 s alatt tudnának megállni. Milyen távol voltak egymástól a gépkocsik a fékezés megkezdésének pillanatában, ha éppen a frontális összeütközés előtt tudtak megállni?

2C-61 Egy kődarabka válik le a kút peremérol és a vízbe hull. a) Milyen mély a kút, ha a kő csobbanását a leválás után 2,4 másodperccel halljuk meg? (A hang sebessége az adott hőmérsékleten 336 m/s.) Mekkora hibát követünk el a mélység meghatározásában, ha a hang terjedéséhez szükséges időt elhanyagoljuk?

2C-62 Egy elkésett utas 3 m/s sebességgel rohan az állomásról éppen indulni készülő vonat után. Az utas a sínek mentén fut és még x_0 távolságban van a hátsó ajtótól, amikor a szerelvény 0,5 m/s^2 gyorsulással elindul. a) Rajzoljuk meg az utas $x_e(t)$ hely-idő grafikonját a $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ kezdőfeltételekkel! Ugyanezen az ábrán rajzoljuk meg a szerelvény végének $x_T(t)$ görbeseregét különböző szabadon választott x_0 értékek mellett! Ábrázoljunk olyan eseteket is, amikor az utas eléri, és olyanokat is, amikor lekési a vonatot! b) Határozzuk meg a legnagyobb x_0 távolságot, amikor az utas még eléri a vonatot!

2C-63 Két szomszédos metróállomás távolsága 430 m. A földalatti szerelvény gyorsulása 1 m/s^2. Határozzuk meg a) a két megálló közötti út megtételéhez szükséges minimális időtartamot. b) az ilyen mozgás során elért maximális sebességet és c) a mozgás átlagsebességét! Készítsünk vázlatot az elmozdulás-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényről. Jelöljük be a grafikonokon azon pontok koordinátáit, amikor a vezető a gyorsításról átkapcsol a fékezésre.

2C-64 Galilei egy ún. „páratlan szám" szabályt állapított meg a szabadon eső testek mozgására vonatkozóan. A szabály a következő: Ha egy nyugalomból induló test az első másodpercben 5 m-t tesz meg, akkor a következőben 3×5 m-t, a harmadikban 5×5 m, a negyedikben 7×5 m és így tovább. Mutassuk meg, hogy ebből a szabályból az $x = 5t^2$ út-idő összefüggés adódik, ahol x a teljes utat, t pedig a teljes eltelt időt jelöli!

$$\text{(Útmutatás: } \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$$

2C-65 Egy nyugalomból induló, komputer vezérelt metrószerelvényt a robotpilóta a mozgás első 5 másodpercében az $x = At^3$ törvény szerint gyorsít. Határozzuk meg a) a sebességet, valamint b) a gyorsulást az idő függvényében! c) Mekkora az A együttható értéke (beleértve a dimenziót is) ha a nyugalomból induló szerelvény sebessége az indulás után 5 másodperccel 4 m/s?

2C-66 Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát 1,0 s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a hó le a kő?

AZ 1–23 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

II. Fejezet

2A-1 200 km

2A-3 1 fényév = $9{,}46 \times 10^{15}$ m; 1 pc = $3{,}09 \times 10^{16}$ m

2A-5 0,447%

2A-7 49,4

2B-9 7,40 perc; az óra hosszabb

2A-11 $6{,}67 \times 10^{-22}$ s

2A-13 1,63 cm/év

2A-15 55,4 s

2B-17 lehetetlen

2B-19 a) 1,20 m/s b) 7,00 s c) –1,54 m/s (közelítőleg)

2B-21 62,5 m/s^2

2B-23 $2{,}65 \times 10^4$ m/s^2

2A-25 2,59 m/s

2A-27 0,639 s

2A-29 a) 1,63 s b) 9,96 m/s c) 13,1 m

2A-31 a) 5,00 s b) 75,0 m

2B-33 3,34 s

2B-35 0,804 s; 0,0127 s

2B-37 a) –1,5 m/s^2 b) 4 s c) 5,33 m

2B-39 a) $6t^2$ b) $3t$

2B-41 a) 2 m; 3 m/s; 4 m/s^2 b) $v = 3 - 8t$ c) –8 m/s^2 d) 0,375 s e) 2,56 m

2B-43 c) –4 m/s d) 34,0 m

2B-45 $x(2) = 2$ m; $x(4) = 6$ m; $x(6) = 14$ m; $x(10) = 22$ m

2B-47 $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$

2C-49 a) 12,8 m/s b) 5,90 m

2C-51 12,2 m/s

2C-53 a) 7 m/s b) –5,35 m/s c) –9,8 m/s^2

2C-55 a) 46,2 s b) 34,6 m/s

2C-57 14,2 s

2C-59 $4{,}83 \times 10^{-3}$ m/s^2

2C-61 a) 26,4 m b) 6,89%

2C-63 a) 41,5 s b) 20,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) 10,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2C-65 a) $v = 3At^2$ b) $\alpha = 6At$ c) 0,0533 m/s^3

III. Fejezet

3A-1 a) 7 osztásrészt b) 36,9°; 5 osztásrész

3A-3 a) $C = 6\hat{x} + 5\hat{y}; D = -2\hat{x} + 7\hat{y}$

b) C = 7,81; 39,8°; D = 7,28; 106°

3B-5 C = 5,39; 21,8°; D = 6,08; 80,5°; E = 10,8; 248,2°

3A-7 a) $C = \hat{y} - 2\hat{z}$; 2,24 m

b) $D = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$; 8,78 m

3B-9 2,50 m/s

3B-11 a) 4,87 km; 61,4° délnyugatra b) 23,3 m/s c) 13,5 m/s; 61,4° délnyugatra

3B-13 16,1° a horizont alatt

3A-15 13,6 m

3B-17 24,7 m/s

3B-19 55,4 m/s

3B-21 a) 11,1 m/s b) 24,7 m/s; 26,5° a függőlegestől

3B-23 a) 21,9 m b) 2,74 s c) 14,1 m d) 21,4 m/s; 13,9° a függőlegestől

3C-25 a) $6\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ b) $2\hat{x} + 4\hat{y} - 6\hat{z}$ c) $6\hat{x} + 5\hat{y} - 8\hat{z}$

3C-27 (2,44 m, 11,9 m)

3C-29 $R = \dfrac{v_o^{\,2} \sin 2\theta}{g}$

3C-31 A válasz adott.

3C-33 $Y_m = \dfrac{v_0^{\,2} \sin^2 \theta}{2g}$

3C-35 A válasz adott.

3C-37 $y = (\text{tg}\,\theta)x - \left[\dfrac{g}{2(v_o \cos\theta)^2}\right]x^2$

3C-39 $\phi = \text{arc tg}\left(\dfrac{\text{tg}\,\theta}{2}\right)$

IV. Fejezet

4A-1 a) $8{,}73 \times 10^{-3}$ rad b) 0,030 rad

4B-3 91,7°

SÍKBELI ÉS TÉRBELI MOZGÁS

„Mivégre vannak ők, a Mercator pólusok és az egyenlítők,
A trópusok, zónák s a sok Föld-szelet?"
A hírnök emígyen kérdé, s a sokaság azt felelé:
„Ezek csupán egyezményes jelek!"

Lewis Carroll
(Snark vadászat)
(Farkas László fordítása)

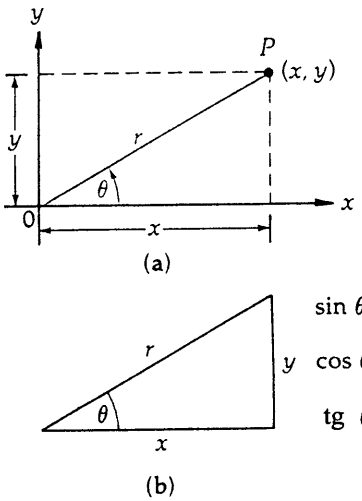
3.1 Bevezetés

A következőkben a pontszerű részecskék mozgásának vizsgálatát két és három dimenziós mozgásokra terjesztjük ki. Az általános térbeli mozgás legtöbb alapvető sajátossága kétdimenziós mozgásoknál is megjelenik, ezért többnyire síkbeli mozgásokkal foglalkozunk. Az eddigiekben definiáltuk a mozgás kinematikai jellemzőit: az x elmozdulást, a v sebességet és az a gyorsulást. Mindhárom mennyiségnek van nagysága és iránya. Az ilyen mennyiségek leírására a síkban és a térben a *vektorok* szolgálnak.

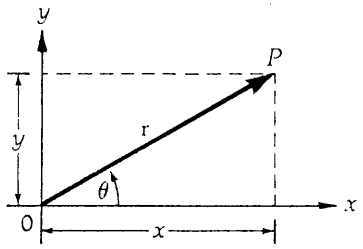
3.2 Kétdimenziós koordinátarendszerek és a helyzetvektor

Egy síkbeli pont helyzetének megadására leggyakrabban a *derékszögű (Descartes-féle)*, vagy a *síkbeli polárkoordinátarendszert* használjuk. E két koordinátarendszert mutatja be a 3-1 ábra. A derékszögű (x, y) koordináták azon szakaszok hosszával egyeznek meg, amelyeket a vizsgált pontból a tengelyekre bocsátott merőleges egyenesek a tengelyekből lemetszenek. Az (r, θ) polárkoordináták jelentése a következő: r az origót az adott P ponttal összekötő szakasz hossza, a θ polárszög pedig az OP egyenesnek a pozitív x tengellyel bezárt szöge. A szöget az x tengelytől az *óramutató járásával ellentétes irányban* mérjük.

A P pont helyzetét kényelmesen magadhatjuk egy adott koordinátarendszerben felvett **vektorral** is. A vektorokat *irányukkal és nagyságukkal* jellemezzük. Műveleti szabályaikra a későbbiekben visszatérünk. Geometriailag a vektorok irányított szakaszok, amelyeket nyíllal ábrázolunk. A nyíl hegye mutatja a vektor irányát, a szakasz hossza pedig a nagyságát. A fizikai mennyiségeket reprezentáló vektorok fontos sajátossága, hogy nagyságuk



3-1 ábra
a) A P pont *derékszögű* (vagy *Descartes) koordinátái* (x, y) és *síkbeli polárkoordinátái* (r, θ).
b) Derékszögű háromszögre vonatkozó trigonometriai összefüggések.



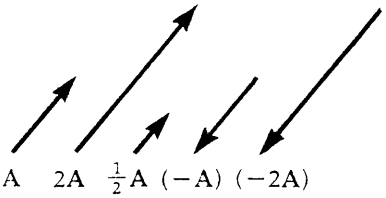
3-2 ábra
Az **r** helyvektor és *x*, *y* komponensei. A helyzetvekor kijelöli a *P* pont helyét az origóhoz képest.

mellett meg kell adni a megfelelő fizikai mennyiség dimenzióját. Például a 3-2 ábrán jelzett **r helyzetvektor** a *P* pont helyzetét mutatja meg a koordinátarendszer origójához képest. Az **r** vektor csúcspontjából a tengelyekre bocsátott merőlegesek a tengelyekből éppen a *P* pont *x* és *y* koordinátáit metszik ki. A tengelyekre vett vetületeket nevezzük az **r** vektor **derékszögű** vagy **Descartes féle komponenseinek (össszetevőinek).** A vektorok összetevőit rendre *x*-szel és *y*-nal jelöljük. Az összetevők értéke pozitív is és negatív is lehet attól függően, hogy a komponens az origótól milyen irányba mutat. A vektorok komponenseik segítségével egyértelműen magadhatók. A komponensek meghatározását **a vektor komponensekre bontásának** nevezzük. Nyomtatásban a vektorokat **fett** betükkel (**r**), kézirásban pedig a betüjel fölé húzott kicsíny nyillal (r) jelöljük. A helyzetvektor nagyságának (abszolút értékének) jelölésére pedig az $|\mathbf{r}|$, ill. r szimbolumokat használjuk. Egyszerű trigonometriai összefüggések segítségével belátható, hogy a derékszögű és a polárkoordináták között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r\sin\theta \quad tg\,\theta = \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \tag{3-1}$$

ahol θ a pozitiv x iránytól az óramutató járásával ellentétes irányban mért szög.

A vektorok nagysága számokkal (skaláris mennyiségekkel) való szorzással növelhető, vagy csökkenthető. A –1-gyel való szorzás hatására a vektor iránya ellentétesre változik. A 3-3 ábra ezeket a műveleteket illusztrálja. (Vegyük észre, hogy a skalárral való osztást nem szükséges definiálni, hiszen ez megegyezik az egynél kisebb számokkal történő szorzással.) A vektorok skalár összetevői – mint azt a következő példában megmutatjuk – a szögfüggvényekre vonatkozó előjelszabályok szerint vesznek fel pozitív vagy negatív értéket.



3-3 ábra
Vektorok szorzása skalárral. A –1-gyel való szorzással a vektor *negatívját (ellentettjét)* kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az **A** és a **–A** vektorok abszolút értéke azonos, de irányuk ellentétes. (A két vekort antiparalellnek is nevezzük.)

3-1 PÉLDA

A 3-4 ábrán látható **r** helyzetvektor nagysága 0,1 m és iránya 150 fokos szöget zár be a pozitív *x* tengely irányával. Határozzuk meg a vektor derékszögű komponenseit.

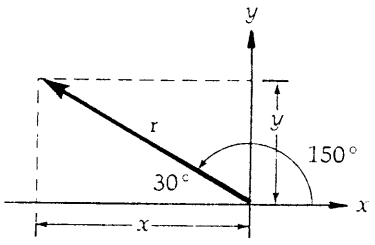
MEGOLDÁS

Az ábra szerint a derékszögű komponensek a következők:

x összetevő: $x = r\cos 150° = (0{,}10\text{ m})(\cos 150°) = -0{,}0866\text{ m}$

y összetevő: $y = r\sin 150° = (0{,}10\text{ m})(\sin 150°) = 0{,}0500\text{ m}$

Az (r, θ) síkbeli polár koordinátarendszerben a θ szöget a pozitív *x* tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük. Egyes esetekben a probléma egyszerűbb és világosabb megfogalmazását segíti, ha az ábrán nemcsak az *x* tengelytől, hanem *más tengelyektől mért szögeket is bejelölünk.*



3-4 ábra
A 3-1 példához.

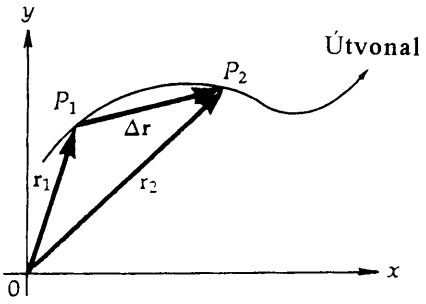
A vektorok alkalmazásának talán legfontosabb oka az, hogy a vektoriális alakban felírt egyenletek *az adott vonatkoztatási rendszerben tetszőlegesen választott koordinátarendszer esetén érvényesek.* Mindegy tehát, hogy derékszögű, illetve síkbeli vagy térbeli polárkoordinátákat használunk. A vektorjelölés a matematikai formulákat rendkívül egyszerűvé teszi, bizonyos

értelemben lehámozza a számításokról azokat a nehézkes részleteket, amik egy speciális koordinátarendszerbeli reprezentációval járnak, s így a fizikai tartalom világosabban állhat előttünk. A fizika sok modern ágában kerülnek szembe szinte leküzdhetetlen nehézségekkel, ha az elegánsan egyszerű vektorális jelölésrendszer nem állna rendelkezésünkre.

Mindezek mellett a vektorális jelölés további mély kapcsolatot mutat a fizikai törvények rendkívül fontos tulajdonsága a koordinátarendszer eltolásával és elforgatásával szembeni **invariancia**. Ez azt jelenti, hogy a fizikai törvények matematikai kifejezése változatlan marad, ha a koordinátarendszert **eltoljuk** (a rendszer origójának helye megváltozik, a koordináta tengelyek iránya azonban az eredeivel párhuzamos marad), vagy **elforgatjuk** (a tengelyek térbeli iránya elfordul). Mivel a vektorok hasonló invariancia tulajdonságokkal rendelkeznek, a vektorszámítás igen sok fizikai elmélet kifejtésekor ideális matematikai eszközt jelent.

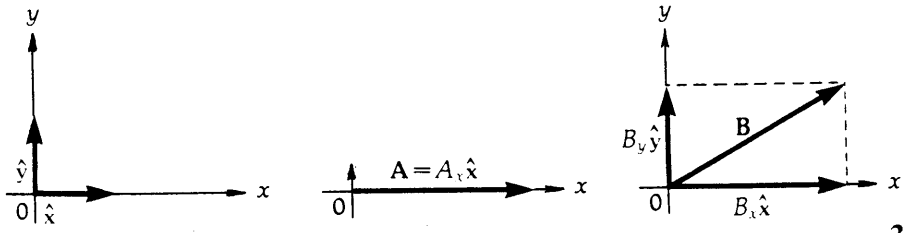
3.3 A Δr elmozdulásvektor

A 3-5 ábra egy görbe vonalon mozgó részecske pályáját mutatja az (x_1, y_1) koordinátájú, $\mathbf{r}_1$ helyzetvektorú P_1 kezdőponttól, az (x_2, y_2) koordinátájú $\mathbf{r}_2$ helyzetvektorú P_2 végpontig. A két pont közötti pálya tényleges alakjától függetlenül az eredő **elmozdulást a Δr vektorral** definiáljuk. Vegyük észre, hogy az elmozdulásvektor nagysága nem a görbe pályán megtett út hosszával, hanem a kezdő és a végpont közötti legrövidebb utat jelentő egyenes szakasz hosszával egyezik meg.



3-5 ábra
A görbült pályán P_1-től P_2-ig mozgó részecske Δr elmozdulásvektora.

A Δr elmozdulásvektort az x és az y irány menti elmozdulásokkal is kifejezhetjük. Ehhez be kell vezetnünk az $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ és $\hat{\mathbf{z}}$ egységvektorokat, amelyek egységnyi hosszúságúak[1] és nincsen dimenziójuk. A 3-6 ábra az egységvektorok alkalmazását illusztrálja. Az $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ és $\hat{\mathbf{z}}$ egységvektort a kövér betű feletti kalappal jelöljük. E vektorok nagysága és iránya nem változik és bármilyen mennyiség jelölésére is használjuk őket, dimenziójuk sincs csupán irányok jelzésére szolgálnak. Általában minden $\mathbf{C}$ vektor leírható a C_x és C_y derékszögű komponensekkel, vagy a $C_x\hat{\mathbf{x}}$ és $C_y\hat{\mathbf{y}}$ vektorösszetevőkkel.



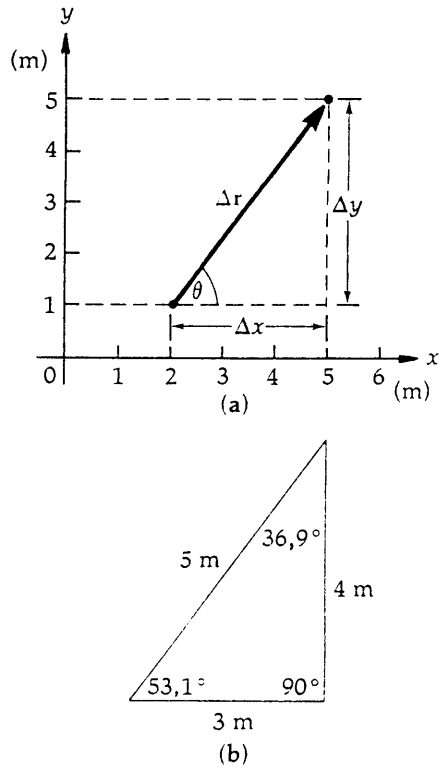
a) Az $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ egységvektoroknak dimenziója nincs, hosszuk egységnyi, irányuk a megfelelő tengely pozitív iránya.

b) Egydimenziós vektorok kifejezhetők a Descartes-féle koordinátájuk és az egységvektor szorzataként.

c) Egy kétdimenziós **B** vektor, amelynek Descartes-féle koordinátái B_x és B_y felírható a $B_x\hat{\mathbf{x}}$ és $B_y\hat{\mathbf{y}}$ vektorkomponensek összegeként.

3-6 ábra
Az $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ egységvektorok használata. Ha egy skalárt egységvektorral szorzunk, akkor a skalárból vektor lesz, amelynek nagysága megegyezik a skalár értékével, iránya pedig azonos egységvektor irányával.

[1] Az egységvektorok $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ és $\hat{\mathbf{z}}$ jelölése helyett szokásos az $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ és $\hat{\mathbf{k}}$ szimbólumok használata is. Úgy tűnik azonban, hogy a haladók számára írott könyvek szerzői a koordináta tengelyek és a megfelelő egységvektorok azonos betűvel való jelölésére törekednek. A rendszer könnyen megjegyezhető, sok esetben elkerülhetővé teszi az indexek használatát és kényelmesen alkalmazható más típusú, pl. polárkoordináták esetén ($\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ és $\hat{\boldsymbol{\phi}}$).



3-7 ábra
A 3-2 példához. A $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvekor skalárösszetevői: Δx és Δy.

3-2 PÉLDA

A 3-7 ábra szerint egy részecske a (2 m, 1 m) pontból a (5 m, 5 m) pontba mozdul el. Határozzuk meg a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor irányát és nagyságát.

MEGOLDÁS

A $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor skalárkomponensei a következők:

$\Delta x = x_2 - x_1 = 5\text{ m} - 2\text{ m} = 3\text{ m}$ és $\Delta y = y_2 - y_1 = 5\text{ m} - 1\text{ m} = 4\text{ m}$.

Az összetevők az eredővel 3-4-5 tipusú pitagoraszi számhármast alkotnak, amint az a 3-7/b ábra illusztrálja. Az eredő $\Delta\mathbf{r}$ abszolut értékére a Pitagorasz tétellel

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} = \sqrt{25}\text{ m} = 5{,}00\text{ m}$$

adódik. A $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor irányát az x tengellyel alkotott θ szöggel adhatjuk meg. Az ábra szerint

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\text{ m}}{3\text{ m}} = 1{,}33$$

amiből a θ szögre $\theta = \text{arc tg } 1{,}33$ adódik.
Az arkusz tangens függvény inverze, ennek megfelelően θ azt a szöget jelenti, amelynek tangense 1,33. Zsebszámológép segítségével ez a szög

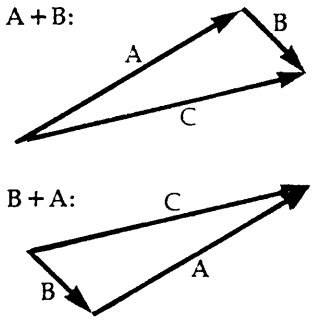
$$\theta = 53{,}1°.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a 3-4-5 tipusu háromszög hegyesszögei rendre 36,9° és 53,1°.

3.4 Vektorok összeadása és kivonása

Vektorok összeadását és kivonását kétféleképpen, *geometriai* (ekkor grafikusan határozzuk meg az eredményt) és a pontosabb eredményt adó *algebrai* módszerrel végezhetjük el.

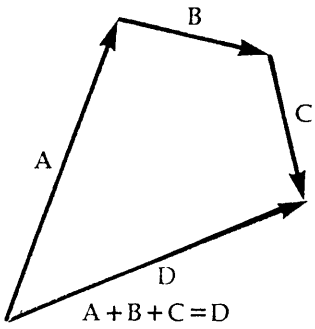
A geometriai módszer



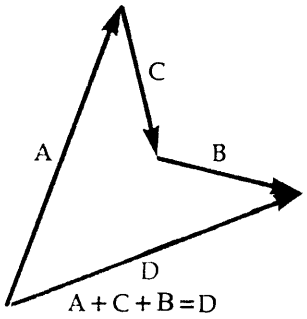
3-8 ábra
Vekorok összeadásának kommutatív törvénye. Bár az **A+B** és **B+A** művelet ábrája különböző, a **C** összegvektor azonos.

A vektorok összeadására és kivonására készített ábrákon a vektorokat – nagyságuk és irányuk megtartásával – tetszés szerint mozgathatjuk. A vektorösszeg grafikus meghatározásához rajzoljuk fel az egyik vektort, majd a végpontjából mérjük fel a másik komponenst. Az összeget az első vektor kezdőpontjából a második végpontjába mutató vektor adja meg. A 3-8 ábrán például az **A** és **B** elmozdulásvektorokat aduk össze és meghatározzuk az eredő **C** vektort. Az ábra mutatja, hogy a vektorok összeadása *kommutatív*, azaz nem függ a tagok sorrendjétől: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Kettőnél több vektort grafikusan a 3-9/a ábrán bemutatott un. „poligon" (sokszög) módszerrel adhatunk össze. Ennek során a vektorok összeadása tetszés szerinti csoportosításban végezhető (3-9/b ábra), azaz a vektorok összeadása *asszociatív* művelet.

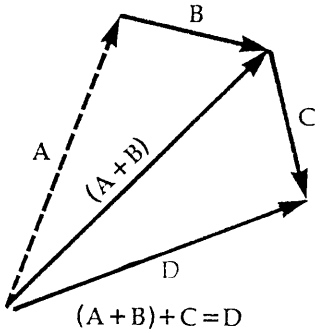
A vektorok összeadása
- kommutatív: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- asszociatív: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

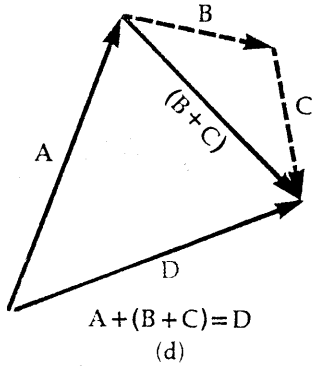


a) Sokszög módszer három vagy több vektor összegezésére



b) Az a) ábrán látható összeg meghatározása a tagok más sorrendjével. A kommutatív törvénynek megfelelően az összegvektor ugyanaz mint az a) ábrán.





c) és **d)** Az asszociatív törvény szerint a vektorok összeadása a tagok különböző csoportosításával is elvégezhető.

3-9 ábra

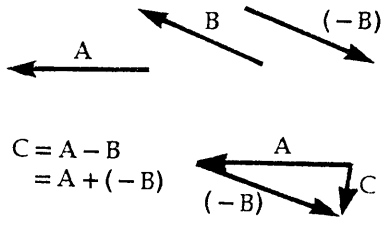
Három vektor összeadása

A vektorok kivonásának definíciója előtt felidézzük, hogy a kivonás *negatív* mennyiség *hozzáadásaként* is értelmezhető. A vektorok ellentettjét már definiáltuk (3-3 ábra), így a kivonás értelmezése a következő:

II. Vektorok kivonása

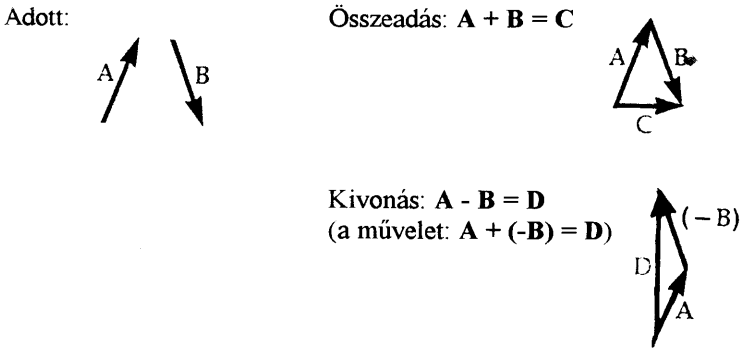
$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ definíció szerint } \mathbf{D} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (3\text{-}2)$$

A grafikus kivonás során az **A** és a **(–B)** vektor *adjuk össze* a már definiált módon (3-10 ábra). A kivonás során a vektorok nem cserélhetők fel, hiszen **(A – B) = –(B – A).** Pongyola kifejezés tehát a „két vektor különbsége" szóhasználat, ha nem mondjuk meg melyik vektor a kivonandó, ill. a kisebbítendő. Figyeljük meg, hogy bizonyos esetekben (3-11 ábra) két vektor különbségének abszolút értéke nagyobb lehet mint a két vektor összegéé.



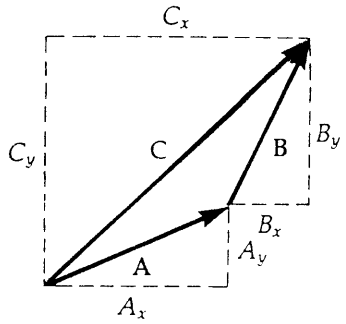
3-10 ábra

Az **A–B** különbség meghatározásakor először felrajzoljuk az **A** vektort, majd hozzáadjuk **(–B)**-t.



3-11 ábra

Egyes esetekben a különbségvektor nagysága *nagyobb* lehet mint a két vektor összegének nagysága.



3-12 ábra
Az **A** és **B** vektor x komponenseinek összege megegyezik a **C** összegvektor x összetevőjével. Hasonló szabály az y komponensekre.

Figyelmeztetés az előjelekre vonatkozóan: A vektordiagramokon csak akkor használjuk negatív előjelet, ha egy vektorral ellentétes irányú másik vektort kívánunk jelölni. Soha ne lássunk el negatív előjellel egy vektort azért, mert történetesen valamelyik negatív koordináta irányba mutat. (Például a lefelé mutató nehézségi gyorsulás –**g**-vel való jelölése célszerűtlen, a **g** jelölés alkalmasabb.) Ha egy vektort negatív előjellel látunk el, az mindig magában rejti annak a félreértésnek a lehetőségét, hogy az „igazi" pozitív vektor éppen ellentétes irányba mutat. A vektordiagramok a pozitív és negatív irány választásától függetlenül fennálló összefüggéseket fejeznek ki. A félreérthetőség lehetősége miatt ismételten hangsúlyozzuk, hogy *a vektordiagramokon csak akkor használjunk negatív előjelű vektorokat, ha egy másik ugyancsak szereplő vektor ellentetjét kívánjuk jelölni.*

Algebrai módszer

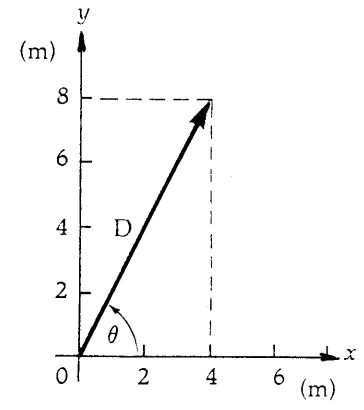
A vektorok összeadásának és kivonásának algebrai végrehajtása pontos eredményre vezet. Ekkor az egyes vektorkomponenseket algebrailag kell összeadni, ill. kivonni, hogy megkapjuk az eredő megfelelő összetevői. A 3-12 ábra geometriailag szemlélteti ezt a műveletet, míg a következő példa a művelet algebrai megoldását mutatja be.

3-3 PÉLDA

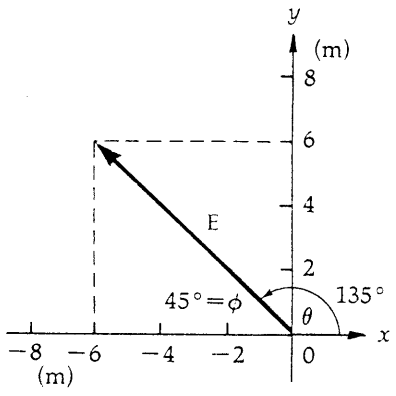
Határozzuk meg a következő elmozdulásvektorokat:

$$\mathbf{A} = (3\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (3\text{ m})\hat{\mathbf{y}}$$
$$\mathbf{B} = (1\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (-4\text{ m})\hat{\mathbf{y}}$$
$$\mathbf{C} = (-2\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (3\text{ m})\hat{\mathbf{y}}$$

Határozzuk meg algebrai úton a) a $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ vektort,
b) az $\mathbf{E} = -\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$ vektort.



(a)



(b)

3-13 ábra
A 3-3 példához

MEGOLDÁS

a) Az **A** + **B** + **C** összeg meghatározásához foglaljuk táblázatba a tagok x és y összetevőit, majd adjuk össze a megfelelő komponenseket.

Vektor	x Komponens	y Komponens
A	3 m	3 m
B	1 m	–4 m
C	–2 m	5 m
D = **A** + **B** + **C**	2 m	4 m

Így $\mathbf{D} = (2\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (4\text{ m})\hat{\mathbf{y}}$, amint ezt a 3-13 ábra mutatja. A **D** vektor nagysága

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(2\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} = 4{,}47\text{ m}$$

Az x tengely pozitív irányával alkotott θ szög pedig

$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \text{arc tg}\frac{4\text{ m}}{2\text{ m}} = \text{arc tg}\,2 = 63{,}4°$$

b) Készítsünk új táblázatot a vektorok összetevőiből, jelezve, hogy a **–A** és **–B** vektorok összetevői az **A** és **B** vektorok összetevőinek ellentetjei.

Vektor	x Komponens	y Komponens
–A	–3 m	–3 m
–B	–1 m	4 m
C	–2 m	5 m
E = (–A) + (–B) + C	–6 m	6 m

Itt $\mathbf{E} = (-6\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (6\text{ m})\hat{\mathbf{y}}$,amint azt a 3-13/b ábra mutatja.
E nagysága

$$\mathbf{E} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-6\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 8{,}49\text{ m}$$

Az **E** vektor a második térnegyedbe esik és az x tengely negatív irányával a következő szöget zárja be[2]

$$\phi = \text{arc tg}\left|\frac{E_y}{E_x}\right| = \text{arc tg}\left|\frac{-6\text{ m}}{6\text{ m}}\right| = 45°$$

Polárkoordinátákban a θ szöget a $+x$ tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük, azaz

$$\theta = (180° - 45°) = 135°$$

Egyes esetekben kényelmes az x tengely negatív irányával alkotott $\theta = 45°$-os szög bejelölése is, ekkor azonban *olyan ábrát kell készíteni amelyről világosan leolvasható, hogy melyik szögről van szó.*

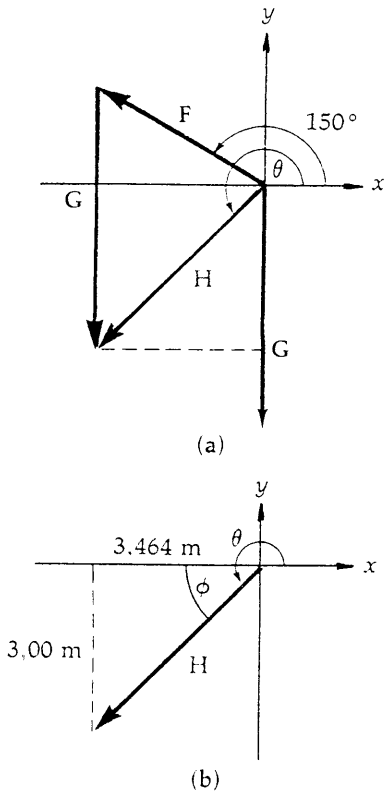
A vektorokat gyakran r, θ *polárkoordinátákkal* adjuk meg, ahol r a vektor hossza, θ pedig a pozitív x tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mért szög. Az ilyen alakban megadott vektorokat úgy adhatjuk össze, hogy először meghatározzuk derékszögű összetevőiket, majd a már ismertetett eljárást alkalmazzuk. A következő példában ezt olyan vektorok összeadásával illusztráljuk, amelyek nem az első térnegyedbe esnek, ezért a koordináta-transzformáció során a szögfüggvények inverzeit nagyon gondosan kell kezelni.

3-4 PÉLDA

Adott a **F** vektor és a **G** vektor polárkoordinátákkal:

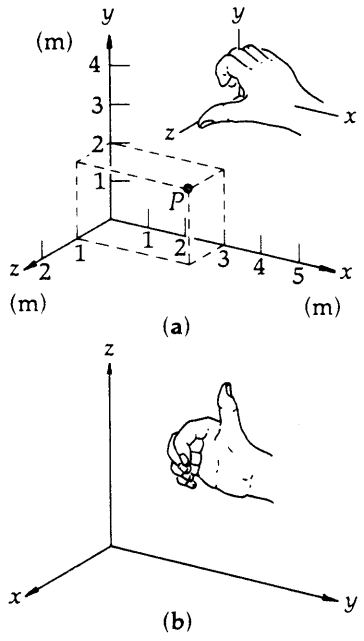
$$\mathbf{F} = (4\text{ m}, 150°) \text{ és } \mathbf{G} = (5\text{ m}, 270°)$$

Határozzuk meg a **H = F + G** vektor polárkoordinátáit (3-14/a ábra).



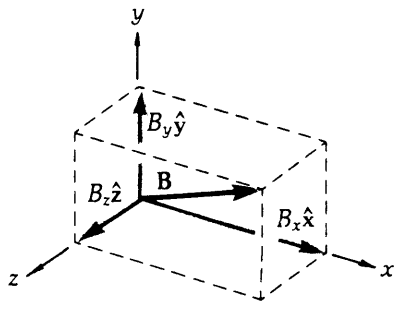
3-14 ábra
A 3-4 példához.

[2] A trigonometrikus függvények inverzét a legtöbb számológép csak a $-90° < 0 < 90°$ tartományban adja meg. Ezért különös gonddal kell eljárnunk, ha a vektor a második vagy a harmadik térnegyedbe esik. Mindig készítsünk ábrát!



3-15 ábra

Jobbrendszert alkotó Descartes-féle koordinátarendszer egy *P* pont térbeli koordinátáival. Bár az a) és b) ábra más-más tengelyirányítást mutat, mindkét koordinátarendszer jobbsodrású



3-l6 ábra

A **B** vektor térbeli koordinátái B_x, B_y és B_z. A megfelelő vektorösszetevők $B_x\,\hat{\mathbf{x}}$, $B_y\hat{\mathbf{y}}$ és $B_z\,\hat{\mathbf{z}}$. Ezekkel a vektor a $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}}$ alakban írható fel.

MEGOLDÁS

Először kifejezzük a vektorok derékszögű komponenseit:

Vektor	*x* Komponens	*y* Komponens
F	(4 m)(cos 150°) = –3,142 m	(4 m)(sin 150°) = 2,00 m
G	(4 m)(cos 270°) = 0	(4 m)(sin 270°) = –5,00 m
H = F + G	–3,646 m	–3,00 m

A **H** vektor iránya a 3-14 ábrán megrajzolt háromszögből határozható meg

$$\text{tg}\,\phi = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{3{,}000\text{ m}}{3{,}464\text{ m}} = 0{,}8661 \text{ vagy } \phi = \text{arc tg} = 0{,}8661 = 40{,}9^0$$

Ennek megfelelően **H** irányszöge polárkoordinátákban $\theta = (180^\circ + 40{,}9^\circ)$

Így $\mathbf{H} = (4{,}58\text{ m}, 221^\circ)$

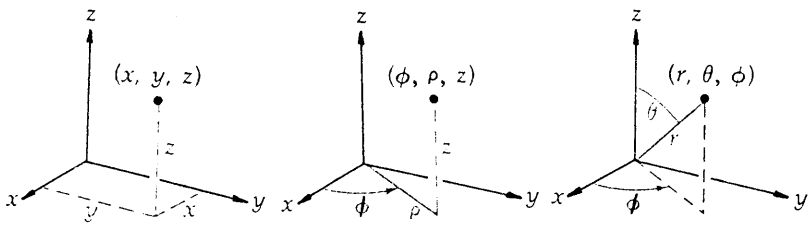
3.5 Térbeli vektorok

A térben a legismertebb koordinátarendszer térben az egymásra merőleges *x*, *y*, és *z* tengelyekkel rendelkező Descartes-féle koordinátarendszer. A tengelyrendszert még azonos tengelyállások esetén is kétféleképpen vehetjük fel. Az *xy* síkra merőleges z tengelyt ugyanis kétféleképpen irányíthatjuk. Megállapodás szerint azonban az un. **jobbrendszert** szokás használni, amit a következőképpen definiálunk. Vegyük fel tetszőlegesen az *x* és *y* tengelyeket, majd forgassuk a pozitív *x* irányt a pozitív *y* irány felé. Ez a forgatás kitüntet egy *forgási irányt*. Válasszuk a z tengely irányát úgy, hogy egy jobbkezes csavar ilyen forgatás hatására a pozitív *z* irányba mozogjon. Más kritériumot kaphatunk a jobbrendszer kijelölésére a következőképpen. Kifeszített hüvelykujjal hajlítsuk be jobbkezünk többi ujját úgy, hogy hegyük az előbb kijelölt forgás irányába mutasson. Hüvelykujjunk kijelöli a *z* tengely pozitív irányát! A 3-15 ábrán egy jobbrendszer perspektivikus képe látható. A *P* pont *x, y, z* koordinátái rendre 3 m, 2 m, 1m.

Az eddig használt egységvektorrendszert a *z* tengely pozitiv irányába mutató $\hat{\mathbf{z}}$ **egységvektorral kiegészítve**, egy térbeli **B** vektor pl. a 3-16 ábrán látható módon állítható elő derékszögű koordinátákkal. Az általánosan ismert térbeli koordinátarendszereket a 3-17 ábra ismerteti. Jelenleg elsősorban a Descartes-féle koordinátarendszert alkalmazzuk.

3-5 PÉLDA

A helikopterállomást 40°-os szögben északkelet felé elhagyó helikopter vízszintesen 2 km-t tesz meg, mialatt magassága 2500 m-re nő. A pilóta ekkor keletre fordul és 1500 m-t süllyedve vízszintesen még 3 km-t tesz meg. Milyen irányban és mekkora távolságra jutott a gép a repülőtértől? (3-18 ábra)



a)
Descartes-féle koordináták
(x, y, z)

b)
Hengerkoordináta-rendszer (ρ, ϕ, z)

$x = \rho \cos \phi$

$y = \rho \sin \phi$

$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\text{tg}\, \phi = \dfrac{y}{x}$

c)
Gömbi polárkoordináták
(r, θ, ϕ)

$x = r \sin\theta \cos\phi$

$y = r \sin\theta \sin\phi$

$z = r \cos\phi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

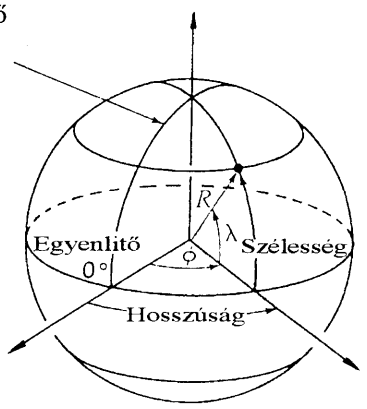
$\text{tg}\,\theta = \sqrt{x^2 + y^2} \,/\, z$

$\text{tg}\,\phi = y \,/\, x$

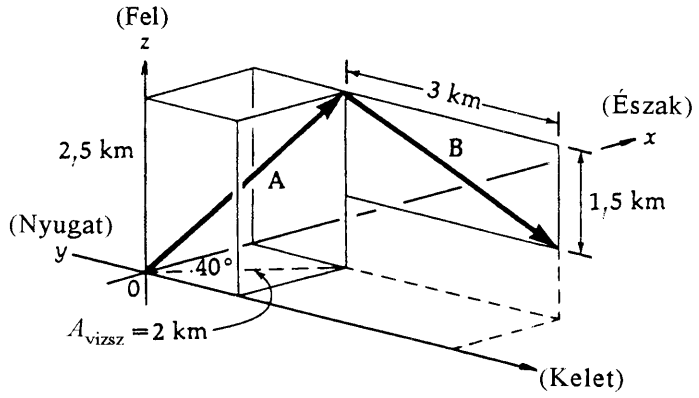
3-17 ábra

Egy pont térbeli helyzetének meghatározására szolgáló különböző koordinátarendszerek. Mindegyik esetben *három* paramétert (x, y, z), (ρ, ϕ, z), ill. (r, θ, ϕ) tartalmaznak, amelyek jellemzik a háromdimenziós teret.

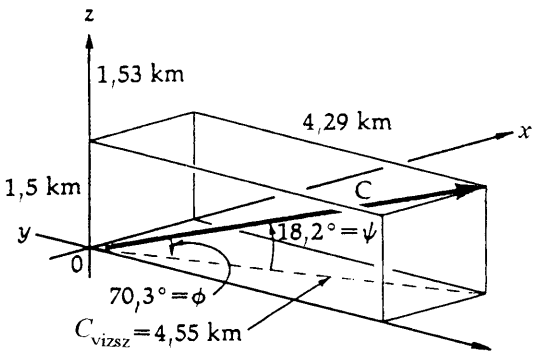
A Greenwichen áthaladó kezdő hosszúsági kör (0^0 hosszúság).



(d) A földgömbön elfoglalt helyzet két szöggel jellemezhető: a ϕ *hosszúsági* szöggel (amit a Greenwiche (Anglia) átmenő kezdő hosszúsági körtől keletre és nyugatra mérünk) és a szélességi szöggel (amit az egyenlítőtől északra és délre mérünk). Ez a két szög alkalmas a gömb felületét alkotó két dimenziós görbült tér jellemzésére. Ha figyelembevesszük az átlagos tengerszint feletti magasságot (azaz a gömb középpontjától mért R változását), akkor a szóban forgó tér háromdimenziós.



a) Az **A** és **B** elmozdulásvektorok.



b) Az eredő **C** = **A** + **B** elmozdulás.

3-18 ábra

A 3-5 példához. Térbeli elmozdulásvektorok.

MEGOLDÁS

A helikopter végső helyzetének meghatározásához két térbeli elmozdulásvektort kell összeadnunk. Az eljárás első lépéseként a vektorok derékszögű koordinátáit kell meghatároznunk. Az összeadás után kiszámítjuk a kapott elmozdulásvektor hosszát és irányát. Használjunk

olyan derékszögű koordinátarendszert, amelynek x tengelye északra, y tengelye nyugatra, z tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat.

Az elmozdulásvektorok derékszögű összetevőit az alábbi táblázat mutatja (a távolságokat kilométerben mérjük):

Vektor	x Összetevő	y Összetevő	z Összetevő
A	$\underbrace{2\cos 40^\circ}_{1,53}$	$\underbrace{-2\sin 40^\circ}_{-1,29}$	2,5
B	0	–3	$\underbrace{1,5 - 2,5}_{-1,0}$
C	1,53	–4,29	1,5

Ennek megfelelően az eredő elmozdulás: $\mathbf{C} = 1{,}53\,\hat{\mathbf{x}} - 4{,}29\,\hat{\mathbf{y}} - 1{,}50\,\hat{\mathbf{z}}$.
A repülőtértől való távolságot a kapott vektor hossza adja:

$$|\mathbf{C}| = \sqrt{(1{,}53)^2 + (-4{,}29)^2 + (1{,}50)^2} = 4{,}79 \text{ km}$$

A vízszintes irányban mért szög

$$\phi = \text{arc tg}\left(\frac{4{,}29}{1{,}53}\right) = \boxed{70{,}3^\circ \quad \text{északkeletre}}$$

A teljes elmozdulás vízszintes összetevője:

$$C_{\text{vízsz}} = \sqrt{(4{,}29)^2 + (1{,}53)^2} = 4{,}55 \text{ km}$$

Az elmozdulásvektornak a vízszintessel alkotott szöge:

$$\psi = \arccos\frac{C_{\text{vízsz}}}{C} = \arccos\frac{4{,}55}{4{,}79} = \boxed{18{,}2^\circ \quad \text{a horizont felett}}$$

3.6 A sík- és térbeli mozgás sebessége és gyorsulása

A második fejezetben egyenesvonalú mozgásra vonatkozóan már definiáltuk a kinematikai alapfogalmakat, az elmozdulást, a sebességet és a gyorsulást. A vektorok felhasználásával most két- és háromdimenziós mozgásokra is kiterjesztjük ezeket a fogalmakat. Az egyszerűség kedvéért ábráink többnyire kétdimenziós esetre vonatkoznak. Az eredmények azonban kis gyakorlattal könnyen kiterjeszthetők a háromdimenziós esetekre.

A 3-19 ábra két város közötti autóutat mutat. A városok távolsága toronyiránt 100 km. Vizsgáljuk fizikai szempontból egy autó útját a két város között. A kiinduló város **helyzetvektora** legyen $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$ a célvárosé pedig $\mathbf{r}_2(x_2, y_2)$. A **$\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektort** az

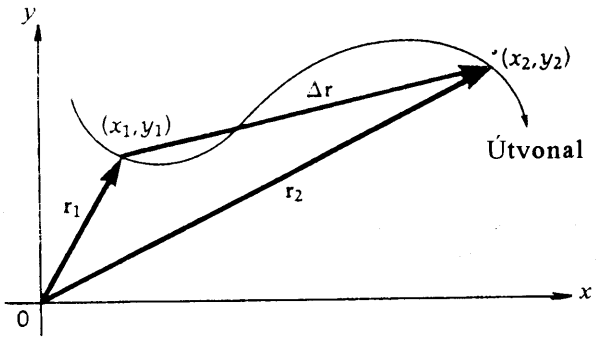
Elmozdulásvektor $\Delta\mathbf{r}$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad \textbf{(3-3)}$$

összefüggés definiálja. Természetesen a gépkocsi által a görbevonalú pályán ténylegesen megtett út Δr-nél hosszabb is lehet. Az **átlagsebesség-vektor** definíciója a következő:

Átlagsebesség vektor $\mathbf{v}_{átl}$

$$\mathbf{v}_{átl} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{3-4}$$



3-19 ábra
A $\Delta \mathbf{r}$ elmozdulásvektor az (x_1, y_1) kezdőpontból az (x_2, y_2) végpontba mutat. *Vegyük észre*, hogy $\mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$.

ahol $\Delta t = t_2 - t_1$ azt az időtartamot jelenti, ami alatt a gépkocsi a pálya (x_1, y_1) és (x_2, y_2) közötti szakaszát megtette. Oda-vissza út esetén pl. az elmozdulás és így az átlagsebesség-vektor is zérus lenne. A pillanatnyi sebességet a pálya bármely pontjában a $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ különbségi hányados határértékével értelmezhetjük, midőn Δt zérushoz tart (3-20 ábra). Bár ezen folyamat során $\Delta \mathbf{r}$ is kicsinnyé válik, a $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ arány nem feltétlenül kicsi. **Pillanatnyi sebességnek** a határérték-képzési folyamat eredményét nevezzük. Ha a mozgó test a t időpillanatban az $\mathbf{r}(t)$ helyen a $t + \Delta t$ pillanatban az $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ helyen tartózkodik, akkor

Pillanatnyi sebesség $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3-5}$$

Szavakban: „$\mathbf{v}$ a $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ különbségi hányados határértéke, midőn Δt tart zérushoz". A határértéket $d\mathbf{r}/dt$-vel jelöljük és „$\mathbf{r}$ idő szerinti deriváltjának nevezzük". SI mértékrendszerben a sebesség mértékegysége *méter per másodperc*.

Amennyiben az $\mathbf{r}(t)$ függvényt analitikusan ismerjük, akkor a deriváltját a G-I függelékben található deriválási szabályokkal is meghatározhatjuk. Figyeljük meg, hogy határértékben $\Delta \mathbf{r}$ iránya a pálya érintőjének irányához közeledik. Emiatt a $\mathbf{v}$ pillanatnyi sebesség *mindig a pálya érintőjébe esik és a haladás irányába mutat.*

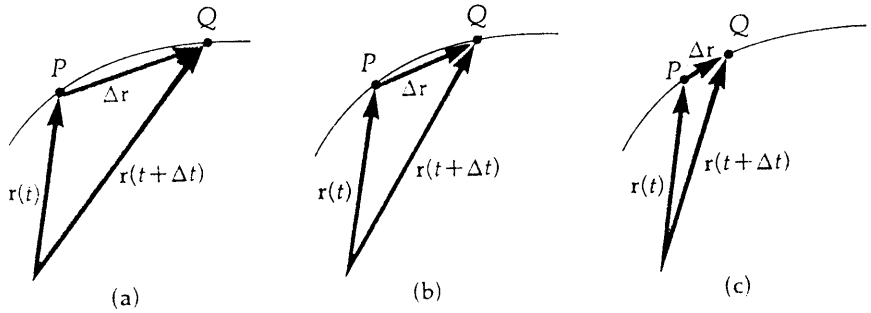
A fizikában a **sebességvektor** mindig nagysággal és iránnyal jellemzett, mennyiség. A sebességvektort koordinátarendszertől függetlenül definiáltuk, így bármely koordinátarendszerben ugyanúgy használható – ez talán a legnagyobb előnye a vektorfogalom alkalmazásának. Derékszögű koordinátákban a sebességvektor az

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

helyzetvektor segítségével

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\hat{\mathbf{x}} + x\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} + v_y\hat{\mathbf{y}} + y\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} + v_z\hat{\mathbf{z}} + z\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt}$$

alakban fejezhető ki.



3-20 ábra
Az ábra a 3-19 görbevonalú pálya kicsiny részének nagyítása. A határértékképzési folyamat során, amikor a Q pontot egyre közelebb és közelebb vesszük fel P-hez, a $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ különbségi hányados a $d\mathbf{r} / dt$ határértékhez tart, eközben $\Delta \mathbf{r}$ iránya a görbe P pontbeli érintőjének irányához közeledik.

A $d\hat{\mathbf{x}}/dt$, $d\hat{\mathbf{y}}/dt$ és $d\hat{\mathbf{z}}/dt$ deriváltak értéke zérus, mivel az $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ és $\hat{\mathbf{z}}$ egységvektorok állandók, nem változnak az idő függvényében. Így

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}} \qquad \textbf{(3-6)}$$

ahol a sebességvektor koordinátái egyenlők helyzetvektor koordinátáinak a deriváltjaival:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \textbf{(3-7)}$$

3-6 PÉLDA

Egy az xy síkban mozgó részecske helyzetvektorának derékszögű koordinátái az $x = (2\ \text{m/s}^2)t^2$ és $y = (16\ \text{m s}^2)/t^2$ összefüggések szerint változnak. Határozzuk meg a részecske helyzetvektorát és sebességvektorát a $t = 2$ s időpontban és ábrázoljuk ezeket.

MEGOLDÁS

A helyzetvektort bármely időpontban az

$$\mathbf{r} = 2t^2\hat{\mathbf{x}} + \frac{16}{t^2}\hat{\mathbf{y}} \qquad \text{(SI egységekben)}$$

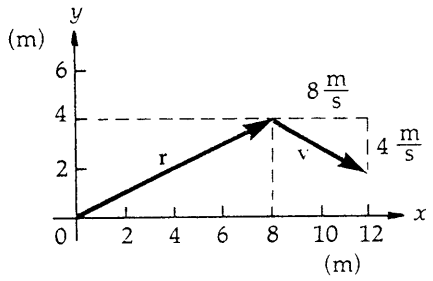
függvény adja meg. A 3-6 egyenlet szerint a sebességvektor:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v = 4t\hat{\mathbf{x}} - \frac{32}{t^3}\hat{\mathbf{y}}$$

Meghatározva ezeket a vektorokat a $t = 2$ s pillanatban és beírva a mértékegységeket, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} = (8\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}})\ \text{m} \quad \text{és} \quad = (8\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}})\ \text{m/s}$$

A helyzet- és sebességvektort a 3-21 ábrán rajzoltuk fel.

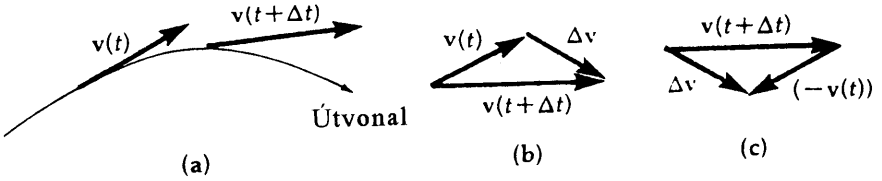


3-2l ábra
A 3-6 példához. Mozgó test pillanatnyi helyzetvektora és sebességvektora.

A gyorsulás

A gyorsulás definíciója az egydimenzióban adott definícióhoz hasonlóan adható meg. A 3-22a ábra egy görbevonalú pályán mozgó részecske helyzetét mutatja két különböző időpontban. A mozgás során a részecske sebessége nőhet, vagy csökkenhet. Válasszuk azt az esetet, amikor a sebesség növekszik. A $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ sebességvektorok *kezdőpontját* az ábrán a részecskének az adott időpontban való helyzete határozza meg. A sebességvektor változását a 3-22 ábrán követhetjük.

A vektorábrán a $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ sebességvektorok irányuk és nagyságuk megtartásával szabadon mozgathatók, így felrajzolható a $\mathbf{v}(t) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t)$ vektorösszeg, amiből kifejezhetjük a $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$ különbségvektort. (A különbséget a $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ végsebesség és a $-\mathbf{v}(t)$ sebesség összegeként határozhatjuk meg, amint azt a 3-22 ábra mutatja.) Az **átlagos gyorsulás** definíció szerint:



3-22 ábra
Δt idő alatt a sebességvektor iránya és nagysága is változik, a változás $\Delta\mathbf{v}$

Átlagos gyorsulás $\mathbf{a}_{átl}$

$$\mathbf{a}_{átl} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3\text{-}8)$$

A **pillanatnyi gyorsulás** :

Pillanatnyi gyorsulás **a**

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (3\text{-}9)$$

Szavakban: „**a** a $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$ különbségi hányados határértéke, midőn Δt tart zérushoz". A határértéket $d\mathbf{v}/dt$-vel jelöljük és „**v** idő szerinti deriváltjának nevezzük". SI mértékrendszerben a gyorsulás egysége [(méter per másodperc) per másodperc], rövidebben m/s^2. Derékszögű komponensekben a gyorsulásvektor

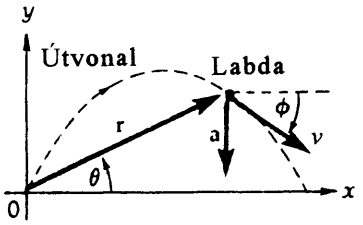
$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}} \qquad (3\text{-}10)$$

alakban adható meg, ahol a gyorsulásvektor összetevői a megfelelő sebességkomponensek idő szerinti deriváltjai:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad (3\text{-}11)$$

Az **r** *helyzetvektor,* a **v** *sebességvektor* és az **a** *gyorsulásvektor* a kinematika kulcsfontosságú fogalmai, hatékonyságuk és sokoldalú alkalmazhatóságuk figyelemreméltó. E fogalmakkal a pontszerű testek tetszőleges térbeli mozgása leírható.

Egy gyakori félreértés forrására azonban még fel kell hívnunk a figyelmet. *A helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor iránya nem szükséges, hogy azonos legyen.* Tekintsük például egy eldobott és pusztán a gravitáció hatására mozgó labda parabola pályáját (3-23 ábra). A sebesség mindig a pálya érintőjének irányába mutat, a helyvektor folyamatosan változik, míg a gravitáció miatt fellépő gyorsulás iránya mindig lefelé mutat és nagysága is állandó. Nem szabad meglepődnünk azon, ha egy test gyorsulása nem a mozgás irányába mutat! Még az is lehetséges, hogy a test egy pillanatban nem mozog, bár gyorsul; gondoljunk a pályája tetőpontjára érkező függőlegesen felfelé hajított testre (3-24 ábra). A régi görögök még nem fogták fel ezeket a finom részleteket, következésképpen nem is érthették meg a mozgás lényegét.



3-23 ábra
Az eldobott labda parabolapályán mozog. Az ábra mutatja, hogy egy adott pillanatban a labda az **r** helyzet-, **v** sebesség- és **a** gyorsulásvektora három különböző irányba mutat.

3-7 PÉLDA

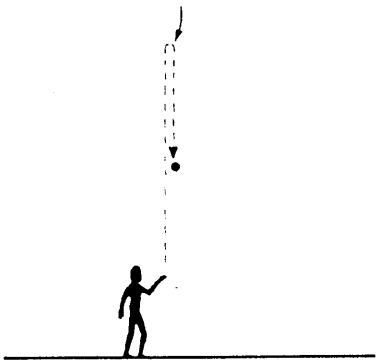
Határozzuk meg a 3-6 példában szereplő test gyorsulását. Rajzoljuk meg a test helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektorát a $t = 2$ s időpontban.

MEGOLDÁS

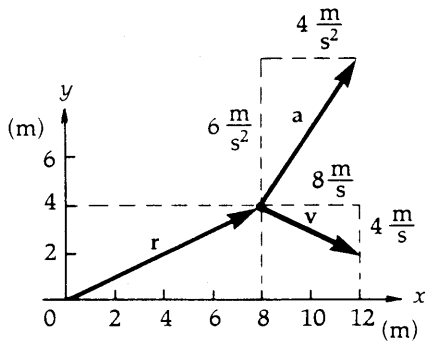
A 3-6 feladat szerint a helyzet-idő és a gyorsulás-idő függvényt a következő formulák írják le.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r} &= 2t^2\hat{\mathbf{x}} + \frac{16}{t^2}\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{v} &= 4t\hat{\mathbf{x}} - \frac{32}{t^3}\hat{\mathbf{y}} \end{aligned}\right\} \text{(SI egységekben)}$$

A pálya csúcspontján a pillanatnyi sebesség zérus, a gyorsulás pedig 9,81 m/s^2 és lefelé mutat.



3-24 ábra
Függőlegesen feldobott test pályagörbéje. A test szabad mozgása során (mind felfelé, mind pedig lefelé) a gyorsulás *lefelé* mutat és állandó, nagysága 9,81 m/s^2. Így egy test mozoghat *felfelé*, miközben *lefelé* gyorsul, s sebessége zérus lehet egy pillanatban, (a csúcsponton), míg gyorsulása továbbra is lefelé irányul.



3-25 ábra

A 3-7 példához. Változó mozgást végző test pillanatnyi helyzete, sebessége és gyorsulása

Az $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ gyorsulás ilymódon

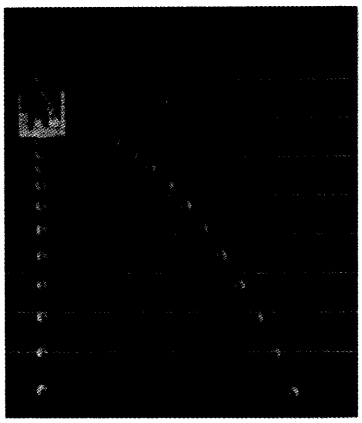
$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(4t\hat{\mathbf{x}} - \frac{32}{t^3}\hat{\mathbf{y}}\right)$$

$$= 4\hat{\mathbf{x}} + \frac{96}{t^4}\hat{\mathbf{y}}$$

A $t = 2$ s időpontban pedig:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r} &= 8\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}}\\ \mathbf{v} &= 8\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}}\\ \mathbf{a} &= 4\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}}\end{aligned}\right\} \text{(SI egységekben)}$$

A keresett vektorokat a 3-25 ábra mutatja.



3-26 ábra

Stroboszkopikus felvétel két golflabda mozgásáról. A két mozgás ugyanabban az időpontban indult, az egyik labdát függőlegesen leejtettük, a másikat vízszintesen 2 m/s sebességgel elhajítottuk. A két labda függőleges mozgása azonos annak ellenére, hogy az egyik labda állandó, vízszintes irányú sebességgel rendelkezett. A felvétel jól mutatja, hogy a gravitáció hatása alatt szabadon mozgó testek vízszintes és függőleges mozgása független egymástól. A fénykép 1/30 másodpercenként felvillanó fénnyel készült. A fehér vonalak egymástól 15 cm távolságban kifeszített húrok képei.

3.7 Hajítások

A mechanika kifejlesztésében hatalmas fejlődést hozó két gondolkodót, Galileit és Newtont is izgatta a Föld közelében, pusztán a gravitáció hatása alatt álló testek mozgásának leírása. Szerencsére, ha a testek elég kicsinyek és elegendően súlyosak, akkor a légellenállás okozta zavaró hatások elhanyagolhatók és kis magasságkülönbségekre korlátozódó helyi mozgások esetén a gravitációs gyorsulás állandónak tekinthető. Minden szabadon eső test ugyanakkora $\mathbf{g} = 9{,}81$ m/s^2 gyorsulással esik a Föld felé. A Föld forgásából eredő effektus szintén elhanyagolható. Ezen közelítések mellett Galilei felfedezte, hogy

a szabadon eső testek mozgásának vízszintes és függőleges összetevői tökéletesen függetlenek egymástól[3].

Más szavakkal; *a mozgás függőleges és vízszintes összetevői külön-külön vizsgálhatók,* azaz a kétdimenziós pályagörbe leírása helyett elegendő két különálló egydimenziós mozgással foglalkozni. A gravitációs gyorsulás nagyságát g-vel jelöljük, azaz g mindig pozitív értéket jelent, mert a gyorsulásnak csak a nagyságát jelöli, az irányát nem. A 3-26 ábra olyan kísérletet mutat, amely szemlélteti, hogy a függőleges és a vízszintes mozgásösszetevők függetlenek egymástól.

Az előző fejezetben az egyenesvonalú mozgásokra vonatkozó kinematikai egyenleteket írtunk fel [(2-11)–(2-13) egyenletek]. A mozgásösszetevők függetlensége következtében ezek a kinematikai egyenletek tetszőleges koordináta irány mentén felírhatók. Térbeli mozgások esetén az összetevők világos megkülönböztetésére a kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségeket a megfelelő koordináta irányokra utaló indexekkel látjuk el. Például:

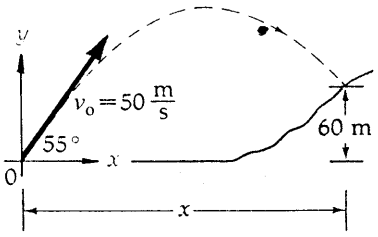
$$v_x = (v_x)_0 + a_x t \quad v_y = (v_y)_0 + a_y t \quad v_z = (v_z)_0 + a_z t$$

Ezekben az egyenletekben a t paraméter mindenütt ugyanazt az időpontot jelenti.

---

[3] A mozgások összetevői nem mindig függetlenek egymástól. A következő fejezetben fonal végén körbe pörgetett test mozgásával foglalkozunk, ahol az x és y összetevő között szigorú összefüggés áll fenn. A 14. fejezetben tárgyaljuk a Coriólis erőt. Kiderül, hogy az egyik irányban ható erőt a rá merőleges sebességösszetevő szabja meg. A gravitáció hatására állandó g és elhanyagolható légellenállás mellett megvalósuló mozgások összetevői azonban függetlenek egymástól.

Amint a 3C-37 feladat is mutatja, a kétdimenziós mozgások érdekes tulajdonsága, hogy állandó g gyorsulás és elhanyagolható légellenállás mellett a szabadon eső testek *pályagörbéje mindig parabola.*



3-27 ábra
A 3-8 példához

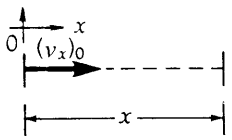
3-8 PÉLDA

Egy lövedéket a vízszinteshez képest $\theta_0 = 55^o$-os szögben $v_0 = 50$ m/s sebességgel lőttünk ki. A lövedék pályájának leszálló ágában az elhajítási helynél 60 m-rel magasabban egy domboldalba csapódott (3.-27 ábra). a) Mennyi ideig repült a lövedék? b) A kilövés helyétől milyen távolságba jutott el? c) Mekkora sebességgel csapódott a domboldalba?

MEGOLDÁS

Válasszuk a koordinátarendszer kezdő pontjául a kilövés helyét, a pozitív tengelyirányokat pedig vegyük fel a 3-27 ábrán jelölt módon. (Ekkor a kezdeti helyzet koordinátái, $x_0 = 0, y_0 = 0$.) A pályagörbe teljes egészében az xy síkban fekszik, így a mozgás egymástól független vízszintes és függőleges komponensekre bontva tárgyalható. A két összetevőről külön-külön is vázlatot készítettünk. Az ábrák alatti listán a paraméterek kezdeti és végső értékét a választott koordinátairányoknak megfelelő előjellel láttuk el.

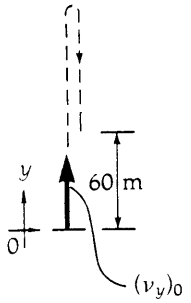
Vízszintes összetevő



$$v_0 = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\theta_0 = 55^0$$
$$(v_x)_0 = v_0 \cos\theta_0$$
$$a_x = 0$$
$$x_0 = 0$$
$$x = ?$$
$$t = ?$$

(Megjegyzés: Az 5. fejezetben rámutatunk, hogy a vízszintes irányú erő zérus, ezért a vízszintes irányú gyorsulás is zérus.)

Függőleges összetevő



$$v_0 = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\theta_0 = 55^0$$
$$(v_y)_0 = v_0 \sin\theta_0$$
$$a_y = -g$$
$$y_0 = 0$$
$$y = 60\ \text{m}$$
$$t = ?$$

(Megjegyzés: Nem szükséges, hogy a felfelé és lefelé repülés idejét külön-külön határozzuk meg. Ha a véghelyzet 60 m helykoordinátáját behelyettesítjük a kinematikai egyenletbe, akkor egy lépésben kiszámíthatjuk a teljes mozgás idejét.)

a) és b) rész: Az adatokat és az ismeretleneket a kinematikai egyenletekkel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy az y komponensre a (2-12) egyenletet felírva a keresett időtartam azonnal megkapható. (Természetesen ez egyben megszabja a vízszintes irányú mozgás időtartamát is.)

$$x = x_0 + (v_x)_0 + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$x = 0 + (v_0 \cos\theta_0)t + 0$$

Mivel ebben az egyenletben két ismeretlen van: x és t, addig nem juthatunk tovább, míg t értékét az y összetevőre vonatkozó egyenletből ki nem fejeztük.

$$y = y_0 + (v_y)_0 + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y = 0 + (v_0 \sin\theta_0)t + \frac{1}{2}gt^2$$

A másodfokú egyenletet a szokásos alakra hozva:

$$\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta_0)t + y = 0$$

Felhasználva a másodfokú egyenlet megoldóképletét (E függelék), amely szerint az

$$at^2 + bt + c = 0$$

egyenlet megoldása

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

esetünkben

$$t = \frac{v_0 \sin\theta_0 \pm \sqrt{(v_0 \sin\theta_0)^2 - 2gy}}{g}.$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$t = \frac{\left(50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\sin 55^0 \pm \sqrt{\left[\left(50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\sin 55^0\right]^2 - 2\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(60\ \text{m})}}{9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$t = 6{,}46$ és $1{,}89$

Behelyettesítve az y komponensre vonatkozó egyenletből t értékét, azt kapjuk, hogy

$$x = \left(50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(\cos 55^0)(6{,}46\ \text{s})$$

$$x = 185\ \text{m}$$

A $t = 1{,}89$ s eredményt elvetjük, hiszen ez éppen azt az időpontot jelenti, amikor a lövedék a *felszálló* ágban elérte a 60 m magasságot. A keresett időtartam $t = 6{,}46$ s. Ekkor a lövedék a kilövés helyénél 60 m-rel magasabban van és már lefelé mozog. Ezt az értéket kell behelyettesítenünk az x irányú elmozdulás-összetevőt meghatározó egyenletbe.

Az eredmények: a) A lövedék repülésének ideje: 6,46 s
b) A vízszintes irányú elmozdulás: 185 m

c) rész: A mozgás során a sebesség vízszintes összetevője nem változik, így a becsapódás pillanatában ez az összetevő ugyanannyi, mint a kilövés pillanatában:

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = \left(50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(\cos 55^0) = 28{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

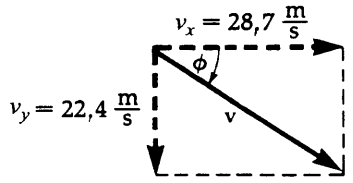
A $t = 6{,}46$ s időpillanatban a sebesség függőleges komponense a következő kinematikai egyenletből határozható meg:

$$v_y = (v_y)_0 + a_y t = \left(50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(\sin 55^0) - \left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6{,}46\ \text{s}) = -22{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A negatív előjel azt jelzi, hogy a sebesség függőleges összetevője az y tengely negatív irányába mutat. A sebesség összetevőit a becsapódás pillanatában a 3-28 ábra mutatja. Ennek alapján a sebesség nagyságát és irányát a $t = 6{,}46$ s időpontban a következő egyenletekkel adhatjuk meg:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(280{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-22{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 36{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\phi = \text{arc tg}\left(\frac{|v_y|}{v_x}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{22{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}}{28{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) = 38{,}0^0 \text{ (a horizonttól lefelé)}$$



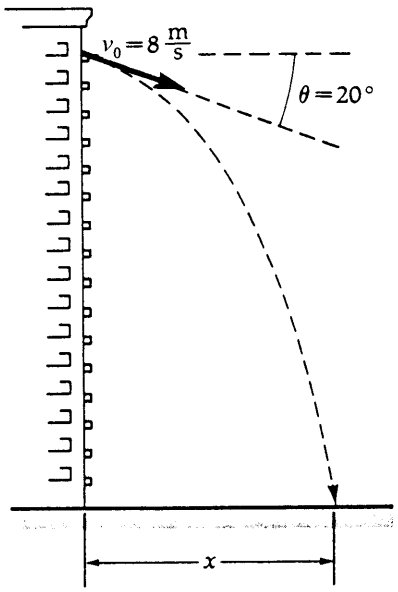
3-28 ábra
A gránát becsapódási sebessége a 3-8 példában.

3-9 PÉLDA

Egy épület felső emeleti ablakából 8 m/s sebességgel és a vízszintessel 20^0 szöget bezáró irányban egy labdát hajítottunk lefelé. A labda a kihajítás után három másodperccel csapódott a talajba. a) Az épület aljától milyen távolságban ért földet? b) Milyen magasról hajítottuk el? c) Menyi idő telt el, míg a labda kiinduló helyzeténél 10 m-rel lejjebb került? (A légellenállás elhanyagolható.)

MEGOLDÁS

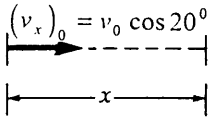
Rajzoljunk vázlatot a feladatról (3-29 ábra). Mivel példánkban minden mozgás lefelé irányul, ezért válasszuk ezt az irányt pozitívnak. Készítsünk külön vázlatot az x és az y irányú mozgásösszetevőkről. A kis tengelykeresztek jelzik, hogy az origót a röppálya kezdőpontjában vettük fel, és a tengelyek pozitív iránya rendre jobbfelé illetve lefelé mutat.



3-29 ábra
A 3-9. példához.

Vízszintes összetevő

Az a) rész adatai



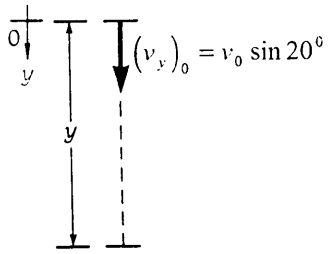
$$(v_x)_0 = v_0 \cos 20^0$$

$$(v_x)_0 = \left(8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0{,}940) = 7{,}52\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$a_x = 0$
$t = 3$ s
$x_0 = 0$
$x = ?$

Függőleges összetevő

A b) rész adatai



$$(v_y)_0 = v_0 \sin 20^0$$

$$(v_y)_0 = \left(8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0{,}342) = 2{,}74\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$a_y = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ g pozitív, mert
$t = 3$ s a lefelé mutató
$y_0 = 0$ irányt választottuk
$y = ?$ pozitívnak

Összehasonlítva az adatokat a kinematikai egyenletek változóival, megállapítható, hogy mindkét esetben a (2-12) egyenletet kell alkalmazni.

$$x = x_0 + (v_x)_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$x = 0 + \left(7{,}52 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(3\ \text{s}) + \frac{1}{2}(0)(3\ \text{s})^2$$

$$x = 22{,}6\ \text{m}$$

$$y = y_0 + (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$y = 0 + \left(2{,}74 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(3\ \text{s}) + \frac{1}{2}\left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3\ \text{s})^2$$

$$y = 52{,}3\ \text{m}$$

c) rész: Ebben a részben a mozgás függőleges összetevőjével foglalkozunk:

$(v_y)_0 = 2{,}74$ m/s (a b) rész alapján)

$a_y = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$y_0 = 0$

$y = 10$ m
$t = ?$ } (új adat a c) rész alapján)

A feladat megoldására most is a (2-12) egyenlet alkalmas

$$y = y_0 + (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$10\ \text{m} = 0 + \left(2{,}74 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(t) + \frac{1}{2}\left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(t^2)$$

Átrendezve, és a könnyebb áttekinthetőség kedvéért a mértékegységeket elhagyva:

$$4{,}90t^2 + 2{,}74t - 10 = 0$$

Az egyenlet ránézésre nem bontható tényezőkre, ezért a másodfokú egyenlet megoldóképletét (E függelék) alkalmazzuk:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-2{,}74 \pm \sqrt{(2{,}74)^2 - (4)(4{,}90)(-10)}}{2(4{,}90)} =$$

$$= +1{,}18\ \text{s},\ -1{,}74\ \text{s}$$

Mivel az időmérés kezdőpontját a labda elhajításának időpontjával vettük egyenlőnek, a negatív gyök értelmetlen számunkra. Ezért

$$t = 1{,}18\ \text{s}$$

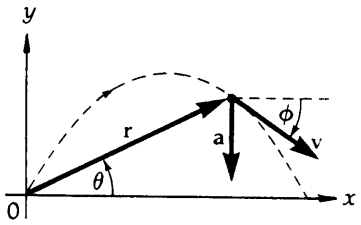
Megjegyezzük, hogy más probléma esetén a negatív gyöknek is tulajdonítható fizikai jelentés. A negatív idő az adott feladatbeli mozgás kezdőpontja előtti időt jelent. Elképzelhetünk olyan hajítást, amelynek során a labda felfelé mozgó pályán haladva $t = -1{,}74$-kor időpontban 10 m-rel lenne az ablak szintje alatt, utána elérné pályájának tetőpontját, majd lefelé haladva a $t = 0$ időpontban becsatlakozna az előzőekben megoldott feladatban leírt pályába. Sok feladat esetén mindkét gyök értelmes lehet, azért a számítás eredményeiről mindig a konkrét fizikai feltételek ismeretében dönthetjük el, hogy a gyökök megfelelnek-e a feladat követelményeinek.

3-10 PÉLDA

A 3-30 ábrán a koordinátarendszer kezdőpontjából elhajított test pályája látható. Ha a légellenállás elhanyagolható, akkor a kizárólag a gravitáció hatása alatt álló test parabola pályán mozog (lásd a 3C-37 feladatot). Helyzetvektorának $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ időfüggvénye:

$$\mathbf{r} = (9{,}8t)\hat{\mathbf{x}} + (19{,}6t - 4{,}9t^2)\hat{\mathbf{y}}$$

(Itt $\mathbf{r}$ méterben, t másodpercben van megoldva.)
Határozzuk meg a test helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektorát a t =3 s időpontban.



3-30 ábra
A 3-10 példához

MEGOLDÁS

A helyzetvektor: A t =3 s értéket az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ függvénybe helyettesítve

$$\mathbf{r}(3) = (29{,}4)\hat{\mathbf{x}}\ \text{m} + (14{,}7)\hat{\mathbf{y}}\ \text{m}$$

Az elmozdulásvektor abszolut értéke a Pitagorász tétel segítségével:

$$|\mathbf{r}(3)| = \sqrt{(29{,}4\ \text{m})^2 + (14{,}7\ \text{m})^2} = 32{,}9\ \text{m}$$

Megjegyezzük, hogy ez a távolság *nem* egyenlő a test által befutott pálya hosszával.
A helyzetvektornak a vízszintessel bezárt szöge a

$$\text{tg}\,\theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{14{,}7\ \text{m}}{29{,}4\ \text{m}} = 0{,}500$$

összefüggésből:

$$\theta = \text{arc tg}\ 0{,}500 = 26{,}5^o$$

A sebességvektor: A $\mathbf{v}(t)$ sebességvektor az $\mathbf{r}(t)$ helyvektor idő szerinti deriváltja. A differenciálási szabályok szerint (G Függelék):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left((9{,}8t)\hat{\mathbf{x}} + (19{,}6t - 4{,}9t^2)\hat{\mathbf{y}}\right) = (9{,}8)\hat{\mathbf{x}} + (19{,}6 - 9{,}8t)\hat{\mathbf{y}}$$

ahol v m/s-ben van megadva. (Vegyük észre, hogy a t = 2 s pillanatban v_y = 0, v_x azonban nem zérus, a test pályájának csúcspontján van és vízszintesen mozog.) A t = 3 s időpontban:

$$\mathbf{v}(3) = (9{,}8)\hat{\mathbf{x}}\frac{\text{m}}{\text{s}} + (-9{,}8)\hat{\mathbf{y}}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A $\mathbf{v}(3)$ sebesség a Pitagorasz tétellel határozható meg:

$$|\mathbf{v}(3)| = \sqrt{\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 13{,}85\ \text{m/s}$$

A sebességnek a vízszintessel bezárt szöge a

$$\text{tg}\,\phi = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{9{,}8\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m}} = 1{,}00$$

egyenletből:

$$\phi = \text{arc tg}\,(1{,}00) = 45^o \qquad \text{(a horizont alatt)}$$

A gyorsulásvektor: Mivel **a** = d**v**/*dt*, a gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kaphatjuk meg.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left((9{,}8)\hat{\mathbf{x}} + (19{,}6 - 9{,}8t)\hat{\mathbf{y}}\right) = (-9{,}8)\hat{\mathbf{y}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

A gyorsulás tehát az *y* tengely negatív irányába mutat és időben állandó.

Összefoglalás

A pontszerű testek sík- és térbeli mozgásának leírására a nagyságukkal és irányukkal jellemzett vektormennyiségeket használjuk.

Helyzetvektor

$$\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}$$

Sebességvektor

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dr_y}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dr_z}{dt}\hat{\mathbf{z}}$$

Gyorsulásvektor

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{z}}$$

} mozgás háromdimenziós térben

Az **r**, **v** és **a** vektorok iránya nem szükségképpen azonos, a **v** vektor mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

Az egydimenziós mozgások leírására *skalármennyiségeket* használunk, amelyeket az irány jelzésére (a koordinátatengely pozitív irányának megválasztásától függően) *pozitív vagy negatív előjellel látunk el*

$$r = x$$

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

} egy dimenziós mozgás

Ha sík- ill. térbeli mozgást leíró vektormennyiségeket derékszögű komponesekre bontunk, akkor a komponensekre - állandó gyorsulás esetén - ugyanazok a *kinematikai egyenletek* írhatók fel, mint amelyeket a 2. fejezetben az egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgásra levezettünk.

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

} (állandó gyorsulás esetén)

További hasznos összefüggéseket kaphatunk az átlagsebesség felhasználásával:

$$v_{átl} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$x = x_0 + v_{átl}t$$

A kinematikai egyenletekben negatív előjeleket csak akkor használjunk, ha adatok számértékeit, vagy paramétereket helyettesítünk be.

Kérdések

1. Mivel az idő egy irányban múlik – jelenti-e ez azt, hogy az idő vektormennyiség?
2. Válasszuk ki a következő mennyiségek közül, melyek a vektorok, skalárok és melyikek azok, amelyek egyik csoportba sem sorolhatóak: *sebesség, térfogat, hőmérséklet, idő, terület és szín.*
3. Lehetséges-e, hogy két különböző nagyságú vektor eredője zérus? És mi a helyzet három különböző vektor esetében? Mi a feltétele annak, hogy három vektor eredője zérus legyen?
4. Milyen módszerrel lehet megmérni a Föld és a Hold távolságát.
5. Egy hajó árbocáról leejtünk egy követ. Vajon a fedélzetnek ugyanabba a pontjába csapódik-e akkor is, ha a hajó nyugalomban van, ill. ha egyenletes sebességgel mozog? És ha a hajó gyorsul?
6. Egy hídról vízszintesen elhajítottunk egy követ. A kő mozgását leíró mennyiségek közül tárgyaljuk meg, hogy a *helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor* közül melyik függ a koordinátarendszer, kezdőpontjának megválasztásától?
7. Írjunk le egy olyan mozgást, amelynél egy adott időpontban derékszöget zárnak be egymással a) a helyzet- és a sebességvektor, b) a sebesség- és a gyorsulásvektor, c) a helyzet- és a gyorsulásvektor.
8. Tekintsük az előző kérdést. Felsorolhatók-e olyan példák, midőn az említett vekorok továbbra is derékszöget zárnak be egymással a mozgás véges időintervallumban való lefolyása során.
9. Válaszoljuk meg a 7. és 8. kérdést az említett vektorokra vonatkozóan úgy, hogy a) azok *egyirányúak,* b) *ellentétes irányúak.*

Feladatok

3.4 Vektorok összeadása és kivonása

3A-1 Egy négyzetháló mintával kirakott úton sétáló gyerek két osztásrészt nyugatra, hármat északra, majd kettőt ismét nyugat felé lép. a) Mekkora utat tett meg? b) Adjuk meg a kiinduló ponthoz képest az eredő elmozdulás irányát és nagyságát.

3A-2 Egy hajó 40 km-t északra, majd 50 km-t 60°-os szögben délnyugatra vitorlázik. Adjuk meg az eredő elmozdulás nagyságát és irányát. (A Föld görbületétől tekintsünk el.)

3A-3 Adott az $\mathbf{A} = 2\,\hat{\mathbf{x}} + 6\,\hat{\mathbf{y}}$ és a $\mathbf{B} = 4\,\hat{\mathbf{x}} - 1\,\hat{\mathbf{y}}$ vektor. Készítsünk vázlatot ésszerű méretű skála felvételével a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ vektorösszegre és a $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ különbségre. a) Fejezzük ki a **C** és **D** összeg- és különbségvektorokat a koordináta egységvektorok segítségével algebrai úton is. b) Adjuk meg ezeket a vektorokat polárkoordinátákkal (hosszuk és az x tengellyel bezárt szög segítségével)

3A-4 Az $\mathbf{A} = 4\,\hat{\mathbf{x}} + 3\,\hat{\mathbf{y}}$ és a $\mathbf{B} = 2\,\hat{\mathbf{x}} - 2\,\hat{\mathbf{y}}$ vektorok összetevői méterben adottak. Készítsünk vázlatot a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ vektorösszegre és a $\mathbf{D} = \mathbf{B} - 2\mathbf{A}$ különbségre. Adjuk meg a **C** és a **D** vektorokat (három értékes jegyre) analitikusan is polárkoordináták segítségével: a vektorok abszolút értékével és a $+x$ tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mért szöggel.

3B-5 Adott az $\mathbf{A} = 3\,\hat{\mathbf{x}} + 4\,\hat{\mathbf{y}}$ és a $\mathbf{B} = 2\,\hat{\mathbf{x}} - 2\,\hat{\mathbf{y}}$ vektor. Határozzuk meg grafikusan és analitikusan a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ és $\mathbf{E} = \mathbf{B} - 2\mathbf{A}$ vektor nagyságát és irányát.

3B-6 Egy kezdő golfjátékos három ütéssel vitte a lyukba a labdát. Az egymást követő elmozdulások a következők voltak: először 4 m északi irányban, majd 2 m északkeletre, végül 1 m 30°-os szögben délnyugatra. Egy profi golfjátékos ugyanezt egyetlen ütéssel hajtja végre. Mekkora a golflabda elmozdulásvektora ennek során?

3.5 Térbeli vektorok

3A-7 Adottak az $\mathbf{A} = 2\,\hat{\mathbf{x}} + 3\,\hat{\mathbf{y}} - 4\,\hat{\mathbf{z}}$ és $\mathbf{B} = -2\,\hat{\mathbf{x}} - 2\,\hat{\mathbf{y}} + 2\,\hat{\mathbf{z}}$ elmozdulásvektorok (SI egységben). Határozzuk meg a) a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, és b) a $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ elmozdulásvektorok nagyságát és derékszögű összetevőit.

3A-8 Adottak az $\mathbf{A} = 3\,\hat{\mathbf{x}} - 4\,\hat{\mathbf{y}} + 4\,\hat{\mathbf{z}}$ és $\mathbf{B} = 2\,\hat{\mathbf{x}} + 3\,\hat{\mathbf{y}} - 7\,\hat{\mathbf{z}}$ elmozdulásvektorok (SI egységben). Határozzuk meg a) a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, és b) a $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B}$ elmozdulásvektorok nagyságát és derékszögű összetevőit.

3.6 Sebesség és gyorsulás két és három dimenzióban

3.7 Hajítások két és három dimenzióban

3B-9 Egy repülő sólyom 5m/s sebességgel, a vízszintessel 60° szöget bezáró irányban bukik alá. Milyen sebességgel mozog a Földön az árnyéka, ha a Nap pontosan a fejünk felett van.

3B-10 Egy szakadék széléről elütött golflabda helykoordinátái az

$$x = (18\ \text{m/s})t \quad \text{és} \quad y = (4\ \text{m/s})t - (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$$

függvény szerint változnak.

a) Az $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ egységvektorok felhasználásával írjuk fel az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ helyzetvektor függvényt. A komponensek deriváltjával írjuk fel b) a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ sebesség–idő és c) az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ gyorsulás–idő függvényt. d) Határozzuk meg a labda x és y koordinátáit a $t = 3$ s időpillanatban. Az $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ egységvektorok felhasználásával írjuk fel a **v** sebességvektort és az **a** gyorsulásvektort a $t = 3$ s időpontban.

3B-11 Egy motorbicikli 20 m/s sebességgel 3 percig déli irányban mozog, ekkor nyugatra fordul és két percig 25 m/s sebességgel halad, majd 1 percig 30 m/s sebességgel északnyugati irányban száguld. A mozgás 6 perces teljes időtartamára határozzuk meg a) az eredő elmozdulást, b) az átlagsebesség nagyságát és c) az átlagsebességvektort.

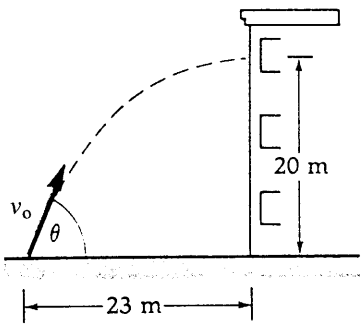
3B-12 Egy autó 8 percig 25 km/h sebességgel keleti irányban, ezután 3 percig 40 km/h sebességgel déli irányban, végül 17 percen át 30 km/h sebességgel délkeleti irányban halad. Határozzuk meg a) a gépkocsi eredő elmozdulását kilométerben, b) az átlagsebességvektort a teljes útra (Készítsünk vektor diagramot.), c) a kocsinak a teljes útra vonatkoztatott átlagsebességét.

3B-13 Egy vízszintesen repülő gép pilótája a repülőgép árnyékát a gép előtt, a horizont alatt 60°-os szögben látja a talajon. Határozzuk meg a talaj hajlásszögét a gép haladásának irányában, ha a repülőgép sebessége 200 km/h, az árnyéké a talajon 250 km/h és a szél elhanyagolható.

3A-14 Egy műugró a víz felett 3 m magasban elhelyezett ugródeszkáról a vízszinteshez képest 60°-os szögben, 2 m/s sebességgel rugaszkodik el. Mennyi ideig lesz a levegőben?

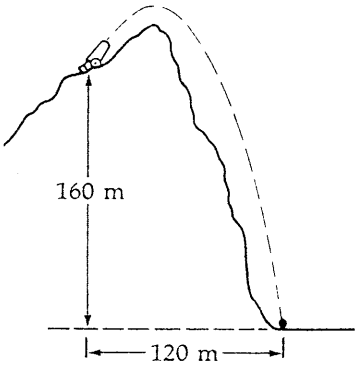
3A-15 Egy bérház ablakából vízszintes irányban, 6 m/s sebességgel labda repült ki. A labda a ház aljától 10 m távolságban ért talajt. Milyen magasról dobták ki?

3B-16 Egy labdát – a 3-31 ábrán látható módon – bedobtak egy ház nyitott ablakán. A labda az ablakon vízszintes irányú sebességgel repült be. Mekkora volt a) a labda v_0 kezdősebessége és b) az elhajítás θ szöge?



3-31 ábra
A 3B-16 feladathoz

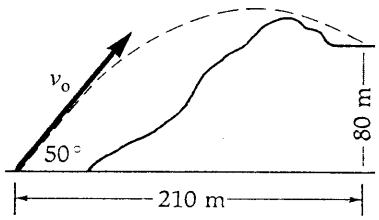
3B-17 Egy lövedéket a 3-32 ábrán látható módon a vízszinteshez képest 53,1°-os szögben lőttek ki. A gránát eltalálta a kilövés helye alatt 160 m, vízszintesen 120 m távolságban fekvő célpontot. Milyen sebességgel lőtték ki a gránátot?



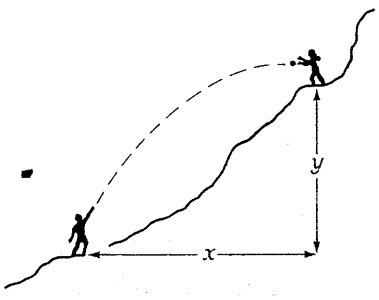
3-32 ábra
A 3B-17 feladathoz

3B-18 Vízszintes puskacsövet pontosan a 100 m távolságban elhelyezett céltábla közepe felé tartva a golyó 10 cm-rel a középpont alatt csapódik be. Mekkora sebességgel hagyta el a golyó a fegyver csövét?

3B-19 A vízszinteshez képest 50°-os szögben kilőtt lövedék a 3-33 ábrának megfelelően talált célba. Mekkora volt a kezdősebessége?



3-33 ábra
a 3B-19 feladathoz



3-34 ábra
A 3B - 20 feladathoz

3B-20 Egy hegymászó feldob egy mászótüskét az előtte haladó társának, aki elkapja azt (3-34 ábra). A mászótüske kezdősebessége 12 m/s és a vízszintessel 55°-os szöget alkotott. Tudjuk továbbá, hogy a tüske az elkapás pillanatában vízszintesen repült. Milyen távol volt egymástól a két hegymászó?

3B-21 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítottunk el egy követ. A kő becsapódási helyét a vízszintestől lefelé 45°-os irányban látjuk. a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ? b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

3B-22 Egy baseball játékos 24 m/s sebességgel, a vízszinteshez képest 53,1°-os szögben (ez a 3-4-5 tipusu háromszögek egyik szöge) üti el a labdát. a) Mennyi ideig repül a labda? b) Mekkora maximális magasságba emelkedik? c) Mekkora a hajítási távolság? d) Mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik a labda 3 másodperccel az elütés után?

3B-23 Vízszintes sík felett 20 m magasságból, 8 m/s sebességgel, a vízszintessel 50°-os szöget bezáró irányban követ hajítottunk felfelé. a) Határozzuk meg, hogy a síkhoz képest mekkora maximális magasságot ér el a kő. b) Mennyi idő telik el míg a kő a talajba csapódik? c) Mekkora vízszintes távolságot tesz meg a test? d) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

3B-24 Egy labdát függőlegesen feldobunk, hogy az 5 m-rel feljebb elhelyezkedő társunk elkapja. Társunk a labdát csak akkor tudja elkapni, ha 6m/s-nál kisebb sebességgel érkezik hozzá. Mekkora a labda minimális és maximális repülési ideje?

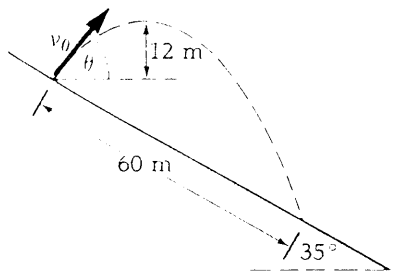
További feladatok

3C-25 Adott az $\mathbf{E} = 2\,\hat{\mathbf{x}} - 3\,\hat{\mathbf{y}} + 4\,\hat{\mathbf{z}}$ és az $\mathbf{F} = 4\,\hat{\mathbf{x}} + 1\,\hat{\mathbf{y}} - 2\,\hat{\mathbf{z}}$ vektor. Határozzuk meg algebrai úton a) a $\mathbf{G} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$ vektort, b) a $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{E}$ vektort és c) a $\mathbf{J}$ vektort úgy, hogy kielégítse a $\mathbf{E} - 2\mathbf{F} + \mathbf{J} = \mathbf{0}$ egyenletet.

3C-26 Egy hegymászó expedíció 3000 m magasan létesíti B bázisát, míg K közbülső táborát 4900 m magasságban az alaptábortól a vízszintes síkban 5,2 km távolságra és 60°-os szögben északnyugati irányban építi fel. A 6100 m magas csúcs ettől a közbülső tábortól a térkép szerint 3,2 km távolságban és 40°-os szögben északkeleti irányban fekszik. A csúcsot elérő hegymászó k és a bázis között lézersugárral kívánnak kapcsolatot teremteni. Milyen irányba kell a lézersugárral célozni?

3C-27 Egy labdát a vízszinteshez képest 48°-os szögben, 12 m/s kezdősebességgel dobtunk el. Határozzuk meg annak a pontnak az x és y koordinátáját (az elhajítási ponthoz képest), amelyben a labda sebessége a vízszinteshez képest 35°-os szögben lefelé mutat.

3C-28 Sík lejtőn elhajított test a 3-35 ábrán látható pályát futotta be. A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg, hogy a) mekkora volt a kezdősebessége és b) milyen θ szögben hajítottuk el a vízszinteshez képest.



3-35 ábra
A 3C-28 feladathoz

3C-29 A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt, v_0 kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az R lőtávolságot.

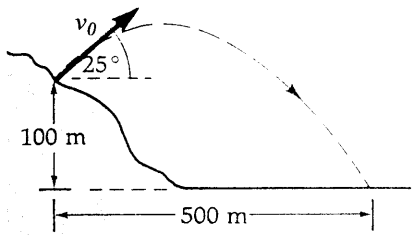
3C-30 A 3C-29 feladatban szereplő röppályája egyenletének a differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot $\theta = 45°$ kilövési szög esetén érjük el.

3C-31 Mutassuk meg, hogy az azonos v_0 kezdősebességű lövedékek lőtávolsága megegyezik, ha a θ_1 és θ_2 kilövési szögek pótszögek ($\theta_1 + \theta_2 = 90°$).

3C-32 Határozzuk meg, hogy milyen θ kilövési szög esetén lesz egy lövedék R lőtávolsága egyenlő a H emelkedési magasságával. (Induljunk ki a kinematikai egyenletekből.)

3C-33 A kinematikai egyenletek alapján határozzuk meg a v_0 kezdősebességgel, θ kilövési szöggel kilőtt lövedék maximális y_m emelkedési magasságát.

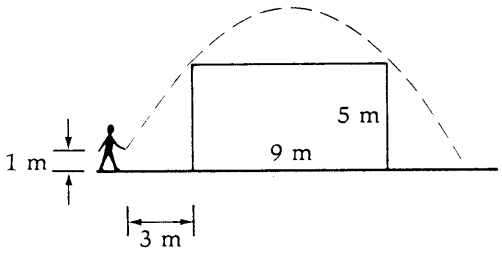
3C-34 Vízszintes sík felett 100 m magasságban elhelyezkedő pontból a vízszinteshez képest 25°-os emelkedési szöggel lövedéket lövünk ki. A lövedék eltalálja a 3-36 ábrának megfelelően vízszintesen 500 m távolságban elhelyezett céltáblát. Mekkora volt a kezdősebessége?



3-36 ábra
A 3C-34 feladathoz

3C-35 Egy labdát úgy dobtunk el, hogy az adott kezdősebesség mellett vízszintes irányban a lehető legnagyobb R távolságra jusson. (Lásd. 3C-29 feladat) a) Mutassuk meg, hogy miután a labda túljutott pályájának tetőpontján bármely x, y koordinátájú pontra érvényes $R = x^2/(x - y)$. b) Vajon az a tény, hogy a formulában g nem szerepel, azt jelenti, hogy adott kezdősebesség mellett a maximális hajítási távolság ugyanakkora lenne a Földön és a Holdon? (Magyarázzuk meg a választ!)

3C-36 Egy gyerek labdát dob át a 3-37 ábrán látható 5 m × 9 m-es négyszögletes barakk felett. A gyerek 3 m távolságban áll a barakktól. Mekkora minimális kezdősebességgel és milyen irányban kell elhajítania a labdát, hogy az a barakk sarkait éppen elkerülve jusson át a túloldalra, ha a labdát elhajító gyerek keze 1 m-rel van a talaj felett?



3-37 ábra
A 3C-36 feladathoz

3C-37 Egy labdát a vízszintes tengelyhez képest θ szögben ($0 < \theta < 90°$) v_0 sebességgel hajítottunk el. Mutassuk meg, hogy parabolapályán mozog. (Megjegyzés: A kinematikai egyenletekből a t kifejezést eliminálva y összetevőt x függvényeként fejezzük ki. Emlékeztetünk arra, hogy a parabola általános egyenlete $y = ax + bx^2$ alakú.)

3C-38 Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb 1 m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora maximális sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik. (Lásd a 3C-29 feladatot és annak eredményét).

3C-39 Egy lövedéket θ kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora ϕ szög alatt látszik a kilövési pontból.

3C-40 Galilei *Két új tudomány* című művében azt állítja, hogy „a 45°-nál ugyanannyival nagyobb, ill. kisebb emelkedéssel (hajítási szöggel) elhajított testek azonos távolságra jutnak el" Bizonyítsuk be ezt az állítást.

AZ 1–23 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

II. Fejezet

2A-1 200 km

2A-3 1 fényév = $9{,}46 \times 10^{15}$ m; 1 pc = $3{,}09 \times 10^{16}$ m

2A-5 0,447%

2A-7 49,4

2B-9 7,40 perc; az óra hosszabb

2A-11 $6{,}67 \times 10^{-22}$ s

2A-13 1,63 cm/év

2A-15 55,4 s

2B-17 lehetetlen

2B-19 a) 1,20 m/s b) 7,00 s c) –1,54 m/s (közelítőleg)

2B-21 62,5 m/s^2

2B-23 $2{,}65 \times 10^4$ m/s^2

2A-25 2,59 m/s

2A-27 0,639 s

2A-29 a) 1,63 s b) 9,96 m/s c) 13,1 m

2A-31 a) 5,00 s b) 75,0 m

2B-33 3,34 s

2B-35 0,804 s; 0,0127 s

2B-37 a) –1,5 m/s^2 b) 4 s c) 5,33 m

2B-39 a) $6t^2$ b) $3t$

2B-41 a) 2 m; 3 m/s; 4 m/s^2 b) $v = 3 - 8t$ c) –8 m/s^2 d) 0,375 s e) 2,56 m

2B-43 c) –4 m/s d) 34,0 m

2B-45 $x(2) = 2$ m; $x(4) = 6$ m; $x(6) = 14$ m; $x(10) = 22$ m

2B-47 $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$

2C-49 a) 12,8 m/s b) 5,90 m

2C-51 12,2 m/s

2C-53 a) 7 m/s b) –5,35 m/s c) –9,8 m/s^2

2C-55 a) 46,2 s b) 34,6 m/s

2C-57 14,2 s

2C-59 $4{,}83 \times 10^{-3}$ m/s^2

2C-61 a) 26,4 m b) 6,89%

2C-63 a) 41,5 s b) 20,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) 10,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2C-65 a) $v = 3At^2$ b) $\alpha = 6At$ c) 0,0533 m/s^3

III. Fejezet

3A-1 a) 7 osztásrészt b) 36,9°; 5 osztásrész

3A-3 a) $C = 6\hat{x} + 5\hat{y}; D = -2\hat{x} + 7\hat{y}$

b) C = 7,81; 39,8°; D = 7,28; 106°

3B-5 C = 5,39; 21,8°; D = 6,08; 80,5°; E = 10,8; 248,2°

3A-7 a) $C = \hat{y} - 2\hat{z}$; 2,24 m

b) $D = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$; 8,78 m

3B-9 2,50 m/s

3B-11 a) 4,87 km; 61,4° délnyugatra b) 23,3 m/s c) 13,5 m/s; 61,4° délnyugatra

3B-13 16,1° a horizont alatt

3A-15 13,6 m

3B-17 24,7 m/s

3B-19 55,4 m/s

3B-21 a) 11,1 m/s b) 24,7 m/s; 26,5° a függőlegestől

3B-23 a) 21,9 m b) 2,74 s c) 14,1 m d) 21,4 m/s; 13,9° a függőlegestől

3C-25 a) $6\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ b) $2\hat{x} + 4\hat{y} - 6\hat{z}$ c) $6\hat{x} + 5\hat{y} - 8\hat{z}$

3C-27 (2,44 m, 11,9 m)

3C-29 $R = \dfrac{v_o^{\,2} \sin 2\theta}{g}$

3C-31 A válasz adott.

3C-33 $Y_m = \dfrac{v_0^{\,2} \sin^2 \theta}{2g}$

3C-35 A válasz adott.

3C-37 $y = (\text{tg}\,\theta)x - \left[\dfrac{g}{2(v_o \cos\theta)^2}\right]x^2$

3C-39 $\phi = \text{arc tg}\left(\dfrac{\text{tg}\,\theta}{2}\right)$

IV. Fejezet

4A-1 a) $8{,}73 \times 10^{-3}$ rad b) 0,030 rad

4B-3 91,7°

KÖRMOZGÁS

„Newtonnak kell lenni ahhoz, hogy azt észleljük, a Hold lefelé zuhan, midőn mindenki úgy látja, hogy nem esik le."

Paul Valéry

4.1 Bevezetés

A körmozgás az egyik legfontosabb síkmozgás, s így különleges figyelmet érdemel. Körmozgást végeznek pl. a gépek forgórészei, a kanyarodó úton haladó gépkocsi, a Bohr modell szerint a hidrogénatom elektronjai és a Föld körüli pályán keringő mesterséges holdak. Mivel a körmozgás rendkívül gyakori, a következőkben kényelmes és egyszerűen kezelhető jelölési rendszert dolgozunk ki a körpályán mozgó részecskék helyzetének, sebességének és gyorsulásának leírására. Az egyenletes sebességgel körpályán mozgó testek egyik legérdekesebb tulajdonsága az, hogy annak ellenére, hogy a sebességük nagysága nem változik, mégis gyorsulnak. Bár ez az első pillanatban érthetetlennek tűnik, a gyorsulás $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ definíciójából azonnal következik. Ha a sebességvektor nagysága *állandó* is, *iránya* folytonosan változik, s ez a változás van közvetlen kapcsolatban a gyorsulással.

4.2 Síkbeli polárkoordináták

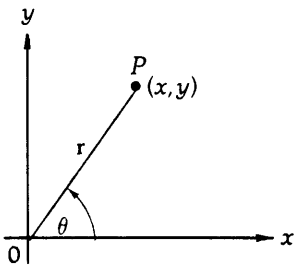
Bár a körmozgás derékszögű koordináták segítségével is leírható, sokkal megfelelőbb a *síkbeli polárkoordinátarendszer* használata (4-1 ábra). Ebben az esetben a P(x,y) pont helyzetét az origótól mért r távolsággal és a pozitív x tengelytől az óramutató járásával ellenkező irányban mért θ szöggel jellemezzük. Körmozgás esetén az r távolság állandó, s a θ szöget *szögkoordinátának* nevezzük. A körmozgásra vonatkozó kinematikai egyenletekben a θ szögkoordinátát mindig radián (rad) egységekben mérjük. Egy szög radiánban mért értéke a szöghöz tartozó körív hosszának és a kör sugarának a hányadosával adható meg.

Szögkoordináta $$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(radiánban)} \qquad \textbf{(4-1)}$$

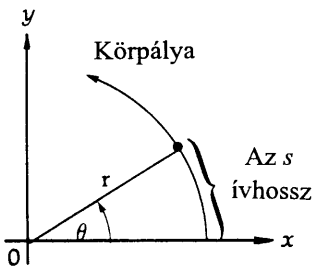
A radiánérték két hosszúság arányaként kapható meg, így a szög mértékének dimenzió nélküli egysége. 1 radián szög alatt látszik a kör középpontjából az az s ív, amelynek hossza a kör sugarával egyenlő. A teljes körívhez tartozó szög, azaz az a szög, amely egy teljes fordulatot jelent az origó körül, 2π radián. Tehát

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ} \qquad \text{vagy}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^{0}}{2\pi} \approx 57{,}3^{0}$$

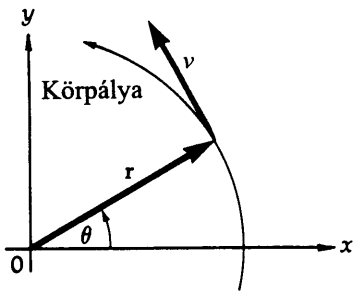


a) A pont helye.



b) Körmozgást végző részecske.

4-1 ábra
Síkbeli polárkoordináták (r, θ).



4-2 ábra
A körmozgást végző test sebessége mindig érintő irányú.

4.3 A körmozgás sebessége és gyorsulása

Egy körpályán mozgó test sebessége mindig a *kör érintőjének irányába* mutat (4-2 ábra). A sebességvektor nagysága *változhat* (a test gyorsulhat vagy lassulhat), iránya azonban *folytonosan* változik. Általában ez két gyorsuláskomponenst eredményez: egy *érintő mentit* vagy *tangenciálisat* és egy *sugár irányban befelé mutatót* vagy *normálisat.* A gyorsulásnak ezt a felbontását jól használhatjuk a feladatok megoldásakor is.

Érintő menti gyorsulás

Az előző fejezetben egyenesvonalú mozgásokkal foglalkoztunk, és megállapítottuk, hogy a mozgó test gyorsulása, ill. lassulása a test mozgásának *irányába* esik. A körmozgás esetén a **tangenciális gyorsulást** (a_t) úgy képzelhetjük el, mintha egy egyenes pályát kör alakúra hajlítanánk, s ennek eredményeként jönne létre a gyorsulásnak a pálya érintője irányába eső komponense a sebesség változása következtében.

Érintő menti gyorsulás

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{(a pálya érintője mentén)} \qquad \textbf{(4-2)}$$

Vegyük észre, hogy a (4-2) egyenlet nem vektoregyenlet, bár tudjuk, hogy ez a gyorsulásösszetevő mindig a pálya érintőjének irányába mutat. Ha a test gyorsul, a_t a mozgás irányába mutat, ha lassul, akkor ez a gyorsulás továbbra is érintő irányú, de a mozgás irányával ellentétes. Ha a sebesség állandó, akkor az érintő menti, vagy tangenciális gyorsulás zérus.

Centripetális gyorsulás

A másik gyorsuláskomponens merőleges a pályára. Ezt a gyorsulásösszetevőt, amely mindig a kör középpontja felé, azaz sugár irányban befelé mutat, **centripetális (a_{cp}) gyorsulásnak** nevezzük. (Az elnevezés a középpont jelentésű latin *centrum* és a befelé irányulni jelentésű *petere* szóból ered.) Ne tévesszük össze ezt a gyorsulást a *centrifugális* (a_{cf}) gyorsulással (ez utóbbi elnevezés második tagja a megszökni jelentésű *fugere* szóból származik), amely radiálisan kifelé mutat. (A centrifugális gyorsulást a 14. fejezetben tárgyaljuk részletesebben.)

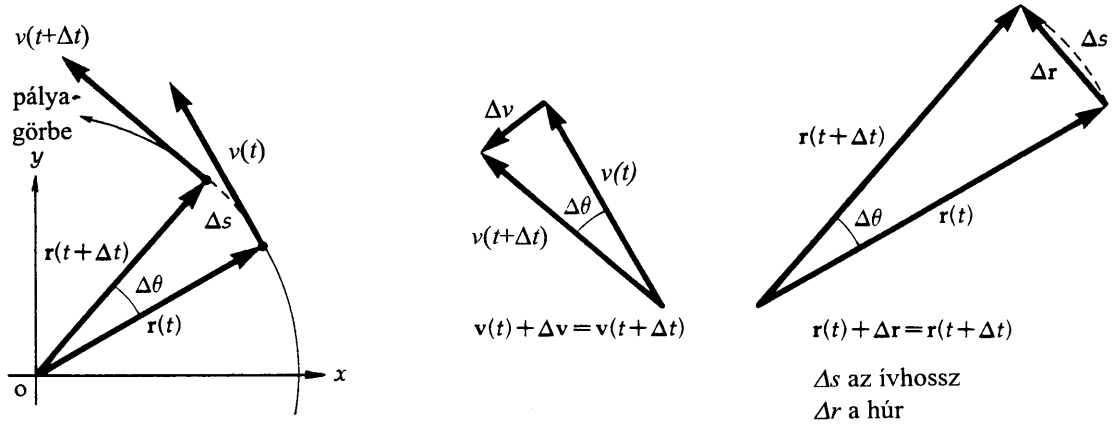
A centripetális gyorsulás tárgyalásához foglalkozzunk először az *egyenletes körmozgással* (azaz amikor egy test *állandó sebességgel* körpályán mozog). Ekkor, bár a sebesség nagysága mindvégig állandó, iránya folytonosan változik. A 4-3a ábra egy körpályán mozgó test egy-egy pontjához tartozó $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ ill. $\mathbf{v}(t)$ sebességvektort ábrázolja. A sebességváltozás meghatározásához a 4-3b ábrán közös pontból mértük fel e két sebességvektort. Látható, hogy

$$\mathbf{v}(t) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) \qquad \textbf{(4-3)}$$

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \qquad \textbf{(4-4)}$$

Figyeljük meg, hogy a sebességvektorok által bezárt $\Delta\theta$ szög ugyanakkora, mint a megfelelő pontokhoz vezető $\mathbf{r}(t)$ és $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ helyzetvektorok által bezárt szög (4-3c ábra).[1] Amennyiben $\Delta\theta$ nagyon kicsi, akkor a Δs ívhossz a Δr húr hosszával közelíthető. Ez azt jelenti, hogy a $\Delta\theta \to 0$ (és $\Delta t \to 0$) határesetben Δs és Δr elhanyagolható hibával egyenlőnek vehető.

[1] Ennek nyilvánvalóan az az oka, hogy a sebességvektor merőleges a gyorsulásvektorra. Így ha a sebességvektor **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** szöggel elfordul, akkor ugyanennyivel kell elfordulnia a gyorsulásvektornak is.



a) b) Sebességvektorok c) Helyzetvektorok

4-3 ábra

Az egyenletes körmozgás során a részecske állandó nagyságú sebességgel Δs utat tesz meg egy körív mentén (az ábrán szaggatott vonal jelzi). Ennek során mind a sebességvektor, mind a helyzetvektor iránya ugyanakkora $\Delta\theta$ szöggel változik, nagyságuk azonban állandó marad.

A gyorsulást a $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ határértékkel definiáltuk. Vizsgáljuk meg most figyelmesen Δv irányát. Ha $\Delta\theta \to 0$ akkor Δv radiálisan befelé mutat, és merőleges lesz a **v** vektorra. A hasonló háromszögek felhasználásából következik, hogy

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\Delta s}{r} \qquad \textbf{(4-5)}$$

vagy

$$\Delta v \approx \left(\frac{v}{r}\right)\Delta s \qquad \textbf{(4-6)}$$

Helyettesítsük be ezt a Δv értéket a gyorsulás (2-6) definíciós egyenletébe. Figyelembe véve, hogy v/r állandó:

$$a_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \left(\frac{v}{r}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \textbf{(4-7)}$$

Határértékben a közelítés egyenlőséggé válik és mivel $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t$ definíció szerint a pálya menti pillanatnyi sebesség, azt kapjuk, hogy:

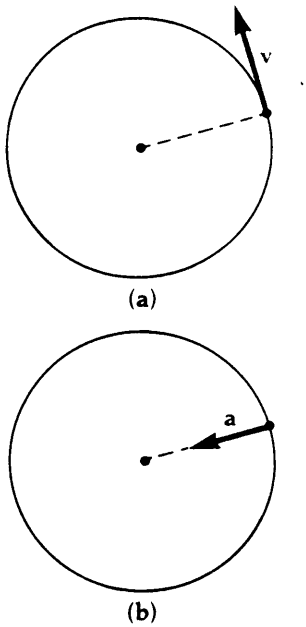
Centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} \quad \text{(sugár irányban befelé)} \qquad \textbf{(4-8)}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy v^2/r valóban gyorsulás dimenziójú.

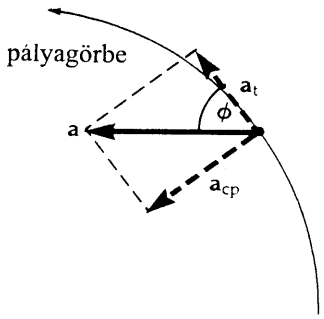
v^2/r dimenziója:

$$\frac{\left[\frac{L}{T}\right]^2}{[L]} = \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

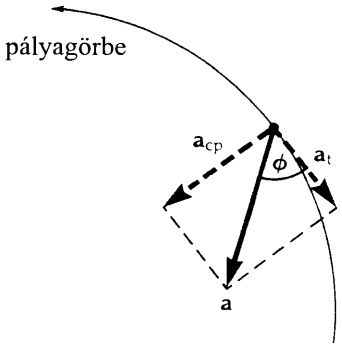


4-4 ábra

Az *egyenletes* körmozgás során a sebességvektor a) és a gyorsulásvektor b) merőleges egymásra.



a) A részecske *gyorsulva* mozog a körpályán.



b) A részecske *lassulva* mozog a körpályán.

4-5 ábra
Ha a körmozgást végző test sebességének nagysága is változik, akkor az a_{cp} és a_t gyorsulás-összetevők eredője adja a teljes **a** gyorsulásvektort.

Az egyenletes körmozgást végző test minden pillanatban a pálya középpontja felé mutató v^2/r centripetális gyorsulással rendelkezik (4-4 ábra). *Vegyük észre, hogy a test sohasem kerül közelebb a középponthoz, bár mindig ebben az irányban gyorsul.*

Ha a mozgás *nem egyenletes* (azaz ha a részecske sebessége nő vagy csökken), akkor *dv/dt* tangenciális gyorsulás is fellép (4-2 egyenlet). Így ez esetben mind az $a_t = dv/dt$ *tangenciális gyorsulást*, mind a kör középpontja felé mutató $a_{cp} = v^2/r$ *centripetális* gyorsulást figyelembe kell vennünk. A tangenciális gyorsulás a mozgás irányába mutat, ha a részecske sebessége nő, és azzal ellentétes, ha a részecske sebessége csökken. A centripetális gyorsulás azonban mindig *sugár irányban befelé* mutat. A teljes gyorsulás két, egymásra merőleges komponensét a 4-5 ábra mutatja. A Pitagorasz tétel felhasználásával adódik, hogy az **a** eredő gyorsulás nagysága $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$, iránya pedig az ábrán látható ϕ szöggel adható meg.

4-1 PÉLDA

Mekkora a gyorsulása annak a részecskének, amely egy lemezjátszó állandó, percenként 33,3 fordulatszámmal forgó korongján a középponttól 12 cm-re helyezkedik el?

MEGOLDÁS

Mivel a lemezjátszó állandó sebességgel forog, csak centripetális gyorsulás lép fel:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

Az egy fordulat megtételéhez szükséges T időt **periódusidőnek** nevezzük:

$$T = \left(\frac{1}{33{,}3}\right)[\text{perc}] \underbrace{\left(\frac{60\text{s}}{1[\text{perc}]}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 1{,}80\ \text{s}$$

A v sebesség:

$$v = \frac{\text{egy fordulat alatt megtett út}}{\text{egy fordulathoz szükséges idő}} = \frac{2\pi r}{T}.$$

Így $$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(0{,}12\,\text{m})}{(1{,}80\,\text{s})^2} = 1{,}46\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Vegyük észre, hogy a részecske a kör középpontja felé gyorsul, bár sebessége, amint azt a 4-4 ábra mutatja, a kör érintőjének irányába mutat. Ez azt a tényt is illusztrálja,. hogy görbe vonalú pályán mozgó test gyorsulásvektora sohasem lehet azonos irányú a sebességvektorral. Az a_{cp} irányát **v** vektor irányának változása szabja meg, ami ebben az estben a sugár irányban befelé mutató v sebességre merőleges.

4-2 PÉLDA

Egy gépkocsi 20 m sugarú körpályán mozog és sebességét másodpercenként 0,6 m/s-mal növeli. Határozzuk meg a) gyorsulásának tan-

genciális komponensét, b) gyorsulásának centripetális komponensét, valamint c) a teljes gyorsulás nagyságát és irányát abban az időpontban, midőn a gépkocsi pillanatnyi sebessége éppen 4 m/s.

MEGOLDÁS

a) A gyorsulás a_t tangenciális összetevője csak a sebesség megváltozásának mértékétől függ, azaz a feladat megfogalmazása szerint

$$a_t = 0{,}600\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) A gyorsulás a_{cp} centripetális összetevője a pálya r sugarától és a v pillanatnyi sebességtől függ:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{(20\,\text{m})} = 0{,}800\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) A gyorsulás komponenseit a 4-5 ábra mutatja. Ennek alapján a Pitagorasz tétel felhasználásával a teljes gyorsulás nagyságára

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{\left(0{,}600\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + \left(0{,}800\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 1{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

adódik. Az **a** eredő gyorsulás irányát az **a** gyorsulás és valamely ismert irány által bezárt szöggel adhatjuk meg. Ha pl. a mozgás irányát használjuk vonatkoztatási irányként, akkor az **a** vektornak az ezzel bezárt szöge:

$$\phi = \text{arc tg}\,\frac{a_{cp}}{a_t} = \text{arc tg}\,\frac{0{,}800\,\text{m/s}^2}{0{,}600\,\text{m/s}^2} = 53{,}1^\circ$$

A körpályán mozgó részecskék mozgásának leírására megfelelően alkalmazhatók a 4-6 ábrán látható, egymásra merőleges $\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ **egységvektorok.**

Egységvektorok ($\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$)

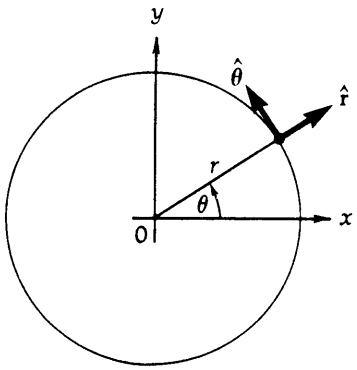
Az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor mindig radiálisan kifelé mutat

Az $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ egységvektor a pálya érintőjébe esik és a θ szög növekedésének**Error! Objects cannot be created from editing field codes.** az irányába mutat (a $+x$ tengelytől az óramutató járásával ellenkező irányba haladva).

Ezek az egységvektorok „együtt mozognak" a részecskével, így a nyugvó koordinátarendszerhez képest irányuk a mozgás során változik. Ezekkel az egységvektorokkal az **a** teljes gyorsulás kifejezhető a következőképpen:

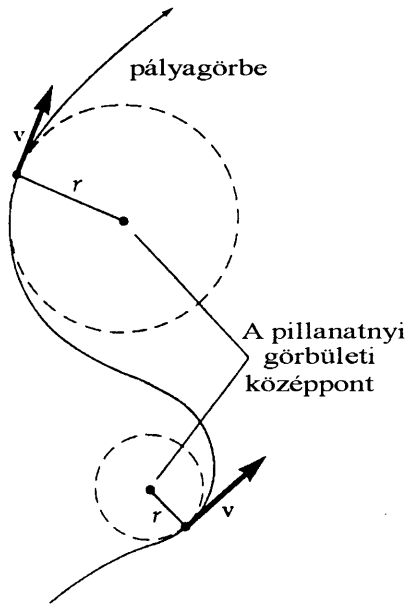
Teljes gyorsulás (a) (körmozgás)

$$a = \underbrace{-\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}}_{\substack{a_{cp} \\ \text{(sugár irányban befelé)}}} + \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\substack{a_t \\ \text{(érintő irányban)}}} \qquad \textbf{(4-9)}$$

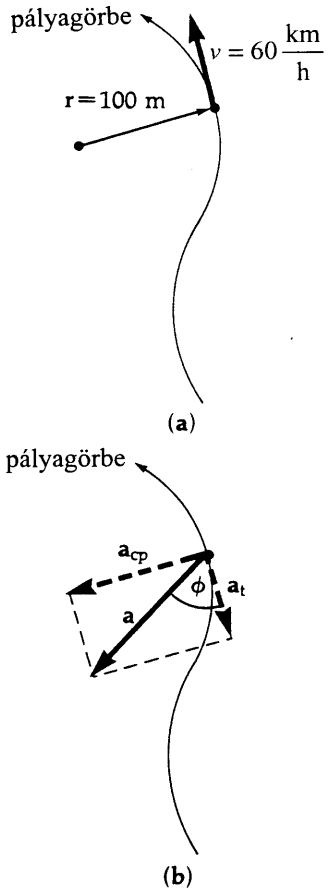


4-6 ábra
Az $\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ egységvektor

Az a_{cp} centripetális összetevő előtti negatív előjel azt mutatja, hogy az a_{cp} centripetális komponens a kifelé mutató $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor irányával ellentétes, mindig befelé mutat. Ha a részecske lassul, akkor az érintő menti a_t komponens is negatívvá válik.



4-7 ábra
Tetszőleges görbevonalú pályán mozgó részecske



4-8 ábra
A 4-4 példához. Egy gépkocsi görbevonalú pályán lassít. Mivel az autó lassít, a_t érintőmenti gyorsulása a mozgás irányával ellentétes.

4-3 PÉLDA

Fejezzük ki az előző feladatban leírt gépkocsi gyorsulását az $\hat{\theta}$ és $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektorok segítségével.

MEGOLDÁS

Feltételezve, hogy a gépkocsi a pozitív **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** irányban mozog, akkor a gyorsulás érintő irányú komponense negatív.

Így $$\mathbf{a} = -\left(1{,}39\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\hat{\theta} - \left(2{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

4.4 Általános görbe vonalú mozgás

Az előzetesen tárgyaltak némi kiterjesztésével tetszőleges görbe vonalú pályán, változó sebességgel haladó részecske mozgása is tárgyalható (4-7 ábra). Ilyen pálya bármely pontjában definiálható egy ún. görbületi kör, amelynek r sugarát a pálya pillanatnyi görbületi sugarának, középpontját pedig a pálya pillanatnyi görbületi középpontjának nevezzük.* Ha ismerjük a pillanatnyi r, v és dv/dt értékeket, akkor az a_{cp} és a_t összetevőket a megszokott módon számíthatjuk ki. Általános esetben természetesen ezeknek az összetevőknek a nagysága és iránya folytonosan változik, de a pillanatnyi értékek ismeretében a számítások egyszerűen elvégezhetők.

4-4 PÉLDA

Egy gépkocsi görbe vonalú úton halad. Amint egy 100 m görbületi sugarú szakaszra ér, a vezető másodpercenként 5 km/órával csökkenti sebességét (4-8 ábra). Mekkora a gépkocsi gyorsulása abban a pillanatban, amikor 60 km/óra sebességgel mozog?

MEGOLDÁS

A szokásos módon, a tangenciális és centripetális gyorsulás összetevőket külön-külön határozzuk meg. Először számítsuk ki a tangenciális összetevőt:

$$a_t = \left(\frac{5\frac{\text{km}}{\text{h}}}{1\,\text{s}}\right)\underbrace{\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{60\,\text{perc}}\right)\left(\frac{1\,\text{perc}}{60\,\text{s}}\right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 1{,}39\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Mivel az autó lassul, a gyorsulás tangenciális komponensének iránya az autó mozgásának irányával ellentétes. A centripetális gyorsulás-összetevő meghatározásához először számítsuk át a sebesség mértékegységét m/s-ra.

* Egy görbe adott pontjához tartozó görbületi kör másodrendűen érinti a görbét, ami azt jelenti, hogy az adott pontban első és második deriváltjuk megegyezik. *(Fordító megjegyzése)*

$$v = \left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\underbrace{\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{60\,\text{perc}}\right)\left(\frac{1\,\text{perc}}{60\,\text{s}}\right)}_{\text{átszámítási tényezők}} = 16{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ekkor

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(16{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\,\text{m}} = 2{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ez az összetevő merőleges a pályára és a pillanatnyi görbületi középpont felé mutat.
A teljes gyorsulás nagysága

$$a = \sqrt{a_x + a_y} = \sqrt{\left(1{,}39\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(2{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = 3{,}11\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A gyorsulás irányát a pálya érintőjétől mért ϕ szöggel a 4-8b ábrán látható módon határozzuk meg.

$$\phi = \text{arc tg}\left(\frac{a_{cp}}{a_t}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{2{,}78\,\text{m/s}^2}{1{,}39\,\text{m/s}^2}\right) = 63{,}4^\circ$$

Összefoglalás

A körmozgást végző testnek a kör középpontjától mért helyzetvektorát **r**-rel jelöljük.

Helyzetvektor: $\mathbf{r}$

Sebességvektor: $v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

Gyorsulásvektor: $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

A **v** sebességgel körpályán mozgó részecske a kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulással rendelkezik.

Centripetális gyorsulás (a kör középpontja felé mutat): $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$ (a sebesség irányának változása miatt lép fel)

Vegyük észre, hogy a körmozgást végző test, bár mindig a kör középpontja felé gyorsul, ahhoz sohasem kerül közelebb.

A *nem egyenletes* körmozgást végző test (a test sebessége nő vagy csökken) az a_{cp} centripetális gyorsulás mellett a_t tangenciális gyorsulással is rendelkezik.

Tangenciális gyorsulás (a pálya érintőjében fekszik): $a_t = \frac{dv}{dt}$ (a sebesség nagyságának változását jelzi)

Ha a test sebességének nagysága nő, akkor az a_t tangenciális gyorsulás a *mozgás irányába* mutat, ha csökken, akkor a_t a *mozgás irányával ellentétes*.

A teljes (eredő) gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}\,.$$

Az eredő gyorsulás irányát egy adott – ismert iránnyal (pl. a pálya érintőjével) bezárt szöggel, vagy az $\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ egységvektorokkal adjuk meg.

Tetszőleges, görbevonalú mozgás a pálya minden pontjában a görbületi körével jellemezhető, amelynek középpontja a pillanatnyi *görbületi középpont* és sugara a pillanatnyi *görbületi sugár* folytonosan változik. Ha r, v és $\frac{dv}{dt}$ minden időpontban ismert, akkor a gyorsulás összetevői a körmozgásnál tárgyalt módon számíthatók ki.

Kérdések

1. Milyen mozgást végez az a gépkocsi, amely gyorsul, de sebessége sem nem nő, sem nem csökken?
2. Lehetséges-e, hogy egy test pillanatnyi sebessége zérus, pillanatnyi gyorsulása azonban nem? Lehetséges-e, hogy a gyorsulás zérus, de a sebesség nem?
3. Változhat-e egy test sebessége úgy, hogy közben a sebesség nagysága állandó marad?
4. A függőleges zuhanórepülést végző gépet a pilóta kihúzza a zuhanásból. Mit jelent az, hogy a pilóta g többszörösének megfelelő gyorsulást érez?

5. Az automata mosógép centrifugálása során mennyire becsülhető a ruha gyorsulása? Az eredményt adjuk meg g egységekben!
6. A Föld forgása következtében az egyenlítő egy pontja kb. 1600 km/h sebességgel mozog. Írjuk le, hogy pontosan milyen vonatkoztatási rendszerben érvényes ez az állítás!
7. Lehetséges-e, hogy egy görbevonalú pályán mozgó test eredő gyorsulása a) sugár irányban kifelé mutasson; b) érintő irányú legyen; c) bármilyen más irányú legyen, mint a sugár irányú befelé mutató vektor.

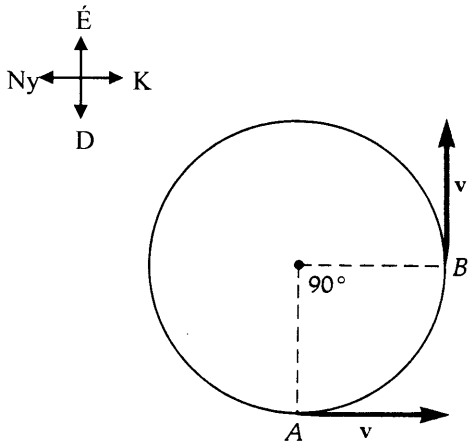
Feladatok

4.2 Polárkoordináták

4A-1 A Földről nézve a Nap és a Hold látószöge egyaránt kb. 0,5°. a) Mekkora ez a szög radiánban? b) Mekkora a látószöge egy 25 mm átmérőjű tízforintos érmének, ha kartávolságból (kb. 60 cm) nézzük?

4A-2 A Földről nézve a Nap 0,5°-os látószögben látszik. Milyen távol kell tartani szemünktől a 25 mm átmérőjű tízforintost, hogy teljesen eltakarja a Napkorongot?

4B-3 Egy versenypálya két egyenes szakaszát 500 m sugarú, körív alakú, 800 m hosszú kanyar köti össze. Határozzuk meg az egyenes szakaszok által bezárt kisebbik szöget!



4-9 ábra
A 4A-4 feladathoz

4.3 A körmozgást végző test sebessége és gyorsulása
4.4 Általános görbevonalú mozgás

4A-4 Egy gépkocsi a 4-9 ábrának megfelelően 12 m/s állandó sebességgel halad egy 40 m sugarú körív alakú pályán a vízszintes síkban. Határozzuk meg a sebességvektor Δv változását azon idő alatt, míg az A pontból kelet felé haladva a B pontba jut (ahol észak felé indul). Rajzoljunk Δv meghatározására vektorábrát!

4A-5 Felszállás előtt egy helikopter motorját percenként 300 fordulattal járatják be. Mekkora sebességgel mozog a 4 m hosszú légcsavarszárny csúcspontja?

4B-6 Egy részecske 10 m/s állandó sebességgel körpályán mozog. Határozzuk meg a sebességvektor változásának nagyságát és irányát mialatt a részecske a kör kerületének a harmadát befutja.

4A-7 A Hold jó közelítéssel körpályán mozog a Föld körül. Mekkora a centripetális gyorsulása? (Használjuk fel az L függelék adatait!)

4A-8 A Bohr modell szerint a hidrogénatom elektronja $5{,}29\times10^{-11}$ m sugarú pályán $2{,}19\times10^{6}$ m/s sebességgel mozog a magot alkotó proton körül. Mekkora az elektron gyorsulása?

4A-9 Vidámparki körhinta vízszintes síkú, 5 m-es sugarú pályán mozog. Mekkora lehet az utasok maximális sebessége, ha a centripetális gyorsulásuk nem haladja meg a 0,4 g értéket?

4A-10 Egy lemezjátszó percenként 33 1/3 fordulatszámmal forgó korongján a tengelytől 10 cm távolságban ül egy hangya. Mekkora a hangya gyorsulása?

4A-11 A nagy gyorsulásoknak az emberi testre gyakorolt hatását úgy tanulmányozzák, hogy az űrhajósokat egy 15 m hosszú rúd végéhez rögzített kabinban vízszintes síkú körpályán megforgatják. a) Mekkora az űrhajós gyorsulása, ha a kabin 23 fordulatot tesz meg percenként? b) Hányszorosa ez a gyorsulás a nehézségi gyorsulásnak?

4A-12 A modern ultracentrifugákkal $10^{9}\,g$ nagyságú centripetális gyorsulást lehet előállítani. Ezekben az eszközökben a szokásos mechanikai csapágyazás helyett mágneses felfüggesztést használnak a forgás súrlódásmentessé tételére. A nagy sebességű ultracentrifugákkal az 50 atomi tömegegységtől a dohány mozaikvírus durván 100 millió atomi tömegegységéig terjedő tartományban 1 %-os pontossággal határozható meg a molekulák atomtömege. A centrifugákban a vizsgált anyagot kicsiny, 10^{-2} mm-es sugáron forgatják. a) Mekkora az ultracentrifuga maximális fordulatszáma? b) Mekkora sebességgel mozog ekkor a vizsgált anyag? (Megjegyzés: Hasonló sugarú kicsiny acélgolyók a centrifugális hatások következtében 1000 m/s kerületi sebesség körül már szétrobbannak.)

4B-13 A tipikus pulzárokról úgy hisszük, hogy kb. 40 km sugarú, másodpercenként 1 fordulatot tevő, különlegesen sűrű neutroncsillagok. a) Mekkora a neutroncsillag egyenlítőjén elhelyezkedő részecske gyorsulása? b) Mekkora a 45. szélességi körön (azaz az egyenlítő és a pólus között félúton) lévő részecske gyorsulása? c) Milyen irányban gyorsul a b) kérdés szerint mozgó részecske?

4B-14 Chicago az északi szélesség 41,9°-án helyezkedik el. Mekkora a város centripetális gyorsulása a Föld forgása következtében?

4B-15 Légturbinával hajtott nagysebességű fogorvosi fúrógép 350 000 fordulat/perc fordulatszámmal forog. A fúrófej átmérője 1 mm. a) Mekkora a fej egy kerületi pontjának sebessége? b) Mekkora egy kerületi pont gyorsulása? Hányszorosa ez a nehézségi gyorsulásnak?

c) Mekkora egy kerületi pont tangenciális gyorsulása, ha a fúrót 1,2 s alatt egyenletesen lassulva leállítjuk?

4B-16 Az L függelék adataira támaszkodva a) határozzuk meg az egyenlítő egy pontjának a Föld forgása következtében fellépő gyorsulását. b) Határozzuk meg a Föld Nap körüli keringése miatt fellépő centripetális gyorsulását!

4B-17 Vidámparki 25 m átmérőjű, függőleges síkú óriáskerék 5 fordulat/perc fordulatszámmal forog. A kereket 9 s alatt lefékezik. Mekkora egy utasnak a gyorsulása (nagyság és irány szerint) a fékezés után 6 másodperccel? Készítsünk vázlatot, amely feltünteti az óriáskerék forgásirányát, az utas **a** gyorsulásvektorát és a gyorsulásvektornak a radiálisan befelé mutató iránnyal alkotott ϕ szögét!

4B-18 Egy sólyom 12 m sugarú, vízszintes síkú íven 4 m/s sebességgel repül. a) Mekkora a centripetális gyorsulása? b) Mekkora a sólyom gyorsulásának nagysága és iránya, ha pályájának síkja és íve nem változik, de 1,2 m/s^2 gyorsulással növelni kezdi sebességét?

4B-19 Egy gépkocsi 10 m/s állandó sebességgel mozog a 80 m sugarú kanyarban. a) Mekkora a gyorsulása? b) Mekkora a tangenciális gyorsulás, ha a kocsi 6 s alatt megáll a kanyarban? Hogyan változik a teljes gyorsulás iránya és nagysága ezalatt? A gyorsulásvektor szemléltetésére készítsünk rajzos vázlatot is!

4B-20 A gyorsulás mérésére gyorsulásmérő eszközöket készítenek. Egy gyorsulásmérővel felszerelt gépkocsi vezetője megfigyelte, hogy mialatt állandó, 72 km/ó sebességgel mozog, a gyorsulásmérő jobbra mutató, 0,15 g gyorsulást jelez. (A gyorsulásmérők skálája gyakran g egységekben mutatja az eredményt.) a) Határozzuk meg a kanyar görbületi sugarát! b) Jobbra vagy balra fordul az autó?

4B-21 Egy versenyautó 1,6 km kerületű körpályán állandó gyorsulással 64 km/óráról 128 km/órára növeli sebességét, és közben 1,2 km utat tesz meg. a) Mekkora az érintő menti gyorsulás? b) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása, amikor a sebesség 128 km/ó?

4B-22 A vidámpark egy járatán, a 6 m átmérőjű, nagyméretű, vizszintes forgó korong peremén ül egy aszszony. Nyugalmi helyzetéből kiindulva egyenletes gyorsulással 6 s alatt 0,5 fordulat/s fordulatszámot ér el. a) Mekkora a szöggyorsulása radián/s^2-ben? b) Mekkora az asszony érintő menti és sugár irányú gyorsulása 3 s-mal az indulás után? c) Mekkora ebben az időpontban a teljes gyorsulás? A gyorsulás szemléltetésére készítsünk vázlatot.

További feladatok

4C-23 A mesterséges holdak körpályán való egyenletes sebességű mozgása akkor stabilis, ha centripetális gyorsulásuk a pálya sugarának négyzetével fordítottan arányos. a) Mutassuk meg, hogy a műhold tangenciális sebessége a pályasugár négyzetgyökével fordítva arányos. b) Mutassuk meg, hogy az egy fordulat megtételéhez szükséges idő a pályasugár 3/2-ik hatványával arányos.

4C-24 Egy 10 m sugarú körpálya elhelyezkedését derékszögű (x, y) koordinátákkal adjuk meg. A $t = 0$ pillanatban egy motoros a $+x$ irányban állandó, 3 m/s sebességgel éppen az origón halad át. a) Határozzuk meg, hogy mennyi idő alatt teszi meg a motoros a pálya l/4 részét! b) Határozzuk meg a motoros x és y koordinátáját 8 s-mal az origón való áthaladás után! c) Határozzuk meg, hogy mekkora a motoros elmozdulása irány és nagyság szerint a mozgás 8. és 12. másodperce között! d) Mekkora a c) ben jelzett időintervallum kezdetén és végén a motoros pillanatnyi sebessége nagyság és irány szerint? e) Válaszoljunk a d) kérdésre sebesség helyett a pillanatnyi gyorsulást illetően!

4C-25 Egy versenyautó 210 km/ó sebességgel mozog a 2 km kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll. a) Mekkora az autó tangenciális gyorsulása? b) Mekkora a centripetális gyorsulás 1 km-rel a megállás előtt? c) Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás? (Adjuk meg a gyorsulás irányát és nagyságát is, az irány jelölésére készítsünk vázlatot, ami világosan mutatja a gyorsulás iránya és az autó mozgása közötti kapcsolatot.)

4C-26 Egy 300 m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó 1,2 m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. a) Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége 15 m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére.

4C-27 Egy fonalra kötött labdát 0,3 m sugarú, a talaj felett 1,2 m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól 2 m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillanatában elfoglalt helyzetét függőlegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

4C-28 Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó görbületi kör r sugarát a v_0, θ_0 és g függvényében.

AZ 1–23 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

II. Fejezet

2A-1 200 km

2A-3 1 fényév = $9{,}46 \times 10^{15}$ m; 1 pc = $3{,}09 \times 10^{16}$ m

2A-5 0,447%

2A-7 49,4

2B-9 7,40 perc; az óra hosszabb

2A-11 $6{,}67 \times 10^{-22}$ s

2A-13 1,63 cm/év

2A-15 55,4 s

2B-17 lehetetlen

2B-19 a) 1,20 m/s b) 7,00 s c) –1,54 m/s (közelítőleg)

2B-21 62,5 m/s^2

2B-23 $2{,}65 \times 10^4$ m/s^2

2A-25 2,59 m/s

2A-27 0,639 s

2A-29 a) 1,63 s b) 9,96 m/s c) 13,1 m

2A-31 a) 5,00 s b) 75,0 m

2B-33 3,34 s

2B-35 0,804 s; 0,0127 s

2B-37 a) –1,5 m/s^2 b) 4 s c) 5,33 m

2B-39 a) $6t^2$ b) $3t$

2B-41 a) 2 m; 3 m/s; 4 m/s^2 b) $v = 3 - 8t$ c) –8 m/s^2 d) 0,375 s e) 2,56 m

2B-43 c) –4 m/s d) 34,0 m

2B-45 $x(2) = 2$ m; $x(4) = 6$ m; $x(6) = 14$ m; $x(10) = 22$ m

2B-47 $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$

2C-49 a) 12,8 m/s b) 5,90 m

2C-51 12,2 m/s

2C-53 a) 7 m/s b) –5,35 m/s c) –9,8 m/s^2

2C-55 a) 46,2 s b) 34,6 m/s

2C-57 14,2 s

2C-59 $4{,}83 \times 10^{-3}$ m/s^2

2C-61 a) 26,4 m b) 6,89%

2C-63 a) 41,5 s b) 20,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ c) 10,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2C-65 a) $v = 3At^2$ b) $\alpha = 6At$ c) 0,0533 m/s^3

III. Fejezet

3A-1 a) 7 osztásrészt b) 36,9°; 5 osztásrész

3A-3 a) $C = 6\hat{x} + 5\hat{y}; D = -2\hat{x} + 7\hat{y}$

b) C = 7,81; 39,8°; D = 7,28; 106°

3B-5 C = 5,39; 21,8°; D = 6,08; 80,5°; E = 10,8; 248,2°

3A-7 a) $C = \hat{y} - 2\hat{z}$; 2,24 m

b) $D = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$; 8,78 m

3B-9 2,50 m/s

3B-11 a) 4,87 km; 61,4° délnyugatra b) 23,3 m/s c) 13,5 m/s; 61,4° délnyugatra

3B-13 16,1° a horizont alatt

3A-15 13,6 m

3B-17 24,7 m/s

3B-19 55,4 m/s

3B-21 a) 11,1 m/s b) 24,7 m/s; 26,5° a függőlegestől

3B-23 a) 21,9 m b) 2,74 s c) 14,1 m d) 21,4 m/s; 13,9° a függőlegestől

3C-25 a) $6\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$ b) $2\hat{x} + 4\hat{y} - 6\hat{z}$ c) $6\hat{x} + 5\hat{y} - 8\hat{z}$

3C-27 (2,44 m, 11,9 m)

3C-29 $R = \dfrac{v_o^{\,2} \sin 2\theta}{g}$

3C-31 A válasz adott.

3C-33 $Y_m = \dfrac{v_0^{\,2} \sin^2 \theta}{2g}$

3C-35 A válasz adott.

3C-37 $y = (\text{tg}\,\theta)x - \left[\dfrac{g}{2(v_o \cos\theta)^2}\right]x^2$

3C-39 $\phi = \text{arc tg}\left(\dfrac{\text{tg}\,\theta}{2}\right)$

IV. Fejezet

4A-1 a) $8{,}73 \times 10^{-3}$ rad b) 0,030 rad

4B-3 91,7°

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) –1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$

A NEWTON-FÉLE MOZGÁSTÖRVÉNYEK

„A természet rejtve őrzi törvényeit,
mondá Isten: legyen Newton, s ő mindent felderít"

Alexander Pope (Bárány György fordítása)

5.1 Bevezetés

Az előző fejezetekben a pontszerű testek mozgásának törvényeit tárgyaltuk. Megmutattuk, hogy ha egy részecske gyorsulását ismerjük, akkor a mozgás egy vonatkoztatási rendszerben leírható. Most sokkal érdekesebb kérdést vetünk fel: Miért gyorsulnak a testek?

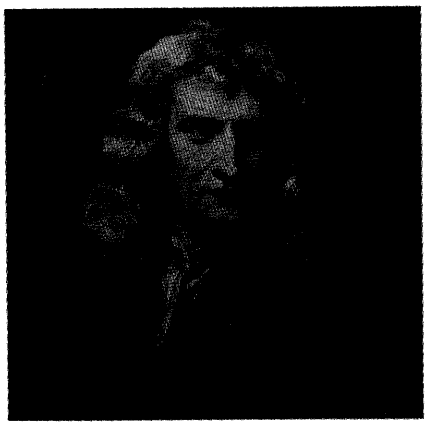
Newton erre a kérdésre azt a választ adta, hogy a testek azért gyorsulnak, mert erő hat rájuk. Ennek az állításnak matematikai formáját, Newton második törvényét e könyv olvasói már bizonyára ismerik:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \textbf{(5-1)}$$

ahol m a test ún. tehetetlen tömegét jelöli. Bár ez a törvény rendkívül egyszerűnek tűnik, jelentése azonban nagyon mély, ezért a következőkben ezzel hosszasabban foglalkozunk. Amellett, hogy a törvénnyel sok természeti jelenség hatékonyan értelmezhető, a térre és az időre vonatkozóan is jelentős feltevéseket tartalmaz. Igen érdekes, hogy bár Newton második törvénye 200 évig állta a kísérleti ellenőrzés próbáit, az Einstein féle speciális relativitáselmélet teljesen új tér és idő fogalma s elméleti koncepciója szerint csak egy nagyon jó közelítés.

Newton három törvénye, kiegészítve a szintén Newtontól származó gravitációs törvénnyel, az univerzum leírásának csodálatos lehetőségét nyújtotta. Newton neve, miután e törvényeket *Principia* c. művében közzétette, világszerte ismertté vált. A Newton-elmélet olyan, egymástól eltérő jelenségek magyarázatára volt alkalmas, mint a bolygók mozgása, az ár-apály, egy alma esése a Föld felé, a Föld lapult alakja, a Föld tengelyének kb. 26 000 éves periódusú, lassú precessziós mozgása, ami a napéjegyenlőség időpontjának lassú változását okozza. Az elmélet mechanisztikus és szigorú ok-okozati kapcsolatokat szab meg, s úgy tűnik, lehetővé teszi, hogy az univerzum önmagában, külső hatástól mentesen működjék. Az elmélet átütő erejű volt, hatása két évszázadon át befolyásolta a filozófiát, a politikát, a teológiát és számos más tudományterületen is döntő változásokat eredményezett.

A Principia publikálása után Newton érdeklődése az alkímia, a történelem és a bibliai próféciák értelmezése felé fordult. Úgy tűnik, hogy miután „rendet teremtett" a fizika világában, ugyanezt a célt tűzte maga elé a teológiában is. 1693-ban Newton enyhe idegösszeomlást kapott (lehetséges, hogy a kísérletei során használt higannyal mérgezte meg magát), de gyorsan felgyógyult. Elfogadta a Pénzverde Felügyelő-i megbizatást, majd a Royal



Isaac Newton, az emberi történelem egyik legnagyobb géniusza (1642-1727) 1642-ben karácsony napján, majdnem egy évvel Galilei halála után született.

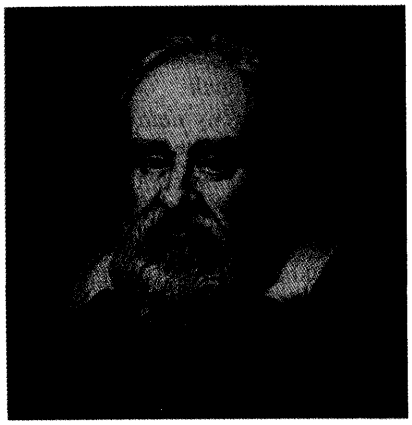
Természettudományos és matematikai tanulmányait Cambridge-ben végezte. Az egyetem bubópestis járvány miatt egy időre bezárt, s ezalatt Newton családi birtokukra, Woolsthorpe-ba utazott. Ez a környezet, a nyugalom és magány csodálatos felfedezésekre sarkallta Newtont. 24 éves korára lerakta a klasszikus mechanika alapjait, megalkotta a differenciál- és integrálszámítást, felfedezte a binomiális tételt, kidolgozta a gravitáció elméletét, és előre jutott a fény természetének mély megértésében. Amikor két évvel később újra megnyitották az egyetem kapuit, Newton a matematika professzora lett. Könyve, *„A természettudomány matematikai elvei"* – a *Principia* – 1686-ban jelent meg latin nyelven, s elvitathatatlanul minden idők egyik legnagyobb természettudományos műve. A könyv hatalmas izgalmat keltett a XVII. század világában és az emberi gondolkozás több ágára is döntő hatást gyakorolt. Pierre Laplace, francia természettudós-matematikus ezt írta róla: „A *Principia* kimagaslik az emberi szellem alkotásai közül." Newton jó egészségben szellemi erejét 80 éves kora felett is megőrizve 85 évet élt meg. Sir Isaac Newtont állami gyászszertartással temették el, s ő volt az első természettudós, akit a Westminster Abbeyben helyeztek örök nyugalomra. Newton szavai szerint: „Azért volt, hogy oly messzire láthattam, mert óriások vállára állhattam."

Society elnökévé választották, s – a természettudósok közül elsőként – lovaggá ütötték.

Élete további szakaszán Newton követőivel együtt sok időt fecsérelt el arra, hogy más tudósokkal különböző felfedezések elsőbbségének kérdésén vitatkozott. Néhány esetben a vita nagyon elmérgesedett. Robert Hooke, a fényre és a gravitációra vonatkozó gondolatainak eltulajdonításával vádolta Newtont, akit ez arra indított, hogy néhány, az optikára vonatkozó felfedezését csak negyven évvel később, Hooke halála után publikálja. Newton meg volt győződve arról, hogy Gottfried Wilhelm Leibniz, német matematikus a differenciál- és integrálszámítás közlésekor plágiumot követett el, s az ő gondolatait használta fel. Ma úgy hisszük, hogy mindezek a viták alaptalanok voltak, s a felfedezések egymástól függetlenül születtek. Newton jó egészségben, szellemi erejét megőrizve magas kort ért meg, s életének 85. évében hunyt el. Bár szerénységéről nem volt nevezetes, mégis azt írta: „Azért volt, hogy oly messze láthattam, mert óriások vállára állhattam." Másutt pedig ez áll: „Nem tudom, mit jelentek a világnak, de számomra úgy tűnik, csak olyan voltam, mint egy tengerparton játszó fiú, aki szórakozás közben hébe-hóba egy-egy simább kavicsot vagy szebb kagylóhéjat talált, mint mások; az igazság nagy óceánja azonban még felfedezetlenül terül el előttem." Sir Isaac Newtont állami gyászszertartással a Westminster Abbey-ban helyezték örök nyugalomra.

5.2 Megfigyelések és kísérletek a pontszerű részecskék mozgására vonatkozóan

Láttuk, hogy a részecskék mozgása két jelentős csoportba sorolható: a részecskék *állandó sebességgel* (gyorsulás nélkül) és *gyorsulva* mozoghatnak. Az állandó sebességű mozgás tulajdonságainak felderítésében Galilei már Newton előtt jelentős felismerésekhez jutott. Galilei lejtős vályúkban leguruló golyók mozgását vizsgálta. A lejtő hajlásszögét egyre csökkentve arra következtetett, hogy ha a súrlódást és minden egyéb külső hatást ki lehetne küszöbölni, akkor a mozgó test *örökre* megtartaná mozgásállapotát, s mindig ugyanazzal a sebességgel mozogna. Galilei kijelentése radikálisan különbö-



Galileo Galilei (1564-1642) az olaszországi Pisaban született, ugyanabban az évben, amikor Michelangelo meghalt és Shakespeare született. Galileit 25 éves korában nevezték ki a Pisai Egyetem professzorává.

Bár már ekkor elfogadta Kopernikusz felfogását; hogy a Naprendszer középpontjában a Nap áll, nyíltan egészen 50 éves koráig nem hirdette. 1609-ben jutott el hozzá az „optikai cső"-nek nevezett távcső felfedezésének híre, s saját használatra szerkesztett is néhányat. A távcsövekkel fontos felfedezéseket tett; felfedezte a Hold hegyláncait, a Napfoltokat, észrevette a Vénusznak a Holdunkéhoz hasonló fázisait, és a Jupiter négy holdját. Egymást követő éjszakákon tett megfigyeléseit gondosan ábrázolva megállapította, hogy a Jupiter és négy holdja egy kicsiny Naprendszerhez hasonlít. Galilei 1632-ben adta ki *„Párbeszédek a világ két fő rendszeréről"* („*Dialógusok*") című művét, amelyben összehasonlítja a geocentrikus ptolemaioszi és a heliocentrikus kopernikuszi világképet. A kopernikuszi szemlélet melletti világos kiállása miatt került az Inkvizíció ítélőszéke elé, s el is ítélték a kopernikuszi tanok terjesztésére vonatkozó tilalom megszegéséért. (Nem eretnekségért – mint azt gyakran gondolják.) A tárgyalás után évekig tartó háziőrizete alatt egyre jobban elhatalmasodó vaksága ellenére befejezte legnagyobb hatású munkáját, a *„Beszélgetések két tudományos rendszerről"* („Discorsi"). A művet kicsempészték Olaszországból és Hollandiában tették közzé. A könyv a pápa tilalmi listájára, az *„Index expurgatorius"*-ra került, s 1835-ig Kopernikusz *„De Revolutionibus"*-ával és Kepler egy művével együtt index alatt is maradt. Galilei ragaszkodni mert – s a középkorban volt bátorsága – ahhoz, hogy a tudományos elméleteknek és következtetéseknek kísérleti tényeken (és logikus érveken) kell alapulniok. Galileit – a mozgásra vonatkozó mély gondolatai, csillagászati felfedezései, s azért, ahogyan a matematikai leírást a fizikai törvényekben alkalmazta – méltán nevezhetjük a modern természettudomány atyjának.

zött az addig századokon keresztül elfogadott Arisztotelész féle mozgásszemlélettől. Arisztotelész szerint a testek természetes állapota a *nyugalom.* Ha például abbahagyjuk egy kocsi tolását, akkor az véglegesen nyugalmi állapotba kerül, vagy ha egy hegyről leguruló golyó vízszintes talajra kerül, akkor fokozatosan lassul és megáll. Mindennapi tapasztalataink arra utalnak, hogy ahhoz, hogy egy testet mozgásban tartsunk, folyamatosan erőt kell gyakorolni rá.

Galilei éleslátása, s gondos kísérletekkel alátámasztott érvelése azonban rámutatott, hogy ezek, a „józan észre" hivatkozva elfogadott magyarázatok helytelenek. Ő volt az, aki az erő helytelen értelmezését – mely szerint az erő a mozgás fenntartásához szükséges – megváltoztatta, s kimondta: az erő a testek mozgásállapotának (sebességének) *megváltoztatásához* szükséges. Így Galilei tette meg az első lépést a mozgás fogalmának pontos megértéséhez.

Newton – elfogadva Galilei szemléletét – első mozgástörvényét (mai szókincsünket alkalmazva) a következőképpen fogalmazta meg:

Newton első törvénye	**Minden test mindaddig megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenesvonalú egyenletes mozgását, amíg más test erővel nem hat rá.**

Vegyük észre, hogy a törvény nem tesz különbséget nyugalom és egyenletes mozgás között. A testre ható erők eredője mindkét esetben zérus, és zérus a gyorsulás is. Nincs különbség továbbá az olyan testek között, amelyekre egyáltalán nem hat erő, s az olyanok között, amelyekre hatnak ugyan erők, de *eredőjük* zérus. A csillagközi térben mozgó proton azért tartja meg egyenesvonalú egyenletes mozgását, mert lényegében nem hat rá semmilyen erő. Ha egy kocsit úgy húzunk, hogy folyamatosan kiegyenlítjük a súrlódás mozgást akadályozó hatását, akkor a kocsi azért mozog egyenletesen, mert a kocsira ható erők eredője zérus.

Bár Newton I. törvénye tartalmazza az erő szót, a fogalom pontos definícióját nem adja meg, arra biztosít csak lehetőséget, hogy az eredő erő létezését vagy hiányát felismerhessük. A testek gyorsulását mindig valamilyen, erőnek nevezett hatás okozza. Amennyiben egy test nem gyorsul (azaz nyugalomban van vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez), akkor a rá ható erők eredője zérus. Hétköznapi nyelven szólva a gyorsulásmentes mozgást a testek **tehetetlenségével** magyarázzuk. A tehetetlenség miatt a testek „ellenállnak" a gyorsulásnak, s így a gyakran „tehetetlenség törvényének" nevezett Newton-féle I. törvénynek megfelelően viselkednek.

Felvetődik a kérdés, hogy – minthogy az első törvény nem értelmezi – mi is az erő és hogyan keletkezik? Az élőlények meglökhetnek vagy elhúzhatnak más testeket, az élettelen tárgyak, mint pl. egy kinyújtott rugó vagy egy megfeszített kötél erőt gyakorolhatnak a hozzájuk erősített testekre, az asztallaptól kifejtett, felfelé mutató erő kiegyenlíti az asztalra tett könyvre ható lefelé mutató gravitációs erőt. Egyes esetekben azonban még az sem szükséges az erőhatás létrejöttéhez, hogy testek közvetlenül érintkezzenek. A Föld *gravitációs* ereje az üres téren át érvényesül, s tartja a Holdat Föld körüli pályáján. Pontosan ilyen hatás következtében hull a szabadon eső alma a Földre anélkül, hogy esése közben közvetlenül érintkezne a Földdel. Az ilyen típusú erőt „távolható" erőnek nevezzük. A távolható erők sokak számára logikai nehézséget okoztak a newtoni elképzelések elfogadásában. („Hogyan fejthetünk ki erőt valamire, amit nem is érintünk meg?") A távolható erők újabb típusát jelenti az elektromosan töltött testek között fellépő *elektromágneses* erő. Úgy tűnik, még két további, csupán az elemi részek mikrovilágában fellépő távolható erő is létezik az erős (*hadron*) kölcsönhatást adó magerő és a gyenge (*lepton*) kölcsönhatással járó erő. A természetben fellépő erők négy *alapvető* csoportba sorolhatók. Nagyságrendjük az egymástól azonos távolságban[1] lévő részecskék esetén a következő:

A TERMÉSZETBEN FELLÉPŐ ALAPVETŐ ERŐTÍPUSOK	RELATÍV ERŐSSÉG
Erős kölcsönhatás	**1**
Elektromágneses erők	$\mathbf{10^{-2}}$
Gyenge kölcsönhatás	$\mathbf{10^{-13}}$
Gravitációs erő	$\mathbf{10^{-38}}$

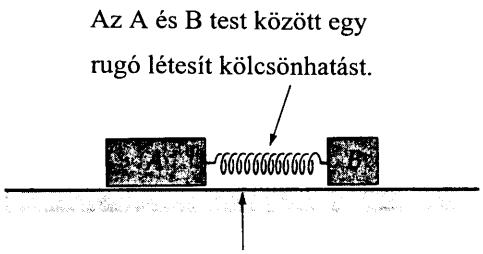
Az erők mindig testek között hatnak, és így testek között fellépő *kölcsönhatások* eredményei.

Newton I. törvénye meghatározza az inerciarendszer fogalmát is. *Inerciarendszer* az, *amelyben érvényes a tehetetlenség törvénye*. Nyilvánvaló, hogy a testek mozgásának leírása függ attól, hogy milyen koordinátarendszert használunk. Amennyiben egy test valamilyen koordinátarendszerben nyugalomban van, akkor az ehhez képest egyenletesen mozgó rendszerben egyenletesen mozog, azaz az utóbbi koordinátarendszer is inerciarendszer. Ha azonban a második koordinátarendszer gyorsul az elsőhöz képest, akkor a test (amelyre valójában nem hat erő) ebben a második koordinátarendszerben gyorsulna, ezért a második rendszer ebben az esetben nem inerciarendszer.

A Newton törvények alkalmazásának első fontos lépése egy inerciarendszer kiválasztása. *Inerciarendszerben azok a testek, amelyekre*

---

[1] Mivel az erős és gyenge kölcsönhatás hatótávolsága kb. 1 fm (1 femtométer = 10^{-15} m), szükségszerű, hogy az összehasonlítást ilyen távolságra vonatkoztassuk. A jelenlegi kutatások célja éppen ezen erőhatások természetének megértése. Érdekes új fejlemény, hogy igen nagy energiáknál úgy tűnik, hogy az elektromágneses és gyenge kölcsönhatás azonos effektust ad, így látszólag *egyetlen* alapvető kölcsönhatás kétféle megjelenési formájáról lehet szó.



5-1 ábra
Gondolatkísérlet az *A* és *B* test kölcsönhatásának vizsgálatára.

A vízszintes, súrlódásmentes sín a mozgást egy dimenziósra korlátozza és a felfelé ható erőkkel kiegyenlíti a testekre ható gravitációs erőt.

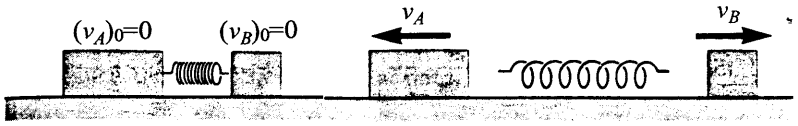
ható erők eredője zérus, nyugalomban vannak vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. Gyakran az „állócsillagokhoz képest nyugvó" rendszert választjuk inerciarendszerként. Számos esetben azonban a Föld tengely körüli forgása és a Nap körüli keringése ellenére a Földhöz rögzített koordinátarendszer is szolgálhat inerciarendszerként, mert a Föld forgásából és a Nap körüli keringéséből származó gyorsulások oly kicsinyek, hogy hatásuk elhanyagolható. Amennyiben egy inerciarendszert már találtunk, akkor az ehhez képest egyenletesen (gyorsulásmentesen) mozgó minden további koordinátarendszer is inerciarendszer. Egy inerciarendszerben nyugvó testet bármely más inerciarendszerből a megfigyelők állandó sebességűnek látnak. Más szavakkal, ha egy test minden inerciarendszerben gyorsulás nélkül mozog, pontosan olyan, mint az, amelyre nem hat eredő erő, s így Newton I. törvényének megfelelően mozog. Azt a tételt, amely szerint a Newton törvények minden inerciarendszerben azonosan érvényesülnek, a *relativitás elvének* nevezzük. Az elvről a Speciális relativitáselmélet c. 41. fejezetben még részletesebben szólunk.

Newton második törvénye sokkal kézenfekvőbbnek tűnik, ha először néhány, a gyorsuló mozgásra vonatkozó kísérlettel foglalkozunk. Megfigyelhetjük, hogy gyorsuló mozgás mindig legalább két test kölcsönhatásának eredményeként jön létre. Nézzünk néhány példát! Egy nyugalmi helyzetből elengedett labda a Föld és a labda közötti *gravitációs* kölcsönhatás következtében gyorsul a Föld felé. Egy kiskocsi akkor gyorsul, ha valamilyen más test húzza vagy tolja. Az autók az úttal való kölcsönhatás következtében gyorsulnak. Mindezek a példák azonban talán szükségtelenül bonyolultak a bevezető vizsgálathoz.

Az erő és a gyorsulás közötti kapcsolat vizsgálatára tekintsük a következő egyszerű kísérletet. Két test kölcsönhatását vizsgáljuk. A kísérleti eszköz vízszintes, légpárnás sínen elhelyezett kocsikból áll. A kocsikat a sínen kicsiny lyukakon kipréselt levegő által alkotott légpárna tartja (5-1 ábra). A vizsgálatot az alábbi feltételek mellett végezzük:

(1) A kocsik mozgását az egyszerűbb tárgyalás érdekében egydimenziós mozgásra korlátozzuk..
(2) A vízszintes sín kiegyenlíti a gravitációs erő hatását, s a légpárna biztosítja, hogy a kocsik súrlódásmentesen mozogjanak. Így a kocsira ható eredő erő zérus.

A sínen elhelyezett két kiskocsi sokféleképpen hozható kölcsönhatásba, összenyomott rugót, vagy kicsiny, robbanó kapszulát helyezhetünk közéjük, de szétlökhetjük a kocsikat a rájuk szerelt egymást taszító mágnespár segítségével is.



5-2 ábra
Kísérlet légpárnás sínen mozgó kiskocsik kölcsönhatásának vizsgálatára.

a) A kölcsönhatás előtt a kiskocsik nyugalomban vannak.

b) A kölcsönhatás után a kiskocsik állandó sebességgel távolodnak el egymástól.

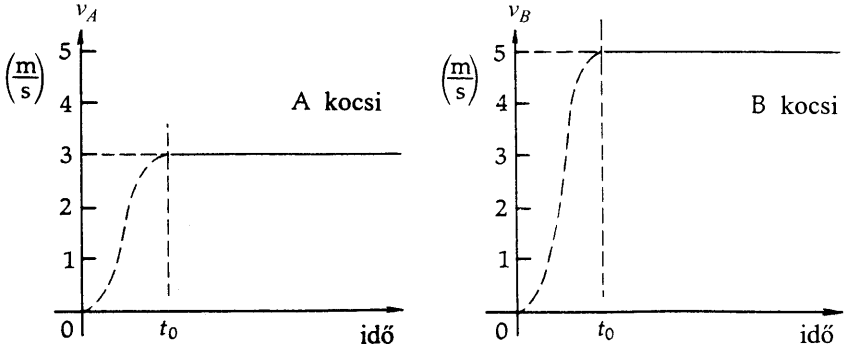
Egyetlen kocsi a sínen megtartja mozgásállapotát, azaz ha kezdetben nyugalomban volt, nyugalomban is marad, ha mozgott, akkor lényegében állandó sebességgel tovább mozog. Ez tökéletes összhangban van Newton I. törvényével: más testtel (kocsival) való kölcsönhatás híján a kiskocsi megtartja mozgásállapotát.

A következőkben foglalkozzunk azzal az esettel, amikor két kiskocsit a közéjük helyezett rugóval szétlökünk. Indítsuk a kocsikat úgy, hogy a kocsik – közöttük egy összenyomott rugóval – kezdetben nyugalomban vannak. Az 5-2/a ábra ennek az állapotnak a részletes rajza. Az 5-2/b ábrán az a helyzet látható, amikor a szétugrott rugó ellökte magától a kocsikat, s már nem érintkezik velük. A állandó, v_A, ill. v_B kocsik sebességgel mozognak. Ismételjük meg többször a kísérletet különbözőképpen összenyomott rugóval. Ha minden esetben meghatározzuk a sebességek v_A/v_B arányát, azt tapasztaljuk, hogy ez az arány a rugó feszítettségétől függetlenül minden esetben ugyanakkora. Az arány változatlan akkor is, ha a testek szétlökésére más típusú kölcsönhatást (mágneseket vagy robbanó kapszulát) alkalmazunk. Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy a v_A/v_B *arány állandó, s független a kölcsönhatás típusától.*

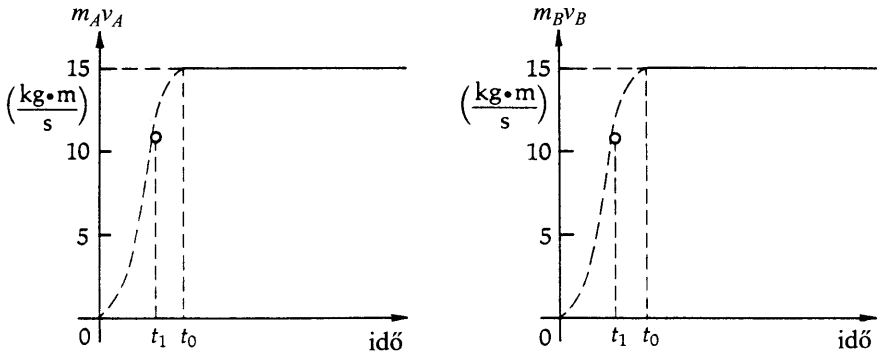
5.3 A kísérleti eredmények elemzése

Az 5-3 ábra egy kiskocsi sebességének változását mutatja a fentiekben leírt kísérlet egy konkrét megvalósítása során. Az *A* kiskocsi sebessége a kölcsönhatás során annak megszűntéig a 3 m/s értékre növekszik. Ugyanezen idő alatt a *B* kiskocsi 5 m/s sebességhez jut. A kölcsönhatás időtartama alatt a görbét azért jelezzük szaggatott vonallal, mert a gyorsítási szakaszra vonatkozóan nem rendelkezünk mérési adatokkal.

Az 5-3 ábra grafikonjai másként is értelmezhetők. Szorozzuk meg az *A* kocsi sebességértékeit m_A = 5-tel, a *B* kocsiét m_B = 3-mal! Az 5-4 ábra görbéihez jutunk. Nyilvánvaló, hogy az m_Av_A és az m_Bv_B szorzatok egyenlőek egymással (15 egység).



5-3 ábra
Az *A* és a *B* kocsi sebesség-idő grafikonja.



5-4 ábra
Az m_Av_A és m_Bv_B érték az idő függvényében.

Még érdekesebb a két görbe alakja a $t<t_0$ időtartamra! Megmutatjuk, hogy a két görbe pontosan azonos alakú kell legyen. A gondolatmenet a következő. Tegyük fel, hogy a kísérletben alkalmazott kölcsönhatás a $t_1<t_0$ (5-4 ábra) időpillanatban megszűnik. Mivel a tapasztalat szerint a v_A/v_B arány a *kölcsönhatás jellegétől függetlenül azonos*, az m_Av_A és m_Bv_B szorzatoknak a t_1 időpontban is egyenlőnek kell lennie. Mivel a t_1 időpontot semmi sem tüntette ki a $0<t_1<t_0$ időtartam során, a szorzatok egyenlőségének a teljes $0<t<t_0$ időtartamban teljesülnie kell, s így a két szorzatgörbe azonos kell hogy legyen. A görbék alakjának egyezéséből következik, hogy egy adott pillanatban az érintők meredeksége is ugyanakkora. Eszerint

$$\frac{d}{dt}(m_Av_A) = \frac{d}{dt}(m_Bv_B) \qquad \textbf{(5-2)}$$

A gondolatmenetnek ezen a pontján bizonyos mennyiségek különösen fontosnak látszanak, s úgy tűnik, lehetőséget adnak általános definíció bevezetésére. A példában felhasznált m_A és m_B számok kiválasztása meglehetősen önkényes volt, hiszen bármely más számpár, amelyre

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{3}{5} \qquad \textbf{(5-3)}$$

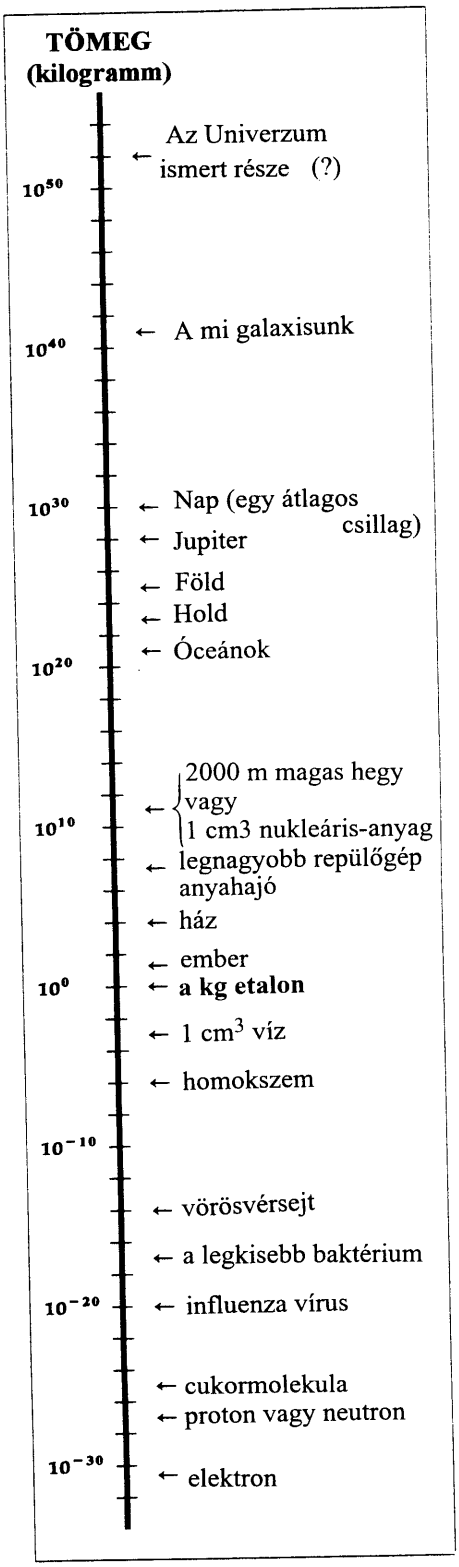
megfelelő lett volna. Nyilvánvaló, hogy ha m_A-t 1-nek választjuk, akkor **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**=3/5 lett volna. Valójában a légpárnás sínen végzett kísérlet alapján bármely kiskocsira egy meghatározott számot írhatunk, ha az A kocsival hozzuk kölcsönhatásba. Érdekes módon ez a szám a testeknek a gyorsulással szembeni ellenállásával kapcsolatos, hiszen minél nagyobb ez a szám, annál kisebb a test gyorsulása. Ezért ezt – a légpárnás sínen végzett kísérlet alapján meghatározott – számértéket a test tehetetlenségének mértékeként kezeljük és a test **tehetetlen tömegének** (vagy egyszerűen **tömegének**) nevezzük.

A tömegegység

A szabványosított tömegegység – a *nemzetközi kilogramm etalon*[2] – egy platina-irídium henger, amelyet a franciaországi Sèvresben őriznek. E henger tömege definíció szerint 1 kilogramm (kg). Így bármely test tömegét empírikusan meghatározhatjuk, ha kölcsönhatásba hozzuk a tömeg etalonnal.

[2] A kilogramm a *gramm* ezerszerese. 1 *gramm* a tömege 1 cm^3 normál légköri nyomású (1 atm), maximális sűrűségű (4°C-os) víznek (19-2 ábra). Sajnos vízből nem készíthető kellő pontossággal tömegetalon.

5-l táblázat
Különböző testek tömegének és a nemzetközileg elfogadott kilogramm etalon tömegének aránya.



(A tömegmérés gyakorlatilag egyszerűbben végezhető el karos mérleggel – ezt a módszert később ismertetjük.)

Mivel a hosszúság és az idő mértékegységét nemzetközileg atomi szabványokkal rögzítették, kívánatosnak látszott a tömegegység atomi mennyiségekkel történő rögzítése is arra az esetre, ha a kilogramm etalon valamilyen szerencsétlenség során megsemmisülne. – Ez kiküszöbölné azt a veszélyt is, ami abból adódhatna, hogy pl. a kozmikus sugárzás következtében a kilogramm etalonból folyamatosan atomok léphetnek ki, ill. atomok rakódhatnak rá. Mindazonáltal a jelenleg rendelkezésre álló mérési eljárásokkal egy makroszkópikus test atomjainak száma nem határozható meg olyan pontosan, mint amilyen pontossággal a tömegek összehasonlíthatók pl. egyenlő karú mérleg segítségével. Így a mindennapos mérettartományban a tömeg mértékegység definíciója az „őskilogramm" maradt. Az 5-l táblázat különböző testek tömegének nagyságrendjét mutatja kilogramm egységben.

Az atom- és magfizikában atomi tömegegységet használunk. Bár az egyes atomok tömege a tömeg etalonnal közvetlenül nem hasonlítható össze, az atomok és molekulák tömege egymással nagyobb pontossággal hasonlítható össze, mint ahogyan a szokásos tömegmérésben lehetséges. Az atomi tömegegység definíciója a következő:

1 *egységes atomi tömegegység (u)*: a 12-es szénizotóp tömegének (mag és 6 elektron) l/12ed része.

$1\ u = 1{,}661 \times 10^{-27}$ kg.

5.4 Az impulzus

Az (5-2) egyenletben megjelenő *tömeg* × *sebesség* szorzat a mechanika egyik legfontosabb mennyisége, amely igen sokféle összefüggésben jelenik meg a tárgy tanulmányozása során. Ezt a mennyiséget **impulzusnak** nevezzük* és **p**-vel jelöljük. A két- vagy háromdimenziós mozgások során (pl. légpárnás asztalon ütköző, sima felületű korongok, vagy térbeli pályán haladó és ütköző atomi részecskék mozgásakor) a kísérleti tapasztalat szerint az impulzust vektorként kell kezelni, így meghatározásához nagyságát és irányát is ismernünk kell. Definíció szerint:

Impulzus $$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (5\text{-}4)$$

Az impulzus SI egysége a kg·m/s. Az *A* és *B* testek kölcsönhatása a testek impulzusvektorainak változásával tárgyalható. Vegyük észre, hogy a kölcsönhatás jellegétől függetlenül, ha a kölcsönható testek kezdetben nyugalomban voltak, akkor a kölcsönhatás során *ellentétes* irányú sebességhez jutnak. Így ha az (5-2) egyenletet *vektoriális* formában írjuk fel, akkor az összefüggésbe egy negatív előjelet is be kell írnunk,

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_B}{dt} \qquad (5\text{-}5)$$

ahol $\mathbf{p}_A = m_A\mathbf{v}_A$ és $\mathbf{p}_B = m_B\mathbf{v}_B$. A későbbiekben természetesen az impulzusról még többet kell beszélnünk.

* egyes hazai tankönyvek a lendület elnevezést is használják (a ford megj.)

5.5. Newton második törvénye

Newton a testek kölcsönhatásáról szerzett tapasztalatokat második törvényében foglalta össze. Ez a törvény az eredő erőt az m tömegű test impulzusának megváltozásával definiálja. Azt, hogy az impulzus megváltozását az *eredő erő* hozza létre, azzal is kiemeljük, hogy az összefüggésbe egy szumma[3] jelet is beírunk.

Newton második törvénye

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad \textbf{(5-6)}$$

Az erő mértékegysége a **newton** (N). Az (5-6) egyenlet mutatja, hogy 1 N erő 1 másodperc alatt 1 kgm/s impulzusváltozást hoz létre. Érzékletes fogalmat alkothatunk az 1 N erő nagyságáról, ha tudjuk, hogy nagyjából akkor fejtünk ki ilyen erőt, ha egy kisebb almát tartunk a kezünkben.

Fejtsük ki a $\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ deriváltat az $m\mathbf{v}$ szorzatfüggvényre vonatkozó szabály szerint! (G függelék, 4. szabály.) Newton II. törvényére a

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \qquad \textbf{(5-7)}$$

összefüggést kapjuk. Amennyiben a vizsgált részecske tömege nem változik $\left(\frac{dm}{dt} = 0\right)$ és mivel $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$, a törvény az

Newton II. törvénye

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \text{(állandó tömeg esetén)} \qquad \textbf{(5-8)}$$

alakot ölti. A második törvény tartalma nagyon gazdag. Az erő fogalma egyezik az erőről alkotott hétköznapi elképzeléseinkkel, amit a tárgyak meglökéséből vagy megrántásából szerzett tapasztalataink adnak. Vegyük észre azonban, hogy erő önmagában nem létezik, erőt mindig egy test fejt ki a másikra.

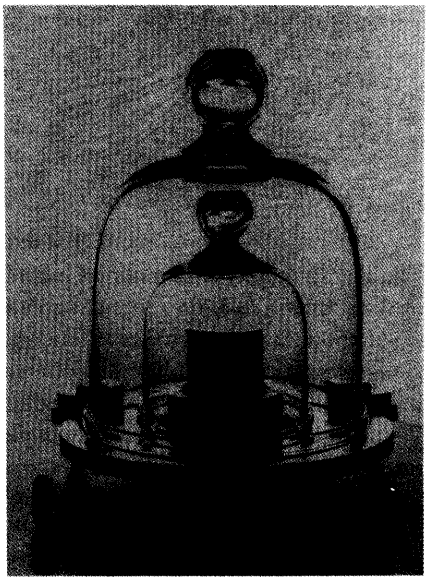
A mechanikában az erők két nagy csoportba sorolhatók: érintkezéskor és érintkezés nélkül fellépő erők. Az **érintkezéskor fellépő (közelható) erők** azok, amelyek létrejöttéhez két vagy több test fizikai közelsége, érintkezése szükséges. Ilyen erőt fejt ki a megfeszített kötél, vagy az összenyomott rugó a hozzá erősített testre. Az érintkezési (közelható) erők másik példája az egymáson csúszó testek vagy csúsztató hatásnak kitett, de nem mozgó testek között fellépő erőhatás. A súrlódási erők párhuzamosak a csúszó felületekkel. Hasonló súrlódási erők hatnak a levegőben vagy folyadékban mozgó testekre is.

A **„nem érintkezési" (távolható) erőkre** az egymástól távoli testek közötti gravitációs erő szolgálhat példaként. Bármely két részecske között az

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Newton-féle gravitációs törvénynek megfelelő erő lép fel, ahol m_1 és m_2 a részecskék tömege, r a távolságuk és G a gravitációs állandó. A gravitációs erő részletesebb leírása a 16. fejezetben található.

A természet további „nem érintkezési" (távolható) erői az elektromos és a mágneses erők, amelyekkel a későbbiek során még részletesen foglalkozunk. Valójában azonban a közelható erők (a rugóerő, a kötélerő, a súrlódási erő, stb.) is eredetük szerint az atomok közötti elektromos erőhatásokra ve-



5-5 ábra
Az USA kilogramm etalonja a Állami Szabványügyi Hivatalban. Ez az eredeti Sèvres-ben őrzött nemzetközi kilogramm etalonról készült huszadik másolat. Pontossága $1:10^8$-hoz.

[3] A görög Σ (szigma) betű a matematikában az összegzés jelzésére szolgál. Itt egy testre ható erők vektoriális összegzésére utal.

zethetők vissza, így mikroszkópikus skálán szintén távolható erőhatások. Ennek ellenére a súrlódási, a rugó, a kötél, stb. erő elnevezést továbbra is használjuk, míg a gravitációs erőt távolható („nem érintkezési") erőnek nevezzük. Fontos azonban, hogy az erőhatások vizsgálatakor minden esetben azonosítsuk, hogy a vizsgált testre melyik külső test fejt ki erőt.

Vajon az erők valódi vektorok? Newton II. törvénye szerint formálisan azok. Az azonban, hogy vektorként definiáltuk az erőt, még nem jelenti szükségszerűen, hogy valóban vektorként is viselkedik. Az erő fizikai fogalmáról csak kísérletekkel dönthetjük el, hogy teljesíti-e a vektorok összegezésére vonatkozó matematikai szabályokat. Kísérletileg kell alátámasztanunk, hogy az erők valóban *vektorként viselkednek.*

Newton szemlélete szerint a második törvény *okságí* kapcsolatot szab meg: a testek gyorsulását az eredő (teljes) erő *határozza meg.* A törvényt azonban természetesen kétféleképpen is használhatjuk. Ha ismerjük egy testre ható erők eredőjét, akkor meghatározhatjuk a test gyorsulását. Megfordítva, ha megfigyeljük, hogy egy test gyorsul, akkor arra *következtethetünk,* hogy a rá ható erők eredője nem zérus. A gyorsulás ismeretében meghatározhatjuk az eredő erő nagyságát és irányát. Leszögezzük azonban, hogy *nem a gyorsulás a testre ható erő oka,* hanem Newton szemlélete szerint éppen megfordítva, a hagyományos ok-okozati kapcsolatnak megfelelően a testre ható erők eredője hozza létre a gyorsulást.

Befejezésül nem hallgathatjuk el, hogy bár a Newton-féle törvények a baseball labdától a galaxisokig helyes leírását adják a tömeg mechanikai viselkedésének, a történetnek még nincs vége! A 41. fejezetben az Einstein féle relativitáselmélet tárgyalásakor megmutatjuk, hogy az elmélet módosításra szorul, ha 3×10^8 m/s-os fénysebesség közelébe eső sebességgel mozgó testekkel foglalkozunk. Szigorúan szólva ez azt jelenti, hogy a Newton-féle mozgástörvények csak közelítések! A megszokott sebességek tartományában azonban az eltérés elhanyagolható. Így a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény a fénysebességnél sokkal kisebb sebességgel mozgó hétköznapi méretű testek mozgásának leírására tökéletesen alkalmas. Kimutatható, hogy a relativisztikus egyenletek a sebesség csökkenésével a Newton-féle törvényre egyszerűsödnek.

5.6 Tömeg és súly

A tehetetlen tömeget a testek tehetetlenségének mértékeként definiáltuk. Elvileg egy test tömegét ismert tömegű másik testtel való kölcsönhatásából határozhatjuk meg. Gyakorlatilag azonban ez az eljárás pl. légpárnás sín segítségével nem mindig kivihető, különösen akkor nem, ha kiterjedt testekről van szó, vagy ha nagyon pontos mérés szükséges.

A gyakorlatban a testek tömege könnyebben határozható meg a rájuk ható gravitációs erő mérésével. E módszer érvényessége abból a fontos tényből következik, hogy *csak a gravitációs erő hatására mozgó minden test ugyanakkora g gyorsulással esik*[4] .

$$g \approx 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

[4] A gravitációs gyorsulás csekély mértékben függ a földrajzi helyzettől és a tengerszint feletti magasságtól. A 0° szélességi körön, a tenger szintjén $g = 9{,}78039$ m/s^2, a 90°-os szélességen pedig $g = 9{,}83217$ m/s^2.

Abból a tényből, hogy egy adott helyen minden test azonos gyorsulással esik, következik, hogy a testekre ható gravitációs erőnek arányosnak kell lennie az adott test tömegével. Jelöljük *g*-vel a szabadesés gyorsulását, *W*-vel pedig a gravitációs erőt. Ekkor Newton második törvényének alkalmazásával azonnal adódik, hogy

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (5\text{-}9)$$
$$W = mg$$

A **W**=m**g*** gravitációs erő meghatározásásra szolgáló mérést nem szükséges a szabadesés körülményei között elvégezni. A $W = mg$ összefüggés a test sebességétől vagy gyorsulásától függetlenül mindig érvényes. Bármely testre ható **W** gravitációs erő meghatározható súlyméréssel, pl. az 5-7 ábrán látható skálával ellátott rugós erőmérő felhasználásával. A rugóra akasztott testre két erő hat, a megfeszített rugó által kifejtett felfelé mutató erő és a Földtől kifejtett lefelé mutató **W** gravitációs erő. Ezen erők vektori összege zérus, ha a test nyugalomban van. Az erőmérő skálája bármely alkalmas erőegységgel kalibrálható (hitelesíthető). Mivel $|\mathbf{F}| = |\mathbf{W}|$, az erőmérő skálájáról éppen a ráakasztott testre ható gravitációs erő nagysága olvasható le. Bár a későbbiek során még finomítjuk a definíciót, egyelőre a testek **súlyát** definíciószerűen a rájuk ható **W** *gravitációs erővel tekintjük egyenlőnek.*

Egy test súlyát (newtonban mérve) úgy kaphatjuk meg, hogy kilogrammokban mért tömegét megszorozzuk *g*-nek az adott helyen m/s^2-ben vett értékével. Az erő, s így a súly dimenziója $\left[M \cdot L / T^2\right]$. Igen fontos megjegyeznünk, hogy a *súly és a tömeg különböző fogalmak.* A súly **W** = m**g** értéke a helytől függően változhat, hiszen g-nek az adott helyen mért értékétől függ. Az a személy, akinek a súlya a Földön 700 N, az csak 120 N-t nyom a Holdon. Ezzel szemben a testek tömege mindenütt ugyanakkora. Az a test, amely a Földön 2 kg tömegű, a Holdon is ugyanilyen tömeggel rendelkezik.

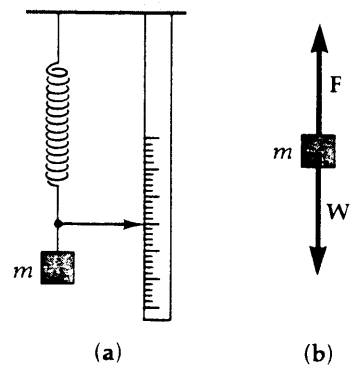


5-6 ábra

Galilei korában az égitestek mozgását értelmező egyik elmélet szerint az égitesteket szárnyas angyalok lökdösik a Nap körül. Ma már furfangosabbak vagyunk. Ahelyett, hogy azt mondanánk, hogy az angyaloknak *tangenciális* erőt kell gyakorolniuk az égitestekre, azt mondjuk, hogy a mozgás irányára merőleges erőt kell kifejteniük. – Az angyal szót pedig a gravitációval helyettesítjük..
(Feynman nyomán „*A fizikai törvények jellege*" Magvető Bp. 1983)

5-2 táblázat **Az SI alap és kiegészítő egységei**

	Mennyiség	Egység neve	Egység jele
Alapegységek	hosszúság	méter	m
	tömeg	kilogram	kg
	idő	másodperc (szekundum)	s
	elektromos áram	amper	A
	hőmérséklet	kelvin	K
	anyagmennyiség	mól	mol
	fényintenzitás	kandella	cd
Kiegészítő egységek	síkszög	radián	rad
	térszög	szteradián	sr



5-7 ábra

a) Súly mérésére skálázott rugós erőmérő. A mutató rögzített skála mentén mozog. b) Az m tömegre ható erők. Az **F** vektor a megfeszített rugó által a testre gyakorolt erő, **W** pedig a testre ható gravitációs erő.

A tömeg és a súly mértékegységei

Jelenleg a tudományos munkákban az **SI**-ként rövidített **Systeme International** mértékegységrendszert használjuk, ami a régebbi MKS (méter, kilogramm, szekundum) rendszer finomított változata. Az SI rendszert éveken át fejlesztették, és nemzetközi szabvánnyá az 1971-es Súly és Mérésügyi Konferencia tette. A rendszer az 5-2 táblázatban felsorolt hét alap és két kiegészítő

* A könyvben – különösen a bevezető fejezetekben – keveredik a gravitációs, súly és a nehézségi erő fogalma . A magyar szakirodalomban a súlyerő jelzésére megszokottabb a *G. (a ford. megj.)*

mennyiségre épül. Minden további mennyiség dimenziója és mértékegysége ezekből az alapmennyiségekből származtatható. Megjegyezzük, hogy az erő az SI rendszerben származtatott mennyiség, dimenziója a *tömeg, hosszúság és idő* alapmennyiségek kombinációjával adható meg.
Az 5-8 ábra egy test tömege és súlya közötti kapcsolatot magyarázza.



5-8 ábra
A test tömege 2 kg. Súlya: 19,6 N.

$$W = mg = (2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 19{,}6\,\text{N}$$

5-1 PÉLDA

Mekkora a 3 kg tömegű test súlya ?

MEGOLDÁS

A 3 kg tömegű test súlya

$$W = mg = (3\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 29{,}4\,\text{N}$$

Az 1 $\frac{kgm}{s^2}$ nagyságú erőt nevezzük 1 newtonnak.

5.7 Newton második törvényének alkalmazása

A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ Newton törvény segítségével meghatározható egy test gyorsulása, ha ismerjük a testre ható erőket. Első lépésként a testre ható erők eredőjét kell meghatároznunk, ami legegyszerűbben úgy tehető meg, hogy a testet gondolatban elválasztjuk környezetétől. A testet képzeletben körülvesszük egy felülettel, majd vektorábrát készítünk arról, hogy milyen erők hatnak ezen felületen *át* a *testre*. Ezt az ábrát **izolációs** vagy **szabad test diagramnak** nevezzük.* Az erők vektori összege adja a testre ható eredő erőt. Az eredő ismeretében a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenlet megoldása már matematikai kérdés.

A következő példákkal a szabad test diagram fontosságára hívjuk fel a figyelmet. *Ennek felvétele során végezzük el ugyanis a probléma fizikai elemzését.* Vegyük észre, hogy minden, a diagramon felvett erő a test körül felvett határfelületen kívül eső tárgytól ered. Az erővektorok felvételekor mindig keressük meg gondolatban, hogy az erőt melyik test fejti ki. Végül felhívjuk a figyelmet a példákban bevezetett új jelölésekre és a feladatmegoldási eljárásokra. A könyv további részében ezeket a jelöléseket és módszereket szisztematikusan alkalmazzuk.

5-2 PÉLDA

Tekintsünk egy elhanyagolható súrlódású vízszintes felületen lévő $m = 2$ kg tömegű testet, amelyet a hozzákötött zsinórral vízszintes irányban 4 N állandó erővel húzzuk (5-9 ábra). Milyen távolságra jut a test 3 s alatt, ha nyugalmi helyzetből indul?

MEGOLDÁS

A 3 s alatt megtett utat a kinematikai összefüggésekből határozhatjuk meg, ha a gyorsulást ismerjük. (Az eredő erő állandó, tehát a gyorsulás is az.) A gyorsulás Newton második törvényéből határozható meg. Mint minden dinamikai problémában, itt is először a vektorábrát raj-

* A hazai szóhasználatnak megfelelően ezt egyszerűen vektorábrának nevezzük.

zoljuk meg a $\Sigma\mathbf{F}$ eredő erő meghatározásához. Foglaljuk bele a testet gondolatban egy felületbe és rajzoljunk meg minden erőt, ami *ezen a felületen keresztül hat a testre*! Célszerű (ha ez lehetséges) az erővektorokat a támadási pontjukból kiindulva felrajzolni. A gravitációs erő esetén a támadási pont legyen a tömegközéppont, ami szimmetrikus testek esetén éppen a test geometriai középpontja. Bejelölve a külső testek által kifejtett erők vektorait, azt találjuk, hogy a testre a következő erők hatnak:

W = a lefelé mutató gravitációs erő
N = a felület által gyakorolt felfelé mutató erő
F = a vízszintes húzóerő

Az **N** jelölés a felületek által a rájuk helyezett testekre kifejtett normális irányú (felületre merőleges) erőt jelez. Bár ez az erő általában a teljes érintkező felület mentén oszlik el, most egyetlen, a felület középpontja közelében koncentrált támadáspontú erővel helyettesítjük. A következő lépésben a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletet két, egymásra merőleges összetevővel írjuk fel. Mivel a komponensekre vonatkozó egyenletek egydimenziósak, a $\Sigma F_x = ma_x$ és $\Sigma F_y = ma_y$ skalár egyenleteket írjuk fel, amelyekben az irányokat pozitív és negatív előjellel vesszük figyelembe. Minthogy előre tudjuk azt, hogy a test vízszintesen és az (5-9) ábra szerint jobb felé gyorsul, ezt az irányt választjuk az egyik koordinátatengely irányául. A koordinátarendszernek ezt a választását mutatja az (5-9c) vektorábrán a kicsiny, *x, y*-nal jelzett tengelykereszt.

Függőleges összetevő

A felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$N + (-W) = m(0)$$

$$N = W$$

Ez az eredmény a feladat megoldásához nem szükséges

Vízszintes összetevő

A jobb felé mutató irányt választjuk pozitívnak.

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$F = ma_x$$

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{(4\,\mathrm{N})}{(2\,\mathrm{kg})} = 2{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Végül a kinetikai egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3\,\mathrm{s})^2$$

$$= 9{,}00\,\mathrm{m}$$

(Az eredmény reális.)

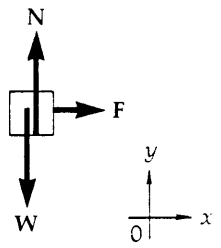
Helyettesítsük be a képletekbe a numerikus értékek betűjeleit. Az olyan esetekben, amikor az erőösszetevő negatív irányba mutat (pl. most a gravitációs erő esetén), a betűjel elé negatív előjelet teszünk ($-W$). Ez természetesen nem sérti azt a szabályt, hogy a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ általános képletben soha nem változtatunk az előjelen. A számértékek (vagy a számértékeket reprezentáló betűjelek) behelyettesítésekor azonban a megfelelő előjeleket is figyelembe kell venni. Az összetevő egyenletekben tehát előjeles skalármennyiségeket használunk.



a) Súrlódásmentes síkon F állandó erővel húzott test.

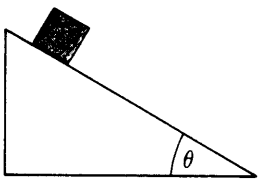


b) A szaggatott vonal az izolációs határt, azaz egy képzeletbeli felületet jelöl, amivel a testet elválasztjuk környezetétől.

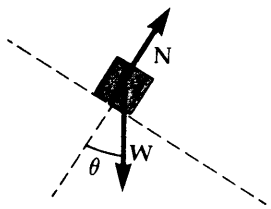


c) A vektorábra. A kicsiny tengelykereszt a választott pozitív irányokat jelzi.

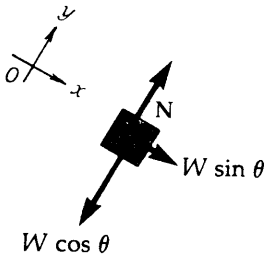
5-9 ábra
Az 5-2 példához



a) Sima (elhanyagolható súrlódású) lejtőn lecsúszó test



b) A szabad test diagram



c) A vektorábra az egymásra merőleges összetevőkre bontott erőkkel. A kicsiny tengelykereszt a pozitív irányokat jelöli.

5-10 ábra
Az 5-3 példához

5-3 PÉLDA

A vízszintessel 30°-os szöget alkotó sima (súrlódásmentes) lejtőn 2 kg tömegű test csúszik le (5-10/a ábra). Mennyi idő alatt tesz meg 4 métert?

MEGOLDÁS

A gyorsulás ismeretében a 4 m-es út megtételéhez szükséges idő a kinematikai egyenletekből határozható meg. Mint mindig, most is a vektorábra felrajzolásával kezdjük (5-10/b ábra). A testre két erő hat:

W = a lefelé mutató gravitációs erő,
N = a felület által kifejtett felfelé mutató, a felületre merőleges erő.

A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ vektoregyenletet egymásra merőleges komponensek alakjában kívánjuk felírni. Érdemes azonban kihasználni azt a tényt, hogy a csúszó test a lejtővel párhuzamos irányban gyorsul, s a komponensekre bontáskor célszerű ezt az irányt választani az egyik koordináta irányaként. Az 5-10/c vektorábra az erőösszetevőket mutatja. A kicsiny tengelykereszt a koordinátarendszer pozitív irányának megváltozását jelöli.

Azért rajzoltunk két vektorábrát, hogy elkerülhessük az erővektorok és komponenseik egyetlen diagramra való berajzolását. Ez ugyanis az erők megduplázásához vezethetne, hiszen az ábrán minden erő lényegében kétszer szerepelne.

A felülettel párhuzamos összetevő

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$(W\sin\theta) = ma_x$$

Elvégezve a $W = mg$ behelyettesítést, az a_x gyorsulás a következőképpen írható fel:

$$a_x = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$$
$$a_x = \left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\sin 30^0) = 4{,}90\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A négy méteres út megtételéhez szükséges idő a kinematikai egyenletekből számítható ki

$$x = x_0 + (v_x)_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

t^2 kifejezése után elvégezve a gyökvonást:

A felületre merőleges összetevő

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$(N - W\cos\theta) = ma_y$$

Elvégezve a $W = mg$ behelyettesítést, az N összetevő a következőképpen fejezhető ki:

$$N = ma_y + mg\cos\theta$$
$$N = 0 + (2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\cos 30°)$$
$$N = 0 + (2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}867)$$
$$N = 16{,}97\ N$$

Ez az eredmény a megoldáshoz nem szükséges. Azt mutatja azonban, hogy a felület által kifejtett normális irányú erő kisebb, mint a test súlya.

$$t^2 = (x - x_0 - v_{x0}t)\left(\frac{2}{a_x}\right)$$

$$t^2 = (4\,\text{m} - 0 - 0)\left(\frac{2}{4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)$$

$$= 1{,}63\ \text{s}^2$$

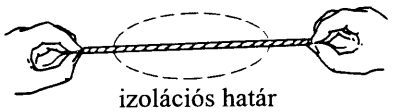
$$t = \pm 1{,}28\ \text{s}$$

A negatív gyöknek nincs értelme, így a feladat megoldása

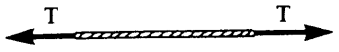
$$t = 1{,}28\ \text{s}$$

5.8 Húzó- és nyomóerő

Az erő közvetítésére gyakran kötelek és huzalok szolgálnak. Amennyiben kifejezetten nem jelöljük, a huzalok és kötelek tömege elhanyagolható, s így a rájuk ható gravitációs erőtől is eltekinthetünk. Foglalkozzunk most olyan kötéllel, amelyre két végén az 5-11 ábrán látható módon ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erő hat. Jelöljük az erő nagyságát T-vel. Ekkor azt mondjuk, hogy a kötelet **feszítő erő** T. A T erő a kötél mentén mindenütt ugyanakkora. Mikroszkópikusan ez úgy magyarázható, hogy a kötél szomszédos atomjainak távolsága egy kissé megnő, s emiatt a szomszédos atomok között vonzóerő lép fel. Az 5-11/b ábra a kötél kicsiny darabjának vektorábráját mutatja. A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ Newton törvényt erre a kötéldarabkára alkalmazva a $T_1 - T_2 = ma$ egyenlethez jutunk, ahol T_1 és T_2 a kötéldarab két végén ható feszítőerő, m pedig a kötéldarab tömege. Feltételezzük, hogy a kötél



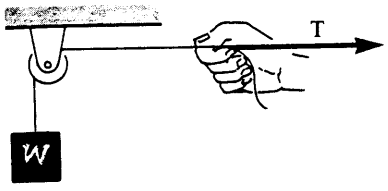
a) A két végén húzott fonal minden pontjában T húzóerő ébred.



b) Vektorábra a fonalnak az izolációs határon belül fekvő részére.



d) A fonalon függő test vektorábrája.

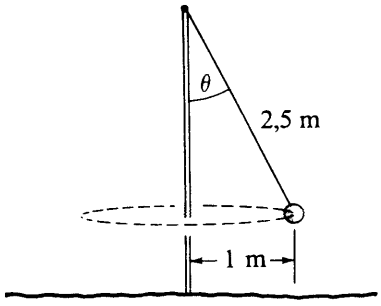


c) A csigán átvetett fonal átviszi a T húzóerőt a testre.

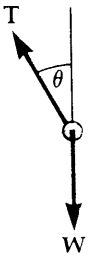


e) **F** nyomóerő hatása alatt álló merev rúd.

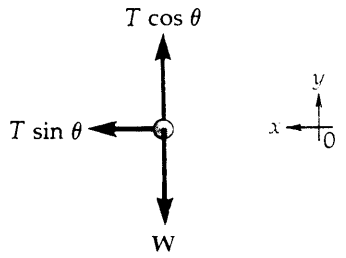
5-11 ábra
Különböző testekre ható húzó- és nyomóerők.



a)



b) A vektorábra.



c) Vektorábra az egymásra merőleges összetevőkre bontott erőkkel. A kicsiny tengelykereszt a választott pozitív irányokat jelzi.

5-12 ábra
Az 5-4 példához.

könnyű[6], azaz tömege elhanyagolható. Így $T_1 = T_2$, függetlenül attól, hogy mekkora a kötél gyorsulása. Teljesen mindegy tehát, hogy gondolatban hol választjuk ki a kötél egy kicsiny darabkáját, s határoljuk körül egy felülettel. A kiválasztott kötélrész mindkét végén ugyanakkora T feszítőerő hat. A feszítőerő nagysága akkor sem változik, ha a kötelet csigára helyezzük. Az erő iránya azonban természetesen más lesz. A merev pálcák vagy rudak a **húzóerő** mellett **nyomóerő** átvitelére is alkalmasak. Nyomóerők akkor lépnek fel, ha a rúd két végére az 5-11/c ábrán látható ellentétes irányú és a rúd megrövidítését célzó erőket fejtünk ki. (A merev testekben a húzó- és nyomóerők mellett nyíróerők (lásd 13.11 fejezet) is felléphetnek.)

5-4 PÉLDA

Egy 2,5 m-es kötél végére kötött 2 kg tömegű golyó állandó sebességgel vízszintes síkú, 1 m sugarú körpályán mozog. a) Mekkora erő feszíti a kötelet? b) Mennyi idő alatt tesz meg a golyó egy teljes kört?

MEGOLDÁS

a) Az első lépés ismét a vektorábra felrajzolása. Az egyszerűség kedvéért abban a pillanatban rajzoltuk meg a golyó helyzetét, amikor éppen a papír síkjában jobb oldali helyzetben van. A távolságadatok felhasználásával a kötélnek a függőlegessel bezárt θ szöge $\theta = \arcsin \frac{2}{5} = 23{,}6°$. A golyóra csak az 5-12/b ábrán berajzolt két erő hat.

W = a lefelé mutató gravitációs erő
T = a függőlegessel 23,6°-os szöget bezáró kötél húzóereje

Ha az, hogy nem rajzoltunk fel kifelé mutató erőt, érthetetlennek tűnik, megpróbálkozhatunk azzal, hogy olyan testet keresünk, ami a golyót kifelé húzza. Ilyen test azonban nincsen! Minthogy azonban minden erő esetén meg kell találnunk azt a testet, amely az erőt kifejti, ebben a feladatban kifelé mutató erő nem létezhet. *A körmozgással kapcsolatos feladatok megoldásában az egyik legtipikusabb hiba ilyen nem létező, kifelé mutató erő felvétele!*

Következő lépésként vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert és bontsuk az erőket összetevőkre! Gondolkozzunk előre, *s vegyük figyelembe, hogy a golyó gyorsulása a kör középpontja felé mutat* (egyenletes körmozgásról van szó)! Ezért válasszuk ezt az irányt az egyik koordinátatengely pozitív irányának. Ezt főképpen az indokolja, hogy ekkor a gyorsulás másik összetevője zérus, s az eltűnő mennyiségek nagyban könnyítik a feladatmegoldást.

Vízszintes összetevő	**Függőleges összetevő**
$\Sigma F_x = ma_x$	$\Sigma F_y = ma_y$
$T\sin\theta = ma_x$	$T\cos\theta - W = 0$

[6] A fizikai feladatokban használunk néhány „kulcsszót". A „könnyű" azt jelenti, hogy elhanyagolható tömegű. A „sima" *abszolút* simát, azaz súrlódámenteset jelent.

Ebből a_x

$$a_x = \frac{T\sin\theta}{m}.$$

Beírva ide a függőleges összetevők vizsgálatából adódó T értéket (jobb oldali oszlop), azt kapjuk, hogy

$$a_x = \frac{(23{,}83\ \text{N})(\sin 23{,}6°)}{2\ \text{kg}} =$$

$$= 4{,}77\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

T kifejezése után

$$T = \frac{W}{\cos\theta} = \frac{20\ \text{N}}{\cos 23{,}6°}$$

$T = 21{,}83$ N adódik.

b) A kör középpontja felé irányuló a_x centripetális gyorsulást a golyó pálya menti v sebességével és az r pályasugárral is kifejezhetjük: $a_x = v^2/r$. Az egyenletet átrendezve v^2 kifejezhető:

$$v^2 = a_x r = \left(4{,}77\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(1\,\text{m}) = 4{,}77\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2};$$

ahonnan

$$v = 2{,}18\ \text{m/s}.$$

Az egy kör megtételéhez szükséges idő pedig:

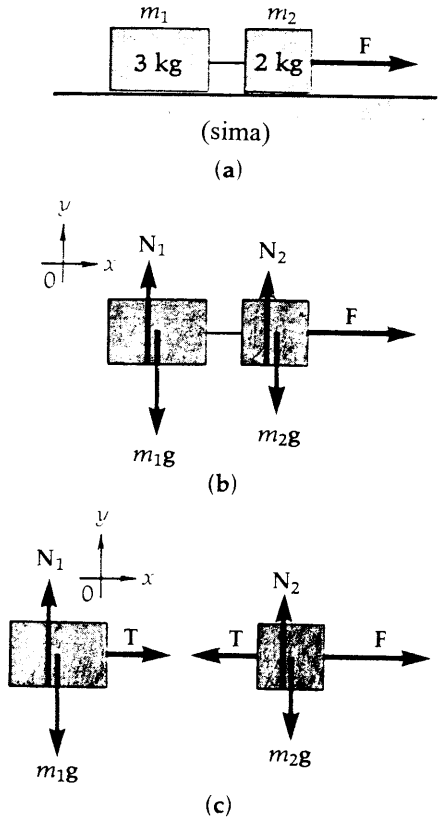
$$\text{idő} = \frac{\text{út}}{\text{sebesség}} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(1\,\text{m})}{2{,}18\,\text{m/s}} = 2{,}88\ \text{s}$$

Newton második törvényének alkalmazási szabályai:

1. A vizsgált testet gondolatban elhatároljuk környezetétől. Vektorábrát készítünk, amelyen valamennyi olyan erőt feltüntetünk, amely az izolációs határon kívül hat a testre.
2. Koordinátarendszert választunk! Ha ismerjük a test gyorsulásának irányát, akkor olyan koordinátarendszert választunk, amelyben az egyik tengely a gyorsulás irányába mutat. (Így a gyorsulás másik összetevője zérus lesz, ami egyszerűsíti a feladat megoldását.) Kicsiny tengelykereszttel jelezzük a választott koordinátarendszer tengelyeinek pozitív irányát.
3. Az erőket komponensekre bontjuk. Új ábrát készítünk, amelyen az erőknek a választott koordinátarendszerbeli összetevőit tüntetjük fel.
4. Megoldjuk az $\Sigma F_x = ma_x$ és $\Sigma F_y = ma_y$ egyenleteket a keresett ismeretlenekre.
5. Ellenőrizzük, hogy az eredmény reális-e!

5-5 PÉLDA

Az 5-13/a ábrán látható sima, vízszintes talajon fekvő testeket könnyű fonallal kötöttük össze. a) Mekkora vízszintes irányú F erő szükséges ahhoz, hogy a testek 2 m/s^2 gyorsulással mozogjanak? b) Határozzuk meg, hogy ennek során mekkora T erő feszíti a fonalat!



5-13 ábra
Az 5-5 példához

MEGOLDÁS

a) Mivel a testek azonos gyorsulással mozognak, gondolatban olyan egyetlen 5 kg-os testként kezelhetjük őket, amelyet közös izolációs határ vesz körül (5-13/b ábra). (A környezettől a két testet egyetlen felülettel választjuk el. Vegyük észre, hogy ekkor a fonalerő nem jelenhet meg az egyenletekben, hiszen a fonal a rendszert kijelölő képzeletbeli felületen belül van, s a vektorábrán csak azokat az erőket kell feltüntetni, amelyek *átmennek* a rendszert burkoló felületen.) Alkalmazzuk Newton második törvényét:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$F = (3\,\text{kg} + 2\,\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 10\ \text{N}$$

b) A kötelet feszítő erő meghatározásához más rendszert kell választanunk. Olyan részrendszereket kell vizsgálnunk, amelyeket burkoló izolációs határon a kötélerő átmegy. Így az 5-13/c ábrának megfelelően vegyük fel a vektorábrát a két testre külön-külön. A 3 kg-os testre vonatkozó mozgásegyenlet egyszerűbb, ezért írjuk fel ezt az egyenletet:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$T = (3\,\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 6{,}00\ \text{N}$$

5-6 PÉLDA

Két, M ill. m tömegű testet az 5-14 ábrán látható módon könnyű fonallal kötöttünk össze. Az alátámasztási felületen a súrlódás elhanyagolható. Határozzuk meg a) a testek gyorsulását, és b) a fonalat feszítő erőt!

MEGOLDÁS

Bár a testek különböző irányban gyorsulnak, az összekötő fonal biztosítja, hogy a gyorsulások nagysága azonos legyen. A vektorábrát mindkét testre felrajzoljuk. Az 5-14/b ábra ezt a két diagramot mutatja. A két test esetén a gyorsulások eltérő irányának megfelelően más-más koordinátarendszert választottunk. A két testre a kötél ugyanakkora T erővel hat. Írjuk fel a mozgásegyenleteket, azaz helyettesítsük be a Newton második törvénybe a konkrét erőket!

M test	**m test**
$\Sigma F_x = ma_x$	$\Sigma F_y = ma_y$
$\underline{\underline{T = Ma}}$	$\underline{\underline{mg - T = ma}}$

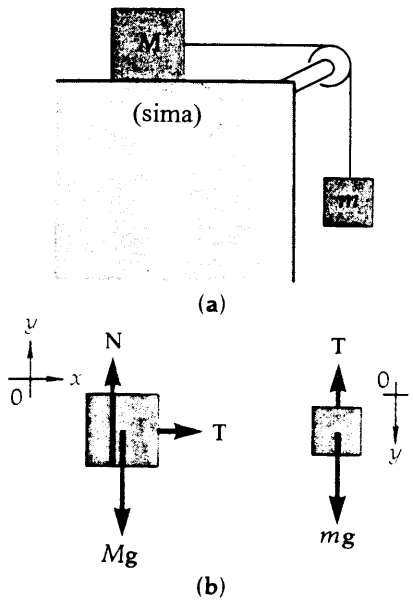
Két egyenletet kaptunk két ismeretlennel (T és a). Összeadva az egyenleteket, T kiesik, és a meghatározható

$$T + mg - T = Ma + ma$$

$$a = \left(\frac{m}{m+M}\right)g$$

A kapott eredményt a bal oldali egyenletbe visszahelyettesítve T feszítőerő a következőképpen írható fel:

$$T = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)g$$



5-14 ábra
Az 5-6 példához

5-7 PÉLDA

Az Atwood gép. Az 5-15 ábrának megfelelően csigán átvetett könnyű fonal két végére különböző $M > m$ tömegeket akasztottunk. A csiga tengelysúrlódása elhanyagolható és mozgás közben a fonal nem csúszik meg a csigán. Az eszköz segítségével, ha mérjük a fonalra akasztott testek gyorsulását, meghatározható a nehézségi gyorsulás. Határozzuk meg a) a testek gyorsulását, és b) a fonalat feszítő erőt!

MEGOLDÁS

a) A testek különböző irányú gyorsulással mozognak, ezért két vektorábrát rajzolunk. Az 5-15/b ábrán a koordinátarendszer tengelyei is a feltételezett gyorsulásnak megfelelően ellentétes irányba mutatnak. Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

M test	**m test**
$\Sigma F_y = ma_y$	$\Sigma F_y = ma_y$
$Mg - T = Ma$	$T - mg = ma$

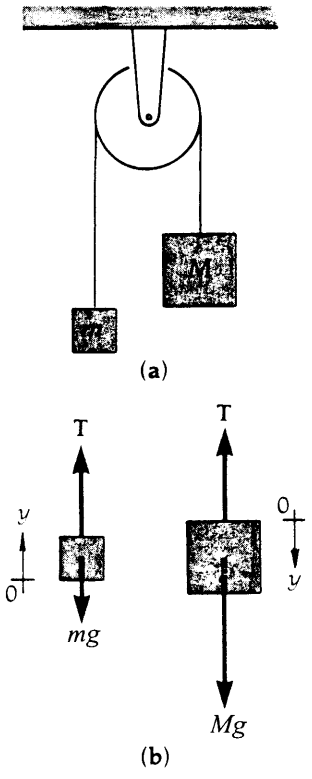
Két egyenletet kaptunk két ismeretlennel. Összeadva az egyenleteket T kiesik és a meghatározható:

$$Mg - T + T - mg = Ma + ma$$
$$(M - m)g = (M + m)a$$
$$a = \left(\frac{M - m}{M + m}\right)g$$

b) Behelyettesítve a értékét, pl. a jobb oldali egyenletbe, T erő a következőképpen írható fel:

$$T - mg = m\left(\frac{M - m}{M + m}\right)g$$
$$T = mg\left(\frac{M - m}{M + m} + 1\right) = \frac{2mMg}{M + m}$$

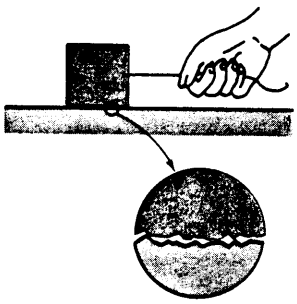
Az eredmény ellenőrzéseként vizsgáljuk meg az $M = m$ esetet! A testek ekkor egyensúlyban vannak, tehát az a gyorsulás zérus kell legyen és $T = Mg = mg$. Az $M = m$ behelyettesítéssel a képletek igazolják ezt a várakozásunkat.



5-15 ábra
Az 5-7 példához. Az Atwood-gép.

5.9 Súrlódás

Ha két test csúszik egymáson, akkor kölcsönösen súrlódási erőt fejtenek ki egymásra. Ez az erő mindig az érintkező felületek közös *érintősíkjába* esik és iránya ellentétes az adott test másik testhez viszonyított relatív sebességének irányával. A súrlódási erőt **f**-fel jelöljük. Vegyük észre, hogy **f** és **N** – a felület által a testre ható *egyetlen* eredő erő tangenciális (érintő menti) és normális (felületre merőleges) komponense. Amint azt az alábbiakban részletesen megindokoljuk, célszerű e két összetevőt a köztük fennálló tapasztalati összefüggés miatt külön vizsgálni.



5-16 ábra
A súrlódás.

A súrlódás bonyolult jelenség és mechanizmusa még nem pontosan ismert[7]. A jelenség pontos mikroszkópikus vizsgálatakor figyelembe kell venni, hogy még a teljesen simára polírozott felületeken is gödröcskék és kiemelkedések vannak, s a csúszás során ezek összeakadnak, ütköznek egymással (5-16 ábra). A súrlódás döntő mértékben azonban nem az érdes felületek összeakadásából, hanem a felületek molekulái között ébredő vonzóerőkből származik. A felületek oxid szennyezései, a polírozás mértéke vagy idegen anyagokból képződő vékony rétegek és sok egyéb változás is erősen befolyásolhatja a súrlódás mértékét. Két fém súrlódása esetén az érintkezési pontok magas hőmérsékletre hevülhetnek és elképzelhető, hogy időszakosan összehegednek. A súrlódási erő ezeknek a hegesztéseknek a feltöréséhez szükséges. Két erősebben különböző anyag esetén a helyzet még bonyolultabb. Mindig igaz azonban, hogy akár elcsúsznak a felületek egymáson, akár nem, súrlódási erő lép fel, ha két testet el akarunk csúsztatni egymáson.

A súrlódásra, egyes, nem pontosan megértett részletei ellenére, a kísérleti tapasztalat szerint érvényesek a következők:

(1) A csúszó súrlódási erő jó közelítéssel *arányos* a csúszó testek között fellépő *normális irányú erővel.*
(2) A csúszó súrlódási erő jó közelítéssel független a testek érintkezési felületének nagyságától.
(3) A csúszó súrlódási erő a centiméter per szekundumos sebességektől a néhány méter per szekundumos sebességig terjedő tartományban *a sebességtől függetlenül közel állandó*[8].

Ebben a könyvben a továbbiakban a „közelítő" jelzőktől eltekintünk, s a fenti kísérleti tapasztalatokat pontos érvényűnek vesszük. Így feltételezzük, hogy a csúszó testekre ható súrlódási erő *független az érintkező felületek nagyságától, a testek sebességétől és arányos a felületek között ható N merőleges nyomóerővel.* Az **f** és **N** közötti arányossági tényező azonban függ a csúszó testek anyagi minőségétől. Hasonló törvények érvényesek az egymáson megtapadó testek esetén is. Ekkor azonban csak a tapadási súrlódási erő maximumára vonatkozóan érvényes a súrlódási erő és a nyomóerő közötti arányosság és az arányossági tényező természetesen eltér a csúszó súrlódási erőt megszabó arányossági tényezőtől. A súrlódási erő két típusára vonatkozóan fennáll[9]:

Csúszó súrlódás (az érintkező felületek elcsúsznak egymáson) $f_k = \mu_k N$ **(5-10)**

Tapadási vagy nyugalmi súrlódás (az érintkező felületek nem csúsznak el egymáson) $f_t \leq \mu_t N$ **(5-11)**

---

[7] Lásd pl. E.Rabinowitz „Ragad és csúszik", *Scientific American*, May 1956. p. 109-18

[8] Itt csak két szilárd test érintkező felületén fellépő súrlódási erővel foglalkozunk. Viszkózus folyadékban mozgó testre, lassú mozgásnál a sebességgel arányos $f = bv$ közegellenállási erő hat. Nagyobb sebesség mellett ez az erő v^n-nel arányos, ahol n 1 és 2 között változhat.

[9] Néhány megjegyzést kell fűznünk a *gördülő súrlódáshoz.* Gördülő súrlódás akkor lép fel, ha egy kerék mozog egy síkon. Mechanizmusa teljesen más, mint a csúszó súrlódásé, s lényegében annak a következménye, hogy tökéletesen merev anyagok nincsenek, s minden test deformálódik, ha egy másik test préselődik hozzá. A gördülő súrlódásról általánosan elfogadott, hogy annak az energiaveszteségnek a következménye, ami azért lép fel, mert a rugalmasan deformált testek a deformáló hatás megszüntével nem azonnal nyerik vissza eredeti alakjukat. A gördülő és csúszó súrlódás közötti különbséget jól érzékelteti, hogy a csúszó súrlódási együttható acélon csúszó acél esetén 0,2, míg az acélon gördülő acélgolyó esetén a megfelelő együttható 0,002 vagy kevesebb. Emiatt a gördülő súrlódást többnyire elhanyagoljuk.

Az f és N közötti μ arányossági tényezők az anyagi minőségtől függő állandók. Az arányossági tényezőket **súrlódási együtthatónak** nevezzük.

Tegyük fel, hogy egy vízszintes talajon fekvő testet vízszintes irányú erővel próbálunk elmozdítani, de a súrlódás megakadályozza az elcsúszást. Ekkor beszélünk *tapadási súrlódásról.* A tapadási súrlódási erő egy bizonyos határig éppen akkora, mint amekkora erő az egyensúly fenntartásához szükséges. A húzóerőt növelve a tapadási súrlódási erő is nő, míg el nem éri maximális értékét! (Ezt az értéket kapjuk, ha az (5-11) egyenletben az egyenlőségjelet vesszük figyelembe. Amikor végül a test „elszabadul" és csúszni kezd, akkor csúszó súrlódás lép fel. A csúszó súrlódási erő általában kisebb, mint a tapadási, azaz $\mu_k < \mu_t$.

Figyeljük meg! A csúszó súrlódási erő mindig a csúszó felületek *relatív sebességének irányával ellentétes.* A tapadási súrlódási erő szintén a felületekkel párhuzamos, irányát azonban az szabja meg, hogy milyen erő szükséges az egyensúly fenntartásához. A feladatok megoldásakor a vektorábrán a súrlódási erők irányát jól kell megválasztanunk ahhoz, hogy helyes eredményt kaphassunk.

5- 8 PÉLDA

Vízszintes talajon 80 N súlyú test fekszik. A test nyugalomból való elmozdításához 30 N erő szükséges, míg az egyenletes csúszás fenntartásához 20 N is elegendő. Határozzuk meg a tapadási és a csúszási súrlódási együtthatót!

MEGOLDÁS

Mint mindig, most is a vektorábra megrajzolásával kezdjük (5-17 ábra). A diagram a csúszó és a tapadási súrlódás esetének tárgyalására egyaránt alkalmas.

$$f = f_t = \mu_t N \qquad \text{(nyugalmi (tapadási) súrlódás, maximális erő)}$$

és

$$f = f_K = \mu_K N \qquad \text{(csúszó súrlódás)}$$

Megjegyezzük, hogy a tapadási súrlódási erő zérustól 30 N-ig tetszőleges nagyságú lehet, ha azonban a test csúszik, akkor a csúszó súrlódási erő értéke mindig 20 N.

Függőleges erő összetevők

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$(N - W) = 0$$
$$N = W$$
$$N = 80\,\text{N}$$

Ezt az N értéket kell a jobb oldali egyenletbe helyettesíteni.

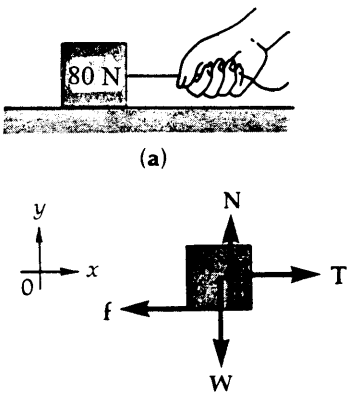
Vízszintes erő összetevők

nyugalmi (tapadási) súrlódás
(maximális súrlódási erő)

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$(T - \mu_t N) = 0$$
$$\mu_t N = T$$
$$\mu_t = \frac{T}{N} = \frac{30\,\text{N}}{80\,\text{N}} = 0{,}375$$

csúszó súrlódás
(állandó sebességű mozgás)

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$(T - \mu_K N) = 0$$
$$\mu_K = \frac{T}{N} = \frac{20\,\text{N}}{80\,\text{N}} = 0{,}25$$



b) A vektorábra.

5-17 ábra
Az 5-8 példához.

5-9 PÉLDA

Egy gyerek a vízszintes talajon fekvő 4 kg tömegű dobozt a vízszintessel 35°-os szöget bezáró kötél segítségével 20 N erővel húzza (5-18 ábra). A csúszási súrlódási együttható értéke 0,20. Mekkora a doboz gyorsulása?

MEGOLDÁS

A szokásos módon készítsük el a vektorábrákat és bontsunk fel minden erőt egymásra merőleges összetevőkre! Mivel a test vízszintes irányban gyorsul, válasszuk ezt az egyik koordinátatengely irányaként.

Függőleges összetevő

$$\Sigma F_y = ma_y$$

Függőleges gyorsulás nincs, így

$$N + T\sin\theta - W = 0$$

$$N = ma_y - T\sin\theta + W$$

$$= m(0) - (20\,\text{N})(0{,}574) +$$

$$+ (4\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$N = 27{,}7\,\text{N}$$

Ezt az értéket helyettesítsük be a vízszintes összetevőre adódó összefüggésbe. Vegyük észre, hogy a N kényszererő nem egyenlő a doboz súlyával!

Vízszintes összetevő

$$\Sigma F_x = ma_x$$

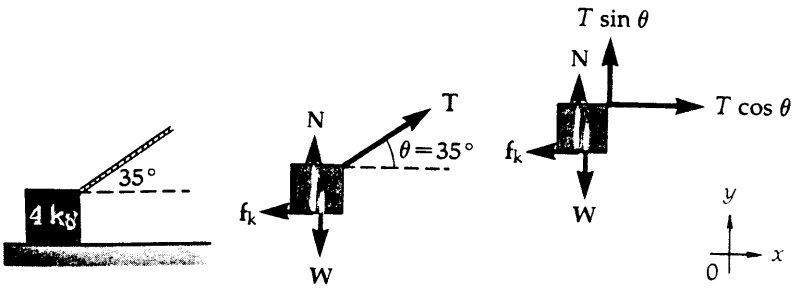
$$T\cos\theta - f_k = ma_x$$

$$T\cos\theta - \mu_k N = ma_x$$

$$a_x = \frac{\left(T\cos\theta - \mu_k N\right)}{m}$$

$$= \frac{(20\,\text{N})(0{,}819) - (0{,}20)(27{,}7\,\text{N})}{4\,\text{kg}}$$

$$a_x = 2{,}71\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



a) b) A vektorábra c) Vektorábra a függőleges és vízszintes erő-komponensekkel. A kicsiny tengelykereszt a pozitív irányokat jelzi.

5-18 ábra
Az 5-9 példához

5-10 PÉLDA

Érdes, vízszintes síkon fekvő, M tömegű testet az 5-19 ábrán látható módon csigán átvetett, könnyű fonalra akasztott, m tömegű testtel mozgatunk. A csiga tömege és tengelysúrlódása elhanyagolható.

A felület és az M tömegű test között a csúszó súrlódási együttható μ_k. Írjuk fel a mozgásegyenleteket az egyes testekre és határozzuk meg a kötélerőt!

MEGOLDÁS

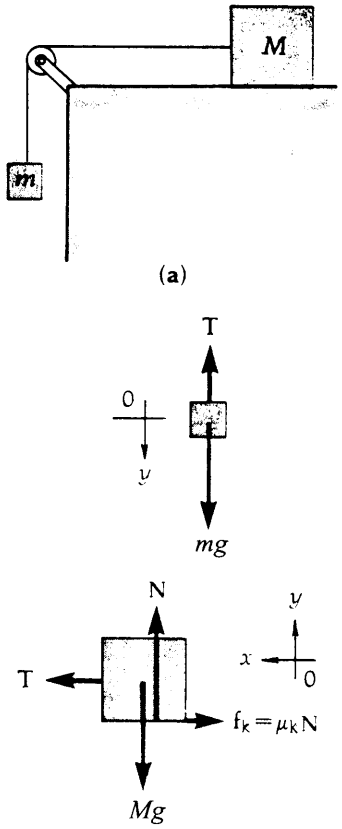
Mivel a két test különböző irányban mozog, az egyes testekre külön-külön felrajzoljuk a vektorábrát, s a koordinátatengelyek pozitív irányát a megfelelő gyorsulás irányában vesszük fel. Mivel a kötél nyújthatatlan, a gyorsulások abszolút értéke egyenlő, mivel a kötél „könnyű", azaz tömege elhanyagolható, a kötélben ébredő feszítőerő mindkét testre ugyanakkora. Newton második törvényét felhasználva a mozgásegyenletek a következők.

Az M tömegű testre

$$F_y = ma_y$$
$$N - Mg = 0$$
$$\underline{\underline{N = Mg}}$$
$$F_x = ma_x$$
$$T - \mu_k N = Ma$$
$$T = Ma + \mu_k N$$
$$T = Ma + \mu_k (Mg)$$

Az m tömegű testre

$$F_y = ma_y$$
$$mg - T = ma$$
$$T = mg - ma$$



b) Vektorábra.

5-19 ábra
Az 5-10 példához.

5-11 PÉLDA

A vízszintes síkban egy 1100 kg tömegű gépkocsi görbevonalú, 50 m sugarú, pályán halad. A gépkocsi 70 m-es úton 10 m/s-ról 15 m/s-ra gyorsul fel. a) Határozzuk meg, hogy mekkora a tapadási súrlódási erő tangenciális komponense, amely a kocsi gyorsulása alatt a kerekekre hat. b) Mekkora a súrlódási erő sugárirányú összetevője abban a pillanatban, amikor a kocsi sebessége éppen 13 m/s? c) Mekkora és milyen irányú a teljes súrlódási erő ebben a pillanatban? d) Mekkora az út és a kerekek közötti tapadási súrlódási együttható minimális értéke, amely mellett a szükséges tapadási súrlódási erő létrejön?

MEGOLDÁS

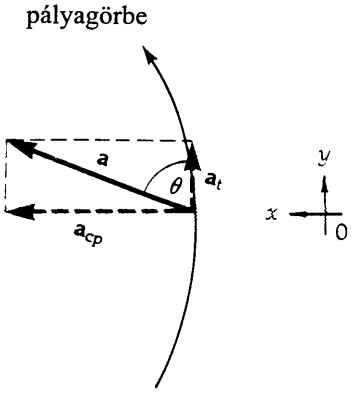
a) A gépkocsi görbült pályán mozog, ezért $a_{cp} = v^2/r$ sugár irányban befelé mutató *centripetális* gyorsulása van. Mivel sebességének nagysága is növekszik, a mozgás irányába mutató *tangenciális* gyorsulással is rendelkezik (5-20 ábra). Használjuk fel a kinematikai egyenleteket a tangenciális gyorsulás meghatározására. Az s út legyen egyenlő a kör alakú pályán megtett távolsággal.

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t s$$

Az egyenletből a_t gyorsulást kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$a_t = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{\left(15\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2(70\,\text{m})} = 0{,}893\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az érintő irányú mozgásegyenlet komponenséből meghatározható a tapadási súrlódásnak a tangenciális gyorsulást létrehozó össze-



5-20 ábra
Az 5-11 példához

tevője. (Bár a gépkocsi mozog, mégis tapadási súrlódás lép fel, mert a guminak az úttal érintkező pontja nem csúszik el az úthoz képest.)

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$f_t = (1100\,\text{kg})\left(0{,}893\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 982\ \text{N}$$

b) A gyorsulás sugár irányban befelé mutató (centripetális) komponense 13 m/s-os sebesség esetén:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(13\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{50\,\text{m}} = 3{,}38\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Így a tapadási súrlódási erő sugár irányban befelé mutató összetevője:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$f_r = ma_{cp} = (1100\,\text{kg})\left(3{,}38\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3718\ \text{N}$$

c) A teljes f_t tapadási súrlódási erő nagysága:

$$f_t = \sqrt{f_r^2 + f_t^2} = \sqrt{(982\,\text{N})^2 + (3718\,\text{N})^2} = 3845\,\text{N}$$

Az f_t súrlódási erő irányát az erő és a mozgás iránya közötti θ szöggel adhatjuk meg.

$$\theta = \text{arc tg}\ \frac{f_r}{f_t} = \text{arc tg}\ \frac{3718\ \text{N}}{982\ \text{N}} = 75{,}2^\circ \quad \text{(lásd 5 - 21 ábra)}$$

d) A μ_t tapadási súrlódási együtthatónak minimumát a mozgásnak az a pillanata szabja meg, amikor a teljes gyorsulás a legnagyobb. Mivel a tangenciális összetevő állandó, a gyorsulás maximális értéke akkor lép fel, amikor a gépkocsi sebessége, s így centripetális gyorsulása a legnagyobb. A pálya mentén a maximális sebesség 15 m/s, azaz

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{225}{50} = 4{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az eredő gyorsulás

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 0{,}893^2} = 4{,}59\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Így a súrlódási erő

$$f_t = ma = 1100 \times 4{,}59 = 5049\ \text{N}$$

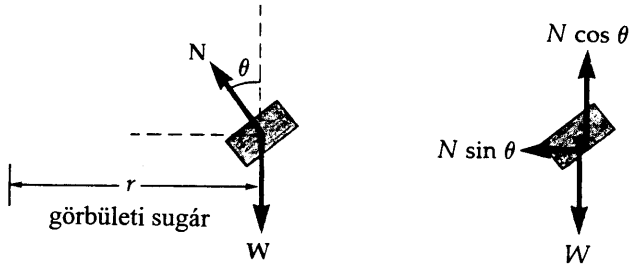
A feltevés szerint ez esetben maximális mértékben kihasználjuk a súrlódási erőt, tehát

$$f_t = \mu_S N$$

amiből

$$(\mu_t)_{\min} = \frac{f_t}{N} = \frac{f_t}{mg} = \frac{5049}{1100\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2} = 0{,}47$$

Megjegyezzük, hogy száraz utakon az autógumik és az úttest közötti súrlódási együttható általában 0,5 és 0,7 érték közé esik.



a) Az autóra ható erők. Egy meghatározott kritikus sebességnél az út csak normális irányú erőt fejt ki a kocsira, az úttest síkjába eső súrlódási erő nem keletkezik.

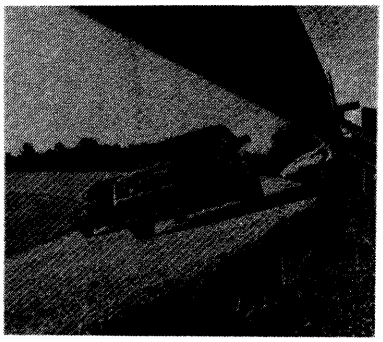
b) Bár a gépkocsi sebessége állandó nagyságú, az autó mégis gyorsul a *pálya görbületi középpontja felé*. Ezért választjuk *ezt* az irányt az erők egymásra merőleges összetevőkre való bontásakor az egyik koordinátatengely irányaként.

5-22 ábra
Kanyarban túlemelt útpályán haladó gépkocsira ható erők. A gépkocsi pontosan olyan sebességgel mozog, hogy az út és a kerekek között ne ébredjen súrlódási erő. A pálya síkjának a vízszintessel bezárt szöge θ.

Kanyarban túlemelt útpályák

Az 5-21 ábrán közismert kép látható, egy gépkocsi állandó sebességgel halad egy kanyarban túlemelt útpályán. Ebben az esetben létezik olyan kritikus sebesség, amikor az út és a kerekek között nem lép fel súrlódási erő, csupán normális irányú erők hatnak (lásd az 5-22/a és b ábrát!). Ezzel a kritikus sebességgel a kocsi még akkor is biztosan vehetné a kanyart, ha a pálya jégsimaságú lenne.

Amennyiben a gépkocsi ennél a sebességnél gyorsabban mozog, akkor az *úttest síkjában,* a kanyar belseje felé mutató súrlódási erő lép fel. Ha a kocsi sebessége kisebb a kritikusnál, akkor az *úttest síkjával párhuzamos* súrlódási erő kifelé mutat. (Mindkét esetben változik az erő normális irányú összetevője is.) Feltéve azonban, hogy a gépkocsi mindkét esetben vízszintes síkú körpályán és állandó nagyságú sebességgel mozog, az erők eredője mindenképpen *a kör középpontja felé mutat,* és az autót $a_x = v^2/r$ gyorsulással mozgatja. A mozgásegyenletek felírásakor az x tengely pozitív irányát ezért célszerű a vízszintes síkban a pálya középpontja felé irányítani. Ebben az esetben a gépkocsinak y irányú gyorsulása nem lesz, azaz $\Sigma F_y = 0$. (A zérusok csodálatosan egyszerűsítik a feladatmegoldást!) Amennyiben lehetséges, mindig olyan koordinátarendszert vegyünk fel, amelynek valamelyik tengelye a gyorsulás irányába mutat. Görbevonalú mozgás esetén pedig az egyik tengelyt irányítsuk a pálya adott pontjában sugár irányban befelé, hiszen az ebbe az irányba eső gyorsulásösszetevőről tudjuk, hogy $a_{cp} = v^2 / r$.



5-21 ábra
Útpálya túlemelése egy próbapálya-kanyarban.

5.10 Newton harmadik törvénye

A további érdekes problémák elemzése előtt be kell vezetnünk Newton harmadik törvényét. A törvény bár rendkívül egyszerűen kimondható, mégis amikor először találkozunk vele, zavarbaejtő és kényes állításnak tűnik. Newton – latinból áttett – szavaival fogalmazva: „Minden hatással szemben mindig fellép egy vele egyenlő ellenhatás¡ vagy másként fogalmazva, két test kölcsönhatása során az egyes testekre egyenlő nagyságú és ellentétes irányú hatás lép fel." Korszerűbb terminológiát használva a törvény a következőképpen fogalmazható meg:

Newton III. törvénye

Ha két test (A és B) erőt gyakorol egymásra, akkor az A által B-re kifejtett erő ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú, mint a B által A-ra gyakorolt erő.

Nyilvánvaló, hogy a hatás és ellenhatás szavakat Newton puszta kényelemből használja, hiszen a harmadik törvényben még burkoltan sincs szó a hatás keltéséről vagy elsődlegességéről. Kétségtelen, hogy Newton csak azt kívánta kiemelni, hogy az erők párosával lépnek fel, ezt az összetartozást fejezi ki a hatás-ellenhatás szópár. Az erő szó alkalmazása nem lenne ilyen kifejező, hiszen nem utalna a kiegészítő „ikerpárerő" megjelenésére. Legyünk azonban tisztában azzal, hogy ezek az erők *együtt és egyszerre*, párosával lépnek fel, *ellentétes irányban hatnak* és támadáspontjuk *két különböző testen* van. Ismerjük fel, hogy az erők bármelyikét nevezhetnénk akciónak (hatás) és a másikat reakcióerőnek (ellenhatás), *a két erő együtt lép fel és teljesen egyenértékű*. Ezzel kapcsolatban félreértés adódhat pl. akkor, ha egy személy nyomóerőt fejt ki egy falra. Ekkor úgy tűnik, mintha a személy okozná az erőt, s a fal visszahatna. Természetesen abban az értelemben ez igaz is, hogy valóban a személy dönti el, hogy kifejt-e erőt a falra. Alapvetően azonban a kölcsönhatás a személy és a fal között atomok közötti taszítóerőkön keresztül érvényesül. Ha két atomot szorosan egymás közelébe hozunk, akkor a *kölcsönös taszítóerő egyidejűleg keletkezik*. Ez az alapvető kölcsönhatás!

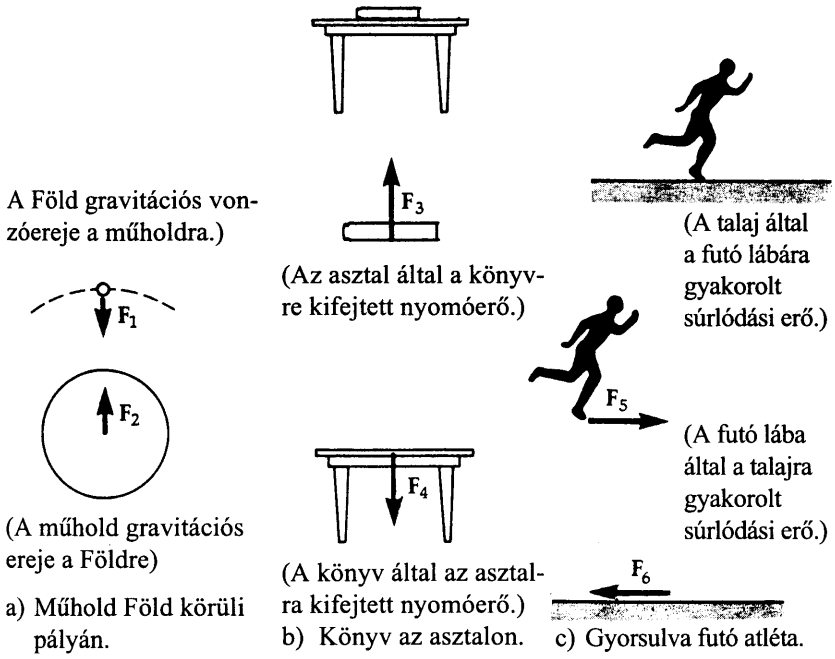
Newton harmadik törvényének következő alapvető sajátossága az, hogy *a két erő sohasem támad ugyanazon a testen, mindig két különböző testre hat*. Az erő-ellenerő pár sohasem egyensúlyozhatja ki egymást, hiszen két különböző testen van a támadáspontja. A harmadik törvény *két különböző testen* ható erőkre, a második *egyetlen testre* vonatkozik. A harmadik törvénnyel kapcsolatos legtöbb félreértés abból származik, hogy erről megfeledkezünk. Végül tartsuk mindig szem előtt azt is, hogy a harmadik törvény az erőkről állít valamit, de semmit sem szól a testek mozgásáról vagy gyorsulásáról. Ez utóbbiról a $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvénnyel szerezhetünk információt.

Az 5-23 ábra néhány erő-ellenerő párt mutat. Ezek az erők könnyen azonosíthatók, ha az erőt jellemző két szót felcseréljük. Például a *könyv* által az *asztalra* és az *asztaltól* a *könyvre* kifejtett erők erő-ellenerő párok.

Ha $\mathbf{F}_{AB}$ felöli az *A* test által a *B* testre ható erőt, akkor Newton harmadik törvénye vektoriálisan az

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \qquad \textbf{(5-12)}$$

alakban fejezhető ki. Ez a matematikai összefüggés igen egyszerűnek tűnik, mégis sokan nehezen értik meg. Ennek egyik oka az, hogy a „józan észen" alapuló magyarázatok a harmadik törvénnyel kapcsolatban gyakran tévesek. Foglalkozzunk például a „kötélhúzó" játékban egymás kezét húzó gyerekekkel (5-24 ábra)! A szokásos magyarázat szerint a győztes azért nyer, mert erősebben húzza a vesztest, mint az őt. Ez teljesen hibás magyarázat! Newton harmadik törvénye szerint az *A* versenyző *minden pillanatban pontosan* akkora húzóerőt fejt ki mint *B*, *függetlenül attól, hogy ki győz*. A harmadik törvény kimondja, hogy lehetetlen az, hogy az *A* test nagyobb (vagy kisebb) erőt fejtsen ki egy másik *B* testre, mint amekkorát ugyanakkor *B* kifejt *A*-ra. Bármely két test kölcsönhatása során az erők párosával lépnek fel és minden esetben és minden pillanatban pontosan egyenlő nagyságúak. Ez attól függetlenül igaz, hogy a testek nyugalomban vannak, egyenletesen mozognak, vagy gyorsulnak.



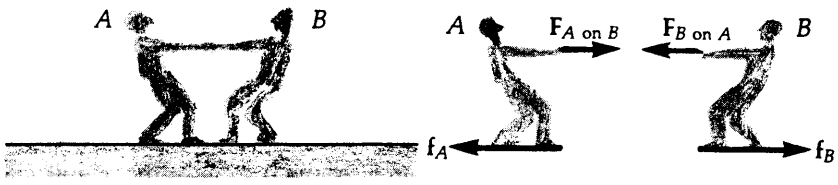
5-23 ábra

Erő-ellenerő párok Newton harmadik törvénye szerint. Az erő és ellenerő nagysága mindig azonos, iránya ellentétes és támadáspontja különböző testen van. A b) példában hétköznapi nyelven azt mondanánk, hogy az asztalra ható F_4 erő a „könyv súlya" – az eddigiekben azonban elköteleztük magunkat, hogy a könyv súlyának definíció szerint a könyvre ható gravitációs erőt (amit az ábra nem is mutat) nevezzük* – ez pedig a *könyvre* hat. Az F_3 és F_4 erők azért ébrednek, mert az asztal nem engedi leesni a könyvet. A gravitációs erő lefelé húzza a könyvet, az asztal enyhén deformálódik és a könyvre ható gravitációs erőt kiegyensúlyozó felfelé mutató erőt fejt ki a *könyvre*. Mind F_3 mind F_4 közelható, az érintkezés során fellépő, a két test közel kerülő atomjai és elektronjai közötti elektromos taszítóerő.

Hogyan nyerheti meg valamelyik gyerek a kötélhúzó versenyt, ha mindig egyenlő erővel húzzák egymást? A választ Newton *második*, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvénye adja. A testek gyorsulását a rájuk ható eredő erő szabja meg. A kötélhúzó játék során is az *adott személyre* ható erők határozzák meg, hogy a személy nyugalomban marad vagy gyorsul valamilyen irányba, s a gyerekekre nemcsak az ellenfél fejt ki erőt! Biztosan fellép még a súrlódási együtthatótól és a talajra kifejtett nyomóerőtől is függő súrlódási erő is.

A fenti példa megoldással szolgál a régi találós kérdésre is: „Ha a ló ugyanakkora erővel húzza a kocsit, mint amekkorával a kocsi a lovat, akkor mégis miért mindig a ló húzza el a kocsit?" A válasz: a kocsi mozgását *csak a **kocsira** ható erők* szabják meg. Az a tény, hogy két különböző testre ható két erő éppen egyenlő egymással, nincs befolyással arra, hogy a kocsi (vagy a ló) hogyan gyorsul.

Befejező példaként foglalkozzunk az út által egy gyorsuló autó kerekére ható súrlódási erővel. Amint a motor gyorsabban akarja forgatni a kereket, a kerék hátrafelé löki a talajt, ezzel egyidejűleg Newton harmadik törvényének értelmében a talaj is előre nyomja a kereket, s ez az erő gyorsítja a gépko-



5-24 ábra

Kötélhúzás
(A függőleges erőket nem jelöltük.)

* A magyar tankönyvirodalomban szokásosabb a könyv által az asztalra kifejtett kényszererőt súlynak nevezni (a ford. megj.)

csit[10]. Ez általában is igaz, míg autózunk, az *út* löki, gyorsítja különböző irányba a gépkocsit. Hasonló módon a vonatot az acél *sínek* által kifejtett erő viszi előre. A futókat pedig a *talaj* által a cipőtalpukra gyakorolt erő gyorsítja.

Miért van szükségünk a harmadik törvényre, hiszen önmagában semmit sem mond a testek mozgásáról? Figyelembe kell vennünk azonban következményeit, mert gyakran alkalmasak arra, hogy ismeretlen erőket azonosítsunk. (Felismerjük pl., hogy az adott erő egy erő-ellenerő pár egyik tagja.) Ugyanakkor a harmadik törvény szerves része az erőkről szóló Newton-féle törvényrendszernek, és az erő-ellenerő párok megállapításán keresztül segít a $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény alkalmazásához szükséges eredő erő meghatározásában.

5-12 PÉLDA

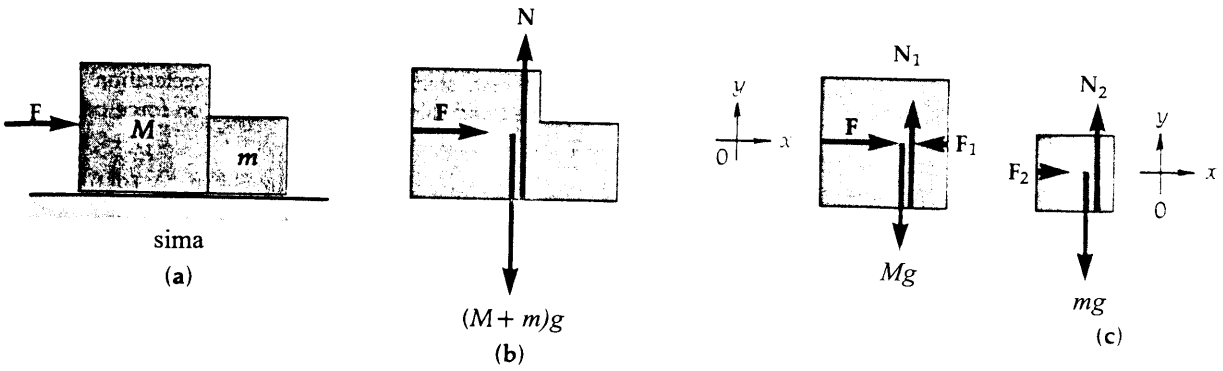
Az 5-25 ábra két, sima, vízszintes síkon fekvő, egymással érintkező testet mutat. Az M tömegű testet F erővel toljuk. Határozzuk meg a) a testek gyorsulását, b) a két test között fellépő erőt!

MEGOLDÁS

a) A gyorsulás meghatározásához tekintsük a két testet egyetlen $M+m$ tömegű testnek, amint azt az 5-25/b vektorábra mutatja. Felírva Newton II. törvényét és kifejezve belőle az a gyorsulást:

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$F = (M+m)a$$
$$a = \frac{F}{M+m}$$

b) A két test közötti erőhatás meghatározásához külön-külön kell kezelnünk a két testet. Az 5-25/c ábra az M és m tömegű test vektorábráját mutatja. Az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erők erő-ellenerő párt alkotnak, nagyságuk egyenlő és két különböző testre hatnak. Newton II. törvényét az m tömegű testre alkalmazva:



5-25 ábra
Az 5-12 példához.

[10] Bonyolultabb a helyzet, amikor egy autó vízszintes útról fordul be egy mellékútra. Meg tudja magyarázni az olvasó, hogy az első kerekek elfordításának hatására miért fejt ki az út olyan *oldalirányú* (sugár irányban befelé mutató) erőt az autóra, ami éppen a bekanyarodáshoz szükséges centripetális erőt szolgáltatja?

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$F_2 = \left(\frac{m}{M+m}\right)F$$

A válasz „értelmes", hiszen $M = m$ esetén az m tömegű test gyorsításához szükséges F_2 erő éppen fele akkora lenne, mint a két (2 m) testet együtt ugyanezzel a gyorsulással mozgató F erő.

5-13 PÉLDA

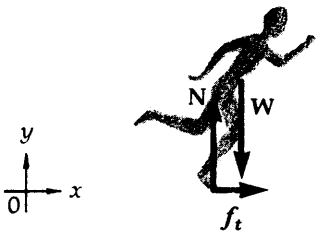
Nyugalomból induló 70 kg-os férfi 2 m/s^2 gyorsulással kezd futni. Elemezzük a ható erőket, és határozzuk meg a férfira ható tapadási (nyugalmi) súrlódási erőt is!

MEGOLDÁS

Az 5-26 vektorábrán bejelöltük az $\mathbf{f}_t$ tapadási súrlódási erő irányát. A férfi – ismerve Newton harmadik törvényét – úgy hozza működésbe ezt az előre mutató erőt, hogy lábával *hátrafelé* löki a talajt. A hátrafelé lökő erővel egyenlő és ellentétes irányú tapadási súrlódási erő adja a vízszintes irányú eredő erőt, s gyorsítja a férfit. Gondoljuk meg, hogy a futót *nem* a lábával a *földre* kifejtett hátrafelé mutató erő gyorsítja, hanem a *föld* által kifejtett előre mutató erő!

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$f_t = ma = (70\,\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 140\ \text{N}$$



5-26 ábra
Az 5-13 példához.

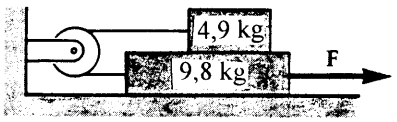
A fenti példa ellentmond a szokásos tévhitnek is, amely szerint; „a súrlódás mindig akadályozza a mozgást". A valóság sokkal bonyolultabb ennél. A súrlódási erő iránya mindig az érintkező felületek relatív sebességének irányával ellentétes. (Tapadó súrlódás esetén pedig a megcsúszáskor létrejövő relatív mozgás irányával.) A példában bár maga a futó előre mozogna, lába a talajhoz képest *hátrafelé* csúszna meg. Így esetünkben a föld által kifejtett tapadási súrlódási erő ahelyett, hogy „akadályozná a mozgást", éppen az *előre* mutató erőt szolgáltatja és gyorsítja a futót.

5-14 PÉLDA

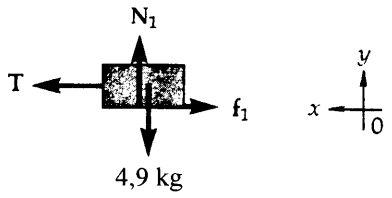
Tekintsük az 5-27 a ábrán látható rendszert! a) Határozzuk meg, hogy mekkora **F** erővel lehetne az alsó testet 2 m/s^2 gyorsulással jobb felé mozgatni. b) Határozzuk meg, hogy mekkora erő feszítené ekkor a két testet összekötő könnyű kötelet. A csiga tömege és tengelysúrlódása elhanyagolható, az egymáson csúszó síkokon a csúszási súrlódási együttható mindenütt $\mu_k = 0{,}2$ ($g = 10\ \text{m/s}^2$).

MEGOLDÁS

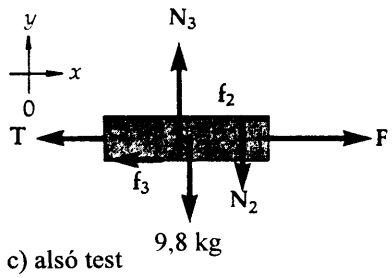
A két test különböző irányban gyorsul, tehát két vektorábrát készítünk (5-27b és c ábra). A pozitív irányt mindkét esetben az adott test gyorsulásának irányában vettük fel. Az f_1,f_2 erő-ellenerő pár nagysága egyenlő, iránya ellentétes és támadáspontja különböző testen van. *Le-*



(a)



b) felső test



c) alsó test

5-27 ábra
Az 5-14 példához

gyünk biztosak abban, hogy megértettük azt, hogy miért az adott irányban vettük fel ezeket az erőket! (Segíthet ebben, ha összedörzsöljük két kezünket és meggondoljuk, hogy milyen irányú súrlódási erőt fejt ki egyik a másikra.) Vegyük észre, hogy N_1 és N_2 is erő-ellenerő párt alkot! Függőleges irányban a testek egyensúlyban vannak, így

Felső test	**Alsó test**
$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma F_y = 0$
$N_1 = 98\ \text{N}$	$N_3 = N_2 + 98\ \text{N}$
Newton harmadik törvénye szerint $N_1 = N_2 = 98\ \text{N}$. Ezt az értéket helyettesítjük a jobboldali egyenletbe	$N_3 = 49\ \text{N} + 98\ \text{N} = 147\ \text{N}$
$f_1 = \mu_k N_1 = 0{,}2 \times 49\ \text{N} = 9{,}8\ \text{N}$	$f_2 = \mu_k N_2 = 0{,}2 \times 147\ \text{N} = 29{,}4\ \text{N}$

A vízszintes erők

$\Sigma F_x = ma_x$	$\Sigma F_x = ma_x$
$T - f_1 = ma_x$	$F - T - f_2 - f_3 = ma_x$
$T = ma_x + f_1$	$F = ma_x + T + f_2 + f_3$
$T = 4{,}9\ \text{kg} \times 2\ \text{m/s}^2 + 9{,}8\ \text{N}$	$F = 9{,}8\ \text{kg} \times 2\ \text{m/s}^2 +$
$T = 19{,}6\ \text{N}$	$+ 19{,}6\ \text{N} + 9{,}8\ \text{N} + 29{,}4\ \text{N}$
Ezt helyettesítjük be a jobb oldali egyenletbe.	$F = 78{,}4\ \text{N}$

Összefoglalás

A Newton-féle három mozgástörvény:

(1) Minden test mindaddig megtartja egyenesvonalú, egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, míg más test ennek megváltoztatására nem készteti.

(2) A testre ható erők eredője megváltoztatja a test impulzusát. Ha a test tömege állandó, akkor $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

(3) Ha az A és B test erőt fejt ki egymásra, akkor az A test által B testre kifejtett erő nagysága ugyanakkora, iránya pedig ellentétes a B által A-ra kifejtett erővel.

A $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletben szereplő mennyiségek SI-mértékegységei a következők:

F	newton (N)
m	kilogramm (kg)
a	$\frac{\text{méter}}{\text{szekundum}^2}$ $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

A $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény alkalmazásának kulcsa a vektorábra megrajzolása, amelyen az adott test körül rajzolt izolációs határon *keresztül* kívülről *ható* erőket tüntetjük fel. A vektorábra alapján Newton II. törvényének bal oldala írható fel.

Az erők felismerése, irányuk kijelölése igényli a legtöbb „fizikai gondolatot" a feladatok megoldásában. Amennyiben szükséges, akkor a vektorábrát megfelelően választott koordinátairányokban összetevőkre bontott erőkkel is érdemes felrajzolni. Ha pl. ismerjük egy test gyorsulásának irányát, akkor az egyik koordinátatengelyt érdemes ebben az irányban felvenni. Görbevonalú pálya esetén az egyik tengely mutasson sugár irányban befelé! **A jó vektorábra szerepét nem lehet eléggé hangsúlyozni.**

A felületek által kifejtett erők kényelmesen elemezhetők a felületre merőleges (normális) **N** és a felület síkjába eső érintő menti (tangenciális) **f** komponensre bontva. A súrlódási erők két osztályba sorolhatók – amelyekre nézve a *súrlódási együttható* többnyire nem egyenlő ($\mu_k < \mu_t$):

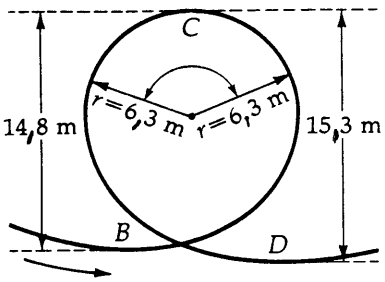
Csúszó súrlódás: $f_k = \mu_k N$
(az érintkező felületek csúsznak egymáson)

Tapadási (nyugalmi) súrlódás: $f_t \leq \mu_t N$
(a felületek nem csúsznak el egymáson)

A tapadási súrlódási erő esetén az egyenlőségjel akkor érvényes, amikor a testek az elcsúszás határán állnak, s így maximális súrlódási erő lép fel. A felületek által a rájuk helyezett testekre kifejtett súrlódási erő iránya ellentétes a testnek a felülethez képest vett relatív sebességével (vagy a lehetséges *relatív megcsúszás* irányával).

Kérdések

1. Szükséges-e, hogy egy test a rá ható erők eredőjének irányában mozogjon?
2. Egy fonalat két rugós mérleg segítségével feszítünk ki és tartunk egyensúlyban. Ekkor mindkét rugó T erőt jelez. A fonalat elvágjuk és egy rugós erőmérőt iktatunk be. T vagy $2T$ erőt jelez ez az erőmérő?
3. Felépíthető olyan mértékrendszer is, amelyben a hosszúság, az idő és az erő az alapmennyiségek? Mi lenne ebben a rendszerben a tömeg dimenziója?
4. Fejtsük ki, hogy milyen előnyökkel járna a tömeg mértékegységének az atomok tömegén alapuló bevezetése – feltéve természetesen, hogy az atomtömeget kellő pontossággal tudnánk mérni.
5. Egy labdát függőlegesen felfelé hajítottunk. Felfelé vagy lefelé mozogna hosszabb ideig a labda, ha a légellenállás hatása nem hanyagolható el?
6. A ferdén elhajított ping-pong labda pályája a légellenállás következtében nem pontosan parabolikus. A pálya mely pontjában (vagy pontjaiban) maximális, ill. minimális a labda sebessége?
7. Egy fonallal (továbbiakban A fonal) a mennyezetre függesztett test aljára az A-val azonos minőségű B fonalat kötöttünk. A B fonal szabadon lóg le a testről. Ha a B fonalat fokozatosan növekvő erővel húzzuk, akkor az A fonal szakad el. Amennyiben azonban B-t hirtelen rántjuk meg, akkor B szakad el. Miért?
8. Liftben elhelyezett mérleg két tányérjában egyenlő és egyensúlyt tartó tömegek vannak. Egyensúlyban marad-e a mérleg, ha a lift gyorsulni kezd?
9. Feltételezhetjük, hogy az esőcseppekre ható közegellenállási erő a cseppek sebességével arányos. Két egyenlő sűrűségű, de különböző sugarú csepp közül melyik tesz szert nagyobb végsebességre?
10. Mi a különbség a tömeg és a súly között?
11. Newton mozgástörvénye alapján értelmezzük a következőket: a) a sószóró működését, b) a helikopter lebegését egy adott pont felett, c) a lökhajtásos repülőgép gyorsulását!
12. A *Nagy Amerikai Óriáskör* hullámvasút (5-28 ábra) óriásköre nem tökéletesen kör alakú. A csúcspont közelében a görbületi sugár kisebb, mint másutt. Magyarázzuk meg ennek a felépítésnek az előnyeit!



a mozgás iránya

5-28 ábra

A Nagy Amerikai Óriáskör. A világ első függőleges síkú hurkot is tartalmazó hullámvasútját a kaliforniai Valenciában a „Hat zászlós varázshegy" nevű vidámparkban 1976-ban helyezték üzembe. Az ábra követi a hurok alakját, amelynek csak felső része pontosan kör alakú.

A következőkben néhány adatot közlünk a hurokban haladó megterhelt kocsi tömegközéppontjának mozgására vonatkozóan.

A hurok felső (kör alakú) részének sugara: 6,3 m

A hurokba érkezés előtti utolsó lejtő kezdőszintjének magassága a B pont felett: 21,6 m

A hullámvasút kocsisebessége a hurok előtti utolsó lejtő kezdőpontjára érkezve: 5,07 m/s

A kocsi sebessége a B pontban: 20,2 m/s
A kocsi sebessége a C pontban: 9,7 m/s
A kocsi sebessége a D pontban: 19,2 m/s

A kocsi és az utasok átlagos tömege: 5440 kg

A kocsi maximális gyorsulása a pályán (nem a hurokban) 4,94 g

Feladatok

5A-1 Adjuk meg SI-egységben a következőket: a) egy 72 kg tömegű emberre ható gravitációs erőt, b) egy 720 N súlyú férfi tömegét, c) egy 20 kg-os testre ható gravitációs erőt, d) egy 200 N súlyú test tömegét, e) mekkora eredő erő gyorsít egy 720 N súlyú testet 9,8 m/s^2 gyorsulással? f) mekkora eredő erő gyorsít egy 20 kg tömegű testet 9,8 m/s^2 gyorsulással?

5A-2 Határozzuk meg: a) Mekkora a tömege a 400 N súlyú szeneszsáknak? b) Mekkora gravitációs erő hat rá? c) Mekkora a súlya egy 26 kg tömegű gyermeknek? d) Mekkora gravitációs erő hat rá? e) Mekkora erővel gyorsíthatnánk a szeneszsákot 9,8 m/s^2 gyorsulással felfelé?

5A-3 Ha egy ember a Földön legfeljebb 48 kg tömegű testet tud felemelni, mekkorát tudna felemelni a Holdon? (Az adatok az L Függelékben találhatóak.)

5B-4 A Klondike-i aranyláz idején egy aranyásó a kanadai Dawson City-ben, ahol $g = 9{,}82288$ m/s^2, 1 kg tömegű aranyrögöt talált és Szingapurba vitte, ahol $g = 9{,}78031$ m/s^2. a) Mennyivel kisebb az arany súlya millinewtonban Szingapurban? c) Mennyit veszít az aranyásó, ha Dawson City helyett Szingapurban adja el aranyát? (Mindkét városban 470 $ -t fizetnek 31 g aranyért.)

5.7 Newton második törvényének alkalmazásai

5A-5 Egy 5 kg tömegű testre 20 N eredő erőt hat. a) Mekkora a test gyorsulása? b) Nyugalomból indulva mekkora úton tesz szert a test 8 m/s sebességre?

5A-6 Görkorcsolyázó gyerek – nyugalomból indulva 12°-os lejtőn gurul le. Mekkora a gyerek sebessége 6 m út megtétele után? Rajzoljuk meg a gyerek vektorábráját!

5A-7 Egy 720 N súlyú férfi 1,25 m/s^2 gyorsulással mozog a $+x$ tengely mentén. a) Mekkora eredő erő hat rá? b) Nyugalomból indulva mennyi idő alatt éri el a 3,75 m/s-os sebességet?

5A-8 Rajzoljuk meg az alábbiakban aláhúzással jelölt testek vektorábráját. Ismételjük meg az ábrákat úgy is, hogy az erőket a problémához illeszkedő merőleges komponensekre bontjuk. Írjuk fel ezekre a komponensekre a mozgásegyenleteket: a) Egy végsebességét már elért (azaz állandó sebességgel eső) lehulló tollpihe. b) Parabolapályájának csúcspontján repülő futball-labda. c) Egy kanyarban (nem túlemelt útpályán) v állandó sebességgel, r sugarú körpályán mozgó teherautóban ülő sofőr. d) A pálya legmagasabb pontján lévő hintázó gyermek. e) A pálya legalacsonyabb pontján lévő hintázó gyermek. f) Függőleges síkú ív csúcspontján haladó hullámvasút kocsi.

5A-9 300 N súlyú kocsit 75 N erővel vízszintes úton vízszintes irányban húzunk. A súrlódás elhanyagolható. a) Milyen távolságra jut el a nyugalomból induló kocsi 5 s alatt? b) Mekkora sebességet ér el?

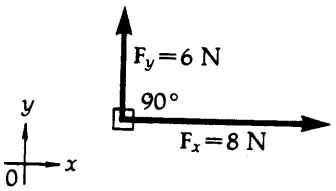
5A-10 Egy 720 N súlyú ember összecsavart lepedőből font függőleges kötélen menekül egy égő ház emeletéről. a) Hogyan tud leereszkedni anélkül, hogy a kötél elszakadna, ha a kötél szakítószilárdsága 650 N? b) Mekkora sebességgel érkezik le, ha az emelet magassága 4,5 m?

5A-11 Az almásláda lejtősre állított, görgős szállítószalagon súrlódásmentesen, nyugalomból indulva 1,2 s alatt 1,8 m-t tesz meg. Mekkora a lejtő hajlásszöge?

5B-12 Határozzuk meg, hogy mekkora eredő erővel gyorsítható fel egy elektron 5 cm-es úton nyugalomból indulva 9×10^5 m/s vízszintes sebességre! Magyarázzuk meg, hogy miért hanyagolható el a számítás során az elektronra ható gravitációs erő? (Az adatokat a K Függelék tartalmazza.)

5A-13 Mekkora minimális gyorsulással csúszhat le biztonságosan egy 300 N súlyú gyerek a 250 N szakítószilárdságú kötélen?

5A-14 Egy 2 kg tömegű test súrlódásmentesen csúszik egy vízszintes síkon. Ezt választjuk a továbbiakban xy síknak. Az 5-29 ábrán látható módon a testre két erő hat, amelyek a $+x$, ill. $+y$ irányba mutatnak. Mekkora és milyen irányú a test gyorsulása?



5-29 ábra
Az 5A-l4 feladathoz.

5B-15 4 kg tömegű testre két erő – a lefelé mutató nehézségi erő és egy állandó, vízszintes irányú erő – hat. A megfigyelések szerint a test nyugalomból indult és 12 m/s^2 gyorsulással mozog. Határozzuk meg, hogy a) mekkora a vízszintes irányú erő? b) milyen irányban gyorsul a test? c) vajon egyenes vonalon vagy parabolán mozog-e a test?

5B-16 A folyadékokban vagy gázokban mozgó testekre ható közegellenállási erő bonyolult módon függ a sebességtől és a test alakjától. A levegőben zuhanó emberi test 15-20 s alatt éri el végsebességét. Fejjel lefelé zuhanva – ekkor a legkisebb a test homlokfelülete – a végsebesség durván 90 m/s. Szétterpesztett, ún. béka pozícióban, amikor az ugró zuhanás közben karjait és lábait a zuhanás irányára merőlegesen kifeszíti, a végsebesség az előzőnek kb. felére csökken. Feltéve, hogy a közegellenállás a sebesség négyzetével arányos, határozzuk meg a) a 85 kg-os személyre zuhanás közben ható maximális közegellenállási erőt, ha a test végsebessége 70 m/s. b) Mekkora erő hat a testre akkor, amikor 40 m/s sebességgel esik?

5B-17 A kérdés a *Nagy Amerikai Óriáskör* hullámvasútra vonatkozik, amelynek adatait az 5-28 ábra mutatja. a) Szükség van-e biztonsági övre az óriáskör csúcspontján való áthaladáskor? Indokoljuk a választ! b) Ha a válasz igen, akkor határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki az öv a pálya csúcspontján egy 70 kg-os személyre. Ha

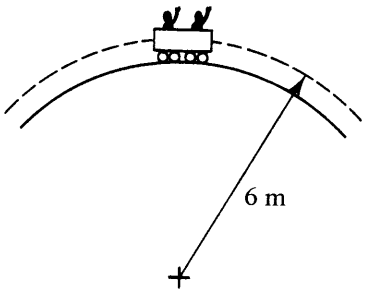
a válasz nem, akkor határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki az ülés az utasra.

5B-18 Tegyük fel, hogy a Nagy Amerikai Óriáskör hullámvasút óriáskörének (5-28 ábra) egyik oldalán egy kocsi 15 m/s pillanatnyi sebességgel halad lefelé a pályának egy 6,3 m görbületi sugarú pontján. A kocsi itt súrlódásmentesen, pusztán a gravitáció hatására mozog. a) Határozzuk meg, hogy az ülés fejt-e ki erőt a kocsiban ülő 70 kg-os utasra, s ha igen, mekkorát? b) Mekkora az utas gyorsulása?

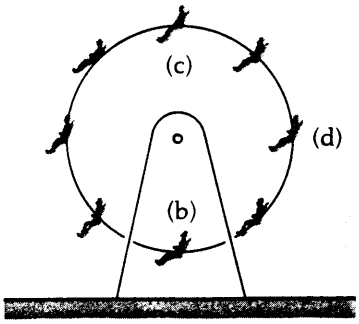
5B-19 Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel 30°-os szöget bezáró lejtőn. a) Mennyi idő alatt ér el 50 m/s-os sebességet? b) Milyen távolságba jut el ezalatt?

5B-20 Egy gépkocsi 18 m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

5B-21 A hullámvasút kocsija állandó, 6 m/s-os sebességgel halad át a pálya 6 m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján (5-30 ábra). A kocsi és az utasok együttes tömege 1350 kg. a) Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton? b) Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen? c) Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



5-30 ábra
Az 5B-21 feladathoz.



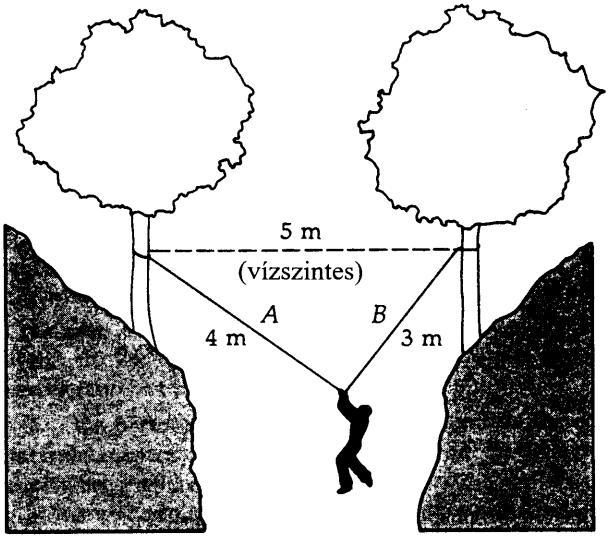
5-31 ábra
Az 5B-22 feladathoz.

5B-22 Az 5-31 ábrán látható 18 m átmérőjű óriáskerék négyet fordul percenként. a) Mekkora az utasok centripetális gyorsulása? Mekkora erőt gyakorol az ülés egy 40 kg-os utasra b) a pálya legmélyebb, c) a legmagasabb pontján? d) Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki az ülés az utasra, amikor félúton van a legfelső és a legalsó helyzet között?

5.8 Húzó- és nyomóerők

5A-23 Hintában ülő 30 kg-os gyereket vízszintes **F** erővel oldalra húzva egyensúlyban tartunk, miközben a hinta kötele 30°-os szögben áll a függőlegeshez képest. a) Mekkora az **F** erő? b) Mekkora erő feszíti ezalatt a hinta kötelét?

5A-24 Két fa között kifeszített kötélen 45 kg tömegű gyerek függeszkedik az 5-32 ábrán látható módon. A két kötélágat a továbbiakban *A*-val, ill. *B*-vel jelöljük. Határozzuk meg a kötélágakban ébredő T_A és T_B erőket! Melyik kötelet feszíti nagyobb erő? (Útmutatás: Készítsünk vektorábrát a kötél azon pontjára vonatkozóan, amelybe a gyerek kapaszkodik!)



5-32 ábra
Az 5B-24 feladathoz.

5A-25 Egy 9 m-es kötél egyik végét egy fához, másikat egy sárba ragadt gépkocsihoz kötöttük. A sofőr a kötél közepét 360 N erővel 60 cm távolságba oldalra húzza. Mekkora erőt fejt ki a kötél a gépkocsira?

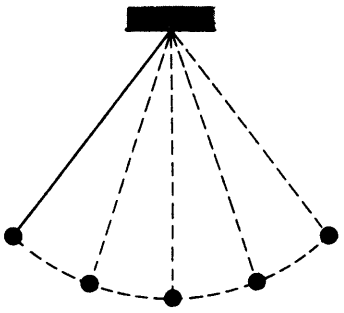
5A-26 Két diák 9 kg tömegű jelzőtáblát akaszt egymástól 30 m távolságban lévő épületek azonos magasságú pontjához rögzített kötél középpontjára. A cégtábla belógása a felfüggesztési pontokat összekötő vízszintes alá 30 cm. Mekkora erő feszíti a kötelet?

5A-27 Egy egyszerű inga 0,75 m hosszú fonalán 600 g tömegű ingatest lóg. Mekkora erő feszíti a fonalat akkor, amikor az ingatest 80 cm/s sebességgel lendül át pályájának legalsó pontján?

5A-28 Az 5-33 ábra egy függőleges síkban lengő inga néhány helyzetét ábrázolja. A két szélső helyzet egyben az inga maximális kilendülését is jelzi. Rajzoljuk be az egyes helyzetekben az inga pillanatnyi gyorsulását reprezentáló vektort!

5A-29 Két, fonallal összekötött test az 5-34 ábrán látható módon vízszintes, súrlódásmentes síkon mozog. a) Mekkora a testek gyorsulása, ha $F = T_1 = 2{,}4$ N? b) Mekkora T_2 erő feszíti eközben a testeket összekötő fonalat?

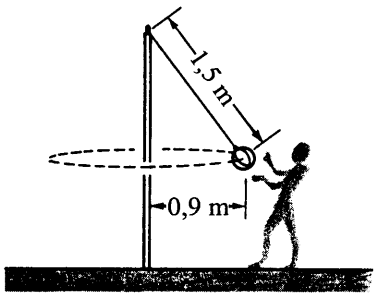
5A-30 Egy 1,5 m hosszú kötélre kötött 4,5 kg tömegű labda az 5-35 ábrán látható módon kúpingaként 0,9 m



5-33 ábra
Az 5A-28 feladathoz



5-34 ábra
Az 5A-29 feladathoz



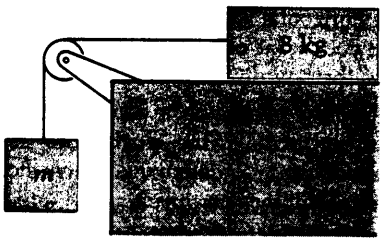
5-35 ábra
Az 5A-30 feladathoz

sugarú, vízszintes síkú körpályán mozog. a) Mekkora erő feszíti a kötelet? Rajzoljuk meg a labda vektorábráját, beleértve az erők alkalmas derékszögű összetevőkre bontását is! b) Mennyi idő alatt tesz meg a labda egy teljes fordulatot?

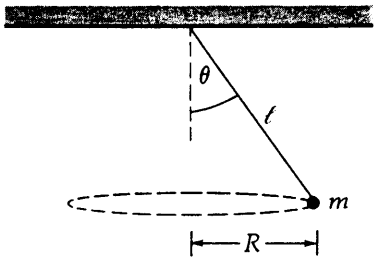
5B-31 Egy l hosszúságú fonallal a mennyezethez erősített testet úgy hoztunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú körpályán mozog, miközben a fonal a függőlegessel θ szöget alkot (5-36 ábra). Fejezzük ki egy fordulat idejét az l, θ és g paraméterek függvényében!

5B-32 Egy 1,4 m hosszú fonalinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége 2,2 m, akkor a fonal 20°-os szöget alkot a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban a) az ingatest centripetális gyorsulását! b) az ingatest tangenciális gyorsulását! c) a fonalat feszítő erőt, ha az ingatest tömege 600 g!

5B-33 Két hasábot az 5-37 ábrán látható elrendezésben fonallal kötöttünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható. Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása 2 m/s^2? Mekkora erő feszíti a fonalat?

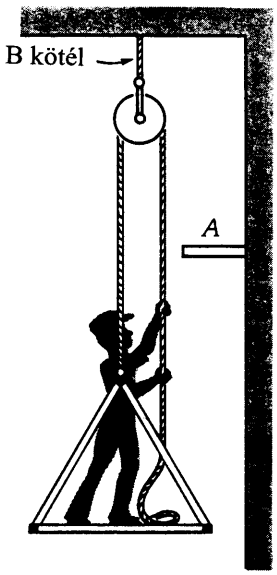


5-36 ábra
Az 5B-31 feladathoz



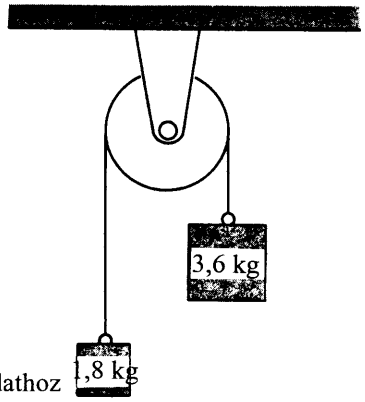
5-37 ábra
Az 5B-33 feladathoz

5B-34 Egy épület oldalának befestéséhez a festő az 5-38 ábrán látható módon csigán átvetett kötéllel húzza fel magát. Egy adott helyzet rögzítésére a festő a húzott, szabad kötélágat is az állványhoz szokta erősíteni. (A festő és az állvány együttes súlya 900 N, a kötél szakítószilárdsága 1350 N.) Egy alkalommal azonban az épület falából kiálló, különlegesen erős és biztonságos csővéget (az ábrán A-val jelölve) talált, s a kötélvéget ehhez erősítette. Milyen katasztrofális következményekkel járt ez és miért?



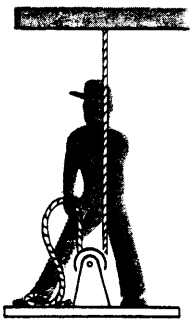
5-38 ábra
Az 5B-34 feladathoz

5B-35 Az 5-39 ábrán látható módon, súrlódásmentesen forgó csigán átvetett, elhanyagolható tömegű kötél végeire 1,8 és 3,6 kg-os tömeget erősítettünk, majd nyugalomból indítva magára hagytuk a rendszert.
a) Newton második törvényének alkalmazásával határozzuk meg a testek gyorsulását! b) Mekkora erő feszíti a fonalat, miközben a testek gyorsulnak? c) Mekkora sebességgel érkezik le 15 cm magasból a 3,6 kg-os test?



5-39 ábra
Az 5B-35 feladathoz

5B-36 Az 5-40 ábrán látható férfi és a tartólap együttes súlya 80 kg. Mekkora erővel tarthatja függve magát a férfi? (Ha esetleg lehetetlennek tartjuk ezt, magyarázzuk meg, hogy miért!)

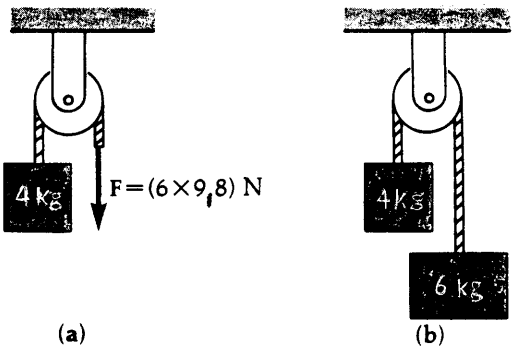


5-40 ábra
Az 5B-36 feladathoz

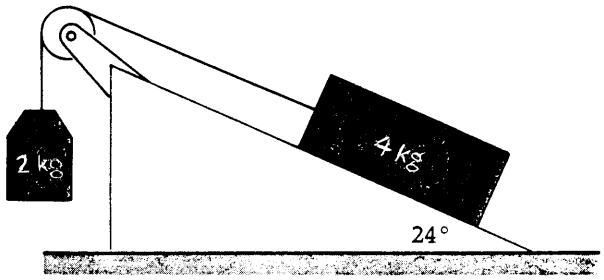
5B-37 a) Rajzoljuk meg az 5-41 ábrán látható testek vektorábráit! b) Határozzuk meg mind az a), mind a b) ábra elrendezésében a 4 kg tömegű test gyorsulását!
5B-38 Határozzuk meg az 5-42 ábrán látható elrendezésben a testek gyorsulásának nagyságát és irányát! Mekkora erő feszíti a fonalat? (A csiga tömege elhanyagolható és sehol sincsen súrlódás.)
5B-39 Mekkora az 5-43 ábrán látható elrendezésben az *m* tömeg, ha tudjuk, hogy a 10 kg tömegű test 0,2 m/s^2 gyorsulással mozog felfelé a súrlódásmentes lejtőn, és a csiga tengelysúrlódása is elhanyagolható?

5.9 A súrlódás

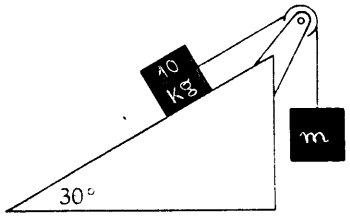
5A-40 A vízszintes padlón 1,8 m/s sebességgel csúszó doboz 2 másodperc alatt megáll. Mekkora a doboz és a padló közötti csúszó súrlódási együttható?



5-41 ábra
Az 5B-37 feladathoz



5-42 ábra
Az 5B-38 feladathoz



5-43 ábra
Az 5B-39 feladathoz

5A-41 Jégen csúszó szánkó súlya a rajta ülőkkel együtt 120 N. A szánkó és a jég közötti súrlódási együttható 0,070. a) Mekkora vízszintes erővel tartható egyenletes sebességű mozgásban a szánkó? b) Mekkora vízszintes irányú erővel mozgatható a test 0,60 m/s^2 gyorsulással?
5A-42 Mekkora a tapadási súrlódási együttható, ha az előző feladat esetén a szánkó nyugalomból való kimozdításához 10 N erő szükséges?
5A-43 Egy gyerek a parttól 12 m-re áll egy befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti nyugalmi súrlódási együttható 0,05. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?
5A-44 Rakodórámpán láda fekszik. Ha a rámpa szöge 30°-os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge 20°-ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a

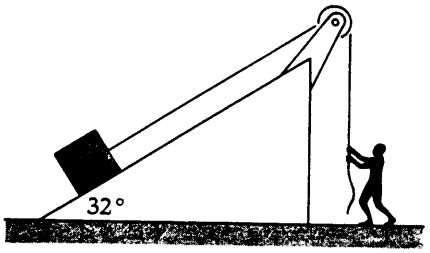
láda és a lejtő közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

5A-45 Egy 20°-os lejtőn a már mozgásba hozott test magára hagyva egyenletes sebességgel csúszik le. Mekkora a test és a lejtő közötti csúszó súrlódási együttható?

5B-46 5 kg tömegű test csúszik le a vízszinteshez képest 41°-ban hajló lejtőn. A test és a lejtő között a csúszási súrlódási együttható 0,3. a) Határozzuk meg a súrlódási erőt! b) Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

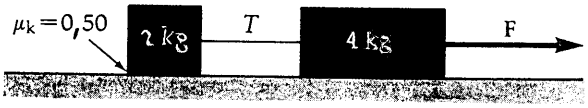
5A-47 A vízszintessel 60°-os szöget bezáró lejtőn egy test g/2 gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható a test és a lejtő között?

5A-48 Az 5-44 ábrának megfelelően egy 400 N súlyú ládát állandó sebességgel eresztenek le egy lejtőn. A ládát tartó kötél párhuzamos a lejtő síkjával. Mekkora erővel húzza a munkás a kötelet, ha a láda és a lejtő között a csúszó súrlódási együttható 0,25? (A csiga tengelysúrlódása elhanyagolható.)



5-44 ábra
Az 5A-48 feladathoz

5B-49 Egy 15 m/s sebességgel haladó targoncán ládát szállítanak. A láda és a targonca platója közötti nyugalmi súrlódási együttható 0,4. Mekkora az a minimális út a targonca lefékezéséhez, amelynél a láda még nem csúszik meg?

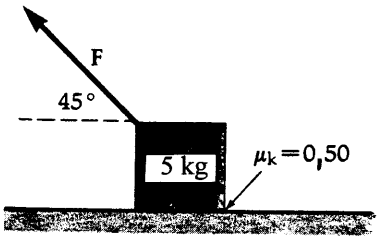


5-45 ábra
Az 5B-50 feladathoz

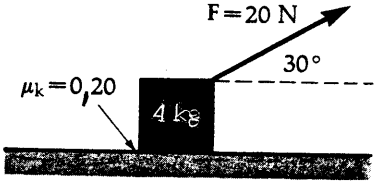
5B-50 Két, vízszintes síkon fekvő testet az 5-45 ábra szerint fonallal kötöttünk össze. A testek és a sík közötti csúszási súrlódási együttható 0,5. a) Mekkora vízszintes irányú **F** erővel mozgathatjuk a testeket 2 m/s^2 gyorsulással? b) Mekkora erő feszíti ezalatt az összekötő fonalat?

5B-5l Határozzuk meg, hogy az 5-46 ábrán látható elrendezésben mekkora **F** erő szükséges a doboz vízszintes sík menti egyenletes mozgatásához! (A csúszó súrlódási együttható 0,5.)

5B-52 Egy 4 kg tömegű testet az 5-47 ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a test és a talaj közötti csúszó súrlódási együttható 0,2?



5-46 ábra
Az 5B-51 feladathoz



5-47 ábra
Az 5B-52 feladathoz

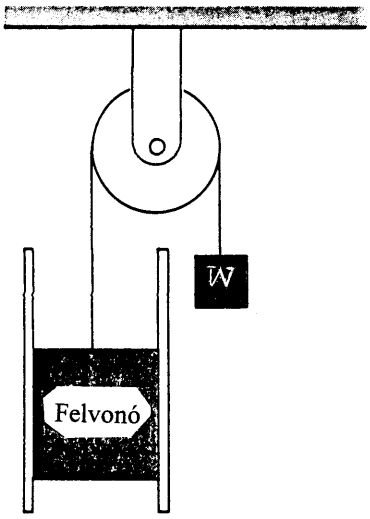
5B-53 Egy munkás 200 N súlyú megrakott ládát húz egyenletes sebességgel, 55 N erővel érdes, vízszintes talajon. Az erő iránya 35°-os szöget alkot a vízszintessel. a) Mekkora a talaj és a test közötti csúszó súrlódási együttható? b) Mekkora ugyanilyen irányú erővel lehetne a ládát 1,3 m/s^2 gyorsulással húzni?

5B-54 Egy körhinta 12 s alatt fordul körbe. A körhinta középpontjától 3 m távolságban 45 kg-os gyerek ül. a) Mekkora a gyorsulása? b) Mekkora vízszintes irányú súrlódási erő hat a gyerekre (székének sem támlája, sem kapaszkodója nincsen)? c) Mekkora minimális tapadási súrlódási együttható szükséges, hogy a gyerek ne csússzon meg?

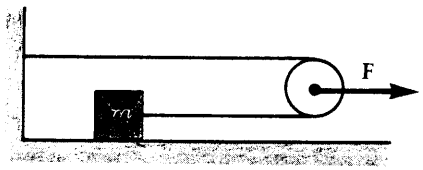
5B-55 Mekkora az 5-48 ábrán látható W súly, ha a 15000 N súlyú lift 1,2 m/s^2 gyorsulással mozog felfelé és a felvonószekrény és vezetősínei között állandó nagyságú, 900 N súrlódási erő hat? A csiga tömege elhanyagolható.

5B-56 Az 5-49 ábrán látható, vízszintes síkon fekvő 3 kg-os hasáb és a sík közötti súrlódási együttható 0,260. Mekkora **F** erő szükséges ahhoz, hogy a hasáb 1,2 m/s^2 gyorsulással mozogjon, ha a csiga tömege és a tengelysúrlódás elhanyagolható? (Megjegyzés: adott **F** erő esetében mekkora a kötélt feszítő erő?)

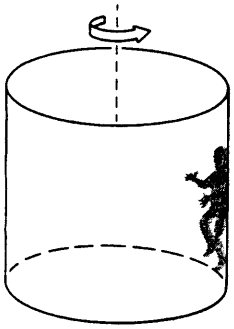
5B-57 Egy vidámparkban függőleges tengelyű, nagy méretű, belül üres henger forog (5-50 ábra). Az utasok úgy helyezkednek el, hogy nekitámasztják hátukat a henger belső falának. Meghatározott sebességet elérve a padlót leeresztik a bentlévők alól. Az utasok azonban a fal és a hátuk között ébredő súrlódási erő miatt nem csúsznak le. a) Rajzoljuk meg (a Földhöz rögzített koordinátarendszerben) egy, a falhoz szoruló ember vektorábráját. b) Határozzuk meg, hogy mekkora minimális μ_t tapadási együttható szükséges ahhoz, hogy az R sugarú hengerben v sebességgel utazó ember ne csússzon le!



5-48 ábra
Az 5B-55 feladathoz

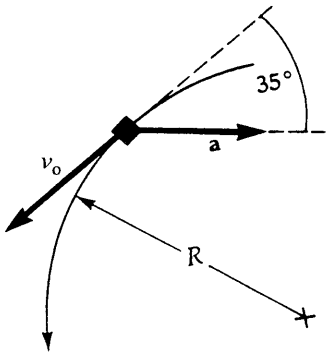


5-49 ábra
Az 5B-56 feladathoz



5-50 ábra
Az 5B-57 feladathoz

5B-58 Egy gépkocsi 80 m sugarú vízszintes körpályán mozog. Az 5-51 ábra azt a pillanatot mutatja, amikor sebessége éppen 10 m/s és a gyorsulása **a**. a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása? b) Mekkora a tangenciális gyorsulás? c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi megállásig, ha érintő menti gyorsulása állandó? d) Az úttest vízszintes – azaz a kanyarban nem túlemelt a pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillanatban a gépkocsi ne csússzon meg?



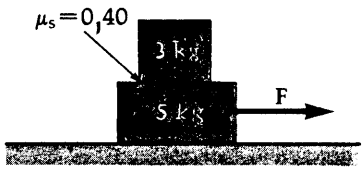
5-51 ábra
Az 5B-58 feladathoz

5B-59 Mutassuk meg, hogy a v_0 sebességgel haladó gépkocsi, ha a tapadási súrlódási együttható az út és a kerekek között μ_t, nem állítható meg csúszás nélkül $v_0^2 / 2g\mu_t$-nél rövidebb úton! (Vegyük észre: Mivel általában $\mu_k < \mu_t$, ha az autó megcsúszik, akkor a fékút nő. Emiatt vészhelyzetben is csak annyira érdemes a féket nyomni, hogy a kerekek még éppen ne blokkoljanak, s így az autó ne csússzon meg.)

5B-60 A $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletből kiindulva határozzuk meg az 5-19 ábrán látható rendszer gyorsulását, ha $M = 15$ kg, $m = 10$ kg és $\mu_k = 0{,}15$!

5.10 Newton harmadik törvénye

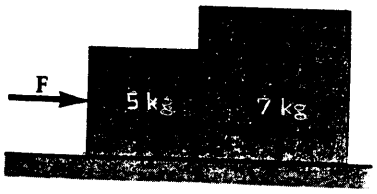
5B-6l Az 5-52 ábra szerinti elrendezésben a felső és az alsó hasáb között a tapadási súrlódási együttható 0,4, a vízszintes sík súrlódásmentes. Mekkora maximális vízszintes **F** erővel húzhatjuk az alsó testet, ha azt akarjuk, hogy a felső test ne csússzon meg rajta?



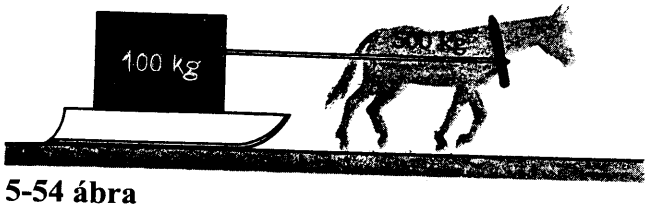
5-52 ábra
Az 5B-61 feladathoz

5B-62 Az 5-53 ábra szerint két érintkező hasáb fekszik a vízszintes, súrlódásmentes talajon. a) Mekkora vízszintes **F** erővel toljuk az 5 kg tömegű testet, hogy a rendszer 2 m/s^2 gyorsulással mozogjon? b) Mekkora erővel hat ezalatt a 7 kg-os hasáb az 5 kg-os testre?

5B-63 Egy 500 kg tömegű ló 100 kg tömegű szánt húz 1 m/s^2 gyorsulással (5-54 ábra). A szán és a talaj között 500 N súrlódási erő ébred. Határozzuk meg, hogy a) mekkora erő feszíti a kötelet, b) mekkora súrlódási erő hat a lóra! c) Igazoljuk, hogy az egész rendszert a Föld által kifejtett teljes súrlódási erő gyorsítja 1 m/s^2 gyorsulással!

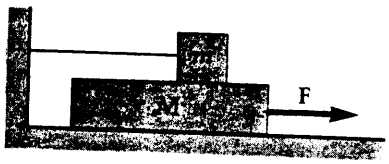


5-53 ábra
Az 5B-62



5-54 ábra
Az 5B-63

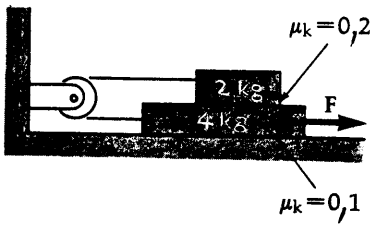
5B-64 Az 5-55 ábrán a csúszó súrlódási együttható minden felületen μ_k. Mekkora a vízszintes irányú **F** erő, ha az alsó test gyorsulása **a**?



5-55 ábra
Az 5B-64

További feladatok

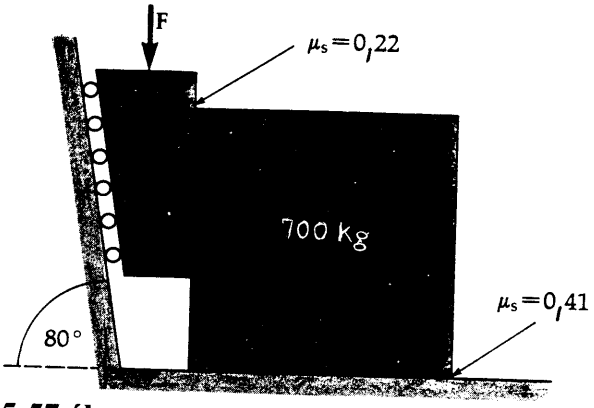
5C-65 Az 5-56 ábrán a 4 kg tömegű test az **F** erő hatására 0,5 m/s^2 gyorsulással mozog. a) Figyelembe véve az ábrán megadott csúszási súrlódási együtthatókat, határozzuk meg a kötélerőt és az **F** erő nagyságát!



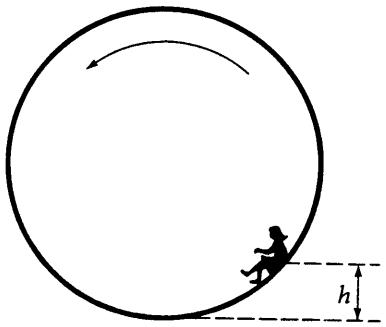
5-56 ábra
Az 5C-65

5C-66 Határozzuk meg, hogy az 5-57 ábra szerinti elrendezésben mekkora függőleges **F** erő szükséges a 700 kg-os kocka megmozdításához! Az ék súlya elhanyagolható és a görgők súrlódásmentesek.

5C-67 A vidámparki elvarázsolt kastélyban 2 m sugarú, vízszintes tengelyű henger percenként 10 fordulatot tesz meg. A henger felfelé emelkedő oldalán állandó h magasságban, nyugalmi helyzetben egy gyerek ül. A gyerek és a henger között a csúszási súrlódási együttható μ_k=0,40. Határozzuk meg a h magasságot.



5-57 ábra
Az 5C-66



5-58 ábra
Az 5C-67

5C-68 A gyorsulási autóversenyeken az álló helyzetből induló autóknak a lehető legrövidebb idő alatt kell megtenni a 400 m-es távot. A célvonalon átfutás sebességét a cél előtt és után egymástól 40 m távolságban felállított fotocellák segítségével mérik. Egy 3600 kg tömegű versenyautó 15 s alatt tette meg a távot és végsebessége a fotocellás mérés szerint 200 km/ó volt. Állandó gyorsulást feltételezve határozzuk meg a) a súrlódási erőt, b) az út és a kerekek közötti átlagos súrlódási együtthatót. (Azért használjuk az átlagos szót, mert a kerekek különösen a táv kezdeti szakaszán gyakran megcsúsznak.) c) Mekkora a két fotocella előtt való áthaladás pillanatnyi sebessége közötti különbség, ha a végsebességet a 40m/(fotocellák között töltött idő) formulával számítjuk?

5C-69 A feladat a gépkocsizás közben előforduló, két különböző helyzetben a szükséges maximális súrlódási erő összehasonlítása. Az első esetben egyenes úton v_0 kezdeti sebességgel haladó autót állandó a gyorsulással kívánunk lefékezni. A második esetben vízszintes síkú, r sugarú körpályán az előzővel megegyező v_0 kezdeti

sebességgel haladó autót úgy kívánunk egyenletesen lefékezni, hogy a *fékút ugyanakkora* legyen, mint az előző esetben. Mutassuk meg, hogy a körpálya esetén az út és a kerekek közötti maximális súrlódási erő aránya az egyenes úton fellépő maximális súrlódási erőhöz

$$\sqrt{1+4\left(\frac{s}{r}\right)}^{2},$$

ahol s a fékút. (Ez egyben érthetővé teszi azt is, hogy miért kell a kanyarban óvatosan fékezni.) Útmutatás: Mi a kapcsolat az egyenes menti gyorsulás és a kanyarbeli tangenciális gyorsulás között?

5C-70 A v (m/s-ban mérve) sebességű légáram egy r (méterben mérve) sugarú gömbre $F = arv + br^2v^2$ erőt (newtonban mérve) gyakorol, ahol a és b a megfelelő SI-mértékegységekkel bíró állandók. Számértékük: $a = 3{,}1\times10^{-4}$, $b = 0{,}87$. Az összefüggés felhasználásával adjuk meg a saját súlya alatt eső vízcsepp végsebességét, ha a csepp sugara a) 10 μm, b) 100 μm és 1 mm. Az első és a harmadik esetben a másodfokú egyenlet megoldása nélkül is elég pontos eredményhez juthatunk, ha észrevesszük, hogy a légellenállást adó kifejezés melyik tagja domináns és a másikat elhanyagoljuk. d) Mekkora sugarú csepp esetén egyenlő a fenti két tag? e) Mekkora a d) esetében a csepp végsebessége?

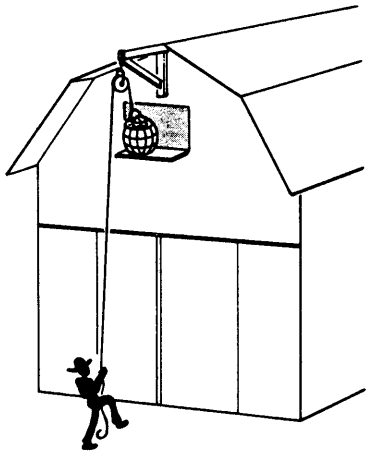
5C-71 900 kg tömegű gépkocsi 100 km/ó sebességgel száguld egy 350 m sugarú (túlemelés nélküli) kanyarban. a) Mekkora súrlódási erő hat a gépkocsira? b) Mekkora szögben kellene a vízszinteshez képest túlemelni az úttestet, hogy az adott sebességnél a súrlódási erő zérus legyen? c) Mekkora súrlódási erő hatna a b) esetben az 50 km/ó sebességgel haladó autóra? Megjegyzés: Milyen irányú lenne ez a súrlódási erő?

5C-72 A következő eseménysor egy, az 1920-as évekből származó klasszikus filmvígjáték részlete. Egy farmer kis láda téglát próbál leereszteni egy magtár felső ablakából az 5-59 ábrán látható csigás berendezéssel. Hirtelen nagyot rántva a kötélen a téglás láda lecsúszik az ablakdeszkáról. A farmer erősen szorítja a kötelet, s lóg rajta – sajnos azonban a téglás láda nehezebb nála, így miközben a láda lefelé mozog, felhúzza a farmert. A földbe ütköző ládának azonban kiszakad a feneke, így a téglák kiesnek. Ennek hatására a farmer lefelé kezd zuhanni, felrántva a láda maradványait,. Mikor a láda a csigához ér, darabokra törik és a lécdarabok visszahullanak a földön elterült gazdára. Az alábbi adatlista alapján határozzuk meg az esemény egyes részleteinek időtartamát! Az ablakdeszka 2 m-rel a csiga alatt és 10 m-rel a talaj felett helyezkedik el. A kötél súlyát hanyagoljuk el és legyen $g = 10$ m/s^2.

	tömeg
a farmer	80 kg
a megterhelt láda	100 kg
az üres láda	40 kg

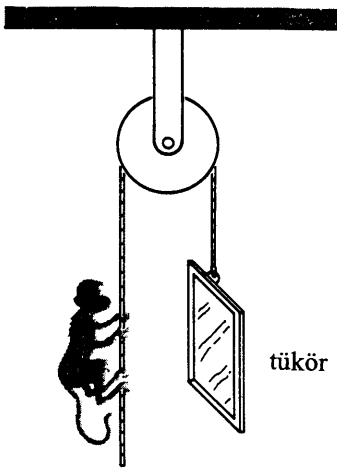
Megjegyzés: Néhány további feltevés is szükséges. Amikor a megterhelt láda a földbe ütközik, a farmer még felfelé mozog, s pusztán a gravitációs erő hatása alatt lassul le és esik vissza. Tegyük fel, hogy mind felfelé, mind lefelé elkerüli a csigát. A farmer végig szorosan fogja a kötelet. Tegyük fel, a törött láda elkezd felfelé mozogni és ő lefelé kezd esni, akkor a kötélben ébredő feszültség következtében sebessége 2/3 részére csökken. Végül tegyük fel, hogy a felfelé mozgó törött ládát a csiga azonnal megállítja, s a darabok szabadon esve hullanak le.

(Bár nem tartozik a feladathoz, elmondjuk, hogy a farmert egy végső méltatlanság is érte; ámikor végre elengedte a kötelet, akkor a ládát tartó kampó elég súlyos volt, hogy a kötelet magával rántva mindenestől az elkábult emberre zuhanjon.)



5-59 ábra
Az 5C-72 feladathoz

5C-73 További humoros illusztrációul szolgál a Newton-törvényekre a következő példa. Súrlódásmentes csigán átvetett, elhanyagolható tömegű kötél egyik végén egy majom, a másikra pontosan vele szembe, hogy lássa magát, egy a majommal egyenlő tömegű tükröt akasztottunk (5-60 ábra). Magyarázzuk meg, hogy miért marad mindig pontosan szemben a majom a tükörrel, ha nyugalmi helyzetből indulva felfelé vagy lefelé mászik?



5-60 ábra
Az 5C-73 feladathoz

5C-74 Egy repülőgép, hogy az utasok számára a súlytalanság állapotát szimulálja, pusztán a gravitációs erő hatására parabolapályán kell hogy mozogjon (5-6l ábra). A parabolapálya felfelé és lefelé haladó ágát is kihasználva a súlytalanság állapota több mint 1 percig fenntartható. Némi egyszerűsítéssel a repülőgépre ható erők a következők:

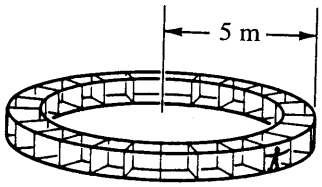
(l) a gravitációs erő
(2) a légcsavarok húzóereje
(3) a légellenállás (pontosan a mozgás irányával ellentétesen)
(4) a levegő emelő ereje (a gép tengelyére merőlegesen)

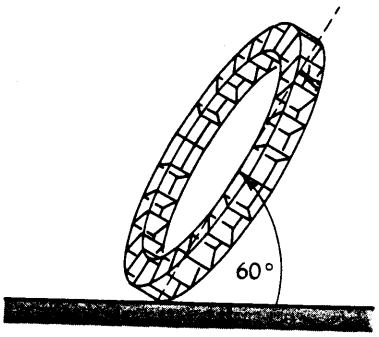
a) Milyen feltételek teljesülnek a gravitációs pályán a vízszintes sebességösszetevőre? b) Vektorábrák alapján magyarázzuk meg, hogy miért nem esik a gép tengelye sem a felszálló, sem a leszálló ágban a mozgás irányába?

5C-75 Vidámparki körhinta körben elhelyezkedő kis cellákból áll, amelyekben az utasok a külső falnak támaszkodva állnak, mialatt a hinta körbejár (5-62 ábra). Az állandó szögsebességgel forgó szerkezet ezután lassan a vízszinteshez képest 60°-os szögbe emelkedik. Mekkora minimális sebességgel kell forognia az eszköznek ahhoz, hogy az 5 m sugarú pályán elhelyezkedő utasok tartóhevederek és súrlódás hiányában se zuhanjanak ki?



5-6l ábra
Az 5C-74 feladathoz.
A súlytalanság állapotának tanulmányozására NASA-űrhajósok lebegnek a gravitáció hatására parabola pályán mozgó repülőgépben.





5-62 ábra
Az 5C-75 feladathoz

Távlatok

"Nem látja a fától az erdőt", mondja a közmondás, ha a részletek gazdagsága úgy elborít bennünket, hogy nem vesszük észre a nagy egész szerkezetét, s nem tudjuk kiválasztani a környező tájat uraló óriástölgyeket. A fizikában is megtalálhatók a „faóriások", azok a központi szerepet játszó fogalmak és elméletek, amelyek egységessé és egyszerűvé teszik a részletekben oly gazdag tudományt. Éppen ezért a tanulásban is hasznos lesz, ha időnként visszatekintünk, s kiemeljük ezeket a fontos fogalmakat. Most az első ilyen visszatekintő magyarázat következik.

A természeti törvények megértéséhez először pontos és jól alkalmazható módszert adtunk a *mozgások* leírásához. Ennek legfontosabb elemei a következők.

(1) A helyzet, a sebesség és a gyorsulás definíciója.
(2) A kinematikai egyenletek.

Ezután, hála Newton zsenialitásának, értelmeztük, hogyan változtatják az erők a testek mozgását.

(3) A Newton törvények (különös fontosságú a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény).

Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvényt csak akkor tudjuk alkalmazni, ha $\Sigma \mathbf{F}$ jelentését pontosan értjük. Ezért volt az eddigi feladatok megoldásának első lényeges lépése minden esetben a vizsgált testre ható erőket mutató vektorábra megrajzolása. A fizikai tartalom az erők analízisével deríthető fel. Ha az erőket ismerjük, a feladatok megoldása többnyire egyszerű matematikai eljárás. Összpontosítsunk tehát a feladatok megközelítésekor először arra, hogy milyen erők hatnak a vizsgált testre!

Egyes esetekben azonban nem ismerjük az erőket, vagy az erőhatások igen bonyolultak (például az ütközések esetén rendkívül rövid ideig hatnak), s közvetlenül nem írhatók fel. A következő fejezetekben két olyan lehetőséget mutatunk meg, amelyek ilyen esetekben alkalmazhatóak. Az ezekhez szükséges új elméletek és fogalmak az *energia- és impulzus- megmaradás törvénye*, ill. a *konzervatív erő és a potenciál fogalma*. Könyvünkben, amely bevezetés a fizikába, a mechanikai feladatok megoldásában három alapvető megközelítéssel élünk:

(1) A Newton-féle mozgástörvények.

(2) A munka, energia és impulzus fogalma.

(3) A konzervatív erő és a potenciál közötti összefüggés.

Figyeljünk ezekre az alapvető módszerekre, mert újra és újra megjelennek a különböző témák tárgyalása során. Tanuljuk meg, hogy hogyan választhatjuk ki egy adott feladathoz a leghatékonyabb alapelvet, mert ez sokat egyszerűsít a feladatok megoldásán. A megoldást kezdjük mindig a felhasznált *fizikai elv* kimondásával (s ne egy speciális képlet felírásával). Így gondolkoznak a fizikusok is, hiszen a jelenségek széles és változatos körét néhány nagyerejű elmélettel írják le.

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) –1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$

MUNKA, ENERGIA, TELJESÍTMÉNY

„Szeretem a munkát, csak ülök, s nézem órákon át."

ISMERETLEN BÖLCS

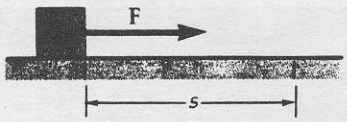
6.1 Bevezetés

Az energia a fizika egyik legfontosabb fogalma. Bár igen sok különböző alakban jelenhet meg, mégsem fizikai szubsztancia, hanem *definícióval bevezetett mennyiség*. Mindenütt ott van azonban, s a fizika különböző ágaiban rendkívüli változatossággal bukkan elő. Éppen amiatt, mert az energia ily sokféle alakban jelenik meg, a fogalmat is sok szempontból kell taglalnunk. Legáltalánosabban egy test *energiája* a test munkavégző képességét mutatja meg, ugyanakkor a *munka* az egyik rendszerről a másikra átvitt energia mértéke.

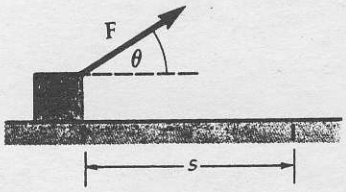
Noha gyakran beszélünk arról, hogy egy testnek meghatározott energiája van, és meghatározzuk, hogy az energia hogyan kerül át az egyik testről a másikra, a testek energiája függ a koordinátarendszer megválasztásától is. Különböző koordinátarendszerből szemlélve, adott test energiája különböző lehet. Ha például egy test az általunk választott koordinátarendszerben mozog, akkor véges kinetikus energiát rendelhetünk hozzá. A testhez rögzített koordinátarendszerben (ehhez képest a test nyugalomban van) a test kinetikus energiája zérus. Így az energia nem olyan fizikai fogalom, amelyből egy test abszolút értelemben többel vagy kevesebbel rendelkezhet, hanem olyan mennyiség, amelyet adott koordinátarendszerben végzett mérések alapján számíthatunk ki.

Az energia azért játszik olyan fontos szerepet a fizikában, mert megmaradó mennyiség. Amennyiben egy *zárt* (környezetétől elszigetelt) rendszer energiáját ismerjük, akkor biztosak lehetünk benne, hogy bármiképp is változzék a rendszer a továbbiakban; *összenergiája mindig ugyanannyi marad*. Így legfeljebb egyik energiaforma alakulhat át a másikba, de energia nem *keletkezhet* és nem *tűnhet* el. Ezt a tapasztalatilag felismert tényt nevezzük az *energiamegmaradás* törvényének. (Erre a 7. fejezetben még visszatérünk.)

A *megmaradó* mennyiségek, tehát azok, amelyek értéke a rendszerben végbemenő különböző fizikai változások ellenére változatlan marad, nagyon fontosak a fizikusok számára. Bár a megmaradási törvények semmit sem mondanak arról, hogy *hogyan* megy végbe egy folyamat, minden esetben biztosítják azonban, hogy ha a megmaradó mennyiség értékét ismerjük egy folyamat előtt, akkor ez a mennyiség ugyanakkora a folyamat lezajlása után is. Ez a megállapítás a fizikai jelenségek analízisében gyakran önmagában is



a) **F** párhuzamos az elmozdulással



b) Az **F** erő állandó θ szöget alkot az elmozdulással

6-1 ábra
Egyenes vonalon s távolságba elmozduló **F** állandó erő

jelentős lehet. Energetikai megfontolásokkal gyakran könnyebben oldhatunk meg pl. dinamikai feladatokat, mint a Newton-törvényekkel. Alapvetően az energia fogalma a testek kölcsönhatásának vizsgálatában is segít.

6.2 A munka

A *munka* szó a fizikában jóval szűkebb jelentéssel bír, mint a hétköznapi életben. A fizikában a munka *az energiának egyik testről a másikra való átvitelét* jelenti. A legegyszerűbb esetben, amikor egy test **F** erő hatására s távolságra mozdul el egyenes vonal mentén (6-1a ábra), a W munkavégzés:

$$W = F\,s \qquad \textbf{(6-1)}$$

Ha az **F** erő θ szöget zár be az elmozdulással (6-1b ábra), akkor csak az erőnek az elmozdulás irányába eső összetevője végez munkát:

$$W = (F\cos\theta)\,s \qquad \textbf{(6-2)}$$

Szavakkal a **munka** a következőképpen definiálható:

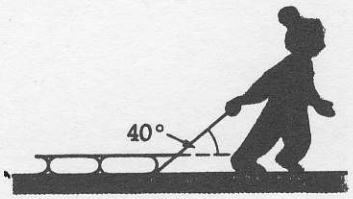
Munka — **Az F erő W munkája az erő elmozdulás irányába eső összetevőjének és az elmozdulás nagyságának a szorzatával egyenlő.**

A munka SI-egysége a *newton-méter* (Nm), amit Sir James Joule tiszteletére *joule* (J)-nak is nevezünk.

A cos θ tényező előjelétől függően a munka pozitív és negatív értéket is felvehet. Ha az elmozdulás irányába eső erőkomponens a *mozgás irányába* mutat, akkor a munka pozitív, ha azzal *ellentétes*, akkor a munka negatív. Vegyünk a kezünkbe például egy könyvet és emeljük függőlegesen felfelé egyenletesen y távolságra. Ekkor kezünkkel a könyv mg súlyával egyenlő nagyságú erőt fejtünk ki felfelé. Az általunk kifejtett erő a mozgás irányába mutat, azaz a munkavégzés $(F\cdot\cos 0°)\,y = mg\,y$. Ha a könyvet egyenletes sebességgel, y távolságnyira lefelé engedjük, akkor az elmozdulás lefelé mutat, az általunk kifejtett erő azonban változatlanul felfelé irányul. Ebben az esetben $\theta = 180°$ és $\cos\theta = -1$, s emiatt az általunk végzett munka negatív. $(F\cos 180°)y = -mg\,y$. Érdekes, hogy ha a könyvet vízszintesen mozgatjuk egyenletes sebességgel, akkor a munkavégzés zérus, mert a felfelé mutató erő és a vízszintes irányú elmozdulás szöge 90° és $\cos 90° = 0$.

Bármilyen nagy erővel nyomunk például egy falat, mechanikai értelemben mégsem végzünk munkát, ha a fal mozdulatlan marad. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy izmaink megfeszítésekor biológiai értelemben fellép energiaátvitel (a mikroszkópikus izomrostok és környezetük között), amikor a kémiai energiát az izomszövet feszítése során elhasználjuk. A kémiai folyamatokban felszabaduló, s elvesztegetett energia hatására izmaink elfáradnak, kimelegszünk, s verítékezni kezdünk. Mechanikai értelemben azonban csak akkor végzünk munkát, *ha az erő irányába eső elmozdulás nem zérus.*

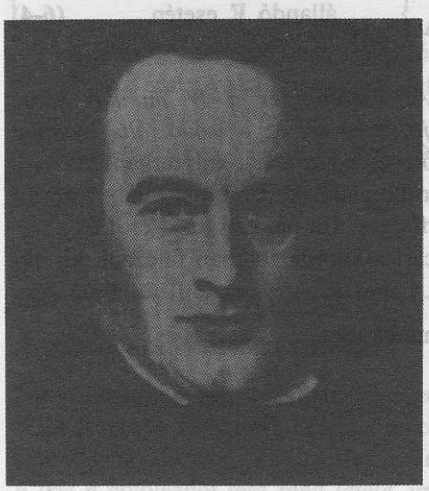
A munkavégzéssel kapcsolatos feladatokban zavart okozhat, ha a súlyt az eddigi módon W-vel jelöljük. Ilyen esetekben célszerűbb a gravitációs erőt F_g-vel vagy mg-vel jelölni.



6-2 ábra
A 6-1 példához.

6-1 PÉLDA

Egy fiú a vízszintessel 40°-os szöget bezáró irányban állandó, 20 N erővel húz egy szánkót (6-3 ábra). Mekkora munkát végez a fiú, míg a szánkót vízszintesen 3 m távolságnyira húzza?



6-3 ábra
Sir James Joule (1818-1889) – akinek tiszteletére a munka és energia mértékegységét elnevezték – gazdag angol sörfőzde-tulajdonos gyermeke volt. Nevét az Egyesült Államokban „dzsaul"-nak ejtik, a mértékegység kiejtése azonban többnyire „zsúl". James Joule gerinc-rendellenességgel és ráadásul vérzékenységi hajlammal született. Bár félénk és ideges természetü volt, igen éles logikával rendelkezett, ügyesen tervezett gépeket és nagyon szeretett kísérletezni. Széleskörű érdeklődése nagy képzelőerővel párosult. Egyszer, amikor a visszhang tanulmányozásához pisztolylövéssel akart éles hangot adni, véletlenül ellőtte szemöldökét. Talán azért, hogy apja sörgyárában olcsóbb energiaforráshoz jusson, vagy egyszerűen a kísérletezés gyönyörűségéért, 19 éves korában Joule hosszú kísérletsorba kezdett az elektromos generátorok működtetéséhez szükséges munka és az áram hatására fejlődő hő közötti kapcsolat tanulmányozására. Vizsgálataihoz kétszázad Fahrenheit-fok pontosságú hőmérőt készített. Ez Joule korában rendkívüli pontosság volt! Öt éves sokoldalú kísérletezés után eredményeit az Angol Természettudományos Társaság elé tárta. A kísérletek – közöttük a vízben forgatott lapátkerék által fejlesztett hő mérése – alapján megállapította a mechanikai munka hőegyenértékét. Munkája nem talált visszhangra. A témáról szóló dolgozatának közlését a Királyi Társaság (az Angol Tudományos Akadémia) a következő évben elutasította. Újabb öt évnek kellett eltelnie, míg „A hő mechanikai egyenértéke" című munkáját a *„Philosophical Transactions"* leközölte. A dolgozatot lektoráló bizottság azonban még ekkor is törölte Joule (egyébként helyes) következtetését, mely szerint a mechanikai munka a súrlódás következtében alakul át termikus energiává.
A nehézségek egyike az volt, hogy a kísérleti berendezésekből a hő egy része ellenőrizhetetlenül „megszökött", ezért a különböző mérésekből különböző számértékű eredmény adódott a hő és a mechanikai munka közötti egyenértékre. Robert Mayer német természettudós (1814-1878) már korábban helyes elméleti következtetésekre jutott, gondolatai közzétételével azonban neki is nehézségei voltak, mert a tudományos folyóiratok nem fogadták el a gyökeresen új elméletet, amit nem támasztottak alá meggyőző bizonyítékok. A döntő lépést egy másik német fizikus, Hermann von Helmholtz (1821-1894) tette meg. Helmholtz Joule kísérleti eredményeit tanulmányozva a fizika sok területén alkalmazott matematikai módszerek felhasználásával általános energiamegmaradási elv kimondását javasolta. A munka és a hő közötti kapcsolat és az energiamegmaradási törvény mély megértéséhez meglepően nehéz út vezetett. A történet sokkal tekervényesebb, mint amit itt felvázoltunk, végső eredménye az energiamegmaradás kimondásával járó nagy egységesítés – Dampier, XX. századi tudománytörténész szavaival élve – „az emberi elme egyik legnagyobb eredménye" (W.C.Dampier, A természettudomány története, Cambridge University Press 4. kiadás 1948.).

MEGOLDÁS

Az x tengely pozitív irányát célszerű a mozgás irányában felvenni.

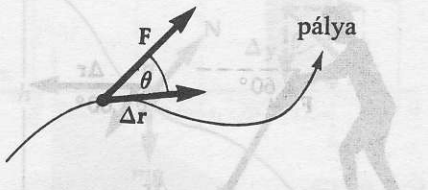
$$W = (F\cos\theta)x = (20\text{ N})(\cos 40^\circ)(3\text{ m}) = 46{,}0\text{ Nm} = 46{,}0\text{ J}$$

A munka és a vektorok skaláris szorzata

A következőkben az **F** erő által $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során végzett W munka meghatározására általánosabb módszert vezetünk be. A $\Delta\mathbf{r}$ jelölés *tetszőleges* irányú elmozdulásnövekményt jelöl. A következőkben a vektoralgebra felhasználásával bevezetjük a vektorok skaláris szorzatát. Az **A** és **B** vektorok $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ skaláris szorzatát a következőképpen definiáljuk:

Skaláris szorzat $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta = AB\cos\theta \qquad (6\text{-}3)$$

ahol θ az **A** és **B** vektor által bezárt szög. Az **F** erő munkája definíció szerint az erő és a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor skaláris szorzatával egyenlő (6-4 ábra).



6-4 ábra
A kicsiny $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás mentén ható **F** erő $\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ munkát végez. A $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás iránya mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

MmunKA (W)

$$\left.\begin{aligned} W &= \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} \\ W &= (F\cos\theta)\,\Delta r \end{aligned}\right\} \quad \text{állandó } \mathbf{F} \text{ esetén} \qquad (6\text{-}4)$$

Az eredmény skaláris mennyiség. *Az összefüggés a W munkát koordinátarendszertől függetlenül definiálja*, s éppen ez a *vektoriális* írásmód nagy előnye. A vektoregyenletek tetszőleges koordinátarendszerben érvényesek, s általában tömörebbek és egyszerűbb alakúak, mint a speciális koordinátarendszerben felírt megfelelő összefüggés. Ha például az **F** erőt és a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektort két dimenziós Descartes-koordinátákban fejezzük ki, akkor $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}}$ és $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\hat{\mathbf{x}} + \Delta y\hat{\mathbf{y}}$, ahol $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ az x ill y irányú egységvektorokat jelöli, és a $\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ munkavégzés:

Két dimenzióban	Három dimenzióban
$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y$	$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$

Ezek az összefüggések a vektorok skaláris szorzatának tulajdonságaiból következnek. Ezeket a szabályokat foglaljuk össze a következőkben:

A SKALÁRIS SZORZAT

A skaláris szorzat definíció szerint

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad (6\text{-}5)$$

ahol θ a vektorok által bezárt szög.

A skaláris szorzatra érvényes a

***kommutatív* törvény:** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

és a

***disztributív* törvény:** $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

Az egységvektorok skaláris szorzatára fennállnak az

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1$$

és

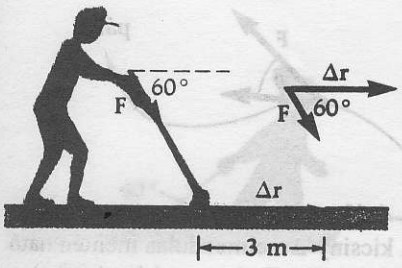
$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0$$

összefüggések és emiatt az

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}})$$

szorzat kilenc tagja háromra redukálódik:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (6\text{-}6)$$



6-5 ábra
A 6-2 példához.

6-2 PÉLDA

Egy seprűt a 6-5 ábrának megfelelően a vízszinteshez 60°-os szögben álló nyelénél fogva 50 N állandó erővel tolunk. Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végzünk, míg a seprű 3 m-t csúszik előre a padlón.

MEGOLDÁS

Minthogy az erő nagysága és iránya is állandó, a munka $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$. A skaláris szorzat definiciója értelmében:

$$W = \mathbf{F}\,\Delta \mathbf{r} = F \cos\theta\, \Delta r = (50\ \text{N})(\cos 60°)(3\ \text{m}) = 75{,}0\ \text{Nm}$$

$$W = 75{,}0\ \text{J}$$

A gravitációs erő munkája

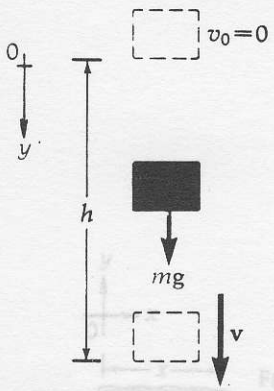
Tekintsünk egy nyugalomban lévő m tömegű testet, amely h magasságból szabadon esik (6-6 ábra). Mivel a részecskére mozgása során egyetlen erő, az állandó mg gravitációs erő hat, munkát is csak ez az erő végezhet rajta. A test h távolságot tesz meg *lefelé*, irányítsuk tehát az y tengely pozitív irányát is lefelé. A munkavégzés tehát:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{y} = F\left(\cos 0°\right) h = mgh \qquad \textbf{(6-7)}$$

Amennyiben a testet függőlegesen *felfelé* emeljük h távolságnyira, akkor a gravitációs erő munkája:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{y} = F\left(\cos 180°\right) h = -mgh \qquad \textbf{(6-8)}$$

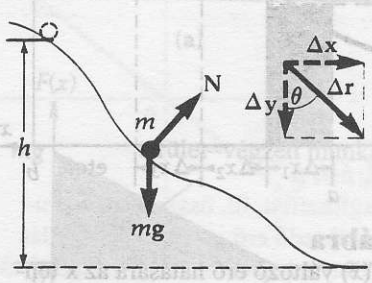
További például szolgálhat arra az esetre, amikor egy testen csak a gravitációs erő végez munkát, a súrlódásmentes lejtőn lecsúszó m tömegű test mozgása (6-7 ábra). Miközben a test lefelé csúszik, akármilyen görbült alakja is legyen a lejtőnek, a lejtő által kifejtett normális irányú **N** erő merőleges a pályára, s így a mozgás irányára is. Emiatt az **N** erő nem végez munkát a testen[1] . A gravitációs erő azonban mindig függőlegesen lefelé mutat, ezért a lejtő mentén fekvő tetszőleges $\Delta \mathbf{r}$ elmozdulásnövekmény mellett a munkavégzés $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = mg(\cos\theta)\Delta r$. A $\cos\theta\, \Delta r$ szorzat azonban minden esetben az elmozdulás Δy függőleges összetevőjével egyenlő. Ily módon minden olyan pályán, ahol a teljes elmozdulás *függőleges* összetevője h, a gravitációs erő munkája mgh. Amennyiben az elmozdulás függőleges összetevője *felfelé* mutat és nagysága h, akkor a gravitációs erő munkája $-mgh$, a negatív előjel azért lép fel, mert $\cos 180° = -1$.



6-6 ábra
A függőlegesen h távolságot eső testen a gravitációs erő mgh munkát végez.

6-3 PÉLDA

80 N súlyú gyerek 2,5 m magasból csúszik le egy játszótéri csúszdán. Mekkora munkát végez a gravitációs erő a gyereken?



6-7 ábra
A gravitációs erő munkáját tetszőleges pálya esetén is az elmozdulás *függőleges összetevője* szabja meg.

[1] **Kényszererők** Ha egy test mozgásának pályáját egy másik test szabja meg, akkor azt mondjuk, hogy *kényszererő* lép fel. Ha például egy pontszerű test súrlódásmentes pályán csúszik, akkor a pálya által kifejtett **N** normális irányú erő korlátozza a test mozgását, ill. arra „kényszeríti", hogy kövesse a pálya ívét. Hasonlóképpen a kötél végén pörgetett testet a kötélerő kényszeríti arra, hogy körpályán mozogjon. A billiárdasztalon guruló golyót az asztal normális irányú ereje tartja az asztal síkjában. A kényszererők általában az anyag rugalmas tulajdonságai miatt jönnek létre, s úgy keletkeznek, hogy egy test erőt fejt ki a másikra, enyhén deformálja azt, s a másik test Newton harmadik törvénye értelmében ugyanakkora kényszererővel hat vissza az első tesre. Emiatt ez a test csak a kényszererőre merőlegesen mozdulhat el. Ilymódon a **kényszererők sohasem végeznek munkát a testen.**

MEGOLDÁS

A gravitációs erő és a függőleges elmozdulás ugyanabba az irányba mutat, így a munkavégzés

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{y} = (80\ \text{N})(\cos 0^\circ)(2{,}5\ \text{m}) = 200\ \text{J}$$

6.3 Változó erő munkája

A természetben fellépő erők között vannak olyanok, amelyek időben és térben vagy mindkettőben változnak. Most olyan erőkkel foglalkozunk, amelyek egy egyenes mentén a hely függvényében változnak. Általában $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$. Egyenesvonalú mozgás esetén válasszuk x tengely pozitív irányát az **F** vektor irányának megfelelően:

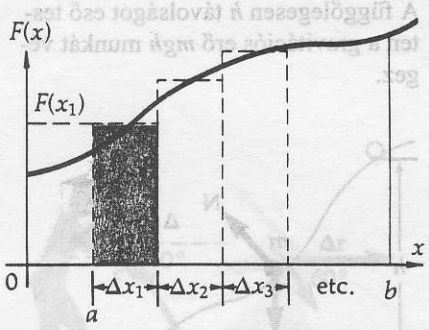
$$\Delta W = F(x)\Delta x$$

ahol $F(x)$ az erőt változását jelenti az x koordináta függvényében. Ábrázoljuk az $F(x)$ függvényt a Descartes-féle koordinátarendszerben (6-8 ábra).

A változó erő hatására az $x = a$ helyről az $x = b$ helyre mozgó részecskén végzett munka meghatározásához az elmozdulás kicsiny megváltozásaihoz tartozó ΔW elemi munkákat kell összegeznünk. Első közelítésként osszuk fel a teljes elmozdulást N intervallumra: Δx_1, Δx_2, ... Δx_N (6-8 ábra). Az első lépésben a részecske az $x = a$ helyről az $x = a + \Delta x_1$ helyre mozdul el. Bár ezen elmozdulás közben az F erő változik, jó közelítésnek tekinthető, ha a teljes intervallum során az $F(x_1)$ állandó értékkel helyettesítjük, ahol x_1 a Δx_1 intervallum valamelyik közbülső helye. Így az első elmozdulásnövekményhez tartozó ΔW_1 munka közelítőleg az $F(x_1)$ *magasságú* téglalap $F(x_1)\Delta x_1$ területével egyenlő. Hasonló módon a második intervallumon végzett munka az $F(x_2)\Delta x_2$ területtel közelíthető és így tovább.

A teljes [a, b] szakaszon végzett W munka a fenti területdarabkák összegével közelíthető, azaz

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{i=N} F(x_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(6-9)}$$



6-8 ábra
Az $F(x)$ változó erő hatására az x tengelyen a-tól b-ig mozog a részecske. Az erő a Δx_1 szakaszon $F(x_1)\Delta x_1$ munkát végez, ami a satírozott téglalap területével egyenlő.

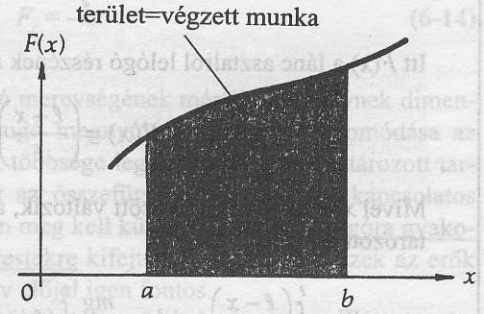
ahol $F(x_i)$ az i-ik intervallumban kiválasztott függvényérték. A közelítés javítására egyre rövidebb és rövidebb intervallumokat választunk. Határesetben $\Delta x \to 0$ és az intervallumok száma $N \to \infty$, s az így kapott eredményt tekintjük a munka pontos értékének.

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(x_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(6-10)}$$

Ezt a határértéket az $F(x)$ függvény [a,b] intervallumra vonatkozó **határozott integráljának** nevezzük.

A változó erő munkája
$$W = \int_a^b F(x)\,dx \qquad \textbf{(6-11)}$$

A 6-11 határozott integrál geometriai jelentése $F(x)$ függvénygörbe alatti terület, melyet az a és b határokhoz tartozó ordináták határolnak (6-9 ábra).



6-9 ábra
Az $F(x)$ erő által végzett munka egyenlő az $F(x)$ függvénygörbe alatti területtel.

Tehát

$$\text{munka} = \text{az } F(x) \text{ görbe alatti terület.} \qquad \textbf{(6-12)}$$

A terület könnyen kiszámítható, ha $F(x)$ lineáris függvény. Bonyolultabb esetekben az integrálszámítási szabályokat kell alkalmazni. (A G-II és G-III függelékben minden, ebben a könyvben használt függvény integrálja megtalálható.)

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy amikor a fizikai mennyiségeket, most pl. a munkát összekapcsoljuk az erőt ábrázoló függvénygörbe alatti területtel, akkor a számítások során *a tengelyeken felvett mennyiségek mértékegységét is figyelembe kell venni.* Ebben az esetben a terület dimenziója *erő* szorozva *távolsággal* (mértékegysége *newton-méter*) és nem a szokásos hosszúság négyzetével megadott terület dimenziója (mértékegysége *méter*^{2}).

6-4 PÉLDA

Az eredetileg az asztal mellett lógó ℓ hosszúságú, m tömegű, hajlékony láncot állandó sebességgel húzzuk fel az asztal szélén. A láncot a végénél fogva a 6-10 ábrán látható módon az asztal lapjával párhuzamosan $F(x)$ erővel húzzuk. Határozzuk meg, hogy mennyi munkát végzünk, míg a teljes lánc az asztalra kerül. A lánc és az asztal közötti súrlódás elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A lánc felhúzásához szükséges erő változik a hely függvényében, hiszen minden helyzetben éppen az asztal széléről még lelógó láncdarab súlyával egyenlő. (A súly többi részét az asztal tartja.) Ha az $x = 0$ helyet az asztal szélénél választjuk, akkor

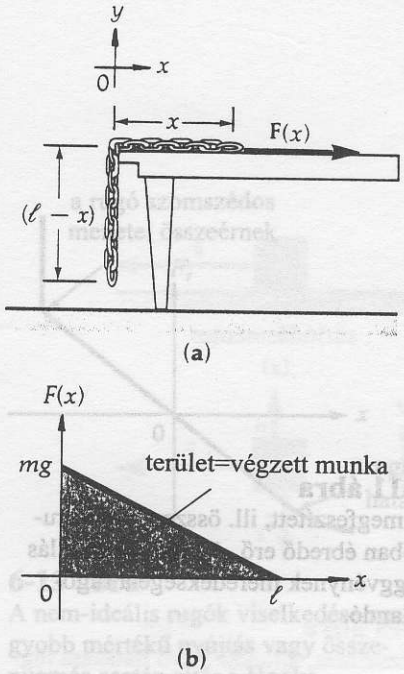
$$F(x) = \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) mg = \frac{mg}{\ell}(\ell - x) \qquad \textbf{(6-13)}$$

Az $F(x)$ függvény ábrája a 6-10b ábrán látható egyenes, így a teljes W munka, míg a láncvég az $x = 0$ helyről az $x = \ell$ helyre kerül, ezen egyenes alatti területtel egyenlő. Ez a terület egy háromszög, tehát $W = \frac{1}{2}\, mg\ell$. A teljes lánc felhúzásához szükséges munka tehát

$$W = \frac{mg\ell}{2}$$

Második megoldás az integrálszámítás alkalmazásával.

Mind az erő, mind az elmozdulás az x tengely pozitív irányába mutat, így az $F(x)$ erő munkája



6-10 ábra
A 6-4 példához.

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

Itt $F(x)$ a lánc asztalról lelógó részének a súlya

$$F(x) = \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) mg$$

Mivel x értéke 0 és ℓ között változik, a G-II függelék szerint a határozott integrál

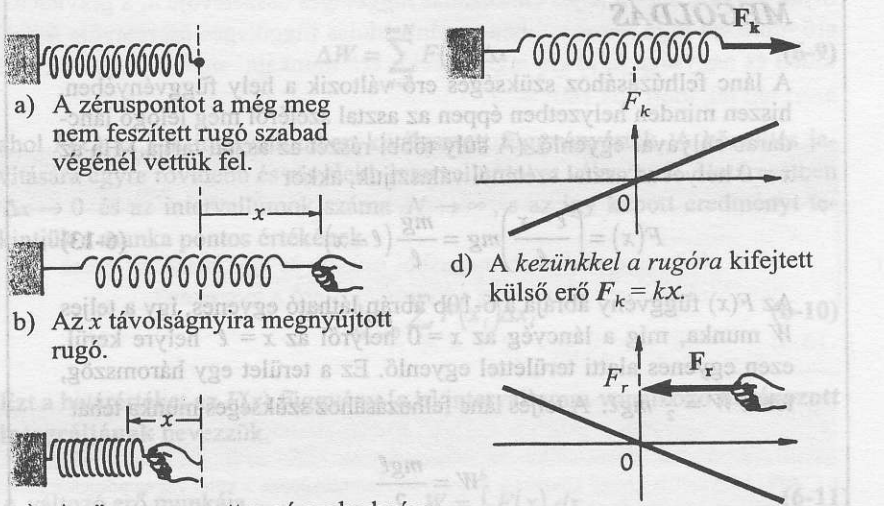
$$W = \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) mg\,dx = \frac{mg}{\ell} \int_0^{\ell} (\ell - x)\,dx = \frac{mg}{\ell}\left[\ell x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\ell}$$

Beírva x helyére a felső határ értékét ($x = \ell$) és kivonva az eredményből az $x = 0$ alsó határon felvett értéket, azt kapjuk, hogy

$$W = \frac{mg}{\ell}\left[\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} - 0\right] = \frac{mg\ell}{2}$$

A rugóerő

Foglalkozzunk most egy elhanyagolható tömegű, egyik végénél falhoz erősített rugóval (6-11 ábra). Az x tengely kezdőpontja essen egybe a még meg nem feszített rugó szabad végével. Ha a rugó végét F_k erővel nyújtani kezdjük a szabad végénél fogva, akkor kísérletileg megállapíthatjuk, hogy a nyújtáshoz szükséges erő (igen jó közelítéssel) arányos a szabad végnek a nyugalmi helyzettől mért elmozdulásával, azaz $F_k = kx$. (Hasonló eredmény adódik a rugó összenyomásakor is.) Newton harmadik törvénye alapján ebből következik, hogy a *rugó* ugyanekkora, de ellentétes irányú erőt gyakorol a kezünkre. Tehát akár nyújtjuk, akár összenyomjuk a rugót, abban mindig az eredeti helyzet visszaállítására szolgáló *visszatérítő erő* ébred.



a) A zéruspontot a még meg nem feszített rugó szabad végénél vettük fel.

b) Az x távolságnyira megnyújtott rugó.

c) Az összenyomott rugó szabad vége a $-x$ koordinátájú pontba kerül.

d) A *kezünkkel a rugóra* kifejtett külső erő $F_k = kx$.

e) A *rugó által a kezünkre* kifejtett erő $F_r = -kx$.

6-11 ábra
A megfeszített, ill. összenyomott rugóban ébredő erő. Az erő-megnyúlás függvénynek meredeksége a rugóállandó.

Az ideális rugónak ezt a tulajdonságát fejezi ki a **Hooke-törvény**[2]:

Hooke-törvény (ideális rugó)
$$F_r = -kx \qquad \text{(6-14)}$$

ahol k az ún. **rugóállandó** (a rugó merevségének mértéke), amelynek dimenziója erő/hosszúság, x pedig a rugó megnyúlása vagy összenyomódása az eredeti hosszhoz képest. A rugók többsége legalábbis egy meghatározott tartományban[3] pontosan követi ezt az összefüggést. A rugókkal kapcsolatos feladatok megoldásában gondosan meg kell különböztetnünk a rugóra gyakorolt $F_k = kx$, és a rugó által más testekre kifejtett $F_r = -kx$ erőt. Ezek az erők ellentétes irányúak, ezért a negatív előjel igen fontos.

A 6-12 ábrán a satírozott terület az F_k erő által végzett munkát mutatja, mialatt a rugó szabad végét nyugalmi helyzetéből x távolságura elmozdítjuk. A háromszög területe $\frac{1}{2}x\,kx = \frac{1}{2}kx^2$. Mivel a rugóerő ellentétes irányú az elmozdulással, ezért a *rugó által* végzett munka negatív: $W_r = -\frac{1}{2}kx^2$. A rugó ezt a munkát a kezünkön végzi.

A rugó feszítése során végzett munka

A külső erő által a rugón végzett munka
$$W_k = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(6-15)}$$

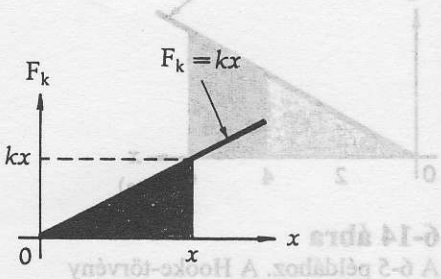
A rugó által egy külső testen végzett munka
$$W_r = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(6-16)}$$

Az integrálszámítás segítségével a külső erő munkája a megfelelő határok behelyettesítésével az alábbi módon számítható ki:

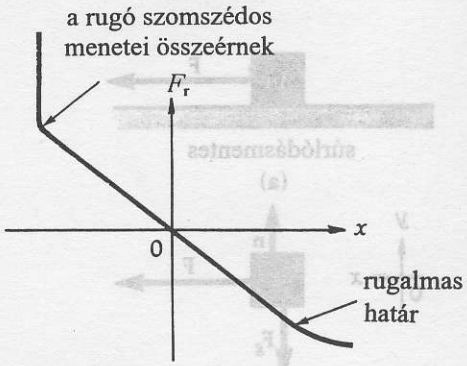
$$W_k = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x (kx)dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 - 0$$

$$W_k = \frac{1}{2}kx^2$$

Megjegyzés a görbe alatti területtel kapcsolatban. Amikor a rugó összehúzódik, azaz a megnyújtott helyzetből ellentétes irányba mozog, akkor az F_k külső erő munkája *negatív*, bár a 6-12 ábrán látható satírozott terület az x tengely fölé esik. (Az integrálszámítás alkalmazásakor a negatív előjel automatikusan adódik, amikor az integrálás határait x-től 0-ig választjuk.) Így amikor a munkát geometriailag egy területtel interpretáljuk, akkor mindig ellenőriznünk kell az **erő** és az **elmozdulás** irányát, hogy eldönthessük, vajon a munka pozitív-e vagy negatív. (Ugyanez vonatkozik természetesen a 6-11c ábrán látható F_r rugóerő alatti területre is.)



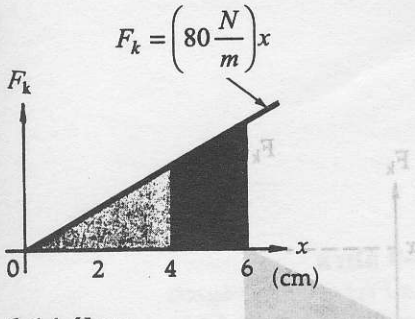
6-12 ábra
Amikor a munkavégzést az erő függvénygörbéje alatti területtel határozzuk meg, mindig figyelembe kell venni **F** és $\Delta\mathbf{s}$ irányát is. Amennyiben ellentétes irányúak, akkor a $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$ munka negatív.



6-13 ábra
A nem-ideális rugók viselkedése nagyobb mértékű nyújtás vagy összenyomás esetén eltér a Hooke-törvénytől.

[2] A formulát felfedezőjéről, Robert Hooke (1635-1703) angol fizikusról nevezték el, aki a törvényt a prioritást biztosítandó anagram formájában közölte (ceiiinosssttuv). Később közölte, hogy a betűszó az „ut tensio sic vis" latin mondat betűinek abc szerinti felsorolása. Jóllehet törvénynek nevezzük, mégsem fejez ki olyan alapvető természeti tényt, mint mondjuk a Newton-törvények. Inkább csak hasznos szabálynak tekinthető, amivel a valódi rugók viselkedése jól közelíthető.

[3] Ha egy rugót túlságosan összenyomunk, akkor szomszédos menetei összeérnek és további összenyomásához már igen nagy erő szükséges (6-13 ábra). Másrészt, ha a rugót erősen megnyújtjuk, akkor átléphetjük a rugó anyagának rugalmas határát és a rugó maradandóan deformálódik. Ekkor az erő megszüntével nem nyeri vissza eredeti hosszát és az erőhatás sem tesz eleget többé a Hooke-törvénynek.



6-14 ábra
A 6-5 példához. A Hooke-törvény szerint viselkedő rugó nyújtása.

6-5 PÉLDA

Egy, pontosan a Hooke-törvényt követő, egyik végén rögzített rugó szabad végét nyugalmi helyzetéből $F_k = (80\ \text{N/m})x$ külső erővel 4 cm-re elmozdítjuk. a) Határozzuk meg a külső erő munkáját! b) Mekkora további munka szükséges ahhoz, hogy a rugót további 3 cm-rel megnyújtsuk?

MEGOLDÁS

a) A 6-14 ábrának megfelelően az origót vegyük fel a meg nem feszített rugó szabad végénél. A külső erő az $F_k = (80\ \text{N/m})x$ törvény szerint változik. A külső erő által végzett munka megegyezik a [0,4] intervallum feletti háromszög területével.

$$W_k = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\left(80\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}04\ \text{m})^2 = 64\ \text{mJ}$$

b) A rugó további, $x_1 = 0{,}04$ m és 0,07 m közötti nyújtása során végzett munkát az ábrán a sötétebben satírozott terület mutatja. Tehát a szükséges további munka:

$$W_k = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\left(80\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)\left[(0{,}07\ \text{m})^2 - (0{,}04\ \text{m})^2\right]$$

$$W_k = 132\ \text{mJ}$$

Ugyanez határozott integrállal:

$$W_k = \int_a^b F_k\,dx = \int_{0{,}04\text{m}}^{0{,}07\text{m}} \left(80\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(x)dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(80\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)\left[x^2\right]_{0{,}04}^{0{,}07}$$

$$W_k = \left(\frac{1}{2}\right)\left(80\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)\left[(0{,}07)^2 - (0{,}04)^2\right] = 132\ \text{mJ}$$

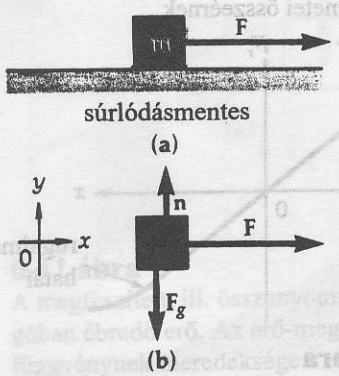
6.4 A kinetikus energia és a munkatétel

A következőkben azzal az esettel foglalkozunk, amikor egy test a munkavégzés hatására gyorsul. A 6-15 ábra egy súrlódásmentes felületen, pl. légpárnás sínen mozgó testet mutat. Fejtsünk ki a testre állandó **F** vízszintes erőt. A testre ható függőleges gravitációs erőt a felület kiegyensúlyozza, így a testre ható eredő erő megegyezik az **F** vízszintes erővel. Mivel **F** állandó, a test állandó gyorsulással mozog és teljesül a

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

kinematikai egyenlet. Megszorozva ezt az összefüggést m-mel, majd elosztva kettővel, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma(x - x_0) \qquad \textbf{(6-17)}$$



6-15 ábra
Vízszintes, állandó F erő hatására légpárnás asztalon mozgó test.

Az $\frac{1}{2}mv^2$ tagot K-val jelöljük és a v sebességgel mozgó m tömegű test **mozgási vagy kinetikus energiájának** nevezzük. Az energiának ez a formája a *test mozgása következtében alakul ki.*

Kinetikus energia (K) $$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6\text{-}18)$$

Vegyük észre, hogy v irányától függetlenül a kinetikus energia mindig *pozitív értékű skalár* mennyiség. A mozgási energia és a munka mértékegysége azonos, az SI-rendszerben *newton-méter* (Nm), más néven *joule* (J).

A 6-17 egyenletben az ma tényező megegyezik az F eredő erővel, azaz a jobb oldal $F(x-x_0)$, $= W$, ami éppen az F erő által végzett munka. A külső erők eredője által egy m tömegű testen végzett munka azt az energiát jelenti, amelyet az erőt létrehozó rendszer a testnek átad. Az eredő erő gyorsítja a testet, s ennek eredményeként a test $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ kinetikus energiához jut. Ez az összefüggés teljesen általánosan igaz, bár itt csak egydimenziós esetben, állandó erő hatására végbemenő mozgásra vonatkozóan mutattuk ki. A tétel tehát tetszőleges, változó erő hatására végbemenő mozgás esetén is érvényes. Ezt az általános elvet nevezzük **munkatételnek.**

Munkatétel — Az eredő erő munkája egy pontszerű testen $$\Delta W = \Delta K \qquad (6\text{-}19)$$

E rendkívül fontos tétel állításának lényege az, hogy az eredő erő munkája következtében a testre átvitt energia a test mozgási energiáját növeli. A tételt az energia és a munka definíciójának ismeretében Newton második törvényéből vezettük le. Bár a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény és a munkatétel lényegében az eredő erő egy pontszerű testre gyakorolt hatását fogalmazza meg, mégis különböző tartalmúak. A Newton második törvény *vektoregyenletre*, a munkatétel pedig *skaláris* relációra vezet. A skaláris egyenletek matematikai kezelése gyakran sokkal egyszerűbb, mint a vektoregyenleteké. Figyeljük meg ugyanakkor, hogy bár a munkatétel nem *bizonyítja*, hogy az energia minden körülmények között megmarad, a tétel eredménye összhangban van a megmaradási tétellel. (Az energiamegmaradás törvényével a következő fejezetben foglalkozunk.) Az az energia ugyanis, amit a munkavégzéssel átadunk egy pontszerű testnek, pontosan megegyezik a test mozgási energiájának növekedésével.

6-6 PÉLDA

4 kg tömegű test 2 m/s kezdeti sebességgel mozog egy súrlódásmentes, vízszintes felületen. a) Mekkora munkavégzéssel növelhető a test sebessége kétszeresére? b) Határozzuk meg az ehhez szükséges eredő erőt, ha a sebességváltozás 6 m-es úton következik be!

MEGOLDÁS

a) Induljunk ki az általános fizikai törvényből – a *munkatételből:*

$$\textit{Az eredő erő}\ \text{munkája} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Az adatok behelyettesítése után:

$$W = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(4\text{kg})\left[\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] =$$

$$= 24{,}0\ \text{Nm} = 24{,}0\ \text{J}$$

b) A munka $W = Fx$ definíciós egyenletéből F erőt kifejezve felírható, hogy

$$F = \frac{W}{x} = \frac{24\ \text{Nm}}{6\ \text{m}} = 4{,}00\ \text{N}$$

Az eredő erő a Newton-törvény és a kinematikai egyenletek felhasználásával is kiszámítható. Induljunk ki a

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

kinematikai egyenletből, és ebből fejezzük ki az a gyorsulást, majd helyettesítsük be az adatokat:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2(6\text{m} - 0)} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ekkor a $\Sigma F = ma$ törvényből azt kapjuk, hogy

$$F = (4\text{kg})\left(1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 4\ \text{N}$$

6-7 PÉLDA

Kezdetben nyugalomban lévő induló m tömegű tégla pusztán a gravitációs erő hatására szabadon esik. Mekkora a tégla sebessége h távolság megtétele után?

MEGOLDÁS

Esés közben csak a gravitációs erő hat a téglára. A munkatétel szerint az eredő erő munkája megegyezik a tégla mozgási energiájának megváltozásával.

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Mivel $v_0 = 0$ $$mgh = \frac{1}{2}mv^2 - 0.$$

Az egyenletet átrendezve, a v sebességre a következő összefüggés adódik:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Vegyük észre, hogy a sebesség nem függ a tömegtől, azaz (ha a légellenállás elhanyagolható) a szabadon eső testek nemcsak állandó gyorsulással esnek, hanem azonos távolságon, nyugalomból indulva azonos sebességre is gyorsulnak fel.

A mozgási energia következtében a mozgó testek más testeken munkát végezhetnek. Ennek megértésére gondoljuk végig azt az esetet, amikor egy test pl. a kezünk F erő kifejtésével megállít egy mozgó testet. Newton harmadik törvénye értelmében a mozgó test is F erővel hat a kezünkre. Amíg a test mozog, addig ez az erő munkát végez a kezünkön. Ez a munkavégzés pontosan egyenlő a test eredeti kinetikus energiájával. Így a mozgó testek kinetikus energiája éppen *azzal a munkával egyenlő, amit a test végezhet, míg nyugalomba jut.*

A most leírt folyamat jó példa két rendszer közötti energiacserére. Az a W munka, amelyet egy külső eredő erő egy testen akkor végez, midőn azt a

nyugalmi helyzetből felgyorsítja, egyenlő a testnek átadott a $W = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energiával. Megfordítva, a nyugalmi helyzetig lassuló test éppen $W = \frac{1}{2}mv^2$ munkát végez az őt lassító másik rendszeren. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a fenti folyamatok speciális esetei az általános energiamegmaradási törvénynek, amely a rendszerek között munkavégzéssel végbemenő energiacserét írja le.

A körpályán mozgó testek esetén a munkatételt érdemes külön is taglalni. Ha a test sebessége állandó nagyságú, akkor a rá ható eredő erő (a centripetális erő) a mozgás irányára merőlegesen, sugár irányban befelé mutat. Mivel a munkavégzés csak akkor nem zérus, ha az erőnek van a mozgás irányába eső összetevője, adódik, hogy a *centripetális erő nem végez munkát* a testen, és a tömegpont mozgási energiája és sebességének nagysága állandó marad. Amennyiben a körpályán mozgó részecske sebességének nagysága is változik, akkor léteznie kell tangenciális erőkomponensnek is. Kizárólag az erő tangenciális összetevőjének a munkája okozza a mozgási energia megváltozását. (Lásd még a kényszererőkre vonatkozó 1. lábjegyzetet!)

A mozgási energia megváltozása változó erő hatására

Térjünk vissza ismét a 6-15 ábrán vázolt egydimenziós esethez, tételezzük fel azonban, hogy az erő változik a távolság függvényében, azaz legyen $F = F(x)$. Osszuk fel a teljes elmozdulást olyan kicsiny részekre, hogy az egyes elmozdulásrészek mentén az erő és így a gyorsulás is közelítőleg állandó legyen. Alkalmazzuk ezután az előzőekben kapott összefüggéseket. A kicsiny Δx távolságon végzett ΔW munkát a

$$\Delta W = F(x)\Delta x$$

formulával számíthatjuk ki. Felhasználva, hogy $F = m\Delta v/\Delta t$, ahol Δv a mozgás során bekövetkező sebességnövekmény, azt kapjuk, hogy

$$\Delta W = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x = m\Delta v\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

azaz

$$\Delta W = m\Delta v\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textbf{(6-20)}$$

A $\Delta x/\Delta t$ mennyiség éppen a mozgó test Δt időtartam alatti átlagsebessége. Ha a sebesség egyenletesen változik v_0-ról v-re, akkor átlagértéke:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(v + v_0)}{2}$$

Behelyettesítve ezt és $\Delta v = v - v_0$ kifejezést a 6-20 egyenletbe, a ΔW elemi munka a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta W = \frac{1}{2}m(v - v_0)(v + v_0) = \frac{1}{2}m(v^2 - {v_0}^2)$$

Az a helyről b helyre elmozduló testen végzett teljes munka a kicsiny Δx szakaszokon végzett elemi munkák összege

$$W = \sum_{i=a}^{b} (\Delta W)_i$$

A kifejezés jobb oldalát kifejtve azt kapjuk, hogy

$$W = \frac{1}{2}m\left[({v_1}^2 - {v_a}^2) + ({v_2}^2 - {v_1}^2) + \ldots + ({v_b}^2 - {v_{b-1}}^2)\right]$$

ami mutatja, hogy az eredményből a kezdeti és végsebességet tartalmazó tagok kivételével minden más tag kiesik, azaz

$$W = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

Tehát az eredő erő által egy tömegponton végzett munka egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával akár változik az erő, akár nem.

A munkatétel levezetése integrálszámítással

Tekintsük a hely függvényében változó $F(x)$ erőt. Az ilyen eredő erő hatására $x = a$-tól $x = b$-ig elmozduló testen a munka végzés:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

Tudjuk, hogy $F(x) = mdv/dt$. Alkalmazzuk a dv/dt deriváltra a *láncszabályt* (G-I függelék ll. szabály)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

és helyettesítsük be az eredményt az $F(x) = mdv/dt$ egyenletbe. (Felhasználtuk, hogy $v = dx/dt$.) Azt kapjuk, hogy

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$

Így a munkára alkalmazva a G-II függelék 5. szabályát az adódik, hogy

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b mv\frac{dv}{dx}\,dx = \int_a^b mv\,dv = \left[m\frac{v^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

6-8 PÉLDA

A 6-16 ábrának megfelelően egy 500 kg tömegű hullámvasúti kocsi elhanyagolható súrlódású, görbevonalú pályán mozog. Sebessége az A pontban 3 m/s. Mekkora sebességgel érkezik a kocsi a pálya C tetőpontjára?

MEGOLDÁS

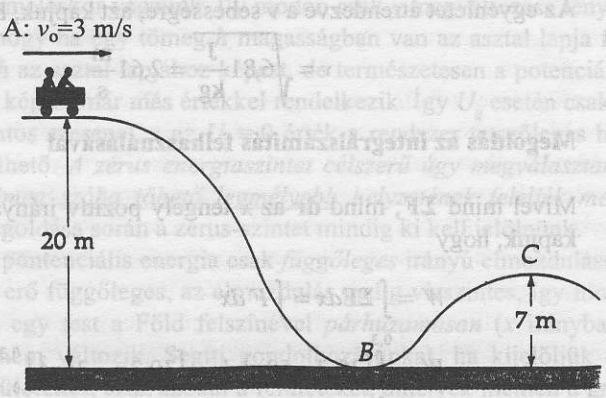
A kocsin csak a gravitációs erő végez munkát. (A pályától kifejtett normális irányú N erő – amint azt az 1. lábjegyzetben kifejtettük – *kényszererő*. Minthogy N merőleges a mozgás irányára, munkát nem végez.) Alkalmazzuk a munkatételt a gravitációs erő munkájára:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

A teljes függőleges elmozdulás $h = 20\text{m} - 7\text{m} = 13\text{m}$. Az egyenletből kifejezve a v sebességet felírható, hogy

$$v = \sqrt{2gh - v_0^2} = \sqrt{2\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(13\text{ m}) - \left(3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 16{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



6-16 ábra
A 6-8 példához.

6-9 PÉLDA

A 6-17 ábra szerint 2 kg tömegű test a következő erők hatása alatt csúszik egy sima lejtőn: a gravitációs erő, a Hooke-törvény ($k = 50$ N/m) szerint változó rugóerő, egy állandó F_k=40 N külső erő és a lejtő által kifejtett normális irányú kényszererő. A test nyugalomból indul úgy, hogy a rugó éppen feszítetlen. Határozzuk meg a test sebességét a munkatétel segítségével abban az időpontban, amikor eredeti helyzetéből 30 cm-rel mozdult el a lejtő mentén felfelé.

MEGOLDÁS

A munkatételben az erők eredője szerepel, ezért először a test vektorábráját kell megrajzolnunk (6-17b). A mozgás az x tengely pozitív irányának megfelelően a lejtő mentén felfelé történik, ezért határozzuk meg az eredő erő x irányú összetevőjét.

$$\Sigma F_x = F_k - mg\sin 30^\circ - kx$$

$$\Sigma F_x = 40\text{N} - (2\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\sin 30^\circ) - (50\text{N})x$$

$$\Sigma F_x = 30{,}2\text{N} - (50\text{N})x$$

A rugóerő miatt az eredő erő ΣF_x összetevője is változik a hely függvényében. Számítsuk ki a jobb oldal két tagjának munkáját egymástól függetlenül! A 30,2 N értékű *állandó* erő munkája:

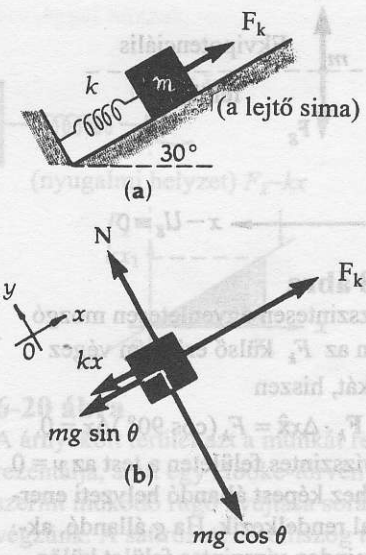
$$W_x = F_x x = (30{,}2\text{N})(0{,}3\text{m}) = 9{,}06\text{ J}$$

A rugóerő *munkája* negatív, ha a test felfelé mozog a lejtőn, hiszen a rugóerő a mozgás irányával ellentétes. A 6-l6 egyenlet szerint a *rugóerő* munkája a $[0,x]$ intervallumon történő elmozdulás során $-1/2kx^2$. Így

$$W_r = -\left[\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\right] = -\left[\frac{1}{2}\left(50\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}3\,\text{m})^2 - 0\right] = -2{,}25\text{ J}$$

Az eredő erő teljes munkája ennek megfelelően 9,06 J – 2,25 J = = 6,81 J. Helyettesítsük be ezt az értéket a munkatételbe:

$$\text{Az } \textit{eredő erő} \text{ munkája} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$



6-17 ábra
A 6-9 példához.

$$6{,}81\ \text{J} = \frac{1}{2}(2\ \text{kg})v^2 - 0.$$

Az egyenletet átrendezve a v sebességre, azt kapjuk, hogy

$$v = \sqrt{6{,}81\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 2{,}61\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Megoldás az integrálszámítás felhasználásával

Mivel mind $\Sigma\mathbf{F}$, mind **dr** az x tengely pozitív irányába mutat, azt kapjuk, hogy

$$W = \int \Sigma\mathbf{F}dx = \int F\,dx$$

$$W = \int_0^{0,3} [30{,}2 - 50x]\,dx = \left[30{,}2x - 25x^2\right]_0^{0,3}$$

$$W = \left[(30{,}2)(0{,}3) - (25)(0{,}3)^2\right] - [0] = 6{,}81\ \text{J}$$

(Az egyenletekben a mértékegységeket az egyszerűség kedvéért elhagytuk.) A megoldás innen az előző változathoz hasonlóan folytatható.

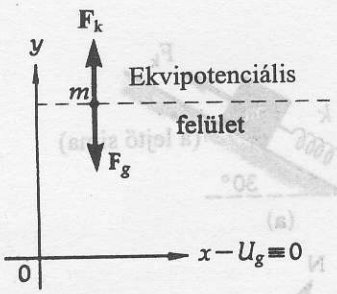
6.5 A helyzeti (potenciális) energia

Sok esetben a rendszerre ható erők munkája nem a rendszer kinetikus energiájának növekedésében jelentkezik, hanem ehelyett egyéb, könnyen visszanyerhető formában tárolódik.[4] Ha a rendszerben tárolt energia nő, akkor megnő a rendszer *munkavégző képessége* (potenciálja) is. Ezért a tárolt energiát **potenciális**, vagy **helyzeti energiának** nevezzük és U-val jelöljük.

Tegyük fel, hogy egy m tömegű testet lassan, állandó sebességgel függőlegesen y magasságba emelünk. Mivel a testet egyenletes sebességgel emeljük, pontosan akkora erőt kell kifejtenünk, mint a testre ható mg gravitációs erő. Amikor a test y magasságba érkezik, akkor a test-Föld rendszer munkavégző képessége nagyobb, mint annakelőtte; ha elengedjük a testet, akkor az esés során a gravitációs erő munkája következtében a test mozgási energiához jut.

A helyzeti energia változása mindig egy rendszert alkotó részecskék elrendeződésének megváltozásával kapcsolatos. Amikor az m tömegű testet állandó sebességgel emeljük, akkor W = (erő)·(elmozdulás)=$mg\ y$ munkát végzünk, a test kinetikus energiája azonban nem változik. A munkavégzés a helyzeti energia növelésére fordítódik. Mivel a test leejtésekor a Föld elmozdulása a hatalmas tömeg miatt elhanyagolható, a test elmozdulásához képest, szokás – kissé pongyolán – a helyzeti energiát pusztán a test helyzetének a megváltoztatásával kifejezni. Elfogadva ezt az egyszerűsítést, az m tömeg U_g **gravitációs potenciális energiáját** a következőképpen definiáljuk:

Gravitációs potenciális energia U_g (a Föld felszíne közelében) ahol $U_g = mg\,y$, $U_g \equiv 0$ ha $y = 0$ (feltéve, hogy g állandó és az y tengely pozitív iránya felfelé mutat) **(6-21)**

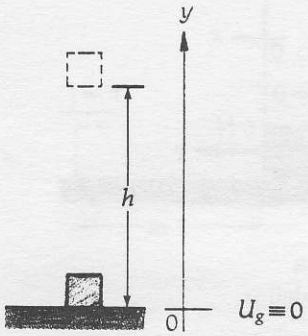


6-18 ábra
A vízszintesen egyenletesen mozgó testen az F_k külső erő nem végez munkát, hiszen $W = \mathbf{F}_k \cdot \Delta x\hat{\mathbf{x}} = F_k(\cos 90°)\Delta x = 0$. Így vízszintes felületen a test az $y = 0$ szinthez képest állandó helyzeti energiával rendelkezik. Ha g állandó, akkor minden vízszintes felület különböző energiájú, de ekvipotenciális felület.

[4] A rendszeren végzett munka egy része hővé (termikus energiává) alakulhat. A folyamatot a későbbiekben tárgyaljuk, most feltesszük, hogy hő nem fejlődött.

Mivel feltételeztük, hogy g állandó, ezért az a munka, amit egy tömeg 3 m-ről 4 m-re emelése során végzünk, egyenlő azzal a munkával, amit az 5 m-ről 6 m-re történő emeléskor végzünk. Ily módon csak y megváltozása lényeges. Nyilvánvaló, hogy ha egy tömeg h magasságban van az asztal lapja felett, akkor $U_g = mgh$ az asztal lapjához képest, de természetesen a potenciális energia a padlóhoz képest már más értékkel rendelkezik. Így U_g esetén csak a változás játszik fontos szerepet, s az $U_g \equiv 0$ érték a rendszer tetszőleges helyéhez hozzárendelhető. *A zérus energiaszintet célszerű úgy megválasztani, hogy a vizsgált tömeg szóba jöhető legmélyebb helyzetének feleljék meg.* Adott feladatok megoldása során a zérus-szintet mindig ki kell jelölnünk.

A gravitációs pontenciális energia csak *függőleges* irányú elmozdulások esetén változik (az erő függőleges, az elmozdulás pedig vízszintes, így nincs munkavégzés). Ha egy test a Föld felszínével *párhuzamosan* (x irányban) mozog, akkor U_g nem változik. Segíti gondolkozásunkat, ha kijelöljük az **ekvipotenciális felületeket**, azaz azokat a felületeket, amelyek mentén a gravitációs potenciális energia állandó (6-18 ábra). Ezek az ekvipotenciális felületek párhuzamosak a Föld felszínével.



6-19 ábra
A 6-10 példához.

6-10 PÉLDA

Egy bolti eladó hat doboz, egyenként 120 N súlyú konzervet tesz fel a padlóról a 130 cm magas polcra. Mennyi munkát végez?

MEGOLDÁS

Az eladó által végzett munka megnöveli a konzervdobozok helyzeti energiáját. A dobozok teljes súlya $6 \cdot 120 = 720$ N. A helyzeti energia 0 szintjét a padló szintjének megfelelően választva (6-19 ábra) számításainkat a következő sorrendben végezhetjük:

$$W = \Delta U_g$$

$$W = mg\,y - 0$$

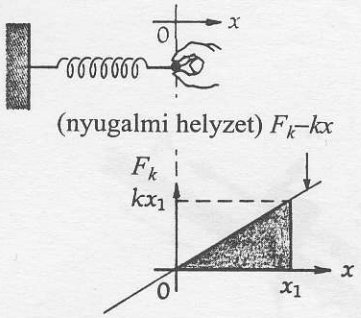
$$W = (720\ \text{N}) \cdot 130\ \text{cm} \overbrace{\left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)}^{\text{átszámítási tényező}} = 936\ \text{Nm}.$$

A megfeszített rugó helyzeti energiája

Helyzeti energia tárolására alkalmas rendszer pl. egy ideális rugó, amely a Hooke-tövény szerint $F_r = -kx$ erőt fejt ki. A 6-20 ábrán az origót a nyugalmi helyzetben lévő rugó szabad végénél vettük fel. Az $F_k = kx$ *külső* erő munkája midőn a rugót $x = 0$-ról $x = x_1$-re feszíti, az $F = F(x)$ görbe alatti háromszög területével egyenlő. Ez a terület $W = \frac{1}{2} kx_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2} kx_1^2$. Az integrálszámítás felhasználásával ugyanezt az eredményt kapjuk:

$$W = \int F_k\, dx = \int_0^{x_1} kx\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} kx^2\right]_0^{x_1} = \frac{1}{2} kx_1^2 - 0 = \frac{1}{2} kx_1^2$$

Ez a munka egyben a megfeszített rugóban tárolt U_r rugóenergiáját is jelenti. Ideális esetben ezt a tárolt energiát kaphatjuk vissza, ha a rugó összenyomva valamilyen külső testre F_r rugóerőt fejt ki, s azon munkát végez. Hasonló gondolatmenet alkalmazható a rugó összenyomására vonatkozóan, amikor a szabad vég az $x = 0$ helyről $x = -x_1$ helyre mozdul el. A **rugó U_r helyzeti** vagy **rugóenergiája** tehát az



6-20 ábra
A árnyékolt terület azt a munkát reprezentálja, amit egy Hooke-törvény szerint működő rugó nyújtása során végzünk. A satírozott háromszög területe az x_1 és kx_1 oldalú téglalap területének fele, azaz $1/2(kx_1^2)$.

A megfeszített rugóban tárolt helyzeti energia

$$U_r = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6\text{-}22)$$

(ahol k a rugóállandó és x a nyugalmi helyzettől mért megnyúlás vagy összenyomódás)

összefüggéssel adható meg.

Mikroszkópikusan szemlélve a rugóenergia a rugó atomjai közötti kötéstávolságok megváltozása miatt tárolódik. Ha ugyanis az atomok közötti távolságok a rugó megnyúlása vagy összenyomása miatt változnak, akkor az egyes atomok közötti elektrosztatikus potenciális energia is megváltozik. Így végső soron a rugóenergia is arra vezethető vissza, hogy a rendszer elemeinek (a rugó atomjainak) az elrendeződése megváltozik a feszítés során.

A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a potenciális energia és bizonyos, ún. *konzervatív* erők között kapcsolat van, s ez fontos szerepet játszik a mechanikai rendszerek vizsgálatában.

6.6 A súrlódási erő és a súrlódási hő

Az előzőekben olyan példákkal foglalkoztunk, ahol a rendszeren végzett munka a olyan tárolt U potenciális energiaként jelent meg, amely a rendszer fizikai konfigurációjában (elrendeződésében) előálló változások következménye. A tárolt potenciális energia könnyen visszanyerhető, ha a rendszer eredeti állapotára, visszaállva munkát végez egy másik, külső rendszeren. Most olyan példát tárgyalunk, amikor az energia olyan alakban tárolódik, hogy *nem* nyerhető vissza egykönnyen. Ezt a tárolt energiát *belső* vagy *termikus (hő) energiának* nevezzük, s a mechanikában többnyire *csúszó súrlódás eredményeként* jön létre. (Ha két tenyerünket jó erősen összedörzsöljük, akkor jelentős hő keletkezik, ami bizonyítja, hogy a munka hővé alakítható.) A folyamat megfordítása azonban nehéz, a belső energia változásának teljes visszaalakítása mechanikai munkavégzéssé problematikus. Az energia egy része többnyire hő formájában marad[5]. Emiatt a súrlódási erőt gyakran *disszipatív* erőnek nevezzük, hiszen a mechanikai energiát nehezen visszanyerhető, ill. más energiaformává nehezen átalakítható energiába viszi át.

Ha két csúszó felület között súrlódás lép fel, akkor mindig keletkezik bizonyos mennyiségű termikus energia, s ennek hatására emelkedik a csúszó testek hőmérséklete. Alapvetően a **termikus (belső) energia** a testeket alkotó részecskék véletlenszerű mozgásából származó mozgási és helyzeti energia összege. A súrlódási munka az egyik olyan lehetőség, amellyel a rendezetlen mozgás növelhető.

A fizikában a belső energia és a hő jelentése, amint azt a következő definíciók mutatják, különböző.

Belső energia — **Az atomok és a molekulák rendezetlen mozgásával kapcsolatos mozgási és helyzeti energia összege. Gyakran *termikus energiának* is nevezzük.**

Hő — **A kizárólag hőmérsékletváltozás következtében az egyik rendszerről a másik rendszerre átvitt termikus energia.**

Így a *termikus (belső) energia a „testekben tárolt energiát"* jelent, míg a *hő* kifejezés azt az *energiaátviteli* folyamatot takarja, amikor az egyik rendszerről a másikra termikus energia kerül át.

Bár a véletlenszerű mozgás kinetikus energiája része a termikus energiának, ez az energia *belső* energia és különbözik egy v sebességgel mozgó

[5] A termikus energiának munkává alakulása a *termodinamika* tárgya (19-23. fejezet).

makroszkópikus test kinetikus energiájától. A *(mechanikai) mozgási energia* kifejezés mindig egy tömegnek mint egésznek makroszkópikus mozgására vonatkozik, míg a *termikus* vagy *belső energiát* a részecskék mikroszkópikus mozgásával kapcsolatban használjuk. Így egyik esetben *rendezett mozgásról* van szó, amikor egy test összes atomja ugyanabban az irányban mozog, míg a másik eset az atomok *rendezetlen mozgását* jelenti.

A súrlódási erő hatására keletkező termikus energia meghatározására tekintsünk egy testet, amelyet érdes, vízszintes felületen állandó erővel húzunk (6-21 ábra). A test Δx elmozdulása során $\Delta W_F = F_x \Delta x$ munkát végzünk. Minthogy a test gyorsulása zérus, $F_x = f_k$, vagyis a súrlódási erő az általunk végzett munkával egyenlő nagyságú, de negatív munkát végez a testen: $\Delta W = -f_k \Delta$. A test kinetikus energiája, minthogy sebessége állandó, nem változik. A csúszás folyamán azonban E_t termikus (belső) energia keletkezik, ami éppen egyenlő az általunk végzett munkával. A belső energiát az f_k súrlódási erővel is kifejezhetjük, hiszen *nagysága* éppen megegyezik a súrlódási munkával:

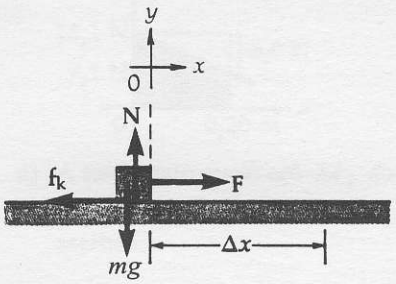
Termikus energia (E_t) (a csúszó súrlódás során keletkezik)

$$\Delta E_t = -f_k \Delta x \qquad \textbf{(6-23)}$$

Ügyeljünk az U_g és U_r mechanikai potenciális energiák (ezek könnyen átalakíthatók munkává vagy mozgási energiává) és az E_t termikus energia megkülönböztetésére. Az utóbbi *belső energia* és az atomok és molekulák véletlenszerű mozgásából származik, s nem könnyű más, pl. mechanikai energia formává átalakítani.

6-11 PÉLDA

Egy m tömegű testet a 6-21 ábrán látható módon vízszintes irányú, F = 6 N nagyságú erővel 3 m távolságra húzunk el állandó sebességgel. Milyen energiaváltozások mennek végbe?



6-21 ábra
A 6-11 példához. A testet állandó sebességgel húzzuk.

MEGOLDÁS

Mivel a test sebessége állandó, az **F** erő nagysága megegyezik az f_k súrlódási erővel. Az **F** erő a testen

$$\Delta W_F = (F)(\Delta x) = (6\text{ N})(3\text{ m}) = 18{,}0\text{ J}$$

munkát végez. Ennek során a súrlódási erő

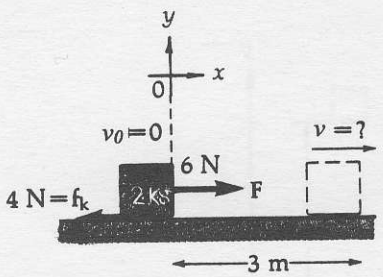
$$\Delta E_t = (f_k)(\Delta x) = (6\text{ N})(3\text{ m}) = 18{,}0\text{ J}$$

termikus energiát (hőt) ad át a csúszó felületeknek.

A külső erő munkát végez a testen, tehát energiát ad át neki. Hová lesz ez az energia? Nem változik sem a gravitációs potenciális energia (hiszen a test nem emelkedik), sem pedig a kinetikus energia (hiszen a test sebessége állandó). Szó sem lehet rugóenergiáról sem. Az egyetlen energiaváltozás a belső energia növekedése. Arra kell tehát következtetnünk, hogy az **F** külső erő munkája a súrlódási erő közvetítésével belső energiává alakult.

6-12 PÉLDA

A munkatétel természetesen teljesen általános érvényű és akkor is fennáll, ha a gyorsuló mozgás súrlódás jelenlétében zajlik. Ezt mu-



6-22 ábra
A 6-12 példához.

tatja be a következő példa. Egy 2 kg tömegű testet 6 N vízszintes erővel húzunk a padlón. A súrlódási erő 4 N. Mekkora a test sebessége 3 m út megtétele után? (6-22 ábra), ha kezdetben nyugalomban volt?

MEGOLDÁS

1. Módszer: A testre vízszintes irányú

$$\Sigma F_x = (6\ \mathrm{N} - 4\ \mathrm{N}) = 2\ \mathrm{N}$$

eredő erő hat.
Alkalmazzuk a munkatételt.

$$\text{Az } \textit{eredő erő} \text{ munkája} = \Delta K$$

$$\Sigma F(x) = \tfrac{1}{2}(mv^2 - mv_0{}^2)$$

Figyelembe véve, hogy $v_0 = 0$, az egyenletből kifejezhet a v sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2(F)(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2(2\ \mathrm{N})(3\ \mathrm{m})}{2\ \mathrm{kg}}} = 2{,}45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2. Módszer: Az eredmény helyességének ellenőrzésére oldjuk meg a feladatot Newton második törvényével és a kinematikai egyenletek felhasználásával is. Az eredő erő 2 N, így a test a_x gyorsulása

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{2\ \mathrm{N}}{2\ \mathrm{kg}} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

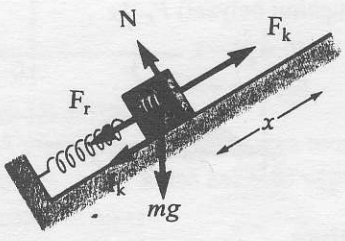
Helyettesítsük be ezt az értéket a kinematikai egyenletbe:

$$v^2 = v_0{}^2 + 2ax$$

$$v^2 = 0 + 2\left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3\ \mathrm{m}) = 6\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$$

A megoldás a következő:

$$v = \sqrt{6\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2{,}45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



6-23 ábra
A „rendszer" az m tömegű test és az a környezete, amelyben a rugóerő, a lejtőn ébredő erők, beleértve a súrlódási erőt, és a gravitációs erő belső erőknek számítanak. Az $\mathbf{F}_k$-erő az egyetlen, ami kívülről hat a testre.

6.7 A munkatétel átfogalmazása

A mechanikában gyakori és megszokott helyzet az, hogy egy rendszeren valamilyen külső erő munkát végez és ily módon energiát ad át neki. Ez történhet például úgy, hogy a rendszert kötéllel húzzuk, vagy más módon gyakorolunk rá toló vagy húzó erőt, de bármely más külső rendszer által gyakorolt erő munkavégzéssel energiát vihet át a vizsgált rendszerre. A rendszerben magában is ébredhet természetesen gravitációs, rugalmas vagy súrlódási erő. Ezek azonban *belső* erők, s most a külső erő hatására összpontosítunk. A 6-23 ábra egy különböző belső erőket tartalmazó rendszert mutat be, amelyre egyetlen F_k külső erő hat.

Ha egy rendszeren adott külső erő végez munkát, akkor a munkatétel kissé átfogalmazva a megszokottól eltérően is felírható. Ebben a formájában lényegében azt fejezi ki, hogy energia nem keletkezhet és nem semmisülhet meg, azaz *ha külső forrásból valamilyen energia kerül egy rendszerbe, akkor az megváltoztatja a rendszer mozgási, helyzeti vagy belső energiáját.* Ennek

bizonyítására induljunk ki a (6-19) egyenlettel megfogalmazott munkatételből. Eszerint a külső erők eredője által végzett munka megegyezik a test kinetikus energiájának megváltozásával. A 6-23 ábrán látható m tömegű test esetén (ezt a testet most olyan rendszer részének tekintjük, amelyben a lejtő által kifejtett kényszererő, a gravitációs erő és a rugóerő belső erőnek számít)

$$[\text{A testre ható erők eredőjének munkája}] = \Delta K$$

$$\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}\right] = \Delta K$$

$$(-\Delta U_s) + (-\Delta U_r) + (-\Delta E_t) + \begin{bmatrix}\text{Az } \mathbf{F}_k \text{ külső} \\ \text{erő munkája}\end{bmatrix} = \Delta K$$

Átrendezve az összefüggést:

A munkatétel (átfogalmazott változat)

Adott F_k külső erő által a testen végzett munka (ez az erő különbözik azoktól, amelyek munkáját a jobb oldali energiatagokkal már figyelembe vettük)

$$W_k = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta U_t \qquad \textbf{(6-24)}$$

Hasonlítsuk össze a munkatételnek ezt a formáját a *125.* oldalon található (6-19) egyenlettel! Vegyük észre, hogy a (6-19) egyenletben a testre ható *összes* erők munkája szerepel, míg a (6-24) egyenletben *egyetlen* $\mathbf{F}_k$ erő munkáját emeljük ki. Ezt az erőt világosan elkülönítjük és egy külső rendszer hatásának tekintjük, bár felléphet még gravitációs, súrlódási, rugóerő vagy további más erő is. (Ezeket az utóbbiakat most a rendszerhez tartozó erőknek tekintjük.) Az $\mathbf{F}_k$ erő azonban nem lehet kapcsolatban egyetlen, a 6-24 egyenlet jobb oldalán szereplő energiataggal sem.
Végül megemlítjük, hogy ΔE_t mindig pozitív mennyiség, mert a tisztán mechanikai változásokban a termikus energia nem csökkenhet.

6-13 PÉLDA

A 6-24 ábrán látható doboz 2 m/s kezdősebességgel mozog a vízszintes talajon. A doboz és a talaj között a csúszó súrlódási együttható 0,2. A dobozra 4 m hosszúságú úton a mozgás irányában $F_k = 10$ N vízszintes erő hat. Mekkora a doboz végsebessége a 4 m-es út megtétele után?

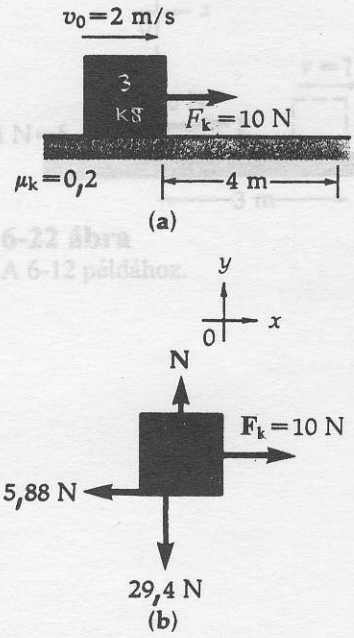
MEGOLDÁS

A 6-24 ábrán látható a feladat vektorábrája. A függőleges erőkomponensek összege zérus, így $N = (3\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) = 29{,}4$ N, következésképpen a csúszó súrlódási erő $f_k = kN = 0{,}2\ (29{,}4\text{ N}) = = 5{,}88$ N. Alkalmazzuk a munkatétel (6-24) szerint átfogalmazott változatát.

$$\begin{bmatrix}\text{Az } \mathbf{F}_k \text{ külső erő} \\ \text{által végzett munka}\end{bmatrix} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta E_t$$

$$F_k \cdot d = \frac{1}{2} m\left(v^2 - v_0^{\,2}\right) + 0 + 0 + f_k \cdot d$$

Behelyettesítve az adatokat és átrendezve az egyenletet a v sebességre a következő összefüggést kapjuk:



6-24 ábra
A 6-13 példához.

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[F_k \cdot d + \frac{1}{2}mv_0^2 - f_k - d\right]$$

$$v^2 = \frac{2}{(3\text{kg})}\left[(10\text{N})(4\text{m}) + \frac{1}{2}(3\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - (5{,}88\text{N})(4\text{m})\right]$$

$$v = 5{,}47\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6-14 PÉLDA

A következő feladatban az energia minden eddig tárgyalt alakja szerepel. A 6-25 ábrán látható 30°-os lejtőn fekvő testre a lejtő irányával párhuzamosan felfelé 30 N nagyságú külső erő hat. A test és a lejtő között a csúszó súrlódási együttható $\mu_k = 0{,}3$. A test egy $k = 40$ N/m rugóállandójú rugóval rögzítjük, és a koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a nyugalmi helyzetben $x_0 = 0$. Mekkora lesz a test sebessége, miután 0,2 m-t haladt felfelé a lejtőn? Oldjuk meg a feladatot a munkatétel (6-19) és (6-24) alakjával is.

MEGOLDÁS

1. módszer: A (6-24) egyenletet alkalmazva, az **F** külső erő munkáját a rendszer különböző energiafajtáinak megváltozásával teszszük egyenlővé. Mivel a gravitációs potenciális energia is változhat, ki kell jelölnünk a zérusszintjét. Ezt a szintet a test nyugalmi helyzetében vesszük fel: $U_g \equiv 0$.

$$\begin{bmatrix}\text{Az } \mathbf{F}_k \text{ külső erő} \\ \text{munkája}\end{bmatrix} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta U_t$$

$$(F)(x) = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 + f_k x \qquad \textbf{(6-25)}$$

A test függőleges emelkedése $h = x \sin 30° = 0{,}2$ m. $\sin 30° = 0{,}1$ m. A súrlódási erő a vektorábra alapján határozható meg:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg\cos 30°) = (0{,}3)(2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\cos 30°) = 5{,}1\,\text{N}$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket a (6-25) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$(30\text{N})(0{,}2\,\text{m}) = \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(v^2) + (2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}1\,\text{m})$$

$$+\frac{1}{2}\left(40\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}04\,\text{m}^2) + (5{,}1\,\text{N})(0{,}2\,\text{m})$$

$$6{,}0\,\text{Nm} = (1\,\text{kg})(v^2) + (2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}1\,\text{m})$$

Ebből:

$$v^2 = \frac{2{,}22\,\text{Nm}}{1\,\text{kg}} = 2{,}22\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

majd gyököt vonva: $v = \sqrt{2{,}22\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1{,}49\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2. módszer: A munkatétel (6-19) alakjának felhasználásához határozzuk meg az *eredő* erőnek a mozgás irányával párhuzamos összetevőjét. A vektorábra szerint:

$$\Sigma F_x = 30\,\text{N} - kx - \mu_k N - mg\sin 30^\circ$$

ahol $\mu_k N = \mu_k (mg\cos 30^\circ) = (0{,}3)(2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\cos 30^\circ) = 5{,}1\,\text{N}$

és $$mg\sin 30^\circ = (2\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\sin 30^\circ) = 9{,}8\,\text{N}$$

Így $$\Sigma F_x = 30\,\text{N} - \left(40\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)x - 5{,}1\,\text{N} - 9{,}8\,\text{N} = [15{,}1 - 40\,x]\,\text{N}$$

(ahol az x távolságot méterben mérjük).

A ΣF_x eredő erő a rugóerő miatt az x távolság függvényében lineárisan változik. Mivel $x = 0$ helyen a kezdeti érték

$$(F_{\text{eredő}})_0 = [15{,}1 - 40\cdot(0)] = 15{,}1\,\text{N}.$$

az $x = 0{,}2$ m helyen felvett értéke pedig

$$F_{\text{eredő}} = [15{,}1 - 40\cdot(0{,}2)] = 7{,}1\,\text{N}\ ,$$

Ezért az erő által végzett munka a fenti lineáris függvény alatti területnek ezen határok közötti része:

A téglalap területe:	$7{,}1\,\text{N} \times 0{,}2\,\text{m}$	$= 1{,}42\,\text{N·m}$
A háromszög területe:	$1/2 \times 8{,}0\text{N} \times 0{,}2\,\text{m}$	$= \underline{0{,}80\,\text{N·m}}$
	A teljes terület	$= 2{,}22\,\text{N·m}$

Behelyettesítve ezt az értéket a (6-18) munkatételbe, azt kapjuk, hogy

$$[\text{Az } \textit{eredő erő} \text{ munkája}] = \Delta K$$

$$2{,}22\,\text{Nm} = \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2\right)$$

$$2{,}22\,\text{Nm} = \left[\frac{1}{2}(2\,\text{kg})v^2 - 0\right]$$

Átrendezve: $$v^2 = \frac{2{,}22\,\text{Nm}}{1\,\text{kg}} = 2{,}22\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

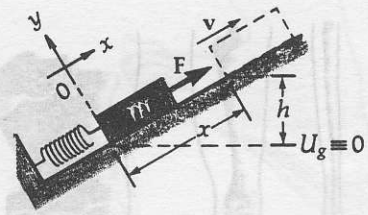
Elvégezve a gyökvonást: $$v = \sqrt{2{,}22\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1{,}49\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Megoldás integrálással:

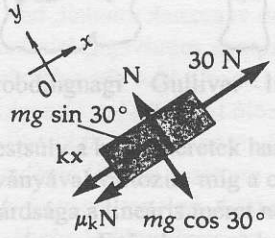
Az eredő erő munkája (a görbe alatti terület) a

$$W = \int \mathbf{F}_{\text{eredő}}\, d\mathbf{r}$$

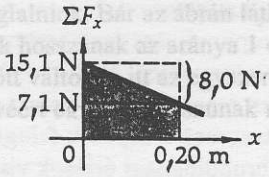
integrállal is meghatározható. Mivel mind **F**, mind **dr** az x tengely pozitív irányába mutat és cos 0° = 1, ezért



a) k a rugóállandó, μ_k a test és a lejtő közötti csúszó súrlódási együttható.



b) A test vektorábrája



c) A testre ható eredő erő ΣF_x ábrázolása a koordinációs rendszerben.

6-25 ábra
A 6-14 példához.

$$W = \int F_x \, dx = \int_0^{0,2} [15{,}1 - 40x] \, dx$$

Elvégezve az integrálást (G-II függelék) és behelyettesítve a határokat, adódik hogy:

$$W = \left[15{,}1x - 20x^2\right]_0^{0,2\text{m}} = [3{,}02 - 0{,}8] - 0 = \underline{\underline{2{,}22\ \text{Nm}}}$$

A megoldás további része azonos a fentiekkel.

6.8 Belső energiaforrások

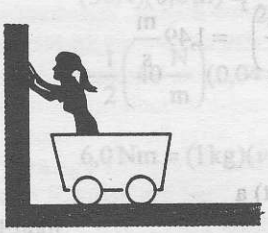
Egyes esetekben a rendszerrel közölt energia forrásai nem nyilvánvalóak. Tekintsünk pl. egy vízszintesen guruló kocsin elhelyezkedő kislányt. Ha a kislány úgy jön mozgásba, hogy ellöki magát egy rögzített faltól, akkor, amint azt a 6-26 ábra is mutatja, a külső erő lényegében a kislány-kocsi rendszerre hat. Ugyanakkor, noha a rendszer mozgási energiához jut, az $\mathbf{F}_1$ *külső erő nem végez munkát, hiszen a fal elmozdulása zérus.* Honnan származik a mozgási energia? Ebben az esetben a kislány izmainak a munkájától. Az energia most *belső* forrásból származik. A helyzet bizonyos értelemben analóg azzal, amikor egy összenyomott rugót engedünk munkavégzés közben „szétugrani".

A belső erők munkájára újabb példa a guggolásból való felállás. A gravitációs potenciális energia növekedését ebben az esetben nem a talaj által a lábainkra kifejtett külső erő munkája fedezi, hanem izmaink *belső* munkavégzéséből származik.

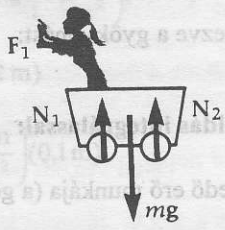
Lilliputiak és Brobdingnagiak

Jonathan Swift Gulliver utazásai című, 1726-ban megjelent regényének főhőse, Gulliver különös országokba látogat. Lilliputban, a törpék országában a lakosság hosszmérete csak tizenkettede Gulliver testhosszúságának, míg a Brobdingnagban lakó óriások tizenkétszer nagyobbak nála. A méreteknek ez a változása csodálatraméltó fizikai képességekhez vezet. Egyes esetekben Swift eltalálja ezeket a tulajdonságokat, máskor azonban téved, ill. nem vonja le a megdöbbentő következtetéseket. Nézzünk néhányat!

Csontvázunknak elsősorban testünk súlyát kell tartania, és ellenállónak kell lennie a hajlító és csavaró igénybevételekkel



a) A kezdetben nyugalomban levő kislány úgy jön mozgásba, hogy ellöki magát a rögzített faltól.



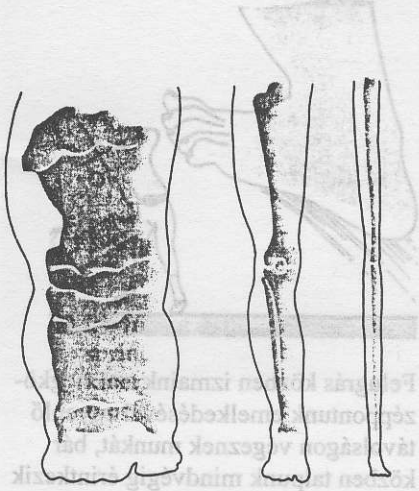
b) A kislány-kocsi rendszer vektorábrája.

6-26 ábra
Az ábra olyan különleges esetet mutat, amikor az $\mathbf{F}_1$ külső erő nem végez munkát a rendszeren. A rendszer mozgási energiáját a kislány izomtevékenysége és az ehhez szükséges belső energiaforrások fedezik.

szemben. Hogyan változik a csontok ellenállása a nyomóerő hatására, ha a méret változik? Ha egy 5 cm × 5 cm keresztmetszetű csont W súlyt bír el, akkor egy lineáris méreteiben kétszer akkora csontdarab teherbírása 4 W (hiszen az eredeti méretű csontból négyet kell szorosan egymás mellé tennünk, hogy keresztmetszete 10 cm × 10 cm legyen). Mit mondhatunk a végtagok mozgatásához és a munkavégzéshez szükséges izomerőről? Az izomrostok bizonyos értelemben a megfeszített gumiszálakhoz hasonlóan működnek, amelyeket akaratunk szerint húzhatunk össze és ernyeszthetünk el. Az izomrostok száma jó közelítéssel arányos az izomköteg keresztmetszetével. Így a lineáris méret megduplázása az izomerő megnégyszerezését jelenti. A szorzó ugyanaz, mint ami a csontok teherbíró képességében fellépett. Ez szerencsés, hiszen így növekedésünk során az izomerő lépést tart a csontok szilárdságával.

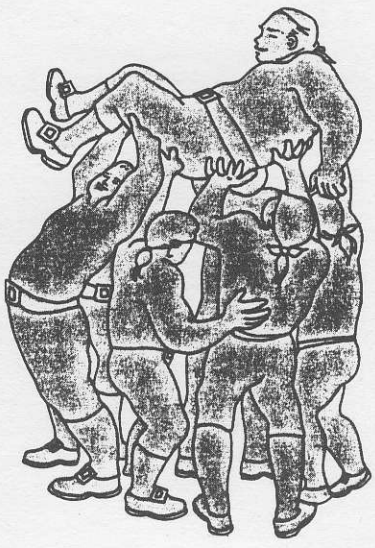
Vegyük azonban figyelembe, hogy súlyunk a test térfogatával arányos, ami a lineáris méretek harmadik hatványával változik. Így a kétszeres hosszméret nyolcszoros súllyal jár együtt, s ez azt jelenti, hogy a csontoknak relatíve sokkal nagyobbaknak kell lenniök, hogy a nagy súlyt elbírják. Ezt a természet is igazolja. Az egér csontrendszere az állatka súlyának csak 5-8 %-át jelenti, míg az embernél ez az arány eléri a 17 %-ot. A nagyobb állatok, lovak, elefántok csontrendszerének súlya a teljes súly még nagyobb hányadát képezi. Teljesen valószínűtlen, hogy a brobdingnagiak elegendően erős csontok mellett még olyan izomtömeggel is rendelkezhessenek, ami a hatalmas súlyú csontok és izmok mozgatásához szükséges. A vízi állatok és halak súlyának nagy részét kiegyenlíti a felhajtóerő, így nincs szükségük a fenti gondolatmenetből adódó hatalmas csontokra és izmokra. Ez az oka, hogy pl. a vízből kiemelt bálnák általában sajnálatos módon összeroppannak és elpusztulnak, mert csontjaik és izmaik képtelenek megtartani hatalmas testük súlyát.

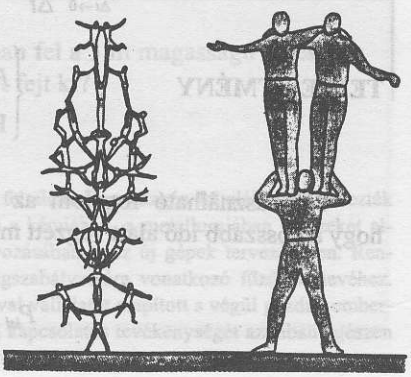
Igen érdekesen hat a méretek változása a gyaloglás sebességére is. A láb természetes lengési frekvenciája a láb hosszúságának a négyzetgyökével fordítottan arányos. (Lásd 15-7 fejezet, A fizikai inga.) Hasonlítsuk össze egy felnőtt és a félakkora hosszúságú lábbal rendelkező gyermek gyaloglási sebességét. Ugyanakkora szögben kilendített lábbal a felnőtt kétszer olyan hosszút lép mint a gyermek. A szabadon kilendülő lábbal lépő gyermek lépteinek a frekvenciája $\sqrt{2}$-ször nagyobb, mint a felnőtté. Így az *alatt az idő alatt*, míg a felnőtt egy ℓ hosszúságú lépést megtesz, a gyerek $\sqrt{2}$ lépést tesz meg, de az csak feleakkora hosszúságú. A gyermek gyaloglási sebessége tehát – az egy másodperc alatt megtett lépések száma szorozva a lépéshosszal – csak $0{,}5\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ -szöröse a felnőtt gyaloglási sebességének. Ha egy gyereket arra kényszerítünk, hogy egy felnőtt tempójában sétáljon, hamarosan rettenetesen elfá-



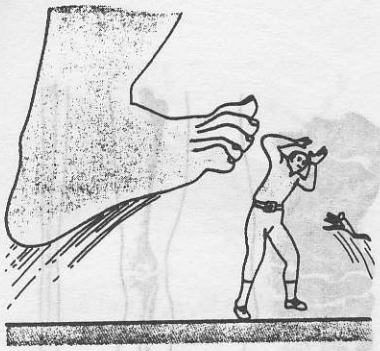
brobdingnagi Gulliver lilliputi

A testsúly a hosszméretek harmadik hatványával változik, míg a csontok szilárdsága a lineáris méret négyzetével arányos. Ezért ha a test hosszmérete nő, a növekvő súly tartásához a csontoknak a testtömegből egyre nagyobb és nagyobb részt kell elfoglalniok. Bár az ábrán látható lábak hosszának az aránya 1 és 12 között változik, itt az egyszerűség kedvéért egyenlő hosszúnak rajzoltuk





Egy ember két embernyi súlyt képes a vállán megtartani. A méretarányra vonatkozó következtetéssel arra juthatunk, hogy a lilliputiak látványos mutatványra képesek – 24 társuk súlyát bírják el, míg az óriás brobdingnagiakból hatan kellenek ahhoz, hogy egyetlen társukat felemeljék.



Felugrás közben izmaink a tömegközéppontunk emelkedésével egyenlő távolságon végeznek munkát, bár közben talpunk mindvégig érintkezik a talajjal. (Lásd a 10.4 tömegközéppontról szóló fejezetet.) A tömegközéppont ily módon szerzett kinetikus energiája, miután a talajtól elválva felemelkedünk, helyzeti energiává alakul. A méretarányokból adódó gondolatmenet arra vezet, hogy a *felugrás magassága független az ugró testének méretétől.* Az atléták felugráskor kb. 1 m magasságba emelik tömegközéppontjukat (ez a testmagasságnak mintegy fele). A lilliputiak ugyanilyen magasra, azaz testmagasságuk hatszorosára képesek felugrani. Emiatt a brobdingnagi óriások viszont testmagasságuknak csak huszonnegyed részét képesek ugrani, ami nem túlságosan lenyűgöző teljesítmény. Az állatvilág jól igazolja ezt a törvényt; a bolha testhosszának 200-szorosára, a szöcske 30-szorosára, a kutya azonban már csak 2-3-szorosára tud felugrani, míg az elefánt ugrásra egyáltalán nem képes.

rad, izmai fájni kezdenek attól, hogy a lábat a természetes lengési frekvenciánál gyorsabban mozgatja előre és hátra. Ezért ha egy kisgyerekkel sétáló felnőtt nincs tekintettel az eltérő tempóra, nem csodálkozhat, hogy a gyerek gyorsan elfárad és feladja a sétát.

P. K. Weyl, *Men, ants, elephants*, Viking Press, 1959, and F. W. Went, „The size of Man" *American Scientist*, **400**, 56, 1968. Továbbá *„Size and shape in biology"*, Thomas Mc Mahon, *Science*, 179, (márc 25. 1973) pp.1201-1204.

A példák mutatják, hogy pusztán a külső erők figyelembevétele gyakran nem elegendő a folyamatban résztvevő összes energiaforrás felderítésére. A munkatételben a belső energiaforrások W_b munkáját is figyelembe kell venni, azaz

$$\left[W_{\text{külső erő}} + W_b\right] = \Delta K \tag{6-26}$$

6.9 A teljesítmény

A teljesítmény a „munka sebessége". Sok esetben nem elegendő, ha azt tudjuk, hogy a munkavégzés hatására milyen sebességet szerez egy test, hanem érdemes azt is tudni, hogy milyen gyorsan jutott ehhez a sebességhez. Nemcsak a munkavégzés során átadott összes energia érdekelhet bennünket, hanem gyakran a munkavégzés sebessége külön is figyelmet érdemel. Egy gépkocsit akár a mókuskereket hajtó aranyhörcsög is felemelhet néhány méter magasra, az emelésre mégis többnyire olyan gépet használunk, ahol a folyamat gyorsabb, a „munkasebesség" sokkal nagyobb. Az ipari társadalmakban a teljesítmény fogalma különösen fontos szerepet játszik.

Induljunk ki az elemi munka

$$\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$$

definíciójából, ahol ΔW az $\mathbf{F}$ erő által a kicsiny $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során végzett kicsiny (elemi) munka. Ha a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás Δt idő alatt következik be, akkor a munka időbeli sebessége a

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

összefüggéssel adható meg. Ha a Δt időtartam zérushoz tart, megkapjuk a P **teljesítmény** definícióját:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

TELJESÍTMÉNY

$$\begin{cases} P = \dfrac{dW}{dt} & \text{(6-27)} \\ \mathrm{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} & \text{(6-28)} \end{cases}$$

Jól használható fogalom az **átlagteljesítmény** is, amit úgy kapunk, hogy a hosszabb idő alatt végzett munkát elosztjuk az eltelt idővel:

$$P_{\text{átl}} = \frac{\text{Munka}}{\text{Idő}} \tag{6-29}$$

A teljesítmény mértékegysége az *SI-rendszerben* N·m/s, vagyis J/s, amit **watt**-nak (W)[6] nevezünk. A watt általánosan használt többszöröse a *kilowatt* (kW), ami 1000 watt. Régebbi, de néha még ma is előforduló teljesítményegység a lóerő (hp), amit eredetileg egy átlagos erejű ló által hosszabb ideig szolgáltatható teljesítményként definiáltak. (Valójában a lovak többsége ennél kissé kevesebbre képes, míg egy ember rövid ideig ezt meghaladó teljesítménnyel is dolgozhat.) A lóerő definíció szerint:

$$1\ \text{hp} = 746\ \text{watt},$$

de általánosan használt gyakorlati szabály, hogy 1 hp=3/4 kW. Bár a kilowattot általában elektromos egységnek tekintik, természetesen bármely más egységhez hasonlóan a fizika minden területén használható. Manapság a gépkocsik teljesítményét is a lóerő helyett inkább kilowattban szokás megadni. (Erre Magyarországon törvény is kötelez.) A teljesítményegységek használatában régebben szokásos különbségtételnek történeti okai vannak, az elektromos eszközök később fejlődtek ki, és akkor a metrikus rendszer már elterjedt, ezért ezekre vonatkozóan a lóerőt sohasem használták.
Szokásos *energia* (és nem teljesítmény) egység a **kilowatt-óra** (kW·h), ami megegyezik azzal a munkával, amit egy 1 kW állandó teljesítményű berendezés 1 óra alatt végez.

6-15 PÉLDA

Egy farmotoros csónak 16 km/ó állandó sebességgel mozog. A víz ellenállása 70 N. Mekkora teljesítményt ad le a motor kW-ban?

MEGOLDÁS

Mivel a csónak egyenletesen mozog, a motor húzóereje pontosan egyenlő a víz ellenálló erejével. Így a motor teljesítménye:

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F\cdot v\ \cos\ 0^\circ = F\cdot v.$$

Behelyettesítve az adatokat

$$P = 70\ \text{N}\cdot 16\frac{\text{km}}{\text{ó}}\ \overbrace{\left(\frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\frac{\text{km}}{\text{ó}}}\right)}^{\text{átszámítási tényező}} = 311{,}1\ \text{watt} = 0{,}311\ \text{kW}$$

6-16 PÉLDA

Egy 60 kg tömegű fiú 2,5 s alatt rohan fel a 3 m magasságú lépcsősoron. Mekkora átlagos teljesítményt fejt ki?

---

[6] Az egységet Sir James Watt (1736-1819), skót feltalálóról, a gőzgép feltalálójáról nevezték el. Watt figyelemreméltó eredményeket ért el a kémiában, a metallurgiában és ezeket alkalmazta, a mechanikai mozgások tanulmányozásában, s az új gépek tervezésében. Rengeteg szabadalom, közöttük a gépek sebességszabályzójára vonatkozó fűződik nevéhez. Watt sikeres üzletember is volt, egy kollégájával vállalatot alapított s végül gazdag emberként vonult vissza. A gőzgép tökéletesítésével kapcsolatos tevékenységét azonban egészen 83 éves korában bekövetkezett haláláig folytatta.

MEGOLDÁS

Feltéve, hogy a fiú állandó sebességgel fut, kinetikus energiája nem változik. Lábizmai azonban munkát végeznek, s ez a munka a helyzeti energia növelésére fordítódik. Az átlagos teljesítmény:

$$P_{átl} = \frac{\text{Munka}}{\text{Idő}} = \frac{mgh}{t}.$$

Az adatokat behelyettesítve

$$P_{átl} = \frac{(60\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3\,\text{m})}{(2{,}5\,s)} = 706\frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 706\ \text{W}$$

6.10 A hatásfok

A gépeket általában arra használjuk, hogy valamilyen energiafajtát hasznos munkává alakítsunk. A súrlódás miatt azonban a gépek által végzett munka mindig kevesebb, mint a gép által felhasznált energia. A gépek η hatásfokát az

A gép η hatásfoka

$$\eta = \frac{\text{Hasznos munka}}{\text{Felhasznált energia}} \qquad \textbf{(6-31)}$$

összefüggéssel definiáljuk. A hatásfokot gyakran százalékban adjuk meg; **százalékos hatásfok**$=\eta \cdot 100\%$.

6-17 PÉLDA

Lejtős szállítószalagot 3 kW elektromos teljesítményű motor működtet. A szalag apróra tört követ szállít 10 m magasra 40000 kg/m sebességgel. Mekkora a rendszer hatásfoka?

MEGOLDÁS

A szállítószalag által 1 s alatt végzett munka

$$\frac{\Delta mgh}{\Delta t} = \frac{(4\times10^4\ \text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\,\text{m})}{(1\,\text{h})\left(\frac{3600\,\text{s}}{1\,\text{h}}\right)} = 1089\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

A betáplált energia másodpercenként 3 kW = 3000 J/s, azaz a hatásfok:

$$\eta = \frac{\text{a másodpercenként végzett munka}}{\text{a másodpercenként felvett energia}} = \frac{1089\ \text{J/s}}{3000\ \text{J/s}} = 0{,}363 \text{ vagy } 36{,}3\ \%$$

A jövő energiaforrásai

A civilizációnk előtt álló legbonyolultabb kérdés az energiakérdés. A probléma bonyolult keveréke a technikai ismereteknek, a gazdaságnak, politikának és az elviselhetőnek tekinthető környezeti károkkal kapcsolatos szubjektív érzéseknek. Ez utóbbi annyira megfoghatatlan, a vélemények oly széles skálán változnak, hogy az energiával kapcsolatos minden vita óhatatlanul rendkívül bonyolulttá válik.

Az Egyesült Államok, ahol a világ lakosságának csak 6,4%-a él, jelenleg a világon megtermelt összenergiának 35%-át fogyasztja. Ugyanakkor energiaszükséglete egyre gyorsuló ütemben nő, s nemcsak azért, mert lakossága szaporodik, hanem azért is, mert az utóbbi tíz évben az egy főre jutó energiafogyasztás is erőteljesen nőtt.

Minden előrejelzés arra utal, hogy a növekedés folytatódik. Ha ezt összevetjük azzal, hogy a világ lakosságának többsége, amely fejlődő országokban él, szintén több energiáért sóvárog, megállapítható, hogy hosszú távon az energiaigény drámaian komoly kérdés.

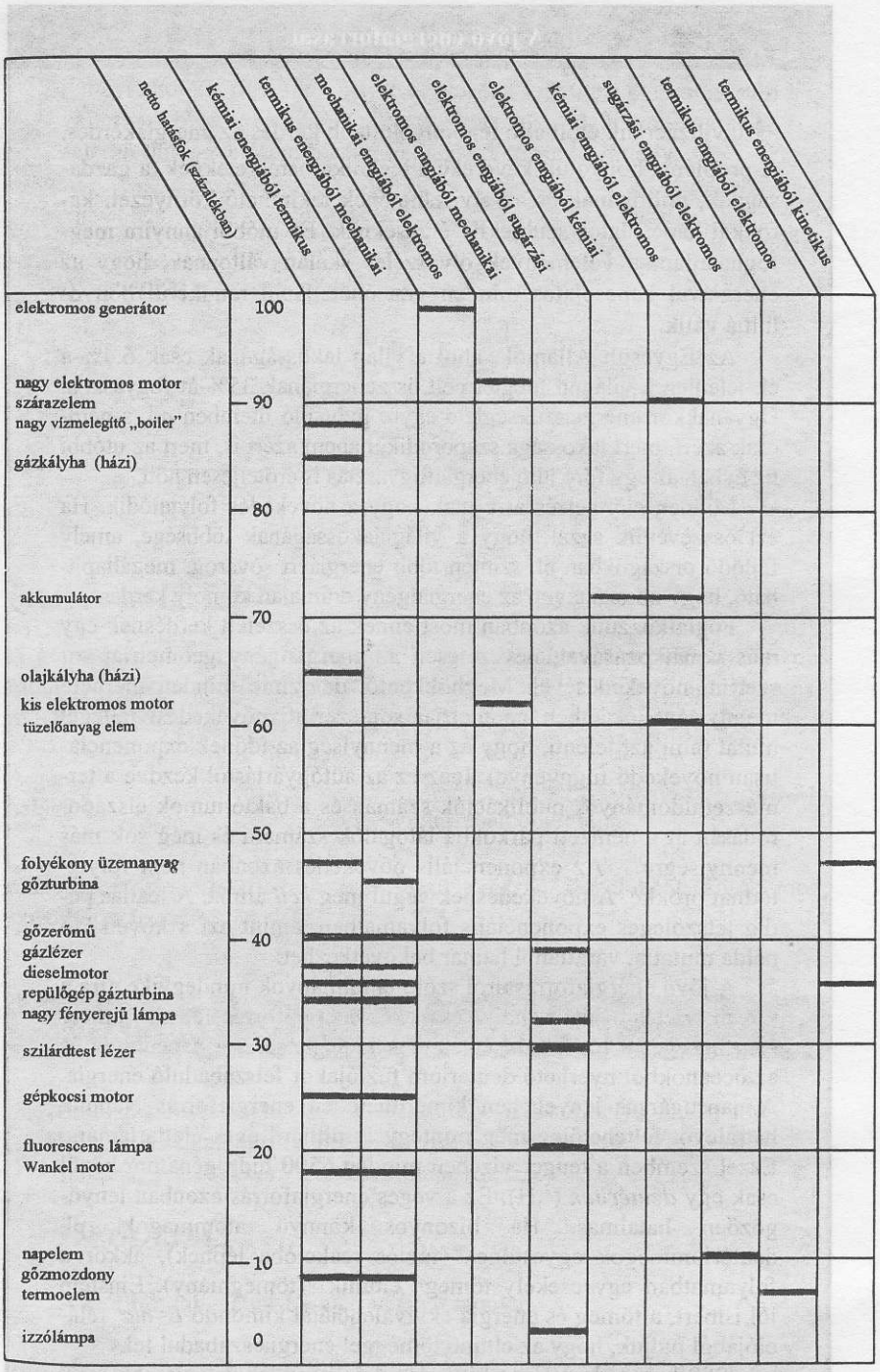
Foglalkozzunk azonban most ennek az összetett kérdésnek egy más vonatkozásával, nevezetesen az energiaigény geometriai sor szerinti növekedésével. Meghökkentő, de szinte minden mérhető mennyiség kezdetben geometriai sor szerinti növekedési jelleget mutat (ami azt jelenti, hogy az a mennyiség az időnek exponenciálisan növekedő függvénye). Igaz ez az autógyártástól kezdve a természettudományos publikációk számán és a baktériumok elszaporodásán át a nemzeti parkokba látogatók számára és még sok más mennyiségre[1]. Az exponenciális növekedés azonban nem folytatódhat örökké. A növekedésnek végül meg *kell* állnia. A leállás pedig tetszőleges exponenciális folyamatban, amint azt a következő példa mutatja, váratlanul hamar bekövetkezhet.

A jövő energiaforrásairól szóló tanulmányok mindegyike arra a következtetésre jutott, hogy csak két energiaforrás létezik, amely elég bőséges a jövő szükségleteinek kielégítésére; a napenergia és az óceánokból nyerhető deutérium fúziójakor felszabaduló energia. A napsugárzás lényegében kimeríthetetlen energiaforrás Napunk hátralevő, feltehetőleg még mintegy 5 milliárd éves élettartamára. Ezzel szemben a tenger vízében minden 6500 hidrogénatom közül csak egy *deutérium* ($^2_1$H). Ez a véges energiaforrás azonban lenyűgözően hatalmas. Ha bizonyos könnyű atommagok, pl. deutériummagok egyesülnek (fúziós reakcióba lépnek), akkor a folyamatban egy csekély tömeg „eltűnik" (tömeghiány). Einstein jól ismert, a tömeg és energia ekvivalenciáját kimondó $E=mc^2$ relációjából tudjuk, hogy az eltűnő tömeggel energia szabadul fel.

1989-ben a deutérium kivonása 4,5 liter vízből kevesebb mint 10 centbe került. Ha az így nyert összes deutériumot maximális hatásfokkal fúziós reakcióban tudnánk hasznosítani, akkor mintegy 350 liter benzin elégetésével nyerhető energiához jutnánk. Más módon kifejezve 1 km^3 tengervízből több energia nyerhető, mint a világ teljes fosszilis energiakészletének elégetésével.

Természetesen ott a nagy kérdés, hogy a fúzió megvalósítható-e gazdaságosan vagy nem. A megoldandó technikai problémák óri-

[1] Érdekesen tárgyalja az exponenciális növekedést Ralph Lapp A logaritmikus század című könyvében (Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall 1973). Hasonlóan érdekes Albert A. Bartlett „Az energiaválság elfeledett gyökerei" c. cikke (American Journal of Physics 46, 876 /1978/) és a szerző szórakoztató, „Az exponenciális jövő" c. cikksorozata, amelyet a The Physics Teacher 14, 393 (1976)-tól 17.23 (1979)-ig terjedő számaiban jelentetett meg.



6-27 ábra

A különböző energiaátalakítók tipikus hatásfoka a 99 %-os, nagy hatásfokú, hatalmas elektromos generátoroktól az 5%-nál kisebb hatásfokú izzólámpáig terjed. (Forrás: „Az energiaátalakítás" Claude M. Summers, Copyright 1971 Amerikai Természettudományos Egyesület, Minden jog fenntartva.)

ásinak tűnnek. Legyünk azonban optimisták és tegyük fel, hogy a fúziós reaktor már a közel jövőben megvalósul. Milyen hatása lenne a világ energiaszükségletének alakulására? Természeténél fogva a fúziós reaktorral bizonyára elektromos energiát termelnénk.

1984-ben a világ elektromos energiafogyasztása $1{,}3 \times 10^{12}$ kWh/év volt. Meddig tartana az óceánok deutérium készlete, ha fúzióval termelnénk az energiát? A becslések erősen szórnak. A deutérium termelés, a fúziós folyamat és az elosztási rendszer hatásfokától függően néhány száz millió évtől sok milliárd évig terjednek. Fogadjuk el az optimista becslést és tegyük fel, hogy a jelenlegi felhasználás mellett az óceánok deutérium tartalmának fúziójából nyerhető energia 5 milliárd évre – a Nap élettartamának idejére – fedezi elektromos energiaszükségletünket. Ez összesen 25×10^{21} kWh.

Számoljuk azonban újra az időtartamot az energiafogyasztás évi 3 %-os növekedésének feltételezésével[12]. Legyen a a kezdő év energiafogyasztása, r az évi növekedés és n az évek száma. Ekkor

$a+a(1+r)+a(1+r)^2+...+a(1+r)^{n-1}$=A teljes felhasznált energia.

A bal oldali geometriai sor összegét a

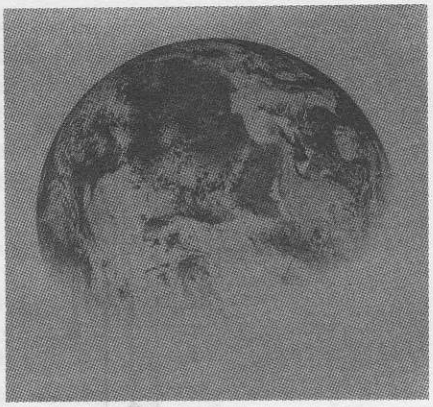
$$\sum_{k=0}^{k=n-1} a(1+r)^k = a\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$$

alakban is felírhatjuk. Behelyettesítve az adatokat és a 3 %-os növekedésnek megfelelő $r = 0{,}03$ értéket, majd a kapott egyenletet n-re megoldva, azt kapjuk, hogy az óceán deutériuma csak 637 évre elegendő.

Az öt milliárdos határ helyett csak 637 év! Mellbevágó példa arra, hogy már 3 %-os évi növekedés is milyen hatással jár. A geometriai sor szerinti növekedés végül mindig robbanásra vezet. Természetesen a számítás kissé komolytalan amiatt, hogy mielőtt a 637 év eltelne, már sok egyéb határt is át kellene lépnünk. Ha például a Föld népessége a jelenlegi (kb. 1,7 % évente)[13] arányban nő, akkor 366 év múlva már a szárazföld minden négyzetméterére jut egy lakos. Nyilvánvaló, hogy a szaporodásnak már jóval ezelőtt le kell állnia.

Függetlenül azonban attól, hogy honnan közelítünk egy problémához, bármely paraméter állandó arányú növekedése exponenciálisan gyorsuló folyamatot hoz létre. A korlátlan növekedés pedig végül katasztrófához vezet – más lehetőség nincsen.

Továbbmenve, az élelmiszerrel, energiával és szennyeződéssel kapcsolatos problémák végül mind egyetlen alapvető kérdésre, a Föld túlnépesedésének kérdésére vezethetők vissza. Az emberiség bizonyos határon túl nem szaporodhat tovább. Ha a népesség számát nem korlátozzuk önként, akkor a Föld lakosságát végül majd háborúk, dögvész vagy a környezetszennyezés fogja csökkenteni.



6-28 ábra
Az Andromeda Törzs c. novellában (Knopf, 1969) Michel Crichton az exponenciális növekedést a következő példával illusztrálja. Egyetlen *E. kóli* baktériumsejt ideális körülmények között húsz percenként osztódik. Crichton arra a következtetésre jut, hogy ilyen növekedési arány mellett, szabályozás nélkül egyetlen *E. kóli* baktériumsejt már egy nap alatt a Föld tömegével azonos tömegű óriástenyészetté fejlődne. (Megjegyés: az ehhez szükséges idő valójában inkább két nap.)

6.11 Erőátvitel

Sok olyan berendezés, egyszerű gép létezik, amelynek segítségével a kis erők átalakítható nagy erővé. Természetesen a semmiből most sem hozhatunk létre valamit, az eszköz által végzett munka, ha a súrlódás elhanyagolható, egyenlő az általunk végzett munkával, azaz ha a kis erő hosszú úton mozdul el, akkor a nagy erő csak rövid távolságon végezhet munkát. A 6-29 ábra néhány ilyen erőátvitelre szolgáló egyszerű gépet mutat.

Az egyszerű gépek jól jellemezhetők az **erőátviteli tényezővel**, ami azt fejezi ki, hogy hányszorosára növelik a munkát végző személy által kifejtett erőt. Az egyszerű gépekkel többnyire nehéz terhet emelünk fel kis erővel. Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben a továbbiakban a munkát végző személy által a gépre gyakorolt erőt röviden *erőnek* (F_b) ,a gép által megnövelt erőt pedig a tárgy súlyára utalva *tehernek* (F_t) nevezzük.

[12] A közölt becslés igen mértéktartó, a világszerte elterjedt adatok magasabbak, és valóban, ha figyelembe vesszük a fejlődő országok komoly modernizálódási igényét, akkor az energiaszükséglet valószínűleg nagyobb arányban nő.

[13] 1989-ben például a Föld népességének naponkénti növekedése durván 230000 fő volt. Gondoljunk csak arra, mi minden szükséges az élet különböző területein az *egy nap alatt* bekövetkező népességszaporulat eltartásának fedezésére. Több mezőgazdasági területet kell megművelni az élelmiszer megtermelésére, több energia kell, új munkahelyeket kell nyitni a termelés növelésére, s az oktatás költségei is nagyot emelkednek.

Tényleges erőátviteli tényező

$$\text{T.E.A.T.} = \frac{\text{teher}}{\text{erő}} = \frac{F_k}{F_b} \qquad (6\text{-}32)$$

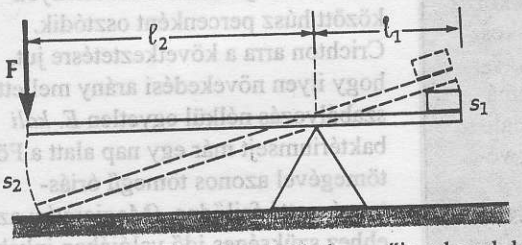
Ideális esetben, amikor a súrlódás elhanyagolható (és az egyszerű gép súlyától is eltekinthetünk), fennáll, hogy

$$\text{A befektetett munka} = \text{A végzett munka}$$

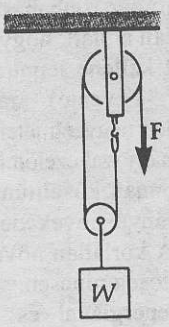
$$F_b x_b = F_k x_k$$

vagyis

$$\frac{F_k}{F_b} = \frac{x_b}{x_k}$$



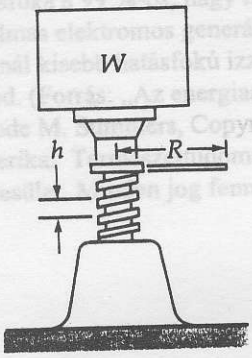
a.) Az emelő ideális erőátviteli tényezője a karok hosszának ℓ_1 / ℓ_2 arányával egyezik meg. Az összefüggést Archimedész fedezte fel az i.e. 2. században. Kijelentette : „ Adjatok egy szilárd pontot és kimozdítom a helyéről a Földet".



A mozgó csiga vektorábrája:

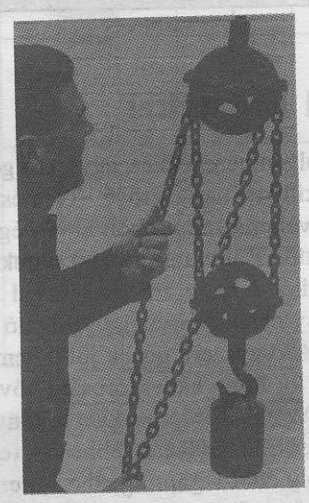


b) A mozgó csiga vektorábrája mutatja, hogy az adott rendszer ideális erőátviteli tényezője 2. (Az állócsiga csak az erő irányán változtat, hogy könnyebb legyen az eszközt kezelni. Ha az állócsigát elhagyjuk és a bal oldali kötélszárat húzzuk, az erőátviteli tényező kettő marad.)



c) A csavaros emelő működtetésekor a csavar tengelyétől mérve R hosszúságú karon fejtünk ki vízszintes és a karra merőleges erőt. Egy teljes fordulattal a csavarra erősített teher a menetemelkedés h magasságával kerül feljebb. Az ideális erőátviteli tényező $2\pi RT / h$.





d) A differenciálcsiga két különböző R_1 és R_2 sugarú koncentrikusan összeerősített csigából és a képen látható módon rajtuk átvetett folytonos láncból áll. A csigákon lévő fogak nem engedik a láncot megcsúszni. Az egyik láncágat az ábrán látható módon lefelé húzva a W teher felemelkedik. Az eszköz ideális erőátviteli tényezője $2R_2 / (R_2 - R_1)$, a tényező igen nagy lehet, ha a sugarak $R_2 - R_1$ különbsége kicsi.

6-29 ábra
Egyszerű gépek egynél nagyobb erőátviteli tényezővel.

Az erő és a teher hatására létrejövő *elmozdulások* arányát **ideális erőátviteli tényezőnek** nevezzük.

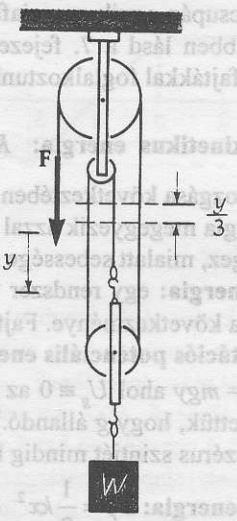
Ideális erőátviteli tényező

$$\text{I.E.A.T.} = \frac{\text{Az erő hatására létrejövő elmozdulása}}{\text{A teher hatására létrejövő elmozdulása}} = \frac{x_b}{x_k} \qquad (6\text{-}33)$$

Általános esetben, (amikor a súrlódás nem hanyagolható el), az egyszerű gépek η *hatásfoka:*

$$\eta = \frac{\text{A végzett munka}}{\text{A befektetett munka}} = \frac{F_k x_k}{F_b x_b} = \frac{F_k / F_b}{x_b / x_k} = \frac{T.E.A.T.}{I.E.A.T.}$$

Az egyszerű gépek működésének tanulmányozásakor gyakran hasznos magának a gépnek a vektorábráját felrajzolni.



6-30 ábra
A 6-18 példához. Amikor az **F** erővel húzott kötél vége y távolsággal lejjebb kerül, akkor a mozgó csigát tartó kötelek mindegyike y/3-mal rövidül meg.

6-18 PÉLDA

Tekintsük a 6-30 ábrán látható álló és mozgó csigából álló rendszert. a) Határozzuk meg az ideális erőátviteli tényezőt! b) Ha egy $W = 100$ N-os terhet 40 N erővel tudunk felemelni, mekkora a tényleges erőátviteli tényező? c) Mekkora a rendszer hatásfoka?

MEGOLDÁS

a) Ha az F húzóerő y hatására a kötél vége y távolságnyira mozdul el lefelé, akkor minden kötélág $y/3$ hosszúsággal rövidül meg. Így

$$\text{I.E.A.T.} = \frac{\text{Az erő okozta elmozdulása}}{\text{A teher okozta elmozdulása}} = \frac{y}{y/3} = 3$$

b) A tényleges erőátviteli tényező:

$$\text{T.E.A.T.} = \frac{\text{A teher}}{\text{Az erő}} = \frac{100\ \text{N}}{40\ \text{N}} = 2{,}5$$

c) A hatásfok

$$\eta = \frac{\text{T.E.A.T.}}{\text{I.E.A.T.}} = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}833 \text{ vagy } 83{,}3\ \%$$

Összefoglalás

A **munka** az energia egyik rendszerről a másikra történő átvitelének egyik alakja; amikor olyan erő hat, amelynek a mozgás irányába eső összetevője nem zérus. Az **F** *állandó* erő $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során végzett ΔW munkája definíció szerint

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r},$$
$$\Delta W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}| \cos\theta$$

ahol θ az erő-és az elmozdulás vektorok által bezárt szög. Derékszögű koordinátákban:

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

A *változó* erő munkáját a

$$W = \int \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Ha az erő és az}\\ \text{elmozdulás iránya}\\ \text{azonos}\end{array}\right] \rightarrow W = \int F(x)dx$$

összefüggés adja meg. Grafikusan a munka az $F(x)$ görbe alatti területtel határozható meg, ahol a tengelyeken felmért mennyiségek mértékegységét is figyelembe kell venni.

Az **energia** jellegzetes tulajdonságát az *energia megmaradásának* elve fejezi ki. Ennek lényege az, hogy energia nem hozható létre, de nem is semmisíthető meg, csupán egyik energiafajta átalakítható a másikba. (Bővebben lásd a 7. fejezetet.) Eddig a következő energiafajtákkal foglalkoztunk:

Mozgási kinetikus energia: $K = \frac{1}{2}mv^2$, az m tömeg mozgása következtében jön létre. A mozgási energia megegyezik azzal a munkával, amit a test végez, mialatt sebessége zérusra csökken.

Helyzeti energia: egy rendszer fizikai elrendeződésének a következménye. Fajtái:

Gravitációs potenciális energia: $U_g = mgy$ ahol $U_g \equiv 0$ az $y = 0$ helyen. (Itt feltettük, hogy g állandó.) A helyzeti energia zérus szintjét mindig ki kell jelölnünk.

Rugóenergia: $U_r = \frac{1}{2}kx^2$ a *Hooke-törvénynek* ($F_r = -kx$) eleget tevő rugókra, ahol k a *rugóállandó* és x a rugó hosszának megváltozása a nyugalmi helyzetéhez képest akár nyújtás, akár összenyomás során.

Belső energia: $E_t = f_k x$. Gyakran **termikus energiának** is nevezzük és a mechanikai rendszerekben a súrlódási erő munkája nyomán keletkezik. Az atomok és molekulák véletlenszerű mozgásával kapcsolatos mozgási és helyzeti energia összege.

A **munkatétel** pontszerű test esetén tetszőleges típusú erőhatások mellett két egyenértékű alakban fogalmazható meg:

$$\left[\begin{array}{c}\text{A } \Sigma\mathbf{F} \text{ } \textbf{eredő erő} \text{ munkája} \\ \text{a pontszerű testen}\end{array}\right] \rightarrow \Delta W = \Delta K$$

Másként:

Adott $\mathbf{F}_k$ külső erő által a testen végzett munka (ez az erő különbözik azoktól, amelyek munkáját a jobb oldali energiatagokkal már figyelembe vettük)

$$\Delta W_k = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta U_t$$

A P **teljesítmény** a munka sebessége.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

amit a

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

alakban is felírhatunk.

Az egyszerű gépek a következőképpen jellemezhetők:

Az η **hatásfokot** az

$$\eta = \frac{\text{A végzett munka}}{\text{A befektetett munka}} \left(\begin{array}{l}\text{gyakran száza-} \\ \text{lékos hatásfokot} \\ \text{adunk meg, ami} \\ \eta \cdot 100\ \%\end{array}\right)$$

aránnyal definiáljuk.

Az **tényleges erőátviteli tényező** definíció szerint:

$$\text{T.E.A.T.} = \frac{\text{A teher}}{\text{Az erő}}$$

Az **ideális erőátviteli tényező**:

$$\text{I.E.A.T.} = \frac{\text{Az erő okozta elmozdulás}}{\text{A teher okozta elmozdulás}}$$

Jegyezzük meg:

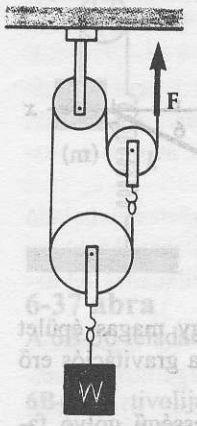
$$\eta = \frac{\text{T.E.A.T.}}{\text{I.E.A.T.}}$$

Kérdések

1. Mondjunk példát arra, hogy egy mozgó testre eredő erő hat egy adott időintervallumban és mégsincs munkavégzés!
2. Mondjunk legalább öt példát a lakószobánkban lezajló energiaátalakulási folyamatokra!
3. Egy fonal végére kötött golyó egyenletes sebességgel vízszintes körpályán mozog. Mekkora munkát végez egy fordulat alatt az eredő erő?
4. Milyen más, a fizikában használatostól eltérő jelentése van a teljesítmény szónak?
5. Mondjunk példát olyan rendszerre, amelynek van mozgási energiája, de nincs eredő impulzusa! Elképzelhető olyan rendszer, amely impulzussal rendelkezik, de mozgási energiával nem?
6. Gépkocsi prospektus alapján ellenőrizzük, hogy a gyártó összeillő súly-, gyorsulás- és teljesítményadatokat közölt-e.
7. Magas épület felső emeletéről a földszintre liftezve helyzeti energiánk csökken. Hová lesz ez az energia?
8. Csillagászati méretekben milyenek a Föld gravitációs terének ekvipotenciális felületei?
9. Egy erősen összenyomott rugót rögzítettünk ebben a helyzetében, majd savban feloldottunk. Hová lett a rugóban tárolt helyzeti energia?
10. Két, egyenlő tömegű testet erős rugóval kötöttünk össze, majd a rendszert a padlóra tettük úgy, hogy az egyik test a másik felett legyen. Ezután a felső

testnél fogva összenyomtuk a rugót, majd hirtelen elengedtük. Lehetséges-e, hogy a felső test felrántja az alsót a padlóról? Mekkora eredő erő hatott a rendszerre? Végzett-e munkát az eredő erő (azaz volt-e elmozdulása)?

11. A 6-31 ábra egy rosszul működő csigasort mutat. Mi a hiba? Mi történne, ha a kötél szabad végét rögzítenénk?
12. Egy dobozból – ami egy egyszerű gépet rejt – két kötél lóg ki. Azt tapasztaljuk, hogy az A kötél végére akasztott 10 N súly a B kötélen 30 N terhet tud egyensúlyban tartani.Tegyük fel, hogy a súrlódás elhanyagolható. Mondjunk néhány lehetőséget arra, hogy mi lehet a dobozban!
13. Tegyük fel, hogy az előző feladatban az A kötélen végzett 20 J munka árán a gép 18 J munkát végez. Mekkora a hatásfok? Mekkora a gép erőátviteli tényezője?



6-31 ábra
A 11. kérdéshez

Feladatok

6.2 A munka

6A-1 Mekkora munka árán vihető fel 2 tonna tetőcserép a földszintről a 9 m magas tetőre?

6A-2 Egy fiú a vízszintessel 25°-os szöget bezáró kötéllel érdes, vízszintes talajon, egyenletes sebességgel húz egy ládát. Mekkora a kötélerő, ha a fiú 5 m-es úton 1,2 kJ munkát végzett?

6A-3 Egy szállítómunkás 27 kg-os burgonyazsákot vesz a vállára, vízszintes úton elviszi 40 m távolságba, majd a talaj felett 1 m magasan levő kiskocsi platójára teszi. Fizikai értelemben mennyi munkát végzett?

6A-4 Motorvonat mozdonya 8×10^4 N vízszintes erővel, állandó sebességgel 27 km távolságba húzza a szerelvényt. Mennyi munkát végez a mozdony?

6A-5 Egy kertész állandó sebességgel húzza fel a 7 m mély kútból a 14 kg-os vizesvödröt. Mennyi munkát végez?

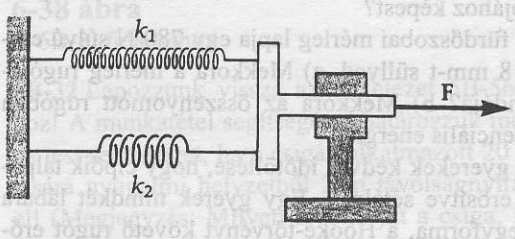
6B-6 Egy ember 30 kg-os dobozt emelt a földről 1,5 m magasba, állandó sebességgel. a) Mennyi munkát végzett az ember? b) Mennyi munkát végzett a gravitációs erő? c) Mennyi az ember és a gravitációs erő munkájának összege?

6.3 Változó erő munkája

6A-7 A Hooke-törvénynek megfelelően viselkedő rugó megfeszítéséhez szükséges erő 0-ról 50 N-ra nő, miközben a rugót nyugalmi állapotból 12 cm-rel kihúzzuk. a) Mekkora a rugóállandó? b) Mennyi munkát végeztünk a rugó megnyújtása során?

6B-8 Egy rugót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

6B-9 A 6-32 ábra két különböző rugóállandójú, Hooke-törvény szerint viselkedő rugóból álló rendszert mutat. a) Bizonyítsuk be, hogy a rendszer egyetlen, $k_1 + k_2$ rugóállandójú rugóval helyettesíthető! b) A rendszerben tárolt teljes energia hányadrésze tárolódik a k_1 rugóállandójú rugóban?



6-32 ábra
A 6B-9 feladathoz

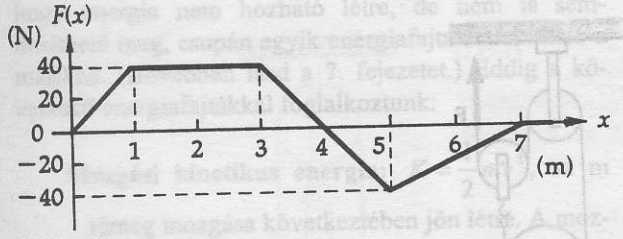
6B-10 Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200$ N/m^3. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

6.4 A mozgási energia és a munkatétel

6A-11 Milyen magasságból kellene szabadon esnie egy gépkocsinak ahhoz, hogy ugyanakkora mozgási energiája legyen, mint amikor 100 km/ó sebességgel halad?

6A-12 Egy 15 g tömegű golyó a fegyver 72 cm hosszúságú csövében 780 m/s sebességre gyorsul fel. A munkatétel felhasználásával határozzuk meg a golyót gyorsító átlagos erőt!

6B-13 Egy 2 kg-os tömegpont a 6-33 ábrán látható helytől függő $F(x)$ erő hatására mozog. a) Mennyi munkát végez az erő, míg a test az $x = 0$ helyről $x = 2$ m-re jut? b) Mekkora munkát végez az erő az $x = 2$ m-től az $x = 6$ m-ig tartó szakaszon? A munkatétel segítségével határozzuk meg a test sebességét c) az $x = 2$ m pontban, d) az $x = 6$ m pontban!



6-33 ábra
A 6B-13 feladathoz

6B-14 Egy 1,5 kg-os tégla lezuhan egy magas épület tetejéről. Mekkora munkát végez rajta a gravitációs erő a mozgás első két másodpercében?

6B-15 Egy 5 g tömegű, 600 m/s sebességű golyó fatörzsbe csapódva 4 cm mélyen hatol a fába. a) Energetikai megfontolások alapján határozzuk meg a golyót lassító átlagos súrlódási erőt! b) Feltéve, hogy a súrlódási erő állandó, határozzuk meg, hogy mennyi idő telt el a golyónak a fába való behatolásába megállásáig!

6.5 A helyzeti energia

6A-16 Egy 4 kg tömegű csillár 50 cm hosszú láncon lóg a 3,6 m magas mennyezetről. Mekkora helyzeti energiája van a csillárnak a) a padlóhoz, b) az 1,2 m magas asztal lapjához képest?

6A-17 A fürdőszobai mérleg lapja egy 780 N súlyú ember alatt 8 mm-t süllyed. a) Mekkora a mérleg rugójának állandója? b) Mekkora az összenyomott rugóban tárolt potenciális energia?

6A-18 A gyerekek kedves időtöltése, hogy cipőik talpára rugót erősítve sétálnak. Egy gyerek mindkét lábára teljesen egyforma, a Hooke-törvényt követő rugót erősített. Egy lábon állva a rugó a nyugalmi hosszához képest 4 cm-rel nyomódik össze. Ha a gyerek ebből a helyzetből függőlegesen felugrik, és a felső holtponttól 20 cm-t esik, mielőtt a rugók érintkeznének. Mekkora lesz a rugók maximális összenyomódása, ha a fenti helyzetből a gyerek két lábával egyszerre esik vissza a talajra? (Útmutatás: A felső holtpontból leeső gyereken a gravitációs erő munkát végez. Hová lesz ez az energia?)

6.6 A termikus energia és a súrlódás

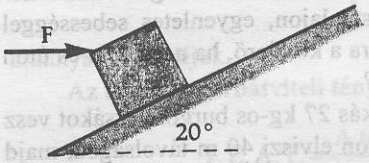
6A-19 Egy 40 kg-os gyerek 4 m függőleges szintkülönbségű vidám parki csúszdán csúszik le. Mennyi termikus energia fejlődött a súrlódás miatt, ha a gyerek 3 m/s sebességgel érkezik a csúszda végére?

6A-20 Egy 20 kg-os, vízszintes padlón fekvő dobozt $F = 80$ N vízszintes erővel 4 m távolságba húztunk el. A doboz és a padló között a csúszó súrlódási együttható 0,200. Mekkora munkát végzett a) az F erő, b) a dobozra ható csúszó súrlódási erő? c) Határozzuk meg a doboz mozgási energiáját a munkatétellel! d) Mekkora a doboz végsebessége?

6A-21 2 g tömegű papírvattacsomót 15 m/s sebességgel feldobunk. A vattacsomó 10 m magasságot ér el az elhajítás helye felett. Mennyi munkát végzett a légellenállás?

6B-22 Befagyott tavon egy gyerek a vízszintessel 30°-os szöget bezáró 50 N erővel húzza szánkón ülő játszótársát. A társ és a szánkó együttes tömege 30 kg, a jég és a szánkó közötti csúszó súrlódási együttható 0,l4. Energetikai megfontolások alapján határozzuk meg, hogy a) Mennyi munkát végzett a gyerek, míg a kezdetben álló szánkót 8 m távolságba húzta? b) Mennyi munkát végzett a szánkón a súrlódási erő? c) Mennyi a szánkó végső kinetikus energiája? d) Igazoljuk a munkatételt azzal, hogy megmutatjuk, hogy az erők munkájának összege megegyezik a mozgási energia megváltozásával!

6B-23 A 6-34 ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes, 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20°-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180. a) Mekkora a test gyorsulása? b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé! c) Válaszoljunk a b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



6-34 ábra
A 6B-23 feladathoz

6A-24 A 6-35 ábrán látható cölöpverő ütőfejének mozgó tömege 2100 kg. A cölöpverővel hosszú acélgerendát verünk a földbe úgy, hogy a fej 5 m magasról szabadon esik a gerendára, s ennek hatására a gerenda 12 cm-rel fúródik beljebb a földbe. A munkatétel átfogalmazott változatának felhasználásával határozzuk meg, hogy mekkora átlagos erővel hat a gerenda az ütőfejre, míg a fej nyugalomba kerül!



6-35 ábra
A 6A-24 feladathoz. Cölöpverő

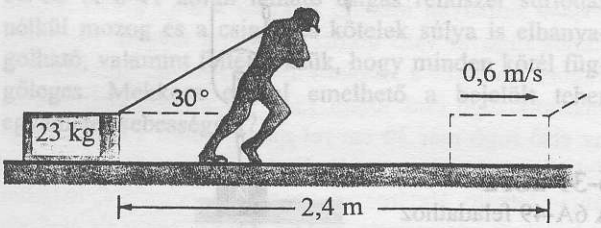
6.7 A munkatétel átfogalmazott változata

6A-25 Egy asszony 1300 J munka árán húz fel egy 12 kg-os vödröt a 10 m mély kútból. Mekkora mozgási energiával érkezik a vödör a felszínre?

6A-26 Nyugalomból indítva, állandó erővel 6 m hosszú, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró, súrlódásmentes lejtőn 4 kg tömegű ládát húzunk fel. A lejtő tetejére érve a láda sebessége 2 m/s. a) Mekkora kinetikus energiához jutott a láda? b) Mekkora helyzeti energiát szerzett? c) Mekkora munkát végeztünk? d) Mekkora, a lejtővel párhuzamos erőt fejtettünk ki?

6A-27 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyereket barátja úgy húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36,0°-os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg a munkatétel átfogalmazott alakjának felhasználásával, hogy mekkora munkára volt szükség ehhez!

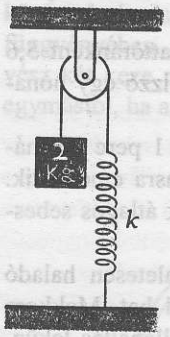
6B-28 A 6-36 ábrán látható ember nyugalomi helyzetből indulva 2,4 m távolságba húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu_k \approx 0{,}5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel átfogalmazott változatának alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember!



6-36 ábra
A 6B-28 feladathoz

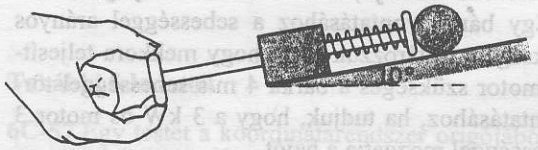
6B-29 Egy 50 kg-os láda lecsúszik egy, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró lejtőn. a) Határozzuk meg a gravitációs erő munkáját, míg a láda 4 m-t csúszik le a lejtőn! b) Mennyi hő (termikus energia) fejlődik ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

6B-30 A 6-37 ábra szerinti elrendezésben az $m = 2$ kg tömegű test zérus kezdősebességgel indul el úgy, hogy ekkor a rugó nyugalmi helyzetben van. A csiga és a rugó tömege elhanyagolható. A 2 kg-os test maximális függőleges elmozdulása 20 cm, ezután a mozgás iránya megfordul és a test a függőleges irányú rezgő mozgást végez. Legyen a felfelé irányított z tengely origója a test legmélyebb helyzetében. a) A munkatétel segítségével határozzuk meg a k rugóállandót! b) Mekkora maximális felfelé mutató eredő erő hat a testre mozgása során, és hol van abban a pillanatban a test? c) Mekkora maximális lefelé mutató eredő erő ébred és hol van ekkor a test? d) A test melyik helyzetében zérus a rá ható erők eredője?



6-37 ábra
A 6B-30 feladathoz

6B-31 A tivolijáték rugós kilövőszerkezetének rugóállandója 1,2 N/cm (6-38 ábra). A kilőtt labda a vízszintessel 10°-os szöget bezáró lejtőn mozog felfelé. Mekkora kezdősebességgel indul el a 100 g-os labda, ha a dugattyúval a rugót 5 cm-nyire nyomtuk össze? A súrlódás és a dugattyú tömege elhanyagolható.



6-38 ábra
A 6B-31 feladathoz

6B-32 Lapozzunk vissza az 5. fejezet 5B-56 feladatához! A munkatétel segítségével határozzuk meg a 3 kg-os test sebességét, ha a csigán alkalmazott 20 N erő hatására nyugalmi helyzetből 2 m távolságnyira mozdult el! (Megjegyzés: Milyen távolra jut a csiga, míg a test 2 m-t tesz meg? Vegyük figyelembe a súrlódás hatását is!)

6B-33 Egy motor tengelyéhez kötött kötél egy érdes lejtőn, a lejtővel párhuzamos 13 N erővel, állandó sebességgel 8 m magasra húz fel egy 3 kg tömegű testet. A test a mozgás során 3 m-rel kerül magasabbra. a) Mennyi munkát végez a kötél? b) Mennyi munkát végez a gravitációs erő? d) Mekkora súrlódási erő hat a testre?

6B-34 Tegyük fel, hogy az előző feladatban a súrlódás elhanyagolható. Mennyi lenne a nyugalomi helyzetből induló test sebessége a lejtő tetején? Oldjuk meg a feladatot kétféleképpen is: a) a Newton-törvények és a kine-matikai egyenletek felhasználásával, b) a munkatétellel!

6.9 A teljesítmény

6A-35 Egy 75 kg tömegű diák 2,6 s alatt rohan fel a 4 m magas emeletre. Mekkora az átlagteljesítménye?

6A-36 Egy vontatóhajó 3 m/s sebességgel húzza a fatörzsekből álló tutajt, és ennek során a vontatókötélben 10^4 N

erő ébred. Milyen sebességgel végzi a vontatóhajó a munkát?

6B-37 Az elektromos energia ára kilowattóránként 5,6 Ft. Mennyibe kerül, ha egy 100 wattos izzó egy hónapon át (30 nap) folyamatosan ég?

6A-38 Egy 4×10^4 kg tömegű teherlift 1 perc 20 másodperc alatt függőlegesen 120 m magasra emelkedik. Mekkora a liftet tartó kábel munkájának átlagos sebessége?

6A-39 Egy 48 km/ó sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

6B-40 Egy 1500 kg tömegű gépkocsi 10 másodperc alatt fékez le 100 km/ó sebességről megállásig. Határozzuk meg a) a fék által végzett munkát! b) a fékek által kifejtett átlagos teljesítményt!

6B-41 Egy köteles sífelvonó 600 m hosszú, 30°-os lejtőn 3 m/s sebességgel maximum 120, átlagosan 80 kg tömegű személyt szállíthat. Határozzuk meg, hogy maximális terhelés esetén mekkora átlagos teljesítményt fejt ki a felvonó motorja, ha a súrlódás elhanyagolható.

6B-42 Egy bárka vontatásához a sebességgel arányos erő szükséges. Határozzuk meg, hogy mekkora teljesítményű motor szükséges a bárka 4 m/s sebességgel történő vontatásához, ha tudjuk, hogy a 3 kW-os motor 3 m/s sebességgel mozgatja a hajót.

6.10 A hatásfok

6A-43 Mekkora teljesítményű motorral emelhetünk egy 1200 kg-os felvonót 0,5 perc alatt 60 m magasba, ha a súrlódási veszteségek leküzdésére a motor teljesítményének 40 %-a használódik el?

6A-44 Határozzuk meg, hogy egy 45 %-os hatásfokú elektromos emelő motorral 2 kWh energia felhasználásával mekkora tömeget emelhetünk függőlegesen 3 m magasra!

6A-45 Határozzuk meg, hogy mekkora teljesítményt vesz fel az az elektromotor, amely 900 g tömegű terhet 0,6 perc alatt egyenletes sebességgel függőlegesen 140 m magasra emel! A súrlódási veszteség 20 %.

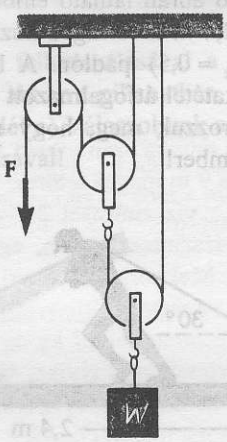
6B-46 Személygépkocsi motorjának hasznos teljesítménye 15% (azaz a fűtőanyag elégetéséből származó energiának 15%-a alakítható a jármű mozgási energiájává). a) Ha tudjuk, hogy 4,5 l benzin elégetésekor $1{,}34 \times 10^8$ J energia keletkezik, határozzuk meg, hogy mennyi benzin szükséges ahhoz, hogy a gépkocsit nyugalmi helyzetből 25 m/s sebességre gyorsítsuk! b) Hány ilyen gyorsításra futja 4,5 l benzinből? c) A kocsi ilyen sebesség mellett 100 kilométerenként 7,5 l benzint fogyaszt. Mekkora teljesítmény adódik át a kerekekre, hogy egyenletes sebesség mellett a légellenállás kiellensúlyozható legyen?

6B-47 Egy 450 kg tömegű versenyautó 400 m hosszú úton gyorsul fel 160 km/ó sebességre. Mekkora a motor átlagos teljesítménye ezen a szakaszon, ha a felvett energia 30 %-a használódik el a súrlódás és a légellenállás stb. leküzdésére?

6B-48 Az átlagos mosógépmotorok teljesítménye 350 watt. A napelemek 15%-os hatásfokkal alakítják elektromos energiává a sugárzási energiát. Határozzuk meg, hogy a napsugárzás irányára merőlegesen mekkora felületű napelemet kellene elhelyeznünk egy mosógép működtetéséhez! Az egy másodperc alatt a Föld légkörébe, a napsugárzás irányára merőleges 1 m^2 felületen belépő sugárzási energia 1370 watt. A légkörben való elnyelődés miatt ez az energia a tenger szintjéig (ahol a mosógépet is működtetjük) 840 wattra csökken.

6.11 Az egyszerű gépek

6A-49 Határozzuk meg a 6-39 ábrán látható ingasor ideális erőátviteli tényezőjét!



6-39 ábra
A 6A-49 feladathoz

6A-50 Határozzuk meg a 6-29a ábrán látható emelő ideális erőátviteli tényezőjét! Tegyük fel, hogy az erők párhuzamosak az elmozdulásokkal!

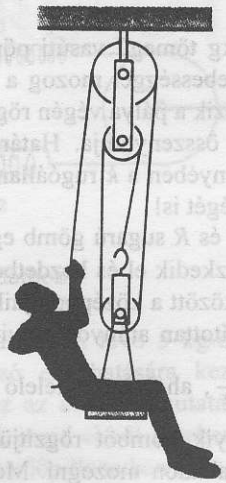
6A-5l Tegyük fel, hogy a 6-17 ábrán látható csigasorral egy kátyuba ragadt gépkocsit húzunk ki. Rögzítési pontgyanánt egy közeli fa szolgál. A rendszeren futó kötél melyik végét kell fához kötni; az egyetlen csigához, vagy a kettős csigához csatlakozót? Miért?

6A-52 Határozzuk meg a 6-29c ábrán látható csavaros prés erőátviteli tényezőjét!

6A-53 Határozzuk meg, hogy a 6-29c ábrán látható csavaros préssel mekkora terhet emelhetünk fel 80 N erővel, ha a kar 40 cm hosszú és a csavar menetemelkedése 8 mm! Az eszköz hatásfoka 70%.

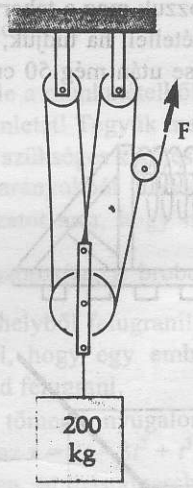
6B-54 A 6-40 ábrán látható módon egy 20 kg-os mozgatható ülőkén elhelyezkedő 86 kg-os ember csigasor segítségével emeli magát. a) Milyen hosszú kötélen kapaszkodik végig, amíg 2 m-rel magasabbra húzza fel magát? b) Mekkora erővel mozgathatja magát egyenletes sebességgel felfelé, ha a súrlódás elhanyagolható? c) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez, míg 2 m magasra emeli magát, ha a súrlódás elhanyagolható. A munkavégzést az ember által kifejtett erő és a lehúzott

kötél hosszának szorzatával határozzuk meg. Határozzuk meg az ember és az ülőke helyzeti energiájának növekedéséből is! d) Amennyiben a súrlódás miatt az embernek 330 N erővel kell húznia a kötelet, hogy egyenletesen mozogjon felfelé, mennyi a rendszer hatásfoka? e) Mekkora a tényleges erőátviteli tényező?



6-40 ábra
A 6B-54 feladathoz

6B-55 A 6-41 ábrán látható csigás rendszer súrlódás nélkül mozog és a csigák és kötelek súlya is elhanyagolható, valamint feltételezzük, hogy minden kötél függőleges. Mekkora erővel emelhető a bejelölt teher egyenletes sebességgel?



6-41 ábra
A 6B-55 feladathoz

6B-56 Csodálatos bűvészmutatvány, amikor egy függőleges kötélen látszólag a bűvész tekintetének hatására – egy gömb fel-le vándorol. A kötél kívülről nézve egyszerűen át van fűzve a gömbön, s a bűvész egyik kezével felső, másikkal alsó végét fogja. Valójában azonban a gömb belsejében a kötél két, kissé eltérő sugarú, koncentrikusan egymáshoz rögzített csigán van átvezetve a 6-42 ábrának megfelelően. Ha a kötelet megfeszítjük, a gömb felfelé, ha kissé elernyesztjük, lefelé mozog. Határozzuk meg a gömb D emelkedését a bűvész két keze között d távolságnak és a csigák R és r sugarának a függvényében. Az eredmény megmutatja, hogy a bűvész két keze még akkor is csak kevéssé távolodik, el egymástól, ha a gömb elmozdulása viszonylag nagy.



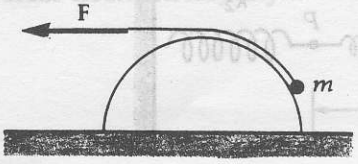
6-42 ábra
A 6B-56 feladathoz

További feladatok

6C-57 Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}}$ erővel az $r = \hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}}$ helyre viszünk. (Az egyenes vonalú mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az $\mathbf{F}$ erő munkáját. a) közvetlenül az $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal, b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\vartheta$ szorzattal!

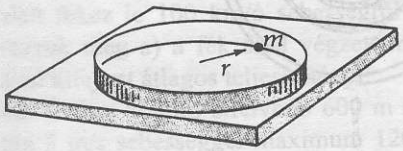
6C-58 Egy fiú a 3 kg tömegű, 2 m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy másik vége éppen leér a földre. a) Határozzuk meg, hogy hogyan változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti! b) Az $\int \mathbf{F}d\mathbf{s}$ összefüggés felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre ereszti!

6C-59 Egy súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvetett kötél segítségével (6-43 ábra). a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében! b) A $W = \int \mathbf{F}d\mathbf{s}$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R.



6-43 ábra
A 6C-59 feladathoz

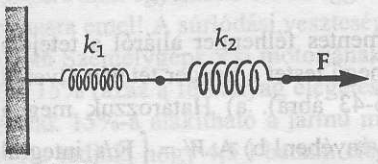
6C-60 Fémszalagból r sugarú keskeny karikát készítünk és a 6-44 ábrán látható módon érdes, vízszintes felületre erősítjük. Ezután egy m tömegű, pontszerű testet lökünk be a karikába v_0 kezdősebességgel úgy, hogy a belső oldalhoz szorulva folyamatosan körbe járjon. A vízszintes síkkal való súrlódás miatt a test sebessége egy teljes kör után 0,8 v_0-ra csökken. (A karika mentén a pontszerű test mozgása súrlódásmentes.) a) Határozzuk meg a munkatétel alkalmazásával az első kör megtétele során keletkező termikus energiát! b) Mekkora a vízszintes lap és a test közötti csúszó súrlódási együttható? c) Hány további fordulatot tesz meg még a test, mielőtt megáll?



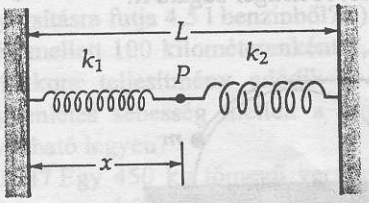
6-44 ábra
A 6C-60 feladathoz

6C-61 Térjünk vissza a 6A-27 feladathoz. Tegyük fel, hogy a játszótárs mindig a hinta mozgásának irányába mutató érintő menti erőt fejt ki. a) Határozzuk meg azt az $F(\theta)$ erőt a kötél függőlegessel bezárt θ szögének függvényében, ami ahhoz szükséges, hogy a hintát eddig a helyzetig húzva egyensúlyi helyzetben tartsuk! b) Közvetlenül az integrál kiszámításával mutassuk meg, hogy a hintának a 0°-os helyzetből a θ kitérésű helyzetig való egyenletes sebességű elmozdításához éppen a helyzeti energia mgh növekedésével egyenlő munkát kell végeznie!

6C-62 Két, Hooke-törvény szerint viselkedő k_1 és k_2 rugóállandójú rugót a 6-45 ábra szerint egymás után kötöttünk. a) Mutassuk meg, hogy a rendszer egyetlen $k_1k_2/(k_1+k_2)$ rugóállandójú rugóval helyettesíthető! b) A teljes rugóenergiának hányad részét tárolja a k_1 állandójú rugó?



6-45 ábra
A 6C-62 feladathoz



6-46 ábra
A 6C-63 feladathoz

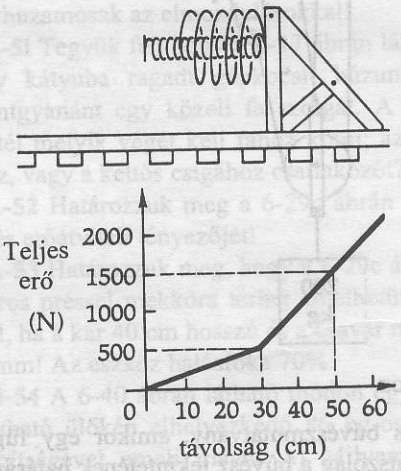
6C-63 Két különböző k_1 és k_2 rugóállandójú Hooke-rugót összeerősítettünk és L távolságra nyújtottunk (6-46 ábra). A rugók nyugalmi hossza rendre l_1 és l_2 és $L > (l_1 + l_2)$. Határozzuk meg a rugók P csatlakozási pontjának x egyensúlyi helyzetét!

6C-64 Egy l hosszúságú, k rugóállandójú rugót két, l_1 és l_2 hosszúságú darabra vágtunk, ahol $l_1 = nl_2$ és n egész szám. Adjuk meg a rugódarabok k_1 és k_2 rugóállandóját n és k függvényében!

6C-65 Egy 2×10^4 kg tömegű vasúti pőrekocsi súrlódásmentesen 2 m/s sebességgel mozog a vízszintes sínen. A kocsi beleütközik a pálya végén rögzített ütközőrugóba és 0,5 m-rel összenyomja. Határozzuk meg a rugó $F = kx^2$ erőtörvényében a k rugóállandó nagyságát beleértve mértékegységét is!

6C-66 Két m tömegű és R sugarú gömb egymástól $D > 2R$ távolságban helyezkedik el és kezdetben nyugalomban van. A gömbök között a középpontjaik x távolságának négyzetével fordítottan arányos gravitációs vonzóerő hat, azaz $F = \frac{k}{x^2}$, ahol k megfelelő egységekben mért állandó. Az egyik gömböt rögzítjük, a másikat azonban engedjük szabadon mozogni. Mekkora sebességgel ütközik a mozgó gömb a nyugvóba?

6C-67 Egy 6000 kg-os tehervagon elhanyagolható súrlódású sínpályán mozog. A kocsi a 6-47 ábrán látható kettős rugóval való ütközés hatására megáll. (Mindkét rugóra érvényes a Hooke-törvény.) Az ütközés során a második rugó csak akkor kezd összenyomódni, miután az első rugó már 30 cm-rel megrövidült, s ennek megfelelően változik, a rugók által kifejtett erő amint ez az ábrán látható. Határozzuk meg a tehervagon v_0 haladási sebességét a munkatétellel, ha tudjuk, hogy az első rugóval való érintkezése után még 50 cm utat tett meg a vagon.

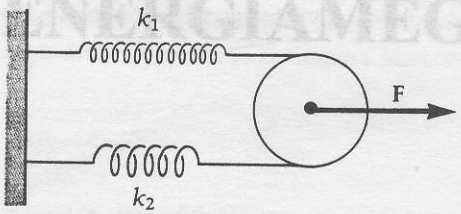


6-47 ábra
A 6C-67 feladathoz

6C-68 Határozzuk meg, hogy mekkora az előző feladatban szereplő második rugó rugóállandója!

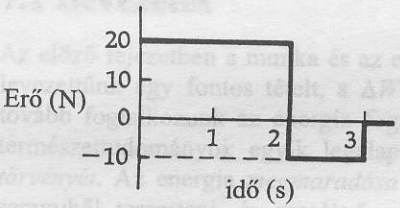
6C-69 Két Hooke-féle rugót a 6-48 ábrán látható módon csigán átvetett kötél végeihez erősítettünk. Mutas-

suk meg, hogy a rendszer a csiga tengelyén fellépő erővel szemben egyetlen $\frac{4k_1k_2}{k_1+k_2}$ rugóállandójú rugóként viselkedik! b) Mutassuk meg, hogy a csiga tengelyének elmozdulása a rugók x_1 és x_2 megnyúlásának átlagával egyenlő! c) A rugalmas energia hányad része tárolódik a k_1 rugóállandójú rugóban?



6-48 ábra
A 6C-69 feladathoz

6C-70 Nyugalomban lévő 5 kg-os tömeg a 6-49 ábra szerint változó erő hatására kezd mozogni. Mennyi munkát végez az erő? (Útmutatás: Határozzuk meg a gyorsulás-idő, majd ebből a sebesség-idő függvényt és innen a $t = 3$ s időpillanatban elért sebességet!)



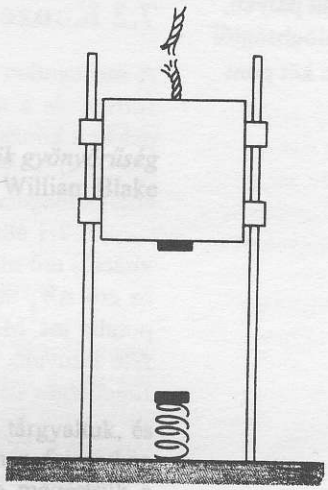
6-49 ábra
A 6C-70 feladathoz

6C-71 Vezessük le a munkatételből a $v^2 = v_0^2 + 2a(s-s_0)$ kinematikai egyenletet! Tegyük meg közben a levezetés érvényességéhez szükséges kikötéseket!

6C-72 A méretarányokból adódó következtetésekkel adjunk magyarázatot arra, hogy míg a lilliputiak testmagasságuk hatszorosára, a brobdingnagiak csak $\frac{1}{24}$ részére képesek helyből felugrani! (Lásd 141. old.) Induljunk ki abból, hogy egy ember testmagasságának mintegy felére tud felugrani.

6C-73 Egy 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ törvény szerint mozgat. (x-et méterben, t-t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében! (Útmutatás: Hogyan változik a sebesség az időben?)

6C-74 Egy 2000 kg tömegű, 2 m/s sebességgel egyenletesen süllyedő felvonó tartókábele hirtelen elszakad (6-50 ábra), amikor a felvonószekrény éppen 20 m-rel van a $2{,}5 \times 10^5$ N/m rugóállandójú biztonsági rugó felett. A kötél elszakadásának időpontjában bekapcsolódnak a vészfékek, és emiatt a vezető sínek 18000 N állandó nagyságú súrlódási erőt fejtenek ki a mozgó felvonószekrényre. a) Mekkora a rugó maximális összenyomódása? b) Mekkora magasságba ugrik vissza a lift az ütközés után a rugó maximálisan összenyomott helyzetéhez képest?



6-50 ábra
A 6C-74 feladathoz

6C-75 Egy m tömegű test a gravitációs erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a gravitációs erő átlagos teljesítménye $P_{átl} = m\sqrt{g^3 h/2}$!

6C-76 A 15 m/s állandó sebességű, 1500 kg-os gépkocsi motorja a súrlódás és a légellenállás leküzdésére 15 kW teljesítménnyel dolgozik. a) Mekkora az átlagos ellenállóerő (súrlódás és légellenállás együtt)? b) Mekkora átlagos teljesítményt kellene leadnia a motornak ahhoz, hogy a gépkocsi ugyanezzel a sebességgel 8%-os (8 m függőleges emelkedés 100 méterenként) emelkedőn mozogjon felfelé?

6C-77 A méretarányokra vonatkozó gondolatmenettel mutassuk meg, hogy egyetlen lilliputi 24 társát képes felemelni, ezzel szemben egy brobdingnagi felemeléséhez 6 másiknak kell együttműködni. Induljunk ki abból, hogy egy ember saját súlyának kb. kétszeresét bírja el.

6C-78 Határozzuk meg a 6-29d ábrán látható differenciálcsiga ideális erőátviteli tényezőjét!

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) –1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$

KONZERVATÍV ERŐK ÉS AZ ENERGIAMEGMARADÁS

Az energia örök gyönyörűség
William Blake

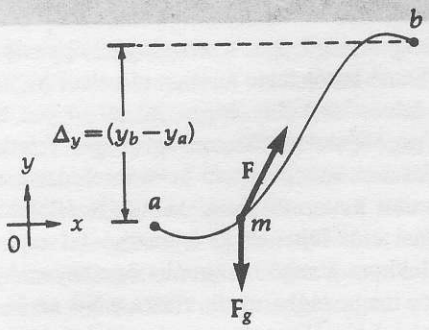
7.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a munka és az energia különböző formáit tárgyaltuk, és levezettünk egy fontos tételt, a $\Delta W = \Delta K$ munkatételt. Ebben a fejezetben tovább foglalkozunk az energia fogalmával, hogy mélyebben megértsük a természettudományok egyik legalapvetőbb tételét, az *energiamegmaradás törvényét*. Az energia *megmaradása* azt jelenti, hogy energiát nem lehet a semmiből teremteni, és meglévő energiát nem lehet megsemmisíteni; az energia csak átalakulhat egyik alakjából a másikba. Fizikatörténetet olvasva, meglepően hosszúnak és fáradtságosnak tűnik az út, amíg a tudomány eljutott az energia mai értelmezéséig. Széleskörű, gondos kísérletezőmunka vezetett el ahhoz a felismeréshez, hogy az energiának sok különböző alakja lehet, és hogy az energia mindig megmarad.

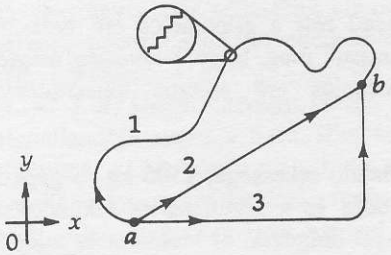
Az energia fogalmát megérteni nem könnyű, s ennek azaz egyik oka, hogy az energia nem anyag[1]; értéke a különböző körülményeknek megfelelően különbözőképpen számítható ki, tudva, hogy az energiaváltozások összege minden fizikai folyamatban zérus. A folyamatokra csak az energia egyik alakjából a másikba való átalakulás jellemző. Nincs értelme például a kinetikus vagy potenciális energiáról abszolút értelemben beszélni, hiszen értékük a vonatkoztatási rendszertől függően változhat. Érthető tehát, hogy csak több, mint két évszázados kutatás után ismerték fel, hogy ezen absztrakt mennyiségeknek – amit energiának nevezünk – az összege nem változik.

Bár az energiamegmaradás törvényét axiómaként mondtuk ki, – és így nem „bizonyítható", – oly erősen hisszük, hogy igaz, hogy ha valamilyen folyamatban úgy tűnik, mintha az energia megmaradásának az elve nem érvényesülne, akkor új energiafajtát vezetünk be, hogy a törvényt érvényben tartsuk. Például a hőenergiát és az elektromágneses tér energiáját eredetileg csak az energiamegmaradás törvényének biztosítása céljából vezették be.

[1] A természettudósok hosszú ideig azt hitték, hogy a hő súlytalan és láthatatlan folyadék – hőanyag- amelyet kalorikumnak is neveztek. A hőmérséklet növekedését, ill. csökkenését azzal magyarázták, hogy a vizsgált test hőanyagot vesz fel, ill. ad le. A hőanyagot megmaradó mennyiségnek tekintették és e megmaradási törvény segítségével sok tapasztalati tény is értelmezhető volt (lásd. a 19.4 fejezetet).



7-1 ábra
Az $\mathbf{F}_g$ gravitációs erő munkája az *a*-tól *b*-ig húzódó görbevonalú pályán, csak az $y_b - y_a$ magasságkülönbségtől függ és teljesen független a két pont közötti pálya alakjától.



7-2 ábra
A gravitációs potenciális energia megváltozása az *a* és *b* közötti tetszőleges pályán ugyanakkora. A kinagyított ívdarab mutatja, hogy a görbevonalú pályaszakasz kicsiny vízszintes és függőleges szakaszokból álló lépcsősorral helyettesíthető. A gravitációs erő csak a függőleges szakaszokon végez munkát. Minthogy azonban a függőleges elmozdulások eredője az *a* és *b* közötti tetszőleges pályán ugyanakkora, a gravitációs erő munkájának is ezeken a tetszőleges utakon ugyanakkorának kell lennie.

Egy másik példa erre, hogy Wolfgang Pauli 1930-ban a rádióaktív β-sugárzó anyag bomlását vizsgálva, kizárólag abból a követelményből, hogy az energia- és impulzusmegmaradás törvényének teljesülnie kell, megjósolta az egyik legérdekesebb elemi részecske, a *neutrínó* létezését. Végül 1953-ban Clyde Cowan és Frederick Reines kísérletileg is észlelték a neutrínó létezését,

Az energiamegmaradás törvénye a a természettudományok leggyümölcsözőbb és legsikeresebb gondolata. Ez a hatalmas és egységes törvény, betekintést nyújt minden biológiai, kémiai és fizikai folyamatba, és a kozmológiától a részecskefizikáig minden tudományágat egymáshoz kapcsol.

7.2 Konzervatív erők

A mechanikai rendszereket vizsgálva célszerű megkülönböztetni: a *konzervatívat,* és a *nem–konzervatív* erőket. Bevezetésül tekintsünk egy speciális példát a konzervatív erőre, ennek általános definícióját később adjuk meg. A *konzervatív* jelző arra utal, hogy ez az erőtípus szorosan kapcsolódik az energiamegmaradás (konzerválódás) törvényéhez.

A 7-1 ábra egy m tömegű részecske pályáját mutatja, melyre az $\mathbf{F}_g$ gravitációs erő mellett egy tetszőleges másik **F** erő is hat. Tekintsük a gravitációs erő ΔW_g munkáját, mialatt a részecske az adott pályán az *a* pontból a *b* pontba jut. Mivel az $\mathbf{F}_g$ gravitációs erő állandó nagyságú[2], függőlegesen lefelé irányuló erő, a végzett munka kiszámításához elég az elmozdulás Δy függőleges komponensével számolni:

$$\Delta W_g = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F_g(\cos 180°)\Delta y = -mg(y_b - y_a)$$

Látható, hogy a gravitációs potenciális energia változása éppen a gravitációs erő munkája negatív előjellel:

$$\Delta U_g = -W \qquad (7\text{-}1)$$

Minden görbevonalú pályát tekinthetünk úgy is, mintha infinitezimálisan kicsiny függőleges és vízszintes szakaszok sorozata lenne, ahol a gravitációs erő csak a függőleges szakaszokon végez munkát. Így a munkavégzés nem függ a pályagörbétől csak az (y_b-y_a) magasságkülönbségtől. A 7-2 ábrán látható, hogy az *a* és *b* közötti bármely görbén a gravitációs potenciális energia változása megegyezik, s így ugyanakkora a gravitációs erő munkája is. A gravitációs erő e tulajdonsága alapul szolgál a konzervatív erő egy lehetséges definíciójához:

Egy erőt konzervatívnak nevezünk, ha két pont közötti mozgás során az általa végzett munka csakis a két pont helyzetétől függ, s független a pálya alakjától. (7-2)

A gravitációs erő konzervatív erő.
Visszatérve a 7-2 ábrához, vegyük észre, hogy bármelyik pályán visszafelé, *b*-ből *a*-ba haladva, a potenciális energia változása (és a gravitációs erő munkája is) ugyanaz az odafelé számított érték negatív előjellel. Ennek az a következménye, hogy a gravitációs erő munkája tetszőleges zárt görbére zérus. Például a 7-2 ábrán, ha az 1-es úton megyünk *a*-ból *b*-be, majd a 3-as úton

[2] Ebben a fejezetben csak a Föld közelében érvényesülő gravitációs hatásokkal foglalkozunk, ahol *g* állandónak tekinthető. A gravitációs erő azonban a Földtől távoli olyan tartományokban is konzervatív erő, ahol a gravitációs gyorsulás $1/r^2$ -tel arányos.

térünk vissza, akkor a gravitációs erő munkája e zárt görbére zérus. Ez a tény a konzervatív erő definiálásának egy másik módjára ad lehetőséget:

Egy erő konzervatív, ha tetszőleges zárt görbén az általa végzett munka zérus. (7-3)

Később megmutatjuk, hogy a (7-2) és a (7-3) definíció ekvivalens. Azt, hogy mikor melyiket használjuk csupán kényelmi szempontok döntik el.
Matematikai jelölésekkel a konzervatív erő meghatározására szolgáló két egymással egyenértékű definíció a következőképpen írható fel.

Konzervatív erők esetén

$$\underbrace{\Sigma \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}}_{\substack{\text{tetszőleges}\\ a\text{-ból } b\text{-be}\\ \text{vezető úton}}} = [\text{állandó}] \quad \text{vagy} \quad \underbrace{\Sigma \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = 0}_{\substack{\text{tetszőleges}\\ \text{zárt görbére}}}$$

Integrál-alakban

$$\underbrace{\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\substack{\text{tetszőleges}\\ \text{út}}} = \begin{bmatrix}\text{ugyanaz az}\\ \text{állandó}\end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (7\text{-}5)$$

(Az integráljelre rajzolt kör a zárt görbe mentén vett integrálra utal.)

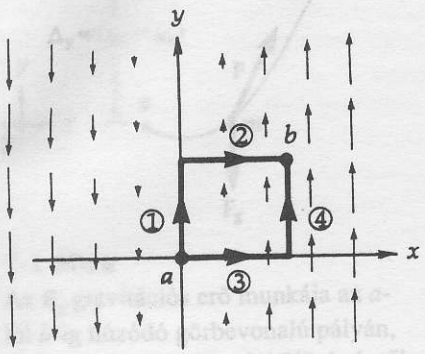
Nézzünk egy konkrét példát: tegyük fel, hogy egy testet függőlegesen földobunk. A testre ható egyetlen erő a gravitációs erő. Mialatt a test felemelkedik, a gravitációs erő negatív munkát végez, s ez a test potenciális energiájának növekedésével párosul. Az esésre az ellenkező igaz, a gravitációs erő pozitív munkát végez, miközben a test potenciális energiája csökken. A konzervatív erő kulcsfontosságú tulajdonsága, hogy az általa végzett munka teljes egészében mechanikai energiává alakul, (illetve a folyamat megfordításakor a tárolt energia munkavégzésre fordítódik.) A gravitációs erő tehát konzervatív erő.

Egy másik példa a konzervatív erőre az ideális rugóerő: $F_{rugó} = -kx$. Ha a rugót – nyugalmi helyzetéből x_1 távolságra megnyitjuk, akkor a rugóerő – $\frac{1}{2}kx_1^2$ negatív munkát végez. A nyugalmi helyzetbe visszatéréskor a rugóerő pontosan ugyanakkora abszolút értékű, de pozitív $+\frac{1}{2}kx_1^2$ munkát végez. A munkavégzés tetszőleges zárt görbére zérus, tehát a rugóerő konzervatív erő. *A rugó potenciális energiájának megváltozása akkora mint a rugóerő által végzett munka negatív előjellel:*

$$\Delta U_{rugó} = -\Delta W_{rugó} \qquad (7\text{-}6)$$

A konzervatív erőknek fontos csoportját alkotják azok az erők, amelyek nagysága csakis egy meghatározott ponttól mért távolság függvénye és csak radiális komponensük van. Az adott pontot kezdőpontnak (vagy más néven középpontnak, centrumnak) választva, s figyelembe véve, hogy az erő mindig e pont felé, vagy e centrumból sugárirányban kifelé mutat, ezeket az erőket **centrális erőknek** nevezzük. A Nap és a bolygók között ható gravitációs erő is ilyen konzervatív, centrális erő. Hasonlóképpen, az atomokban a pozitív töltésű atommag és az elektron között fellépő elektrosztatikus vonzóerő is konzervatív, centrális erő.

Ha egy zárt rendszerben csak konzervatív erők hatnak, akkor a rendszert **konzervatív rendszernek** nevezzük.



7-3 ábra
A nem-konzervatív $\mathbf{F} = kx\hat{\mathbf{y}}$ erőtér grafikus képe. Képzeletben egészítsük ki az ábrát úgy, mintha a sík minden pontjában meg lenne rajzolva az erőtörvénynek megfelelő nagyságú és irányú erővektor. (Az erővektor mindig y irányú, nagysága azonban az adott pont x koordinájától függ.)

7.3 Nem-konzervatív erők

A leggyakoribb példa a nem-konzervatív erőre a csúszó súrlódási erő. Ha egy testet érdes (súrlódásos) pályán mozgatunk, akkor a súrlódáskor termelődő hő (termikus energia) az út hosszától is függ. A test a-ból b-be mozgatása során az f_k csúszó súrlódási erő által végzett munka különböző pályákon különböző lesz, azaz a súrlódási erő munkája *nem* független az úttól. S természetesen zárt görbére nézve a munka nem zérus, hiszen f_k mindig ellentétes a mozgás irányával, s így az általa a zárt görbén végzett (negatív) munka mindig véges, nem zérus érték. Tehát a csúszó súrlódás *nem-konzervatív* erő.

A nem-konzervatív erő másik példáját szolgáltatja az a párhuzamos erőrendszer, amelyben az erő nagysága az irányára merőleges irányban mért távolságtól függ. Ilyen erő például az xy síkban bekövetkező mozgások esetén az $\mathbf{F} = kx\hat{\mathbf{y}}$ erő. Az erő mindig $\hat{\mathbf{y}}$ irányú, azonban az x távolsággal arányos. Szemléletes képet kaphatunk erről az „erőtérről", ha az erővektorokat nyilacskák sorozatával ábrázoljuk (7-3 ábra). (Próbáljuk ezt a képet gondolatban úgy kiegészíteni, hogy a *sík minden pontjába* az x koordinátával arányos nagyságú erőt képzelünk.) Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy ez az erőtér nem konzervatív, számítsuk ki a végzett munkát az a-ból b-be vezető két különböző úton. Az ①-es szakaszon végzett munka zérus, hiszen az erő is zérus. A ②-es szakaszon végzett $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ munka ugyancsak zérus, mert $\mathbf{F}$ merőleges a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektorra. Így a munka az ①→②-es úton zérus. A ③-as szakaszon végzett munka is zérus, hiszen $\mathbf{F}$ merőleges $\Delta\mathbf{r}$-re, világos azonban, hogy a ④-es szakaszon a munka valamilyen véges, nem zérus érték. Így tehát ez az erő *nem* elégíti ki a konzervatív erő kritériumát.

Néhány erő, mint például a repülőgépekre ható légellenállás, sebességfüggő. Ezek az erők sem konzervatívak, hiszen a végzett munka *sebességfüggő*, s ez nem teljesíti azt a követelményt, miszerint két pont között végzett munka csak a végpontok helyzetétől függ. Hasonlóképpen, az időtől függő erők sem konzervatívak. Az elektromágneses indukciónál fellépő egyes erők szintén nem-konzervatív típusúak.

Általában elmondhatjuk, hogy a sebességtől vagy időtől függő erők és a súrlódási erők nem-konzervatív erők. Ezekkel a nem-konzervatív erőkkel későbbi fejezetekben fogunk foglalkozni (14., 30. és 32.), most azonban ezek közül csak a súrlódási erőről lesz szó.

7.4 Konzervatív erők és a potenciális energia

Most, hogy látjuk a különbséget a konzervatív és a nem-konzervatív erők között, részletesebben megvizsgáljuk a konzervatív rendszereket, és meghatározzuk a konzervatív erők és a potenciális energia között fennálló kapcsolatot. Megmutatjuk, hogy *minden konzervatív erőhöz létezik egy potenciális energia függvény*, valamint, hogy a potenciális energia értéke minden esetben csak a helykoordinátától függ. A következőkben a konzervatív erő és a hozzátartozó potenciális energia közötti kapcsolat megállapításával eljutunk a mechanikai rendszerek vizsgálatakor nagyon hasznos és általános mechanikai-energia-megmaradás törvényéhez.

Emlékezzünk vissza, hogy mind a gravitációs erő, mind az ideális rugóerő estén azt találtuk, hogy $\Delta U = -\Delta W$. Valóban, *minden* konzervatív, az x helykoordinátától függő F_x erőhöz létezik egy *U(x) potenciálfüggvény*, melyre fennáll, hogy:

$$F(x)\Delta x = -\Delta U$$

$$\text{vagy} \quad F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

illetve differenciális formában felírva[3]: $F(x) = -\dfrac{dU}{dx}$ (7-7)

A $dU = -F(x)\,dx$ egyenletből kiindulva a fenti összefüggést integrál alakban is felírhatjuk. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát az [a,b] intervallumon. Azt kapjuk, hogy:

$$U_b - U_a = -\int_a^b F(x)\,dx \qquad (7\text{-}8)$$

A konzervatív erő és a hozzárendelt potenciális energia kapcsolata

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad \text{és} \quad U_b - U_a = -\int_a^b F(x)\,dx \qquad (7\text{-}9)$$

Hasonló egyenleteket írhatunk föl az *y* és *z* koordinátákra is. *Centrális erők* esetén (16.5 fejezet), ahol az erő sugár irányú, a megfelelő koordináta a centrumtól való *r* távolság.

A folyamatok energetikai leírásának a dinamikaival szemben az az előnye, hogy *skalármennyiségekkel* dolgozhatunk. Ha több különböző irányú erő is hat egyszerre, akkor a *skalár*mennyiségekkel sokkal egyszerűbben számolhatunk, mint az erőkre vonatkozó *vektorműveletekkel*. Továbbá, amikor kicsiny rendszerekkel, atomokkal vagy atommagokkal foglalkozunk, a rendszer energiaállapota méréssel sokszor könnyen meghatározható, az erők azonban nem. Ezért az újabb elméleteket a fizikában majdnem minden esetben az energia segítségével fogalmazzák meg, nem pedig az erő segítségével.

Jegyezzük meg azonban, hogy egy rendszer energiája a vonatkoztatási rendszertől függően más és más lehet. Például egy nem zérus kinetikus energiájú tömegpont kinetikus energiájára egy másik, a tömegponttal együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben zérus értéket kapunk.

Figyeljük meg azt is, hogy a potenciális energia mindig a *teljes rendszer* tulajdonsága, s nem csupán egyetlen részecskéé. A potenciális energia kizárólag a rendszer alkotórészeinek egymáshoz képest vett elrendeződésétől függ. Igaz, néha beszélünk egy *m* tömegű test gravitációs potenciális energiájáról, amely ha a test *y* távolságra van valamilyen zérus szinttől, akkor *mgy* értékű. Pontosabban fogalmazva azonban azt kellene mondanunk, hogy ez a Földhöz és a tárgyhoz, mint rendszerhez tartozó potenciális energia. Ha földobunk egy labdát, a labda folyamatosan gyorsulva esik a Föld felé, miközben a Föld is gyorsulva közeledik a labda felé. Mivel azonban a Föld tömege sokkal nagyobb a labda tömegénél, ($m_{labda} \langle\langle m_{Föld}$), a Föld mozgása elhanyagolható, s így a Föld mozgásából származó kinetikus energiát gyakorlatilag zérusnak tekintjük. Természetesen csillagászati méretű rendszerekben, ahol a tömegek összemérhetőek, (például a Föld Hold rendszer), a rendszer egészét kell vizsgálnunk, s figyelemmel kell kísérnünk minden rész mozgását. (Lásd 16. fejezet: A gravitáció)

Érdekes tulajdonsága a potenciális energiának, hogy ellentétben a könnyen kiszámítható $K = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energiával, nincs egyetlen közös formula, amellyel a potenciális energia minden fajtája megadható. Egy rend-

[3] Háromdimenziós esetben, amikor U az x, y és z koordinátának is függvénye, ez az összefüggés az

$$F(r) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)$$

alakot ölti, ahol a $\partial U / \partial x$ stb. kifejezések parciális deriváltak (Lásd G-V függelék). Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezést az $U(x,y,z)$ skalárfüggvény negatív gradiensének nevezzük. Más jelöléssel U gradiense a grad $u = \nabla u$

szer potenciális energiája minden esetben részeinek egymáshoz viszonyított helyzetétől függ, akár rugókkal összekapcsolt tömegpontrendszerről, akár gravitációs kölcsönhatás által összetartott csillagrendszerről, vagy elektromosan töltött részecskerendszerről van szó. A potenciális energia megváltozását, mialatt a rendszer egyik elrendeződéséből a másikba megy át, úgy kell kiszámítani, hogy a rendszert egyetlen egészként kezeljük. Mindig ki kell jelölnünk a rendszernek azt az elrendeződését, amelyhez tartozó potenciális energiát zérusnak tekintjük.

7.5 A mechanikai energia megmaradása

Most, hogy megismertük a konzervatív erő és a hozzátartozó potenciális energia között fennálló kapcsolatot, használjuk fel ezeket a fogalmakat a konzervatív rendszerekre felírt munkatétel átfogalmazására. Tekintsünk egy konzervatív rendszert, melyet a konzervatív erőktől eltekintve tökéletesen elszigeteltünk a környezetétől, – semmilyen külső erő nem hat rá. Ekkor a konzervatív erők által végzett összes munka egyenlő a rendszer potenciális energiája negatív előjelű megváltozásával.

$$\sum[\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}] = -\Delta U \tag{7-10}$$

A munkatétel szerint azonban:

$$\sum[\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}] = \Delta K \tag{7-11}$$

Összevetve a két fenti egyenletet, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} -\Delta U &= \Delta K \\ -(U-U_0) &= K-K_0 \\ U_0+K_0 &= U+K \end{aligned} \tag{7-12}$$

Átrendezve:

Ebből arra következtethetünk, hogy konzervatív rendszerben a *teljes* $E = U+K$ *mechanikai energia* megmarad. Ha E_0 a mechanikai energia kezdeti értéke, akkor a rendszer E energiája minden későbbi időpontban ugyanennyi lesz. Ez a konzervatív rendszerekre vonatkozó **mechanikai energia megmaradásának törvénye.**

A mechanikai energia megmaradásának a törvénye (konzervatív rendszerek esetén)

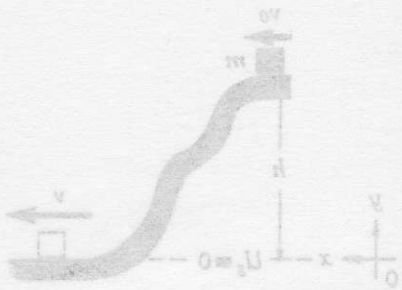
$$\begin{aligned} E_0 &= E \\ U_0+K_0 &= U+K \end{aligned} \tag{7-13}$$

Bár a tétel egyszerűnek tűnik, a konzervatív rendszerek rendkívül mély tulajdonságát fejezi ki, és ily módon nagyon hatékonyan alkalmazható a fizikai folyamatok elemzésére.

A tudományos vizsgálatokban nagyon fontos azoknak a mennyiségeknek a felkutatása, amelyek a fizikai folyamat során állandók maradnak. Ezeket a mennyiségeket *mozgásállandóknak* nevezzük. Az E összes mechanikai energia is ilyen mennyiség (feltéve, hogy olyan rendszerről van szó, melyben csak konzervatív erők hatnak). Így a rendszerben bekövetkező folyamattól függetlenül a rendszer kezdeti energiája megegyezik a végállapot energiájával, s így *nem kell törődnünk a kölcsönhatás részleteivel*, ami jelentős egyszerűsítést jelent.

Mielőtt rátérnénk a mechanikai energia megmaradásával kapcsolatos feladatok tárgyalására, ismételjünk át néhány fontosabb részletet. A mechanikai energia kifejezés a kinetikus és a potenciális energiára utal, s kifejezet-

ten kizárja a súrlódási erő által termelt hőt, illetve bármely más nemkonzervatív erő munkáját. Az U potenciális energia mindenféle potenciális energiát magában foglal, legyen az gravitációs, rugó, elektrosztatikus, vagy egyéb más potenciális energia. A mechanikai energia megmaradásának törvényét felhasználó feladatok megoldásakor nagyon fontos kijelölnünk egy zérus konfigurációt vagy állapotot, amelyben a potenciális energiát zérusnak választjuk $U \equiv 0$. A gravitációs erőtérben végzett mozgások vizsgálatakor rendszerint a feladatban szereplő legalacsonyabb szintet választjuk a zérusenergiájú szintnek. Rugó estén pedig a nyugalmi állapotot a legmegfelelőbb zérus potenciális energiájúnak kijelölni.



7-1 PÉLDA

Kezdetben nyugalomban lévő testet h magasságból a padlóra ejtünk (7-4 ábra). Határozzuk meg a test sebességét a padlóra érkezés pillanatában az energiatétel segítségével.

MEGOLDÁS

Mivel a testre csak a konzervatív gravitációs erő hat, ezért a teljes mechanikai energia $E = U+K$ állandó. Az egyszerűség kedvéért rendeljük a padló szintjéhez (a legmélyebb ponthoz) a zérus potenciális energiájú állapotot. Ezt így írhatjuk föl: $y = 0$ esetén $U_g \equiv 0$. Mivel a kezdeti és végső energia egyenlő, azt kapjuk, hogy:

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

$$mgy + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \pm\sqrt{2gh}$$

Mivel koordinátarendszer felfelé irányítjuk, és a test lefelé esik a *negatív* előjelű sebesség a megfelelő. (A pozitív előjel azt jelentené, hogy a test az $y = 0$ koordinátájú helyen v sebességgel felfelé mozog, s ezt a sebességét az $y = h$ magasságú helyen veszíti el. Más szóval a pozitív előjel a test olyan lehetséges mozgására vonatkozik, ami a feladatban megfogalmazott mozgás előtt zajlott volna le, így nem megoldása a problémának.)

A feladatot a Newton-törvények felírásával is megoldhattuk volna:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$-mg = ma$$

$$a = -g$$

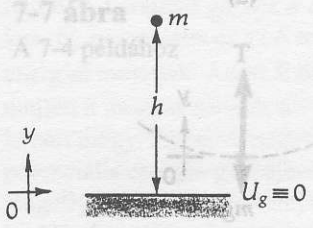
A megfelelő értékeket a kinematikai egyenletbe behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0)$$

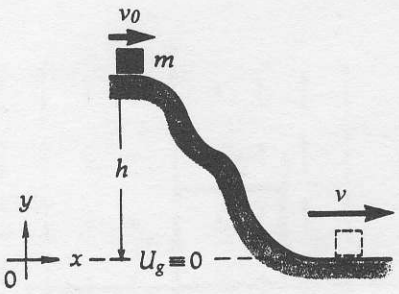
$$v^2 - 0 = 2(-g)(0 - h)$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \pm\sqrt{2gh}$$



7-4 ábra
A 7-1 példához



7-5 ábra
A 7-2 példához

Figyeljük meg, hogy ennél a feladatnál az energiamegmaradást felhasználva sokkal egyszerűbben kapjuk meg az eredményt, mint a Newton-törvények felírásával. Ez az eset általában gyakori, ha csak konzervatív erők hatnak.

7-2 PÉLDA

Egy m tömegű test v_0 kezdősebességgel csúszik le egy görbevonalú súrlódásmentes pályán, (7-5 ábra) s v sebességgel érkezik le a lejtő aljára. Milyen magasról indítottuk el a testet?

MEGOLDÁS:

Súrlódásmentes pályán a kényszererő mindig a felület normálisával egyirányú, azaz merőleges a test pillanatnyi elmozdulására. Így ez a kényszererő nem végez munkát, s az energiaátalakulásban nem játszik szerepet. A konzervatív gravitációs erő az egyetlen ható erő, így érvényes a mechanikai energiamegmaradás tétele. A zérus potenciálú állapotot a pálya aljához rendelve a következőket kapjuk:

$$E_0 = E$$

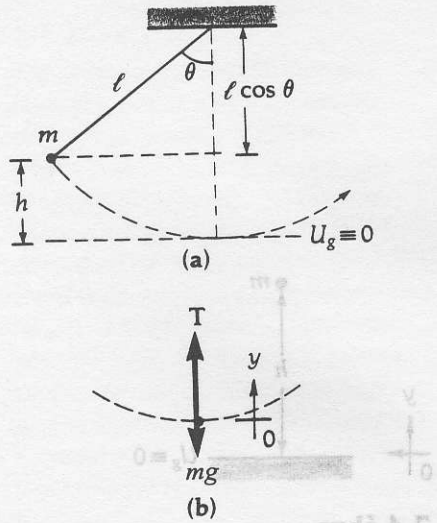
$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

innen h értéke:
$$h = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2g}$$

Megjegyzés: Gyakori hiba az ilyen típusú feladatokban a $v^2 = v_0^2 + 2ay$ kinematikai egyenlet alkalmazása, amely formálisan helyes eredményre vezet. A kinematikai meggondolás azonban most fizikailag helytelen. A test által megtett út ugyanis nem h, és a test gyorsulása sem állandó. Vessük emlékezetünkbe, hogy a kinematikai egyenlet csak *egyenesvonalú, s állandó gyorsulású* mozgás esetén használható.

Vegyük észre továbbá, hogy a probléma nem oldható meg a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ Newton-törvénnyel és a kinematikai egyenletekkel. Ehhez ugyanis a lejtő minden pontjában tudni kellene a testre ható gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponensét, amihez viszont a lejtő görbéjének egyenletére lenne szükség.



7-6 ábra
A 7-3 példához

7-3 PÉLDA

Egy ℓ hosszúságú kötélre függesztett m tömegű ingatestet oldalra húzunk úgy, hogy a fonál a függőlegessel θ szöget zárjon be. (7-6 ábra) Ekkor nyugalmi helyzetéből elengedjük. a) Mekkora az ingatest sebessége amikor a legmélyebben van? b) Mekkora erővel feszíti ebben a pillanatban a test a kötelet?

MEGOLDÁS

a) A lengő testen a kötélerő nem végez munkát. (Mert a kötélerő mindig merőleges a mozgás irányára) Az egyetlen erő, amely munkát végez, a gravitációs erő, s így a rendszer konzervatív, és

érvényes a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Legyen a legalsó pont az $U \equiv 0$ potenciálú hely.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

Az ábráról látható, hogy $h = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta)$, ezt behelyettesítve:

$$g\ell(1-\cos\theta) = \frac{v^2}{2}$$

és innen:

$$v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}$$

adódik.

b) A kötélben ébredő erő meghatározásához készítsünk vektorábrát (7-6b ábra), melyen a mozgás legalsó helyzetében fellépő erőket vesszük fel. A pozitív irányt válasszuk a centripetális gyorsulás irányába. A mozgásegyenlet:

$$F_y = ma_y$$

$$T - mg = m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{\ell}\right) = mg + 2mg(1-\cos\theta)$$

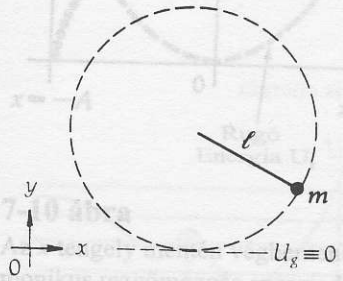
$$T = mg(3 - 2\cos\theta)$$

7-4 PÉLDA

Egy m tömegű test, ℓ hosszúságú kötélre erősítve függőleges síkú körpályán mozog (7-7 ábra). A testre a gravitációs erőn és a kötélerőn kívül semmilyen más erő nem hat. A test a körpálya legfelső pontján olyan v_f sebességgel mozog, amely elegendően nagy ahhoz, hogy a kötél mindenütt feszes maradjon[4]. Határozzuk meg a test sebességét a körpálya alsó pontjában.

MEGOLDÁS

Mivel a test mozgása mindig merőleges a kötélerőre, így a **T** kötélerő nem végez munkát. Az egyetlen erő, amely munkát végez, a gravitációs erő, s így alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét. Válasszuk a gravitációs potenciál értékét zérusnak a körpálya legalsó pontjában. Így:



7-7 ábra
A 7-4 példához

[4] A függőleges síkú körmozgás vizsgálata alapján mggyőződhetünk arról, hogy ha a rugó a legfelső pontban feszül, akkor mindenütt feszes marad. Másképpen fogalmazva, ha a körmozgás sebességét fokozatosan csökkentjük, akkor a rugó a legfelső pontban lazul meg először. (Hasonló következtetések adódnak egy függőleges hurokban mozgó testre a pálya által kifejtett kényszererőre vonatkozóan.)

$$E_{fent} = E_{lent}$$

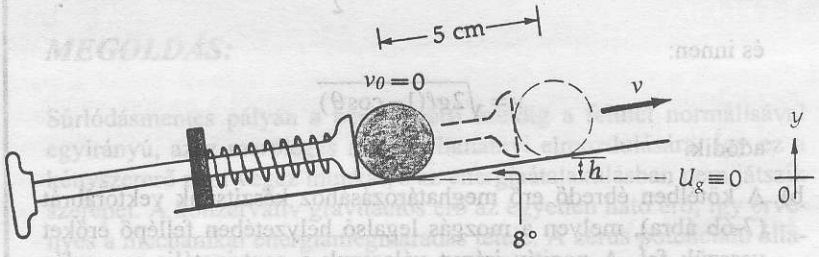
$$(U_g)_f + K_f = (U_g)_l + K_l$$

$$mg(2\ell) + \frac{1}{2}mv_f^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_l^2$$

és innen

$$v_l = \pm\sqrt{4g\ell + v_f^2}$$

adódik.



7-8 ábra
A 7-5 példához. A szaggatott vonallal rajzolt kör mutatja, hogy a kilövés során hol éri el maximális sebességét a golyó és ennek megfelelően hol válik el a kilövőszerkezettől.

7-5 PÉLDA

Egy tivolijáték automata rugós dugattyújával 100 g-os labdát lőhetünk ki. A játéktábla a vízszintessel 8°-os szöget zár be. Határozzuk meg a k rugóállandó értékét ha a dugattyú által 5 cm-nyire összenyomott rugó a dugattyú elengedésekor a labda 80 cm/s kezdősebességgel lövödik ki. Tegyük fel, hogy a dugattyú tömege és a súrlódás hatása elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A 7-8 ábra a labda függőleges elmozdulását mutatja, amíg a dugattyúval együtt mozog. Az ábráról leolvasható, hogy a labda alsó pontjának (így tömegközéppontjának is) emelkedése: $h = (5\text{ cm})\cdot(\sin 8°) = 0{,}696\text{ cm} = 6{,}96 \times 10^{-3}\text{ m}$. Mivel a súrlódás elhanyagolható, a rendszer konzervatívnak tekinthető, és érvényes a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Válasszuk a potenciális energia zérusszintjének az ábrán megjelölt szintet, s legyen x a rugó összenyomásának hossza.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + (U_{rugó})_0 + K_0 = U_g + U_{rugó} + K$$

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 + 0 = mgh + 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

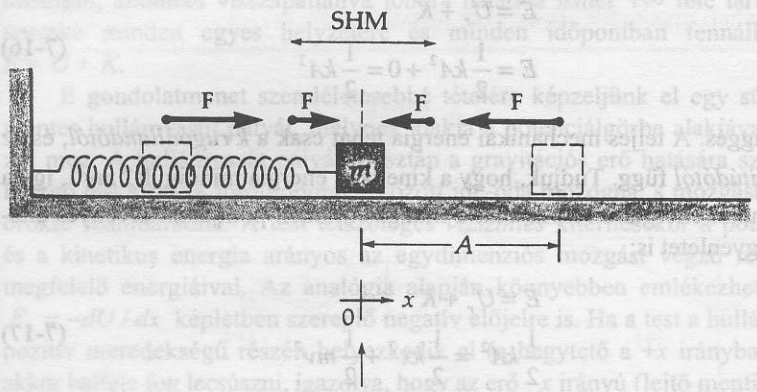
innen $$k = \frac{m(2gh - v^2)}{x^2}$$

SI mértékrendszerben behelyettesítve az adatokat a következő eredményt kapjuk:

$$k = \frac{(0{,}1\text{ kg})\left[2\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6{,}96\cdot 10^{-3}\text{ m}) + \left(0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right]}{(0{,}05\text{ m})^2} = 31{,}1\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

7.6 Energiadiagramok

Az egydimenziós konzervatív rendszerek fizikai viselkedéséről nagyon szemléletes képet kaphatunk, ha a rendszer U potenciális energiáját az x kitérés függvényében ábrázoljuk. Ez az ábrázolás nagyon hasznos és tömör áttekintést ad, melynek tulajdonságait érdemes tanulmányozni. Két speciális eset segítségével mutatjuk be az ábrázolás előnyeit.



Egyensúlyi helyzet
Az U_r itt zérus

7-9 ábra
Egyszerű harmonikus rezggőmozgás. Az ábrán feltüntettük az $F = -kx$ rugóerőt is a test néhány helyzetében. A rugóerő ún. visszatérítő erő, mert mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat.

A 7-9 ábra egy rugóhoz erősített m tömegű testet ábrázol, mely súrlódásmentesen mozoghat egy vízszintes síkon. A rugó a Hooke-törvény szerint viselkedik. Az egyensúlyi állapotban $x = 0$ kitérésnél a rugó nyugalmi helyzetben van, s a testre ható eredő erő zérus. Ha a testet kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, és elengedjük, a test oda-vissza rezgéseket végez, és ezt **egyszerű harmonikus rezgőmozgásnak** nevezzük[5]. A fizika nagyon sok területén találkozunk rezgő, más néven oszcilláló rendszerekkel, amelyeknek mozgása az egyszerű harmonikus rezgőmozgás segítségével írható le. Néhány példa erre: az ingamozgás, a levegő molekuláinak hanghullámok keltette rezgőmozgása, vagy az órák lengőkerekének oszcillálása.

Az egyszerű harmonikus rezgőmozgás során az eredő erő a Hooke-törvénnyel ($F_r = -kx$) adható meg. Az eredő erőnek két jellegzetes tulajdonsága van:

a) *Visszatérítő erő.* Ez azt jelenti, hogy ha a testet jobbra térítjük ki az egyensúlyi helyzetből, akkor a testre ható erő balfelé húzza vissza a testet, illetve ha balra térítjük ki, akkor a rugóerő jobbra húzza, azaz visszatéríti a testet. (A negatív előjel ezt fejezi ki.)

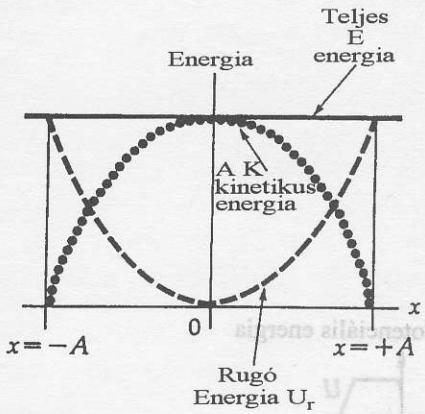
b) Az erő az egyensúlyi helyzettől mért *kitéréssel arányos.* Az arányossági tényező k.

Az ábrán az egyszerű harmonikus rezgőmozgás az x tengely mentén az

$$F_r = -kx \qquad (7\text{-}14)$$

Hooke-törvény hatására megy végbe. Az erőhöz tartozó potenciális energiafüggvény:

$$U_r = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (7\text{-}15)$$



7-10 ábra
Az x tengely mentén végbemenő harmonikus rezgőmozgás energiadiagramja. A berajzolt görbék a K kinetikus, U_r potenciális és az E teljes energiát mutatják. Adott E összenergia mellett a mozgás a $+A$ és a $-A$ pont között megy végbe. A határpontokat a potenciális energia görbéjének az x tengellyel vett metszéspontjai jelölik ki. Minden időpontban teljesül az $U_r + K = E$ összefüggés.

[5] Az egyszerű jelző arra utal, hogy a mozgásban csak egyetlen frekvenciához tartozó rezgés szerepel, a harmonikus jelző pedig azt jelenti, hogy a kitérés matematikailag harmonikus függvénnyel (szinusz vagy koszinusz) írható le. Az egyszerű harmonikus mozgással a 15. Rezgések c. fejezetben még bővebben foglalkozunk.

A potencális energia $U_r \equiv 0$ szintjét a mozgás nyugalmi helyzetéhez, azaz az $x = 0$ helyhez rendeljük hozzá.

A nyugalmi helyzettől mért maximális kitérést **amplitúdónak** nevezzük, és A-val jelöljük. Az $x = \pm A$ helyeken a test pillanatnyi sebessége zérus, mivel éppen megváltozik a sebesség iránya, így ezekben a szélső helyzetekben a test kinetikus energiája zérus. Mivel nincs súrlódás, a rendszer konzervatív, és a teljes mechanikai energiára az $x = \pm A$ helyen felírható az:

$$E = U_r + K$$
$$E = \frac{1}{2}kA^2 + 0 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (7\text{-}16)$$

összefüggés. A teljes mechanikai energia tehát csak a *k rugóállandótól*, és az *A amplitúdótól* függ. Tudjuk, hogy a kinetikus energia mindig $1/2\,mv^2$, így a mechanikai energiára felírhatunk a mozgás minden pontjában érvényes általános egyenletet is:

$$E = U_r + K$$
$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (7\text{-}17)$$

A 7-10 ábra az energiák közötti kapcsolatot ábrázolja. Az U potenciális energiát szaggatott, a K kinetikus energiát pontozott, s a teljes E mechanikai energiát vastag vonal jelöli. Figyeljük meg, hogy mivel $1/2\,mv^2$ mindig pozitív, ezért az ábrán látható kinetikus energiának csak azon x-értékek esetén van fizikai jelentése, melyekre a függvénygörbe az x tengely fölött helyezkedik el. Így a test nem mehet az $x = \pm A$ határokon túl, amelyeket a mozgás **fordulópontjainak** hívunk. Ezekben a pontokban a rendszer összes mechanikai energiája potenciális energia alakjában tárolódik. Harmonikus rezgőmozgás esetén mind a potenciális, mind a kinetikus energia görbéje az egyensúlyi helyzetre szimmetrikus parabola.

Az ábráról azt is leolvashatjuk, hogy amikor a K kinetikus energia maximális, akkor az U_r potenciális energia értéke zérus, illetve megfordítva, mikor a potenciális energia maximális, akkor a kinetikus energia zérus. Így a rendszer $E = U_r + K$ teljes energiáját kétféleképpen is kifejezhetjük:

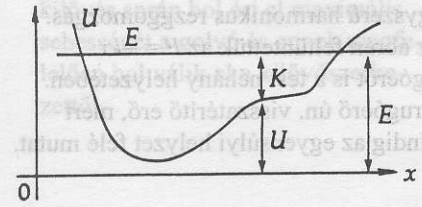
Az összes energia: $E = \frac{1}{2}mv^2_{max}$ (A maximális kinetikus energia) **(7-18)**

Az összes energia: $E = \frac{1}{2}kA^2$ (A maximális potenciális energia) **(7-19)**

Jegyezzük meg, hogy az összes energia az A amplitúdó *négyzetével* arányos.

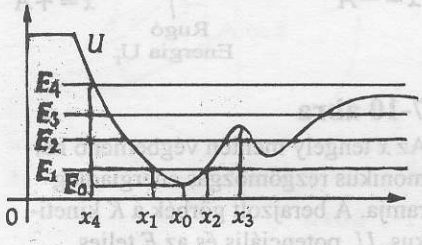
Konzervatív rendszerek esetén a potenciális energia függvényének az ábrázolása sokszor megkönnyíti a mozgás értelmezését. A 7-11 ábra mutatja, hogy adott E összenergia mellett minden pontban teljesül, hogy $E = U + K$. A 7-12 ábra egy egydimenziós, de a harmonikus rezgőmozgásnál bonyolultabb mozgást mutat be. Az összenergia különböző E értékeire a mozgás különböző tartományokra korlátozódik. A rendszer legkisebb E_0 összenergiájú állapota az, amikor a test az x_0 helyen nyugszik, s nincs kinetikus energiája, ekkor $E_0 = U$. Ha a részecskének kicsiny kinetikus energiát adunk és emiatt jobbra vagy balra kissé elmozdul, akkor a rá ható erő $F = -dU/dx$, (a görbe meredekségének *mínusz egyszerese*) *visszatérítő erő*, amely visszahúzza a részecskét az x_0 hely felé, ezért az x_0 hely *stabilis egyenúlyi helyzet*. E_1 stabilis összenergia esetén a részecske mozgását az x_1, x_2 *fordulópontok* korlátozzák, azaz a részecske *periódikusan* oszcillál az x_1 és x_2 helyek közötti *potenciálgödörben*. A kicsit nagyobb E_2 összenergia esetén két potenciálgödör is van, amelybe a részecske befogódhat, de (külső energia hozzáadása nélkül) nem tud áthatolni a köztük levő tiltott sávon, az ún. *potenciálgáton*, melyre fennáll, hogy $U>E$. Még nagyobb E energia esetén, mely a potenciálgát legmaga-

Energia



7-11 ábra
Mindenütt: $E = U + K$

Potenciális energia



7-12 ábra
Egydimenziós mozgást végző részecske mozgása különböző nagyságú E összenergia mellett. Az U potenciális energia és a teljes energia görbék metszéspontjai jelölik ki a mozgás fordulópontjait az adott összenergia mellett. Mindig fennáll ugyanis, hogy $E = U + K$.

sabb értékével egyezik meg (nem mutatja az ábra), a részecske az x_3 helyen egyensúlyban lehet. Ez a pont azonban *instabilis egyensúlyi helyzet,* mert ha a részecskét jobbra, vagy balra kissé kimozdítjuk, akkor a részecskére ható erő méginkább távolítani Igyekszik x_3-tól. E_3 összenergiánál a részecske oda-vissza mozog a fordulópontok között, kissé lelassulva a potenciálhegyen való áthaladáskor. Végül ha a részecske energiája E_4, akkor $V < E$ esetén a részecske szabad. A $+\infty$-ből érkezve a részecske az x_4 fordulópontig tud balra mozogni, ahonnan visszapattanva jobbra haladva ismét $+\infty$ felé tart. A részecske minden egyes helyzetére és minden időpontban fennáll, hogy $E = U + K$.

E gondolatmenet szemléletesebbé tételére képzeljünk el egy súrlódásmentes hullámvasút pályát, melynek alakja a potenciálgörbe alakjával egyezik meg. A hullámvasút pályán pusztán a gravitációs erő hatására szabadon mozgó test a pálya fordulópontjai között ide-oda mozogna, s mozgása mindörökre fennmaradna. A test tetszőleges *vízszintes* kitérítésekor a potenciális és a kinetikus energia arányos az egydimenziós mozgást végző részecske megfelelő energiáival. Az analógia alapján könnyebben emlékezhetünk az $F_x = -dU/dx$ képletben szereplő negatív előjelre is. Ha a test a hullámvasút pozitív meredekségű részén helyezkedik el (a hegytető a $+x$ irányban van), akkor balfele fog lecsúszni, igazolva, hogy az erő $-x$ irányú (lejtő menti).

A hullámvasút analógia azért használható, mert a hullámvasúton mozgó test gravitációs helyzeti energiája az $U = mgy$ képlettel számítható ki, azaz éppúgy arányos az y magassággal, mint a potenciálfüggvény egy adott pontban vett y (energia) koordinátával. Ezen analógia használatakor azonban nem szabad elfelejtenünk, hogy a vizsgált részecske tényleges mozgása *egydimenziós* mozgás, míg az említett hullámvasút analógia kétdimenziós. Továbbá a hullámvasút pályán végighaladó test gyorsulása sem azonos az egydimenziós részecske gyorsulásával. Így, bár az analógia szemléletes, csak körültekintéssel alkalmazható.

7-6 PÉLDA

Egy 2 kg-os test $\pm x$ irányban mozoghat olyan erő hatására, melynek potenciális energiája $U = (6{,}5\,\mathrm{J/m})|x|$, alakban írható fel, ahol x az origótól mért távolság méterben. (7-13 ábra) A test teljes energiája 10 J. a) Állapítsuk meg milyen messzire jut el a test az origótól? b) Mekkora a test maximális sebessége?

MEGOLDÁS

a) A fordulópontban a kinetikus energia zérus. A mechanikai energia kifejezését felírva, az alábbi egyenletet kapjuk:

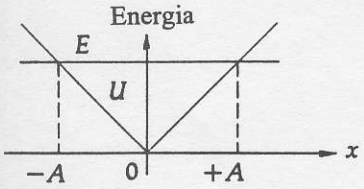
$$U + \mathrm{K} = \mathrm{E}$$

$$\left(6{,}5\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}\right)(x_{\max}) + 0 = 10\,\mathrm{J}$$

innen

$$x_{\max} = \frac{10\,\mathrm{J}}{6{,}5\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}} = 1{,}54\ \mathrm{m}$$

b) A sebesség akkor maximális, amikor az U potenciális energia minimális (az $x = 0$ helyen). Így



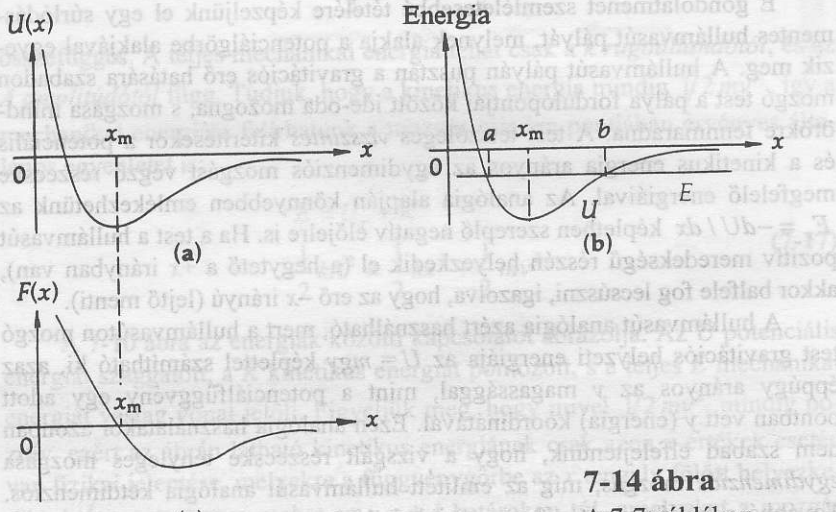
7-13 ábra
A 7-6 példához

$$U + K = E$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_{max}^2 = E$$

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(10\,\text{J})}{2\,\text{kg}}} = \pm 3{,}16\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A plusz vagy mínusz előjel azt jelenti, hogy a test mindkét irányban felveheti maximális sebességét. Mindkét érték helyes.



7-14 ábra
A 7-7 példához

7-7 PÉLDA

Egy kétatomos molekulában a potenciális energiát az alábbi függvény szerint közelíthetjük:

$$U(x) = \frac{c}{x^9} - \frac{d}{x} \qquad (7\text{-}20)$$

ahol c és d állandó, és x a két atom közötti távolság. A (7-14a) ábra az $U(x)$ potenciálgörbe menetét vázolja. Az abszolút zérus hőmérséklet felett a molekula atomjai az őket összekötő egyenes mentén rezgőmozgást végeznek.[6] Adott E energia esetén a két atom közötti távolság egy minimális a és egy maximális b érték között változik, amint ezt a 7-14b ábra mutatja. A hőmérséklet csökkenésével e rezgés tágassága kisebbé válik, s az atomok közötti távolság azon x_m érték felé tart, amelynél a molekula potenciális energiája minimális. a) Határozzuk meg az atomok közötti $F(x)$ erőt az x távolság függvényében, és ábrázoljuk a függvényt. b) Számítsuk ki az x_m távolságot.

MEGOLDÁS

a) Tudjuk, hogy az erő konzervatív, ezért:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{c}{x^9} - \frac{d}{x}\right]$$

[6] A helyzeti energia-görbéjének aszimmetriájával magyarázható, hogy melegedéskor a legtöbb anyag tágul. Magasabb hőmérsékleteken E értéke nagyobb és időátlagban az atomok közötti távolság is megnövekszik.

A deriválást elvégezve (magyarázat a G függelékben) az alábbi összefüggés adódik:

$$F(x) = \frac{9c}{x^{10}} - \frac{d}{x^2}$$

A függvény menete a 7-14c ábrán látható.

b) Az x_m távolság meghatározásához vegyük észre, hogy a potenciális energia görbéjének meredeksége e pontban zérus. Így a potenciális energia deriváltjának zérushelye x_m-értékét adja meg.

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

$$\left(-\frac{9c}{x_m^{10}} + \frac{d}{x_m^2}\right) = 0$$

innen

$$x_m^8 = \frac{9c}{d}$$

$$x_m = \sqrt[8]{\frac{9c}{d}}$$

7.7 Az energiamegmaradás súrlódásos rendszerekben

Mivel a belső energia is az energia egyik alakja, ezért az energiamegmaradás tételét kiterjeszthetjük a nem-konzervatív rendszerekre is, mint például a súrlódásos rendszerekre. Zárt rendszer esetén, csupán az E_t belső energiával kell kiegészítenünk az energiamérleget

$$E_0 = 0$$

$$\underbrace{(E_t)_0}_{\substack{\text{tegyük fel, hogy}\\ \text{kezdetben zérus}}} + (U_g)_0 + (U_r)_0 + K_0 = \underbrace{E_t}_{f_k x} + U_g + U_r + K \qquad \text{(7-21)}$$

A most tárgyalt esetben a belső (termikus) energia nem alakulhat vissza mechanikai energiává, ezért a kezdetben meglévő belső energia mindvégig belső energia marad. Így a kezdeti belső energia csupán egy, az egyenlet mindkét oldalához hozzáadott konstansként szerepel, amit elhagyhatunk. A kezdeti belső energiát zérusnak tekintve, a végállapot belső energiája éppen a nem-konzervatív súrlódási erő munkájának eredményeként jön létre. Bár a belső energia kezdeti értékét célszerű zérusnak tekinteni, az energiamegmaradás tételének felírásakor a szimmetria megtartása miatt célszerű az $(E_{hő})_0$ szimbólumot az egyenlet bal oldalára írni.

7-8 PÉLDA

Tekintsük a 7-2 példa 7-5 ábráját, s legyenek a lejtőn lecsúszó hullámvasút adatai a következők:

a kocsi és az utasok tömege:	$m = 2000$ kg
kezdeti sebesség a lejtő tetején:	$v_0 = 4$ m/s
a lejtő magassága	$h = 10$ m

a) feltéve, hogy a súrlódás elhanyagolható, határozzuk meg a kocsi sebességét a lejtő alján. b) A súrlódás hatását is figyelembe véve a kocsi sebessége a lejtő alján 13,8 m/s-nak adódik. Határozzuk meg a lecsúszás közben fejlődő hőt.

MEGOLDÁS

a) Tekintsük a potenciális energia $U_g \equiv 0$ zérusszintjének a lejtő alját, helyezzük ide a koordinátarendszer $y = 0$ helyét, s irányítsuk felfelé. A mechanikai energia megmaradásának a tételét alkalmazva az alábbiakat kapjuk:

$$E_0 = E$$

$$K_0 + (U_g)_0 = K + U_g$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

innen:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \sqrt{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + (2)\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\,\text{m})} = 14{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Vegyük észre, hogy a test sebessége a lejtő alján valójában kisebb, mint az imént kapott érték; a „hiányzó" kinetikus energia a súrlódás miatt bekövetkező hőfejlődésben, illetve a belső energia növekedésében jelentkezik. A súrlódás okozta belső energia változását is számításba véve, az energiamegmaradásra felírt egyenlet a következő:

$$E_0 = E$$

$$(E_t)_0 + (U_g)_0 + K_0 = E_t + U_g + K$$

$$0 + \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = E_t + \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh$$

innen:

$$E_t = m\left[\frac{v_0^2 - v^2}{2} + g(h_0 - h)\right]$$

$$E_t = (2000\,\text{kg})\left[\frac{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(13{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} + \left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\,\text{m} - 0)\right]$$

$$E_t = 2{,}16 \times 10^4\,\text{J}$$

A mechanikai energia megmaradásának tétele nagyon fontos útjelző volt az általános energia megmaradási tételének megfogalmazása felé vezető úton. Az $E_0 = E$ egyenlőségnek nem engedelmeskedő kivételes esetek felfedezése, mint például a kinetikus energia eltűnése, miközben a rendszer melegszik, ösztönzést adtak arra, hogy jobban megértsük a hő természetét, s a nem- konzervatív erők hatását. Egy teljesen új tudományág, a termodinamika született meg, amikor a belső energiát az atomi szinten tárolt kinetikus és potenciális energiaként kezdték értelmezni. Az energiamegmaradásnak a fizika minden ágára való kiterjesztésével – új energiafajták, mint hangenergia, elektromágneses energia, atomenergia, stb. felismerésével – a fizika egyik nagy egyesítő elvéhez jutottunk el. Bár a fejlődés e téren kivételesen nehéz volt, s több mint két évszázadon keresztül birkóztak vele a legnagyobb gon-

dolkodók (sokszor ellentmondásra is jutva), ma már az energiamegmaradás törvénye megkérdőjelezhetetlenül igaznak tekinthető. Energiát nem lehet a semmiből teremteni, vagy megszüntetni, az energia csak átalakulhat egyik alakjából a másikba. Ezt a mindent magában foglaló törvényt azért tudtuk kimondani, mert atomi szinten mindent visszavezettünk a kinetikus és a potenciális energiára. Úgy tűnik, hogy szubmikroszkopikus szinten az elemi részecskék között ható erők is *konzervatív erők.*

Összefoglalás

A **konzervatív erők** tulajdonságai:

a) *két pont között végzett munka független az úttól, s csak a végpontok helyzetétől függ, vagy*

b) *tetszőleges zárt görbére vett munkavégzés zérus.*

E két kritérium ekvivalens. A **nem-konzeratív erők** általában a súrlódással kapcsolatosak, vagy sebességtől, ill. időtől függő erők.

Ha egy rendszerben csak konzervatív erők vannak jelen, akkor a rendszert **konzervatív rendszernek** nevezzük, és ekkor bevezethetünk egy U **potenciális energiát.** Ekkor igaz a **mechanikai energia megmaradásának tétele:**

$$E_0 = E$$

$$U_0 + K_0 = U + K$$

ahol U tetszőleges potenciális energiát jelent, mint például $U_g = mgh$, és $U = 1/2\, kx^2$. Mindig ki kell jelölnünk azt a helyzetet, amelyben a rendszer potenciális energiája zérus; U_g esetén ez rendszerint a problémában szerepet játszó *legmélyebb* helyzet, U esetén pedig a rugó szabad végének helye, nyugalmi állapotban.

A konzervatív **F** erőhöz rendelt potenciált a következőképpen határozhatjuk meg:

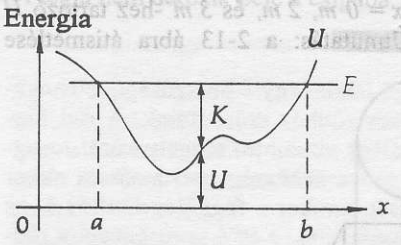
differenciálalakban

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

integrálalakban

$$U_b - U_a = -\int_a^b F_x\, dx$$

Az egydimenziós konzervatív rendszerek sok jellegzetes sajátosságának megértésében segít az **energiaábra** felrajzolása, melyen a potenciális energiát ábrázoljuk a kitérés függvényében. A 7-15 ábrán vázolt potenciálfüggvény által kijelölt **potenciálgödörben** az E energiájú részecske mozgása az $a \le x \le b$ intervallumra korlátozódik. Minden pontban $E = U + K$. A *hullámvasút analógia* segít a mozgás elképzelésében, de mindig gondolnunk kell a kétdimenziós hipotetikus hullámvasút és a részecske egydimenziós valódi mozgása közötti különbségre.



7-15 ábra
Az energiaábra

Csúszási súrlódás jelenlétekor a zárt rendszerre vonatkozó **energia megmaradásának tétele** a következő kiegészítéssel írható fel:

$$E_0 = 0$$

$$\underbrace{(E_t)_0}_{\substack{\text{tegyük fel, hogy} \\ \text{kezdetben} \\ \text{zérus}}} + (U_g)_0 + (U_r)_0 + K_0 = \underbrace{E_t}_{f_k x} + U_g + U_r + K$$

Mechanikai rendszerek esetén, amint ezt e fejezetben részleteztük, a termikus energia nem alakulhat át semmiféle más energiává, ezért a kezdeti $(E_t)_0$ értéket zérusnak választhatjuk.

Kérdések

1. Határozzuk meg milyen formában tárolják az energiát az alábbi rendszerek: egy mozgó repülőgép, egy fényképezőgép vaku telepe, egy hömpölygő folyó, egy megfeszített gumiszalag, egy adag trinitro-toluol, egy szelet csokoládé, egy szikla a Mt. Everest tetején.
2. Nevezzünk meg olyan konzervativ erőt, ami nem szerepelt ebben a fejezetben.
3. Figyelembe véve, hogy a Föld, Nap és Hold között ható erők döntően gravitációs természetűek *(konzervatív erő),* mi okozza a Föld tengely körüli forgásának kinetikus energiájában bekövetkező változásokat? (tekintsük a 2-1 ábrát)
4. Említsünk meg egy nem konzervatív erőt a súrlódási erőn kívül.
5. Az emberi test normális hőmérséklete 37°C, s ez rendszerint melegebb, mint környezetünk hőmérséklete. Elemezzük ezen hőmérséklet fenntartásához szükséges energiaátalakulási folyamatokat, kezdve az anyagcsere folyamatokkal, s visszamenve végső energiaforráshoz, a Naphoz.
6. Rajzoljuk fel annak a potenciális energia-gödörnek a pályáját, amely egy, a vízszintes síkról függőlegesen visszapattanó labda mozgását korlátozza. Tekintsük az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak.

(Ábrázoljuk a potenciális energiát a vízszintes síktól mért y távolság függvényében .)

7. Rajzoljuk fel annak a potenciális energia-gödörnek a pályáját, amely egy ingatest mozgását korlátozva, midőn az a függőlegestől mért ±90° -os határok között leng. (Legyen a potenciális energia a kötél függőlegessel bezárt szögének függvénye.)

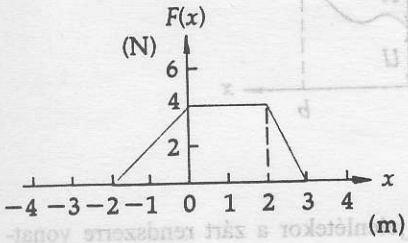
8. Írjunk le néhány energiaforrást, melynek eredete visszavezethető a Nap energiájára. Létezik-e olyan, amely nem a Napból ered, és nincs is hatással rá a Nap?

Feladatok

7.4 Konzervatív erők és a potenciális energia

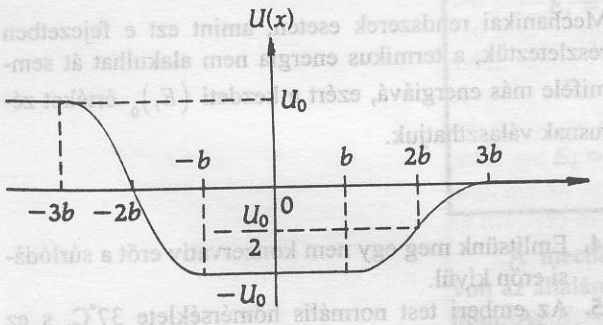
7A-1 A konzervatív $F(r)$ erő csak az origótól mért r sugárirányú távolság függvénye. A hozzátartozó potenciális energia a következő: $U(r) = C/r^2$, ahol C állandó. a) Határozzuk meg a C állandó mértékegységét SI mértékrendszerben. b) Vezessük le az $F(r)$ erő kifejezésére vonatkozó képletet.

7A-2 A 7-16 ábra az $F(x)$ konzervatív erő hatására ± x irányban mozgó részecskére ható erőt ábrázolja. Ábrázoljuk az $U(x)$ potenciális energiát az x kitérés függvényében, a $-4m < x < +4m$ intervallumban, a potenciális energia definíció szerint az $x = -4$ helyen legyen zérus. Állapítsuk meg az $x = 0$ m, 2 m, és 3 m -hez tartozó U *energia* értékét. (Útmutatás: a 2-13 ábra átismétlése hasznos lehet.)



7-16 ábra
A 7A-2 és 7B-14 feladathoz

7A-3 Egy rendszer potenciális energiája az $U(x) = ax^3 - -bx^2$ függvénnyel adható meg. a) Vezessük le a hozzá tartozó F_x konzervatív erőre vonatkozó kifejezést. b) Az a és b konstansok segítségével fejezzük ki $F(x)$ zérushelyét (ha létezik).



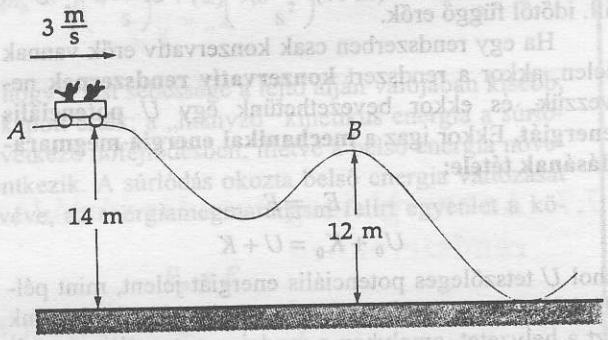
7-17 ábra
A 7B-4 feladathoz

7B-4 Egy részecske az x tengelyen *pozitív és negatív* irányban mozoghat. A 7-17 ábra a potenciális energia változását mutatja. A grafikon görbült részei olyan parabola ívek, amelyek az x tengely b hosszúságú szakaszaihoz tartoznak. Készítsük el a részecskére ható $F(x)$ erő változását x függvényében.

7.5 A mechanikai energia megmaradása

7A-5 Egy labdát 15 m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobunk. Az energia-megmaradásának törvényét alkalmazva határozzuk meg azt a sebességet, midőn a kiindulási helyzetéhez képest 8 m magasan van.

7A-6 A hullámvasútikocsi sebessége, amikor a kocsi a 7-18 ábrán látható A helyen van, 3 m/s a) Mekkora a kocsi sebessége a pálya B, pontján ha a súrlódás elhanyagolhatóan kicsiny? b) Mekkora az a minimális görbület a B pontban, amelynél még biztonsági öv használata nélkül sem repülnek ki az ülésről az utasok?

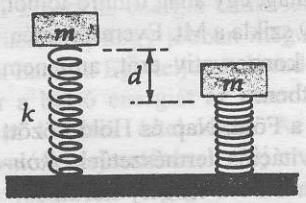


7-18 ábra
A 7A-6 feladathoz

7A-7 Egy m tömegű gyöngy súrlódásmentesen csúszik le egy olyan meghajlított dróton, amely függőleges síkú körpályát alkot. Mekkora erőt fejt ki a pálya a gyöngyre, ha a gyöngy nyugalmi helyzetből indul a körpálya legfelső pontjából és félig csúszik le a dróton.

7A-8 Egy zsinór végére erősített m tömegű labdát függőleges síkban köröznek. A kör legfelső pontján a zsinórt kifeszítő erő $2mg$. Fejezzük ki mg segítségével a zsinór feszültségét abban az esetben, midőn a labda a kör legmélyebb pontján van.

7A-9 Egy zsinór végéhez erősített m tömegű labda függőleges síkban körmozgást végez. A zsinór hossza 0,60 m. a) Határozzuk meg azt a minimális sebességet, amellyel a labdának alsó helyzetben rendelkeznie kell, hogy a zsinór a kör legfelső pontján is kifeszítve maradjon; b) Az adott feltételek mellett mekkora a zsinor feszítő ereje, midőn a labda éppen félúton van a legmélyebb és legfelső pont között?

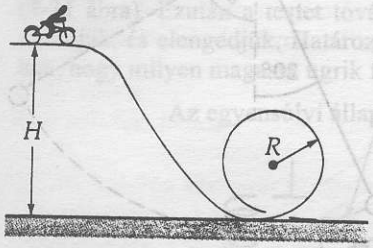


7-19 ábra
A 7A-10 feladathoz

7A-10 Egy m tömegű tégla úgy van felerősítve, hogy k rugóállandójú rugót éppen csak érinti (7-19 ábra). A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a tégla az elengedés után. (Megjegyzés: a tégla nem marad meg ebben a pontban, hanem visszalökődik és folyamatosan rezgőmozgást végez. E rezgőmozgás legalsó pontját keressük.)

7A-11 Egy m tömegű ingatest ℓ hosszúságú zsinóron leng. A lengés szélső, legmagasabb pontján a zsinór θ ($<90°$) szöget zár be a függőlegessel. Az energiatételt felhasználva ℓ, θ, és g segítségével határozzuk meg az ingatest sebességét a lengés legmélyebb pontján.

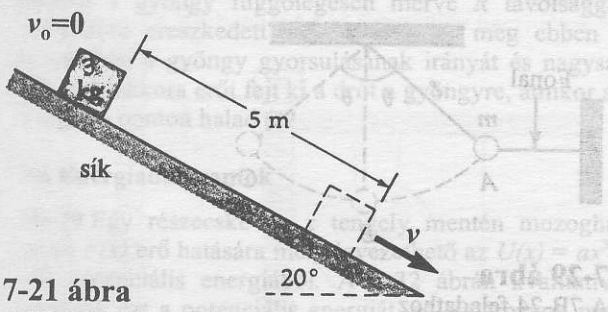
7B-12 Egy vásári akrobata kerékpáros álló helyzetből indulva súrlódásmentes pályán gurul le, amely függőleges síkú köralakú hurokban végződik, amint ez a 7-20 ábrán látható. Határozzuk meg azt a minimális H magasságot, amely szükséges ahhoz, hogy a kerékpár minden időpontban érintkezésben maradjon a pályával. A hurkot közelítő körpálya sugara R. (Útmutatás: a hurok legfelső pontja a kritikus helyzet.)



7-20 ábra
A 7B-12, 7B-26 és a 7C-44 feladathoz

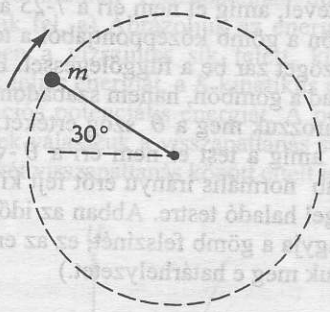
7B-13 Egy 3 kg-os doboz elhanyagolható súrlódású 20°-os lejtőn csúszik le (7-21 ábra). a) Az energiatételt használva határozzuk meg a doboz sebességét 5 m csuszás után, ha a test álló helyzetből indul. b) Számítsuk ki ugyanezt a sebességet a Newton törvények és a kinematikai egyenletek felhasználásával is.

7B-14 Egy 2 kg-os tárgy a 7-16 ábrán definiált erő hatására mozog. A tárgy az $x = -1$ helyről álló helyzetből indul. Határozzuk meg a tárgy sebességét az a) $x = 0$, b) $x = 2$ m, és c) $x = 4$ m helyzetben.



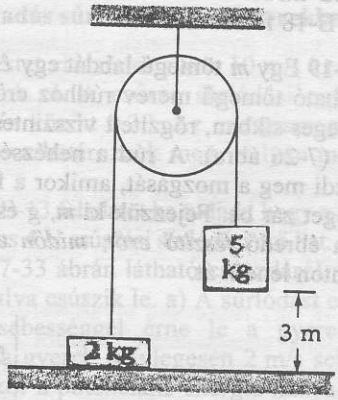
7-21 ábra
A 7B-13 és 7A-32 feladathoz

7B-15 Az $m = 80$ g tömegű kis test egy 60 cm hosszú fonalra van erősítve. A test függőleges síkú körpályán mozog. Amikor a fonal 30°-os szöget zár be a vízszintessel, akkor a test sebessége 4 m/s (7-22 ábra). a) Mekkora a test sebessége a körpálya legfelső pontján? b) Mekkora erő feszíti a fonalat, midőn a test az ábrán látható helyzetben van?



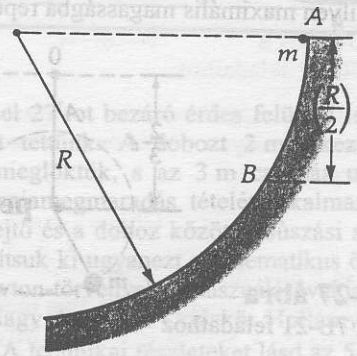
7-22 ábra
A 7B-15 feladathoz

7B-16 A 7-23 ábrán látható 2 kg-os téglát a talajon nyugalmi helyzetben tartjuk, majd elengedjük. Abban a pillanatban, amikor a másik test lent nekiütődik a földnek a 2 kg-os tégla felfelé irányúló sebességet nyer. Milyen maximális magasságba emelkedik fel a 2 kg-os tégla, ha a csiga tömege és a súrlódás elhanyagolható, ? (A tégla nem ütközik bele a csigába.)



7-23 ábra
A 7B-16 feladathoz

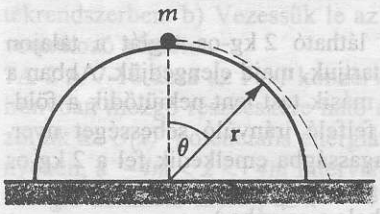
7B-17 Az m tömegű részecske súrlódásmentesen csúszik le az R sugarú körpályadarabon (7-24 ábra). A részecske nyugalmi helyzetből indul az A pontból, ahol a pálya éppen függőleges. a) Mutassuk meg, hogy a részecske sebessége a B pontban (a kezdőpont alatt $R/2$ távolságban) pontosan $\sqrt{gR}$. b) Határozzuk meg a részecske gyorsulásának tangenciális és sugárirányú komponenseit a B ponton való áthaladáskor. c) Határozzuk meg annak az erőnek az irányát és nagyságát amit a B pontban a pálya a részecskére kifejt.



7-24 ábra
A 7B-17 feladathoz

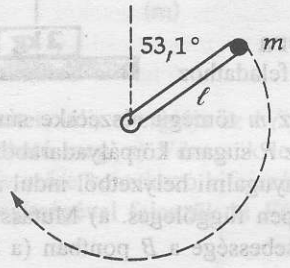
7B-18 Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetből kissé

kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. A test mindaddig a érintkezésben marad a félgömb felületével, amíg el nem éri a 7-25 ábrán vázolt helyzetet, midőn a gömb középpontjából a test felé mutató vektor θ szöget zár be a függőlegessel. Ezután a test már nem marad a gömbön, hanem szabadon, parabolapályán esik. Határozzuk meg a θ szög értékét. (Útmutatás: mindaddig, amíg a test el nem éri a θ-val jelzett helyzetet, a gömb normális irányú erőt fejt ki a v pillanatnyi sebességgel haladó testre. Abban az időpontban amikor a test elhagyja a gömb felszínét, ez az erő zérussá válik. Vizsgáljuk meg e határhelyzetet.)



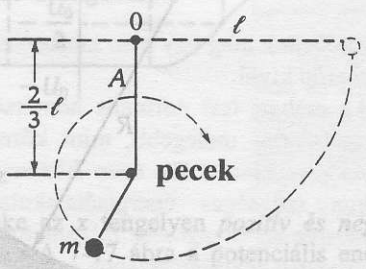
7-25 ábra
A 7B-18 feladathoz

7B-19 Egy m tömegű labdát egy ℓ hosszúságú, elhanyagolható tömegű merev rúdhoz erősítettünk. A rúd függőleges síkban, rögzített vízszintes tengely körül forogh at (7-26 ábra). A rúd a nehézségi erő hatására akkor kezdi meg a mozgását, amikor a függőlegessel 53,1°-os szöget zár be. Fejezzük ki m, g és ℓ segítségével a rúdban ébredő *feszítő erőt, midőn* a labda a legmélyebb ponton lendül át.



7-26 ábra
A 7B-19 feladathoz

7B-20 Tekintsünk a Hooke törvény szerint viselkedő rugót, amely 15 cm hosszú és rugóállandója 8 N/m. A rugót függőleges helyzetben a földre tesszük, majd hosszúságát a felére összenyomjuk, és egy 10 g-os testet helyezünk rá. Ezután a rugót elengedve fellőjük a testet. Milyen maximális magasságba repül fel a test?

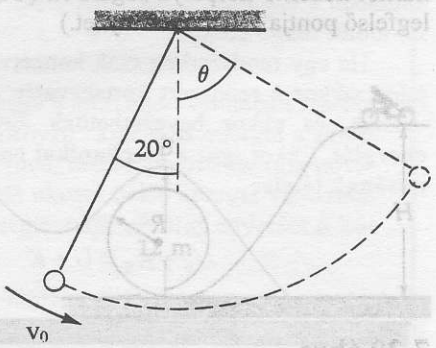


7-27 ábra
A 7B-21 feladathoz

7B-21 Egy m tömegű testet ℓ hosszúságú rugalmas kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. A 0 felfüggesztési ponttól $2/3\ell$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötél lengése során beleakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $\ell/3$ sugarú függőleges körpályára tér át (7-27 ábra). Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban, ami a pöcök elérése utáni legmagasabb helye a testnek. (Feltesszük, hogy a test a mozgás során nem akad bele a kötél felső szakaszába.)

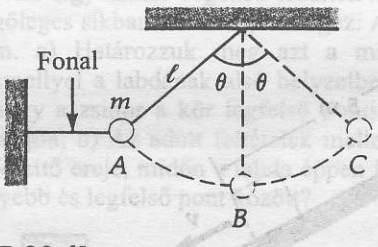
7B-22 Milyen y távolságban kell elhelyezni az előző feladatban szereplő pöcköt a felfüggesztés alatt, ha azt akarjuk, hogy a kötél a pecekbe akadás után kialakuló kisebb sugarú körpálya tetőpontján még éppen feszes maradjon?

7B-23 Egy egyszerű inga egy 2 m hosszú fonálból és egy 3 kg tömegű ingatestből áll. Az ingatestet $v_0 = 2{,}4$ m/s kezdősebességgel elindítjuk midőn a fonal a függőlegessel 20°-os szöget zár be (7-28 ábra). Az inga ezután szabadon leng. a) Határozzuk meg a maximális θ szöget, amelyet a fonál függőlegessel bezár, midőn az inga kitérése maximális. b) Mekkora a fonál feszítő ereje, midőn az ingatest visszalendül az eredeti 20°-os helyzetébe?



7-28 ábra
A 7B-23 feladathoz

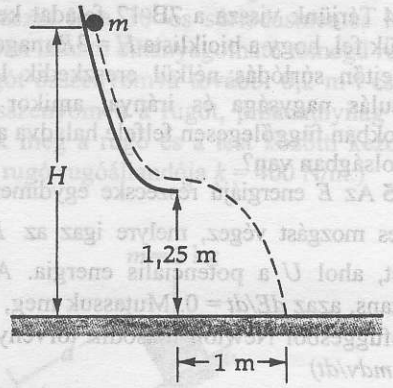
7B-24 Egy m tömegű labdát a 7-29 ábrán látható módon ℓ hosszúságú kötéllel a mennyezethez erősítettünk. A labdát az egyik oldalon az A pontban vízszintes fonallal kikötöttük úgy, hogy a felfüggesztő fonal a függőlegessel θ szöget zár be. A vízszintes kötél elégetése után a labda lengeni kezd. a) Az energiamegmaradás törvényét alkalmazva fejezzük ki a labda sebességét a pálya legmélyebb B pontjában m, ℓ, θ, és g segítségével. b) Mekkora erő feszíti a vízszintes fonalat mielőtt a fonalat azt elégetjük? c) Mekkora a kötél feszítő ereje a C pontban? (A lengés legtávolabbi pontja)



7-29 ábra
A 7B-24 feladathoz

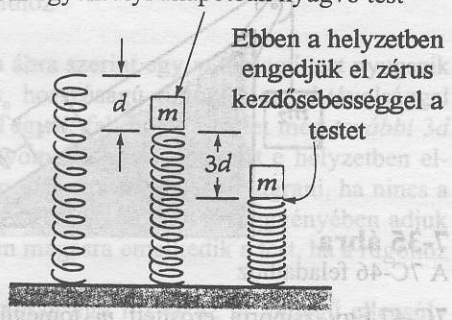
7B-25 Egy m tömegű test kezdősebesség nélkül, súrlódásmentesen csúszik le a 7-30 ábrán látható pályán. A pálya alját a test vízszintes irányban mozogva hagyja el, s a rajzon vázolt módon ér földet. A föld színétől számítva milyen H magasságból indult a test?

7B-26 Egy kerékpáros a 7-20 ábrán látható lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül, súrlódásmentesen gurul le. A hurok legfelső pontjában a pálya akkora erőt fejt ki, hogy az a kerékpár és a kerékpáros együttes súlyának háromszorosa. Milyen magasról indult a kerékpáros?



7-30 ábra
A 7B-25 feladathoz

7B-27 Egy m tömegű testet függőleges rugóra helyezünk, s emiatt a rugó d hosszúsággal nyomódik össze (7-31 ábra). Ezután a testet további $3d$ távolsággal lenyomjuk, és elengedjük. Határozzuk meg d függvényében, hogy milyen magasra ugrik fel a test?



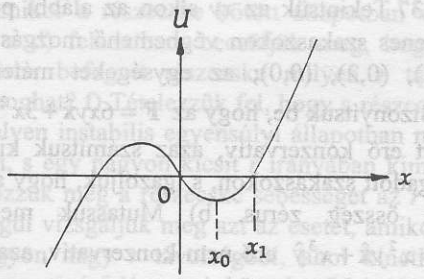
7-31 ábra
A 7B-27 feladathoz

7B-28 Könnyen hajlítható sima drótból függőleges síkú R sugarú körpályát hajlítunk, s kis gyöngyöt fűzünk fel rá. Az m tömegű gyöngyöt a körpálya tetejéről kezdősebesség nélkül indítjuk, s az súrlódásmentesen csúszik le a dróton. a) Mekkora a drót által a gyöngyre ható erő, amikor a gyöngy függőlegesen mérve R távolsággal mélyebbre ereszkedett? b) Határozzuk meg ebben a helyzetben a gyöngy gyorsulásának irányát és nagyságát. c) Mekkora erőt fejt ki a drót a gyöngyre, amikor az a legalsó ponton halad át?

7.6 Energiadiagramok

7B-29 Egy részecske az x tengely mentén mozoghat olyan $F(x)$ erő hatására mely levezethető az $U(x) = ax^3 - bx$ potenciális energiából. A 7-32 ábrán kvalitatíve vázoltuk ezt a potenciális energiát. a) Határozzuk meg az $F(x)$ erőt. b) Ha a részecske energiája zérus, akkor a részecske mozgása az $x = 0$ és az $x = x_1$ helyek közé korlátozódik. Határozzuk meg x_1 értékét! c) Mekkora ebben az esetben a részecske maximális kinetikus energiája? Az eredményeket az a és b konstansok segítségével adjuk meg!

7B-30 A nyugalmi helyzetben lévő m tömegű labdát vízszintes sík felett elengedjük. A labda tökéletesen rugalmasan ütközik, s minden visszapattanás után h magasságba emelkedik fel. a) Ábrázoljuk az energiát a távolság függvényében a vízszintes sík felett, különkülön bemutatva az E teljes energiát, a K kinetikus energiát, és az U_g gravitációs potenciális energiát. A potenciális energia szintjének válasszuk a visszapattanás síkját. b) Határozzuk meg a két visszapattanás között eltelt időt!



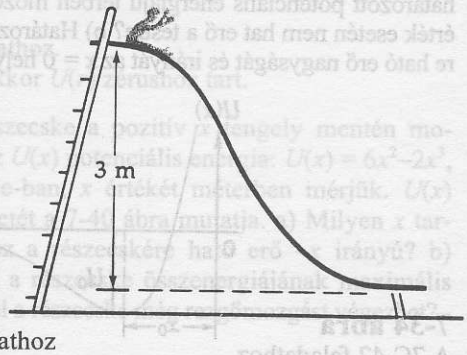
7-32 ábra
A 7B-29 feladathoz

7-7 Energiamegmaradás súrlódásos rendszerekben

7A-31 Egy 4 kg-os testet vízszintes síkon 10 m/s kezdősebességgel indítottunk el. A csúszó súrlódási együttható a test és a felszín között 0,30. Az energiamegmaradás tételét alkalmazva határozzuk meg, milyen messzire csúszik el a test!

7A-32 Oldjuk meg a 7B-13 feladatot ha tudjuk, hogy a lejtő érdes, s a testre konstans 4 N csúszási súrlódási erő hat.

7B-33 Egy gyerek a 7-33 ábrán látható csúszdáról nyugalmi helyzetből indulva csúszik le. a) A súrlódást elhanyagolva mekkora sebességgel érne le a gyerek a csúzda aljára. b) Ha a gyerek ténylegesen 2 m/s sebességgel érkezik le, akkor a potenciális energia hányadrésze alakult át a súrlódás miatt termikus energiává a lecsúszás folyamán.



7-33 ábra
A 7B-33 feladathoz

7B-34 A vízszintessel 27°-ot bezáró érdes felületű lejtő tetejére egy dobozt tettünk. A dobozt 2 m/s kezdősebességgel lefelé meglöktük, s az 3 m csúszás után megállt. a) Az energiamegmaradás tételét alkalmazva határozzuk meg a lejtő és a doboz közötti csúszási súrlódási erőt! b) Számítsuk ki ugyanezt a kinematikus összefüggések és a Newton-törvények felhasználásával is!

7B-35 A feladat a Nagy Amerikai Óriáskör Hullámvasúthoz kapcsolódik. (A technikai részleteket lásd az 5-28 ábrán.) Mekkora energia vész el a súrlódási effektusok miatt, amikor az utasokkal teli vonat az óriáskör előtti

utolsó szakaszon a lejtő tetejéről a hurok aljára ér? Ne felejtsük el, hogy a lejtő tetején már van kezdősebessége a hullámvasútnak.

7B-36 Az előző feladat hullámvasútjánál mekkora energia vész el a súrlódás miatt, amikor az emberekkel teli vonat a *B–C–D* hurkon az ábrán megjelölt sebességekkel végigszáguld?

További feladatok

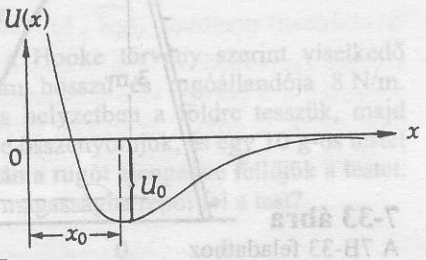
7C-37 Tekintsük az *xy* síkon az alábbi pontok közötti egyenes szakaszokon végbemenő mozgást (0,0), (3,0), (3,2), (0,2), (0,0); az egységeket méterben mérjük. a) Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{F} = 6xy\hat{\mathbf{x}} + 3x^2\hat{\mathbf{y}}$ newtonban mért erő konzervatív, azaz számítsuk ki a munkát a megadott szakaszokon, s igazoljuk, hogy a zárt görbére vett összeg zérus. b) Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{F} = x^2y\hat{\mathbf{x}} + x^3\hat{\mathbf{y}}$ erő nem konzervatív, azaz az előzőleg megadott görbén végighaladva a munka nem zérus!

7C-38 A $-\pi/2$ és a $\pi/2$ intervallumban *x* egyes értékei szempontjából az *F(x)* konzervatív erő viselkedése a következő: $F(x) = -k \sin x$. Ábrázoljuk az *F(x)* erőt és a hozzá tartozó *U(x)* potenciális energia függvényt az adott intervallumban. A potenciális energia zérusszintjét az $x = 0$ helyen jelöljük ki.

7C-39 Tételezzük fel, hogy egy test mozgására az $F = -4x + 3x^2$ erő hat, ahol az erőt newtonban, a kitérést pedig méterben mérjük. Határozzuk meg a potenciális energia változását, amikor a test az $x = 1$ m-ről az $x = 2$ m helyre kerül!

7C-40 Egy részecske olyan térrészben mozog, ahol potenciális energiája az origótól *r* távolsággal fordított arányban változik: $U(r) = A/r$, ahol *A* állandó. a) Határozzuk meg *A* definícióját. b) Határozzuk meg a részecskére ható erő *x* és *y* komponensét!

7C-41 Egy test az $U = a + b(x - x_0)^2$ egyenlet által meghatározott potenciális energiájú térben mozog. a) Milyen *x* érték esetén nem hat erő a testre? b) Határozzuk meg a testre ható erő nagyságát és irányát az $x = 0$ helyen!



7-34 ábra
A 7C-42 feladathoz

7C-42 Az egydimenziós mozgást végező *m* tömegű részecske olyan térrészben mozog, ahol potenciális energiája

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

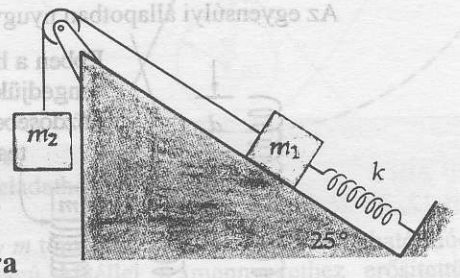
(*A* és *B* állandók.)
A függvény menetét a 7-34 ábra mutatja. a) Keressük meg a részecske x_0 stabilis egyensúlyi helyzetét, s fejezzük ki *m*, *A* és *B* segítségével! b) Határozzuk meg a potenciálgödör U_0 mélységét! c) Az *x* tengely mentén haladva, mekkora negatív *x* irányú maximális erő hat a részecskére?

7C-43 Egy részecske az $U(x) = A(1 - \cos ax)$ potenciális energiájú térben mozog. Mutassuk meg, hogy kicsiny *x* értékek esetén a részecskére az $F \approx -Aa^2x$ nagyságú, az $x = 0$ helyre visszatérítő erő hat! (Útmutatás: alkalmazzuk a cos *ax* kicsi szögek esetén érvényes közelítését.)

7C-44 Térjünk vissza a 7B-12 feladat kerékpárosához! Tegyük fel, hogy a biciklista $H = 3R$ magasságból indul, s a lejtőn súrlódás nélkül ereszkedik le. Mekkora a gyorsulás nagysága és iránya, amikor a kerékpáros a hurokban függőlegesen felfelé haladva a talajtól éppen *R* távolságban van?

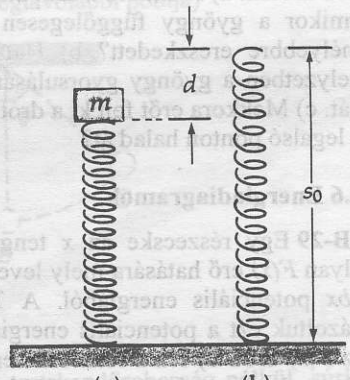
7C-45 Az *E* energiájú részecske egydimenziós súrlódásmentes mozgást végez, melyre igaz az $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ képlet, ahol *U* a potenciális energia. Az összenergia konstans, azaz $dE/dt = 0$. Mutassuk meg, hogy ebből az összefüggésből Newton második törvénye levezethető! ($F = mdv/dt$)

7C-46 A 7-35 ábrán látható $m_1 = 4$ kg és $m_2 = 5$ kg-os testet akkor engedjük el, amikor a rugó nyugalmi helyzetben van. A rugó rugóállandója $k = 80$ N/m, és a lejtő felszíne sima. A csiga tömegét és a súrlódást elhanyagolva, határozzuk meg a) milyen mélyre jut el m_2 ? b) mekkora az m_2 test pillanatnyi sebessége amikor 20 cm-t haladt?



7-35 ábra
A 7C-46 feladathoz

7C-47 Egy zsinórra erősített *m* tömegű labda függőleges síkban körmozgást végez. A zsinór minden időpontban feszes marad. (A sebesség a kör legfelső pontjában tetszőleges lehet, feltéve, hogy a fenti feltétel teljesül.) Bizonyítsuk be, hogy amidőn a labda a kör legmélyebb pontján van, a zsinór feszítő ereje 6 *mg* értékkel haladja meg a feszítő erőt a legfelső pontban.

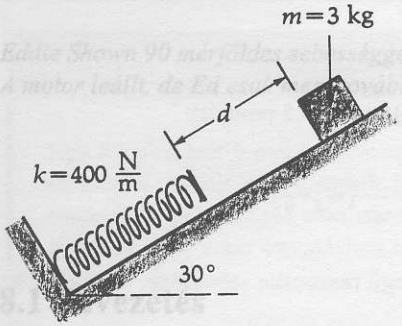


7-36 ábra
A 7C-48 feladathoz

7C-48 Az s_0 hosszúságú terheletlen rugóra *m* tömegű testet helyezünk, s ennek hatására a rugó *d* hosszúsággal össze nyomódik. (7-36 ábra) Most tegyük rá a testet a

rugóra úgy, hogy az éppen érintse a terheletlen rugót, majd engedjük el ebből a nyugalmi helyzetből. a) Mekkora a rugó d_{max} maximális összenyomódása amint a test lefelé mozog? b) Mekkora maximális sebességet ér el a test?

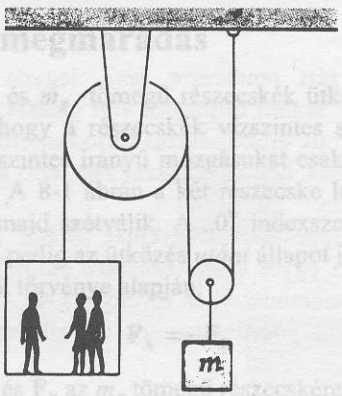
7C-49 Egy 3kg-os test kezdősebesség nélkül indulva d távolsággal csúszik le a 30°-os súrlódásmentes lejtőn, ahol a 7-37 ábrán látható elhanyagolható tömegű rugóba ütközik. A rugót összenyomva további 0,2 m-t csúszik lefelé, majd összenyomva a rugót, pillanatnyilag megáll. Határozzuk meg a rugó és a test közötti kezdeti d távolságot! (A rugó rugóállandója $k = 400$ N/m.)



7-37 ábra
A 7C-49 feladathoz

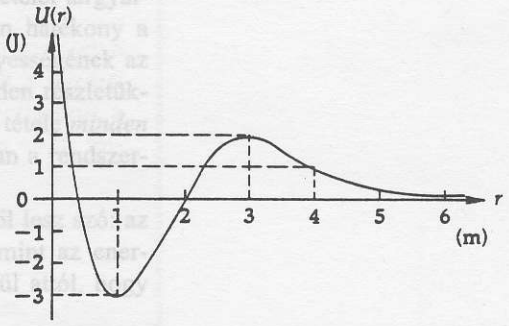
7C-50 A 7-36a ábra szerint egy m tömegű test nyugszik az eredetileg s_0 hosszúságú rugón, s azt d távolsággal összenyomja. Tegyük fel, hogy a testet még *további* $3d$ távolsággal lenyomtuk. a) A rendszert e helyzetben elengedve milyen magasra fog a test felugrani, ha nincs a rugóhoz rögzítve? (A eredményt d függvényében adjuk meg!) b) Milyen magasra emelkedik a test, ha a rugóhoz van erősítve?

7C-51 A 7-38 ábrán egy lift és az m tömegű ellensúly látható. A lift teljes terhelésekor a lift és az utasok tömege 2000 kg, az ellensúlyé pedig 2800 kg. Tegyük fel, hogy a fékberendezés elromlik, és a lift nyugalmi helyzetből indulva süllyedni kezd, miközben az ellensúlyt megemeli. A tartó csigarendszer tömege és a surlódási források elhanyagolhatók. a) Mekkora a lift lefelé irányuló gyorsulása? b) Mekkora a I feszítő erő a kábelben a lift zuhanása közben? (Az a) feladatban használjuk az energiatételt.)



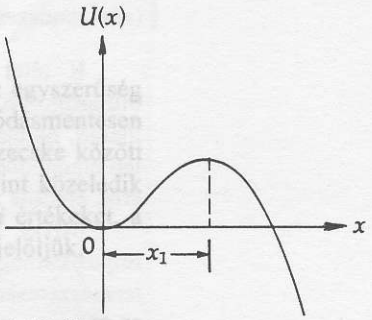
7-38 ábra
A 7C-51 feladathoz

7C-52 A 7-39 ábrán egy 400g-os részecske $U(r)$ helyfüggő potenciális energiafüggvénye látható. a) Hol maximális a részecskére ható vonzóerő? (Vonzóerőn itt az origó felé mutató, azaz $-r$ irányú erőt értünk.) b) Hol zérus a részecskére ható eredő erő? c) Milyen r tartományban hat taszító erő a részecskére? (Taszító erőn a $+r$ irányú erőt értjük) d) Mekkora az a maximális E energia, amellyel a részecske rendelkezhet, és mozgása még mindig véges tartományra korlátozódik. e) Abban az esetben, amikor a részecske kötött állapotban van, mint például a d) feladatban, becsüljük meg, hogy a potenciálgödörbe befogott részecske milyen r tartományban mozoghat? f) Tételezzük fel, hogy a részecske az $r = 3$ m helyen instabilis egyensúlyi állapotban nyugalomban van, s egy nagyon kicsit r irányában kimozdítjuk. Határozzuk meg a részecske sebességét az $r = 4$ m helyen. Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a részecske nagyon nagy r távolságból, ahol kinetikus energiája 3 J, az origó felé tart. A következő kérdések a részecske további $-r$ irányú mozgására vonatkoznak. g) Hol a legnagyobb az origó felé tartó részecske sebessége? h) Mekkora a maximális sebesség? i) Becsüljük meg (a lehető legpontosabban), hogy az origót mennyire tudja megközelíteni a részecske?



7-39 ábra
A 7C-52 feladathoz.
Ha $r \to \infty$, akkor $U(r)$ zérushoz tart.

7C-53 Egy részecske a pozitív x tengely mentén mozoghat, ahol az $U(x)$ potenciális energia: $U(x) = 6x^2 - 2x^3$, U értékét joule-ban, x értékét méterben mérjük. $U(x)$ kvalitatív menetét a 7-40 ábra mutatja. a) Milyen x tartományban lesz a részecskére ható erő $-x$ irányú? b) Mekkora lehet a részecske összenergiájának maximális értéke, amelynél a részecske még rezgőmozgást végezhet?



7-40 ábra
A 7C-53 feladathoz

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) –1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$

7A-5 8,26 m/s
7A-7 $2mg$
7A-9 a) 5,42 m/s b) $3mg$
7A-11 $\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$
7B-13 5,79 m/s
7B-15 a) 3,61 m/s b) 1,74 N
7B-17 b) $g\sqrt{3/2}, g$ c) $3mg/2$, sugárirányban befelé
7B-19 4,20 mg
7B-21 mg
7B-23 a) 37,6° b) 36,3 N
7B-25 1,45 m
7B-27 $8d$
7B-29 a) $-3ax^2+b$ b) $\sqrt{b/a}$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{b^3/3a}$
7A-31 17,0 m
7B-33 a) 7,67 m/s b) 0,932
7B-35 $1{,}12\times10^5$ J
7C-37 A válasz adott.
7C-39 –1,00 J
7C-41 a) x_o b) $2bx_o$;$+x$ irányban
7C-43 A válasz adott.
7C-45 A válasz adott.
7C-47 A válasz adott.
7C-49 0,344 m
7C-51 a) $0{,}222g$ b) $1{,}52\times10^4$ N
7C-53 a) $0\le x\le 2$ m b) 8 J

VIII. Fejezet

8A-1 1,23 m/s
8A-3 34,3 J
8A-5 10 m/s a szerelvény felé
8A-7 0,400 m/s
8B-9 7,22 m/s; -48,4°
8B-11 $\theta = \text{arctg}\, k$
8B-13 0,91 m/s 51,3° északkeletre
8B-15 13,0 kg·m/s; 202,6° a +x iránytól az óramutató járásával egyező irányba
8B-17 A válasz adott.
8B-19 0,0466
8A-21 900 N, az eredeti sebességgel ellentétesen
8A-23 a) $1{,}20\times10^4$ kg·m/s b) $2{,}40\times10^4$ N
8B-25 6,38 N·s felfelé
8B-27 7,80 m/s
8B-29 a) $4{,}37\times10^{-4}$ s b) 0,153 m
c) $1{,}22\times10^{-3}$ J d) $1{,}23\times10^3$ J
8B-31 a) 7,80 kg·m/s; 22,6° a horizont fölött
b) 3900 N; 22,6° a horizont fölött
8A-33 200 N
8A-35 a) 1,88 N b) 3,75 N
8B-37 $4{,}00\times10^3$ N
8A-39 535 m/s
8B-41 a) $3{,}48\times10^6$ N b) 1659 kg/s
8C-43 a) 338 m/s b) 56,3 N
8C-45 a) $(M-m)/M$
8C-47 A válasz adott.
8C-49 $nmg\left(t+\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$
8C-51 $0{,}368M$

IX. Fejezet

9A-1 a) -0,167 m/s b) 0,333 m/s
9A-3 a) 42,9 m/s, 37° délnyugatra b) 7720 J
9A-5 Nem; 2,80 J elveszett
9B-7 a) $\sqrt{1{,}41}$ m/s b) 57,4 m/s c) 97,6%
9B-9 A válasz adott.
9B-11 1,81 m/s, 2,27 m/s
9A-13 0,200 m
9A-15 $(\frac{7}{13}m, \frac{1}{13}m)$
9B-17 5,35 m
9A-19 a) 30 m/s, vízszintesen b) 21,2 m/s, 45° a vízszintes alatt
9B-21 A válasz adott.
9B-23 A válasz adott.
9B-25 7,28 m/s
9B-27 a) 3,00 m/s b) 3,00 m/s
c) 608 J és 824 J d) 0 és 216 J
9B-29 216 J
9C-31 a) $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$ b) ugyanaz mint a)
9C-33 $4M\sqrt{gl/m}$
9C-35 a) 65,2 m/s b) 0,458
9C-37 $\sqrt{1-d/h}$
9C-39 (1,03 m, 0,88 m)
9C-41 A válasz adott.
9C-43 $v_A = -0{,}667$ m/s; $v_B = 0{,}800$ m/s
9C-45 2,21 m/s
9C-47 a) $\frac{3}{8}v$ b) $\frac{25}{32}\mu v$
9C-49 a) $\frac{10}{30}v$ b) $\frac{11}{30}v$ (Ez a 8. fejezet 6. kérdésére adható mennyiségi válasz)

X. Fejezet

10A-1 a) 1,50 m b) 24,0 N·m
10A-3 a) $2bF$ b) $2bF$
10A-5 A válasz adott.
10A-7 $l/2$
10B-9 $R/12$
10B-11 $\frac{5}{16}mgl$
10A-13 2,06 m

AZ IMPULZUSMEGMARADÁS

Eddie Shown 90 mérföldes sebességgel hajtott
A motor leállt, de Ed csak ment tovább.

Anonim szerző

8.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a mechanikai energia megmaradásának a tételét tárgyaltuk, ami konzervatív rendszerekben érvényes. A tétel nagyon hatékony a mechanikai rendszerek viselkedésének elemzésében. Eredményességének az az oka, hogy a kölcsönhatásban szereplő erőket nem kell minden részletükben meghatároznunk – a mechanikai energia megmaradásának tétele *minden* konzervatív rendszerben igaz, még ha nem is ismerjük pontosan a rendszerben ható erőket.

E fejezetben egy másik hasonlóan jól alkalmazható tételről lesz szó: az *impulzusmegmaradás* tételéről. Ez a tétel még általánosabb, mint az energiamegmaradás tétele, mert *minden* folyamatra igaz függetlenül attól, hogy konzervatív vagy nem-konzervatív a rendszer.

Az energiára és az impulzusra vonatkozó megmaradási tételek segítségével a folyamatokat a testek *helyzetének,* és *sebességének* ismeretében írhatjuk le. Ezzel szemben a Newton törvényekkel való leíráskor az *erőket* és *gyorsulásokat* használjuk. Hasznos megjegyezni e megkülönböztető jegyeket, hiszen adott probléma megoldásakor a kezdeti információk határozzák meg, hogy melyik módszert érdemes használni. Természetesen néhány probléma teljes elemzéséhez mind a Newton-törvényeket, mind pedig a megmaradási tételeket fel kell használnunk.

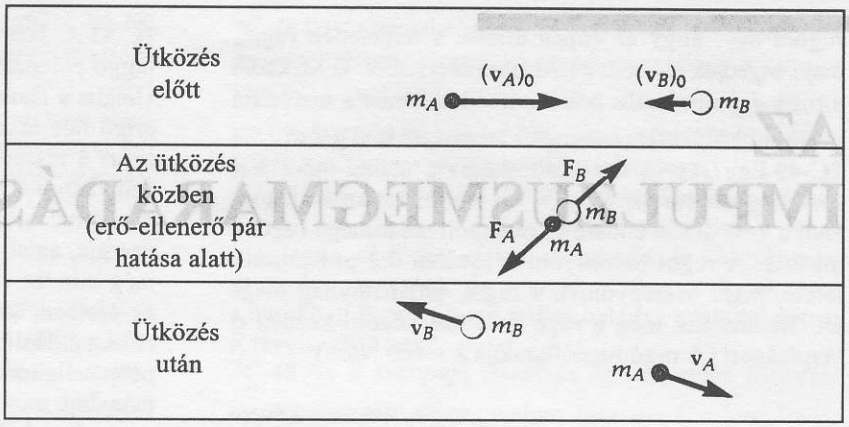
8.2 Az impulusmegmaradás

Tekintsük az m_A és m_B tömegű részecskék ütközését. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a részecskék vízszintes síkon súrlódásmentesen mozoghatnak, így vízszintes irányú mozgásukat csak a két részecske között ható erő befolyásolja. A 8-1 ábrán a két részecske látható, amint közeledik egymáshoz, ütközik, majd szétválik. A „0" indexszel a *kezdeti* értékeket, a index nélküli betűkkel pedig az ütközés *utáni* állapot jellemzőit jelöljük.

Newton harmadik törvénye alapján:

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B \qquad \textbf{(8-1)}$$

ahol $\mathbf{F}_A$ az m_A tömegű és $\mathbf{F}_B$ az m_B tömegű részecskére ható erőt jelöli.



8-1 ábra
Vízszintes súrlódásmentes síkon ütköző testek

Newton második törvénye szerint az **F** erő megegyezik az (*m***v**) impulzus idő szerinti deriváltjával, (lásd az V. fejezet 5.5 pontját):

$$\frac{d}{dt}(m_A \mathbf{v}_A) = -\frac{d}{dt}(m_B \mathbf{v}_B)$$

ahol $\mathbf{v}_A$ az m_A, tömegű és $\mathbf{v}_B$ az m_B tömegű részecske sebessége. Vezessük be a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ jelölést, ezzel:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A) = -\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_B)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A) + \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_B) = 0 \qquad \textbf{(8-2)}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = 0$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az impulzusok $(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)$ vektori összege az ütközés során nem változik, azaz:

$$(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)$$

az időtől független állandó. A kezdeti értékeket „0" indexszel, a tetszőleges *t* időponthoz tartozó értékeket index nélkül jelölve a következőt kapjuk:

Az impulzus megmaradás törvénye (zárt rendszer esetén)

$$\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p} \qquad \textbf{(8-3)}$$

E tétel minden zárt rendszerre igaz, legyen az két összeütköző billiárdgolyó, vagy 10^{12} számú csillagból álló galaxis. A tétel akkor is igaz marad, ha nem konzervatív erők (például súrlódási erő) is hatnak. Az egyetlen elengedhetetlen feltétel, hogy a rendszer zárt, azaz a rendszerre ható *külső* erők eredője zérus legyen.

Mivel az összefüggés *vektor*egyenlet, ebből következik, hogy az impulzusmegmaradás az egyes *komponensekre* külön-külön is igaz. (A tétel természetesen csak inerciarendszerben érvényes.) Az *A* és *B* részecskék ütközésekor – a derékszögű koordinátarendszert alkalmazva – a következő egyenletekhez jutunk:

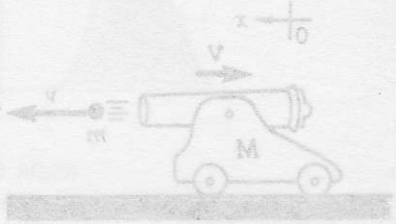
x irányú komponensekre: $(p_{Ax})_0+(p_{Bx})_0 = p_{Ax}+p_{Bx}$

y irányú komponensekre: $(p_{Ay})_0+(p_{By})_0 = p_{Ay}+p_{By}$ **(8-4)**

z irányú komponensekre: $(p_{Az})_0+(p_{Bz})_0 = p_{Az}+p_{Bz}$

Itt $(p_{Ax})_0$ a $\mathbf{p}_A$ erő x irányú komponensét jelenti az ütközés előtt, és így tovább. A feladatok megoldásakor általában minden komponensre felírjuk a (8-4) skaláregyenleteket.

Az impulzusmegmaradás törvénye bármely inerciarendszerből szemlélve érvényes. Természetesen, például két részecske ütközése esetén, két különböző sebességű vonatkoztatási rendszerbeli megfigyelő más és más kezdeti és végállapotbeli impulzusokat észlel. Mindketten úgy találják azonban, hogy az impulzusmegmaradás tétele érvényes.



8-1 PÉLDA

Egy 4 kg-os test 3 m/s kezdeti sebességgel vízszintes síkon, súrlódásmentesen mozog, s egy másik 2 kg-os eredetileg nyugalomban lévő testtel ütközik, ütközés után a testek együtt mozognak (8-2 ábra). Határozzuk meg a két egymáshoz tapadt test ütközés utáni közös sebességét.

MEGOLDÁS

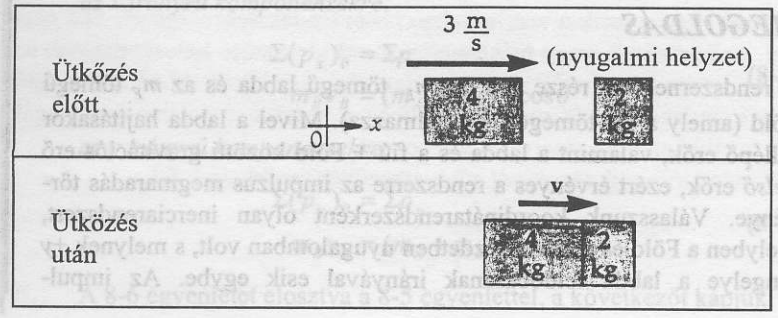
Mivel kezdeti impulzusa csak a 4 kg-os testnek van, az ütközés után a két test összimpulzusának nagysága és iránya megegyezik a kezdeti impulzussal. Így az ütközés egydimenziósnak tekinthető. Válasszuk a az x koordináta pozitív irányának megfelelően az ütközés előtti impulzus irányát, és vezessük be a következő jelöléseket:

Ütközés előtt	Ütközés után
$m_A = 4\text{kg}$ $(v_A)_0 = 3\text{m/s}$ $m_B = 2\text{kg}$ $(v_B)_0 = 0$	Az ütközés után a két test sebessége azonos $v_A = v_B = v$

Az impulzusmegmaradás törvényét felírva az x koordinátára, azt kapjuk, hogy:

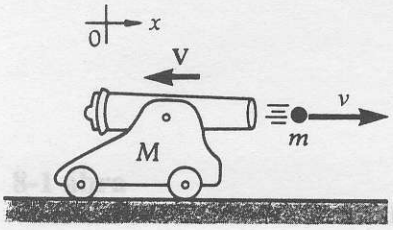
$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$
$$(m_A v_A)_0 + (m_B v_B)_0 = (m_A + m_B)v$$

innen:



8-2 ábra
A 8-1 példához

$$v = \frac{(m_A v_A)_0 + (m_B v_B)_0}{(m_A + m_B)} = \frac{(4\,\text{kg})\left(3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (2\,\text{kg})(0)}{(4\,\text{kg} + 2\,\text{kg})} = 2{,}00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



8-3 ábra
A 8-2 példához

8-2 PÉLDA

Egy kalózhajó fedélzetén egy 7500 N súlyú görgökre szerelt ágyú található (8-3 ábra). Az ágyú 100 N súlyú golyót lő ki 90 m/s kezdeti sebességgel. Határozzuk meg mekkora sebességgel lökődik vissza az ágyú, feltéve, hogy a görgök súrlódása elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A golyóból és az ágyúból álló rendszer zárt, hiszen semmiféle külső vízszintes erő nem hat rá. Így az összimpulzus a lövés előtt és után meg kell, hogy egyezzen. A 8-3 ábra jelöléseit használva a tömegek a következők:

$$M = \frac{W}{g} = \frac{7500\,\text{N}}{10\,\text{m/s}^2} = 750\,\text{kg}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{100\,\text{N}}{10\,\text{m/s}^2} = 10\,\text{kg}$$

Az impulzusmegmaradás törvényét felírva az x irányra, azt kapjuk, hogy:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$

$$0 = MV + mv$$

$$V = -\frac{mv}{M} = -\frac{(10\,\text{kg})(90\,\text{m/s})}{750\,\text{kg}} = -1{,}2\,\text{m/s}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ágyú a golyóval ellentétes, azaz $-x$ irányban lökődik vissza.

8-3 PÉLDA

Egy fiú a Föld felszínén egy labdát függőlegesen feldob. Határozzuk meg Föld és a labda kinetikus energiájának arányát abban a pillanatban, amikor a fiú elengedi a labdát:

$$\frac{K_{Föld}}{K_{Labda}} = \frac{\frac{1}{2} m_F v_F^2}{\frac{1}{2} m_L v_L^2}$$

MEGOLDÁS

A rendszernek két része van: az m_L tömegű labda és az m_F tömegű Föld (amely a fiú tömegét is tartalmazza). Mivel a labda hajításakor fellépő erők, valamint a labda és a fiú + Föld közötti gravitációs erő *belső* erők, ezért érvényes a rendszerre az impulzus megmaradás törvénye. Válasszunk koordinátarendszerként olyan inerciarendszert, melyben a Föld és a labda kezdetben nyugalomban volt, s melynek $+y$ tengelye a labda feldobásának irányával esik egybe. Az impul-

zusmegmaradás törvényéből meghatározható a v_F/v_L sebességarány.

$$\Sigma(p_y)_0 = \Sigma p$$
$$0 = m_L v_L + m_F v_F$$
$$\frac{v_F}{v_L} = -\frac{m_L}{m_F}$$

Az így számított értéket behelyettesítve a kinetikus energiák arányának kifejezésébe, a következőt kapjuk:

$$\frac{K_F}{K_L} = \frac{\frac{1}{2}m_F v_F^2}{\frac{1}{2}m_L v_L^2} = \frac{m_F}{m_L}\left(\frac{v_F}{v_L}\right)^2 = \frac{m_F}{m_L}\left(-\frac{m_L}{m_F}\right)^2 = \frac{m_L}{m_F}$$

Helyettesítsünk be néhány számadatot a fenti eredménybe. Tételezzük fel, hogy a labda tömege 0,6 kg. Mivel a Föld tömege kb. $6\cdot\times10^{24}$ kg, a kinetikus energiák arányára $\sim10^{-25}$ adódik. Így azt mondhatjuk, hogy a Föld a labdához képest elhanyagolhatóan kicsiny kinetikus energiát kap. Ez az oka tehát annak, hogy amikor a 7. fejezetben egy feldobott test potenciális energiájának változását tárgyaltuk, akkor a Föld kinetikus energiájának változását tudatosan elhanyagoltuk. Mindig tudatában kell lennünk azonban annak, hogy a potenciális energia az adott *rendszer* egészének sajátossága, nem pedig egyetlen részecskéhez rendelt mennyiség, és sok esetben nem tekinthetünk el attól, hogy az energián a rendszer minden egyes alkotórésze osztozik. Jegyezzük meg mindazonáltal, hogy a feldobott labda felfelé mutató impulzusának nagysága *éppen akkora*, mint amekkora a Föld lefelé irányuló impulzusának nagysága.

8-4 PÉLDA

Az *A* és *B* korcsolyázó merőleges irányból közeledik egymás felé. Az *A* korcsolyázó tömege $m_A = 50$ kg, s az *x* koordináta pozitív irányában 2 m/s sebességgel halad. A *B* korcsolyázó tömege $m_B = 70$kg, és 1,5 m/s sebességgel az *y* koordináta pozitív irányában korcsolyázik. Összeütköznek, majd együtt mennek tovább. (a) Határozzuk meg a korcsolyázók együttes sebességét az ütközés után. (b) Határozzuk meg az ütközés közben végbemenő kinetikus energia változásának az eredeti kinetikus energiához képest vett ($\Delta K/K_0$) arányát.

MEGOLDÁS

a) A 8-4 ábra jelöléseit használva írjuk fel az impulzusmegmaradás törvényét a két komponensre, a komponenseket jelöljük *x*, ill. *y* indexszel.

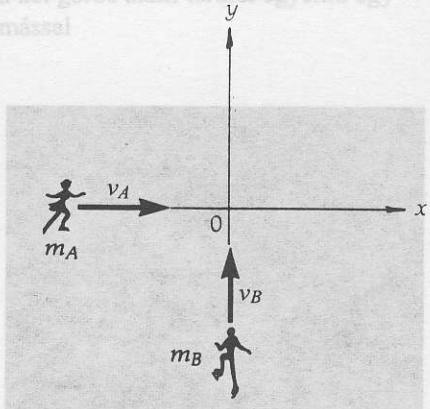
az x irányú komponensekre:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$
$$m_B v_B = (m_A + m_B) v \cos\theta \qquad (8\text{-}5)$$

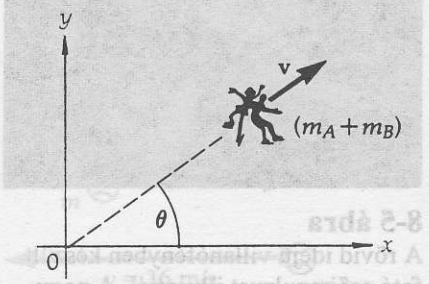
az y irányú komponensekre:

$$\Sigma(p_y)_0 = \Sigma p_y$$
$$m_B v_B = (m_A + m_B) v \sin\theta \qquad (8\text{-}6)$$

A 8-6 egyenletet elosztva a 8-5 egyenlettel, a következőt kapjuk:



a) ütközés előtt



b) ütközés után

8-4 ábra
A 8-4 példához

$$\frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(\cancel{m_A + m_B})v \sin\theta}{(\cancel{m_A + m_B})v \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(70\text{ kg})(1{,}5\text{ m/s})}{(50\text{ kg})(2\text{ m/s})}\right] = \operatorname{arc\,tg}(1{,}05) = 46{,}4^\circ$$

Az így számított θ szöget visszahelyettesítve a 8-5 egyenletbe meghatározhatjuk a v együttes sebességet az ütközés után:

$$v = \frac{m_A v_A}{(m_A + m_B)\cos\theta} = \frac{(50\text{ kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(50\text{ kg} + 70\text{ kg})(\cos 46{,}4^0)} = 1{,}21\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) A kinetikus energia relatív változása az ütközés során:

$$\left(\frac{\Delta K}{K_0}\right) = \left(\frac{K - K_0}{K_0}\right) = \left(\frac{K}{K_0} - 1\right)$$

ahol

$$K_0 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$= \frac{1}{2}(50\text{ kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}(70\text{ kg})\left(1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 179\text{ J}$$

és

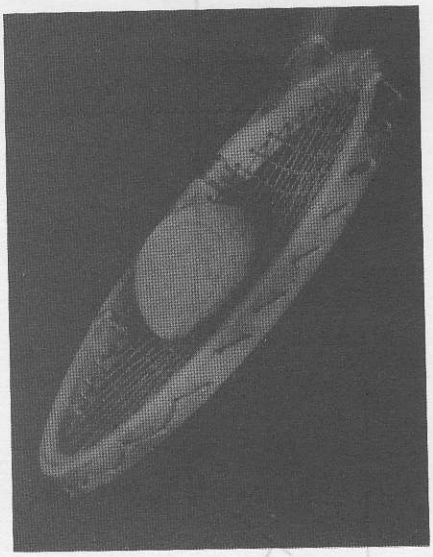
$$K = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2$$

$$= \frac{1}{2}(50\text{ kg} + 70\text{ kg})\left(1{,}21\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 87{,}6\text{ J}$$

Így

$$\left(\frac{K}{K_0} - 1\right) = \left(\frac{87{,}6}{179} - 1\right) = -0{,}511$$

A negatív előjel arra utal, hogy a kinetikus energia egy része az ütközés során elvész. A „hiányzó" energia az ütközéskor a korcsolyázók izommunkája ellenében ható belső munka.



8-5 ábra
A rövid idejű villanófényben készült fotó erőimpulzust illusztrál. A nagymértékű alakváltozás jelzi, hogy a teniszütő és a labda között nagy erők ébrednek.

8.3 Az erőimpulzus

Newton második törvénye szerint a testre ható erők eredője minden időpontban megegyezik a test impulzusváltozásának sebességével. Sok esetben, pl. az ütközések, vagy más nagyon rövid ideig tartó kölcsönhatások során az erők nem ismerhetők meg pontosan. Relatíve könnyebben határozható meg az impulzusváltozás nagysága. Ebben a fejezetben az impulzus fogalmának további alkalmazásaival foglalkozunk.

Newton második törvényét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Innen integrálással (lásd függelék G-lll) a következőt kapjuk:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\,\mathbf{p} \qquad (8\text{-}7)$$

ahol $\mathbf{p}_0$ a t_0 kezdeti időpontbeli meglevő impulzus (közvetlenül a kölcsönhatás előtt), és $\mathbf{p}$ a t időpontbeli, végimpulzus (közvetlenül a kölcsönhatás után.) Az egyenlet jobb oldalán levő integrál éppen az impulzusváltozás: $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}$.

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = \Delta\mathbf{p} \qquad (8\text{-}8)$$

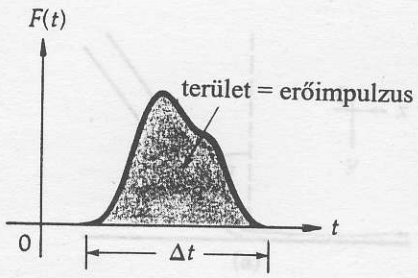
A bal oldali integrált **erőimpulzusnak** nevezzük. Az erőimpulzust az $\mathbf{F}(t)$ görbéje alatti terület adja a kölcsönhatás időtartama alatt (8-6 ábra). Vegyük észre, hogy az erőimpulzus *vektormennyiség*, s iránya azonos a $\Delta\mathbf{p}$ impulzusváltozás irányával.

Erőimpulzus $$\underbrace{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt}_{\text{Erőimpullzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{Impulzusváltozás}} \qquad (8\text{-}9)$$

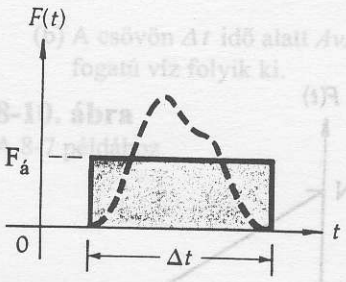
Példaként tekintsük a baseball-labda megütésének folyamatát. (8-7 ábra) Az ütő és a labda ütközésének Δt ideje nagyon rövid, tán néhány ezredmásodperc. Valójában az erőidőbeli változását ábrázoló görbe a 8-6 ábra $F(t)$ függvényéhez hasonlít. Mivel az $F(t)$ függvény tényleges menetét nagyon nehéz meghatározni, ezért hasznos egy (konstans) $F_{á}$ *átlagerőt*[1] bevezetni, amely ugyanolyan hosszú Δt ideig hat és ugyanazt az *impulzusváltozást* hozza létre, mint a valódi erő. A 8-6, ill. 8-7 ábrák alatti területek azonosak. (Természetesen a valódi erő egy nagyon rövid ideig sokkal nagyobb is lehet, mint $F_{á}$).

Erőimpulzus $$\underbrace{\mathbf{F}_{á}\Delta t}_{\text{Erőimpulzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{Impulzusváltozás}} \qquad (8\text{-}10)$$

Az erőimpulzus SI mértékegysége Ns.



8-6 ábra
A labda és az ütő közötti ütközés során fellépő $F(t)$ erő időfüggése. A Δt ideig tartó kölcsönhatás alatt bekövetkező erőimpulzus a görbe alatti (satírozott) területtel adható meg.



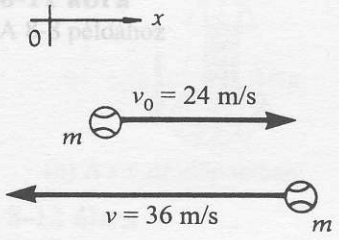
8-7 ábra
Az $F_{á}$ átlagos erő a Δt idő alatt ugyanakkora erőimpulzust hozna létre, mint a 8-6 ábrán látható erő, mivel a két görbe alatti terület egyenlő egymással

8-5 PÉLDA

A $W = 1{,}5$ N súlyú, 25 m/s sebességgel vízszintesen repülő baseball labdát úgy ütjük meg, hogy az ütés után 38 m/s sebességgel ellenkező irányban mozog. Feltételezve, hogy az ütő 2 ms ideig van kapcsolatban a labdával, határozzuk meg a labdára ható átlagerőt.

MEGOLDÁS

A kölcsönhatás ideje olyan rövid, hogy a gravitációs erő a labda impulzusában csak elhanyagolható változást okoz az ütközés alatt. Így



8-8 ábra
A 8-5 példához

[1] A $\Delta t = t - t_0$ időtartamra vonatkozó $\mathbf{F}_{á}$ átlagos erőt matematikailag az

$$\mathbf{F}_{á} = \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt\right] = \frac{\text{erőimpulzus}}{\Delta t}$$ összefüggéssel definiáljuk.

Így $\mathbf{F}_{á}\,\Delta t$ = erőimpulzus.

feltehetjük, hogy csak az ütő fejt ki erőt a labdára. Elsőként számítsuk ki a labda tömegét:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{1{,}5\,\text{N}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}15\,\text{kg}$$

Válasszuk az x tengely pozitív irányául a labda kezdeti sebességének az irányát, így:

$$p_0 = mv_0 = 0{,}15\,\text{kg} \cdot 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}75\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (+x \text{ irányban})$$

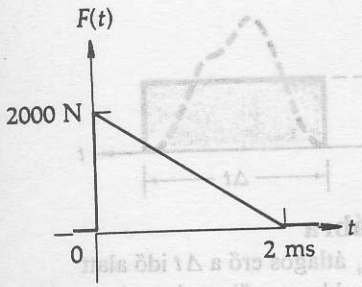
$$p = mv = 0{,}15\,\text{kg} \cdot 38\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5{,}7\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (-x \text{ irányban})$$

Most alkalmazzuk a 8-10 egyenletet:

$$F_{á}\Delta t = \Delta p$$

innen

$$F_{á} = \frac{p - p_0}{\Delta t} = \frac{(-5{,}7 - 3{,}75)\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}002\,\text{s}} = -4725\,\text{N} \qquad (-x \text{ irányban})$$



8-9 ábra
A 8-6 példához

8-6 PÉLDA

Egy 0,045 kg-os golflabdát elütnek. Tételezzük fel, hogy az ütő által a labdára gyakorolt erő az ütközés ideje alatt lineárisan csökken (8-9 ábra). Határozzuk meg a labda sebességét, amikor éppen elhagyja a golfütő fejét.

MEGOLDÁS

Használjuk fel a (8-9) egyenletet:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = mv - mv_0$$

Az erőimpulzus számértékben megegyezik az $F(t)$ görbe alatti területtel. Mivel az $F(t)$ görbe lineáris, ezért 2000 N, ill. 0,002 s.

Erőimpulzus = 1/2(2000 N)(0,002 s)=2,00 Ns

Egy Newton egy [kg·m/s^2]-tel egyezik meg, ezért az erőimpulzus 2 kg·m/s. Így:

Erőimpulzus = Δp

$$2{,}00\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}} = mv - mv_0$$

$$v = \frac{2{,}00\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}}{m} + mv_0 = \frac{2{,}00\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}}{0{,}045\,\text{kg}} + 0 = 44{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8.4 Folytonosan változó impulzus

Befejezésül tekintsünk néhány példát, melyben az impulzus folytonosan változik. A legtöbb ilyen problémát úgy a legegyszerűbb megoldani, ha a rövid idő alatt bekövetkező változásokat vizsgáljuk.

8-7 PÉLDA

Vízsugarat síkfelületre irányítunk úgy, hogy a sugár θ szöget zár be a felület normálisával. (8-10 ábra) A fecskendőt elhagyó vízsugár sebessége v, keresztmetszete A, és a víz sűrűsége ρ. A folyadék szétterül a sík felszínén. Szükségképpen, amikor a vízsugár becsapódik a felületbe, sebességének felülettel párhuzamos komponense nem változik, a normális komponens viszont zérusra csökken. Határozzuk meg vízsugár által a síkra gyakorolt (és a felületre merőleges) átlagos erőt.

MEGOLDÁS

A 8-10b ábráról leolvasható, hogy Δt idő alatt,

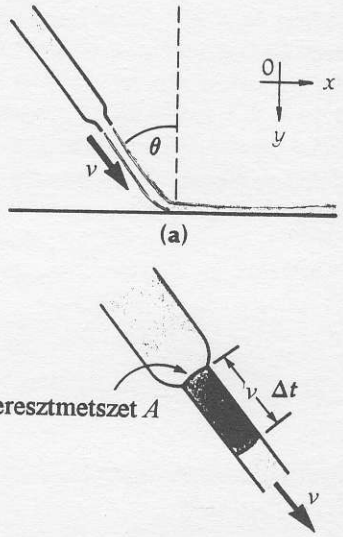
A felületre érkező víz térfogata (térfogat) $= Av\Delta t$

Ugyanezen vízmennyiség tömege (sűrűség)(térfogat) $= \rho Av\Delta t$

E víztömeg p impulzusa $(mv) = \rho Av^2\Delta t$

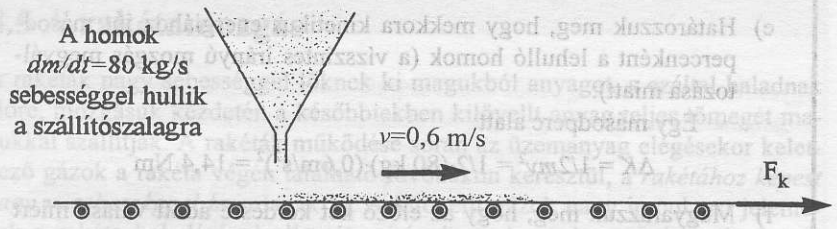
Az ábrán feltüntetett derékszögű koordinátákat bevezetve, normális irányú erő csak az impulzus y irányú komponenséből adódik. Az impulzus y komponense merőleges a felületre és $\rho\, Av^2\Delta t \cos\theta$-val egyenlő. Newton harmadik törvény értelmében amíg a víz y irányú impulzus összetevőjét zérusra csökkenti a lap ugyanakkora normális irányú erőt fejt ki a vízsugárra, , mint amekkora normális irányú erővel hat a vízsugár a lapra.

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{p_y - (p_y)_0}{\Delta t} = \frac{\rho A v^2 \Delta t \cos\theta - 0}{\Delta t} = \rho A v^2 \cos\theta$$

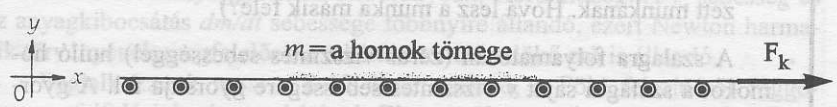


(b) A csövön Δt idő alatt $Av\Delta t$ térfogatú víz folyik ki.

8-10. ábra
A 8-7 példához



(a) A homok hullása alatt az $\mathbf{F}_k$ külső erő 0,6 m/s sebességgel mozgatja a szalagot

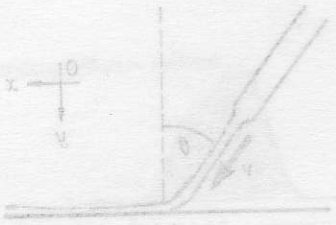


(b) A rendszert a szalagon a szalag sebességével mozgó m tömegű homok alkotja. Ilymódon a rendszer m tömege az időben lineárisan növekszik.

8-11 ábra
A 8-8 példához

8-8 PÉLDA

A szállítószalag. Egy 0,6 m/s sebességgel mozgó vízszintes szállítószalagra a 8-11a ábrán látható módon egy kiöntőgaratból másodpercenként 80 kg homok hullik. Tegyük fel, hogy a szalag vízszintes irányú külső erő hatására súrlódásmentesen mozog a görgőin.



a) Határozzuk meg, hogy milyen sebességgel változik a homok vízszintes irányú impulzusösszetevője. (Az impulzus függőleges irányú összetevőjének változását a szállítószalag és az alátámasztó görgök biztosítják, ezzel azonban most nem foglalkozunk.)

Másodpercenként 80 kg homok gyorsul fel zérus kezdősebességről 0,6 m/s sebességre. Így az impulzusváltozás sebessége:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{p_x - (p_x)_0}{\Delta t} = \frac{80\,\text{kg} \cdot 0{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0}{1\,\text{s}} = 48\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$$

b) Határozzuk meg, hogy mekkora f súrlódási erőt fejt ki a szalag a homokra a gyorsítás során.

Newton második törvénye szerint:

$$f = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = 48\,\text{N} \qquad \text{(jobb oldal irányába)}$$

c) Határozzuk meg, hogy mekkora F_k külső erőnek kell a szalagra hatnia, hogy egyenletesen mozogjon. (Ezt az erőt a szalagot mozgató motor fejti ki.)

Newton harmadik törvénye szerint, minthogy a szalag a homokra jobbfelé mutató F erőt fejt ki, ugyanekkora balra mutató erővel hat a homok a szalagra. Ahhoz, hogy a szalag egyenletesen mozogjon, a rá ható erők F_x eredőjének zérusnak kell lennie. Ily módon a motornak

$$F_k = 48\,\text{N} \qquad \text{(jobb oldal irányába)}$$

erőt kell kifejteni a szállítószalagra.

d) Határozzuk meg, hogy mennyi munkát végez az F_k erő egy másodperc alatt.

Az F_k erő 0,6 m-t mozgat másodpercenként, így

$$\Delta W = F\Delta x = 48 \cdot 0{,}6 = 24{,}8\,\text{Nm}$$

e) Határozzuk meg, hogy mekkora kinetikus energiához jut másodpercenként a lehulló homok (a vízszintes irányú mozgás megváltozása miatt):

Egy másodperc alatt:

$$\Delta K = 1/2mv^2 = 1/2 \cdot (80\,\text{kg}) \cdot (0{,}6\text{m/s}^2)^2 = 14{,}4\,\text{Nm}$$

f) Magyarázzuk meg, hogy az előző két kérdésre adott válasz miért különbözik egymástól. (Mi az oka tehát annak, hogy a homok mozgási energiájának változása csak *fele* az F_k külső erő által végzett munkának. Hová lesz a munka másik fele?)

A szalagra folyamatosan (zérus vízszintes sebességgel) hulló homokot a szalag a saját v vízszintes sebességére gyorsítja fel. A gyorsulás során *szükségszerű*, hogy a homokszemek és a szalag elcsússzanak egymáshoz képest, hiszen a homok a gyorsítási folyamat során kisebb sebességgel mozog, mint a szalag. (Amikor a homokszemek elérik a szalag sebességét, akkor nincs szükség többé vízszintes irányú erőre a v sebességű egyenletes mozgás fenntartásához.) A 8C-47 feladat megoldása világosan megmutatja, hogy akár 1 s akár 0,01 s vagy tetszőleges más időtartam alatt megy végbe a gyorsulási folyamat, az „elvesző" mechanikai munka mindig pontosan egyenlő a súrlódás miatt fejlődő hővel. (Útmutatás: A súrlódási erő munkájának kiszámításakor vegyük figyelembe, hogy a súrlódási erő a szállítószalag és a homokszemek közötti *relatív* elmozdulás által meghatározott úton hat.)

Az „elvesző" energia a Newton törvények segítségével is meghatározható. Koordinátarendszerként használjuk a Földhöz rögzített koordinátarendszert, a vizsgált „rendszer" pedig legyen a *szalagon a szalag sebességével mozgó homoktömeg* (8-11b ábra). A rendszerben lévő homok pillanatnyi m tömege állandó dm/dt mértékben növekszik az idő függvényében. A tömeg változása miatt a rendszer $p_x = mv$ impulzuskomponense is folytonosan változik. Így

$$\Sigma F_x = \frac{dp_x}{dt}$$

$$F_k = \frac{d}{dt}[mv] = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v$$

Az $m(dv/dt)$ tag a rendszernek a szállítószalag gyorsulásából adódó impulzusváltozáshoz szükséges erőt adja. Esetünkben a szállítószalag gyorsulása zérus, így ez a tag nem lép fel az egyenletben, azaz

$$F_k = (dm/dt)v$$

Ennek az erőnek a teljesítménye pedig:

$$\text{Teljesítmény} = F_k v = [(dm/dt)v]v = \frac{d}{dt}\left(mv^2\right),$$

ami átírható:

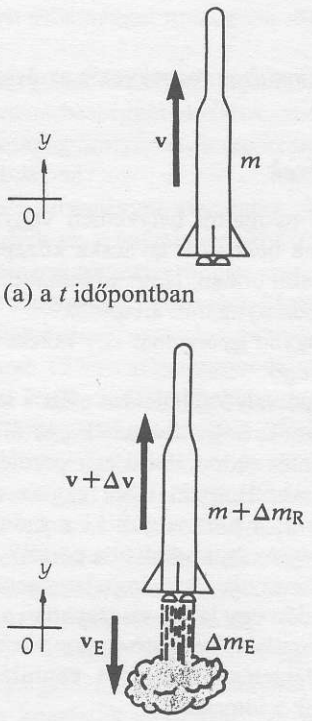
$$\text{Teljesítmény} = 2\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = 2\frac{dK}{dt}$$

Látható tehát, hogy a motor által a rendszerbe táplált teljesítmény a homok kinetikus energiája változásának a kétszerese. A kapott eredmény teljesen általános, hiszen a folyamat lezajlásának Δt idejére semmiféle feltevést sem tettünk.

8.5 A rakétamozgás

A rakéták nagy sebességgel löknek ki magukból anyagot, s ezáltal haladnak előre, mozgásuk kezdetén a későbbiekben kilövellt anyag teljes tömegét magukkal szállítják. A rakéták működése során az üzemanyag elégésekor keletkező gázok a rakéta végén található fúvókákon keresztül, a *rakétához képest nagy v_r sebességgel* áramlanak ki. A kilövellt gázok nagy impulzust jelentenek a rakéta haladásával ellentétes irányban. A rendszer (rakéta és üzemanyag) összimpulzusának azonban állandónak kell maradnia, ezért a rakéta a kibocsátott üzemanyaggal ellentétes irányban, előre mozog. A v_r sebesség és az anyagkibocsátás dm/dt sebessége többnyire állandó, ezért Newton harmadik törvényének megfelelően a rakétatestet előre lökő erő is állandó.

Foglalkozzunk most a 8-12 ábrán látható, a Föld felszínéről függőlegesen felfelé irányított rakétával. Elemezzük a rendszer (rakéta és üzemanyag) mozgását a Földhöz rögzített és inerciarendszernek tekinthető koordinátarendszerből. Tegyük fel továbbá, hogy g állandó és a légellenállás elhanyagolható[2]. Az a) ábrán mutatott időpontban legyen a rakéta sebessége v, a rakétatest és az üzemanyag együttes tömege pedig m. A tömeg Δt idő alatt csökkenjen Δm_R -rel. A rakéta tömegének Δm_R tömegcsökkenése megegyezik



(a) a t időpontban

(b) A $t + \Delta t$ időpontban

8-12 ábra
A rakéta mozgásának leírása a Földhöz rögzített és inercia-rendszernek tekintett koordináta-rendszerből

[2] Valójában a légellenállás, különösen a Föld közelében és nagy sebességeknél jelentős hatású. Természetesen a levegő jelenléte nem szükséges a rakétamotorok működéséhez. A motorok az űrben éppolyan tolóerőt fejtenek ki, mint a Föld közelében.

a kibocsátott hajtóanyag tömegének Δm_E növekményével, ez a tömeg lövell ki a fúvókákon keresztül a *rakétatesthez képest* függőlegesen lefelé v_r sebességgel. A folyamat során a rakéta tömege $m + \Delta m_R$-re, sebessége pedig $v + \Delta v$-re változik. (Vegyük észre, hogy Δm_R tömegcsökkenést jelent, tehát negatív mennyiség.) A kibocsátott üzemanyagnak a Földhöz képest vett v_E sebességét a rakéta Földhöz viszonyított v sebességének és a hajtóanyag rakétához képest vett v_r relatív sebességének a különbsége adja:

$$v_E = v - v_r \tag{8-11}$$

Alkalmazzuk most a rendszerre a Newton második törvényének az megfogalmazott alakját, mely szerint a külső erőktől származó erőlökés megegyezik a rendszer impulzusának megváltozásával. A rendszerre ható egyetlen külső erő a lefelé mutató mg erő. A mozgás egydimenziós, válasszuk a felfelé mutató irányt pozitívnak.

Erőimpulzus = Impulzusváltozás

$F_k \Delta t$ = [végállapot impulzusa] − [kezdeti állapot impulzusa] (8-12)

$$-mg\Delta t = \left[\underbrace{(m + \Delta m_R)(v + \Delta v)}_{\text{rakéta}} + \underbrace{\Delta m_E (v - v_r)}_{\text{kibocsátott gáz}} \right] - [mv]$$

Mivel $\Delta m_E = -\Delta m_R$ a (8-12) egyenlet a

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{1}{m}(v_r - \Delta v)\frac{\Delta m_R}{\Delta t} - g$$

alakra egyszerűsíthető. Mivel Δt zérushoz tart, ezért $\Delta v/\Delta t$ a gyorsuláshoz tart. Mivel pedig, Δv zérushoz továbbá a $\Delta m_R/\Delta t$ különbségi hányados a dm/dt deriválthoz tart, határértékben a rakéta $a = dv/dt$ gyorsulása a

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g \tag{8-13}$$

egyenlettel adható meg, ahol dm/dt negatív mennyiség és a rakéta tömegváltozásának sebességével egyenlő. A rakéta akkor gyorsul felfelé, ha

$$\frac{v_r}{m}\left|\frac{dm}{dt}\right| > g$$

illetve ha a $v_r|dm/dt|$ un. *effektív lökés* nagyobb, mint a rakétatest mg súlya. A *Saturn V* rakéta esetén amellyel az amerikai űrhajósok a Holdra szálltak a motorok tolóereje negyvenmillió newton volt.

A (8-13) egyenlet integrálásával könnyen meghatározhatjuk a rakéta sebességének időbeli változását is. Amennyiben a rakéta a $t = 0$ időpontban nyugalomból indul, akkor

$$\int_0^v dv = -v_r \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} - g\int_0^t dt \tag{8-14}$$

Elvégezve az integrálást (Függelék G-III), azt kapjuk, hogy

$$v = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt \quad \text{(feltéve, hogy } g \text{ állandó)} \tag{8-15}$$

A g állandóságára tett feltevés viszonylag rossz közelítés, hiszen a Földtől 160 km magasságban a gravitációs gyorsulás kb. 5%-kal kisebb, mint a Föld felszínén.

Abban a tartományban, ahol g elhanyagolhatóan kicsiny (vagy egy vízszintes sínen mozgó rakétaszánkó mozgásának vizsgálatakor, ahol a gravitációs erőnek nincs jelentősége), a sebességre vonatkozó összefüggés nagyon egyszerűvé válik:

$$v = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad \text{(gravitáció nincsen)} \qquad \textbf{(8-16)}$$

A képlet mutatja, hogy a rakéta által elérhető maximális sebességet, tehát a teljes üzemanyagmennyiség elégetése után elért sebességet az $m_0/m_{ü}$ tömegarány szabja meg, ahol m_0 a rakéta kezdeti, $m_{ü}$ pedig a teljes üzemanyagmennyiség elégetése utáni üres tömege. A (8-16) összefüggés rámutat a rakétatervezés két fontos faktorára; a végsebesség akkor lesz a legnagyobb, ha a) az üzemanyag a fúvókákon át a lehető legnagyobb v_r sebességgel áramlik ki, b) ha a tömegarányt olyan naggyá tesszük, amennyire csak lehetséges. Sajnos azonban az $m_{ü}$ végső tömegben az üzemanyagtartályok és a motor holt tömege mellett a hasznos terhet is tartalmazza, ezért a tömegarány egy adott határnál tovább nem növelhető. Emiatt a modern rakéták többfokozatúak, s az egyes fokozatokban további kisebb rakéták képezik a hasznos terhelést. Amikor egy rakétafokozat fűtőanyaga elfogyott, akkor beindul a következő fokozat és az előző haszontalan terhelése leválik.

A sugárhajtású motor hajtóművein a rakétákhoz hasonlóan égés során keletkező anyag áramlik ki nagy sebességgel. A rakétákkal szemben azonban a sugárhajtású gépek nem visznek magukkal oxidálószert, hanem a levegőből használnak fel nagymennyiségű oxigént az üzemanyag elégetéséhez. Így, ha a sugárhajtású repülőgépek mozgását elemezzük, akkor figyelembe kell venni a rendszer tömegében a beszívott levegőt, valamint a beszívásakor ébredő erőket is.

8-9 PÉLDA

Egy függőlegesen indított rakéta jellemző adatai a következők: Kezdeti tömeg: 15 000 kg, ebből az üzemanyag 10 000 kg. Az hajtóanyag kiáramlási sebessége $v_r = 2{,}5 \cdot 10^3$ m/s, az égési idő 60 s. Tegyük fel továbbá, hogy g értéke állandó. Határozzuk meg a) a rakéta sebességét az üzemanyag elégetése után, b) a gyorsulást az indítás pillanatában.

MEGOLDÁS

a) Használjuk fel a (8-15) összefüggést

$$v_{végső} = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m_{ü}}\right) - gt$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$v_{végső} = \left(2{,}5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \ln\left(\frac{15000\,\text{kg}}{5000\,\text{kg}}\right) - \left(9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(60\,\text{s})$$

$$v_{végső} = 2{,}16 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A gyorsulás $a = dv/dt$, így a (8-13) egyenlet szerint

$$a = -\frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$$

Figyelembe véve, hogy dm/dt negatív szám (dm a rendszer tömegének csökkenését jelenti), azt kapjuk, hogy

$$a = \left(\frac{2{,}5\cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\cdot 10^3\,\text{kg}}\right)\left(\frac{-10^4\,\text{kg}}{60\,\text{s}}\right) - 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 73{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \text{(körülbelül 7,5 g)}$$

Összefoglalás

Zárt rendszerben (amelyre ható külső erők eredője zérus) a $\Sigma\mathbf{p}$ összimpulzus időben állandó.

Az impulzusmegmaradás törvénye $\Sigma\mathbf{p}_0 = \Sigma\mathbf{p}$

Amennyiben külső erők nem hatnak, akkor ez a törvény – függetlenül attól, hogy a mechanikai energia megmarad vagy sem, – *mindig* érvényes. A $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzus vektormennyiség. Többdimenziós mozgások esetén a megmaradási tétel az egyes összetevőkre külön-külön is érvényes.

Az *erőimpulzus* megegyezik az összimpulzus megváltozásával

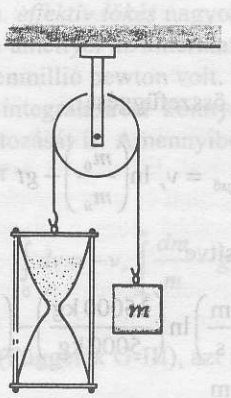
$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt}_{\text{erőimpulzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{impulzus-változás}}$$

Két részecske pillanatszerű ütközése során az $\mathbf{F}(t)$ függvény pontos alakját általában nem ismerjük. Feltéve azonban, hogy a kölcsönhatás Δt ideig tart, meghatározhatunk egy állandó $\mathbf{F}_{\text{átl}}$ átlagos erőt, amely a Δt idő alatt ugyanakkora impulzusváltozást hozna létre.

$$\underbrace{\mathbf{F}_{\text{átl}}\Delta t}_{\text{erőimpulzus}} = \underbrace{\Delta\mathbf{p}}_{\text{impulzus-változás}}$$

Kérdések

1. Ha nyugalmi helyzetben vagyunk egy tökéletesen sima befagyott tavacska közepéről, hogyan tudunk kijutni onnan. Hogyan juthattunk eredetileg a tó közepén nyugalmi állapotba?
2. Hogyan gyorsulhat egy rakéta az űrben, ahol nincs levegő.
3. A porszívó feltalálása előtt a szőnyegeket úgy tisztították, hogy átvetették egy állványra erősített vízszintes rúdon, majd egy porolóval csapkodva kiporolták. Hogyan lehet ezt az eljárást pontosabban leírni; a port verjük ki a szőnyegből, vagy a szőnyeget csapkodjuk el a portól?
4. Elemezzük az impulzusmegmaradás folyamatát midőn egy labda visszapattan a falról
5. Mozgásba hozható-e egy vitorláshajó úgy, hogy a fedélzetén elhelyezett ventillátorral légáramot fújunk a vitorláira[3]?
6. Egy eredetileg nyugalomban lévő vasúti pőrekocsi platóján két ember áll. Ha egymásután, a kocsihoz képest ugyanakkora sebességgel külön-külön ugranak le a kocsiról, akkor a kocsi nagyobb sebességre tesz szert, mintha egyszerre ugranának le. Miért?



8-13 ábra
7. kérdéshez

[3] Nem várt választ ad a kérdésre Robert Beck Clark „A válasz nyilvánvaló nemde?" c. cikkében (The Physics Teacher 24 (jan. 1980) 39. old.)

7. Lezárt torkú homokórát a 8-13 ábrán látható módon egy állócsigán kiegyensúlyoztunk úgy, hogy a homok az óra felső részében volt. (A csiga súrlódásmentes.) Ezután szabaddá tettük a homok útját. a) Vajon a homok kifolyásának megnyitása után, de mielőtt a homok elérné a homokóra alját, fennmarad-e az egyensúlyi helyzet? b) Miközben homok folyik le és felhalmozódik az alsó részben, egyensúlyban marad-e a homokóra? Ha nem, mekkora a gyorsulás? Ha pedig az egyensúly fennáll, akkor lesz-e sebessége a homokórának? c) Határozzuk meg a homokóra mozgásállapotát, miután a teljes homokmennyiség lefolyt. Ha a homokóra mozog, akkor írjuk le a mozgást, ha pedig nyugalomban van, akkor adjuk meg, hogy hol helyezkedik el a kiindulási helyzetéhez képest.
8. Egy dugót vízzel teli edény alján, teljesen a vízbe merülve fonallal rögzítettünk. Az eredményt egy mérleg egyik serpenyőjébe téve, kiegyensúlyozzuk azt azonos m tömeggel a másik serpenyőben. Mi történik, ha a fonal elszakad és *a dugó a vízben felfelé mozog?* Egyensúlyban marad-e a mérleg, vagy elbillen valamerre?

Feladatok

8.2 Az impulzusmegmaradás törvénye

8A-1 Egy 40 N súlyú pisztollyal 5 g tömegű golyót lőttünk ki a Földhöz képest 1000 m/s sebességgel. Mekkora sebességgel lökődött vissza a fegyver?

8A-2 Két 20, ill. 30 kg tömegű fiú összekepaszkodva áll egy befagyott tó jegén, majd úgy lökik el egymást, hogy a 20 kg tömegű fiú 2 m/s sebességre tesz szert. Feltéve, hogy a súrlódás elhanyagolható, a) határozzuk meg a 30 kg tömegű fiú sebességét, b) mekkora lesz a fiúk impulzusa?

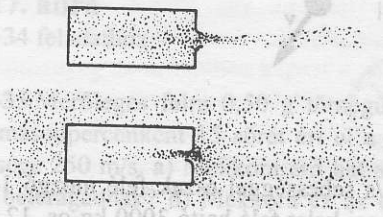
8A-3 Egy 7,5 kg tömegű test 4 m/s sebességgel vízszintes, súrlódásmentes felületen csúszik és centrálisan ütközik egy eredetileg nyugalomban lévő 10 kg tömegű testtel. Ütközés után a testek összeragadnak. Mekkora a kinetikus energia veszteség az ütközés során?

8A-4 Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K - K_0)/K_0$ relatív megváltozását.

8A-5 Egy 200 tonnás tehervonat szerelvény 8 km/h sebességgel begurul egy alagútba és ott ütközik és összekapcsolódik egy 25 tonnás tehervagonnal. A szerelvény 6 km/h sebességgel lép ki az alagútból. Mekkora sebességgel és milyen irányban mozgott a 25 tonnás vagon ütközés előtt az alagútban?

8A-6 Légpárnás sínen egy 3 kg és egy 4 kg tömegű kiskocsit tartunk nyugalomban. A kocsik között egy elhanyagolható tömegű összenyomott rugó van. A kiskocsik nincsenek a rugóhoz kötve. Ezután elengedjük a kiskocsikat. Milyen sebességgel mozog a 4 kg tömegű kocsi, ha tudjuk, hogy a 3 kg-os kocsi 4 m/s sebességre tesz szert.

9. Ha egy sűrített levegővel teli kapszulát a 8-14 ábrán látható módon kiszúrunk, akkor a levegő jobbfelé kiáramlik belőle, s emiatt a kapszula rakétaszerűen balfelé mozog. Mi történik, ha egy eredetileg nyugalomban légüres kapszulát szúrunk ki? A 8-14 ábrának megfelelően a tartályba belépő levegő balfelé áramlik. Miután a kapszulába beáramlik a levegő, az jobbra vagy balra kezd-e mozogni? Esetleg nyugalomban marad[4]?



8-14 ábra
9. kérdéshez

10. Fogalmazzuk át a fejezet mottóját úgy, hogy pontosan kifejezze azt a gondolatot, amire az idézet vonatkozik

8A-7 Egy 10^4 kg tömegű üres tehervagon 1,2 m/s sebességgel vízszintes sínen gurul és egy megrakott $2 \cdot 10^4$ kg tömegű vagonba ütközik. A teherkocsik összekapcsolódnak. Milyen sebességgel mozognak tovább az ütközés után?

8A-8 Egy 0,4 kg tömegű labdát 10 m/s sebességgel elhajítottunk. Mekkora sebességgel kellene mozognia annak a 2 g tömegű csapágygolyónak, hogy az impulzusa megegyezzen a labdáéval?

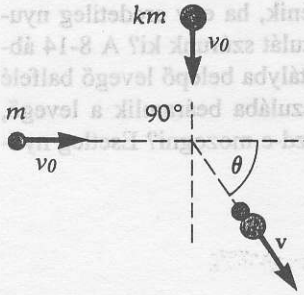
8B-9 Egy test 7,5 m/s sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen csúszik az x tengely pozitív irányába, majd 3 kg és 5 kg tömegű részekre robban szét. A robbanás után a két rész a síkon mozog tovább. Mekkora az 5 kg tömegű test sebességének nagysága és milyen irányú, ha a 3 kg-os darab 15 m/s sebességgel és az x tengely pozitív irányával 36,9°-os szöget bezárva mozog.

8B-10 Egy 1600 kg tömegű teherautó 10 m/s sebességgel közeledik egy kereszteződés felé. A merőleges keresztúton 25 m/s sebességgel egy 1000 kg tömegű személyautó érkezik. A gépkocsik összeütköznek és szorosan összeakadnak egymással. Határozzuk meg a roncs irányát közvetlenül az ütközés után, vagyis azt a szöget, amelyet a teherautó eredeti irányával zár be.

8B-11 Két m, ill. km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 nagyságú kezdősebességgel merőleges irányból a 8-15 ábrán látható módon közeledik egymáshoz és összeütközik, majd összeragadva mozog tovább. Fejezzük ki a

[4] A kérdést L. Epstein és P. Hewitt Thinking Physics c. könyvének első kötetéből vettük át (1979-es kiadás 37. old.). (Insightt Press 614 Vermont Street San Francisco, CA 94107)

végsebességük *irányát* meghatározó θ szöget k segítségével.



8-15. ábra
8B-11 feladathoz

8B-12 Egy 10 m/s sebességgel észak felé mozgó 1400 kg tömegű gépkocsi kelet felé hajtó 3000 kg-os, 12 m/s sebességű személygépkocsival ütközik és összetapad vele. a) Milyen sebességgel mozog az autóroncs közvetlenül az ütközés után? b) Határozzuk meg, hogy az ütközés előtti mozgási energiának hány százaléka alakul át termikus, deformációs, hang stb. energiává az ütközés során.

8B-13 Egy 1 m/s sebességgel észak felé korcsolyázó 75 kg-os férfi összeütközik egy 2 m/s sebességgel kelet felé sikló 30 kg tömegű kislánnyal és az ütközéskor összekapaszkodik vele. Határozzuk meg a férfi-kislány pár ütközés utáni sebességét és a mozgás irányát.

8B-14 Két, m, ill. km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 kezdősebességgel mozog a $+x$ ill. $-x$ irányban, összeütközik majd összeragadva mozog tovább. a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek v sebességének nagysága és iránya. b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$.

8B-15 Egy kezdetben test három részre robban szét. Egy 3 kg tömegű darab 4 m/s sebességgel a $+x$ irányba, egy másik 2,5 kg-os darab pedig 2,5 m/s sebességgel a $+y$ irányba repül. Határozzuk meg a harmadik rész impulzusának nagyságát és irányát.

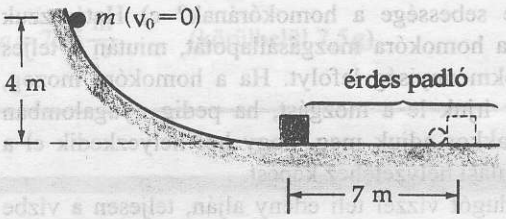
8B-16 Egy nyugalomban levő 9 kilogramm tömegű test három részre robban szét. Két, egyenként 2 kg-os darabja a $+x$, ill. $+y$ irányba repül rendre 1,5, ill. 2 m/s sebességgel. Határozzuk meg a harmadik darab sebességének nagyságát és irányát.

8B-17 A kezdetben nyugalomban lévő m, ill. M tömegű testet a közéjük szorított elhanyagolható tömegű rugó szétveti. Mutassuk meg, hogy ha a rugó által végzett munka W, akkor a m tömegű test sebessége

$$v = \left[\frac{2MW}{m(m+M)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

8B-18 A $+x$ irányban 3 m/s sebességgel mozgó 2 kg tömegű test a kezdetben nyugalomban lévő 4 kg tömegű testbe ütközik és összeragad vele. Az igy keletkezett 6 kg tömegű test összeütközik és hozzáragad az y tengely negatív irányában mozgó 1,5 kg tömegű testhez. Mekkora volt a 1,5 kg-os test sebessége az ütközés előtt, ha a testhármas az ütközés hatására nyugalomba kerül.

8B-19 Az $m = 2$ kg tömegű test a 8-16 ábrán látható módon lecsúszik egy súrlódásmentes rámpán és beleütközik az alján lévő 5 kg-os testbe. A két test összeragadva csúszik tovább a vízszintes érdes padlón és 7 m út megtétele után megáll. Mekkora a csúszó súrlódási együttható a padló és a testek között?



8-16. ábra
8B-19 feladathoz

8B-20 Egy 200 g tömegű gittcsomó vízszintesen elmozdulva 8 m/s sebességgel csapódik bele a vízszintes felületen nyugalomban lévő 3 kg-os fadarabba és hozzáragad. A fadarab és a felület között a csúszó súrlódási együttható 0,030. Mekkora utat tesz meg a gittes fadarab a felületen a megállásig?

8.3 Az erőimpulzus

8A-21 Egy 3 kg tömegű 7,5 m/s sebességgel mozgó test irányába sebességének megváltozása nélkül állandó erő hatására 0,05 s alatt ellenkezőre változik. Határozzuk meg az erő nagyságát és irányát.

8A-22 A 60 g tömegű teniszlabda 9 m/s sebességgel vízszintesen közeledik a játékos felé, aki rakettjével úgy üti meg, hogy a labda 20 m/s sebességgel pontosan ellentétes irányban kezd mozogni. Feltéve, hogy az ütő 0,01 s-ig érintkezett a labdával, határozzuk meg, hogy mekkora átlagos erő ébredt az ütő és a labda között. Készítsünk vektorábrát a labda impulzusának változásáról.

8A-23 a) Határozzuk meg egy 1000 kg tömegű, 12 m/s sebességű gépkocsi impulzusát. b) Mekkora átlagos erő hat a gépkocsira, ha egy téglafalba ütközik és 0,5 s alatt megáll?

8A-24 Az emberi test tűrőképességének vizsgálata során ütközéses baleseteket szimuláltak. Egy alkalommal a kísérleti személyt, Dr. John Stappot 1,4 s alatt lassították le 1011 km/h sebességről megállásig. Mekkora átlagos erőt fejtettek ki rá a gyors fékezés során a speciális fékező hevederek? Az erőt fejezzük ki a Dr. Stappra ható gravitációs erő többszöröseként. (A kísérletet dr. Stapp maradandó sérülés nélkül vészelte át.)

8B-25 Egy 0,75 kg tömegű labdát 1 m magasságból vízszintes padlóra ejtünk. A labda 85 cm magasra pattan viszsza. Mekkora erőimpulzust gyakorol a padló a labdára?

8B-26 Meglepő eredményű demonstrációs kísérlet, hogy a második emeletről egy 5 cm vastagságú habszi-

vacs párnára ejtett tojás nem törik össze. a) Amennyiben a habszivacs párna 6,25 ms alatt állítja meg a ráeső tojást, akkor határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki a párna a 11 m magasról leejtett 0,6 N súlyú tojásra a lassítás ideje alatt. b) Milyen minimális vastagságúra nyomja össze a tojás a párnát? (A kísérlet kipróbálásakor célszerű valakit megkérni, hogy a párnáról majdnem egy méternyire felpattanó tojást kapja el, mert ha ebből a magasságból a puszta Földre esik, akkor biztosan eltörik.)

8B-27 Egy 5 kg tömegű kezdetben nyugalomban lévő testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

8B-28 Az m tömegű pontszerű test v sebességgel mozog a x tengely pozitív irányban. Milyen nagyságú és irányú erőimpulzus hatására változik meg a sebessége úgy, hogy y tengely pozitív irányába mutasson.

8B-29 Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8 \cdot 10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg a) mennyi idő alatt áll meg a golyó, b) milyen mélyen hatol be a fába, c) mennyi munkát végez a fakocka, míg a golyó megáll, d) mennyivel változik a golyó mozgási energiája.

8B-30 A 9 m hosszúságú fonalra kötött 12 N súlyú testet gyors vízszintes lökéssel hozzuk mozgásba, amelynek hatására a fonal a vízszintestől lefelé mért 30°-os szögig tér ki. Mekkora erőimpulzussal hoztuk mozgásba a testet?

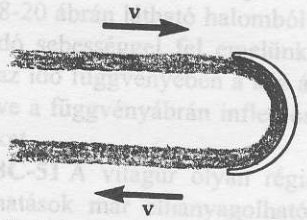
8B-31 A 0,100 kg tömegű 20 m/s sebességgel vízszintesen mozgó baseball labdát úgy ütötte vissza a játékos, hogy ennek hatására az a vízszintessel 30°-os szöget bezáró irányban háromszor nagyobb sebességgel kezdett repülni. A visszaütött labda pontosan az adogató játékos felett szállt el. a) Készítsünk vektorábrát a labda impulzusváltozásának meghatározására. b) Milyen nagyságú és irányú átlagos erő hatott a labdára, ha az ütő és a labda 0,002 s -ig érintkezett.

8.4 Folytonosan változó impulzus.

8A-32 Oldjuk meg újra a 8-8 példát 1,0 s-os időtartam helyett 0,01s időintervallummal.

8A-33 A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízsugár függőleges falba ütközik, s számottevő visszafreccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízsugár a falra? (A víz sűrűsége 10^3 kg/m^3.)

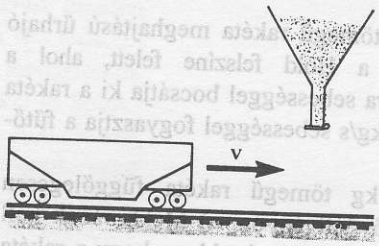
8A-34 Egy nyugvó turbinalapátba vízsugár ütközik. A lapát a vízsugár irányát a 8-17 ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind az ütközés után v. Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységenként becsapódó víz tömege μ.



8-17. ábra
8A-34 feladathoz

8A-35 Merőleges falra 0,50 g tömegű söréteket lőnek ki, másodpercenként 15 sörét éri el a falat és ezek sebessége 250 m/s. a) Mekkora erő hat a falra, ha a söré tek beleragadnak? b) Mekkora ez az erő, ha a sörétek tökéletesen rugalmasan ütközve visszapattannak a falról?

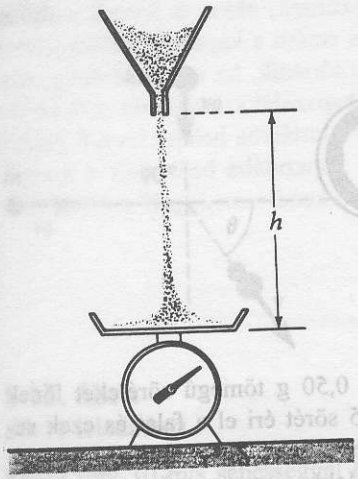
8B-36 Az 5000 kg-os üres pőrekocsi a 8-18 ábrán látható módon súrlódásmentesen gurul át a rögzített helyzetű homokszóró garat alatt. A kocsi 2 m/s sebességgel közeledik a garathoz. Amikor a kocsi a garat alá ér, a annak csapóajtaja kinyílik és állandó intenzitású homokáram hull belőle a kocsira mialatt az teljes hosszában elhalad a garat alatt. Határozzuk meg a megrakott kocsi sebességét, ha összesen 10 000 kg homok hullik rá.



8-18. ábra
8B-36 feladathoz

8B-37 Tételezzük fel, hogy az előző feladatban a kocsit állandó 2 m/s sebességgel mozgatjuk el a garat alatt, és a teljes 10 000 kg tömegű homokmennyiség egyenletesen oszlik el a 10 m hosszú kocsin. Mekkora erő szükséges a kocsi állandó sebességű mozgatásához?

8B-38 A 8-19 ábrán látható elrendezésben egy mérleg tányérjára 2 másodpercen át ólomsörétek hullanak egyenletesen, másodpercenként 1 kg tömegben. A sörétek 5 m/s sebességgel érkeznek a mérlegtányérra és nem pattannak el róla. Ábrázoljuk az idő függvényében, hogy mekkora erőt jelez a mérleg. A görbét a $t = -1$ s időpillanattól kezdve (egy másodperccel az első sörét lehullása előtt) a $t = 3$ s-ig (egy másodperccel az utolsó sörét lehullása utáni) készítsük el. Tüntessük fel a folyamat jellegzetes pontjainál a megfelelő számértékeket is.



8-19. ábra
8B-38 feladathoz

8.5 A rakétamozgás

8A-39 A 10 kg tömegű rakétalövedéket vízszintes irányban indítottak el. Mekkora vízszintes irányú sebességgel mozog a rakéta 3 kg tömegű fűtőanyag elfogyasztása után, ha a hajtóanyag a rakétához képest 1500 m/s sebességgel lép ki a fúvókákon. A légellenállástól tekintsünk el.

8A-40 Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g = 1{,}63$ m/s^2. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

8B-41 Egy 130 000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőállványon. a) Mekkorának kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 kezdeti gyorsulással induljon felfelé? b) Hány kg/s a fűtőanyag fogyasztás ekkor, ha a hajtógázok sebessége 2100 m/s?

További feladatok

8C-42 Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24$ N/s és $B = 1{,}2$ N/s^2. a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna. b) Mennyi idő múlva következik ez be?

8C-43 Egy 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0{,}75$ N/s^2. a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után. b) Mekkora állandó erővel lehetne ugyanennyi idő alatt elérni ezt a sebességet?

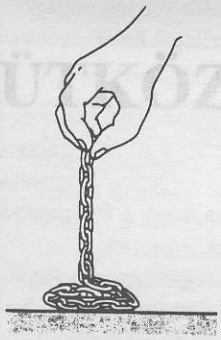
8C-44 Egy 15 kg tömegű test északi irányban 10 m/s sebességgel súrlódásmentesen csúszik egy vízszintes síkon és összeütközik egy 5 kg tömegű északkelet irányból csúszó, 25 m/s sebességű testtel. Ütközés után a két test összeragad. Mekkora sebességgel kell az összeragadt testekről lelökni egy 3 kg tömegű darabot ahhoz, hogy a megmaradó rész 10 m/s végső sebességgel mozogjon egyenletesen észak felé.

8C-45 Egy M tömegű eredetileg nyugalomban lévő test két különböző tömegű részre robban szét. Hányad része jut a kisebbik m tömegű darabra a robbanás során felszabaduló energiának? Ábrázoljuk ezt az energiahányadot m függvényében.

8C-46 A légierő önkéntesek alkalmazásával vizsgálja, hogy az emberi test hogyan tűri a nagy gyorsulásokat. Az önként vállalkozó személyek vízszintes sínpályán mozgó, rakéta hajtású szánokon ülnek. A szánok „vízfékek" segítségével rendkívül gyorsan megállíthatók. A hirtelen megállást úgy hozzák létre, hogy egy szerkezet a sínpálya alatt elhelyezkedő vízzel teli csatornából hirtelen vizet mer a szánkóba. Attól függően, hogy a kísérleti személy szemben vagy háttal ül a lassítási irányhoz képest ezt a folyamatot képiesen „szemgolyó benyomó", ill. „szemgolyó guvasztó" folyamatnak nevezzük. Ifjabb Eli Beeding kapitány néhány század másodpercig 83 g gyorsulást is elviselt anélkül, hogy roszszul lett volna. Tekintsünk egy olyan kísérletet, amikor a szán kezdeti sebessége 28 km/h és 0,005 s-ig 83g lassulás lép fel. a) Határozzuk meg, hogy mekkora átlagos erő hatna ezalatt az idő alatt Beeding kapitányra, akinek súlya 800 N, b) Mekkora sebességgel mozog a szán a fékezési folyamat után? c) Mennyi víz került a szánba a fékezés során, ha a szánkó és a kísérleti személy együttes tömege a fékezés előtt 1000 kg volt?

8C-47 Egy l hosszúságú hajlékony láncot felső végénél fogva függőlegesen tartunk egy asztallap felett úgy, hogy a lánc alsó vége éppen érinti az asztallapot. A lánc egységnyi hosszának tömege μ. Ha a lánc végét elengedjük, akkor az asztalra hulló lánc az eredetileg zérusról indulva egyre nagyobb és nagyobb erőt fejt ki az asztallapra. Az erő abban a pillanatban válik maximálissá, amikor a lánc felső vége éppen az asztalra esik. Bizonyítsuk be, hogy a maximális erő amit a lánc az asztalra gyakoról, éppen háromszorosa a lánc súlyának. (Útmutatás: Gondoljuk meg, hogy a lánc már asztalon fekvő részének súlya mellett mekkora többlet erő szükséges a lánc utolsó Δx hosszúságú részének. Vegyük észre, hogy az utolsó Δx hosszúságú darabka megállása lényegében $\Delta t = \Delta x/v$ időtartam alatt következik be, ahol v az h magasságból szabadon eső test sebessége.)

8C-48 Függőlegesen lógó, m tömegű, hajlékony, l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra. Ábrázoljuk az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra. A $t = 0$ időpont görbe legyen az, amikor a lánc megérinti az asztallapot. A inflexiós pontjai mellé írjuk be a megfelelő erő értékeket m, l és v függvényében. (Útmutatás: Az asztalon fekvő lánc súlya mellett milyen további erő szükséges az asztalt érő láncdarabok megállításához?)



8-20. ábra
8C-48 feladathoz

8C-49 Egy mérlegtányérra h magasságból ólomsörétek hullanak és másodpercenként n számú részecske éri el a tányért. Egy-egy sörét tömege m. A mérleg zérust mutat a sörétek lehullása elött. Mit mutat a mérleg t idővel az első sörét becsapódása után?

8C-50 Egy l hosszúságú m tömegű hajlékony láncot a 8-20 ábrán látható halomból egyik végénél fogva állandó sebességgel fel emelünk függőlegesen. Ábrázoljuk az idő függvényében a kéz által kifejtett erőt, megjelölve a függvényábrán inflexiós pontokhoz tartozó értékeket.

8C-51 A világűr olyan régiójában, ahol a gravitációs hatások már elhanyagolhatóak, az m tömegű űrhajó, üzemanyagával együtt, egy interciarendszerhez viszonyítva nyugalomban van. A rakétamotorokat beindítják, s a hajtóanyag az űrhajóhoz képest v_r állandó sebességgel áramlik ki a fúvókákon. Mekkora a rakéta és a még megmaradó üzemanyag tömege abban időpontban amikor a hajtóanyag-gázokat úgy bocsátja ki a rakéta, hogy sebessége az említett inerciarendszerhez képest éppen zérus.

7A-5 8,26 m/s
7A-7 $2mg$
7A-9 a) 5,42 m/s b) $3mg$
7A-11 $\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$
7B-13 5,79 m/s
7B-15 a) 3,61 m/s b) 1,74 N
7B-17 b) $g\sqrt{3/2}, g$ c) $3mg/2$, sugárirányban befelé
7B-19 4,20 mg
7B-21 mg
7B-23 a) 37,6° b) 36,3 N
7B-25 1,45 m
7B-27 $8d$
7B-29 a) $-3ax^2+b$ b) $\sqrt{b/a}$
c) $\frac{2}{3}\sqrt{b^3/3a}$
7A-31 17,0 m
7B-33 a) 7,67 m/s b) 0,932
7B-35 $1{,}12\times10^5$ J
7C-37 A válasz adott.
7C-39 –1,00 J
7C-41 a) x_o b) $2bx_o$;+x irányban
7C-43 A válasz adott.
7C-45 A válasz adott.
7C-47 A válasz adott.
7C-49 0,344 m
7C-51 a) $0{,}222g$ b) $1{,}52\times10^4$ N
7C-53 a) $0\le x\le 2$ m b) 8 J

VIII. Fejezet

8A-1 1,23 m/s
8A-3 34,3 J
8A-5 10 m/s a szerelvény felé
8A-7 0,400 m/s
8B-9 7,22 m/s; -48,4°
8B-11 $\theta = \text{arctg}\, k$
8B-13 0,91 m/s 51,3° északkeletre
8B-15 13,0 kg·m/s; 202,6° a +x iránytól az óramutató járásával egyező irányba
8B-17 A válasz adott.
8B-19 0,0466
8A-21 900 N, az eredeti sebességgel ellentétesen
8A-23 a) $1{,}20\times10^4$ kg·m/s b) $2{,}40\times10^4$ N
8B-25 6,38 N·s felfelé
8B-27 7,80 m/s
8B-29 a) $4{,}37\times10^{-4}$ s b) 0,153 m
c) $1{,}22\times10^{-3}$ J d) $1{,}23\times10^3$ J
8B-31 a) 7,80 kg·m/s; 22,6° a horizont fölött
b) 3900 N; 22,6° a horizont fölött
8A-33 200 N
8A-35 a) 1,88 N b) 3,75 N
8B-37 $4{,}00\times10^3$ N
8A-39 535 m/s
8B-41 a) $3{,}48\times10^6$ N b) 1659 kg/s
8C-43 a) 338 m/s b) 56,3 N
8C-45 a) $(M-m)/M$
8C-47 A válasz adott.
8C-49 $nmg\left(t+\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$
8C-51 $0{,}368M$

IX. Fejezet

9A-1 a) -0,167 m/s b) 0,333 m/s
9A-3 a) 42,9 m/s, 37° délnyugatra b) 7720 J
9A-5 Nem; 2,80 J elveszett
9B-7 a) $\sqrt{1{,}41}$ m/s b) 57,4 m/s c) 97,6%
9B-9 A válasz adott.
9B-11 1,81 m/s, 2,27 m/s
9A-13 0,200 m
9A-15 $(\frac{7}{13}m, \frac{1}{13}m)$
9B-17 5,35 m
9A-19 a) 30 m/s, vízszintesen b) 21,2 m/s, 45° a vízszintes alatt
9B-21 A válasz adott.
9B-23 A válasz adott.
9B-25 7,28 m/s
9B-27 a) 3,00 m/s b) 3,00 m/s
c) 608 J és 824 J d) 0 és 216 J
9B-29 216 J
9C-31 a) $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$ b) ugyanaz mint a)
9C-33 $4M\sqrt{gl/m}$
9C-35 a) 65,2 m/s b) 0,458
9C-37 $\sqrt{1-d/h}$
9C-39 (1,03 m, 0,88 m)
9C-41 A válasz adott.
9C-43 $v_A = -0{,}667$ m/s; $v_B = 0{,}800$ m/s
9C-45 2,21 m/s
9C-47 a) $\frac{3}{8}v$ b) $\frac{25}{32}\mu v$
9C-49 a) $\frac{10}{30}v$ b) $\frac{11}{30}v$ (Ez a 8. fejezet 6. kérdésére adható mennyiségi válasz)

X. Fejezet

10A-1 a) 1,50 m b) 24,0 N·m
10A-3 a) $2bF$ b) $2bF$
10A-5 A válasz adott.
10A-7 $l/2$
10B-9 $R/12$
10B-11 $\frac{5}{16}mgl$
10A-13 2,06 m

ÜTKÖZÉSEK

A játék népszerű neve természet
és milliárd és milliárd és milliárd
részecske vég nélkül játssza az egészet
ami billiárd és billiárd és billiárd

PIET HEIN
[„Atomyriades", Grooks (1966)]

9.1 Bevezetés

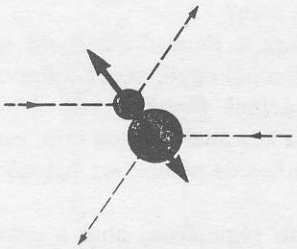
Az ütközések nagy szerepet játszanak mindennapi életünkben. Az *ütközés* fogalmába mindazok a gyakori események beletartoznak, amikor két összeütköző test között rövid, de intenzív kölcsönhatás lép fel. Sarkunk minden lépéskor ütközik a padlóval, vagy akármilyen finoman is tesszük le a teáscsészét a csészealjra, a csésze hirtelen gyorsulással koccan le, a labdajátékok során a labda erőteljesen ütközik a különböző ütőkkel, rakettekkel és botokkal stb. A repülő űrhajók összekapcsolása is ütközési folyamat. A fizikusok nagy gyorsítókat hoznak létre, hogy elektronok, protonok, neutronok, vagy az α-részecskék áramát ütköztessék atomokkal, ill. atommagokkal. Az ütközési folyamat elemzése során fontos adatokhoz juthatunk a részecskéknek a belső felépítésére és tulajdonságaira vonatkozóan.

Az ütközés során nem szükséges, hogy a részecskék fizikailag is érintkezzenek (9-1 ábra). Érintkezésről lényegében csak makroszkopikus értelemben beszélhetünk, mikroszkopikusan ennek a kifejezésnek tulajdonképpen nincs értelme, hiszen a kölcsönhatás ekkor végső soron az anyagi felületek elektronjai közötti elektrosztatikus taszításra vezethető vissza, s az elektronok közötti távolság ebben az esetben nem definiálható pontosan. Két töltött részecske – pl. egy proton és egy α-részecske (egy hélium atommag) – esetében a pozitív töltések már akkor erős elektrosztatikus taszító erőt fejtenek ki, amikor a két részecske még nem is érintkezik egymással. Ezt a folyamatot *szóródásnak* nevezzük.

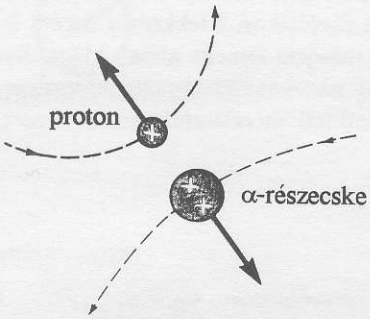
Az ütközések során általában bonyolult és időben gyorsan változó erők lépnek fel, és a legtöbb esetben ezeket az erőket nem is írjuk le pontosan. Az ütközési folyamatok elemzésének legfontosabb sajátossága az, hogy anélkül jutunk ismeretekhez a folyamatról, hogy ismernénk a folyamatban szereplő erőket. A folyamat leírásához csupán az impulzus- és energiamegmaradás törvényét használjuk fel.

Mit is jelent tehát az ütközés? A legfontosabb ismérvei a következők:

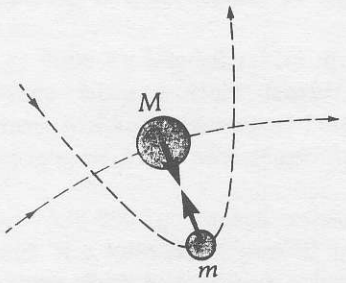
1) Az ütköző testek közötti kölcsönhatás hirtelen lép fel és meghatározható az a Δt időintervallum, amely alatt ez végbemegy. A Δt időtartam előtt és után a testek között nem lép fel kölcsönhatás.



a) A makroszkopikus testek ütközése során a testek felülete érintkezik



b) A pozitív töltésű részecskék már akkor ellökik egymást, amikor még nem is érintkeznek



c) A tömegvonzás miatt majdnem összeütköző csillagok

9-1 ábra
Ütközések és a fellépő erő-ellenerő párok

2) A Δt ütközés következtében fellépő kölcsönhatási erők olyan nagyok, hogy a rendszerre ható minden egyéb külső erő elhanyagolható. Ily módon csak a rendszer tagjai között fellépő belső erőkkel kell foglalkoznunk.

Az ütközési folyamat gyorsasága, azaz a Δt intervallum hosszúságának megítélése a folyamattól függő. Atommagok ütközésekor ez 10^{-23} s, míg galaxisok kölcsönhatása során akár több millió év is lehet. Az egyetlen kritérium az, hogy a kölcsönhatás a Δt időtartamra korlátozódjék és hogy a folyamatra jellemző egyéb időintervallumok ennél sokkal hosszabbak legyenek.

Ebben a fejezetben még egy fontos fogalmat, a *tömegközéppont* fogalmát is definiáljuk. Ez a fogalom rendkívüli módon megkönnyíti a térben bonyolult mozgással „imbolygó" kiterjedt testek elemzését és az egymásra ható részecskék rendszere mozgásának leírását.

9.2 Rugalmas és rugalmatlan ütközések

Az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak, ill. rugalmatlannak nevezzük attól függően, hogy az ütközés során a mozgási energia megmarad, vagy nem. A **rugalmas** ütközés esetén a vizsgált részecskerendszer tagjainak összes kinetikus energiája az ütközés előtt és után megegyező. (Az ilyen ütközést gyakran *tökéletesen rugalmasnak* is nevezzük.) Ahhoz, hogy egy ütközés „rugalmas" legyen, szükséges, hogy az ütközés során működő belső erők konzervatívak legyenek, azaz az ütközési folyamatban potenciális energiává alakuló belső energia tökéletesen, visszaalakítható legyen kinetikus energiává. Ezzel szemben amikor a mozgási energia egy része „elvész", azaz hővé (termikus energiává), ill. a maradandó deformáció során tárolódó energiává alakul, akkor az ütközés **rugalmatlan**. Rugalmatlannak nevezzük az olyan kölcsönhatásokat is amelyek pl. a folyamat során végbemenő robbanás miatt kinetikus energia növekedéssel járnak. Végül azokat az ütközéseket, amelyek lezajlása után az összeütköző testek együtt maradva közösen mozognak tovább, **tökéletesen rugalmatlannak** nevezzük. Vegyük észre, hogy a *tökéletesen rugalmas* és *tökéletesen rugalmatlan* határesetek között végtelen sok egyéb rugalmatlan ütközés is létrejöhet.

A makroszkopikus világban tökéletesen rugalmas ütközés nem jöhet létre, a mozgási energia egy része mindig elvész, átalakul hang, vagy belső rezgések, ill. maradandó deformáció energiájává. Egyes esetekben azonban, mint pl. a billiárd golyók, a hoki korongok vagy a légpárnás sínen csúszó rugós kiskocsik ütközése, a folyamat tökéletesen rugalmasnak tekinthető és az elvesző mozgási energia jó közelítéssel elhanyagolható. Az elemi részecskék, atomok, vagy atommagok ütközési folyamatai általában tökéletesen rugalmasak. Amennyiben azonban az ütköző részecskék szerkezete megváltozik, vagy új elemi részecskék keletkeznek a folyamatban, akkor ezek az ütközések is rugalmatlannak tekintendők (lásd. a 41. és 45. fejezetet.).

A rugalmas ütközésekben mind a mozgási energia ($\Sigma K_0 = \Sigma K$), mind pedig az összimpulzus megmarad ($\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$). Rugalmatlan ütközés esetén azonban csak az utóbbi ($\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$) törvénnyel számolhatunk. Ezt mutatják a következő példák.

9-1 PÉLDA

Rugalmas ütközése egy dimenzióban. Az m és 3 m tömegű testek a 9-2 ábrán látható módon az x tengelyen mozognak egymással szemben azonos v_0 sebességgel. Határozzuk meg a testek végső sebességét a frontális ütközés után.

MEGOLDÁS

A 9-2 ábrán látható vázlaton a részecskéket *A*-val, ill. *B*-vel, végsebességüket pedig rendre v_A–val ill. v_B-vel jelöltük. Fizikai érzékünk azt sugallja, hogy az ütközés után a kisebbik test mozgásának irányát megváltoztatva jobb felé mozog, a nagyobbik test mozgás irányát illetően azonban bizonytalanok vagyunk. Tegyük fel, hogy az ütközés után ez a test is jobbfelé mozog, amennyiben ugyanis ez mégsem lenne igaz, akkor az eredményben megjelenő negatív előjel ezt úgyis megmutatja. A tengely pozitív irányát, amint azt a kis tengelykereszt is mutatja ennek megfelelően szintén jobbfelé vettük fel. Ezután az irányokat pozitív, ill. negatív előjelekkel figyelembe véve felírhatjuk a folyamatra az impulzusmegmaradás tételét:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$

$$(3m)v_0 + (m)(-v_0) = (3m)v_A + (m)v_B \qquad \textbf{(9-1)}$$

$$2v_0 = 3v_A + v_B$$

Mivel az ütközés *tökéletesen rugalmas,* a mozgási energia is megmarad:

$$\Sigma K_0 = \Sigma K$$

$$\frac{1}{2}(3m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(3m)v_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

vagyis $$4v_0^2 = 3v_A^2 + v_B^2 \qquad \textbf{(9-2)}$$

A két megmaradási törvény a v_A és v_B ismeretlenekre két egyenletet szolgáltat. A (9-1) egyenletből

$$v_B^2 = 4v_0^2 - 12v_0v_A + 9v_A^2$$

adódik. Ezt behelyettesítve a (9-2) egyenletbe a

$$-12v_0v_A + 12v_A^2 = 0$$

egyenlethez jutunk. Innen $v_A = v_0$, ill. $v_A = 0$. A két eredmény között a következő meggondolással választhatunk. Ha $v_A = v_0$, akkor a (9-1) egyenlet szerint

$$2v_0 = 3v_0 + v_B$$

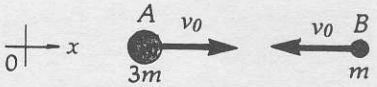
vagyis $$v_B = -v_0$$

A kapott eredmény szerint az ütközés után mindkét test ugyanakkora sebességgel mozogna tovább, mint ütközés előtt. Ez azonban azt jelentené, hogy bár az eredmény eleget tesz mind az impulzus, mind a mozgási energia megmaradásának, ilyen mozgás csak akkor jöhetne létre, ha a testek kölcsönhatás, azaz ütközés nélkül áthatolnának egymáson. A másik megoldást kell tehát elfogadnunk, amely szerint

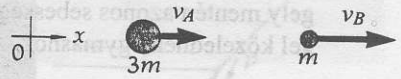
$$v_A = 0$$

és a (9-1) egyenletből $$v_B = 2v_0$$

A megoldás szerint a 3m tömegű test az ütközés következtében megáll, míg az m tömegű test mozgásának iránya ellentétesre fordul, sebessége pedig megkétszereződik.



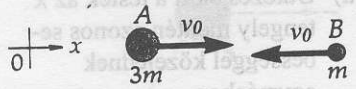
a) Ütközés előtt a testek az x tengely mentén azonos sebességgel közelednek egymáshoz



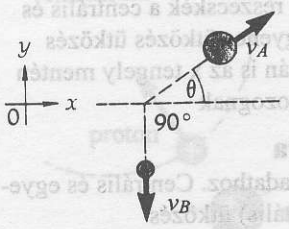
b) A részecskék a centrális és egyenes ütközés ütközés után is az x tengely mentén mozognak

9-2 ábra

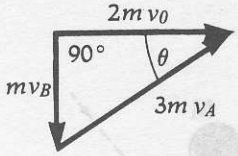
A 9-1 feladathoz. Centrális és egyenes (frontális) ütközés



a) Ütközés előtt a testek az x tengely mentén azonos sebességgel közelednek egymáshoz.



b) A tökéletesen rugalmas, pillanatszerű ütközés után a testek az xy síkban mozognak. Ebben a példában a B test eredeti irányára merőlegesen mozdul el.



c) A vektorábra a $\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$ impulzusmegmaradási törvényt mutatja be.

9-3 Ábra
A 9-2 példához. „Pillanatszerű" ütközés

9-2 PÉLDA

Tegyük fel, hogy az előző feladatban az ütközés pillanatszerűen, de két dimenzióban zajlik le úgy, hogy a kisebbik test mozgásának iránya az eredeti irányra merőleges lesz (9-3 ábra). a) Határozzuk meg a testek ütközés utáni végső sebességét. b) Mekkora θ szögben szóródik a nagyobbik test?

MEGOLDÁS

a) A v_A, v_B és θ ismeretlenek a megmaradási törvényekből adódó $\Sigma K_0 = \Sigma K$, valamint $\Sigma p_{0x} = \Sigma p_x$ és $\Sigma p_{0y} = \Sigma p_y$ egyenletrendszerből határozhatók meg. E helyett azonban most egy más módszert mutatunk be, ami az impulzusvektorokat használja és az adott esetben egyszerűbben vezet a megoldáshoz. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletet a kétdimenziós esetben nem bontjuk összetevőkre, hanem egyetlen **vektor**egyenletként írjuk fel.

$$\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$$

$$3mv_0 - mv_0 = 3mv_A + mv_B \qquad \text{(9-3)}$$

vagyis $$2mv_0 = 3mv_A + mv_B$$

Ez a **vektor**egyenlet az impulzus megmaradásának az elvét fejezi ki, vagyis a rendszer impulzus-vektora az ütközés előtt és az ütközés után ugyanakkora. Mivel a B test eredeti irányához képest 90°-os szögben mozdul el, a két test impulzusösszegét megadó vektorháromszög derékszögű (9-3 ábra). A Pitagorász tétel szerint:

$$(3v_A)^2 = (2v_0)^2 + v_B^2 \qquad \text{(9-4)}$$

vagyis $$4v_0^2 = 9v_A^2 - v_B^2$$

Ez az egyenlet két ismeretlent (v_A, és v_B) tartalmaz. További egyenlethez jutunk a mozgási energia megmaradására vonatkozó

$$\Sigma K_0 = \Sigma K$$

$$\frac{1}{2}(3m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(3m)v_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad \text{(9-5)}$$

vagyis $$4v_0^2 = 3v_A^2 + v_B^2$$

összefüggés felírásával. A (9-4) és (9-5) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0 \quad \text{és} \quad v_B = \sqrt{2}v_0$$

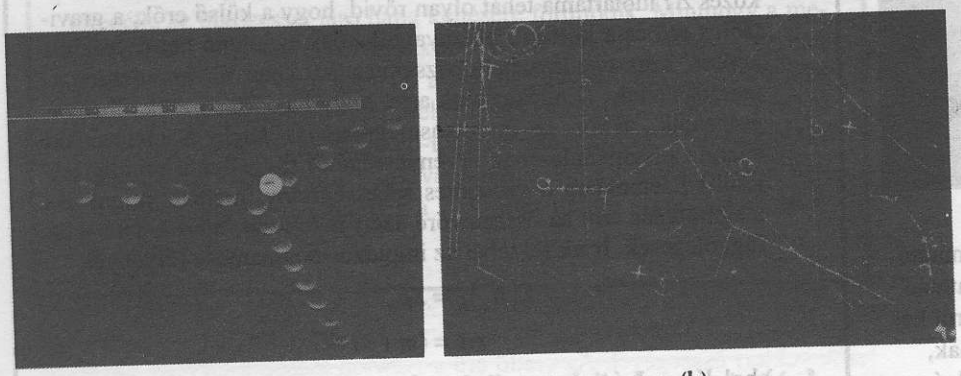
b) A θ szög a vektorábrából határozható meg:

$$\sin\theta = \left(\frac{v_B}{3v_A}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}v_0}{3\sqrt{\frac{2}{3}}v_0}\right) = 0{,}577$$

$$\theta = \arcsin(0{,}577) = 35{,}3°$$

A példa megoldását nagyban egyszerűsítette, hogy az impulzusvektorokra vonatkozó vektordiagram derékszögű háromszög volt. A vektordiagram alapján azonban akkor is hasznos összefüggések nyerhetők, ha nem derékszögű háromszögről van szó. Az ehhez szükséges matematikai ismereteket a D függelék tartalmazza.

Igen érdekes eredményt kapunk, ha azt a tökéletesen rugalmas ütközést vizsgáljuk, amikor egy test *vele egyenlő tömegű nyugvó* testbe ütközik. Megállapítható, hogy ekkor a két test sebességének iránya az ütközés után merőleges lesz egymásra (lásd a 9-4 ábrát és a 9C-41 feladatot).

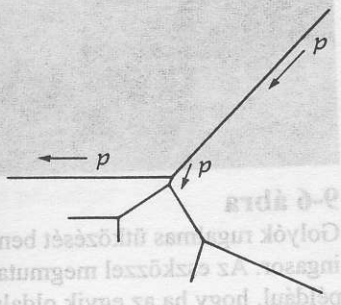


(a) (b)

9-4 ábra

a) *Egyenlő tömegű billiárd golyók ütközéséről készült stroboszkopikus felvétel.* Az egyik golyó kezdetben nyugalomban volt, ezért kiinduló helyzetében fehérebb a többi golyó képénél, hiszen a felvétel során ebben a helyzetben több expozició is történt. Ha az ütközés tökéletesen rugalmas és súrlódásmentes, akkor elméletileg a golyóknak egymásra merőlegesen kellene elmozdulniok. Amennyiben azonban a golyók forognak, vagy jelentősebb a súrlódás, akkor a szög kissé eltérhet az elméleti értéktől. Ezt mutatja a felvétel is, ahol a golyók elmozdulása 87°-os szöget zár be.

b) *Protonok ütközése folyékony hidrogénes buborékkamrában.* A közölt egyetlen felvétel alapján még nem következtethetünk biztonsággal arra, hogy a részecskék merőlegesen pattantak el egymástól, mert nem biztos, hogy a felvétel síkjában mozogtak. Mindazonáltal a stroboszkopikus felvételek alapján igazolható, hogy ezek a részecskék mindig merőlegesen pattannak el egymástól. (Nagy energiájú ütközésekben a relativisztikus effektusok miatt az elpattanás szöge valamivel kisebb mint 90°.)



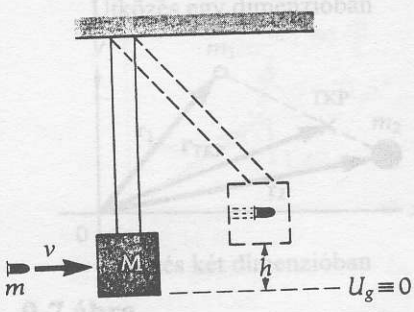
A *buborékkamra* nagynyomású, túlhűtött folyadékot (gyakran hidrogént) tartalmaz. A folyadékban mozgó töltött részecskék pályája mentén ion füzér marad vissza. Ezek az ionok a magjai azoknak a buborékoknak, amelyek a nyomás hirtelen csökkentésekor a folyadékban keletkeznek. A buborékok néhány századmásodperc alatt fényképezhető méretűre duzzadnak. Miután a részecske nyomát lefényképeztük, a nyomás megnövelésével a buborékok feloldhatók, s a kamra a másodperc tört része alatt készen áll egy újabb részecske útjának jelzésére.

9-3 PÉLDA

A *ballisztikus inga* gyorsan mozgó kicsi testek, pl. pisztolygolyó sebességének meghatározására használható (9-5 ábra). A bifiláris (kétfonalas) felfüggesztés megakadályozza, hogy az M tömegű puha fából készült ingatest lengés közben elforduljon. Lőjünk bele a függőlegesen lógó ingatestbe egy vízszintesen haladó, m tömegű pisztolygolyót. Ha az ingatest elég vastag fából készült, akkor a golyó nem üti át, hanem beleágyazódik. Az ingatest-golyó rendszer az ütközés hatására kilendül és h maximális magasságba emelkedik. a) Határozzuk meg a golyó kezdeti sebességét, b) Határozzuk meg, hogy a golyó kezdeti mozgási energiájának hányad része alakul át nem mechanikai energiává, azaz az ingatest maradandó deformációjához szükséges energiává, illetve hővé, vagy egyéb un. „disszipatív" energiává.

MEGOLDÁS

a) Az ütközés *tökéletesen rugalmatlan,* hiszen a két test, az ütközés után közös sebességgel mozog. Megkönnyíti a probléma elemzését, ha három részre bontjuk a folyamatot az ütközés előtti, az ütközés során lezajló és az ütközés utáni részre.



9-5 ábra

A 9-3 példához. A ballisztikus inga.



9-6 ábra
Golyók rugalmas ütközését bemutató ingasor. Az eszközzel megmutatható például, hogy ha az egyik oldalról két golyó ütközik az álló golyósornak, akkor a másik oldalon is két golyó lendül ki. [A helyzet azonban kissé bonyolultabb, mint amilyennek első látásra tűnik. Attól függően, hogy az indítás pillanatában a golyók érintkeztek-e egymással vagy nem, néhány további golyó is csekély sebességgel elmozdulhat az ütközés után. Az impulzusmegmaradás törvénye természetesen mindenképpen érvényes.
Részletesebben: Seville Chapman, „Misconception concerning the dynamics of the impact ball apparatus." (Téveszmék az ütköző golyósor dinamikájával kapcsolatban.) *Am. J. Phys.* **28.** 705 (1960) és Jean C. Piquette and Mu-Shiang Wu, „Comments on 'Simple explanation of a well-known collision experiment'" (Megjegyzések az 'Egy jól ismert ütközési kísérlet egyszerű magyarázata' c. cikkhez) *Am. J. Phys.* **52.** 83 (1984).]

Ütközés előtt a rendszer teljes mozgási energiája a pisztolygolyó $1/2mv^2$ nagyságú mozgási energiájával egyenlő.

Az ütközés során a mechanikai energia megmaradása nem érvényes. A golyó azonban olyan rövid idő alatt ágyazódik be az ingatestbe, hogy az nem lényegesen mozdul el a helyéről. Az ütközés Δt időtartama tehát olyan rövid, hogy a külső erők, a gravitációs erő és a kötélerő elhanyagolhatóak a fellépő belső erőkhöz képest, azaz alkalmazható vízszintes irányban az impulzusmegmaradás tétele. (Emlékezzünk arra, hogy ha a külső erők elhanyagolhatóak, akkor az impulzusmegmaradás tétele a mechanikai energia megmaradásának érvényességétől függetlenül mindig teljesül.) Esetünkben a vízszintes sebességirány miatt az impulzusmegmaradás erre az összetevőre azért is teljesül, mert a ható erők függőlegesek. Írjuk fel tehát az impulzusmegmaradás törvényét:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$
$$mv = (m+M)V$$

ahol V a golyó-ingatest rendszer sebessége közvetlenül az ütközés után, azaz amikor az ingatest még nem mozdult el lényegesen a helyéről. Az egyenletből a V sebességre

$$V = \left(\frac{m}{m+M}\right)v \qquad \text{adódik.} \qquad \textbf{(9-6)}$$

Ütközés után a golyó-inga rendszer szabadon kilendül a maximális h magasságig. Ezen a mozgásszakaszon csak konzervatív erők működnek, amelyek az ingatest sebességét helyzeti energiává alakítják. Válasszuk az U_g helyzeti energia zérus szintjét az inga legmélyebb helyzetében és alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$E_0 = E$$
$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$
$$0 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh + 0$$

Behelyettesítve a (9-6) egyenletből kapott V sebesség kifejezését a v sebességre

$$v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gh} \qquad \text{adódik.}$$

Vegyük észre, az ütközés folyamatában az összimpulzus megmaradt, a mechanikai energia azonban nem, míg az ütközés utáni kilendülés során éppen fordítva, a mechanikai energia maradt meg, az összimpulzus azonban változott.

b) Az ütközés során a golyó-ingatest rendszer mechanikai energiájának $\Delta E/E_0$ relatív változása az

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{K - K_0}{K_0} = \frac{K}{K_0} - 1 = \frac{1/2(m+M)V^2}{1/2mv^2} - 1$$

összefüggéssel adható meg. Behelyettesítve ide a V sebességre kapott $(m/(m+M))v$ értéket, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1/2(m+M)\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)v\right]^2}{1/2mv^2} - 1 = \frac{m}{m+M} - 1 = \frac{m}{m+M} - \frac{m+M}{m+M}$$
$$= -\left(\frac{M}{m+M}\right)$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a rendszer mechanikai energiája csökken. Tipikus esetben például az $m = 4$ g és $M = 2$ kg adatok felvételével az adódik, hogy a kezdeti mozgási energiának 99,8%-a nem mechanikai energiává alakul át a súrlódás, a fa rostjainak eltávolodása, valamint a golyó deformálódása következtében. Az energia kicsiny töredéke az ütközéssel járó hang keltésére fordítódik. Minthogy a mechanikai energia egy része az ütközés során „elvész", a golyó kezdeti mozgási energiája nem egyenlő a golyó-ingatest rendszer potenciális energiájának maximális értékével. Másrészt azonban a golyó kezdeti impulzusa megegyezik a golyó-ingatest rendszernek közvetlenül az ütközés után mérhető impulzusával, hiszen sem a gravitációs erő, sem a kötélerő nem változtatja meg a vízszintes irányú impulzust az ütközés során.

9.3 A tömegközéppont és a tömegközéppont tétel

Az ütközési folyamat elemzése sokkal egyszerűbbé válik, ha bevezetjük a *tömegközéppont* fogalmát. Az (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) ...stb. helyeken található rendre m_1, m_2, m_3 ... stb tömegű pontszerű testekből álló pontrendszer[1] **tömegközéppontjának** (TKP) helykoordinátái definíció szerint a következők:

A tömegközéppont (TKP) helye

$$x_{TKP} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\Sigma m_k x_k}{\Sigma m_k}$$

$$y_{TKP} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\Sigma m_k y_k}{\Sigma m_k}$$

$$z_{TKP} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\Sigma m_k z_k}{\Sigma m_k}$$

A tömegközéppont helyét tehát az egyes m_k tömegek *helykoordinátáinak a tömegekkel súlyozott átlaga* adja meg. A tömegközéppont helyét definiáló egyenletek vektoriálisan tömörebben is összefoglalhatók:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\Sigma m_k \mathbf{r}_k}{M} \qquad (9\text{-}8)$$

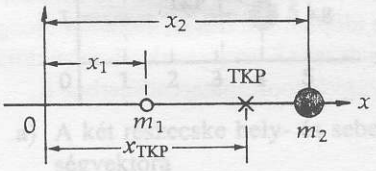
ahol a nevezőben a rendszer teljes $\Sigma m_k = M$ tömege áll. A 9-7 ábra két pontból álló rendszer esetén mutatja be a tömegközéppont meghatározásának módját. Ekkor

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(két részecskére)} \qquad (9\text{-}9)$$

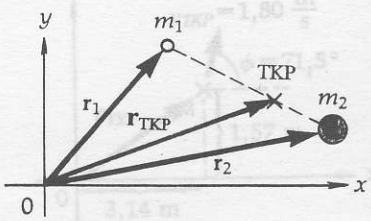
Két tömegpont esetén a tömegközéppont mindig a részecskéket összekötő egyenesen a nagyobbik tömeghez közelebb helyezkedik el. A rajzos vázlatokon a tömegközéppontot kicsiny kereszttel és a TKP betűkkel jelöljük.

A tömegközéppont sebességét a (9-8) definíciós egyenlet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$v_{TKP} = \frac{d\mathbf{r}_{TKP}}{dt}$$



Ütközés egy dimenzióban



Ütközés két dimenzióban

9-7 ábra
Két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontja (TKP)

[1] A kiterjedt testek tömegközéppontjának meghatározásával a következő fejezetben foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a tömegközéppont fogalmának bevezetésével a kiterjedt testeknek a külső erők hatására végbemenő haladó és forgó mozgása egyszerűbben írható le.

A tömegközéppont $\mathbf{v}_{TKP}$ sebessége

$$\mathbf{v}_{TKP} = \frac{\Sigma m_k \mathbf{v}_k}{M} \tag{9-10}$$

Az összefüggés átrendezésével a rendszer teljes **P** impulzusa az alábbi alakban írható fel:

A részecskerendszer **P** impulzusa

$$\Sigma m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{P} = M\mathbf{v}_{TKP} \tag{9-11}$$

A 9-10 egyenletet idő szerint deriválva megkapjuk a tömegközéppont $a_{TKP} = dv_{TKP}/dt$ gyorsulását:

A tömegközéppont $\mathbf{a}_{TKP}$ gyorsulása

$$\mathbf{a}_{TKP} = \frac{\Sigma m_k \mathbf{a}_k}{M} \tag{9-12}$$

A számlálóban levő összeg kifejtése definíció szerint $\Sigma m_k \mathbf{a}_k = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 \ldots$. Itt az első $m_1\mathbf{a}_1$ tag megegyezik az m_1 tömegű részecskére ható erők vektori összegével. Az eredő erő a Newton második törvény következtében természetesen mind az m_1 tömegű részecskére ható $\Sigma(\mathbf{F}_1)_k$ külső erők összegét, mind pedig a rendszer többi tagjaitól származó $\Sigma(\mathbf{F}_1)_b$ belső erők összegét magában foglalja, azaz

$$\Sigma(\mathbf{F}_1)_k + \Sigma(\mathbf{F}_1)_b = m_1\mathbf{a}_1$$

Hasonlóképpen írhatók fel a mozgásegyenletek a rendszer többi tagjára is. a mozgásegyenletek összegezésével pedig a

$$\Sigma(\mathbf{F}_i)_k + \Sigma(\mathbf{F}_i)_b = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \tag{9-13}$$

összefüggéshez jutunk. Vegyük észre továbbá, hogy minden belső erőhöz, amit egyik részecske kifejt a másikra, tartozik egy vele egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő, amit a második részecske fejt ki az elsőre. A belső erők mindig erő-ellenerő párokat alkotnak. *Az összes ilyen erő-ellenerő pár vektori összegére tehát zérus adódik eredményül, azaz* $\Sigma(\mathbf{F}_i)_b = 0$. Ennek megfelelően a (9-13) egyenlet a

$$\Sigma(\mathbf{F}_i)_k = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

alakra egyszerűsödik. Az egyenlet jobb oldalán azonban éppen $M\mathbf{a}_{TKP}$ áll. Fontos következtetésre jutottunk; *A tömegközéppont úgy mozog mintha benne a rendszer teljes* $M = \Sigma m_i$ *tömege egyesítve lenne és rá a külső erők* $\Sigma(\mathbf{F}_i)_k = \Sigma(\mathbf{F})_k$ *vektori összege hatna.*

Newton második törvényének pontrendszerre megfogalmazott alakja

$$\Sigma\mathbf{F}_k = M\mathbf{a}_{TKP} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{9-14}$$

A kapott egyszerű eredmény lényegében a Newton harmadik törvény következménye. Mivel a belső erők mind erő – ellenerő párok és összegük zérus, ha *a pontrendszer tömegközéppontjának mozgását akarjuk leírni, elegendő csak a rendszerre ható külső erőket figyelembe venni.*

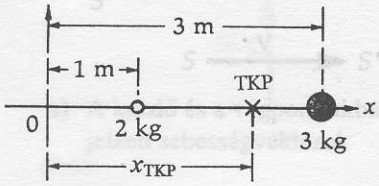
Ebben a fejezetben részecskerendszerek ütközésével foglalkozunk, s megállapítottuk, hogy az ütközések esetén a rendszer zártnak tekinthető, vagyis a külső erők hatása elhanyagolható[2]. Ha azonban $\Sigma(\mathbf{F})_k = 0$, akkor $\mathbf{a}_{TKP}$ is zérus. Zárt rendszer tömegközéppontja tehát nyugalomban marad, vagy

[2] A következő fejezetben megvizsgáljuk a külső erők hatását is.

egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. A zárt rendszerre tehát érvényes az impulzus megmaradásának tétele.

9-4 PÉLDA

Egy egyenes mentén az $x_1 = 1$ m pontban 2 kg, az $x_2 = 3$ m pontban pedig 3 kg tömegű test helyezkedik el (9-8 ábra). Hol van a rendszer tömegközéppontja?



9-8 ábra
A 9-4 példához

MEGOLDÁS

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2\,\text{kg})(1\,\text{m}) + (3\,\text{kg})(3\,\text{m})}{2\,\text{kg} + 3\,\text{kg}} = \frac{11\,\text{kgm}}{5\,\text{kg}} = 2{,}2\,\text{m}$$

9-5 PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi pontrendszer tömegközéppontját.

$m_1 = 2$ kg az (1 m , 2 m) helyen

$m_2 = 3$ kg a (3 m , 2 m) helyen

$m_3 = 4$ kg a (-1 m , -4 m) helyen

MEGOLDÁS

Az x összetevő:

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{TKP} = \frac{(2\,\text{kg})(1\,\text{m}) + (3\,\text{kg})(3\,\text{m}) + (4\,\text{kg})(-1\,\text{m})}{2\,\text{kg} + 3\,\text{kg} + 4\,\text{kg}}$$

$$x_{TKP} = 0{,}778\,\text{m}$$

Az y összetevő:

$$y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{TKP} = \frac{(2\,\text{kg})(2\,\text{m}) + (3\,\text{kg})(2\,\text{m}) + (4\,\text{kg})(-4\,\text{m})}{2\,\text{kg} + 3\,\text{kg} + 4\,\text{kg}}$$

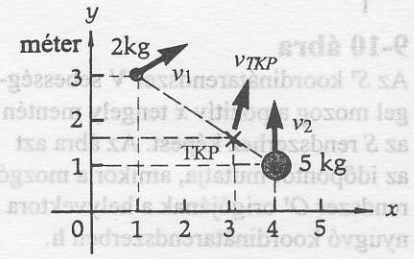
$$y_{TKP} = -0{,}667\,\text{m}$$

Így a tömegközéppont a (0,778 m, -0,667 m) pontban helyezkedik el.

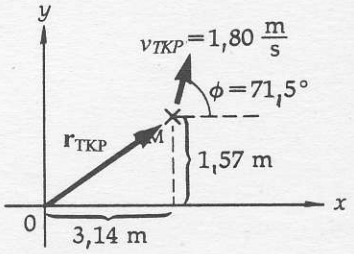
9-6 PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi táblázatban megadott adatokkal jellemzett két részecskéből álló rendszer tömegközéppontjának hely- és sebességvektorát (9-9 ábra). (Adjuk meg a vektorok nagyságát és irányát is.)

tömeg	hely	sebesség
$m_1 = 2$ kg	(1 m, 3 m)	$v_1 = (2\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{x}} + (1\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$
$m_2 = 5$ kg	(4 m, 1 m)	$v_2 = (2\ \text{m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$



a) A két részecske hely- és sebességvektora



b) A tömegközéppont hely- és sebességvektora

9-9 ábra
A 9-6 példához

MEGOLDÁS

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2\,\text{kg})[(1\,\text{m})\hat{\mathbf{x}} + (3\,\text{m})\hat{\mathbf{y}}] + (5\,\text{kg})[(4\,\text{m})\hat{\mathbf{x}} + (1\,\text{m})\hat{\mathbf{y}}]}{2\,\text{kg} + 5\,\text{kg}}$$

$$= \frac{(2\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}} + 20\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}})\,\text{kgm}}{7\,\text{kg}} = \frac{(22\hat{\mathbf{x}} + 11\hat{\mathbf{y}})\,\text{kgm}}{7\,\text{kg}}$$

$$= (3{,}14\,\text{m})\hat{\mathbf{x}} + (1{,}57)\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{v}_{TKP} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(2\,\text{kg})\left[(2\frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{\mathbf{x}} + (1\frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{\mathbf{y}}\right] + (5\,\text{kg})\left[(0)\hat{\mathbf{x}} + (2\frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{\mathbf{y}}\right]}{2\,\text{kg} + 5\,\text{kg}}$$

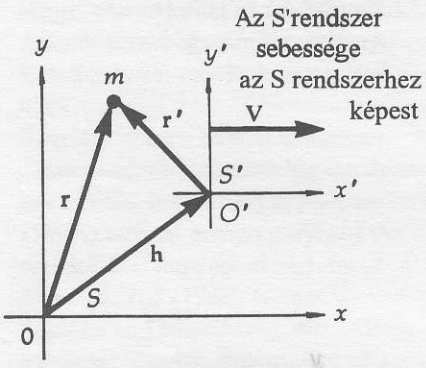
$$= \frac{(4\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{y}})\frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{7\text{kg}} = (0{,}571\hat{\mathbf{x}} + 1{,}71\hat{\mathbf{y}})\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A sebességvektor nagysága és iránya:

$$v_{TKP} = \sqrt{(0{,}571)^2 + (1{,}71)^2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}80\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{tg}\,\phi = \left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \left(\frac{1{,}71\,\text{m/s}}{0{,}571\,\text{m/s}}\right)$$

ϕ = arc tg(2,99) = 71,5° (amint az ábra is mutatja.)



9-10 ábra
Az *S'* koordinátarendszer **V** sebességgel mozog a pozitív *x* tengely mentén az *S* rendszerhez képest. Az ábra azt az időpontot mutatja, amikor a mozgó rendszer *O'* origójának a helyvektora a nyugvó koordinátarendszerben **h**.

9.4 A relatív sebességek meghatározása geometriai módszerrel

Tekintsünk egy *m* tömegű tömegpontot, amely az *S* inerciarendszerben az **r** helyen van és *v* sebességgel mozog. Vegyünk fel ezután egy másik *S'* inerciarendszert, amely az előzőhöz képest **V** sebességgel mozog (9-10 ábra.). (Az egyszerűség kedvéért a két koordinátarendszer *y* és *y'*, ill. *x* és *x'* tengelye legyen párhuzamos és az *S'* rendszer mozogjon az *S* rendszer pozitív *x* tengelye mentén.) Az ábrán mutatott időpontban az *S'* rendszer *O'* origója az *S* rendszer **h** helyvektorú pontjában van és $V = d\mathbf{h}/dt$. A 9-10 ábra vektordiagramjáról leolvasható, hogy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{h} \qquad (9\text{-}15)$$

ahol **r'** az *m* tömeg helyvektora a mozgó koordinátarendszerben. A tömegpont az *S* rendszerhez képest $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ sebességgel mozog. Ezt felhasználva a (9-15) egyenlet deriválásával összefüggést állapíthatunk meg a különböző koordináta-rendszerekben mért sebességek között:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{h}}{dt}$$

azaz

A Galilei féle sebességösszeadási törvény

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \qquad (9\text{-}16)$$

ahol **v** és **v'** rendre az m tömeg S, ill. S' rendszerben mért sebessége, **V** pedig az S' koordinátarendszernek az S koordinátarendszerhez képest vett sebessége. Jegyezzük meg, a vesszős mennyiségek mindig a *vesszős koordinátarendszerhez képest* mért értékeket jelentenek.

A (9-16) sebességösszeadási törvény idő szerinti deriváltját képezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

Ez az eredmény – mivel az inerciarendszerekre $d\mathbf{V}/dt = 0$ – azt jelenti, hogy *az egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó koordinátarendszerekben a testek gyorsulása azonos.*

A gyorsulások közötti kapcsolat Galilei szerint

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \qquad (9\text{-}17)$$

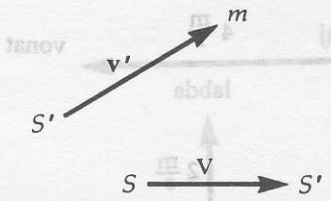
A Galilei féle (9-16) sebességösszeadási törvény jól használható, ha csak *két* relatív sebesség **V** és **v'** szerepel a problémában. Felmerül azonban a kérdés, hogy hogyan kell számolni azokban a bonyolultabb esetekben, amikor többféle különböző relatív sebesség is szerepel egyszerre. Szerencsére egyszerű módszer adható ezeknek a kérdéseknek a kezelésére is. Tetszés szerinti relatív sebességek esetén három lényeges lépést kell a számítások során megtennünk:

1. lépés: Először rajzoljunk fel minden sebességvektort és a jelölés egyértelművé tételére írjuk a vektor *kezdőpontjához* annak a *koordinátarendszernek a betűjelét,* amelyben a sebességet mérjük, a vektor *végpontjához* pedig írjuk oda annak a *részecskének* a nevét, amelynek sebességét jelenti a vektor. A 9-11a ábra mutatja be ezt a lépést.

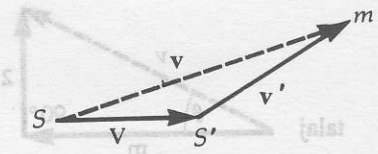
2. lépés: Rajzoljuk újra a vektorábrát úgy, hogy a vektorokat olymódon toljuk el, hogy az *azonos koordinátarendszer és részecske jelzések* azonos helyre kerüljenek. Tegyük meg ezt attól függetlenül, hogy a vektorok ennek eredményeként kezdőpontjukkal, végpontjukkal, vagy ezekkel a pontokkal vegyesen csatlakoznak egymáshoz. A vektorok irányának és nagyságának megtartására azonban gondosan ügyeljünk. (Ezt az eljárást -a közismert játékra utalva – gyakran „dominó" módszernek nevezzük.)

3. lépés: Az utóbbi diagramon bármely vektor kezdőpontját egy másik vektor végpontjával összekötő vektor a *végponthoz tartozó tömegpontnak a kezdőponthoz tartozó koordinátarendszerhez* viszonyított sebességét adja meg (9-11b ábra).

Rövid meggondolással igazolhatjuk, hogy a fentiekben alkalmazott jelölésrendszer és az erre alapozott geometriai szerkesztés fizikailag alátámasztható, és a szerkesztés nagyságra és irányra nézve helyesen adja a különböző koordinátarendszerekhez képest mért relatív sebességeket.



a) A kezdő és a végpontjukban jelzett sebességvektorok

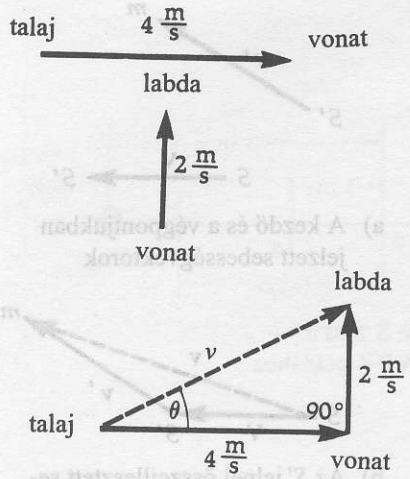


b) Az S' jelnél összeillesztett sebességvektorok. A szaggatottan megrajzolt nyíl az m tömegnek az S rendszerbeli sebességét mutatja. Leolvasható, hogy **v** = **V** + **v'**.

9-11 ábra
A relatív sebességek geometriai meghatározása

9-7 PÉLDA

Egy vonat 4 m/s sebességgel vízszintes egyenes sínpályán kelet felé halad. Egy kislány az ülések között délről északra húzódó közön a vonathoz képest 2 m/s sebességgel labdát gurít el a padlón. Mekkora a labda sebessége a Földhöz rögzített koordinátarendszerhez képest?



9-12 ábra
A 9-7 példához

MEGOLDÁS

Rajzoljuk meg a sebességvektorokat majd ezek segítségével készítsük el a vektorábrát (9-12 ábra). A Pitagorász tételből a sebesség nagyságára a

$$v = \sqrt{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \sqrt{20\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 4{,}47\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

értéket kapjuk. A v sebességvektor iránya a θ szöggel adható meg, amelyre felírható, hogy $\text{tg}\,\theta = v_y/v_x$.

$$tg\,\theta = \left(\frac{2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) = 0{,}5$$

Innen

$$\theta = arc\,tg(0{,}5) = 26{,}6^\circ$$ északkeleti irányban

9-8 PÉLDA

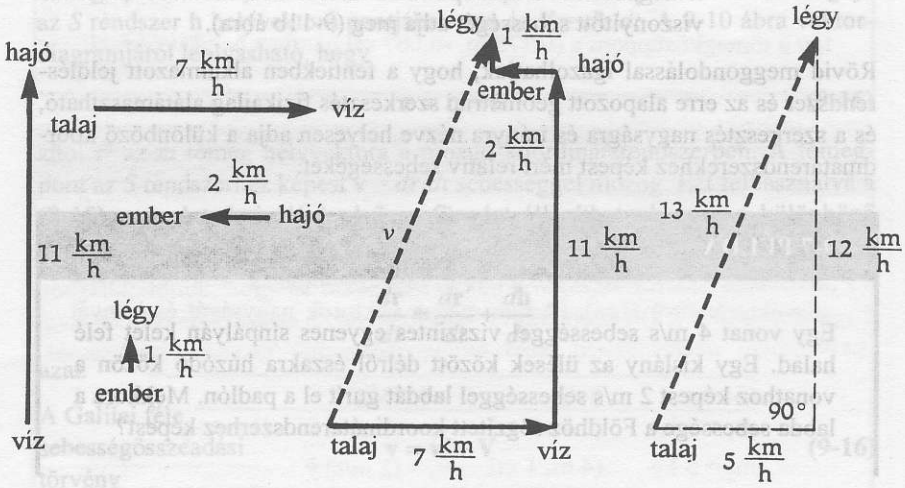
A következő abszurd példa arra szolgál, hogy megmutassuk milyen könnyen tájékozódhatunk sokféle relatív sebesség között is a vektorábrák segítségével.

Egy hajó fedélzetén egy ember a hajóhoz képest 2 km/h sebességgel sétál nyugati irányban. A hajó a vízhez képest 11 km/h sebességgel észak felé, míg a víz a Földhöz képest 7 km/h sebességgel kelet felé mozog. Az ember vállán az emberhez képest 1 km/h sebességgel északi irányban légy mászik. Mekkora a légy sebessége a Földhöz képest?

MEGOLDÁS

Az adott vektorok segítségével készítsük el a vektordiagrammot. Az eredő vektor szolgáltatja a légy sebességvektorát a földhöz képest (9-13 ábra).

Mivel a feladatban csupa egymásra merőleges vektor szerepel, a vektordiagram, amint azt az ábra is mutatja derékszögű háromszöggé



9-13 ábra
A 9-8 példához

egyszerűsíthető. Ebből a Pitagorász tétel alkalmazásával adódik, hogy:

$$v = \sqrt{\left(5\frac{\text{km}}{\text{ó}}\right)^2 + \left(12\frac{\text{km}}{\text{ó}}\right)^2} = \sqrt{169\left(\frac{\text{km}}{\text{ó}}\right)^2} = 13{,}0\frac{\text{km}}{\text{ó}}$$

Megjegyezzük még, hogy a diagramról egyszerűen leolvasható például a hajónak a Földhöz képest vett, vagy a légynek a vízhez képest vett sebessége is.

9.5 Pontrendszer impulzusa és mozgási energiája

Az impulzus

A (9-14) egyenlet szerint

$$\mathbf{F}_k = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Zárt rendszer esetén a külső erők eredője zérus, ezért

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \qquad \textbf{(9-18)}$$

azaz az impulzus nem változik. Másként fogalmazva

Az impulzusmegmaradás törvénye (zárt pontrendszerben)

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} \qquad \textbf{(9-19)}$$

ahol $\mathbf{P} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$

A mozgási energia

A rendszer teljes mozgási energiája megegyezik az egyes részecskék mozgási energiájának összegével:

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m_k v_k^2 \qquad \textbf{(9-20)}$$

Ez az összefüggés természetesen csak akkor érvényes, ha a rendszer minden tagjának sebességét ugyanabban a koordinátarendszerben mérjük a. A kinetikus energia kiszámítására tetszőleges koordinátarendszert használhatunk, az összenergia értéke azonban, minthogy az egyes részecskék sebessége is függ a koordinátarendszertől, a koordinátarendszer függvényében különböző lehet. A következőkben összefüggést keresünk a kinetikus energiának a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben mért értéke, valamint tömegközépponthoz képest mozgó koordinátarendszerben mért értéke között.

A Galilei féle sebességösszeadási törvénnyel a részecskéknek az utóbbi rendszerben mért $\mathbf{v}_k$ sebességét a tömegközépponthoz képest vett $\mathbf{v}'_k$ sebességek és a tömegközéppont $\mathbf{v}_{TKP}$ sebességének összegeként írhatjuk fel, azaz $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{v}_{TKP}$ Mivel $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, a rendszer kinetikus energiáját meghatározó (9-20) összefüggés a

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m_k (\mathbf{v}'_k + \mathbf{v}_{TKP})^2$$

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m_k \left[(\mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{v}'_k) + 2(\mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{v}_{TKP}) + (\mathbf{v}_{TKP} \cdot \mathbf{v}_{TKP}) \right] \qquad (9\text{-}21)$$

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}'^2_k + (\Sigma m_k \mathbf{v}'_k)\mathbf{v}_{TKP} + (\Sigma \frac{1}{2} m_k)\mathbf{v}^2_{TKP}$$

alakra írható át. Vizsgáljuk kissé részletesebben a kapott három tagot. Az első tag a vesszővel ellátott, azaz a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben mért kinetikus energia. Gyakran **belső mozgási energiának** is nevezzük és K_b-vel jelöljük.

A második tag zérus. Ezt egyszerűen beláthatjuk, ha figyelembevesszük, hogy $\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{TKP}$. Írjuk be ezt a második tag zárójeles tényezőjébe, azt kapjuk, hogy

$$\Sigma m_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{TKP}) = \Sigma m_k \mathbf{v}_k - \Sigma m_k \mathbf{v}_{TKP} = \mathbf{v}_{TKP} \Sigma m_k - \mathbf{v}_{TKP} \Sigma m_k = 0$$

A harmadik tag éppen egy v_{TKP} sebességgel mozgó $M = \Sigma m_k$ tömegű anyagi pont mozgási energiája. Ezt a **tömegközéppont K_{TKP} mozgási energiájának nevezzük.**

A tömegközéppont K_{TKP} mozgási energiája

$$K_{TKP} = \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \qquad (9\text{-}22)$$

Összevetve a kapott egyenleteket, látható, hogy a pontrendszer mozgási energiája két tagból tehető össze.

A pontrendszer mozgási energiája

$$K = K_b + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \qquad (9\text{-}23)$$

Itt K_b a részecskék belső mozgásával kapcsolatos és a tömegközépponthoz rögzített rendszerben mért mozgási energiát, $\frac{1}{2} M v_{TKP}^2$ pedig magának a tömegközéppontnak az energiája, amit úgy számítunk ki mintha a rendszer teljes M tömege egyetlen pontba lenne egyesítve és $\mathbf{v}_{TKP}$ sebességgel mozogna.

A merev testek, bár pontjaik relatív távolsága nem változhat, forgásba jöhetnek tömegközéppontjuk körül, így a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben is rendelkezhetnek mozgási energiával. (Ezzel a mozgással részletesebben a 13. fejezetben foglalkozunk.) Mikroszkopikus skálán azonban még az un. „merev" testek részecskéi sincsenek sohasem nyugalomban, hanem folyamatosan rezgő mozgást végeznek egyensúlyi helyzetük körül. Hasonlóképpen belső mozgást végeznek a gázok és folyadékok atomjai, ill. molekulái is. A véletlenszerű rendezetlen mozgásból származó mozgási és potenciális energiát nevezzük a testek *belső* vagy *termikus energiájának.* A merev testek makroszkopikus haladó és forgó mozgásának vizsgálatakor a belső energiától általában eltekintünk, mert az többnyire állandó. Az egyetlen kivétel, ha a mozgás során csúszó súrlódási erő is fellép, mert ennek hatására hő fejlődik, ami megnövelheti a rendszer belső energiáját. A mechanikai energiának belső energiává való átalakulását az energiamérleg felírásakor mindig figyelembe kell venni.

9-9 PÉLDA

Egy $m_A = 1400$ kg tömegű 10 m/s sebességű gépkocsit egy másik $m_B = 1000$ kg tömegű személyautó követ 25 m/s sebességgel. A Földhöz rögzített koordinátarendszerben határozzuk meg a) a két gépkocsi teljes mozgási energiáját és b) a két autó tömegközéppontjának mozgási energiáját. c) Határozzuk meg a tömegközépponthoz képest vett „belső" mozgási energiát és igazoljuk a $K = K_b + K_{TKP}$ összefüggést. d) Mennyi a rendszer összimpulzusa a Földhöz rögzített koordinátarendszerben? e) Mennyi a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben az összimpulzus?

MEGOLDÁS

a)

$$K = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$K = \frac{1}{2}(1400\,\text{kg})\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}(1000\,\text{kg})\left(25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 3{,}83 \cdot 10^5\,\text{J}$$

b) A (9-10) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v_{TKP} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{(1400\,\text{kg})(10\,\text{m/s}) + (1000\,\text{kg})(25\,\text{m/s})}{(1400\,\text{kg} + 1000\,\text{kg})}$$

$$v_{TKP} = 16{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Így a tömegközéppont mozgási energiája:

$$K_{TKP} = \frac{1}{2}(m_A + m_B){v_{TKP}}^2 = \frac{1}{2}(1400\,\text{kg} + 1000\,\text{kg})\left(16{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$K_{TKP} = 3{,}17 \cdot 10^5\,\text{J}$$

c) Alkalmazzuk a Galilei féle $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{TKP}$ sebességösszeadási törvényt és határozzuk meg az autók sebességét a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben:

$$v'_A = v_A - v_{TKP} = \left(10\frac{\text{m}}{\text{s}} - 16{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = -6{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v'_B = v_B - v_{TKP} = \left(25\frac{\text{m}}{\text{s}} - 16{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 8{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Így

$$K_b = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$K_b = \frac{1}{2}(1400\,\text{kg})\left(-6{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}(1000\,\text{kg})\left(8{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$K_b = 6{,}56 \cdot 10^4\,\text{J}$$

A $K = K_b + K_{TKP}$ összefüggés igazolásához adjuk össze a megfelelő adatokat

$$3{,}83 \cdot 10^5\,\text{J} = 6{,}56 \cdot 10^4\,\text{J} + 3{,}17 \cdot 10^5\,\text{J}$$

$$3{,}83 \cdot 10^5\,\text{J} = 3{,}83 \cdot 10^5\,\text{J}$$

d) A Földhöz rögzített rendszerben mért összimpulzus:

$$P = m_A v_A + m_B v_B = (1400\,\text{kg})\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (1000\,\text{kg})\left(25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$P = 3{,}90 \cdot 10^4\,\text{kgm}$$

e) Az összimpulzus a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben:

$$P = m_A v_A + m_B v_B = (1400\,\text{kg})\left(-6{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (1000\,\text{kg})\left(8{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$P = 0$$

A tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszert emiatt nevezik gyakran **zérus impulzusu rendszernek** is.

9.6 Ütközések leírása tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben

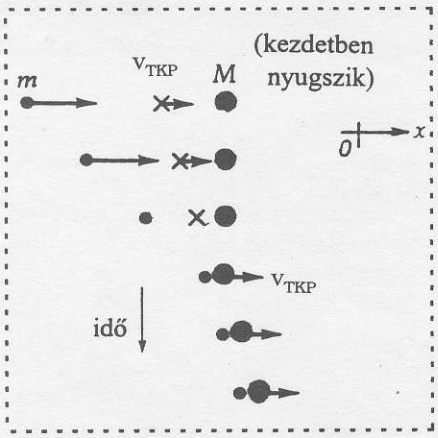
Az elemi részecskékről szóló ismereteink nagy része az atomok ill. az atommagot alkotó részecskék ütközési folyamatainak elemzéséből származik. A kísérletek egyik fontos változatában a *beeső részecske* (amit többnyire valamilyen nagyenergiájú gyorsító bocsát ki) egy kezdetben nyugvó M tömegű *cél-részecskébe (target)* ütközik. Az ütközés következtében többnyire mindkét részecske mozgásba jön. Mint a megelőző pontban megmutattuk, a beeső részecske kezdeti K mozgási energiájának egy része a tömegközéppont $K_{TKP} = \frac{1}{2} M v_{TKP}^2$ energiáját adja. A tömegközéppont azonban az ütközés után változatlan sebességgel mozog tovább, így a K_{TKP} tömegközépponti energiát a mozgás mintegy csapdába zárja, ez az energia semmiképpen sem használható fel a részecskék belső energiájának, vagy tömegközépponthoz képest vett mozgási energiájának megváltoztatására. Az ütközési folyamat egyetlen igazi energiaforrása a tömegközépponthoz képest mért K_b *belső mozgási energia.*

Példaként foglalkozzunk azzal az esettel, amikor mozgó proton ütközik nyugvó hélium atommagba ($m_{He} = 4m_p$). A laboratóriumi rendszerhez (LAB) képest a beeső proton mozgási energiájának egyötöd része van lekötve a tömegközéppont mozgási energiájaként. Ily módon a proton LAB rendszerhez képest mért energiájának ötödrésze nem vehet részt a reakcióban. Amennyiben a proton helyett a nagyobb tömegű He magot ütköztetnénk a nyugvó protonnal, akkor a helyzet még rosszabb lenne, mert a LAB rendszerben mért mozgási energia négy ötödrésze a reakcióban nem venne részt.

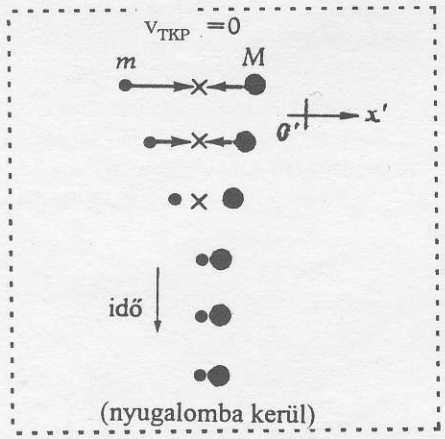
A 9-14 ábra egy *tökéletesen rugalmatlan* un. „befogási" reakciót mutat a LAB és a TKP rendszerben. A folyamat elemzése az utóbbiban sokkal egyszerűbb. A TKP rendszerben mozgási energiaként pl. csupán az ütközési reakcióban felhasználható energia van jelen, hiszen $K_{TKP} = 0$. A TKP rendszerben az ütközés előtt és után is zérus az összimpulzus.

Azt, hogy tetszőleges részecske rendszer impulzusa a tömegközépponti koordinátarendszerben zérus ($\Sigma m_k \mathbf{v}_k' = 0$), egyszerűen beláthatjuk a következő módon. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ Galilei sebességösszeadási törvényben most $\mathbf{V} = \mathbf{v}_{TKP}$, $\mathbf{v}$ a részecske LAB, $\mathbf{v}'$ pedig a TKP rendszerben mért sebessége. A rendszer tetszőleges m_k részecskéjére

$$m_k \mathbf{v}_k = m_k \mathbf{v}'_k + m_k \mathbf{v}_{TKP}$$

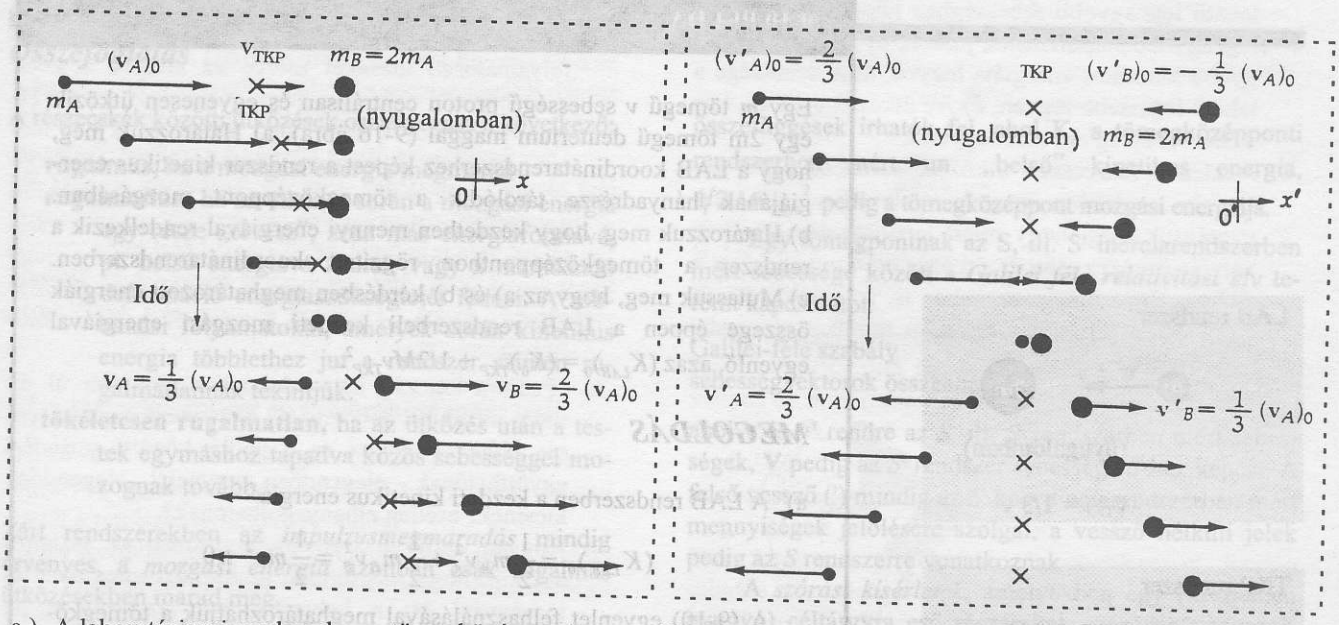


a.) A LAB rendszerben a tömegközéppont v_{TKP} sebessége ütközés előtt és után is ugyanakkora



b) A TKP rendszerben a tömegközéppont mindvégig nyugalomban marad.

9-14 ábra
Pillanatfelvétel sorozat tökéletesen rugalmatlan ütközésről. Az ütközés során a testek egymáshoz ragadnak



a.) A laboratóriumi rendszerben a tömegközéppont v_{TKP} sebessége állandó.

b) A tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont nyugalomban marad. Ebben a rendszerben az egyes testek sebessége ütközés előtt és után ugyanolyan nagyságú. Ez nagyban megkönnyíti a probléma elemzését a TKP rendszerben.

9-15 ábra
Pillanatfelvételek két test tökéletesen rugalmas centrális és egyenes ütközéséről a laboratóriumi (LAB) és a tömegközépponti (TKP) rendszerben.

Az ilyen tipusu egyenleteket a rendszer minden részecskéjére összegezve:

$$\Sigma m_k \mathbf{v}_k = \Sigma m_k \mathbf{v}'_k + \Sigma m_k \mathbf{v}_{TKP}$$

A (9-11) egyenlet szerint azonban $\Sigma m_k \mathbf{v}_k = \Sigma m_k \mathbf{v}_{TKP}$. Behelyettesítve ezt az előző egyenletbe, azt kapjuk, hogy

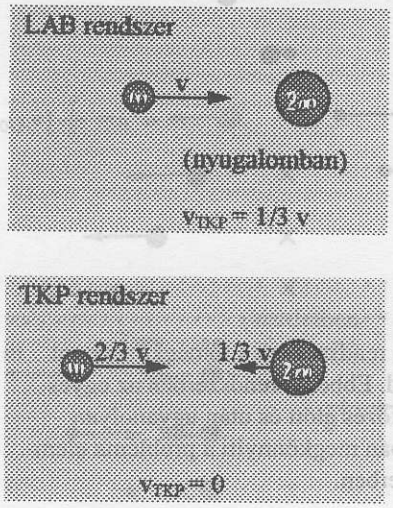
$$\Sigma m_k \mathbf{v}_k = \Sigma m_k \mathbf{v}'_k + \Sigma m_k \mathbf{v}_k ,$$

és ebből

$$0 = \Sigma m_k \mathbf{v}'_k$$

A 9-15 ábra két test tökéletesen *rugalmas,* centrális és egyenes ütközését mutatja a laboratóriumi (LAB) és a tömegközépponti (TKP) rendszerben. A 9C-51 feladatban az impulzusmegmaradási és energiamegmaradási tétel felhasználásával megmutatjuk, hogy ezekben az ütközésekben a testek ütközés előtti közeledésének *relatív sebessége* megegyezik az ütközés utáni távolodás *relatív sebességével.* Kimutatható továbbá, hogy tömegközépponti rendszerből nézve a rugalmas ütközés szimmetrikussá válik, abban az értelemben, hogy az egyes részecskék ütközés előtti és ütközés utáni sebességének nagysága megegyezik. Az ilyen szimmetriájú esetek könnyen tárgyalhatók (9C-52 feladat).

Az atomfizikai szóráskísérleteket gyakran úgy tervezik, hogy két részecskenyaláb centrálisan és egyenesen ütközzön egymással. Amennyiben a részecskék impulzusa ellentétes irányú, de egyenlő nagyságú, akkor a laboratóriumi koordinátarendszer egyben a tömegközépponti rendszer is, s ekkor a gyorsítóban megszerzett teljes kinetikus energia hasznosítható az ütközési reakcióban. A szembe találkozó sugárnyalábok összeütköztetése energetikailag azonban még akkor is előnyös lehet az egyetlen sugárnyalábnak a nyugvó céltárgyra való ütköztetéséhez képest, ha a nyalábokban mozgó részecskék impulzusának abszolut értéke nem egyezik meg egymással.



9-16 ábra
A 9-10 példához

9-10 PÉLDA

Egy m tömegű v sebességű proton centrálisan és egyenesen ütközik egy 2m tömegű deutérium maggal (9-16 ábra). a) Határozzuk meg, hogy a LAB koordinátarendszerhez képest a rendszer kinetikus energiájának hányadrésze tárolódik a tömegközéppont mozgásában. b) Határozzuk meg, hogy kezdetben mennyi energiával rendelkezik a rendszer a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben. c) Mutassuk meg, hogy az a) és b) kérdésben meghatározott energiák összege éppen a LAB rendszerbeli kezdeti mozgási energiával egyenlő, azaz $(K_{LAB})_0 = (K_0)_{TKP} + 1/2Mv_{TKP}^2$.

MEGOLDÁS

a) A LAB rendszerben a kezdeti kinetikus energia

$$(K_{LAB})_0 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

A (9-10) egyenlet felhasználásával meghatározhatjuk a tömegközéppont sebességét a LAB rendszerhez képest:

$$v_{TKP} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A v + 0}{m_A + m_B} = \frac{m_A v}{m_A + m_B} = \frac{1}{3}v$$

Ezért a tömegközéppont mozgási energiájára a LAB rendszerben az

$$\frac{1}{2}Mv_{TKP}^2 = \frac{1}{2}(m+2m)\left(\frac{1}{3}v\right)^2 = \frac{1}{2}(3m)(\frac{1}{9}v^2) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}mv^2)$$

eredmény adódik. Látható tehát, hogy a LAB rendszerben a kezdeti mozgási energia harmadrésze a tömegközéppont mozgási energiájaként le van kötve.

b) A TKP rendszerében a két részecske a következő sebességgel közeledik egymáshoz:

$$v'_A = v_A - v_{TKP} = v - 1/3v = 2/3v$$
$$v'_B = v_B - v_{TKP} = 0 - 1/3v = -1/3v$$

Következésképpen a TKP rendszerben a teljes kinetikus energia:

$$(K'_{TKP})_0 = \frac{1}{2}m_A v'^2_A + \frac{1}{2}m_B v'^2_B = \frac{1}{2}(m)(\frac{2}{3}v)^2 + \frac{1}{2}(2m)(-\frac{1}{3}v)^2$$

$$(K'_{TKP})_0 = \frac{2}{9}mv^2 + \frac{1}{9}mv^2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}mv^2)$$

c) Igazolni kívánjuk, hogy

$$(K_{LAB})_0 = (K'_0)_{TKP} + 1/2Mv_{TKP}^2$$

A fenti értékek helyettesítésével

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{3}mv^2 + \frac{1}{6}mv^2$$

adódik, vagyis az

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

azonossághoz jutunk.

Tehát $(K_{LAB})_0$ valóban az a) és b) feladatrészben kapott energiák összege.

Összefoglalás

A részecskék közötti ütközések osztályozása a következő:

rugalmas, ha a mozgási energia megmarad

rugalmatlan, ha az ütközés során a mozgási energia egy része „elvész", azaz más energiaformává, pl. belső energiává alakul, vagy a maradandó deformáció energiaszükségletét fedezi. A robbanási folyamatokat, amelyek során kinetikus energia többlethez jut a rendszer szintén rugalmatlannak tekintjük.

tökéletesen rugalmatlan, ha az ütközés után a testek egymáshoz tapadva közös sebességgel mozognak tovább.

Zárt rendszerekben az *impulzusmegmaradás* mindig érvényes, a *mozgási energia* azonban csak rugalmas ütközésekben marad meg.

Két részecske **tömegközéppontjának** (TKP) a koordinátái:

egy dimenzióban

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

három dimenzióban

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

A tömegközéppont sebessége:

$$\mathbf{v}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

A tömegközéppont helyét és sebességét tetszőleges számú részecske esetén a következő összefüggések adják meg:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\Sigma m_k \mathbf{r}_k}{M} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_{TKP} = \frac{\Sigma m_k \mathbf{v}_k}{M}$$

ahol $M = \Sigma m_k$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha benne a rendszer teljes tömege egyesítve lenne és a rendszerre ható *külső* erők eredője hatna rá.

Newton második törvénye pontrendszerekre $\Sigma \mathbf{F}_k = M\mathbf{a}_{TKP}$

A pontrendszer **P** impulzusára és kinetikus energiájára a

$$\mathbf{P} = \Sigma m_k \mathbf{v}_k \quad \text{és} \quad K = K_b + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2$$

összefüggések írhatók fel, ahol K_b a tömegközépponti rendszerben mért un. „belső" kinetikus energia, $1/2\, M v_{TKP}^2$ pedig a tömegközéppont mozgási energiája.

Egy tömegpontnak az S, ill. S' inerciarendszerben mért sebessége között a *Galilei féle relativitási elv* teremt kapcsolatot.

Galilei-féle szabály sebességvektorok összeadására $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$,

ahol **v** és **v'** rendre az *S*, ill. *S'* rendszerben mért sebességek, **V** pedig az *S'* rendszer sebessége *S*-hez képest. A felső vessző (') mindig az *S'* koordinátarendszerben mért mennyiségek jelölésére szolgál, a vessző nélküli jelek pedig az *S* rendszerre vonatkoznak

A *szórási kísérletek,* amelyekben egy (kezdetben nyugvó) céltárgyra eső részecskék szóródását vizsgáljuk, fontos eszköz az atom és atommag szerkezetének felderítésében, valamint a magerők tanulmányozásában. Bár a mérések a LAB koordinátarendszerben zajlanak, az eredmények kiértékelése gyakran egyszerűbb a TKP rendszerben, mert a tömegközéppont sebessége az ütközés során nem változik. Ily módon az $1/2\, M v_{TKP}^2$ mozgási energia a tömegközépponthoz van kötve, ami az ütközés során lezajló folyamatban nem vesz részt. A szimmetriákból származó előnyök mellett ez az oka annak, hogy az ütközések vizsgálatára a tömegközépponthoz kötött koordinátarendszer alkalmazása a legmegfelelőbb.

A *relatív sebességekre* vonatkozó meggondolások (és a TKP és LAB rendszer közötti sebességtranszformáció) legegyszerűbben a következő geometriai módszerrel követhetőek:

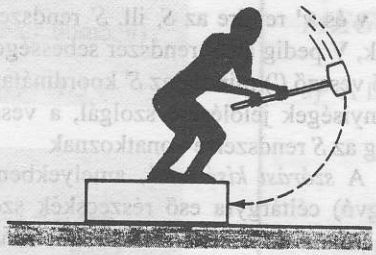
1) Vegyük fel a sebességvektorokat és *kezdőpontjukat* jelöljük a koordinátarendszer jelével, amelyben az adott sebességet mértük, *végpontjukhoz* pedig írjuk oda a tömegpont jelét, amelynek sebességéről szó van.
2) Toljuk el önmagukkal párhuzamosan a vektorokat úgy, hogy az *azonos betűjelű pontok fedésbe kerüljenek.* (A vektorok irányán és nagyságán közben ne változtassunk.)
3) Bármely vektor kezdőpontját egy másik vektor végpontjával összekötve, megkapjuk a *végpontnak megfelelő tömeg* relatív sebességét a *kezdőpontnak megfelelő* koordinátarendszerben.

Kérdések

1. Egy kődarabot a Fölre ejtettünk, s az ott nyugalomban maradt. Hová lett a kőnek a földetérés pillanatában meglévő impulzusa?
2. Mit jelent az, hogy két részecske „érintkezik" az ütközés során? Hogyan zajlik le két proton ütközése, amelyek azonos töltésük miatt már viszonylag nagy távolságban taszíthatják egymást?
3. Az *A* test és a kezdetben nyugvó *B* test között egydimenziós rugalmas ütközés zajlik le. Határozzuk meg az m_A/m_B tömegarányt úgy, hogy a *B* test a) a

lehető legnagyobb sebességhez jusson, b) a lehető legnagyobb impulzushoz jusson, c) a lehető legnagyobb kinetikus energiája legyen, d) *B* sebessége a lehető legkisebb legyen, e) Az ütközés után az *A* és *B* test sebesség egyenlő legyen.

4. Nukleáris részecskék ütközése során az egyik részecske eredetileg nyugalmi helyzetben volt. Magyarázzuk meg, hogy miért található a részecskék pályája ütközés előtt és ütközés után ugyanabban a síkban. Teljesülne-e ez akkor is, ha mind ütközés előtt, mind pedig ütközés után mindkét részecske mozogna?



9-17 ábra
Az 5. kérdéshez

5. Egy „ütőkocsin" (9-17 ábra) álló személytől azt követeljük, hogy a kezében tartott nagykalapáccsal folyamatosan ütéseket mérve az alvázra a kocsi mozduljon el a talajon. Meg tudja-e ezt tenni? Ha igen, akkor adjuk meg, hogy mekkorának kell lennie a személy és az alváz közötti tapadási súrlódás és az alváz és a talaj közötti csúszó súrlódási együttható arányának. Amennyiben a mozgás valóban megvalósítható akkor magyarázzuk meg, hogy a rendszer (személy, kalapács, alváz) tömegközéppontja miért nem pusztán belső erők hatására csúszik el.
6. Padlóra tett zárt kartondobozban egy egér ül. El tud-e mozdulni dobozostól? Milyennek kellene lennie ehhez a doboz és a padló közötti súrlódási együtthatónak – elegendően nagynak? , elegendően kicsinek? esetleg elhanyagolhatónak?
7. Hogyan ugrik le a mexikói ugróbab az asztalról anélkül, hogy megsértené az impulzusmegmaradás törvényét? Mi a helyzet ebben az esetben az energiamegmaradással?

Feladatok

9.2 Rugalmas és rugalmatlan ütközés

9A-1 Az 1 kg tömegű kiskocsi légpárnás sínen csúszva 50 cm/s sebességgel tökéletesen rugalmasan beleütközik a kezdetben nyugalomban lévő 2 kg tömegű kiskocsiba. A megmaradási tételek alkalmazásával határozzuk meg a kiskocsik ütközés utáni sebességét.

9A-2. Egy *m* tömegű, v_0 sebességű test beleütközik egy *M* tömegű nyugalomban levő testbe és hozzáragad. A két test az ütközés után *v* sebességgel kezd mozogni. Hányadrésze veszett el a kezdeti mozgási energiának az ütközés során?

9A-3. Kezdetben nyugalomban lévő 10 kg tömegű test három részre robban szét. Egy 4,5 kg tömegű darab észak felé kezd mozogni 20 m/s sebességgel, egy másik 2 kg tömegű rész pedig keletre 60 m/s sebességgel. a) Határozzuk meg a harmadik darab sebességének irányát és nagyságát. b) Mennyi energia szabadult fel a robbanás során?

9A-4 Egy 5 m/s sebességgel mozgó billiárd golyó vele egyenlő tömegű nyugalomban lévő golyóba ütközik és ütközés után eredeti irányához képest 30°-os szögben 4,33 m/s sebességgel mozog tovább. Feltéve, hogy az ütközés tökéletesen rugalmas és a súrlódásból, valamint a golyók forgásából adódó hatások elhanyagolhatóak, határozzuk meg a meglökött golyó sebességének nagyságát és irányát.

9A-5 A 4 kg tömegű és a pozitív *x* tengely irányában 5 m/s sebességgel mozgó test a kezdetben nyugvó 10 kg tömegű testbe ütközik, majd visszapattan és 2 m/s sebességgel mozog a negatív *x* tengely irányba. Rugalmas volt-e az ütközés? Ha nem, akkor mennyi a kinetikus energia veszteség, ill. nyereség?

9B-6 Az *m* és 2m tömegű test derékszöget bezáró irányból közeledve ütközik és összeragadva 2 m/s sebességgel együtt mozog tovább. A mozgás iránya 37°-os szöget zár be a m tömegű test eredeti irányával. Mekkora sebességgel mozogtak a testek az ütközés előtt?

9B-7 Fából készült 800 g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból 20 g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest 10 cm magasságba emelkedik. a) Mekkora közös sebességgel indul az ingatest–sörét rendszer? b) Mekkora v_0 sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére? Adjuk meg ezt az arányt százalékosan is: $(\Delta K/K)\times 100\%$.

9B-8 Egy gránát pályájának tetőpontján két darabra robban szét. Az egyik 2,5 kg-os darab vízszintesen 100 m/s sebességgel délnyugat felé, a másik 3,5 kg-os rész ugyancsak vízszintesen 70 m/s sebességgel észak felé repül. Milyen irányban mozgott vízszintesen a gránát közvetlenül a robbanás előtt?

9B-9 Egyenes mentén egymással szembe v_1, ill. v_2 sebességgel mozgó, azonos *m* tömegű test ütközés után közös sebességgel mozog tovább. Bizonyítsuk be, hogy a mozgási energia vesztesége $1/4m(v_1 - v_2)^2$.

9B-10 Ballisztikus ingával végzett kísérlet során azt kívánjuk elérni, hogy a felfüggesztéshez alkalmazott fonál kitérése a függőlegessel maximálisan 20° -os szöget zárjon be. Milyen hosszú fonalra kössük a 3 kg tömegű ingatestet, ha tudjuk, hogy a 8 g tömegű golyó 400 m/s sebességgel csapódik az ingába? A feladat megoldását kezdjük az alapvető fizikai elvek felírásával.

9B-11 A 3 kg tömegű, kezdetben nyugalomban lévő testbe 5 m/s sebességgel centrálisan beleütközik egy 1 kg tömegű test. Ütközés után a két test külön-külön az 1 kg tömegű test eredeti pályáján mozog tovább. Ha az ütközés során a kezdeti kinetikus energia negyedrésze veszett el, mekkora a két test végső sebessége?

9B-12 Egy kezdetben 16 m/s sebességgel észak felé mozgó 50 kg tömegű test tökéletesen rugalmasan ütközik egy kelet felé haladó 20 kg tömegű másik testtel. Az ütközés az 50 kg-os testet kelet felé, a 20 kg-os testet pedig észak felé téríti el. Mekkora a testek végsebessége?

9.3 A tömegközéppont és a tömegközéppont tétel

9A-13 Az 1 kg-os és a 4 kg-os pontszerű test 1m távolságra van egymástól. Milyen távol van a 4 kg tömegű testtől a rendszer tömegközéppontja?

9A-14 Két pontszerű test 2 m távolságban van egymástól. Tömegközéppontjuk 0,40 m-re van a 2 kg tömegű testtől. Mekkora a másik test?

9A-15 Határozzuk meg a következő három részecskéből álló rendszer tömegközéppontjának a koordinátáit, ha a 2 kg-os test a (1 m, 2 m) pontban, a 4 kg-os test a (3 m, 1m) pontban és 7 kg-os test a (-1 m, –1 m) pontban található.

9A-16 Egy 20 m/s sebességgel kelet felé mozgó 7,5 kg tömegű testet 5 kg tömegű test követ 15 m/s sebességgel ugyanabban az irányban. a) Határozzuk meg a tömegközéppontjuk sebességét. b) Mekkora az egyes tömegek sebessége a tömegközépponthoz képest? c) Mekkora az egyes testek impulzusa a tömegközéppontra vonatkozó koordinátarendszerben?

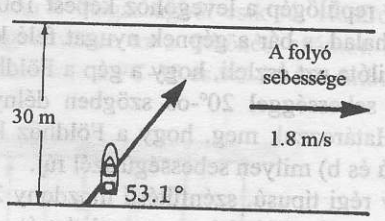
9B-17 Milyen távolságban van a következő három pontszerű testből álló rendszer tömegközéppontja az 5 kg tömegű testtől? A rendszer elemei egy 5 kg tömegű test a (2m, –5m) pontban, 3 kg-os test a (0 m, 6 m) pontban és egy 2 kg tömeg a (–3 m, 4 m) pontban.

9.4 A relatív sebesség meghatározása geometriai módszerrel

9A-18 Egy 900 kg tömegű ágyúból 100 kg tömegű golyót lőnek ki vízszintesen 75 m/s sebességgel az ágyúhoz képest. Mekkora sebességgel lökődik vissza az ágyú a talajhoz képest?

9A-19 Egy 63 cm átmérőjű kerekekkel felszerelt gépkocsi 54 km/h sebességgel halad. Határozzuk meg a) a kerék legfelső pontjának, b) a kerék legelöl lévő pontjának a talajhoz képest vett pillanatnyi sebességét.

9B-20 Ha egy motorcsónak orrát a partvonalra merőlegesen állítva szeli át a 30 m széles és 1,8 m/s sebességgel áramló folyót, akkor az a partvonallal 53,1°-os szöget bezáró irányban halad. (9-18 ábra) Tegyük fel, hogy a motorcsónak orrát úgy irányítjuk, hogy az a partvonalra merőlegesen szelje át a folyót. Határozzuk meg, hogy ebben az esetben mennyi idő alatt ér át a motorcsónak a túlsó partra.



9-18 ábra
A 9B-20 feladathoz

9B-21 Mutassuk meg, hogy amennyiben egy adott koordinátarendszerből nézve egy ütközési folyamatra érvényes az impulzusmegmaradás törvénye, akkor ez tetszőleges, az előző rendszerhez képest **V** sebességgel egyenletesen mozgó koordinátarendszerben is érvényes marad. (Útmutatás: Írjuk fel teljesen általánosan a megmaradási tételt az adott koordinátarendszerben az ütköző részecskék kezdő és végsebességeivel. Ezután minden sebességhez adjunk hozzá **V**-t.)

9B-22 Egy motorcsónak 2 m/s állandó sebességgel szeli át a folyót. a) Milyen irányba kell állítani a csónak orrát, hogy pontosan az indulási hellyel átellenes pontban érje el a túlsó partot, ha a folyó 1 m/s sebességgel nyugat felé folyik és a csónak a déli partról indul. (Útmutatás: A csónak orrát olyan mértékben kell keleti irányba elfordítani, hogy a sebességvektorok eredője pontosan északi irányba mutasson.) b) Mekkora sebességgel halad a csónak a Földhöz képest az a) esetben c) Ha a folyó 50 m széles, akkor mennyi idő alatt teszi meg a csónak az oda-vissza utat? d) Ha a visszaút során a csónak nem az eredeti kiindulási pontban, hanem folyásirányban 50 m-rel lejjebb érkezik a déli partra, és azután tér vissza a kiindulási pontba, akkor mennyi ideig tart az oda-vissza út? e) Mennyivel hosszabb vagy rövidebb ez az idő, mint a folyóra merőlegesen megtett oda-vissza út ideje? f) Ha a hajó orra mindig pontosan a túlsó part felé mutat, akkor elsodródik és folyásirányban lejjebb ér partot. Mennyi idő alatt ér át ebben az esetben? g) Mozoghat-e a csónak olyan irányban, hogy az átkelés ideje rövidebb legyen, mint az f) kérdésben megadott feltételek mellett. Hogyan?

9B-23 Egy repülőgép naponta egyenes vonalban repülve oda-vissza megteszi az A és B városok közötti L távolságot. A gép a levegőhöz képest V sebességgel halad. Határozzuk meg az oda-vissza út megtételéhez szükséges időt, ha a szélsebesség a Földhöz képest v és a) a szél az A város felől a B város felé fúj, b) a szélirány merőleges az $A - B$ egyenesre. c) Bizonyítsuk be, hogy ha a szélirány párhuzamos az $A - B$ iránnyal, akkor az oda – vissza út

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\text{-szerese}$$

a merőleges szélirány esetén szükséges időnek.

9B-24 Egy repülőgép a levegőhöz képest 160 km/h sebességgel halad, s bár a gépnek nyugat felé kellene repülnie, a pilóta azt észleli, hogy a gép a Földhöz képest 200 km/h sebességgel 20°-os szögben délnyugat felé repül. a) Határozzuk meg, hogy a Földhöz képest milyen irányú és b) milyen sebességű szél fúj.

9B-25 Egy régi típusú, szénfűtésű mozdony 20 m/s sebességgel észak felé húzza szerelvényét, miközben nyugati szél fúj. A mozdonyvezető azt tapasztalja, hogy a mozdony füstje a szerelvény irányával 20°-os szöget alkot. Feltéve, hogy a mozdonyfüst azonnal felveszi a szél sebességét, határozzuk meg, hogy mekkora a szél sebessége a Földhöz képest?

9B-26 Egy folyami csónak a vízhez képest 2,4 m/s sebességgel úszik kelet felé egy déli irányú, a Földhöz viszonyítva 1 m/s sebességű folyón. Egy madár északkeleti irányban repül vízszintesen, a levegőhöz képest 1,5 m/s sebességgel, míg a levegő nyugatfelé, a Földhöz viszonyított 1,2 m/s sebességgel mozog. Határozzuk meg, hogy milyen sebességgel mozog a madár a csónak fedélzetén napozó utashoz viszonyítva.

9.5 Pontrendszer impulzusa és mozgási energiája

9B-27 A befagyott tó közepén egy 75 és egy 60 kg tömegű korcsolyázó összekapaszkodva 3 m/s állandó sebességgel keleti irányban együtt mozog. Ekkor ellökik magukat egymástól és ennek hatására a 60 kg tömegű korcsolyázó továbbra is keleti irányban, de 5 m/s sebességgel mozog tovább. Tételezzük fel, hogy a korcsolyázók és a jég között elhanyagolható a súrlódás. a) Mekkora a korcsolyázók tömegközéppontjának sebessége a szétválás előtt? b) Mekkora a tömegközéppont sebessége a szétválás után? c) Mekkora a korcsolyázók teljes mozgási energiája a tóhoz képest szétválásuk előtt és után? d) Mekkora a korcsolyázók mozgási energiája a tömegközépponti koordináta rendszerben a szétválás előtt és után? e) Magyarázzuk meg, hogy a d) esetben kapott második eredmény miért egyenlő a c) esetben kapott két eredmény különbségével.

9A-28 Az 1200 kg tömegű, 100 km/h sebességű gépkocsit 1500 kg tömegű, 130 km/h sebességű rendőrautó üldözi. Számítsuk ki, hogy a) mennyi a két gépkocsiból álló rendszer tömegközéppontjának sebessége? b) mennyi a személygépkocsi impulzusa a tömegközépponti rendszerben? c) mennyi a rendőrautó impulzusa a tömegközépponti rendszerben? (Vegyük észre, hogy a két kocsiból álló rendszer impulzusa a tömegközépponti rendszerben zérus.)

9.6 Az ütközések leírása a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben

9B-29 Egy 4 kg tömegű lövedék abban a pillanatban robban szét két részre, amikor sebessége 30 m/s. Egyik, 1 kg tömegű darabja mozgásirányának változtatása nélkül a Földhöz képes 48 m/s sebességgel repül tovább. Határozzuk meg, hogy a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben a robbanás mekkora belső energiát szolgáltatott.

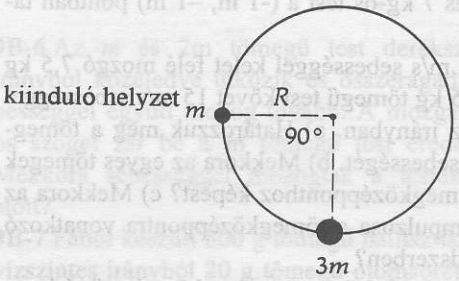
9B-30 Egy 5 kg tömegű nyugvó test felé 3 kg tömegű, 16 m/s sebességű test repül. Határozzuk meg az 5 kg-os nyugalomban lévő testhez rögzített koordinátarendszerben a) a tömegek teljes impulzusát, b) és mozgási energiáját. c) Mekkora a két tömeg impulzusa és d) teljes mozgási energiája a tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszerben?

További feladatok

9C-31 Az m tömegű tökéletesen rugalmas v_0 kezdeti sebességű test centrálisan ütközik a kezdetben nyugalomban lévő M tömegű testtel ($M>m$). a) Határozzuk meg a m tömeg esetében a

$$\frac{\text{végső kinetikus energia}}{\text{kezdeti kinetikus energia}}$$

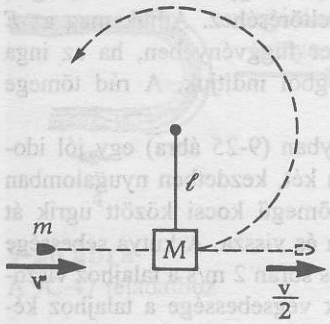
arányt. b) Cseréljük fel a m és M tömeg szerepét és határozzuk meg a fenti arányt a M tömegű testre vonatkozóan.



9-19 ábra
A 9C-32 feladathoz

9C-32 Függőleges síkú, R sugarú körré hajlított, merev huzalon a rá fűzött m tömegű gyöngy a 9-19 ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalomból lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő 3 m tömegű másik gyönggyel. a) Határozzuk meg az R sugárral kifejezve, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után? b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódásmentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mekkora a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után.

9C-33 Egy m tömegű v sebességű pisztolygolyó a 9-20 ábrán látható módon keresztül üti az M tömegű ingatestet, miközben sebessége $v/2$-re csökken. Az ingatest l hosszúságú, elhanyagolható tömegű merev rúdon függ. Mekkora minimális v sebességgel rendelkezzen a golyó, hogy a kilendülő inga teljes kört írjon le.



9-20 ábra
A 9C-33 feladathoz

9C-34 Egy 2 m/s sebességgel mozgó 0,25 kg tömegű test rugalmasan ütközik egy kezdetben nyugalomban lévő 0,75 kg tömegű testtel, s ennek hatására eredeti irányától 36,9°-os szögben eltér (ez a szög a 3-4-5 típusú háromszög egyik szöge). a) Milyen sebességgel mozog a két test az ütközés után? b) Határozzuk meg a 0,75 kg tömegű test mozgásának irányát az ütközés után.

9C-35 Nagy sebességű stroboszkopikus felvételek szerint a golfütők 200 g tömegű feje 55 m/s sebességgel is érkezhet az ütőkúpon nyugvó 46 g-os golflabdához. Ütközés után a fej sebessége irányváltozás nélkül 40 m/s-ra csökken. a) Mekkora sebességgel indul a golflabda? b) Határozzuk meg a golfütés ε ütközési számát. Az ütközési szám definíció szerint: (lásd 9C-36 feladatot)

$$\varepsilon = -\frac{\text{relatív sebesség az ütközés után}}{\text{relatív sebesség az ütközés előtt}}$$

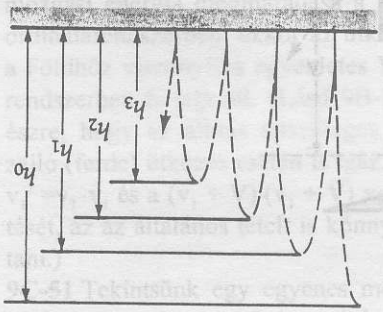
(A negatív előjel biztosítja, hogy az ütközési szám pozitív legyen.)

9C-36 Acél csapágygolyót h_0 magasságból egy rögzített vízszintes acéllemezre ejtjük. A golyó a lemezen pattog, s az egyes pattanások során egyre kisebb és kisebb magasságba emelkedik, mivel az ütközés nem tökéletesen rugalmas (9-21 ábra). A tökéletesen rugalmas ütközéstől vett eltérés az ε **ütközési számmal** jellemezhető, amit a rögzített felülettel való ütközés esetén az

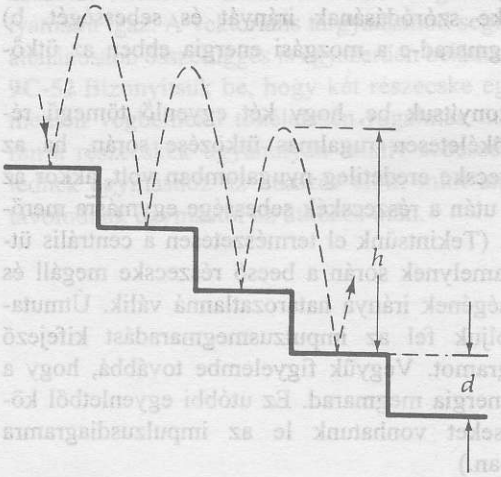
$$\varepsilon = \frac{\text{sebesség az ütközés után}}{\text{sebesség az ütközés előtt}}$$

összefüggéssel adhatunk meg. Az ütközési szám 1 (tökéletesen rugalmas ütközés) és 0 között (tökéletesen rugalmatlan ütközés) változhat. Az ε ütközési szám értéke lényegében állandó közepes sebességtartományban. Adjuk meg h_0, ε és n függvényében, hogy az n-ik visszapattanás után milyen magasra emelkedik a csapágygolyó.

9C-37 Egy labda egyenletesen pattogva halad lefelé egy lépcsősoron úgy, hogy mindig a d magasságú lépcsőfokok közepére esik (9-22 ábra). Minden ütközés teljesen egyforma, mert a labda minden egyes lépcsőfokra ugyanolyan h magasságból esik rá. Határozzuk meg h és d függvényében az ε ütközési számot. (Az ütközési szám definíciója a 9C-35 és 9C-36 feladatban található.)



9-21 ábra
A 9C-36 feladathoz. A pályák valójában függőlegesek, az érthetőség kedvéért azonban kissé elcsúsztatva ábrázoltuk őket.



9-22 ábra
A 9C-37 feladathoz.

9C-38 Az m_1 tömegű test tökéletesen rugalmasan ütközik az m_2 tömegű nyugvó testtel. Az ütközés után az m_1 tömegű test eredeti irányától 90°-os szögben tér el. a) Milyen szögben szóródik (a beeső részecske irányához viszonyítva) az m_2 tömegű részecske? b) Mutassuk meg, hogy az adott feltételek mellett m_2 nagyobb kell hogy legyen, mint m_1.

9C-39 Csapágygolyókat gyártó cég a selejtes golyók kiválasztására ütközésen alapuló vizsgálatot végez. A csapágygolyókat a 9-23 ábrán látható módon 1,2 m magasságból a vízszinteshez 15°-os szögben hajló tömör acél aljzatra ejtik. A jó minőségű golyóknak a visszapattanás után át kell jutni a B akadály felett. Az akadályt úgy kell elhelyezni, hogy csak a tökéletesen rugalmasan ütköző golyók juthassanak át felette. Határozzuk meg a visszapattanó golyók pályacsúcsának a koordinátáit, és azt, hogy hová kell az akadályt elhelyezni. (Útmutatás: Tökéletesen rugalmas ütközés esetén a *beesésnek és a*

Távlatok

Pihenjünk meg ismét és keressük meg a bejárt hegyvölgyes táj hatalmas fenyőit! Az előző néhány fejezetben bevezettük 1) a munka és energia fogalmát, 2) az impulzus fogalmát, 3) kimondtuk az impulzusmegmaradás és az energiamegmaradás törvényét, és megadtuk 4) a konzervatív erő és a megfelelő potenciális energia közötti kapcsolatot. A $\Sigma F = ma$ törvény mellett az *energia* és *impulzus* fogalma és a rájuk vonatkozó tételek hatalmas segítséget jelentenek a feladatok megoldásában. *A megmaradási tételek* sokat segítenek olyan esetekben, amikor nem ismerjük az erőket, vagy amikor azok csak bonyolult függvények segítségével fejezhetők ki, ill. az erőhatás igen rövid idejű, mint pl. ütközések során. Alkalmazhatóságuk kulcsa annak megállapítása, hogy a vizsgált rendszer *zárt-e* vagy sem, azaz hatnak-e külső erők a rendszerre. Amennyiben a rendszer és környezete között nincsen energiacsere akkor az összesenergia állandó. Amennyiben a rendszerre ható külső erők eredője zérus, akkor a rendszer impulzusa állandó. Természetesen a rendszer különböző részei között mind energia, mind impulzuscsere végbemehet, a teljes energia, ill. impulzus azonban állandó marad.

Egyetlen ponthoz azonban érdemes némi magyarázatot fűzni. A *rugalmatlan* ütközésekben az energia egy része olyan energiaformává alakul át, amit közvetlenül nem lehet kiszámítani (deformációs energia, belső energia, stb.), szigorúan véve azonban az energia természetesen ilyenkor is megmarad. Ezekben az esetekben azonban az energiamegmaradást kifejező egyenlet közvetlenül nem írható fel. Ugyanakkor az impulzusmegmaradási törvény a kölcsönhatás természetére tekintet nélkül is alkalmazható.

A megmaradó mennyiségekben való gondolkozás akkor is segít a feladatmegoldásban, ha a vizsgált rendszer nem zárt. Ekkor ugyanis felismerhetjük, hogy a betáplált energia (impulzus) a rendszer energiáját (impulzusát) növeli adott mértékben. Ezért mindig gondoljuk meg, hogy hol helyezkedik el a vizsgált rendszer határa és figyeljük, hogy van-e energia- vagy impulzusáramlás ezen a határon keresztül. Ilyen esetben jól használható a *munkatétel*, amely szerint a rendszerre ható erők összes munkája megegyezik a rendszer kinetikus energiájának megváltozásával.

Végül igen jól használható a feladatok megoldásában a konzervatív erők és a megfelelő potenciális energia- közötti összefüggés is. Ezt a következő fejezetekben még részletesebben tárgyaljuk. A fizikai elméleteket gyakran inkább energiákkal s nem erőkkel fogalmazzuk meg. Ennek az az oka, hogy az energia *skaláris* mennyiség és így matematikailag sokkal egyszerűbben kezelhető, mint az *erővektorok*. A kétféle tárgyalásmód azonban éppen a konzervatív erők és a potenciális energia között fennálló kapcsolat miatt többnyire egyenértékű.

Összefoglalva: az eddigiekben négy, a feladatmegoldásban igen hatékony módszert vezettünk be a *Newton törvényeket*, a *megmaradási törvényeket*, a *munkatételt* valamint a *konzervatív erők* és a *potenciális energia közötti relációt*. Vessük jól agyunkba az egyes módszerek ismertetőjeleit! Milyen erők hatnak? Zárt-e a rendszer? Csak konzervatív erők hatnak? Ha egyszer sikerült egy problémáról eldöntenünk, hogy melyik típusba tartozik, akkor a megoldás kezdő lépését is ismerjük, hiszen ez az adott típusban mindig azonos. Ha ismerjük az erőket, akkor megrajzoljuk a szabadtest diagramot és felírjuk a mozgásegyenleteket. Ha a rendszer zárt, akkor az $E_0 = E$ és $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}$ összefüggéseket alkalmazzuk. Amennyiben csak konzervatív erők működnek, akkor a $F = dU/dx$ képlettel dolgozunk.

Ezeknek a módszereknek a használatával hatalmas problémakör anyagát soroljuk négy osztályba, s erre igen könnyű emlékezni. Ez az egyszerűsítés jellemzi a jelenségek fizikai megközelítését – fel kell ismernünk az alapvető elveket, amelyek az elénk kerülő jelenségekben újra és újra felmerülnek. Ezekkel az elvekkel a világegyetem jelenségeinek nagy tömege rendezhető egyszerű gondolati sémákba.

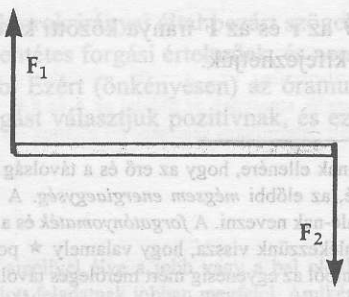
FORGATÓNYOMATÉK ÉS FORGÁSI EGYENSÚLY

Míg a forgatónyomatékon gondolkodtam forogni kezdett velem a világ
(EGY TANULÓ MEGJEGYZÉSE)

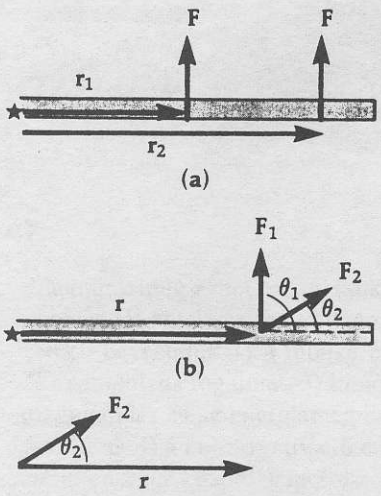
10.1 Bevezetés

A testek mozgását mindeddig úgy kezeltük, mintha pontszerű részecskék mozognának, s így nem vettük figyelembe a testek tömegközéppont körüli forgását. De a valós világban minden fizikai testnek véges kiterjedése van, és a forgás (a rotáció), akárcsak a haladás (a transzláció), gyakran közös tulajdonsága a mozgásnak. Ebben a fejezetben a véges kiterjedésű testek tanulmányozását kezdjük el, és megvizsgáljuk, mitől függ ezek nyugalmi állapota, vagy forgása állandó szögsebességgel, továbbá mi az oka annak, hogy olyan forgási gyorsulással rendelkeznek, amely megváltoztatja a szögsebességet. A legegyszerűbb esettel kezdjük: a *merev test* tárgyalásával. A merev test részecskéi megtartják egymáshoz viszonyított helyzetüket, még akkor is, ha a testre ható különböző erők következtében az bonyolult transzlációs és rotációs mozgást végez.

Ha egy testre ható erők összege zérus, akkor Newton második törvénye szerint a test mozgásállapota nem változik meg. Ha a test nyugalomban van, akkor nyugalomban is marad; ha mozgásban van, mindaddig megtartja állandó sebességét, amíg a rá ható erők összege: $\sum \mathbf{F} = 0$. De tekintsük a 10-1 ábrán látható testet! Jóllehet a rá ható erők összege zérus, nyilván mégsincs teljes egyensúlyban, mert forogni kezd. Ezért az ilyen test forgási egyensúlyának meghatározásához további feltétel szükséges.



10-1 ábra
Egy merev rúdra két egyenlő nagyságú ellentétes irányú erő hat. Annak ellenére, hogy $\Sigma \mathbf{F}=0$ és így a transzlációs egyensúlyi feltétel teljesül, a rúd nincs rotációs egyensúlyban.



(c) **r** és $\mathbf{F}_2$ vektorok által bezárt θ_2 szög meghatározása.

10-2 ábra
Lengőajtó felülről nézve. A csuklóspánt a bal oldalon van.

10.2 A forgatónyomaték

Tárgyalásunkat azzal kezdjük, hogy megvizsgáljuk, miként gyakoroljunk erőt egy lengőajtóra, hogy kinyíljon. A 10-2 ábrán a lengőajtó felülnézetben látható, forgástengelye a bal oldalon lévő csuklóspánt.

A csillag szimbólum (✶) a papír síkjára merőleges rögzített forgástengelyt jelent.

A 10-2a ábrából nyilvánvaló, hogy ha az ajtóra merőleges **F** erő az $\mathbf{r}_1$ távolságban hat, az nem annyira hatékony, mint amikor az **F** erő az $\mathbf{r}_2$ távolságban hat. Így **F** erőnek a tengelytől mért **r** merőleges távolsága igen jelentős tényező. Továbbá ugyancsak fontos az **r** és az **F** között lévő θ szög: mert adott **r** mellett mennél nagyobb a θ ($\leq 90^o$) szög, annál erősebben nyitja az **F** erő az ajtót. (Valóban, ha $\theta = 0$, akkor az ajtó egyáltalán ki sem nyílik.) Végül, az **F** erő nagysága is fontos. E három tényező segítségével definiáljuk az ***M*** **forgatónyomaték** fogalmát. A forgatónyomaték egy testre ható erőnek azt a hatását fejezi ki, amely a testnek a rögzített tengely körüli forgását eredményezi.

Az M forgatónyomaték (✶ tengelyre) $$M = rF\sin\theta \qquad \textbf{(10-1)}$$

Ebben az esetben r a ✶ tengely és az F erő támadáspontjának távolságát, θ az **r** és az **F** *iránya* által bezárt kisebbik szöget jelenti, amelyet úgy kapunk meg, hogy az **r** és **F** vektorokat (párhuzamosan eltolva) egy közös kezdőpontból mérjük fel (10-2c ábra), ahogyan azt a 10-2c ábra mutatja. A forgatónyomaték egysége[1] a *newton-méter* (N.m).

A 10-3 ábra egy, a ✶-gal jelölt helyen rögzített merev testet mutat, amelyre az **r** helyvektorú pontban a külső **F** erő hat. Jegyezzük meg, hogy a ✶ tengely körüli forgás szempontjából az erőnek csupán az **r** vektorra merőleges F_m komponense hatásos. (Az **r** vektorral párhuzamos F_p komponens a tengelyre csak húzóerőt fejt ki.) A merőleges komponens $F_m = F{\cdot}sin\theta$, így a forgatónyomaték (10-1) összefüggésnek megfelelően $r{\cdot}F_m = rF{\cdot}sin\theta$, azaz

$$M = rF_m \qquad \textbf{(10-2)}$$

Hatásvonal és erőkar (nyomatékkar)

A forgatónyomaték megértésének másik módja az erőkar (nyomatékkar) fogalmához kapcsolódik. Ehhez először az **F** erő **hatásvonalának** definiálása szükséges. A hatásvonal az erővektor mentén rajzolt, *mindkét irányban meghosszabbított* egyenes vonal. A 10-3 ábrán a *nyomatékkar* (vagy **erőkar, emelőkar**) a forgástengelytől az erő hatásvonaláig mért merőleges távolság[2].

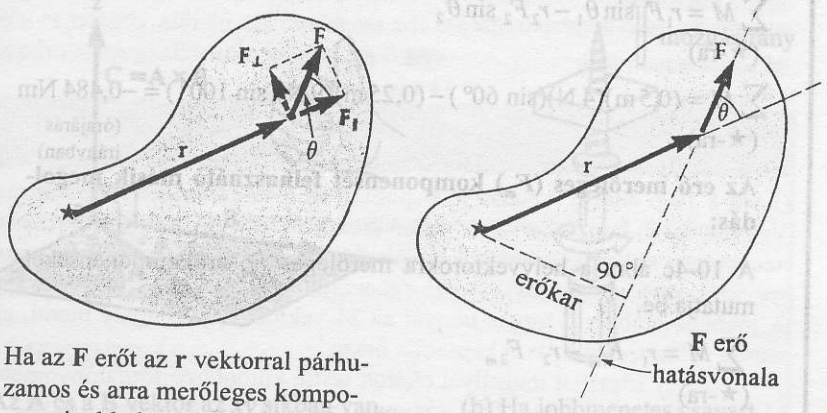
$$\text{(Nyomatékkar)} = r\cos(90°-\theta) = r\sin\theta \qquad \textbf{(10-3)}$$

ahol θ az **r** és az **F** iránya közötti kisebbik szög. Tehát a forgatónyomatékot így is kifejezhetjük:

---

[1] Annak ellenére, hogy az erő és a távolság szorzatának ugyanaz a dimenziója mint a munkáé, az előbbi *mégsem energiaegység*. A forgatónyomaték SI egységét soha nem szabad joule-nak nevezni. A *forgatónyomaték* és a munka teljesen más fogalmak.

[2] Emlékezzünk vissza, hogy valamely ✶ pontnak egy adott egyenestől mért távolsága a ✶ pontból az egyenesig mért merőleges távolság. Itt a ✶tengely valójában a papír síkjára merőleges *egyenes*, nem pedig egy pont. Két egymással nem párhuzamos egyenes távolságát, mint a közöttük lévő legrövidebb szakasz hosszát definiáljuk, és ez a szakasz mindkét egyenesre merőleges. Ez esetünkben megfelel a feltételeknek.



(a) Ha az **F** erőt az **r** vektorral párhuzamos és arra merőleges komponenseivel helyettesítjük, akkor csupán az $\mathbf{F}_\perp$ komponens gyakorol forgatónyomatékot a ★ tengely körül.

(b) A *erőkar* a ★ forgástengely és az **F** erő hatásvonala közötti távolság.

10-3 ábra
A merev test szabadon forog a rögzített ★ tengely körül. A külső **F** erő támadáspontja az **r** vektor által kijelölt pont.

Forgatónyomaték (★ tengelyre)

$$M = (\text{erő}) \times (\text{erőkar})$$
$$M = Fr \sin\theta \qquad (10\text{-}4)$$

A forgatónyomaték tehát az **F erő adott tengelyre vonatkozó nyomatéka.**

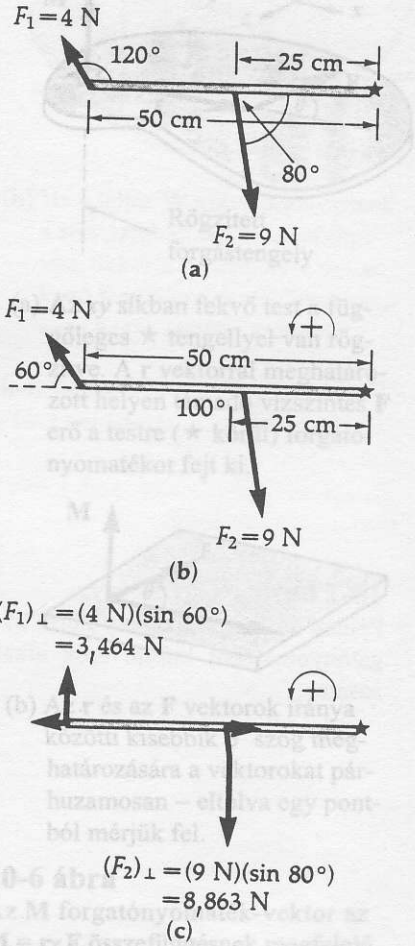
Adott forgatónyomaték hatására egy test vagy az óramutató járásával megegyező, vagy azzal ellentétes irányban forog, a megfigyelő nézőpontjától függően. *Mindig vegyük figyelembe a forgatónyomatékhoz tartozó forgás irányát.* Feladatok megoldásakor összegezni fogjuk a testre ható forgatónyomatékokat, hogy a *teljes (eredő)* forgatónyomatékot meghatározzuk. A rajzokon a két forgási irány közül az egyiket pozitívnak választjuk, és ↻ vagy ↺ szimbólummal jelöljük. Az így választottal ellentétes irányú forgatónyomatékok negatívak[3]. Ha külön forgatónyomatékokat összegezünk, akkor ezek pozitív vagy negatív előjelét figyelembe kell venni. Minthogy a forgástengely helyének megváltozásával az erőkarok hossza (és ezáltal a forgatónyomatékok nagysága) megváltozik, azért *mindig fontos annak a ★ tengelynek a megadása, amelynek alapján a forgatónyomatékot számítjuk.*

10-1 PÉLDA

A 10-4a ábrán látható 50 cm hosszú rúdra az F_1 és az F_2 erő hat. A rúd egyik vége a hosszára merőleges tengellyel van ellátva. Határozzuk meg a ★-gal jelölt tengelyre vonatkozó forgatónyomatékok eredőjét!

MEGOLDÁS

A 10-4b ábrán az erők és a helyvektorok irányai által bezárt szögek láthatók. A forgatónyomatékok ellentétes forgási értelműek, és nem világos, hogy melyikük a nagyobb. Ezért (önkényesen) az óramutató járásával ellentétes irányú forgást választjuk pozitívnak, és ezt a ↺ szimbólummal jelöljük.



10-4 ábra
A 10-1 példához.

[3] Ez azzal a választási szabadsággal analóg, amellyel élve a jobb vagy a bal oldali irány közül azt választjuk pozitívnak, amely az adott feladatnak jobban megfelel. Amiként ezt a választott irányt kicsiny nyilakkal jelöljük, ugyanúgy a választott forgási irányt a ↻ vagy a ↺ szimbólummal látjuk el.

$$\sum M = r_1 F_1 \sin\theta_1 - r_2 F_2 \sin\theta_2$$
(★-ra)

$$\sum M = (0{,}5\,\text{m})(4\,\text{N})(\sin 60°) - (0{,}25\,\text{m})(9\,\text{N})(\sin 100°) = -0{,}484\,\text{Nm}$$
(★-ra) (órajárás irányban)

Az erő merőleges (F_m) komponensét felhasználó másik megoldás:

A 10-4c ábra a helyvektorokra merőleges F_m erőkomponenseket mutatja be.

$$\sum M = r_1 \cdot F_{1m} - r_2 \cdot F_{2m}$$
(★-ra)

$$\sum M = (0{,}5\,\text{m})(3{,}464\,\text{N}) - (0{,}25\,\text{m})(8{,}864\,\text{N}) = -0{,}484\,\text{Nm}$$
(★-ra) (órajárás irányban)

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy amikor forgatónyomatékokat számítunk, akkor minden erőkart és minden erőt *pozitív számként* veszünk figyelembe. Csak azt követően, hogy az egyik forgási irányt „pozitívnak" választottuk, látjuk el az egyes forgatónyomatékokat a megfelelő előjellel.

10.3 A forgatónyomaték-vektor

A forgási mennyiségek meghatározására létezik egy nagyon kényelmes művelet. Ez a művelet két vektor **vektoriális szorzása**. **A** × **B** -nek írjuk, és „A kereszt B"-nek mondjuk. Ez a szorzat egy harmadik vektort definiál, melynek nagysága [4]

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \equiv AB \sin\theta \qquad \textbf{(10-5)}$$

ahol θ az **A** és a **B** vektorok iránya által bezárt kisebbik szög. Az **A**×**B** szorzatvektor iránya definíció szerint *merőleges az* **A** *és a* **B** *vektorokat tartalmazó síkra.* Persze, ehhez a síkhoz két merőleges irány is tartozik. A kettőből, *megállapodás szerint* a 10-5 ábrán illusztrált **jobbkéz-szabály**nak megfelelő irányt választjuk.[5]

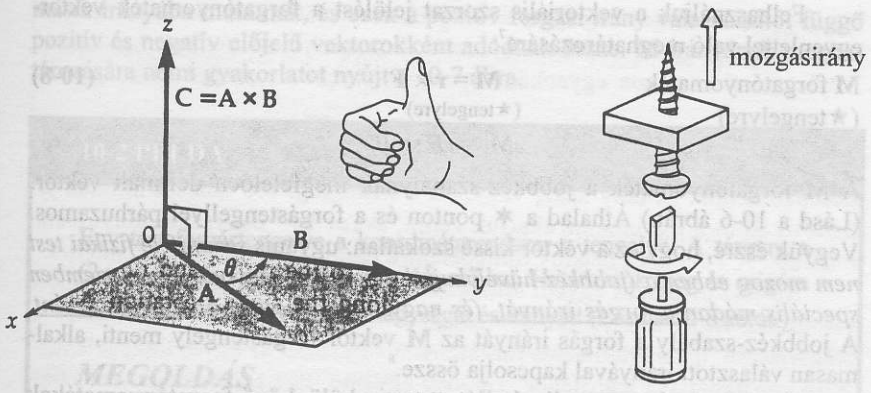
A vektorális szorzatra vonatkozó jobbkéz-szabály

Az **A** vektornak θ szöggel **B** irányába való forgatása egy forgási irányt határoz meg. Ha jobb kezünk ujjait ebben a forgási irányban begörbítjük, akkor kinyújtott hüvelykujjunk a **C** = **A**×**B** vektor irányába mutat.

[4] Geometriailag az $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ abszolút érték annak a parallelogrammának a területével egyenlő, amelynek az oldalai az **A** és a **B** vektorok. A vektorális szorzat Descartes koordinátáit determináns segítségével írhatjuk fel:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

[5] A *jobbkéz-szabály* választása konzisztens azzal, hogy mindig *jobbsodrású* koordinátarendszerrel dolgozunk – vagyis olyannal, amelyikben a z tengely körüli 90°-os jobbsodrású elforgatás az x tengelyt az y tengelybe viszi át. tehát $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$. Hasonlóképpen $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$. Megjegyezzük továbbá, hogy $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$, mert $\sin 0° = 0$.



(a) Az **A** és a **B** vektor az *xy* síkban van. Az **A** vektor θ szöggel **B** vektorba való forgatása egy forgásirányt tűz ki. Ha *jobb kezünk* ujjait ebbe a forgásirányba görbítjük, akkor kinyújtott hüvelykujjunk a $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vektor irányába mutat. A **C** vektor a *z* tengely pozitív irányába mutat, azaz merőleges az **A** és a **B** vektorokat tartalmazó síkra.

(b) Ha jobbmenetes csavart fadarabba csavarunk, a csavar abba az irányba halad, amely – megegyezően a jobbkéz-szabállyal – a forgásirányhoz a forgástengely irányába mutató vektort rendeli. Ha a csavart kicsavarjuk a fából, a csavar mozgása továbbra is konzisztens marad a jobbkéz-szabállyal.

10-5 ábra
A vektorális szorzatra vonatkozó jobbkéz-szabály.

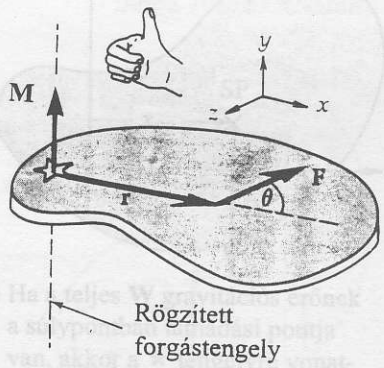
Megjegyezzük, hogy „balkéz-szabály" ellentétes irányú vektort produkálna. Megjegyezzük továbbá, hogy ha a vektorokat fordított sorrendben szorozzuk össze, akkor az eredő vektor ellentétes irányú lesz:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \qquad (10\text{-}6)$$

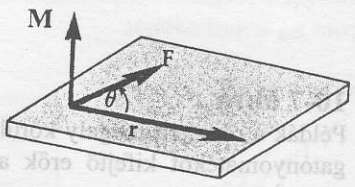
Így tehát a vektortényezők *sorrendje nagyon fontos*. Végül: ha a két vektor egyike egy skalárral van megszorozva, akkor a szorzatvektort úgy is felírhatjuk, mint a vektorális szorzat skalárszorosát. Így:

$$(m\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad (10\text{-}7)$$

A forgással kapcsolatos fogalmak vektorok segítségével való kifejezése nagyon kényelmes, mert az így kapott egyenletek *minden* koordinátarendszerben érvényesek, pl. a derékszögű, a polár, a gömbi, stb. koordinátarendszerben is. Továbbá a vektori írásmód egyszerűbb, mint az egyenletek komponensenként, skalár alakban való felírása. De még alaposabb ok az, hogy a vektor-egyenletek akkor is *megtartják alakjukat,* , ha a koordinátarendszer egy új helyzetbe eltolódik, vagy elfordul. Tudjuk, hogy a fizika törvényei a koordinátarendszer eltolásával és elforgatásával szemben változatlanok[6], így a vektorokkal való felírás a legalkalmasabb a fizika alapvető kapcsolatainak megadására.



(a) Az *xy* síkban fekvő test a függőleges ★ tengellyel van rögzítve. A **r** vektorral meghatározott helyen támadó vízszintes **F** erő a testre (★ körül) forgatónyomatékot fejt ki.



(b) Az **r** és az **F** vektorok iránya közötti kisebbik θ szög meghatározására a vektorokat párhuzamosan – eltolva egy pontból mérjük fel.

10-6 ábra
Az **M** forgatónyomaték-vektor az $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ összefüggésnek megfelelő jobbkéz-szabály szerint a ★ tengely irányába mutat.

[6] E kijelentés mögött az az alapvető feltételezés, hogy a tér homogén és izotrop. A *homogén* kifejezés annyit jelent, hogy a tér a *helytől* függetlenül mindenütt ugyanolyan tulajdonságú, míg az *izotrop* kifejezés arra utal, hogy a tér tulajdonságai függetlenek az *iránytól.* Ha ezek a térre vonatkozó feltételezések helytállóak, akkor nem számít, hogy hol választjuk meg koordinátarendszerünk origóját és, hogy milyen irányba állítjuk a tengelyeket.

Felhasználjuk a vektoriális szorzat jelölést a forgatónyomaték vektor-egyenlettel való meghatározására[7]:

M forgatónyomaték (★tengelyre) $\quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (★tengelyre) $\quad |\mathbf{M}| = rF \sin\theta.$ **(10-8)**

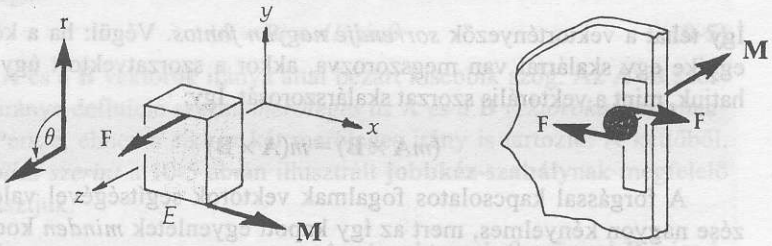
A **M** forgatónyomaték a jobbkéz-szabálynak megfelelően definiált vektor. (Lásd a 10-6 ábrát.) Áthalad a ★ ponton és a forgástengellyel párhuzamos. Vegyük észre, hogy ez a vektor kissé szokatlan: ugyanis *semmiféle fizikai test nem mozog ebben a (jobbkéz-hüvelykujjal definiált) irányban. Ezzel szemben speciális módon a forgás irányát, (és nagyságát) fejezi ki önálló vektorként.* A jobbkéz-szabály a forgás irányát az **M** vektor forgástengely menti, alkalmasan választott irányával kapcsolja össze.[8]

Ha egy rögzített tengellyel ellátott testre különböző forgatónyomatékok hatnak, akkor az egyes forgatónyomaték-vektorok a tengely egyik vagy



(a) Egy henger szabadon forog a rözített ★ tengely körül. Az *m* tömegű testet tartó kötélben ébredő **T** feszítőerő **M** forgatónyomatékot gyakorol (a ★ tengely körül) a papír síkjára merőlegesen befelé mutató irányban. A forgatónyomaték-vektor a ★ forgástengely mentén fekszik.

(b) A csavaranya csavarorsóról történő lecsavarásához a csavarkulcsra az ábrázolt módon **F** erőt gyakorolunk. Ez az erő a papír síkjából kifelé mutató **M** forgatónyomatékot eredményez. A forgatónyomaték-vektor a ★ csavartengely mentén fekszik.



(c) A doboz *E* él körül történő felbillentéséhez szükséges, hogy a dobozra az ábrán látható módon alkalmazott erő (az *E* él körül) a pozitív *x* tengely irányába mutató **M** forgatónyomatékot gyakoroljon.

(d) A kilincsgombnak óramutató járásával megegyező irányban való csavarása a kilincsgomb tengelyében ható **M** forgatónyomaték-vektort létesít.

10-7 ábra
Példák a rögzített tengely körül **M** forgatónyomatékot kifejtő erők alkalmazására.

---

[7] A forgatónyomatéknak a (10-8) vektoriális szorzattal való definíciója általában nem tengelyre, hanem pontra (a koordinátarendszer origójára) vonatkozó mennyiséget definiál! A szerzők azonban most nyilvánvalóan csak síkbeli erőrendszerrel foglalkoznak, ahol a forgástengely merőleges az erőrendszer síkjára, s a koordinátarendszer kezdőpontját a tengely és a sík döféspontjába helyezik. Ebben az esetben a forgatónyomaték-vektor a tengely irányába mutat, s a pontra definiált vektoriális szorzat megegyezik a tengelyirányú összetevővel (A fordító megjegyzése.).

[8] Az így definiált vektorok matematikai tulajdonságai mások, mint a „közönséges" vektoroké, amilyenek például az elmozdulás és a sebesség. Hogy ezt a két vektorcsoportot megkülönböztessük, azokat, amelyek forgással kapcsolatosak, *axiális-* vagy *pszeudovektoroknak*, míg a „közönséges" vektorokat *polárvektoroknak* nevezzük.

másik irányába mutatnak, és ezek a pozitív forgási irány választásától függő pozitív és negatív előjelű vektorokként adódnak össze. **M** irányának meghatározására némi gyakorlatot nyújt a 10-7 ábra.

10-2 PÉLDA

Egy test forgástengelye a koordinátarendszer z tengelye. A tárgyra a (2 m, 1 m, 0) pontban $\mathbf{F} = 3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}}$ erő hat. Határozzuk meg az origóra vonatkozó forgatónyomaték nagyságát és irányát! (Lásd a 10-8 ábrát.)

MEGOLDÁS

Az **F** erő nagysága $\sqrt{(3\,\mathrm{N})^2 + (4\,\mathrm{N})^2} = 5\,\mathrm{N}$, az x tengellyel bezárt szöge $\psi = \arctg\frac{4}{3} = 53{,}13°$. Az **r** helyvektor szöge $\Phi = \arctg\frac{1}{2} = 26{,}57°$, nagysága $\sqrt{(2\,\mathrm{m})^2 + (1\,\mathrm{m})^2} = 2{,}236\,\mathrm{m}$. Így az **F** és az **r** irányaival bezárt szög: $\Theta = (53{,}13° - 26{,}57°) = 26{,}57°$.

$$|\mathbf{M}| = |r||F|\sin\theta = (2{,}236\,\mathrm{m})(5\,\mathrm{N})\sin(26{,}57°) = 5{,}00\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}.$$

Mivel **r** és **F** az xy síkban fekszik, a jobbkéz-szabály szerint $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ a z tengely irányába esik

Vektoriális jelöléssel a megoldás:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = (2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}})\times(3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}})$$

Tekintettel arra, hogy $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}} = 0$ (hiszen $\sin 0° = 0$), és mert $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$, azért $M = 2\hat{\mathbf{x}}\times 4\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{y}}\times 3\hat{\mathbf{x}} = 8\hat{\mathbf{z}} - 3\hat{\mathbf{z}} = (5{,}00\,N)\hat{\mathbf{z}}$

10.4 A súlypont és a tömegközéppont

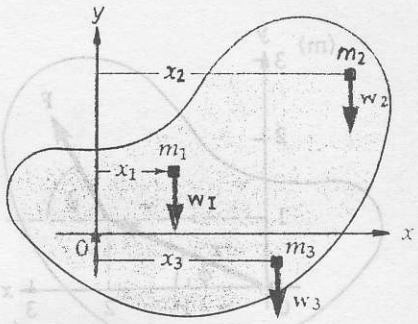
Mielőtt a kiterjedt testekre ható forgatónyomatékokat gravitáció jelenlétében vizsgálni kezdenénk, szükséges, hogy a gravitációs erőről részletesebb ismereteket szerezzünk. Minden, a Föld közelében lévő testre olyan gravitációs erő hat, amely a tárgyon szétosztva, annak minden egyes atomját befolyásolja. Ez a tény izgalmas kérdést vet fel: Ha egy tárgyra gravitációs erők következtében hatnak forgatónyomatékok, akkor vajon hogyan összegezhetjük ezt az óriási számú bonyolult nyomatékot, amelyeknek mindegyike egy-egy egyedi atomra ható gravitációs erő és ezen atom saját erőkarjának szorzataként állítható elő?

Szerencsére ezt a képtelen sok számolási műveletet egyetlen egyre csökkenthetjük a test súlypontjának (SP) meghatározása révén:

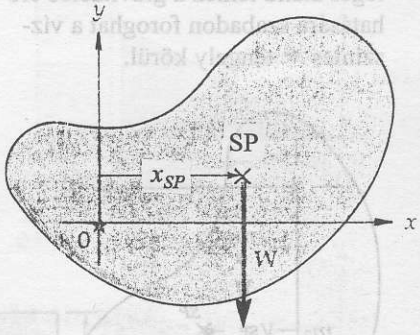
A SÚLYPONT (SP) az a pont, ahol a W gravitációs erőhatást egyesítve képzeljük, azért, hogy a gravitációtól származó forgatónyomatékot kiszámíthassuk.

Csupán ennek a megfontolásnak a segítségével vagyunk képesek az egyes részecskékre érvényes Newton törvényeket a gravitációs térben mozgó kiterjedt test általános esetére kiterjeszteni.

Tekintsünk egy vékony fémlemezből kivágott, tetszésszerinti testet! Állítsuk függőlegesen, és csatlakoztassuk egy (rögzített) vízszintes, a testre me-

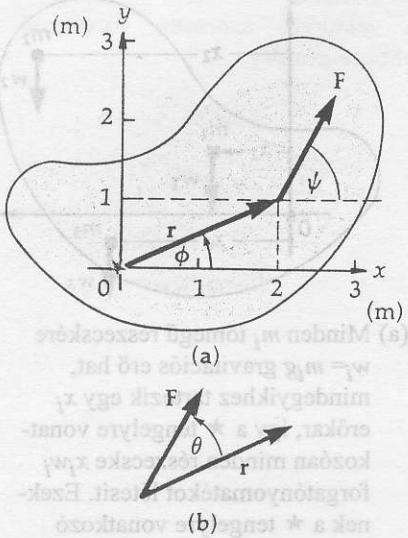


(a) Minden m_i tömegű részecskére $w_i = m_i g$ gravitációs erő hat, mindegyikhez tartozik egy x_i erőkar, így a ★ tengelyre vonatkozóan minden részecske $x_i w_i$ forgatónyomatékot létesít. Ezeknek a ★ tengelyre vonatkozó forgatónyomatékoknak az összege a gravitációs erő eredő forgatónyomatéka.

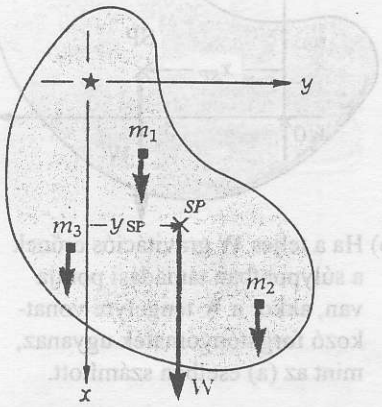


(b) Ha a teljes **W** gravitációs erőnek a súlypontban támadási pontja van, akkor a ★ tengelyre vonatkozó forgatónyomaték ugyanaz, mint az (a) esetben számított.

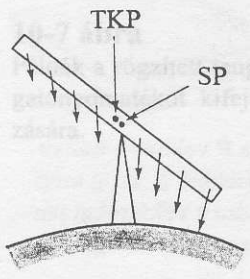
10-8 ábra
A 10-2 példához.



10-9 ábra
A függőleges síkban fekvő, tetszőleges alakú lemez a gravitációs erő hatására szabadon foroghat a vízszintes ★ tengely körül.



10-10 ábra
Az előző ábrán szereplő testet az óramutató járásával megegyező irányban 90°-kal elforgatva megkapjuk a súlypont y_{SP} koordinátáját.



10-11 ábra
Az inhomogén gravitációs térben a test tömegközéppontja és súlypontja nem esik egybe. (Ha súlypont egyáltalán definiálható. A ford.)

rőlegesen álló forgástengelyre! Koordinátarendszerünk O középpontját a★ forgástengely egyik pontjába helyezzük. A test teljes M tömegét úgy tekinthetjük, mintha számos, egyenként m_i elemi tömegrészecskéből állna. Így:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \sum m_i$$

Elképzelhetünk néhány száz, vagy, ha a nehézségi erő hatását minden jelenlévő atomra figyelembe akarjuk venni, akkor 10^{23} nagyságrendnyi elemi tömeget. A 10-9 ábra néhány tömegelemre ható nehézségi erőt szemléltet.

Mi lesz az összes egyedi tömegelemre ható gravitációs erő ★ tengelyre vonatkozó teljes ΣM forgatónyomatéka? Minden egyes $w_i = m_i g$ erőnek x_i erőkarja van, így a gravitációs forgatónyomaték, amit az egyes tömegelemek ★-ra vonatkoztatva létesítenek, $x_i w_i$-vel egyenlő. Ezért a ★-tengelyre vonatkozó teljes forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + \cdots = \Sigma x_i w_i \qquad \textbf{(10-9)}$$
(★-ra)

Az x_{SP} távolságot most úgy definiáljuk, hogy az az SP súlypont nyomatékkarja legyen. Így

$$\Sigma\mathbf{M} = x_{SP}\Sigma w_i \qquad \textbf{(10-10)}$$
(★-ra)

A kétféle forgatónyomatéki egyenlet összehasonlításából x_{SP}:

A súlypont (x koordinátája)
$$x_{SP} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \qquad \textbf{(10-11)}$$

Feltételeztük, hogy az egész testre (mint a többi, e könyvben tárgyalt esetben is) g mindenütt egyenlő (homogén). A (9-10) egyenlettel való összevetésből láthatjuk, hogy *egy test súlypontja megegyezik a test tömegközéppontjával, feltéve, hogy a test minden pontja homogén gravitációs mezőben van.*[9]

Az SP pont y koordinátáját oly módon kapjuk meg, hogy a testet 90°-kal elforgatjuk úgy, hogy a gravitáció az eredeti x tengely mentén hasson, lásd a 10-10 ábrát. Háromdimenziós testekre z_{SP} értékét is megtalálhatjuk. Olyan rendszerre, amelynek csak néhány tömegpontja van, az összegezés közvetlenül is elvégezhető. Kiterjedt testekre, amelyek anyageloszlása folytonos, olyan számítási eljárást alkalmazunk, amely a véges *összeget* az infinitezimális *dm* tömegelemekre ható *dw* gravitációs erővel számolva *integrálba* viszi át. Egyenletekkel kifejezve:

jelölésmód végesszámú tömegpontra	**integrál alakú jelölésmód folytonos tömegeloszlásra**
$x_{SP} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$	$x_{SP} = \frac{\int x\, dw}{\int dw}$ (Az egész testre integrálva)

(10-12)

[9] A homogén rúd tömegközéppontja a geometriai középpontban van. Azonban inhomogén gravitációs térben súlypontja a 10-11 ábrán látható helyzetben kissé a rúd alsó része felé tolódik el, mert erre, minthogy közelebb van a Földhöz, nagyobb gravitációs erő hat. Az „egyensúlyi pont" közvetlenül a súlypont alatt van. Más helyzetekben a súlypont máshova kerül. Persze a tömegközéppont minden helyzetben egyazon helyen marad, mert azt a gravitációs mezőre hivatkozás nélkül definiáltuk. (Inhomogén térben a súlypont definiálása többnyire értelmetlen. A fordító megjegyzése.)

Hasonló kifejezés írható fel y_{SP}-re és z_{SP}-re is. A három komponens egyenlete egyetlen $\mathbf{r}_{SP} = x_{SP}\hat{\mathbf{x}} + y_{SP}\hat{\mathbf{y}} + z_{SP}\hat{\mathbf{z}}$ *vektoregyenletbe* foglalható össze:

A súlypont helye:

$$\mathbf{r}_{SP} = \frac{\sum \mathbf{r}_i w_i}{\sum w_i} \qquad \mathbf{r}_{SP} = \frac{\int \mathbf{r}\, dw}{\int dw} \qquad \textbf{(10-13)}$$

(Az egész testre integrálva)

ahol $\mathbf{r}_i$ (vagy $\mathbf{r}$) a $w_i = m_i g$ (vagy a $dw = g \cdot dm$) súlyú m_i (vagy dm) elemi tömeg helyzet-vektora. Vegyük észre, hogy mindkét kifejezés esetén a nevező nem más, mint a test teljes W súlya.

Nem szükséges, hogy a test súlypontja a test valóságos anyagán belül legyen. Például egy fánk (sütemény) súlypontja üregének geometriai középpontjában van. A homogén (egyenletes sűrűségű), szimmetrikus testek súlypontja mindig a szimmetriaközéppontban van. De a súlypont akkor is a szimmetriatengelyen van, ha a test sűrűsége a szimmetriatengelytől kifelé csak radiálisan változik. Sőt, a tárgyak szimmetriája gyakran kulcsa a súlypont meghatározásának, és a szimmetriatulajdonságok megfigyelése révén a súlypont helyét gyakran ránézéssel is meg lehet állapítani.

Tömegközéppont számítások

Minthogy ebben a könyvben csak homogén gravitációs térben lévő testekkel foglalkozunk, ezért a súlypontra vonatkozó számításaink megegyeznek a tömegközéppontra vonatkozóakkal. Tájékoztatásul álljanak itt a (9-8) egyenlettel megadott definíciók:

A tömegközéppont (TKP) helye:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\sum \mathbf{r}_i m_i}{M} \qquad \mathbf{r}_{TKP} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{M} \qquad \textbf{(10-14)}$$

(integrálva az egész testre)

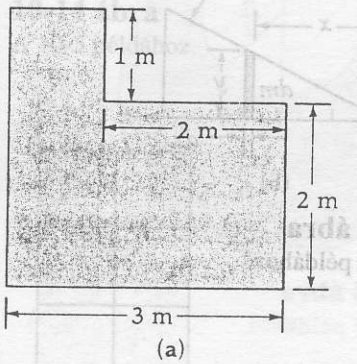
10-3 PÉLDA

Határozzuk meg a 10-12a ábrán látható, homogén lemezből kivágott L alakú test tömegközéppontját!

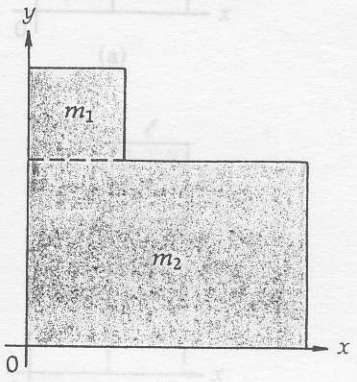
MEGOLDÁS

A számolás egyszerűsítésére osszuk fel képzeletben a testet két szimmetrikus darabra (10-12b ábra). Tudjuk, hogy mindkét rész tömegközéppontja a geometriai középpontban van. A lemez A nagyságú területének m tömege: $m = (A)\,(\rho$ sűrűség$)\,(t$ vastagság$)$. Így:

	A résztest tömege (terület)(ρt)	A tömegkp. koord. (x,y)
m_1:	(1 m)(1 m)(ρt)	(0,50 m; 2,5 m)
m_1:	(3 m)(2 m)(ρt)	(1,5 m; 1 m)



(a)



(b)

10-12 ábra
A 10-3 példához.

Tehát

$$x_{TKP} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}50\ \text{m})(1\ \text{m})(1\ \text{m})(\rho t) + (1{,}5\ \text{m})(3\ \text{m})(2\ \text{m})(\rho t)}{(1\ \text{m})(1\ \text{m})(\rho t) + (3\ \text{m})(2\ \text{m})(\rho t)}$$

$$= \frac{9{,}5\ \text{m}}{7{,}0} = \underline{\underline{1{,}36\ \text{m}}}$$

$$y_{TKP} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2{,}5\ \text{m})(1\ \text{m})(1\ \text{m})(\rho t) + (1\ \text{m})(3\ \text{m})(2\ \text{m})(\rho t)}{(1\ \text{m})(1\ \text{m})(\rho t) + (3\ \text{m})(2\ \text{m})(\rho t)}$$

$$= \frac{8{,}5\ \text{m}}{7{,}0} = \underline{\underline{1{,}21\ \text{m}}}$$

Tehát a tömegközéppont koordinátái: (1,36 m, 1,21 m)

10-4 PÉLDA

A 10-13 ábrán látható háromszög alakú test homogén anyagú lemezből készült. Keressük meg a tömegközéppontját!

MEGOLDÁS

Minthogy az anyag homogén, azért sűrűsége (ρ = tömeg/térfogat) állandó. Jelöljük a lemez vastagságát t-vel! (Számításaink során mind ρ, mind t ki fog esni.) Ebben az esetben a dm tömegelemek összegezésére integrálást alkalmazunk. Példánkban lényeges szempont, hogy a 10-13b ábrán láthatóan **a kiválasztott dm tömegelem minden pontjának abszcisszája ugyanaz az x érték**. A dm tömegelem magassága az integrálás során változik, határát az $y = x/2$ egyenes képezi.

Most a dm tömegelemet integrálásra alkalmas változó segítségével fejezzük ki. *Mindig figyelembe kell vennünk, hogy*

$$dm = \rho\, dV,$$

ahol dV a dm tömegelem térfogata. A 10-13b ábrából

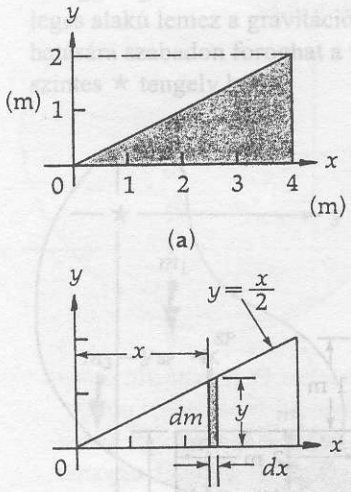
$$dV = (\text{magasság})(\text{vastagság})(\text{szélesség}) = y\, t\, dx = \left(\frac{x}{2}\right) t \cdot dx$$

Így $dm = \rho t(x/2)dx$. Ezzel dm -et a dx változóval fejeztük ki.

$$x_{TKP} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{4\ m} x\rho t\left(\frac{x}{2}\right)dx}{\int_0^{4\ m} \rho t\left(\frac{x}{2}\right)dx}$$

$$x_{TKP} = \frac{\left(\frac{\rho t}{2}\right)\int_0^{4\ \text{m}} x^2\,dx}{\left(\frac{\rho t}{2}\right)\int_0^{4\ \text{m}} x\,dx} = \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{4\ \text{m}}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{4\ \text{m}}} = \frac{2}{3}x\Big|_0^{4\ \text{m}} = \frac{8}{3}\text{m} = 2{,}67\ \text{m}$$

Tehát a tömegközéppont x koordinátája a derékszögű háromszög csúcsától mérve a háromszög x tengelyen levő oldalának 2/3-ában van. Hasonló módon állapíthatjuk meg a tömegközéppont y koordinátáját az x tengellyel párhuzamos dy szélességű dm tömegelem



10-13 ábra
A 10-4 példához.

választással. Az iméntihez hasonló számítás az $y_{TKP} = 0{,}667$ m eredményre vezet. Tehát a tömegközéppont koordinátái

(2,67 m; 0,667 m)

Általában minden tetszőleges, állandó sűrűségű anyagból készített háromszög (nem csupán a derékszögű háromszög) tömegközéppontja bármelyik csúcstól a szemközti oldal középpontjához húzott egyenesen, a csúcstól számítva annak 2/3-ában van.

10-5 PÉLDA

Négy, állandó sűrűségű, l élhosszúságú kocka a 10-14 ábrán látható módon L alakú testté van összeragasztva. Keressük meg a test tömegközéppontját!

MEGOLDÁS

A szimmetriából következően minden egyes kocka tömegközéppontja a geometriai középpontban van. Minthogy ezek a középpontok mind a $z = l/2$ síkban vannak, azért ebből következően a tömegközéppont z koordinátája is ebben a $z_{TKP} = l/2$ síkban helyezkedik el.

Az x és az y koordináták kiszámításához tekintsük a 10-14b ábrát, és képzeljük a rendszert olyan elrendezésnek, amely a kockák geometriai középpontjában lévő pontszerű M tömegekből áll. Így:

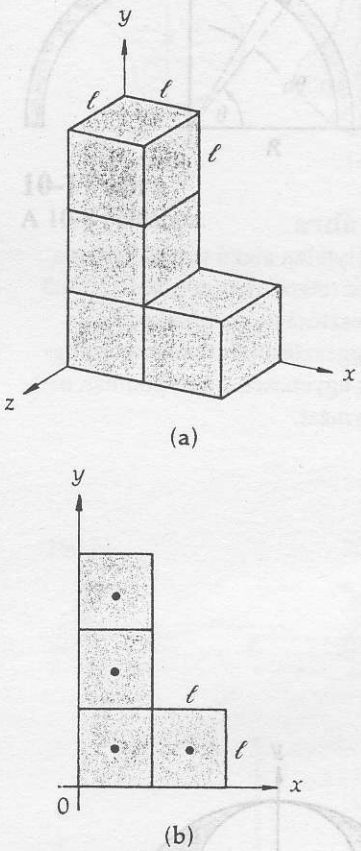
$$x_{TKP} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_{TKP} = \frac{M\left(\frac{\ell}{2}\right) + M\left(\frac{\ell}{2}\right) + M\left(\frac{\ell}{2}\right) + M\left(\frac{3\ell}{2}\right)}{M + M + M + M} = \frac{3\ell}{4}$$

$$y_{TKP} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$y_{TKP} = \frac{M\left(\frac{5\ell}{2}\right) + M\left(\frac{3\ell}{2}\right) + M\left(\frac{\ell}{2}\right) + M\left(\frac{\ell}{2}\right)}{M + M + M + M} = \frac{5\ell}{4}$$

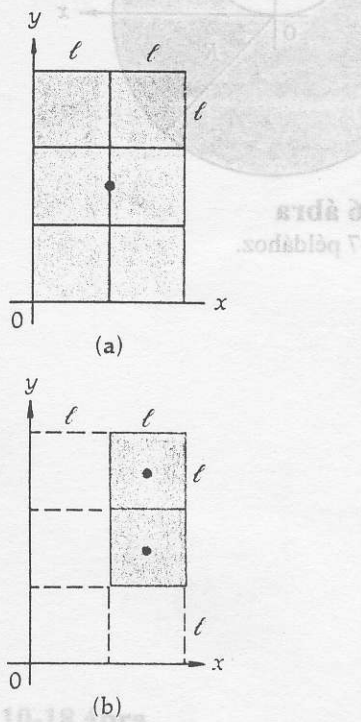
Tehát a tömegközéppont a $\left(\frac{3l}{4}; \frac{5l}{4}; \frac{l}{2}\right)$ pontban van.



10-14 ábra
A 10-5 példához.

10-6 PÉLDA

A *„negatív" tömeg módszere.* Ha valamely test kis kiegészítéssel szimmetrikussá tehető, akkor a tömegközéppont meghatározására hasznos az alább ismertetett módszert alkalmazni. A módszert az előbbi példa most következő megoldásával illusztráljuk. Először a 10-14 ábrán látható testhez további két kockát illesztünk azért, hogy a 10-15a ábrán bemutatott, $6M$ tömegű szimmetrikus test keletkezzék. E test tömegközéppontjának x és y koordinátái szimmet-



10-15 ábra
A 10-6 példához.

ria folytán (*l; 3l/2*). Ezután tekintetbe vesszük azt a *-2M* tömegű „negatív" tömeget, melynek tömegközéppontja, amint ezt a 10-15b ábra mutatja, a *(3l/2; 2l)* pontban van. Végül a két testet „összeadjuk". Az eljárás során létrejön a 10-5 példában szereplő eredeti L alakú test. A tömeg-középpont számítása a következő:

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(6M)(\ell) + (-2M)\left(\frac{3\ell}{2}\right)}{6M + (-2M)} = \frac{3\ell}{4}$$

$$y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{(6M)\left(\frac{3\ell}{2}\right) + (-2M)(2\ell)}{6M + (-2M)} = \frac{5\ell}{4}$$

$$z_{TKP} = \frac{\ell}{2}$$

A tömegközéppont a $\frac{3l}{4}; \frac{5l}{4}; \frac{l}{2}$ pontban van.

10-7 PÉLDA

Homogén anyagú, vékony fémlemezből készült *R* sugarú körlapból *R/2* sugarú köralakú lyuk van kivágva. A lyuk széle a körlap peremét érinti. Határozzuk meg a tömegközéppont távolságát az eredeti teljes körlemez középpontjától!

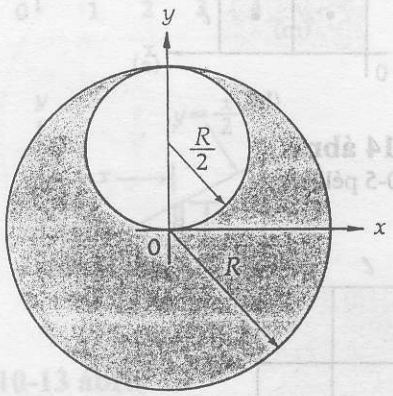
MEGOLDÁS

A lyukat úgy kezeljük, mint az eredeti hiánytalan, körlemezzel egyesített „negatív tömegű" testet. (Ha majd a kettőt összeadjuk, akkor a lyuk-tartomány zérus tömegű lesz.) Szimmetria okból a tömegközéppont a 10-16 ábra *y* tengelyen van, ezért $x_{TKP} = 0$. Az *m* tömegűnek tekintett eredeti körlap középpontjába helyezett origóval számolva:

	Tömeg	tömegközéppont
Eredeti (teljes) körlap	$m_1 = m$	(0; 0)
Negatív tömegű lyuk	$m_2 = -\frac{m}{4}$	(0; *R/2*)

Tehát $y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(0) + \left(-\frac{m}{4}\right)\left(\frac{R}{2}\right)}{(m) + \left(-\frac{m}{4}\right)} = -\frac{R}{6}$

A tömegközéppont a $\left(0; -\frac{R}{6}\right)$ pontban van.



10-16 ábra
A 10-7 példához.

10-8 PÉLDA

Vékony, homogén anyagú drót R sugarú félkörré van hajlítva. Határozzuk meg a tömegközéppontját! Lásd a 10-17. ábrát!

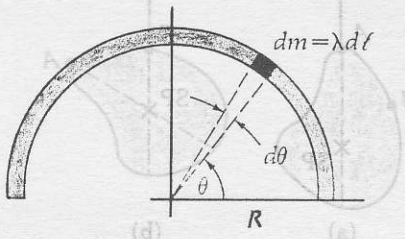
MEGOLDÁS

A drót mentén kiválasztunk egy dl hosszúságú elemi részt. Ez kifejezhető $dl = R\,d\theta$ *alakban.* Az elemi rész tömege $dm = \lambda\,dl$, ahol λ a drót fajlagos tömege: λ = a drót tömege/a drót hossza. (A λ faktor számításainkban ki fog esni.) Így $dm = \lambda R d\theta$, és θ az integrálási változó. A szimmetriából következtetjük, hogy $x_{TKP} = 0$; y_{TKP} kiszámításához figyelembe vesszük, hogy $y = R\sin\theta$. Az általános kifejezéssel számolva

$$y_{TKP} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int (R\sin\theta)(\lambda R d\theta)}{\lambda \int d\ell} = \frac{R^2\lambda\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}{\lambda\pi R}$$

$$y_{TKP} = \frac{R}{\pi}\Big[(-\cos\theta)\Big]_0^\pi = \frac{R}{\pi}\big[-(-1)-(-1)\big] = \frac{2R}{\pi}$$

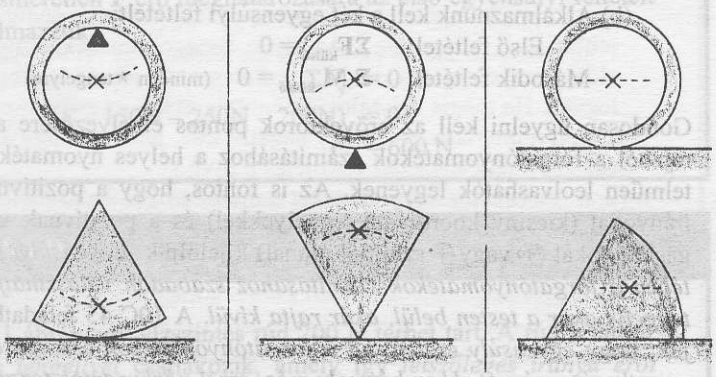
Így a tömegközéppont a $\left(0;\ \frac{2R}{\pi}\right)$ pontban van.



10-17 ábra
A 10-8 példához.

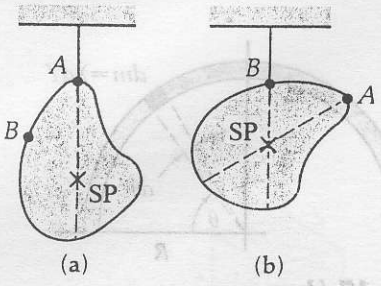
10.5 Egyensúly

A mérnökök számára fontos kérdés az egyes műszaki szerkezetek stabilitása és egyensúlya a gravitációs térben. Minden erőt és forgatónyomatékot, ami a szerkezeti elemekre hat, figyelembe kell venniük, hogy olyan hidakat tudjanak építeni, amelyek nem szakadnak le, olyan épületeket tervezhessenek, amelyek nagy szélben sem dőlnek fel, olyan gátakat, amelyeket a víz nyomása nem tör át. Ezek a problémakörök a mechanika *statikának* nevezett ágához tartoznak. A statika (egy inerciarendszerre vonatkoztatottan) a *statikai egyensúlyban* lévő, vagy pedig a dinamikai egyensúlyban lévő (transzlációs vagy szöggyorsulás nélkül, állandó sebességgel mozgó) testekkel foglalkozik.



(a) Stabilis (biztos) egyensúly. (b) Instabil (bizonytalan) egyensúly. (c) Semleges egyensúly.

10-18 ábra
Szilárd testek egyensúlyi helyzetei.



10-19 ábra
A szabálytalan alakú test súlypontja a test két tetszőleges pontban történő felfüggesztésével meghatározható. A felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenesek a súlypontban metszik egymást.

Gravitáció jelenlétében a tárgyak stabilitása attól függ, hogy a súlypontjuk az alátámasztásukhoz képest hogyan helyezkedik el. Ha a tárgy úgy van alátámasztva, hogy csekély elmozdulás (vagy elfordulás) *emeli* a súlypontját, akkor azt mondjuk, hogy **stabilis egyensúlyban** van. Azért stabilis, mert ekkor a gravitációtól származó forgatónyomaték igyekszik visszaállítani a tárgy eredeti helyzetét . Ha a súlypont kicsiny elmozdulás vagy elfordulás következtében *süllyed*, akkor a tárgy **instabil egyensúlyban** van – a gravitáció hatására a súlypont tovább süllyed. Végül, ha a tárgy anélkül mozdul el, hogy súlypontjának magassága megváltozna, **semleges egyensúlyban** van. A 10-18 ábra ezt a három esetet illusztrálja.

Az egyes egyensúlyi helyzetekben a testek nem hajlamosak a forgásra (bár az instabil egyensúly ebből a szempontból is meglehetősen bizonytalan állapot). Ennek oka az, hogy a súlyponton átmenő W erőtől származó forgatónyomaték erőkarja a felfüggesztési vagy az alátámasztási pontra vonatkozóan zérus. Így forgást okozó forgatónyomaték nincs jelen.

Általában, az egy pontban felfüggesztett test nyugalmi állapotban úgy helyezkedik el, hogy súlypontja a felfüggesztési pont alatt, az ezen átmenő függőleges egyenesen van. Ez egyszerű lehetőséget ad az olyan, szabálytalan alakú testek súlypontjának kísérleti meghatározására, amelyekre a (10-14) egyenlet szerint végzendő matematikai számolás nehezen volna kivitelezhető. Ahogyan ezt a 10-19 ábra illusztrálja, ha a test tetszésszerinti A pontjában van felfüggesztve, akkor súlypontja az A ponton átmenő függőleges egyenesen van. Valamely más B pontra vonatkozóan megismételt eljárás egy másik egyenest tűz ki. A súlypontot a két egyenes metszéspontja adja meg.

10.6 Merev testek statikai egyensúlyban

Ahhoz, hogy egy test egyensúlyban legyen, két feltételnek kell teljesülnie: Szükséges, hogy a testre ható *erők eredője* és a testre ható *forgatónyomatékok eredője is zérus legyen*:

Első feltétel	transzlációs egyensúly	$\Sigma \mathbf{F}_{\text{külső}} = 0$	**(10-15)**
Második feltétel	forgási egyensúly	$\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0$ (bármely ★tengelyre)	**(10-16)**

Bármely statikai probléma vizsgálatának a módszere mindig azonos:

(a) Vektorábrát kell készíteni a testről, amelyen a testre ható összes külső erő látható.

(b) Alkalmaznunk kell a két egyensúlyi feltételt:

Első feltétel: $\Sigma \mathbf{F}_{\text{külső}} = 0$

Második feltétel: $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0$ (minden ★tengelyre)

Gondosan ügyelni kell az erővektorok pontos elhelyezésére azért, hogy a rajzból a forgatónyomatékok számításához a helyes nyomatékkarok egyértelműen leolvashatók legyenek. Az is fontos, hogy a pozitívnak választott irányokat (kicsiny koordináta tengelyekkel) és a pozitívnak választott forgásirányokat (↻ vagy ↺ szimbólummal) kijelöljük. *Egyensúlyi feltételek esetében a forgatónyomatékok számításához szabadon választhatjuk meg a ★ tengelyt akár a testen belül, akár rajta kívül.* A 10C-45 feladatban látni fogjuk, hogy *egyensúly esetén, ha a forgatónyomatékok összege egy tengelyre vonatkozóan zérus, akkor bármely más, ezzel párhuzamos tengelyre is zérus.* A feladatok megoldása gyakran egyszerűbbé válik, ha a forgáspontot (★) úgy választjuk, hogy egy vagy több ismeretlen erő hatásvonala is átmenjen

rajta. Minthogy a forgásponton átmenő erők erőkarja zérus, azért ezek az erők a nyomatéki egyenletben nem szerepelnek. Végül egy tanács: Tekintve, hogy ezek az erők az egyenletben nem jelennek meg, ezért előnyös a második egyensúlyi feltétellel kezdeni – gyakran már maga a nyomatéki egyenlet is választ ad a feltett kérdésre.

A következő példákban szándékosan „hangosan gondolkodunk", ezáltal indoklásaink különösen világosak lesznek. Minden statikai probléma ugyanezeket a megközelítéseket használja, ezért az alábbi bevezető példák nagyon hasznosak.

10-9 PÉLDA

Két gyermek, egy 150 N és egy 200 N súlyú, 3m hosszú, 250 N súlyú palló két végén ül. (a) Határozzuk meg azt az alátámasztási pontot, amely a palló egyensúlyban maradását biztosítja! (b) Határozzuk meg azt az erőt, amelyet az alátámasztás gyakorol a pallóra.

MEGOLDÁS

(a) A 10-20b ábrában a pallóra ható függőlegesen felfelé mutató ismeretlen **F** erő, ami az alátámasztástól származik, a palló bal oldali végétől ismeretlen d távolságra van. A forgáspontot (★) az alátámasztási pontban választjuk. *Így a ★ tengelyre vonatkozó forgatónyomaték számításához az ismeretlen* **F** *erőre nem lesz szükségünk.* A palló egyenletes tömegeloszlású, így a gravitációs erőt geometriai középpontjában vehetjük fel. Bejelöljük a pozitív x és y irányt, az óramutató járásának irányába választott pozitív forgásirányt, valamint a ★ tengely helyét. A második egyensúlyi feltételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Sigma \mathbf{M} = 0$$

(★tengelyre)

$$(200\text{N})(3\text{m} - d) - (250\text{N})(d - 1{,}5\text{m}) - (150\text{N})(d) = 0$$

$$(975\text{Nm}) - (600\text{N})(d) = 0$$

$$d = 1{,}63\ \text{m}.$$

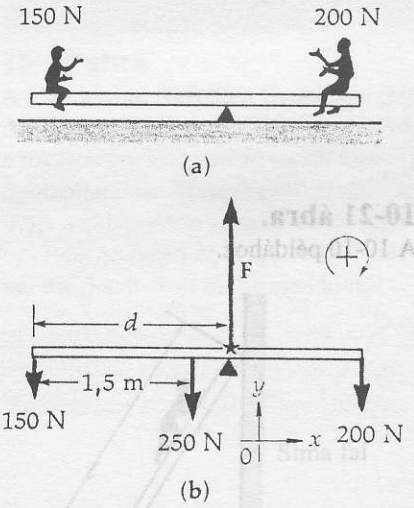
Jegyezzük meg, hogy a forgatónyomatékok számításakor minden nyomatékkart és erőt *pozitív számmal* veszünk figyelembe. A megfelelő pozitív vagy negatív előjelet csak akkor alkalmazzuk, amikor a forgatónyomatékokat összegezzük, mégpedig attól függően, hogy melyik forgási irányt választottuk pozitívnak.

(b) Az ismeretlen **F** erő meghatározására az első egyensúlyi feltételt alkalmazzuk:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$(F - 150\text{N} - 250\text{N} - 200\text{N}) = 0$$

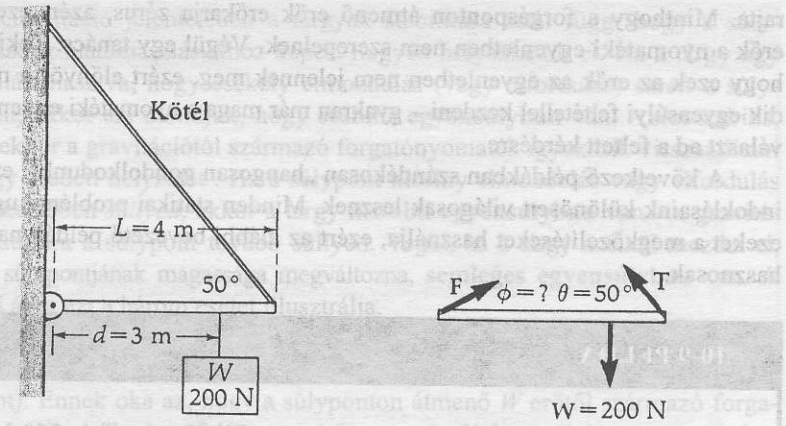
$$F = 600\ \text{N}$$



10-20 ábra
A 10-9 példához.

10-10 PÉLDA

A 10-21 ábrán egy vízszintes rúd 200 N terhet tart. A rúd a falhoz *csuklós tengellyel* csatlakozik, amely így *tetszőleges irányú erőt*



(a) A vízszintes rúd 200 N súlyú terhet tart.

(b) A rúd vektorábrája.

(c) Vektorábra az erőösszetevőkkel

(d) A csukló által a rúdra gyakorolt erő iránya a vízszintessel Φ szöget zár be.

10-21 ábra.
A 10-10 példához.

gyakorolhat a rúdra, *forgatónyomatékot azonban* nem fejthet ki.[10] Annak feltételezésével, hogy a rúd súlya elhanyagolható, határozzuk meg (a) a kötélben ébredő **T** feszítőerőt és (b) azt az **F** erőt, amit a csuklós tengely gyakorol a rúdra.

MEGOLDÁS

(a) Először is elkészítjük a rúd vektorábráját (10-21b és a 10-21c ábra). Minthogy a csuklós tengelytől származó erőnek sem nagyságát, sem irányát nem ismerjük, azért egyszerűbb lesz, ha az erő F_x vízszintes és F_y függőleges komponensét külön – külön határozzuk meg. Irányukat könnyen elképzelhetjük: Ha elvennénk a csuklós tengelyt, akkor a gravitáció hatására a rúdnak ez a vége leesne, ezért F_y felfelé kell, hogy mutasson; a T kötélerő vízszintes komponensének kompenzálása miatt pedig F_x-nek jobbra kell irányulnia. (Az ilyen meggondolásokat mindig jó előzetesen elvégezni, hogy az erődiagram a lehető legkorrektebb legyen. Ha mégis helytelenül döntünk, akkor az erőkomponensre kapott numerikus eredmény negatív lesz, jelezve, hogy a tényleges erő a feltételezettel ellentétes irányú.)

A csuklós tengelyen két ismeretlen erő hatásvonala halad át, ezért mi most ezt a pontot választjuk a forgatónyomatékok meghatározására. (Minthogy a két ismeretlen erő karja most zé-

[10] Ha a rúd szilárdan be lenne ágyazva a falba, akkor a huzalt feszítő erőt tetszőlegesen megnövelhetnénk anélkül, hogy a rúd helyzete ezáltal megváltozna. (A fal a rúd végére ellentétes forgatónyomatékot gyakorolna, hogy a huzaltól származó megnövekedett forgatónyomatéknak ellenálljon.) Az ilyen típusú feladattal nem foglalkozunk, a rudat minden esetben csuklós tengellyel erősítjük a falhoz.

rus, azért ezek nem gyakorolnak forgatónyomatékot a csuklóra.) Választásunkat a rajzon csillag ★ jelzi. Ezután pozitívnak választjuk az órajárással ellentétes irányú forgást – ezt a rajzon a ⊕ szimbólum jelöli. Az x és az y tengelyek pozitív irányát is berajzoltuk. Most pedig a második egyensúlyi feltételt alkalmazzuk:

$$\Sigma \mathbf{M} = 0$$

(a csuklós tengelyre)

$$T \sin\theta \, L - W d = 0$$

$$T = \frac{W d}{\sin\theta \cdot L} = \frac{(200\,\text{N})(3\,\text{m})}{(\sin 50°)(4\,\text{m})} = 196\,\text{N}$$

(b) Most az első egyensúlyi feltételt alkalmazzuk.

x irányban $\Sigma F_x = 0$

$$F_x - T\cos\theta = 0$$

$$F_x = T\cos\theta = (196\,\text{N})(\cos 50°) = 126\,\text{N}$$

y irányban $\Sigma F_y = 0$

$$F_y - W + T\sin\theta = 0$$

$$F_y = W - T\sin\theta$$

$$F_y = 200\,\text{N} - (196\,\text{N})(\sin 50°) = 49{,}9\,\text{N}$$

A csuklós tengely által a rúdra ható erő nagysága:

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{(126)^2 + (49{,}9)^2}\,\text{N} = 136\,\text{N}$$

és az erő iránya (10-21d ábra):

$$tg\Phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{49{,}9\,\text{N}}{126\,\text{N}} = 0{,}396$$

$$\Phi = \text{arc tg}\,0{,}396 = 21{,}6°$$

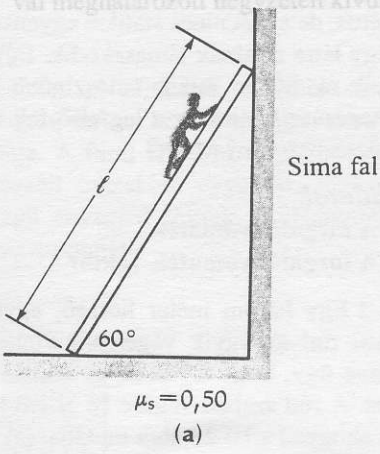
Ezekben a példákban előnyös volt a $\Sigma\mathbf{F} = 0$ feltétel alkalmazása előtt a $\Sigma\mathbf{M} = 0$ forgatónyomaték feltétellel indítani. Egyensúlyi állapotok vizsgálatához gyakran ez a legjobb hozzáállás, mert a vonatkozási pont gondos mérlegeléssel történő megválasztása a forgatónyomaték számítására felírt egyenletből egy vagy több erőt is kiküszöbölhet, amelyek egyébként az erők összegére felírt egyenletben megjelennének.

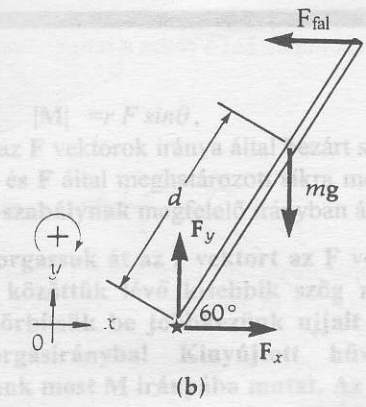
10-11 PÉLDA

Egy l hosszúságú, elhanyagolható tömegű létra sima falnak támaszkodik. A létra 60°-os szöget zár be a vízszintessel. A talajon a nyugalmi súrlódási együttható 0,50. Milyen (l-lel kifejezve) magasságra mászhat fel egy ember, anélkül, hogy a létra megcsúszna?

MEGOLDÁS

A 10-22b ábrán a létráról készített vektorábra látható. Ahhoz, hogy a létra ne csússzon meg a talajon, a talajnak érdesnek kell lennie, hogy kellő mértékű vízszintes súrlódási erőt biztosítson. Meg kell azonban említenünk, hogy a talajtól a létrára ható, a dőlésszögtől függő eredő erő *nem* a létra irányába hat. (Az a tévhit, hogy ez a létra mentén hat, elég gyakori!) Minthogy a talajtól származó erőnek sem az irányát, sem a nagyságát nem ismerjük, azért ezt az F_x és F_y komponenseivel vesszük figyelembe. Mivel a fal „sima", a létra felső végén a súrlódás elhanyagolható; azaz a falon $F_y = 0$. A pozitív forgásirányt, az x és az





10-22 ábra
A 10-11 példához.

y tengelyeket, valamint azt a pontot, amelyikre a nyomatékokat számoljuk, a megfelelő szimbólumokkal jelöljük.

A második egyensúlyi feltételt alkalmazva:

$$\sum_{\text{(az alsó pontra)}} \mathbf{M} = 0$$

$$\left[mg\, d\cos\theta - F_{fal}\, l \sin\theta\right] = 0$$

$$d = \frac{F_{fal}\, l\, tg\theta}{mg}; \qquad \textbf{(10-17)}$$

Az első egyensúlyi feltételt alkalmazva

x irányban:

$$\sum F_x = 0$$

$$\left(F_x - F_{fal}\right) = 0$$

$$F_x = F_{fal}$$

y irányban:

$$\sum F_y = 0$$

$$(F_y - mg) = 0$$

$$F_y = mg$$

Azt is tudjuk, hogy a létrára ható F_x súrlódási erő

$F_x = \mu_s F_y$ (a *maximális* statikus súrlódás esetén)

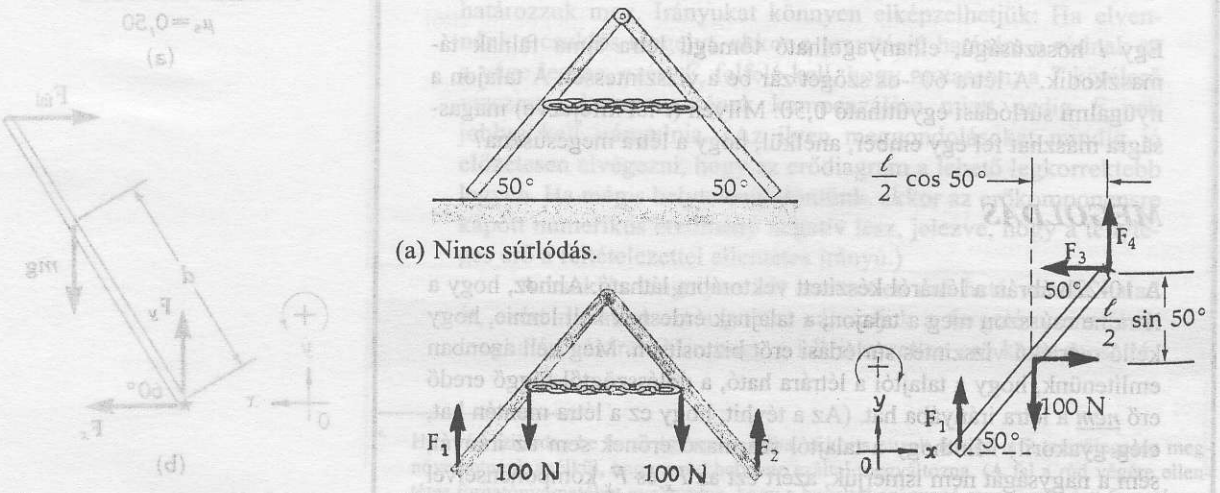
A fenti egyenletekből F_{fal} értéke kifejezhető, ezzel a (10-17) egyenlet a következő alakot ölti:

$$d = \frac{\mu_s mg\, l\, tg\theta}{mg}$$

$$d = \mu_s\, l\, tg\theta = (0{,}50)(tg60°) = 0{,}866l$$

10-12 PÉLDA

Két egyforma, 100 N súlyú deszka csuklós tengellyel csatlakozik egymáshoz, és súrlódásmentes, vízszintes felületre támaszkodik a 10-23 ábrán látható módon. A szétcsúszás megakadályozására a két deszka közepére elhanyagolható súlyú lánc van erősítve. Határozzuk meg (a) a láncban ébredő erőt, valamint (b) a csuklós tengely által a deszkákra ható erőt!



(a) Nincs súrlódás.

(b) A rendszer egészének vektorábrája.

(c) A bal oldali palló vektorábrája.

10-23 ábra
A 10-12 példához.

MEGOLDÁS

A talaj által az egyes deszkákra ható felfelé mutató erőt a 10-23b ábrán látható vektorábra tünteti fel. Ebben az esetben a csuklós tengelyre és a láncra ható belső erőket (mivel a testet és a környezetét elválasztó határon belül hatnak) figyelmen kívül hagyhatjuk. Szimmetria meggondolásból, és abból, hogy $\sum F_y = 0$, arra következtetünk, hogy

$$F_1 = F_2 = 100\ \text{N}.$$

A láncban ébredő erő meghatározásának céljából a láncot egy képzeletbeli „elkülönítő" határvonallal két részre osztjuk. (A több egységből álló tárgyak esetében gyakran hasznos egy vagy több egységet így „elkülöníteni", hogy a meghatározandó erők egyetlen erődiagramban megjelenhessenek.) Ily módon a 10-23c ábrán csupán az egyik, l hosszúságú deszka erővázlatát adjuk meg. Minthogy a csuklós tengely által a deszkákra ható erő irányát nem ismerjük, azért ennek csak az F_3 -mal, illetve az F_4 -gyel jelölt x illetve y komponenseit tüntetjük fel. A forgás iránya, valamint x és y tengely pozitív iránya jelölve van. Az egyensúlyi feltételek alkalmazásával a következőket kapjuk:

$$\sum F_y = 0$$

$$100\text{N} - 100\text{N} + F_4 = 0$$

$$F_4 = 0$$

Hasonlóképpen

$$\sum F_x = 0$$

$$F_3 = T$$

Minthogy a csuklón ismeretlen erők haladnak át, ezért, ezt a ★ pontot választjuk ki a forgatónyomatékok meghatározására, az erőkarokat a vázlat mutatja.

$$\sum_{(\text{csúcsra})} \mathbf{M} = 0$$

$$(100\,\text{N})(l\cos 50°) - (100\,\text{N})(\frac{l}{2}\cos 50°) - T(\frac{l}{2}\sin 50°) = 0$$

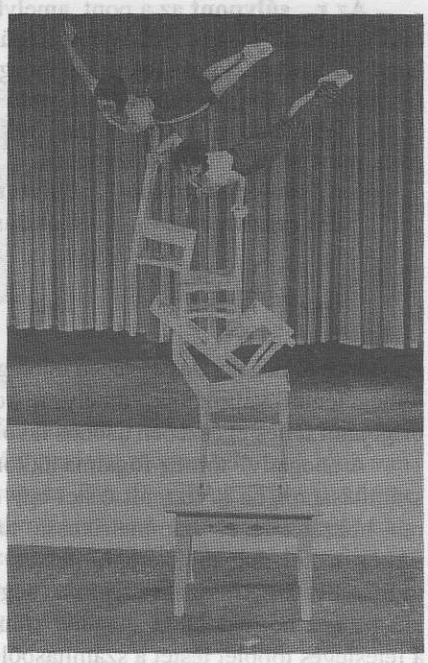
$$100\,\text{N} - 50\,\text{N} - \frac{T}{2}\,tg\,50° = 0$$

vagy

$$T = \frac{100\,\text{N}}{tg\,50°} = \frac{100\,\text{N}}{1{,}1918} = 83{,}9\,\text{N}.$$

Abból hogy $F_3 = T$, a csuklós tengelyre ható erő:

F_3 = 83,9 N; (vízszintes, balra irányuló)



10-24 ábra
A Chongqing Akrobata Csoport tagjai. Amikor a kínai akrobaták felépítik ezt a tökéletesen kiegyensúlyozott tornyot, állandóan biztosítaniuk kell, hogy a súlyponton átmenő függőleges egyenes ne essen az asztal négy lábával meghatározott négyzeten kívül.

Összefoglalás

A ★tengelyre vonatkoztatott M forgatónyomaték definíciója:

$$M = (\text{erő})\cdot(\text{erőkar})$$

ahol az erőkar a forgástengelytől az **F** erő hatásvonaláig húzott merőleges távolság. Az egyik forgásirányt a ↻ vagy a ↺ jellel pozitívnak kell választani, az ellentétes irányú forgás negatív előjelű.

A ★ tengelyre vonatkozó **M** forgatónyomaték-*vektor* definíciója:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

azaz

$$|\mathbf{M}| = r\,F\,\sin\theta,$$

ahol θ az **r** és az **F** vektorok iránya által bezárt szög. Az **M** vektor az **r** és **F** által meghatározott síkra merőlegesen a **jobbkéz-szabálynak** megfelelő irányban áll:

Jobbkéz-szabály **Forgassuk át az r vektort az F vektorba a közöttük lévő kisebbik szög mentén! Görbítsük be jobbkezünk ujjait ebbe a forgásirányba! Kinyújtott hüvelykujjunk most M irányába mutat. Az M vektort a ★ tengely pontjában az r és F vektorok síkjára merőlegesen vesszük fel.**

Az $\mathbf{r}_{SP}$ **súlypont** az a pont, amelybe a **W** gravitációtól származó összes erőt egyesíthetjük abból a célból, hogy a gravitációtól származó forgatónyomatékokat kiszámítsuk. Ha g mindenütt egyenlő (mint ahogyan e könyv feladataiban feltételezzük), akkor $\mathbf{r}_{SP}$ ugyanaz a pont, mint az $\mathbf{r}_{TKP}$ tömegközéppont.

m_k tömegpontokból álló rendszerre:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\sum \mathbf{r}_k m_k}{\sum m_k}$$

Folytonos tömegeloszlás esetére:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{\int dm}$$

Folytonos tömegeloszlás esetében mindig olyan $dm = \rho\, dV$ tömegelemet választunk, amely a koordinátarendszer origójától teljes egészében azonos távolságra van.

A „negatív" tömeg fogalma akkor hasznos $\mathbf{r}_{TKP}$ kiszámításához, ha a vizsgált testet egy szimmetrikus darab hozzátételével szimmetrikussá tudjuk változtatni. Ekkor a feladatban szereplő testet úgy kezelhetjük, mintha két testet összegeznénk: a (nagyobb) szimmetrikus testhez hozzáadjuk a „negatív" tömegű részt, amely a felesleges többlet testet a számításból kiejti.

Kérdések

1. Keressünk egy olyan példát, amelyikben a testre ható erők összege zérus, de a test nincs statikai egyensúlyban!
2. Keressünk egy olyan példát, amelyben a test tömegközéppontjára számított forgatónyomatékok összege zérus, de a test nincs statikai egyensúlyban!
3. Egy létra a falnak támaszkodik. Egy asszony felmászik rá. Vajon mikor valószínűbb az, hogy a létra megcsúszik: amikor a legfelső fok vagy az alsó fok közelében van? Miért?

Egyensúlyi feltételek

ELSŐ FELTÉTEL	Transzlációs egyensúly	$\sum \mathbf{F}_{\text{külső}} = 0$
MÁSODIK FELTÉTEL	Rotációs egyensúly	$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0$ (*tetszőleges* ★tengely körül)

A testek egyensúlyának vizsgálatát az alábbi egységes eljárás szerint végezzük:

(a) Vektorábrát készítünk, amelyen a testre ható összes erőt feltüntetjük. A pozitívnak választott irányokat kis nyilakkal, a pozitívnak vett forgási irányt ↻ vagy ↺ szimbólummal, azt a tengelyt, amelyikre a forgatónyomatékot számoljuk, ★-gal jelöljük.

(b) Alkalmazzuk a két egyensúlyi feltételt.

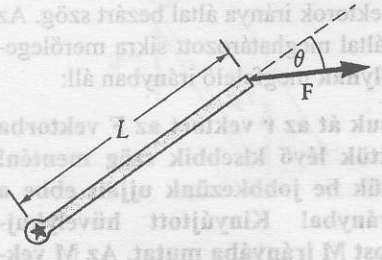
Gyakran előnyös a második, a $\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0$ feltételből kiindulni. Ha a ★tengelyt célszerűen olyannak választjuk, hogy ismeretlen erők hatásvonala menjen át rajta, akkor ezzel elérjük, hogy a nyomatéki egyenletben a tengelyen átmenő ismeretlen erők nem szerepelnek.

4. Hogyan tudja magát egy 100 kilogrammnál nehezebb ember megmérni azon a fürdőszobai mérlegen, amelyiknek csak 95 kilogramm a méréshatára? .
5. Támasszunk alá egy vízszintesen tartott méterrudat jobb- és balkezünk egy-egy ujjával! Fokozatosan közelítsük egymáshoz ujjainkat! A kezdő helyzettől függetlenül ujjaink mindig a méterrúd közepénél találkoznak. Magyarázzuk meg, miért!

Feladatok

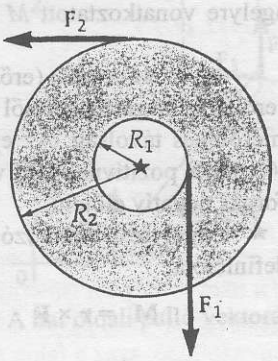
10.2 A forgatónyomaték
10.3 A forgatónyomaték-vektor

10.A-1 Egy három méter hosszú, egyenletes tömegeloszlású rúd az egyik végén vízszintes tengellyel van rögzítve úgy, hogy a rúd az xy síkban szabadon elfordulhat. A rúd szabad végére 16 N erő hat $\theta = 30°$ szög alatt, ahogyan a 10-25 ábra mutatja. (a) Határozzuk meg az erő karját a tengelyre vonatkoztatva! (b) Mekkora forgatónyomaték hat a rúdra a tengelyben?



10-25 ábra
A 10A-1 feladathoz.

10A-2 Egy fából készített orsó szabadon, elhanyagolható súrlódással foroghat vízszintesen rögzített tengely körül a 10-26 ábra szerint. A külső peremére (sugara $R_2 = 30$ cm) csavart fonál $F_2 = 4$ N erőt gyakorol rá, míg egy másik, a belső kerületre ($R_1 = 12$ cm) csavart fonál $F_1 = 12$ N erővel hat az ábrázolt módon. Az órajárásával ellentétes forgást pozitívnak választva határozzuk meg az orsóra ható, tengely körüli eredő forgatónyomatékot!



10-26 ábra
A 10A-2 feladathoz.

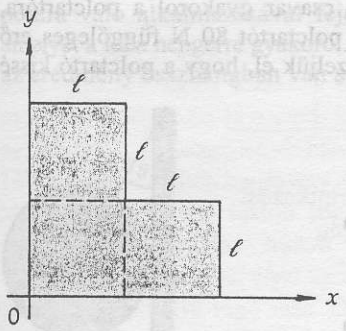
10A-3 Tekintsünk egy b oldalhosszúságú négyzetet! Minden sarkában egy F nagyságú erő hat. Az erők egy-egy oldallal párhuzamosak, és a középpont körül azonos értelmű forgást okozó forgatónyomatékot fejtenek ki. (a) Határozzuk meg a négyzet középpontjára az eredő forgatónyomatékot! (b) Számítsuk ki az eredő forgatónyomatékot az egyik sarokra vonatkoztatva!

10B-4 Egy $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}$ (newtonban mért) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = 4\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}$ (méterben mért) pontban támad. Határozzuk meg (a) a z tengely körüli teljes forgatónyomatékot, (b) és az $\mathbf{M}$ forgatónyomaték-vektor irányát!

10A-5 Mutassuk meg, hogy $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$, továbbá, hogy $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$!

10.4 A súlypont és a tömegközéppont

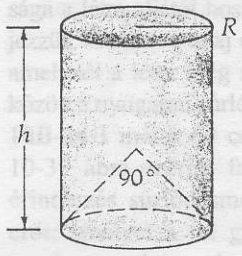
10A-6 Három azonos, homogén, l élhosszúságú tömör kocka „L" alakban van összeragasztva a 10-27 ábrán látható módon. Keressük meg a tömegközéppont x és y tengelyre vonatkoztatott koordinátáit!



10-27 ábra
A 10A-6 feladathoz.

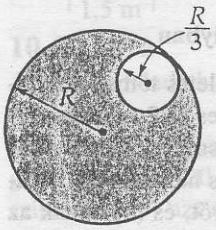
10A-7 Egy l hosszúságú homogén deszka végén egy ember ül. A deszka súrlódásmentes kerekeken vízszintes sínen nyugszik. A deszka és az ember tömege megegyező: m. Az ember most átsétál a deszka túlsó végére, és ott leül. Határozzuk meg azt a teljes (a talajhoz viszonyított) távolságot, amennyire a deszka a folyamat során elmozdult! (Útmutatás: megváltozik-e az ember+deszka rendszer tömegközéppontjának helyzete a folyamat során?)

10B-8 Egy h magasságú és R sugarú acélhenger egyik végében kúpos üreg van kiesztergálva a 10-28 ábrán látható módon. A teljes kúpszög 90°. Határozzuk meg a hengeres test tömegközéppontjának helyét! (Útmutatás: használjuk fel a 10C-57 feladat eredményét és vonjuk ki a tömör kúp tömegét az eredeti kifúratlan henger tömegéből – „negatív" tömeg módszer.)



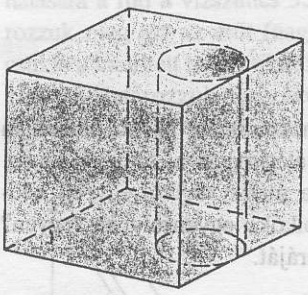
10-28 ábra
A 10B-8 feladathoz.

10B-9 Homogén fémlemezből készített R sugarú körlapból a 10-29 ábrán mutatott módon köralakú lyuk van kivágva. A lyuk sugara $R/3$, és a lyuk érinti a körlap peremét. Milyen távolságra van a tömegközéppont az eredeti körlap középpontjától? (Útmutatás: Kezeljük a hiányzó anyagot úgy, mint az eredeti kivágatlan körlapot kiegészítő „negatív tömeget"!)



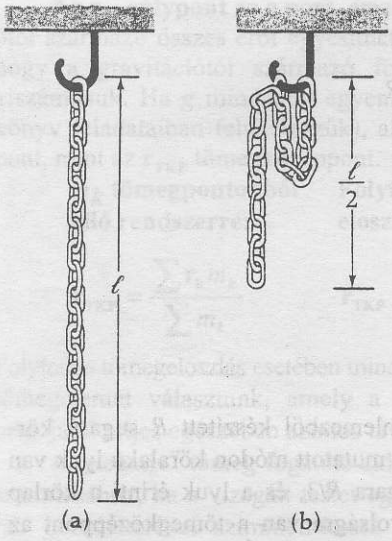
10-29 ábra
A 10B-9 feladathoz.

10B-10 Egy egyenletes ρ sűrűségű, b élhosszúságú kockába egy $b/4$ sugarú furatot készítünk, úgy, ahogyan a 10-30 ábra mutatja. A furat érinti az egyik kockalap szemközti oldalfelezőit összekötő egyenest. Ezután a furatot $\rho/3$ sűrűségű anyaggal töltjük ki. Határozzuk meg a test tömegközéppontját!



10-30 ábra
A 10B-10 feladathoz.

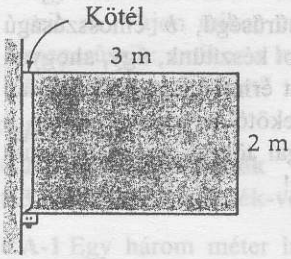
10B-11 Az m tömegű, l hosszúságú egyenletes lánc kampón lóg a 10-31a ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztásához szükséges! (Útmutatás: gondoljuk meg, mi történik a különböző láncrészek tömegközéppontjával!)



10-31 ábra
A 10B-11 és a 10C-50 feladathoz.

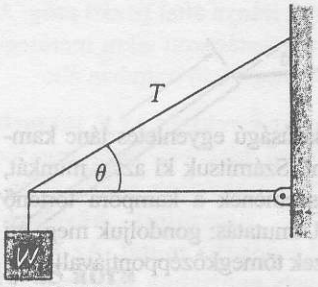
10.6 Merev testek statikus egyensúlyban

10A-12 A 10-32 ábrán látható egyenletes tömegeloszlású kapuszárny 300 N súlyú, 3 m széles és 2 m magas. A kapuszárny bal alsó sarkát egy csuklós tengely támasztja alá, bal felső sarkát vízszintes huzal tartja. Határozzuk meg (a) a huzalban ébredő erőt, és (b) annak az erőnek nagyságát és irányát, amelyet a csuklós tengely gyakorol az ajtószárnyra!



10-32 ábra
A 10A-12 feladathoz.

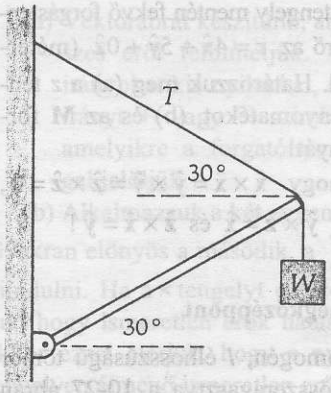
10A-13 Egy 25 kg-os gyermek 6 méter hosszú libikókán ül. A libikóka középen van alátámasztva, tömege 45 kg. Milyen távol üljön a libikóka másik végétől egy 80 kilogrammos felnőtt, hogy a libikóka egyensúlyban legyen? Csatoljuk a libikóka vektorábráját.



10-33 ábra
A 10A-14 és a 10B-25 feladathoz.

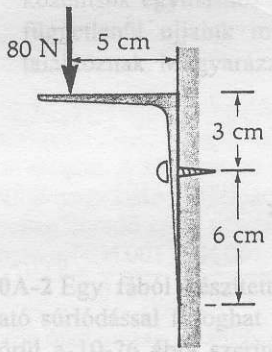
10A-14 A 10-33 ábrában a W teher 200 N súlyú, $\theta = 30°$, és a rúd súlya elhanyagolható. Határozzuk meg (a) a kötélben ébredő feszítőerőt, (b) annak az erőnek vízszintes és függőleges komponensét, amelyet a csapágytengely gyakorol a rúdra!

10A-15 A 10-34 ábrán a súly 200 N, és a rúd súlya elhanyagolható. Határozzuk meg (a) a kötélben ébredő erőt, (b) annak az erőnek vízszintes és függőleges komponensét, amelyet a csukló gyakorol a rúdra!



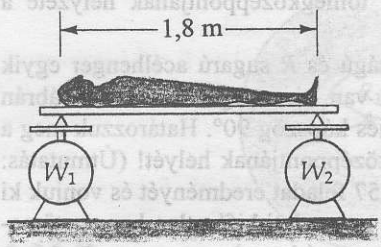
10-34 ábra
A 10A-15 feladathoz.

10A-16 Függőleges falra egyetlen csavarral polctartó van szerelve a 10-35 ábrán láthatóan. A polctartó súlyának elhanyagolásával számítsuk ki azt a vízszintes erőkomponenst, amelyet a csavar gyakorol a polctartóra, abban az esetben, ha a polctartót 80 N függőleges erő terheli. (Útmutatás: képzeljük el, hogy a polctartó kissé



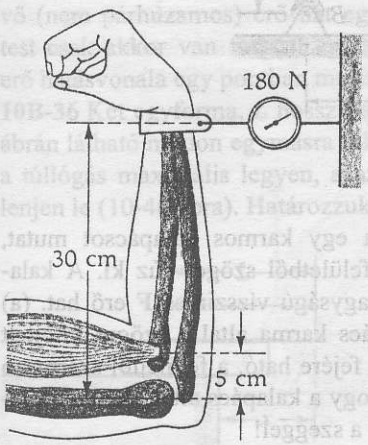
10-35 ábra
A 10A-16 feladathoz.

10A-17 A 10-36 ábrán a mérlegek 46 ill. 42 kg-ot mutatnak. A tartódeszka súlyát elhanyagolva számítsuk ki, hogy hol van a deszkán fekvő ember tömegközéppontja a lábától mérve!



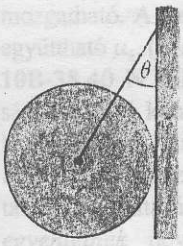
10-36 ábra
A 10A-17 feladathoz.

10A-18 Egy ember 180 N vízszintes irányú erőt gyakorol a 10-37 ábrán látható eszközre. Számítsuk ki azt a vízszintes erőt, amelyet az ember bicepsz izma fejt ki az alkarra! Az alkart egyetlen rúdnak képzelve készítsünk, vektorábrát, amelyen minden erővektor végpontja az erő támadáspontjába van berajzolva!



10-37 ábra
A 10A-18 feladathoz.

10A-19 Egy m tömegű homogén henger két huzallal úgy van felfüggesztve, hogy sima függőleges falhoz támaszkodik (10-38 ábra). A huzalok a fallal θ szöget zárnak be. (a) A $\sum M = 0$ feltételnek a felfüggesztési pontra való alkalmazásával fejezzük ki azt az N erőt, amelyet a fal a hengerre gyakorol. (b) Mutassuk meg, hogy az eredmény összhangban van a $\sum \mathbf{F} = 0$ feltétellel.



10-38 ábra
A 10A-19 feladathoz.

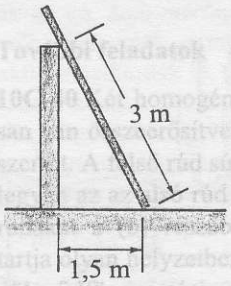
10A-20 Egy m tömegű gömb nyugszik egy sarokban, amelyet egy függőleges fal és egy, a vízszinteshez θ szög alatt hajló síklemez képez. Minden felület sima. Számítsuk ki azokat az erőket, amelyeket a fal és a lemez a gömbre gyakorol!

10B-21 Egy l hosszúságú létra sima falnak támaszkodik a vízszinteshez θ szög alatt dőlve. Egy ember a létrán olyan magasra mászik, hogy a legfelső foktól $l/4$ távolságra van és akkor a létra elkezd csúszni. Mutassuk meg, hogy a létra és a talaj közötti nyugalmi súrlódási együttható $3/4(tg\theta)$! A létra súlya az ember súlyához viszonyítva elhanyagolható.

10B-22 Egy 90 kilogrammos ember egy létra kétharmad magasságáig mászik fel. A létra falnak támaszkodik, a fallal 20°-os szöget bezárva. A létra súlyának elhanyagolásával határozzuk meg (a) azt az erőt, amelyet a fal a létrára gyakorol, valamint (b) annak az erőnek nagyságát és irányát, amellyel a talaj hat a létrára!

10B-23 Egy egyenetlen tömegeloszlású létra sima függőleges falnak támaszkodik. Tömegközéppontjának a távolsága a létra aljától hosszának f-szerese, ahol $0 < f < 1$. Fejezzük ki azt – a talaj és a létra közötti – legkisebb szöget, amelynél a létra még nem csúszik meg! A talaj és a létra között a nyugalmi súrlódási együttható μ_s.

10B-24 3 méter 60 centiméter hosszú, 10 kg-os létra a 10-39 ábra szerint falnak támaszkodik. A fal élén az érintkezés súrlódásmentes. Határozzuk meg (a) azt az erőt, amelyet a fal gyakorol a létrára, (b) azt az erőt, amelyet a talaj gyakorol a létrára! (Adjuk meg mindkét erő nagyságát és irányát!)



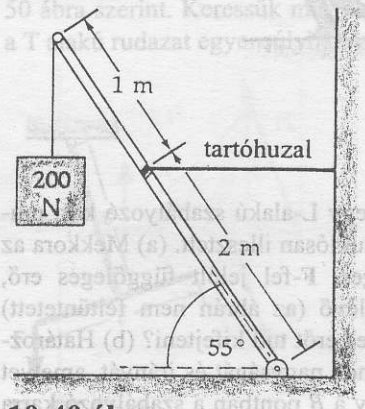
10-39 ábra
A 10B-24 feladathoz.

10B-25 A 10-33 ábrán $W = 370$ N, $\theta = 35°$, és a homogén rúd súlya 420 N. Határozzuk meg (a) a huzalt feszítő erőt, (b) azt az eredő erőt (nagyságát és irányát), amelyet a csuklós tengely gyakorol a rúdra!

10B-26 Egy 3 m hosszú homogén palló sima falnak támaszkodik, másik vége vízszintes talajon nyugszik. A talaj és a palló között a nyugalmi súrlódási együttható 0,4. Határozzuk meg, hogy mekkora távolságra mozdíthatjuk el a palló alsó végét a faltól anélkül, hogy megcsúszna!

10B-27 Egy 300 N súlyú homogén rúd felső vége a menynyezetre erősített csuklón lóg. (a) Határozzuk meg a rúd alsó végére alkalmazandó vízszintes irányú erőt, amelynek hatására a rúd a vízszintes 35°-os szöget zár be. (b) Határozzuk meg azt az erőt (nagyságát és irányát), amelyet a csukló a kitérített helyzetű rúdra gyakorol!

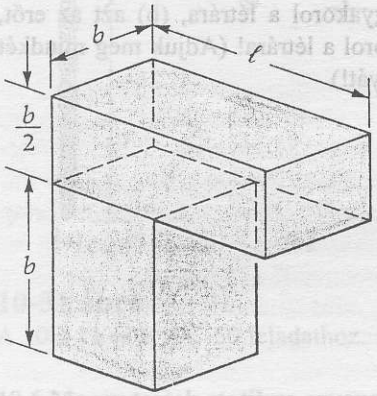
10B-28 Határozzuk meg, hogy mekkora erő feszíti a 10-40 ábrán látható vízszintes tartóhuzalt, valamint annak



10-40 ábra
A 10B-28 feladathoz

az erőnek nagyságát és irányát, amelyet a csukló a rúd alsó végére gyakorol! A rúd súlyát hanyagoljuk el!

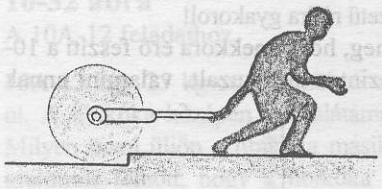
10B-29 Két, azonos anyagból készült tömör tömb a 10-41 ábrán látható módon van összeragasztva. Az egyik tömb b élhosszúságú kocka, a másik $b \times b/2 \times l$ méretű derékszögű hasáb. Fejezzük ki b függvényében azt a legnagyobb l hosszúságot, amelynél az együttes még nem billen fel!



10-41 ábra
A10B-29 feladathoz.

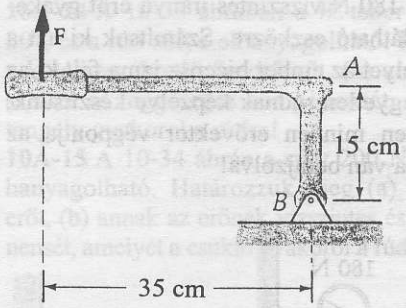
10B-30 A 10-34 ábrán látható teher 200 N súlyú, a homogén rúd súlya 100 N. Határozzuk meg (a) a huzalt feszítő T erőt, és annak az erőnek vízszintes és függőleges komponensét, amelyet a csuklós gyakorol a rúdra!

10B-31 A 10-42 ábrán a fiú egy 70 kg tömegű gyephengert próbál egy 6 cm magas járdaszegélyen áthúzni. A henger sugara 30 cm. Mekkora az a legkisebb erő, ami ehhez szükséges? (Útmutatás: tekintsük azt a helyzetet, amidőn a henger a talajról éppen felemelkedve a járdaszegély sarkán nyugszik. A henger ebben a pozícióban az erő egy bizonyos kritikus értéke esetén marad meg, minden ennél nagyobb erő a henger átgördülését okozza.)



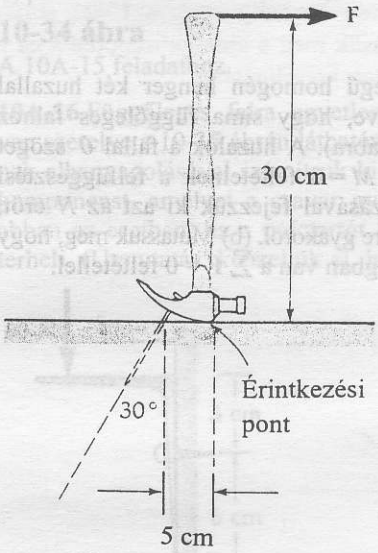
10-42 ábra
A 10B-31 feladathoz.

10B-32 A 10-43 ábra egy L-alakú szabályozó kart mutat, ami a B pontban csuklósan illesztett. (a) Mekkora az a fogantyúra merőleges, **F**-fel jelölt függőleges erő, amely az A pontban lévő (az ábrán nem feltüntetett) tárgyra 150 N vízszintes erőt tud kifejteni? (b) Határozzuk meg annak az erőnek nagyságát és irányát, amelyet ekkor a csuklós tengely a B pontban a szabályozó karra kifejt!



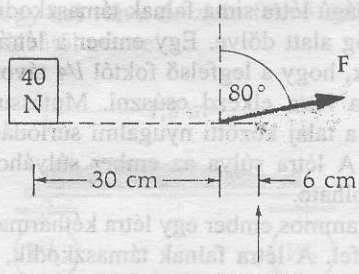
10-43 ábra
A 10B-32 feladathoz.

10B-33 A 10-44 ábra egy karmos kalapácsot mutat, amint egy vízszintes felületből szöget húz ki. A kalapács nyelére 200 N nagyságú vízszintes **F** erő hat. (a) Számítsuk ki a kalapács karma által a szögre kifejtett erőt, és (b) a kalapács fejére ható, a felülettől származó erőt! Tételezzük fel, hogy a kalapács által a szegre gyakorolt erő párhuzamos a szeggel!



10-44 ábra
A 10B-33 feladathoz.

10B-34 Egy 40 N súlyú tárgyat kinyújtott vízszintes alkarral karhosszynyira tartunk. Hivatkozással a 10-45 ábrára, határozzuk meg azt, az ábrán **F**-fel jelölt erőt, amelyet a felkar izom fejt ki! Tegyük fel, hogy a kéz és

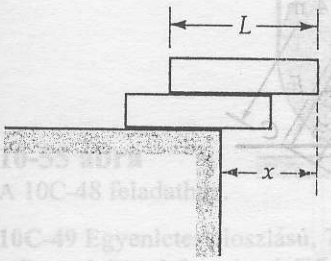


10-45 ábra
A 10B-34 feladathoz.

az alkar együttes tömege 1,5 kg és, hogy ezek tömegközéppontja a könyök és a tárgy közötti távolság felezőpontjában van! Készítsünk az alkart rúdként ábrázoló vektorábrát, amelyen az erővektorok vége az erők támadáspontjába van rajzolva!

10B-35 Mutassuk meg, hogy ha három, egy síkban fekvő (nem párhuzamos) erő hat egy merev testre, úgy a test csak akkor van forgási egyensúlyban, ha a három erő hatásvonala egy pontban metszi egymást!

10B-36 Két egyforma, L hosszúságú homogén téglát az ábrán látható módon egymásra rakunk oly módon, hogy a túllógás maximális legyen, azaz a rakás még ne billenjen le (10-46 ábra). Határozzuk meg az x távolságot!



10-46 ábra
A 10B-36 feladathoz.

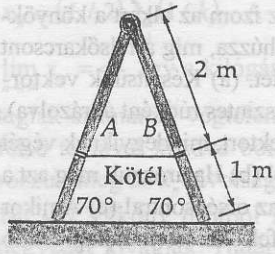
10B-37 Egy ember seprőt tol a padlón, miközben a seprőnyél irányában lefelé mutató erőt fejt ki. Határozzuk meg azt a (seprőnyél és a függőleges irány által bezárt) legkisebb θ szöget, amely mellett a seprő állandó sebességgel mozgatható. A padló és a seprő között a csúszási súrlódási együttható μ_k. (A seprő súlyát hanyagoljuk el.)

10B-38 40 N súlyú hajlékony lánc két azonos magasságban lévő kampó között lóg (10-47 ábra). Mindkét kampónál a lánchoz húzott érintő a vízszintessel $\theta = 42°$ szöget zár be. (Azt az egyenletet, amely gravitációs erő hatására lógó lánc görbéjét leírja, *láncgörbe egyenletnek* nevezzük. A feladat megoldásához az egyenlet ismerete nem szükséges.) (a) Határozzuk meg a kampó által a láncra gyakorolt erő nagyságát! (b) Határozzuk meg a láncot feszítő erőt a lánc középpontjában! [Javaslat a (b) részfeladathoz: készítsünk vektorábrát a lánc feléről!]



10-47 ábra
A 10B-38 feladathoz.

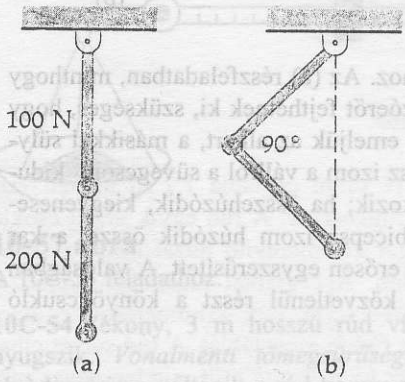
10B-39 Két egyforma, egyenként 60N súlyú palló egy-egy végén csuklós tengellyel csatlakozik egymáshoz. (10-48 ábra.) Sima vízszintes felületen állnak, és szétcsúszásukat az ábrázolt vízszintes huzal akadályozza. Határozzuk meg azt az N_A és N_B normális irányú erőt, amelyet a talaj fejt ki a pallókra! (b) Határozzuk meg a huzalban ébredő T feszítőerőt! [Javaslat a (b) részfeladathoz: készítsünk vektorábrát csak az egyik pallóról!]



10-48 ábra
A 10B-39 feladathoz.

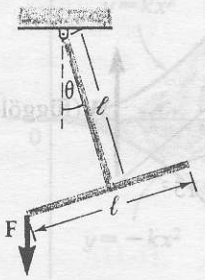
További feladatok

10C-40 Két homogén, egyenlő hosszúságú rúd csuklósan van összeerősítve és függőlegesen lóg a 10-49 ábra szerint. A felső rúd súlya 100 N, az alsóé 200 N. Milyen legyen az az alsó rúd végére ható egyetlen erő, amely a rudakat a (b) részábrán látható módon nyugalomban tartja olyan helyzetben, midőn a rúd alsó vége közvetlenül a felfüggesztési pont alatt van?



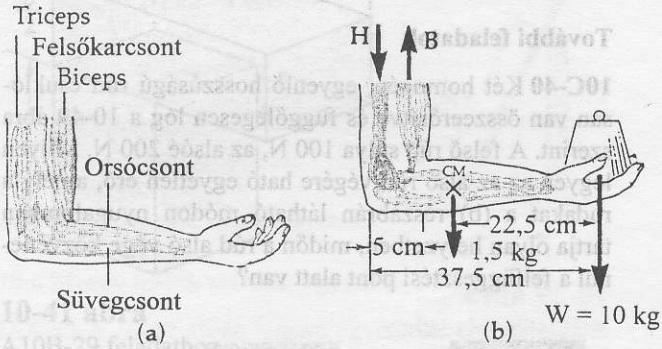
10-49 ábra
A 10C-40 feladathoz.

10C-41 Két homogén, vékony rúd T alakban van összehegesztve. Mindkét rúd hossza l, tömege m. A T alakú rudazat egyik végét csukló tartja, míg a másik végét függőlegesen lefelé irányuló $F = 2mg$ erő terheli a 10-50 ábra szerint. Keressük meg azt a θ szöget, amelynél a T alakú rudazat egyensúlyban van!



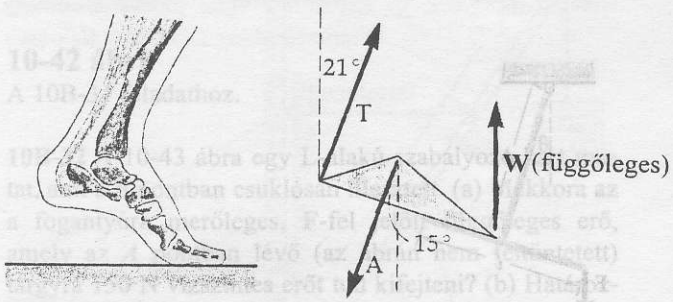
10-50 ábra
A 10C-41 feladathoz.

10C-42 A 10-51b ábrán egy ember vízszintes alkarral 10 kg-os terhet tart. Az alkar 1,5 kg-os, tömegközéppontjának helyét az ábra mutatja. A bicepsz izom az alkart a könyöktől 5 cm-re függőlegesen felfelé húzza, míg a felsőkarcsont H erővel lefelé nyomja az izületet. (a) Készítsünk vektorábrát az alkarról (egyszerűen vízszintes rúdként ábrázolva), tüntessük fel rajta az összes erővektort, mindegyiknek végét az erő támadáspontjába helyezve! (b) Határozzuk meg azt a B erőt, amelyet a bicepsz fejt ki az orsócsontra! (c) Amikor a kéz a terhet tartja, akkor a felsőkarcsont kompresszió (összenyomás) alatt van. Határozzuk meg azt a H erőt, amelyet a felsőkarcsont a könyökizületre gyakorol!



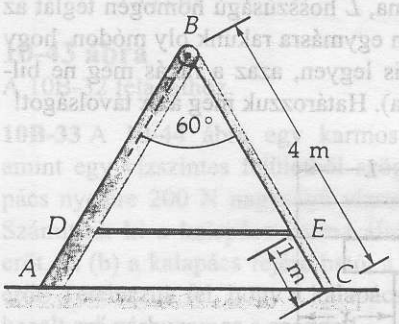
10-51 ábra
A 10C-42 feladathoz. Az (a) részfeladatban, minthogy az izmok csak húzóerőt fejthetnek ki, szükséges, hogy az egyik izommal emeljük az alkart, a másikkal süllyesszük. A tricepsz izom a vállról a sövegcsont kidudorodására csatlakozik; ha összehúzódik, kiegyenesedik a kar. Ha a bicepsz izom húzódik össze, a kar behajlik. (Az ábra erősen egyszerűsített. A valóságban nyolc izom vesz közvetlenül részt a könyökcsukló működtetésében.)

10C-43 A lábujjhegyre állás – amint ezt a 10-52 ábra mutatja – tekintélyes T húzóerőt létesít a sarokcsonthoz csatlakozó Achillesz ínban. A lábfejre ható három erő (**T**, **A**, és **W**) egyensúlyban van; vagyis összegük zérus. Tehát az erők grafikus összegezése zárt háromszöget eredményez. Határozzuk meg azt a **T** feszítőerőt, amely az ínban ébred, ha egy 90 kg-os ember ily módon egylábon lábujjhegyre áll! (Útmutatás: lásd az általános háromszögre vonatkozó D függeléket!)



10-52 ábra
A 10C-43 feladathoz.

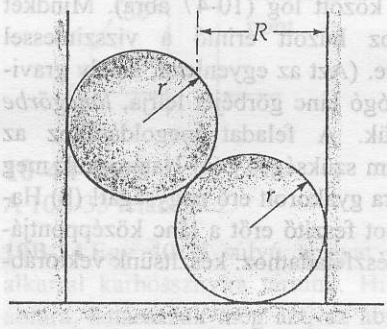
10C-44 A 10-53 ábrán bemutatott lépcsős létra mindkét szára 4 m hosszú, és csuklója a B pontban van. A létra súrlódásmentes vízszintes talajon áll, szétcsúszását az ábrázolt módon felerősített DE huzal akadályozza. Mindkét szár tömegközéppontja a szár közepében van. Az AB szár súlya 80 N, a BC száré 40 N. Határozzuk meg a létra aljára ható, talajtól származó erőt (a) az A pontban és (b) a C pontban! (c) Határozzuk meg a huzalban ébredő T erőt!



10-53 ábra
A 10C-44 feladathoz.

10C-45 Bizonyítsuk be a következő állítás helyességét: *Ha egy test transzlációs egyensúlyban van, akkor a testre ható forgatónyomatékok eredője bármely pontra vonatkoztatva azonos.*

10C-46 R belső sugarú hengerbe két egyforma, homogén gömböt helyezünk a 10-54 ábrán látható módon. A gömbök r sugara az $(R/2) < r < R$ tartományba esik. Minden felület sima. Készítsünk vektorábrát az alsó gömbről, jelöljük be minden erő nagyságát a gömbök W súlyának és az r, R sugarak függvényében!

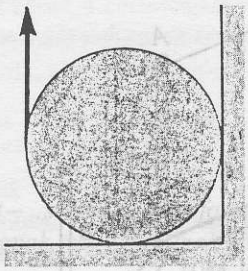


10-54 ábra
A 10C-46 és a 10C-47 feladathoz.

10C-47 A *„felbillenő cső"*. Két egyforma, sima felületű, m tömegű, r sugarú labdát helyezünk egy magas, hengeres, R sugarú csőbe, (lásd a 10-54 ábrát). [Megjegyezzük, hogy $(R/2) < r < R$.] A cső függőlegesen áll. Úgy hihetnénk, hogy ha a csövet rövidítjük és így súlypontját süllyesztjük, akkor az egység stabilabb egyensúlyi helyzetbe kerül. Azonban, ha a henger magasságát egy kritikus érték alá csökkentjük, akkor a cső felbillen! Mutassuk meg, hogy a henger akkor marad meg álló helyzetben, ha tömege legalább $M = 2m(1-r/R)$! (Útmutatás: próbáljuk a forgatónyomatékot kiszámítani a két

gömb érintkezési pontjára, amikor a cső éppen a felbillenés határán van.)

10C-48 A 10-55 ábra egy W súlyú homogén hengerre függőleges érintő irányában ható F erőt mutat. A henger és a felületek között a nyugalmi súrlódási együttható 0,50. Fejezzük ki W függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását! (Útmutatás: Ha a henger éppen a csúszás határán van, akkor *mindkét* súrlódási erő maximális értéket vesz fel. Miért?)

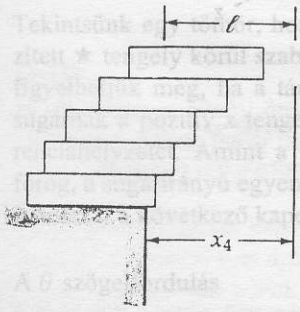


10-55 ábra
A 10C-48 feladathoz.

10C-49 Egyenletes eloszlású, 74 cm magas asztal nyugszik a talajon. 1,2 m átmérőjű köralakú lapja és három, szimmetrikusan elhelyezett, az asztallap szélétől 10 cm-rel beljebb lévő lába van. Az asztal és a lábak együttes súlya 60 N. (a) Határozzuk meg azt a legkisebb függőlegesen felfelé irányuló erőt, amely úgy hat az asztal szélén, hogy az kissé megbillen! (b) Mekkora az asztal szélére függőlegesen lefelé ható minimális erő, amely az asztalt megbillenti? (c) Mekkora, és milyen irányú az asztal szélére gyakorolt legkisebb erő ami az asztal megbillenését okozza? Mindegyik esetben tüntessük fel vázlaton az erők támadáspontjának az asztallábakhoz viszonyított helyét!

10C-50 Homogén, m tömegű, l hosszúságú lánc lóg le egy kampóról, a korábban már bemutatott 10-31 ábra szerint. (a) Fejezzük ki az y távolság függvényében azt az $F(y)$ erőt, amely a középső láncszem kampóra emeléséhez szükséges! (b) Igazoljuk $\int F \cdot dy$ kiszámításával, hogy a végzett munka megegyezik a különböző láncrészek tömegközéppontjának gravitációs energianyereségével! (10B-11 feladat).

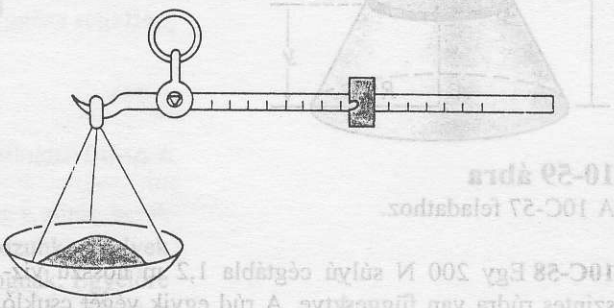
10C-51 Tekintsünk öt azonos téglát a 10-56 ábra szerint oly módon egymásra rakva, hogy a borulásmentes kilógás maximális legyen! Mutassuk meg, hogy n számú tégla esetében az x_n távolságra felírható, hogy: $x_n = (L/2)\sum_{k=1}^{n}(1/k)$. A sorozat lassan divergál; azaz $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Így a kilógási távolság a végtelenhez tart a téglák számának végtelen növelésével! (Javaslat: a legfelső téglával kezdve bontsuk le a rakást, és úgy határozzuk meg az x_n távolságot!)



10-56 ábra
A 10C-51 feladathoz.

10C-52 Vékony drótból készített R sugarú gyűrű egynegyedét kivágják. Határozzuk meg a megmaradt rész tömegközéppontját R függvényében!

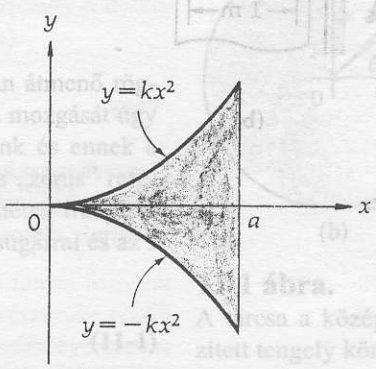
10C-53 Századokon át a kereskedők világszerte használták az ún. *kofa-mérleget*. (10-57 ábra.) Az árut a serpenyőbe helyezték, a mutatóval ellátott csúsztatható testet addig mozdították el, amíg a rúd vízszintes helyzetű lett. Ezután a rúdra gravírozott skáláról leolvasták az áru súlyát. Mutassuk meg, hogy a rúdra gravírozott skálának az áru súlyával lineárisan kell változnia! Ne feledkezzünk el arról, hogy a rúd és a serpenyő súlya állandó.



10-57 ábra
A 10C-53 feladathoz.

10C-54 Vékony, 3 m hosszú rúd vízszintes felületen nyugszik. *Vonalmenti tömegsűrűsége* (tömeg/hosszúság) lineárisan változik a rúd hossza mentén: egyik végén zérus, a másik végén 50 kg/m. (a) Határozzuk meg a rúd tömegét! (b) Mekkora munkával lehet a rúd nehezebb végét 1,5 méterrel függőlegesen feljebb emelni úgy, hogy a másik vége a felületen maradjon?

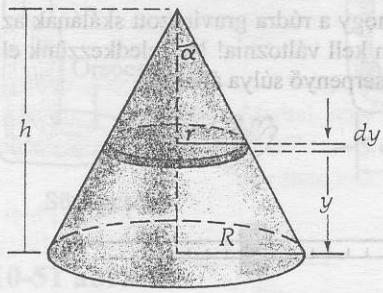
10C-55 Egyenletes vastagságú vékony fémlemezből az $x = a$ és az $y = \pm kx^2$ görbékkel határolt idom készült. (10-58 ábra.) Határozzuk meg tömegközéppontjának koordinátáit!



10-58 ábra
A 10C-55 feladathoz.

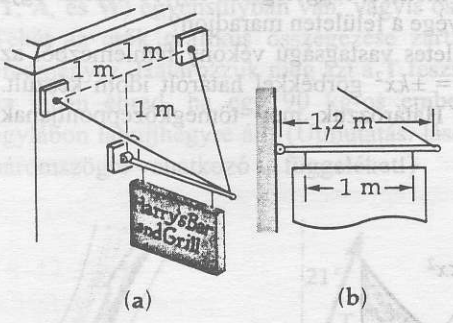
10C-56 Vékony, egyenletes vastagságú fémlemezből R sugarú körlemezt vágtak ki, majd az átmérője mentén kettévágták. Határozzuk meg az egyik darab tömegközéppontját! (Javaslat: Válasszuk dm elemi tömegnek az egyenes oldallal párhuzamos sávot.)

10C-57 Mutassuk meg, hogy az R alapkör-sugarú, h magasságú, állandó ρ sűrűségű egyenes kúp tömegközéppontja a szimmetria-tengelyen, az alaptól $h/4$ távolságra van! [Javaslat: tekintsük a 10-59 ábrán látható az alaptól y távolságra lévő dy vastagságú, tárcsát, mint elemi tömeget, amelyre $dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dy$, ahol $r = (h-y)tg\alpha = (h-y)(R/h)$].



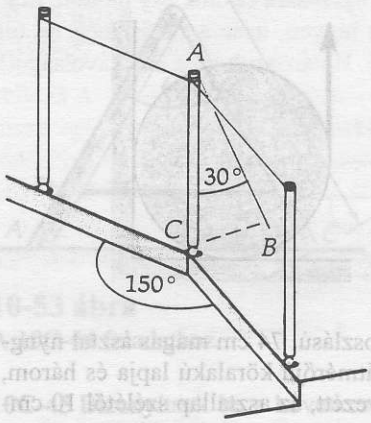
10-59 ábra
A 10C-57 feladathoz.

10C-58 Egy 200 N súlyú cégtábla 1,2 m hosszú vízszintes rúdra van függesztve. A rúd egyik végét csukló rögzíti, másik végét két merevítő huzal tartja a 10-60 ábrán vázolt módon. A cégtáblát függesztő két huzal egymástól 1 m távolságra van, szimmetrikusan elhelyezve a vízszintes rúdon a cégtáblát. A rúd súlyát elhanyagolva számítsuk ki a feszítő erőt minden egyes merevítő huzalban.



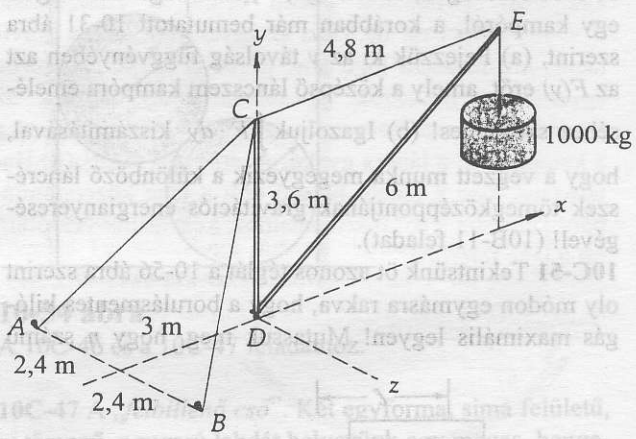
10-60 ábra
A 10C-58 feladathoz.

10C-59 Villanyvezeték húzódik egy 30°-os útkanyar fölött. A vezetéket az út töréspontjában egy függőleges AC pózna tartja, amelynek alsó vége gömbcsuklón nyugszik. Az A pontban a póznához erősített vezetékek vízszintesek. A pózna feldőlésének megakadályozására az AB feszítőhuzal szolgál, amelyet a 10-61 ábrán látható módon szimmetrikusan, a póznához 30°-os szögben illesztve helyeztek el (tehát a BC egyenes felezi a 150°-os szöget). Ha a vezetékeket T erő feszíti, mekkora a feszítőhuzalban ébredő erőt.



10-61 ábra
A 10C-59 feladathoz.

10C-60 A 10-62 ábrában a függőleges CD árbocot és a DE rudat a D pontban rögzített gömbcsukló tartja. Az árboc és a rúd súlyának elhanyagolásával számítsuk ki külön-külön a szimmetrikusan elhelyezett AC és BC kábeleket feszítő erőt! (A rúd és a vízszintes CE kábel a függőleges xy síkban vannak.)



10-62 ábra
A 10C-60 feladathoz.

A MEREV TEST FORGÓ MOZGÁSÁNAK KINEMATIKÁJA

„A dolgok" – így szólt – „számomra egyformák lesznek örökre:
Többnyire föl-le mozognak, vagy forognak körbe-körbe."
P. R. Chalmers
(Ringlispilek és hinták)

11.1 Bevezetés

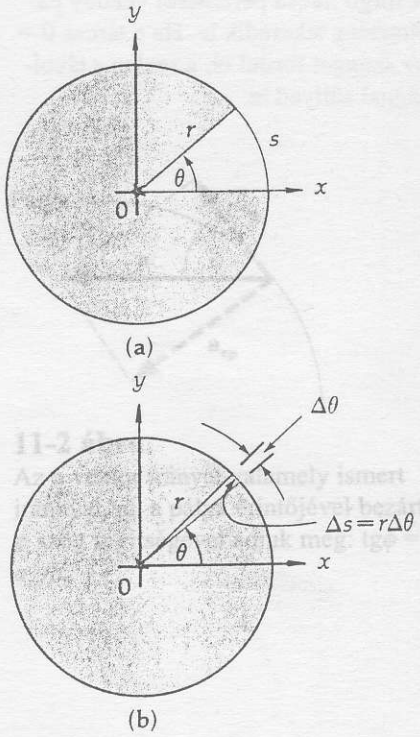
A továbbiakban olyan merev testek forgó mozgásával foglalkozunk, amelyek a tömegközéppontjukon átmenő szimmetriatengely körül forognak. Egyelőre csak azokat az eseteket vesszük tekintetbe, amelyeknél a tengely iránya a térben rögzített. Példaként szolgálhat az alaplapjára csavarozott elektromotor rotorjának forgása, vagy az egyenes úton haladó gépkocsi kerekének forgó mozgása. A forgástengely egy helyben maradhat, vagy haladó (transzlációs) mozgást végezhet, de a tengely mindig megtartja állandó irányát a térben. Az elemzés könnyen érthetővé válik, ha a mozgást a test középpontjának haladó mozgása, valamint a test tömegközéppont körüli forgó mozgása eredőjének tekintjük. Ugyanúgy, ahogyan egyenesvonalú mozgásoknál tettük, most is azzal kezdjük, hogy megfogalmazzuk a forgó mozgást leíró kinematikai egyenleteket. Majd a következő fejezetben Newton törvényeit alkalmazzuk, hogy megértsük, miért tesznek szert a testek forgási gyorsulásra.

11.2 A forgás kinematikai leírása

Tekintsünk egy tömör, homogén tárcsát, amely a középpontján átmenő rögzített ★ tengely körül szabadon foroghat. (11-1 ábra.) A tárcsa mozgását úgy figyelhetjük meg, ha a tárcsára sugárirányú egyenest rajzolunk és ennek a sugárnak a pozitív x tengelyen való áthaladásához rendeljük a „zérus" referenciahelyzetet. Amint a tárcsa az óramutató járásával ellentétes irányban forog, a sugárirányú egyenes olyan θ szöget súrol, amely az r sugárral és az s ívhosszal a következő kapcsolatban van:

A θ szögelfordulás $$\theta \equiv \frac{s}{r}. \qquad (11\text{-}1)$$

A szöget *radiánban* (rad) mérjük. Ez az egység két hosszúság hányadosa, így dimenzió nélküli mennyiség, puszta szám. Megállapodás szerint általában a



11-1 ábra.
A tárcsa a középpontján átmenő rögzített tengely körül forog az óramutató járásával ellentétes irányban. (A ★ csillag a papír síkjára merőleges tengelyt jelöli.)

pozitív x tengelytől mért, az óramutató járásával ellentétes forgást választjuk pozitívnak, az ellentétes irányú forgás negatív.

Ha Δt időtartam alatt a szög helyzete $\Delta\omega$ értékkel változik, akkor az $\omega_{átl}$ **átlagos szögsebességet** a következőképpen definiáljuk:

$$\omega_{átl.} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{11-2}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenettel az ω **pillanatnyi szögsebességet** definiáljuk:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi szögsebesség a szögelfordulás idő szerinti deriváltja:

Pillanatnyi szögsebesség
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{11-3}$$

A szögsebesség egysége 1 radián per másodperc (rad/s). Tekintetve, hogy a radián dimenzió nélküli mennyiség, a szögsebesség dimenziója $[T^{-1}]$.

Ha a szögsebesség Δt időtartam alatt $\Delta\omega$ értékkel növekszik, akkor az $\alpha_{átl}$ **átlagos szöggyorsulás** definíció szerint[1]:

$$\alpha_{átl} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{11-4}$$

A $\Delta t \to 0$ határátmenettel az α **pillanatnyi szöggyorsulást** definiáljuk:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi szöggyorsulás a szögsebesség idő szerinti deriváltja:

Pillanatnyi szöggyorsulás
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{11-5}$$

A szöggyorsulás egysége 1 radián per másodperc a négyzeten (rad/s^2), dimenziója $[T^{-2}]$.

A szögelfordulással kapcsolatos mennyiségek és a tárcsa kerületén lévő részecske érintő irányú mozgása között szoros kapcsolat van. Amint a részecske s ívhossznyit halad, a tárcsa θ szöggel elfordul. A (11-1) összefüggés szerint:

$$s = r\theta.$$

Mindkét oldalt a t idő szerint differenciálva (konstans r mellett), a részecske érintő irányú v kerületi sebessége és az ω szögsebesség között fennálló:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

vagy

$$v = r\omega \tag{11-6}$$

összefüggést kapjuk. Hasonló kapcsolat van az érintő irányú a_t gyorsulás és az α szöggyorsulás között. Ha a (11–6) összefüggést ismét az idő szerint deriváljuk, akkor

---

[1] A görög ω és α betűk írásánál figyeljünk, nehogy összekeverjük ezeket a latin w és a betűkkel. Néha ugyanabban az egyenletben egyidejűleg fordulnak elő, és zavar származhat abból, ha nincsenek egyértelműen megkülönböztetve egymástól.

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

adódik, vagyis az érintő irányú gyorsulás kifejezhető a szöggyorsulás segítségével:

Érintő irányú gyorsulás $a_t = r\alpha$ **(11-7)**

A kerületen lévő részecskének csak akkor van *tangenciális* (érintő irányú) gyorsulása, ha az ω szögsebesség változik. Ha ω növekedik a forgás irányában, akkor az a_t érintő irányú gyorsulás pozitív, ha ω csökken, akkor a_t negatív. Azonban, emlékeztetve a 4. fejezetre, még abban az esetben is, ha a tangenciális gyorsulás zérus, a körmozgást végző részecskének akkor is van a kör középpontja felé mutató *centripetális* gyorsulása: $a_{cp} = v^2/r$. Ha a $v = r\omega$ helyettesítést elvégezzük, akkor a centripetális gyorsulást $a_{cp} = (r\omega)^2/r$, azaz

Centripetális gyorsulás (ω függvényben kifejezve) $a_{cp} = r\omega^2$. **(11-8)**

alakban is kifejezhetjük

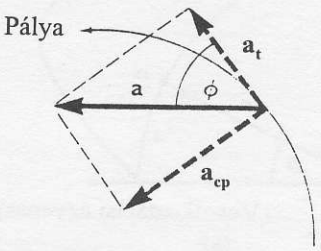
A kerületi mozgással és a szögelfordulással kapcsolatos mennyiségek közötti összefüggéseket az alábbiakban összegezzük. Minthogy a θ szögelfordulást radiánban mérjük, ezért az alábbi egyenletekben szereplő, szöggel kapcsolatos mennyiségeket is radiánban kell kifejezni.

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ v &= r\omega \\ a_t &= r\alpha \end{aligned}$$ A szögeket radiánban kell kifejezni **(11-9)**

Fontos megjegyezni, hogy a kerületi mozgással kapcsolatos *tangenciális* mennyiségek (s, v, a_t) jelölésére latin betűket használunk, míg a görög betűkkel mindig a szögelfordulással kapcsolatos *forgási* mennyiségeket (θ, ω, α) jelöljük.

A gyorsulásvektor komponensei	r és v segítségével kifejezve	szögek segítségével kifejezve
Tangenciális (érintő irányú) gyorsulás Csak akkor lép fel, ha a v sebesség nagysága változik	$a_t = \frac{dv}{dt}$	$a_t = r\alpha$ **(11-10)**
Centripetális irányú gyorsulás Mindig, fellép még állandó sebesség esetén is.	$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$	$a_{cp} = r\omega^2$

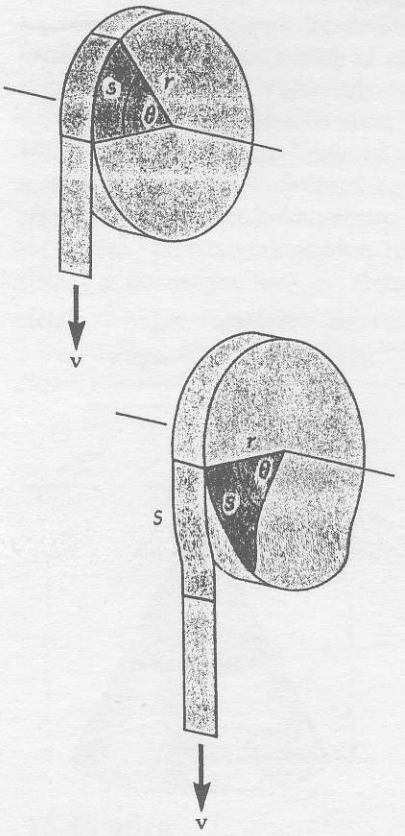
A teljes **a** gyorsulásvektort a két merőleges komponens geometriai összegezésével kapjuk; nagysága tehát a Pitagorász tétel szerint $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$, irányát pedig valamely ismert iránnyal pl. a görbe érintőjével, vagy a befelé mutató sugárral bezárt szög segítségével adjuk meg (11-2 ábra).



11-2 ábra.
Az **a** vektor irányát valamely ismert iránnyal, pl. a pálya érintőjével bezárt ϕ szög segítségével adjuk meg: $\mathrm{tg}\phi = a_{cp}/a_t$.

11.3 A forgó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések

A szögelfordulással kapcsolatos mennyiségek (θ, ω és α) a tárcsa forgását írják le, míg az s, v és a_t mennyiségek a tárcsa kerületén lévő részecske érintő irányú mozgásáról adnak számot. Most a két mozgástípus között lévő szoros kapcsolat alapján a forgó mozgásra vonatkozó kinematikai egyenleteket fogjuk meghatározni.



11-3 ábra.
A forgó tárcsa pereméről vékony papírszalag tekeredik le. Ha a tárcsa $\theta = s/r$ szöggel fordul el, a szalag s távolsággal süllyed le.

Tegyük fel, hogy a tárcsa peremére vékony papírszalag van tekerve, ahogyan a 11-3 ábra mutatja. Amikor a tárcsa forog és a szalag letekeredik, a szalag egyenes vonalú mozgásának kinematikai jellemzőit (s, v és a_t) a tárcsa forgó mozgásával a (11-9) egyenleteknek megfelelően az $s = r\theta$, $v = r\omega$ és $a = r\alpha$ összefüggések kapcsolják össze. Felírjuk a szalag haladó mozgásának kinematikai egyenleteit, aztán behelyettesítjük a (11-9) egyenleteket, hogy megkapjuk a forgó mozgás kinematikai egyenleteit. Ahhoz hasonlóan, ahogyan a haladó mozgásra vonatkozó egyenletek levezetésénél állandó gyorsulás esetére szorítkoztunk, itt azt tesszük fel, hogy a szöggyorsulás értéke állandó.

$$v = v_0 + at \qquad s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$r\omega = r\omega_0 + r\alpha t \qquad r\theta = r\theta_0 + r\omega_0 t + \tfrac{1}{2}r\alpha t^2 \qquad r^2\omega^2 = r^2\omega_0^2 + 2r\alpha\, r(\theta - \theta_0)$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \qquad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2} \qquad \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)}$$

Az $\omega_{átl}$ (átlagos szögsebesség) definíciójából két további egyenlet következik:

$$\boxed{\omega_{átl} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}} \quad \text{és} \quad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_{átl} t}.$$

A 11-1 táblázat összefoglalja ezeket az egyenleteket, amelyeket könnyen megjegyezhetünk, ha a haladó és a forgó mozgásra vonatkozó egyenletek szoros analógiájára figyelünk. A körív mentén történő érintő irányú mozgás egyenletei hasonlóak azokhoz az egyenletekhez, amelyek a tárcsáról letekeredő szalag haladó mozgására vonatkoznak.

11-1 TÁBLÁZAT A forgó mozgás kinematikai egyenletei

Tangenciális (érintő irányú) mozgás a kerület mentén		Forgó mozgás	
s	Elmozdulás	θ	
v	Sebesség	ω	
a_t	Gyorsulás	α	
$v = v_0 + a_t t$	(ha a_t állandó)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(ha α állandó) (11-11)
$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_t t^2$		$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$	(11-12)
$v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0)$		$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(11-13)

***Az átlagsebességet tartalmazó további egyenletek* (állandó a és α esetén)**

$$v_{átl} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad \omega_{átl} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \qquad (11\text{-}14)$$

$$s = s_0 + v_{átl} t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_{átl} t \qquad (11\text{-}15)$$

A forgás kinematikai egyenleteinek levezetése differenciálszámítás segítségével.

A szöggyorsulást definiáló $\alpha = d\omega / dt$ egyenlet alapján

$$\alpha \cdot dt = d\omega$$

írható.
Állandó α esetén mindkét oldalt integrálva:

$$\alpha \int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

azaz

$$\alpha \cdot t = \omega - \omega_0$$

adódik; innen

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t\,.$$

Az $\omega = d\theta / dt$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha \cdot t.$$

Integrálva ezt az összefüggést:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha \cdot t)\, dt$$

azaz

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

ahonnan adódik

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2.$$

A (10-11) és (10-12) egyenletekből t kiküszöbölésével kapjuk a harmadik kinematikai egyenletet:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

A másik két kinematikai egyenlet az átlagos szögsebesség definíciójából közvetlenül következik.

11-1 PÉLDA

Köszörűkő nyugalmi helyzetből konstans $\alpha = 0{,}3$ rad/s^2 szöggyorsulással indul. (a) Határozzuk meg, mekkora lesz a radián per másodpercben mért szögsebessége 20 körülfordulás (40π radián) után! (b) Mekkora a szögsebesség fordulat per másodpercben?

MEGOLDÁS

Felsoroljuk az ismert értékeket:

$\theta_0 = 0$ $\qquad$ $\theta = 40\pi$ rad

$\omega_0 = 0$ $\qquad$ $\omega = ?$

$\alpha = 0{,}3$ rad/s^2

(a) Ezeket az ismereteket a kinematikai egyenletekkel összevetve, a (11-13) egyenletet választjuk ki:

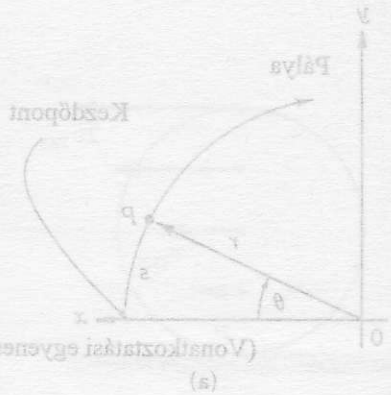
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

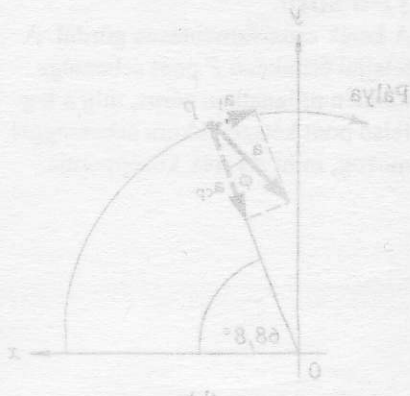
$$\omega^2 = 0 + 2\left(0{,}3\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(40\pi \text{ rad} - 0) = 75{,}4\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

$$\omega = \sqrt{75{,}4\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}} = 8{,}68\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(b) Az eredményt fordulat per másodpercre a következőképpen számítjuk át:

$$\omega = 8{,}68\frac{\cancel{\text{rad}}}{\text{s}}\underbrace{\left[\frac{1\,\text{ford}}{2\pi\,\cancel{\text{rad}}}\right]}_{\text{átszámítási tényező}} = 1{,}38\frac{\text{ford}}{\text{s}}$$





11-2 PÉLDA

Egy 1,2 m átmérőjű, kezdetben nyugalomban lévő kerék 0,6 rad/s^2 állandó szöggyorsulással forogni kezd. Tekintsük azt a peremen lévő P pontot, amelynek a $t_0 = 0$ időpontban $\theta_0 = 0$ a szögelfordulása. (a) Határozzuk meg a kerék szögsebességét az indulástól számított 2 másodperc múlva! (b) Számítsuk ki azt a teljes utat, amit a P pont az indulástól számított 2 másodperc időtartam alatt befut! (c) Állapítsuk meg a vizsgált pont helyét a $t = 2$s időpontban! (d) Határozzuk meg a pont $t = 2$s időponthoz tartozó gyorsulását!

MEGOLDÁS

Táblázatosan felsoroljuk az adott értékeket:

$r = 0{,}6$ m $\qquad \omega_0 = 0$

$\alpha = 0{,}6$ rad/s^2 $\qquad \omega = ?$

$t = 2$ s.

(a) Megvizsgálva a kinematikai egyenleteket, a kérdés megválaszolásához a (11-11) egyenlet a megfelelő;

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = 0 + (0{,}6 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s}) = 1{,}20 \text{ rad/s}.$$

(b) Ha ismernénk az első 2 másodperc alatt megtett θ szögelfordulást, akkor az $s = r\theta$ összefüggésből megkaphatnánk a kerület menti s tangenciális elmozdulást. (11-4a ábra.) Ezért a (11-12) egyenletből indulunk ki.[2] Tehát

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(0{,}6 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s})^2 = 1{,}2 \text{ rad}.$$

Így:

$$s = r\theta = (0{,}6 \text{ m})(1{,}2 \text{ rad}) = 0{,}72 \text{ m}.$$

Megjegyezés: A radiánt – minthogy a dimenziója az egység – végeredményben nem tüntetjük fel.

(c) A (b) részfeladatra adott válaszban azt találtuk, hogy a P pont szögelfordulása a $t = 2$ s időpontban $\theta = 1{,}2$ rad. Kényelmi okból ezt a szöget fokokra váltjuk át:

$$\theta = 1{,}2 \text{ rad}\underbrace{\left[\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}\right]}_{\text{átszámítási tényező}} = 68{,}8^\circ.$$

(d) A gyorsulás két komponensét a következőképpen határozzuk meg.

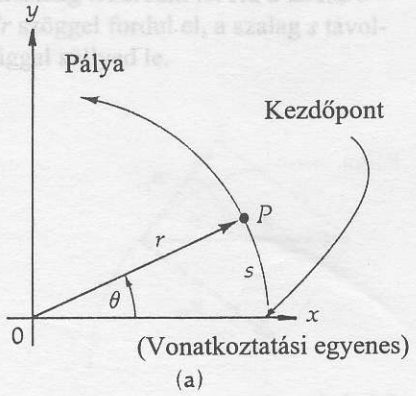
Az időben állandó tangenciális komponens nagysága:

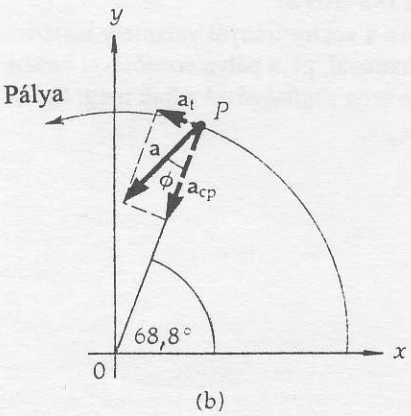
$$a_t = r\alpha = (0{,}6 \text{ m})(0{,}6 \text{ rad/s}^2) = 0{,}36 \text{ m/s}^2.$$

A centripetális komponens nagysága:

$$a_{cp} = r\omega^2 = (0{,}6 \text{ m})(1{,}2 \text{ rad/s})^2 = 0{,}864 \text{ m/s}^2.$$

A gyorsulásvektor a nagyságát a $t = 2$ s időpontban a Pitagorász tétellel kaphatjuk meg:





11-4 ábra.
A 11-2 példához.

[2] A szögelfordulásra vonatkozó összefüggés helyett választhattuk volna a (11-12) egyenlet érintő irányú mozgásra vonatkozó: $s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_t t^2$ alakját is.

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(0{,}864\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(0{,}36\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = 0{,}8761\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az **a** gyorsulásvektor irányát a 11-4b ábra mutatja. Azt a ϕ szöget, amelyet a gyorsulásvektor a befelé mutató radiális iránnyal bezár, a következőképpen számíthatjuk ki:

$$tg\phi = \frac{a_t}{a_{cp}} = \frac{0{,}36\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}864\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}417$$

$$\phi = arc\ tg\ 0{,}417 = 22{,}6°$$

(Teljesen elfogadható lett volna annak a (90°–22,6°) = 67,4° szögnek a megadása is, amelyet a gyorsulásvektor az érintő irányával zár be.)

11-3 PÉLDA

Ez a példa időben változó szöggyorsulású mozgással kapcsolatos, *ezért a 11-1 táblázatban szereplő kinematikai egyenleteket itt nem szabad alkalmaznunk.* Egy rögzített tengelyre szerelt kerék nyugalmi helyzetéből az alábbi függvénnyel megadott szöggyorsulással kezd forogni:

$$\alpha = 9 - 12\,t, \qquad \text{(SI egységekben)}$$

ahol t a kerék forgásának kezdetétől mért idő. Határozzuk meg, hány fordulatot tesz meg a kerék a megállásig (ami után majd az ellenkező irányba kezd forogni)!

MEGOLDÁS

A 11-1 táblázat egyenleteit nem szabad használni, mert az α szöggyorsulás nem állandó. Az $\alpha = d\omega/dt$ alapegyenletből indulunk ki. Integrálással:

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha \cdot dt = \int_0^t (9 - 12t)dt = 9t - 6t^2 \qquad \text{(SI egységekben)}$$

adódik. Azt a t időt, ami az $\omega_0 = 0$ és az $\omega = 0$ állapot között eltelt, ezek behelyettesítésével kapjuk meg:

$$0 - 0 = 9t - 6t^2.$$

ahonnan $t = 9/6 = 1{,}50$ s.

Az $\omega = d\theta/dt$ felhasználásával

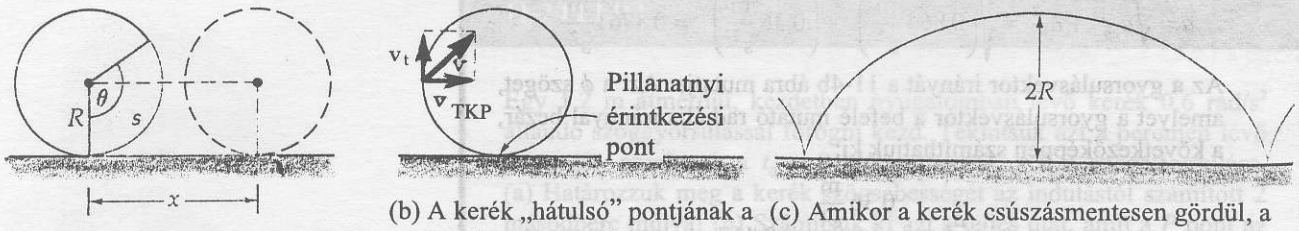
$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega \cdot dt = \int_0^t (9t - 6t^2)dt = 4{,}5t^2 - 2t^3$$

$\theta_0 = 0$ és $t = 1{,}5$ s behelyettesítésével

$$\theta - 0 = 4{,}5(1{,}5)^2 - 2(1{,}5)^3 = 3{,}375 \text{ rad}$$

adódik. A keresett fordulatszámot a következőképpen számítjuk ki:

$$\theta = 3{,}375 \text{ rad}\underbrace{\left(\frac{1 \text{ ford}}{2\pi \text{ rad}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 0{,}537 \text{ ford}$$



(a) Ha a kerék csúszásmentesen gördül, az s ívhosszúság megegyezik azzal az x távolsággal, amelyet a tömegközéppont megtesz. Bizonyos értelemben az s ívhossz „ráfekszik" a vízszintes x távolságra.

(b) A kerék „hátulsó" pontjának a Földhöz viszonyított v sebessége a $\mathbf{v}_t+\mathbf{v}_{TKP}$ vektorösszeggel egyenlő.

(c) Amikor a kerék csúszásmentesen gördül, a kerület egy-egy pontja ezt a *cikloisnak* nevezett görbét írja le.

11-5 ábra.
Sik felületen történő csúszásmentes gördülés.

11.4 Gördülés (csúszás nélkül)

Érdekes és gyakran előforduló mozgás, amelyben a haladó és forgó mozgás összekapcsolódik, a kerék vagy a gömb gördülése csúszás nélkül. (A következő fejezetekben gyakran fogunk ilyen esetekkel foglalkozni.) A 11-5a ábrán a kerék *csúszás nélkül* gördül vízszintes felületen. Amikor a kerék $\theta = s/r$ szöggel elfordul, az s ívhossz nyilvánvalóan megegyezik azzal a vízszintes x távolsággal, amellyel a kerék tömegközéppontja elmozdul. A kerék mozgását úgy tekintjük, mintha két különálló mozgásból tevődne össze: a tömegközéppont *egyenesvonalú haladó mozgásából* és a tömegközéppont körüli forgó mozgásból. Abból a fontos tényből, hogy csúszás nem lép fel, az következik, hogy a haladó és a forgó mozgás kapcsolatos egymással. Azaz, az x, v és a mennyiségekre vonatkozó haladási kinematikai egyenletek kapcsolatban vannak a θ, ω és α forgási kinematikai egyenletekkel:

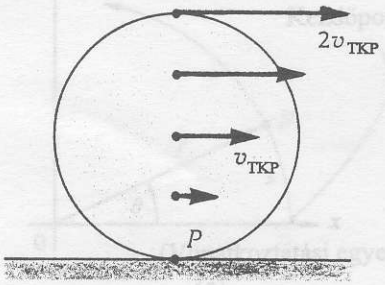
Gördülés csúszás nélkül — a tömegközéppont haladása:

$$\begin{cases} s = r\theta \\ v = r\omega \\ a = r\alpha . \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\text{A szöget}\\ \text{radiánban}\\ \text{kell mérni.}\end{array}\right] \qquad \textbf{(11-16)}$$

A csúszás nélküli gördülés másik jellegzetessége, hogy a kerék talajjal érintkező pontjának (a Földhöz viszonyított) pillanatnyi sebessége zérus. A kerék többi pontjának a Földhöz viszonyítottan változó pillanatnyi v sebessége van, ami két sebességnek, a tömegközéppont Földhöz viszonyított $\mathbf{v}_{TKP}$ sebességének és a pont tömegközéppontra vonatkoztatott – a tömegközéppontból a ponthoz húzott $\mathbf{r}$ rádiusz-vektorra mindig merőleges – $\mathbf{v}_t$ tangenciális sebességének vektori összege.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{TKP} + \mathbf{v}_t \qquad \textbf{(11-17)}$$

A 11-5b ábra ezt a vektorösszeget a gördülő kerék kerületének egy kiválasztott pontjára vonatkozóan szemlélteti. Hasonló meggondolásból következik, hogy a kerék legfelső pontjának Földhöz viszonyított pillanatnyi sebessége a tömegközéppont sebességének kétszerese. (11-6 ábra.) Általában, a kerék *bármely* pontjának (a Földhöz viszonyított) pillanatnyi sebessége merőleges a kerék és a talaj pillanatnyi érintkezési pontjából a szóbanforgó pontba mutató helyzetvektorra. Ez azért van így, mert a kerék minden pillanatban a pillanatnyi érintkezési pont körül forog.



11-6 ábra.
A kerék csúszásmentesen gördül. A talajjal érintkező P pont sebessége minden pillanatban zérus, míg a legfelső pont kétszerakkora sebességgel mozog, mint a kerék középpontja.

11-4 PÉLDA

Egy autó nyugalmi helyzetéből egyenletesen gyorsul és 9 másodperc alatt 22 m/s sebességet ér el. Kerekének átmérője 58 cm. (a) Határozzuk meg, hány fordulatot tett meg a kerék ezalatt, feltéve, hogy csúszás nélkül gördült. (b) Mekkora a kerék végső forgási sebessége fordulat per másodpercben kifejezve?

MEGOLDÁS

(a) Először a tömegközéppont egyenesvonalú gyorsulását határozzuk meg, majd azt az x távolságot, amely a kerék elmozdulása, (ez a tengely körüli szögelforduláshoz tartozó s ívhosszal egyezik meg). A mozgás kezdetének az $x = 0$ értéket választva, a következőket állapíthatjuk meg:

Adott: $x_0 = 0$ $\quad t = 9\ \text{s}$
$v_0 = 0$ $\quad x = ?$
$v = 22\ \text{m/s}$ $\quad a = ?$

$$v = v_0 + at$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{22\dfrac{\text{m}}{\text{s}} - 0}{9\,\text{s}} = 2{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Továbbá $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2{,}44\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(9\,\text{s})^2 = 99{,}0\,\text{m}$$

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{99{,}0\,\text{m}}{0{,}29\,\text{m}} = 341\,\cancel{\text{rad}}\underbrace{\left[\frac{1\,\text{ford}}{2\pi\,\cancel{\text{rad}}}\right]}_{\text{átszámítási tényező}} = 54{,}3\,\text{ford}$$

(b) A végsebesség v =22 m/s. Ennek alapján felírható:

$$v = r\omega$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{22\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}29\,\text{m}} = 75{,}8\,\frac{\cancel{\text{rad}}}{\text{s}}\underbrace{\left[\frac{1\,\text{ford}}{2\pi\,\cancel{\text{rad}}}\right]}_{\text{Átszámítási tényező}} = 12{,}1\,\frac{\text{ford}}{\text{s}}$$

11-5 PÉLDA

Tegyük fel, hogy az előző példában szereplő kocsi 15 m/s sebességgel halad. Határozzuk meg a kerék azon pontjának a Földhöz viszonyított pillanatnyi sebességvektorát, amely a kerék elülső részén, a talaj fölött 40 cm-re van!

MEGOLDÁS

A szóban forgó pont a 11-7 ábrán látható. A pont pillanatnyi sebessége a tömegközéppont $\mathbf{v}_{TKP}$ sebességének és a $\mathbf{v}_t$ tangenciális sebességnek vektori összege. Az ábrából következik, hogy $\mathbf{v}_t$ vízszintessel bezárt θ szöge:

$$\theta = \text{arc cos}\left(\frac{11\,\text{cm}}{29\,\text{cm}}\right) = 67{,}7°$$

A 11-7b ábráról leolvasható, hogy ennek $\phi = 180° - \theta = 112{,}3°$-os kiegészítő szöge a vektorháromszög $\mathbf{v}_{TKP}$ és $\mathbf{v}_t$ oldalai által bezárt szög. A **v** vektor hosszának meghatározására a koszinusz tételt használjuk:

$$v^2 = v_{TKP}^2 + v_t^2 - 2v_{TKP}v_t \cos\phi.$$

Minthogy $|\mathbf{v}_{TKP}| = |\mathbf{v}_t|$, azért ez az összefüggés a következőképpen egyszerűsödik le:

$$v^2 = 2\,v_{TKP}^2\,(1 - \cos\phi),$$

$$v^2 = 2(15\ \text{m/s})^2\,(1 - \cos 112{,}3°) = 620{,}8\ (\text{m/s})^2,$$

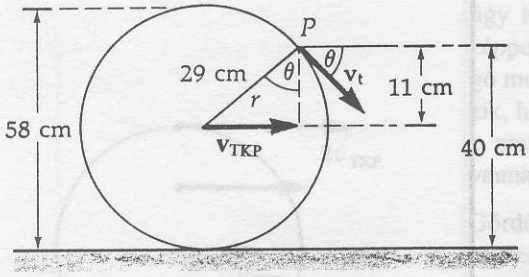
$$v = 24{,}9\ \text{m/s}.$$

A **v** vektor vízszintessel bezárt α szögére, mivel a 11-7b ábrán látható háromszög egyenlőszárú:

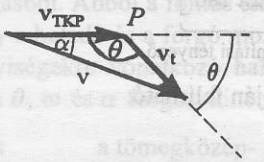
$$\alpha = \text{arc cos}\frac{\left(\frac{v}{2}\right)}{v_{TKP}} = \text{arc cos}\frac{24{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\left(15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 33{,}8°$$

adódik.

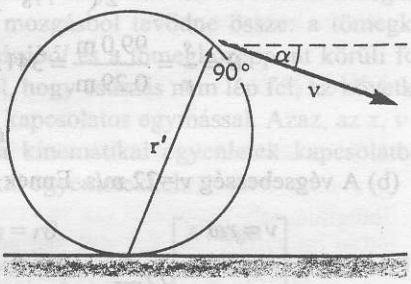
Megjegyezzük, hogy a **v** vektor merőleges a kerék és a talaj érintkezési pontjából a számításban szereplő pontba mutató **r'** vektorra.



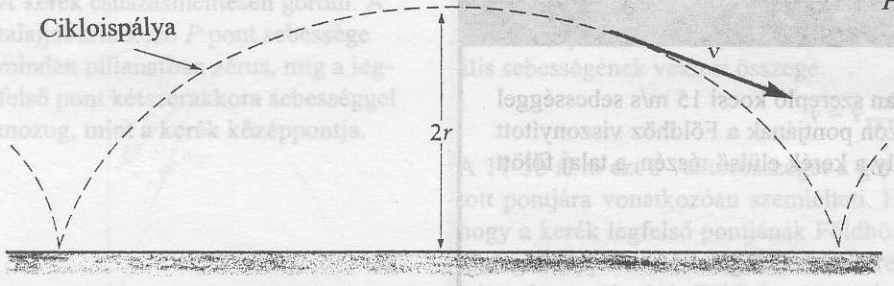
(a) A kerék *P* pontja 40 cm-re van a talaj felett.



(b) A $\mathbf{v}_{TKP} + \mathbf{v}_t = \mathbf{v}$ vektorösszeg diagramja. Mint-hogy $|\mathbf{v}_{TKP}| = |\mathbf{v}_t|$ így a háromszög egyenlőszárú.



(c) A kerék minden pillanatban a talajjal érintkező pontja körül fordul el. Ezért a kerék bármely *P* pontjának **v** sebességvektora merőleges a kerék és a talaj pillanatnyi érintkezési pontjából a *P* pontba mutató **r'** helyvektorra.



(d) A gördülő kereket figyelve megállapítható, hogy egy kerületi pontjának sebességvektora mindig az adott pont által befutott cikloispálya érintőjének irányába mutat.

11-7 ábra.
A 11-5 példához.

Összefoglalás

A merev test tömegközéppontján átmenő, rögzített szimmetriatengely körül végzett forgó mozgás a következő paraméterekkel jellemezhető:

Szögelfordulás θ

Szögsebesség $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Szöggyorsulás $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$.

Egy, a tömegközéppontján átmenő rögzített tengely körül forgó tárcsa kerületén lévő pont sebessége a kerület érintőjének irányába mutat. A pont gyorsulásának mindig van középpont felé mutató komponense: $a_{cp} = r\omega^2$, ezt *centripetális gyorsuláskomponensnek* nevezzük. Ha a tárcsa felgyorsul, vagy lelassul, akkor $a_t = d\omega/dt$ *tangenciális gyorsulás* is fellép.

A tangenciális mennyiségek és a szögekkel leírt mennyiségek között az alábbi összefüggések vannak:

A rögzített tengely körül forgó tárcsa kerületi pontjának érintő irányú mozgása		Csúszásmentes gördülés esetén a tömegközéppont haladó mozgása
$s = r\theta$ $v = r\omega$ $a_t = r\alpha$	A szögekkel kifejezett mennyiségeket radiánban kell megadni.	$x = r\theta$ $v = r\omega$ $a = r\alpha$

A forgó mozgásra és a haladó mozgásra vonatkozó kinematikai egyenletek közötti analógiát jól szemlélteti a következő táblázat.

A csúszásmentesen gördülő kerék bármely P pontjának pillanatnyi (a Földre vonatkoztatott) **v** sebességvektora merőleges a P pontnak a kerék és a talaj pillanatnyi érintkezési pontjából húzott **r'** helyvektorára. A P pont sebességének nagysága $v = r'\omega$.

A forgó mozgás kinematikai egyenletei

Tangenciális (érintő irányú) mozgás a kerület mentén	Forgó mozgás
Ahol s = ívhossz v = tangenciális sebesség a_t = tangenciális gyorsuláskomponens	ahol θ = szögelfordulás ω = szögsebesség α = szöggyorsulás
$v = v_0 + a_t t$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0)$ (ha a_t állandó)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ (ha α állandó)

Az átlagsebességet tartalmazó további egyenletek (állandó a és α esetén)

$v_{átl} = \dfrac{v_0 + v}{2}$	$\omega_{átl} = \dfrac{\omega_0 + \omega}{2}$
$s = s_0 + v_{átl} t$	$\theta = \theta_0 + \omega_{átl} t$

Kérdések

1. Alkalmas-e a *radián* mint a szög mértékegysége a kinematikai problémák elemzésére, függetlenül attól, hogy a többi mennyiséget milyen mértékrendszerben mérjük?
2. Európában kilátásba helyezték a *grad* egység bevezetését a szög mérésére. Egy negyed körívben 100 grad van. Hasonlítsuk össze ennek előnyeit és hátrányait a *fok* használatával!
3. Egyik köszörűkő állandó szögsebességgel forog. Van-e a peremén lévő pontnak tangenciális gyorsuláskomponense? Sugárirányú gyorsuláskomponense? Állandó-e ezeknek a gyorsuláskomponenseknek a nagysága és az iránya?
4. Gondoljuk végig az előbbi kérdést állandó szöggyorsulás esetére!

Feladatok

11.2 A forgás kinematikai leírása

11A-1 (a) Határozzuk meg az óra 18 cm hosszú percmutatója hegyének sebességét! (b) Mennyi a mutató szögsebessége radián per másodpercben?

11A-2 Határozzuk meg az átszámítási tényezőt a fordulat per perc és a radián per másodperc között (és megfordítva).

11A-3 Soroljuk fel az alábbiakat növekvő szögsebesség szerint és fejezzük ki a szögsebességeket radián per másodpercben: az óra nagymutatója, az óra kismutatója, a 100 perc periódusidővel földkörüli körpályán keringő űrhajós; a 6000 fordulat per perc sebességgel forgó köszörűkő!

11A-4 Fejezzük ki radiánban a következő szögeket: (a) 98°, (b) 3,62 fordulat és (c) $2{,}78\times10^{-3}$ ívperc!

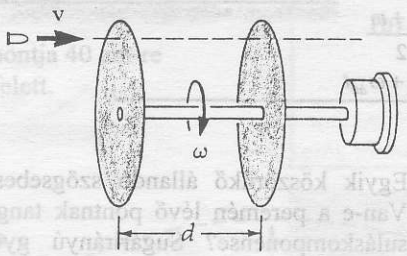
11. 3 A forgó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések

11A-5 Egy lemezjátszó tányérja kezdetben $33^1/_3$ fordulat per perc sebességgel forog. Ha a lemezjátszó áramát kikapcsoljuk, akkor a tányér állandó 0,20 rad/s^2 szöggyorsulással lassul le. (a) Hány másodperc telik el, amíg a lemezjátszó leáll? (b) Hány fordulatot tesz meg a lemezjátszó a megállásig?

11B-6 Egy kerék forgásának irányát egy olyan berendezés fordítja meg, amely 100 rad/s^2 állandó szögsebesség-változást hoz létre. A kerék kezdetben percenként 2000 fordulatot tesz meg. (a) Határozzuk meg, mennyi idő kell ahhoz, hogy a kerék szögsebessége *ellenkező irányú* 2000 fordulat/percre változzon. (b) Határozzuk meg, hányat fordul a kerék addig, amíg a teljes visszafordulási folyamat felénél egy pillanatra megáll! (Vegyük észre a hasonlóságot e feladat és a függőlegesen feldobott labda esete között!)

11B-7 Egy kerék 2 rad/s^2 állandó szöggyorsulással forog. Egy 3 másodperces időtartam alatt a kerék 90 radián szögelfordulást végez. Ha a kerék nyugvó helyzetből indult, mennyi ideig forgott a 3 másodperc időtartam előtt?

11B-8 Egy mozgó lövedék sebességét meg tudjuk határozni, ha a lövedéket két olyan forgó papírkorongon lőjük át, amelyek egymástól d távolságban közös tengelyre vannak szerelve. (11-8 ábra.) A korongokon lévő golyóütötte lyukak $\Delta\theta$ szögeltolódásából és a korong ω szögsebességéből a lövedék sebessége meghatározható. Állapítsuk meg a lövedék sebességét a következő adatok mellett: d = 80 cm, ω = 900 fordulat per perc, és $\Delta\theta = 31°$.



11-8 ábra.
A 11B-8 feladathoz.

11B-9 Egy merev test nyugalmi helyzetből indulva rögzített tengely körül állandó szöggyorsulással forogni kezd. Minden egyes, nem a tengelyen lévő pontja a_t tangenciális és a_{cp} centripetális gyorsulással mozog. Tekintsünk egy tengelyen kívül levő, tetszés szerinti pontot! Mutassuk meg, hogy miután a test nyugalomi helyzetéből 1 radián szöggel elfordul, a centripetális gyorsulás a tangenciális gyorsulásnak kétszerese lesz!

11.4 Csúszásmentes gördülés

11A-10 Egy szíjhajtású csiga átmérője 20 cm. A csiga 79 fordulat/perc sebességgel forog. Milyen hosszú a hajtószíjnak az a része, amely a csigára 7 másodperc alatt fut fel?

11A-11 Egy teherkocsi kerekeinek átmérője 64 cm. A kocsi 50 km/óra sebességgel halad. Határozzuk meg a kerekek szögsebességét!

11B-12 Egy gépkocsi 30 m/s sebességgel halad, kerekeinek átmérője 90 cm. (a) Határozzuk meg a kerekek tengely körüli forgásának szögsebességét! (b) Határozzuk meg a szöggyorsulást, ha egyenletes fékezés esetén a kerekek 40 fordulat után megállnak. (c) Mekkora utat tesz meg a kocsi a megállásig?

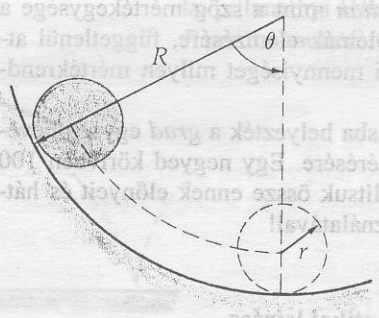
11B-13 Egy D átmérőjű labda vízszintes asztallapon csúszás nélkül v sebességgel gördül. A labda legördül az asztal széléről, és h magasságból a földre esik. Hányat fordul, mialatt a levegőben van?

További feladatok

11C-14 Egy kerék vízszintes talajon csúszás nélkül 6 m/s állandó sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, midőn a részecske a kerék elülső pontjában van!

11C-15 Egy r sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő R sugarú körpályán a 11-9 ábra szerint. Mutassuk meg, hogy az a δ szög, amennyivel a henger a saját tengelye körül elfordul az alatt, amíg a henger tengelye θ szöggel elmozdul, a $\delta = (R - r)\theta/r$ *összefüggéssel adható meg.*

11C-16 Egy az ábrán nem szereplő mechanizmus segítségével a 11-9 ábra szerinti elrendezésben az r sugarú hengert csúszás nélkül, *állandó sebességgel* gördítik az R sugarú körpályán. (Megjegyzés: a sebesség állandó, úgyhogy ez nem a gravitáció hatására történő legördülés esete.) (a) Határozzuk meg a henger tömegközéppontjának v_{TKP} sebességét a tömegközéppont körüli forgás ω szögebességének függvényében! Hogyan fejezhető ki a v_{TKP} sebesség $d\theta/dt$ segítségével?



11-9 ábra.
A 11C-15 és a 11C-16 feladatokhoz.

A FORGÓ MOZGÁS DINAMIKÁJA I (FORGÁS RÖGZÍTETT TENGELY KÖRÜL)

„A fizikában hamar megtanultam, hogyan érezzek rá a lényeghez vezető mélyebben rejtőző utakra és hogyan hagyjak minden egyebet figyelmen kívül, mindazt a rengeteg dolgot, amellyel csak telezsúfoljuk az agyunkat, elvonva gondolatainkat a lényegről. A módszer gyenge pontja természetesen az, hogy – ha akarjuk, ha nem – először mindent a fejünkbe kell tömnünk ahhoz, hogy a lényegtelent végül elhagyhassuk."

ALBERT EINSTEIN

12.1 Bevezetés

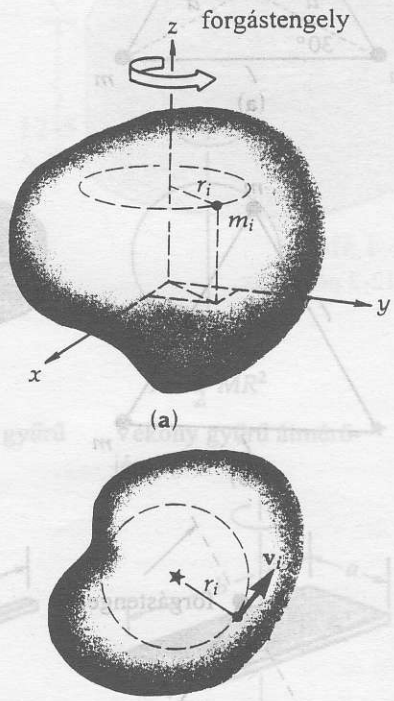
A továbbiakban a forgó mozgás dinamikájával foglalkozunk, vagyis azzal a kérdéssel, hogy mi okozza a testek szöggyorsulását. Newton második törvénye, – $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ – kimondja, hogy egy testnek azért van transzlációs gyorsulása, mert a rá ható erők eredője nem zérus. Itt azt mutatjuk meg, hogy egy testnek akkor van szöggyorsulása, ha a rá ható forgatónyomatékok összege nem zérus. Ebben a fejezetben olyan testekkel foglalkozunk, amelyek egy inercia-rendszerben nyugvó *rögzített tengely* körül forognak. A következő fejezetben a mozgó tengely körül forgó test általánosabb mozgását tárgyaljuk. A haladó és a forgó mozgás dinamikai egyenletei között szoros analógia van. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor az új összefüggések könnyebben megérthetők!

12.2 A tehetetlenségi nyomaték

Tekintsünk egy rögzített ★ tengelyre szerelt merev testet. (12-1 ábra.) Amidőn a test ω szögsebességgel forog, akkor az r_i helyen lévő m_i tömegpont v_i tangenciális sebességgel körpályán mozog. A részecske K_i kinetikus energiája

$$K_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

A merev test forgása közben minden részecskének azonos az ω szögsebessége, így $v_i = r_i\omega$, ahol r_i az m_i tömeg és a forgástengely közötti merőleges távolság. A forgó egész merev test teljes kinetikus energiája így



b) felülnézet

12-1 ábra
Tekintsük a test belsejében a forgástengelytől r_i merőleges távolságban lévő m_i elemi tömeget! Amikor a test a z tengely körül forog, akkor a részecske r_i sugarú körpályán v_i sebességgel mozog.

$$K_{rot} = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} (\Sigma m_i r_i^2) \omega^2 .$$

A haladó mozgást végző test $K = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energiájához hasonlóan a zárójelben lévő mennyiség analóg a haladó mozgást végző test tehetetlenségét meghatározó mennyiséggel; ezt a test ★ tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának nevezzük.

Az I tehetetlenségi nyomaték (★tengelyre vonatkoztatva)

$$I \equiv \Sigma m_i r_i^2 \quad \left[r_i \text{ az } m_i \text{tömeg forgástengelytől mért távolsága} \right] \qquad \textbf{(12-1)}$$

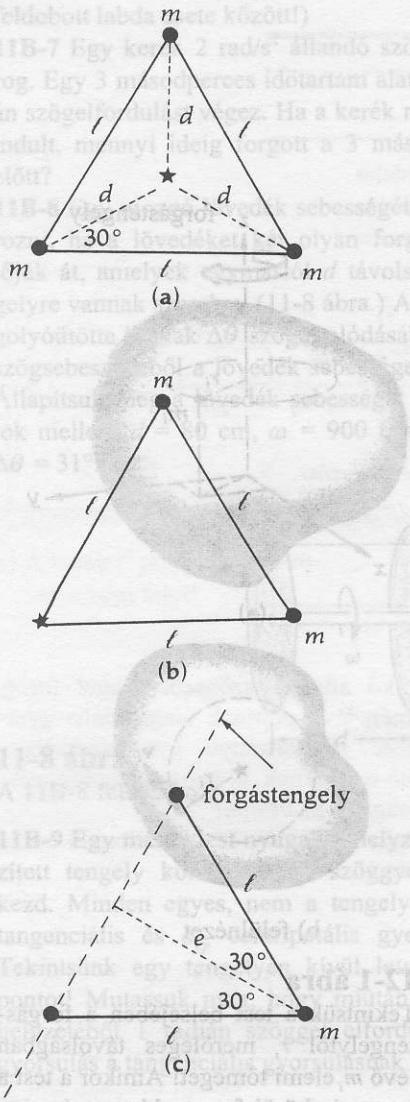
A tehetetlenségi nyomatékot **forgási tehetetlenségnek** is nevezik, dimenziója a tömeg és távolság négyzetének szorzata, egysége tehát kg·m^2. Ezért I nem csupán a test tömegétől, hanem a tömegnek ★ tengelyre vonatkoztatott eloszlásától is függ. Amiként m a test haladó mozgásának gyorsulásával szemben kifejtett ellenállás mértéke, ugyanúgy I a test forgó mozgásának gyorsulásával szemben kifejtett ellenállás a mértéke. Egy, a forgástengelytől távolabb elhelyezett elemi tömeg nagyobb mértékben járul a tehetetlenségi nyomatékhoz, mint egy ugyanakkora, de a forgástengelyhez közelebbi elemi tömeg.[1] Figyeljünk az analógiára: I és ω *rendre* m-nek és v-nek felel meg. Ez segítséget jelent a forgó mozgás egyenleteinek megtanulásához.

A fenti egyenletek felhasználásával a forgási energiát így írhatjuk:

Forgási kinetikus energia

$$K_{rot} = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad \textbf{(12-2)}$$

Jegyezzük meg, hogy ez a kinetikus energiának nem egy új alakja, hiszen a forgó test valamennyi részecskéjének kinetikus energiáját összegeztük. Jelölésére azonban a K_{rot} szimbólumot vezetjük be, mert az általános (haladó és egyidejűleg forgó) mozgást végző test kinetikus energiája a tömegközéppont *haladó* mozgásából adódó $K = \frac{1}{2}M(v_{TKP})^2$ és a tömegközéppont körüli forgásából adódó $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$ energiából tevődik össze. (Az együttes forgó és haladó mozgással a következő fejezetben foglalkozunk.)



12-2 ábra
A 12-1 példához.

12-1 PÉLDA

Három, egyenként m tömegű pont egy l oldalhosszúságú egyenlőoldalú, elhanyagolható tömegű háromszög alakú váz csúcsaiban helyezkedik el. Határozzuk meg a következő tengelyekre a tehetetlenségi nyomatékot. (a) A háromszög középpontján átmenő, a tömegpontok által meghatározott síkra merőleges ★ tengely. (b) Az egyik tömegponton átmenő, a tömegpontokat tartalmazó síkra merőleges tengely. (c) Az ábra síkjában lévő, két tömegponton átmenő tengely.

MEGOLDÁS

(a) A 12-2a ábra szerint meghatározzuk az egyes tömegpontok ★ forgástengelytől mért d távolságát. Trigonometriai összefüggésekből $l = 2d\cos 30°$, vagy $d = \dfrac{l}{(2\cos 30°)} = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$.

Tehát

[1] Hogy ezt a különbséget jól „érzékeljük", vegyünk egy hosszúkás testet, pl. egy méterrudat, és gyorsan forgassuk meg a tömegközéppontján átmenő tengely körül. Próbáljuk először a rúd tengelye körül forgatni, majd pedig a rúd tengelyére merőleges tengely körül forgatni.

$$I = \sum m_i r_i^2 = 3m\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 = ml^2 .$$

(b) A 12-2b ábrán a ★ tengely áthalad az egyik tömegponton. Mivel erre a tömegpontra $r_i = 0$, ez a pont nem járul hozzá az I tehetetlenségi nyomatékhoz. A másik két tömegpont mindegyike a ★ tengelytől l távolságra van, így

$$I = \sum m_i r_i^2 = 2ml^2 .$$

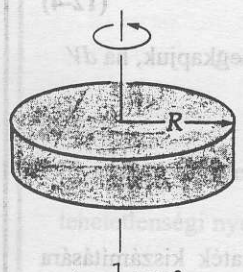
(c) A 12-2c ábrán az m tömegtől a forgástengelyig mért merőleges e távolság $e = l\cos 30° = l\sqrt{3}/2$. Tehát

$$I = \sum m_i r_i^2 = m\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}ml^2 .$$

Összehasonlítva a három eredményt, látjuk, hogy az I tehetetlenségi nyomaték az egyes forgástengelyekre különböző.

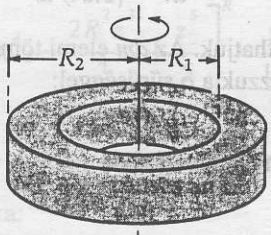
12.3 Folytonos tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározása

A tömeg*pontok*ból álló rendszer tehetetlenségi nyomatékának számítása nem egyéb, mint az összegezési eljárás következetes alkalmazása. A folytonos tömegeloszlású testre azonban ez csak integrálás alkalmazásával végezhető el. Tárgyalásunkat olyan merev, egyszerű geometriai alakú testek esetére



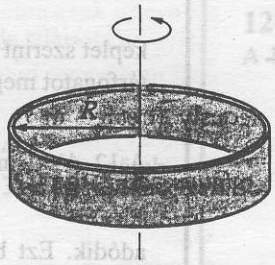
$I = \frac{1}{2}MR^2$

Tömör henger, vagy tárcsa (a tengelyére)



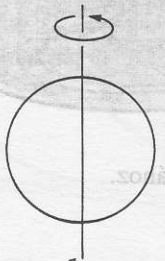
$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$

R_1 belső és R_2 külső sugarú cső (a tengelyére)



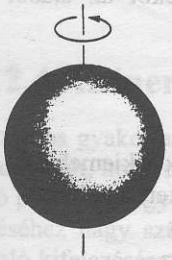
$I = MR^2$

Vékony karika, vagy gyűrű (a tengelyére)



$I = \frac{1}{2}MR^2$

Vékony gyűrű átmérőjére.



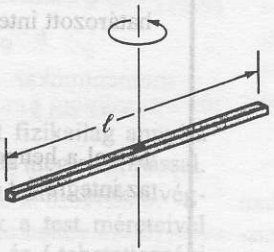
$I = \frac{2}{5}MR^2$

Tömör gömb egy átmérőjére



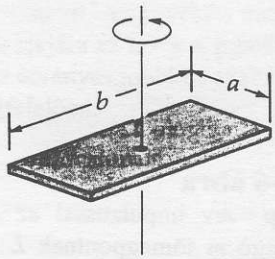
$I = \frac{2}{3}MR^2$

Vékony falú üres gömb egy átmérőjére



$I = \frac{1}{12}M\ell^2$

l hosszúságú vékony rúd a TKP-n átmenő, a rúdra merőleges tengelyre



$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Vékony lemez TKP-n átmenő, a lemezre merőleges tengelyre

12-3 ábra

Homogén sűrűségű anyagból készült különböző szimmetrikus testek tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó I tehetetlenségi nyomatékok. A test tömege mindegyik esetben M.

korlátozzuk, amelyeknek a szimmetriatengelye egybeesik a forgástengelyükkel. A folytonos tömegeloszlású merev testek I tehetetlenségi nyomatékára vonatkozó egyenletet integrálalakban fejezzük ki:

	tömegpont-rendszerre	**folytonos tömeg-eloszlásra**	
Tehetetlenségi nyomaték (★tengelyre vonatkoztatva)	$I = \sum m_i r_i^2$	$I = \int r^2 dm$	**(12-3)**

A folytonos tömegeloszlás esetén a fenti integrál kiszámításához a dm elemi tömeget úgy kell felvenni, hogy az egész elemi tömeg a forgástengelytől azonos r távolságra legyen.[2] Ezért az adott test szimmetria viszonyai alapján célszerű az elemi tömeget megválasztani. A 12-3 ábra különböző, homogén szimmetrikus testek tehetetlenségi nyomatékát foglalja össze.

12-2 PÉLDA

Határozzuk meg a homogén ρ sűrűségű, l hosszúságú, R sugarú, M tömegű tömör henger tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot!

MEGOLDÁS

Amint a 12-4 ábra mutatja, a dm elemi tömegnek az r sugarú, dr vastagságú és l hosszúságú dV elemi térfogatú hengergyűrű tömegét tekintjük. Mivel ennek az elemi hengergyűrűnek valamennyi pontja *közelítőleg* azonos távolságra van a forgástengelytől (a dr vastagság ugyanis elhanyagolhatónak tekinthető az r távolsághoz képest), ezért a dV térfogatot a

$$dV = (2\pi rl)\, dr \qquad \textbf{(12-4)}$$

képlet szerint számíthatjuk. Az dm elemi tömeget megkapjuk, ha dV térfogatot megszorozzuk a ρ sűrűséggel:

$$dm = \rho dV \qquad \textbf{(12-5)}$$

A 12–4 egyenlet behelyettesítésével

$$dm = \rho 2\pi rl\, dr.$$

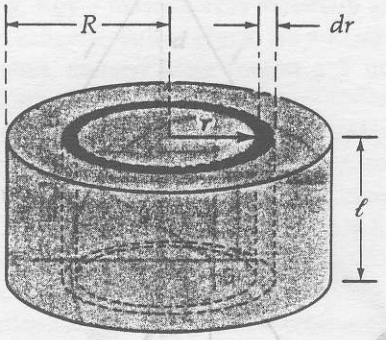
adódik. Ezt behelyettesítve a tehetetlenségi nyomaték kiszámítására vonatkozó 12–3 képletbe, látható, hogy az r változó tekinthető integrálási változónak. Ha figyelembe vesszük, hogy a teljes körhenger tehetetlenségi nyomatékát úgy kapjuk meg, hogy az r integrálási változó zérustól R-ig változik, a tehetetlenségi nyomatékot az alábbi határozott integrál adja meg:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R \rho 2\pi r^3 l\, dr\,.$$

Mivel a henger állandó ρ sűrűségű és l is állandó ezeket kiemelve és az integrálást elvégezve (lásd a G-II és a G-III függeléket) adódik:

$$I = 2\pi\ell\rho \int_0^R r^3 dr = \left[\frac{2\pi\, l\rho\, r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2\pi\, l\rho\, R^4}{4}\,.$$

Az eredmény tovább egyszerűsíthető, ha figyelembe vesszük, hogy a henger teljes M tömege kifejezhető:



12-4 ábra
A 12-2 példához.

[2] Többváltozós függvények integrálás esetén dm megválasztására kevesebb megszorítást kell tenni. Az egyváltozós függvények integráláskor azonban a fenti szabályt kell követni.

$$M = (\text{sűrűség})(\text{térfogat}) = (\rho)(\pi R^2 l).$$

alakban. Ezt behelyettesítve, a homogén tömör henger tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = \tfrac{1}{2} M R^2 \qquad \textbf{(12-6)}$$

12-3 PÉLDA

Ez a példa megmutatja, hogy egy merev test tehetetlenségi nyomatéka gyakran meghatározható úgy is, hogy a test ismert tehetetlenségi nyomatékú egyszerűbb testekből van felépítve. Példaként határozzuk meg a homogén, R sugarú, M tömegű tömör gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre.

MEGOLDÁS

A 12-5 ábrán bemutatott módon a gömböt úgy kezeljük, mintha vékony tárcsák sorozatából lenne felépítve. Kiválasztunk egy dz vastagságú x sugarú elemi tárcsát. Ennek tömege $dm = \rho dV = \rho \pi x^2 dz = \rho \pi (R^2 - z^2) dz$. A vékony tárcsa tehetetlenségi nyomatéka a 12–2 példa alapján:

$$dI = \tfrac{1}{2}\, dm\, x^2 = \tfrac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2\, dz.$$

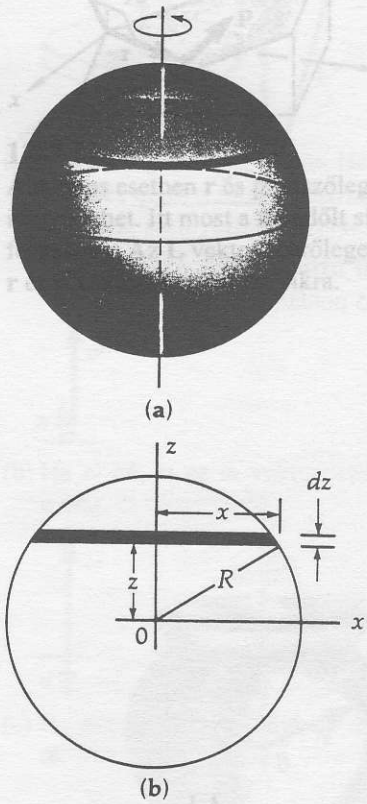
A teljes gömb tehetetlenségi nyomatéka tehát

$$I = \int dI = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{2} \rho \pi \left(R^2 - z^2\right)^2 dz = (2)\frac{1}{2} \rho \pi \int_0^R \left(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4\right) dz$$

$$I = \rho \pi \left[R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_0^R = \frac{8}{15} \rho \pi R^5.$$

Figyelembe véve, hogy a gömb tömege $M = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$, a gömb tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = \frac{2}{5} \left[\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right] R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$



12-5 ábra
A 12-3 példához.

12.4 Az inerciasugár

Számos gyakorlati jelentőségű, forgó mozgást végző test fizikailag annyira bonyolult, hogy tehetetlenségi nyomatéka nem határozható meg számítással. Jó példa erre egy mesterséges bolygó. Ebben az esetben a számítások elvégzéséhez nagy szükség van a tehetetlenségi nyomatéknak a test méreteivel való kifejezésére. Az eljárás a következő: A test tömegét és I tehetetlenségi nyomatékát *kísérleti úton* meghatározzuk. (Például úgy, hogy ismert forgatónyomatékot alkalmazunk és mérjük az okozott α szöggyorsulást. Lásd a 12.6 fejezetet.) Az ily módon meghatározott I érték kifejezhető a test tömegének és a k **inerciasugár** négyzetének szorzataként. Az inerciasugár tehát úgy tekinthető, mintha *a test teljes tömege a forgástengelytől mérve ilyen távolságban egy pontban lenne koncentrálva.* (Megjegyezzük, hogy az a pont, ahova a tömeget ilyenkor gondolatban egyesítjük, *nem* a test tömegközéppontja.)

A k inerciasugár $I = Mk^2$ **(12-7)**

ahol I a M tömegű test tehetetlenségi nyomatéka.

12-4 PÉLDA

Határozzuk meg az R sugarú M tömegű tömör gömb inerciasugarát a tömegközéppontján átmenő tengelyre!

MEGOLDÁS

A tömör gömbnek a tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $I = {}^2/_5 MR^2$. Ezért:

$$Mk^2 = {}^2/_5 MR^2$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{5}}R$$

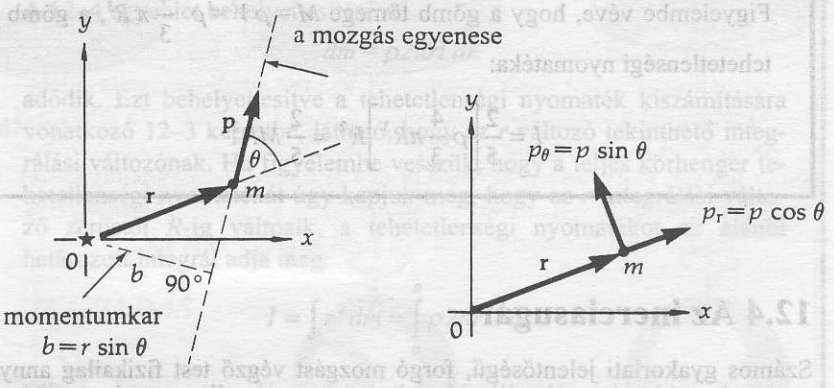
12.5 Az impulzusmomentum (perdület)

Tovább fejlesztjük a haladó és a forgó mozgás közötti analógiát:

a forgatónyomaték: M = (erő)(erőkar)

$$M = (F)(r \sin\theta).$$

Vektoriális alakban: $\boldsymbol{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

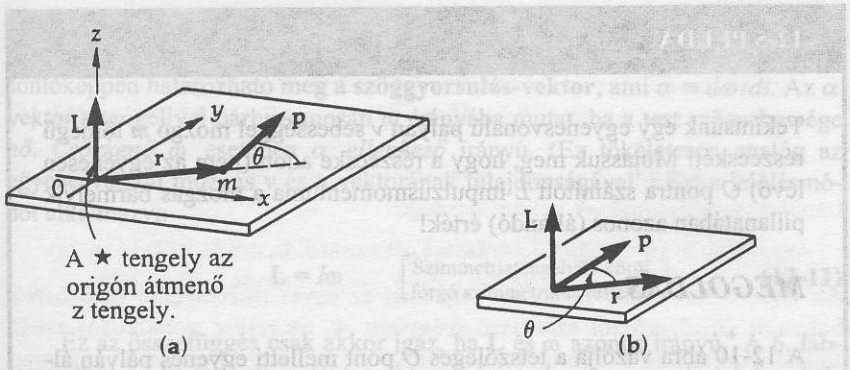


12-6 ábra

A $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzussal az xy síkban mozgó m tömegpontnak L impulzusmomentuma van (az O pontra), ha a $\mathbf{p}$ vektor iránya nem megy át az O ponton. Jelen példában a ★ tengely az O pontban a papír síkjára merőlegesen áll.

(a) Az xy síkban $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzussal rendelkező m tömegpontnak (O -ra vonatkozó) $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma van, amelynek a nagysága: $L = (mv)$ (nyomaték-kar) = $= mvr \sin\theta$. Az O -nál lévő ★ tengely a z tengely, és $\mathbf{L}$ iránya a pozitív z tengely irányával egyezik meg, merőleges az $\mathbf{r}$ és a $\mathbf{p}$ vektorokat tartalmazó síkra.

(b) Az impulzus $p_r = p\cos\theta$ sugár irányú komponensének nincs impulzusmomentuma *az origora*, (mert momentumkarja zérus). Csak a merőleges $p_\theta = p\sin\theta$ komponensnek van az O -ra impulzusmomentuma, ennek nagysága $L = mvr\sin\theta$.



12-8 ábra

Az *xy* síkban fekvő **r** helyzetvektorú pontban lévő *m* tömegpont impulzusa **p**. A jobbkézszabállyal képzett az (*O* -ra vonatkozó) **L** = **r** × **p** impulzusmomentum – ahogyan az (a) ábra mutatja – merőleges az *xy* síkra. Célszerű, ha az **r** és a **p** vektorokat irányaik megtartása mellett azonos pontból felmérjük a (b) ábra szerint. Az **r** vektor **p**-be forgatása megadja azt a forgásirányt, amit a jobbkézszabályban kell használni. (Az elforgatás θ szöge a két vektor iránya által meghatározott szög.)

Tekintsünk most egy *m* tömegpontot, amely **p** = *m***v** impulzussal mozog. (12-6 ábra) A **p** impulzus ★ tengelyre vonatkozó nyomatékát **L** impulzusmomentumnak nevezzük:

Az *L* impulzusmomentum (★ tengelyre)

L = (impulzus)(momentum karja)

$L = (mv)(r \sin\theta)$

Vektoriális alakban*

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \qquad (12\text{-}8)$$

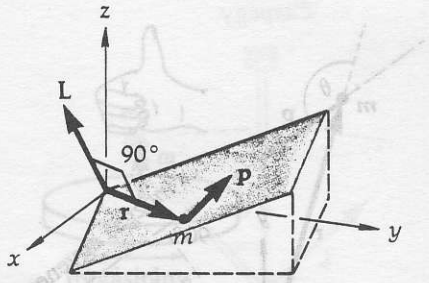
Egy, az *xy* síkban[3] mozgó *m* tömegpont *L* impulzusmomentumának iránya a *z* tengely pozitív vagy negatív irányába mutat a jobbkéz-szabálynak megfelelően. Mint a többi jobbkéz-szabály esetében is, itt sem halad semmilyen fizikai objektum ebben az irányban; a jobbkéz-szabály csak egy megállapodás, amelynek révén *egyetlen vektorral forgási irányt* tudunk kifejezni. (12-8 ábra.) *L* egysége a kg·m²/s. (Jegyezzük meg, hogy az impulzus és az impulzusmomentum egységei nem azonosak!)

Gyakran előforduló jelenség az *r* sugarú körpályán *v* sebességgel (és ω szögsebességgel) mozgó *m* tömegű részecske. Minthogy ebben az esetben a momentumkar a kör sugara és $v = r\omega$, azért

A körmozgást végző részecske impulzusmomentuma (a pálya középpontjára)

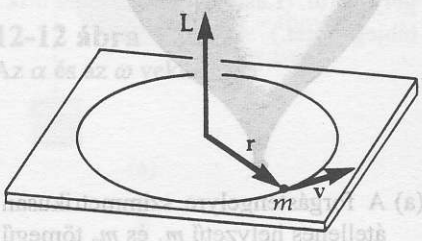
$$L = mvr = mr^2\omega \qquad (12\text{-}9)$$

Az **L** vektor a jobbkéz-szabálynak megfelelően. (12-9 ábra.) merőleges a kör síkjára, és célszerű a kör középpontjában felvenni.



12-7 ábra

Általános esetben **r** és **p** tetszőleges irányú lehet. Itt most a megdőlt síkban fekszenek. Az **L** vektor merőleges az **r** és **p** vektort tartalmazó síkra.



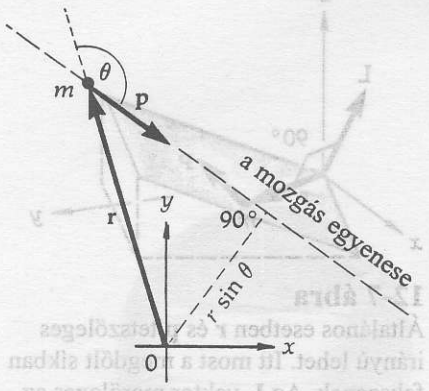
12-9 ábra

Az *r* sugarú körpályán *v* sebességgel (és ω szögsebességgel) mozgó *m* tömegű részecske impulzusmomentuma $L = mvr = mr^2\omega$. Az **L** vektor merőleges a kör síkjára az **L** = **r** × **p** vektorszorzatra érvényes jobbkéz-szabálynak megfelelően.

---

* Ismét meg kell jegyezni, hogy az **r** × **p** impulzusmomentum nem tengelyre, hanem pontra vonatkoztatott mennyiség. (lásd a 234. oldali fordítói megjegyzést) A szerzők azonban most is elsősorban olyan tengely körüli forgásokkal foglalkoznak, ahol a vizsgált test pontjai egy a tengelyre merőleges síkban mozognak. Ebben az esetben az impulzusmomentum egyetlen, a tengely irányába mutató összetevővel rendelkezik. Így a pontra és a tengelyre vonatkoztatott impulzusmomentum azonosítható. A 3. lábjegyzet éppen ettől eltérő esetekre utal kissé félreérthető módon. (A fordító megjegyzése)

A tömegpont tetszőleges mozgásának sokkal általánosabb esetét a 12-7 ábra vázolja. Vegyük észre, hogy az **L** = **r** × **p** vektoregyenlet helyes marad annak ellenére, hogy a koordinátatengelyek nem illeszkednek az **r** és a **p** vektorokat tartalmazó síkra.



12-10 ábra
A 12-5 példához.

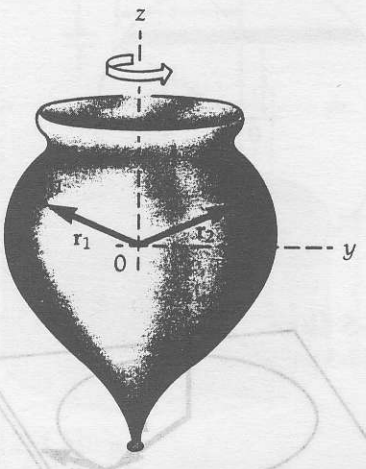
12-5 PÉLDA

Tekintsünk egy egyenesvonalú pályán v sebességgel mozgó m tömegű részecskét! Mutassuk meg, hogy a részecske adott (nem az egyenesen lévő) O pontra számított L impulzusmomentuma a mozgás bármelyik pillanatában azonos (állandó) érték!

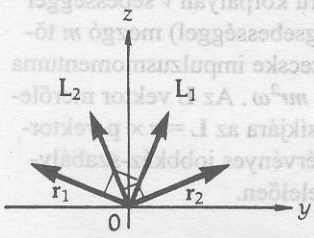
MEGOLDÁS

A 12-10 ábra vázolja a tetszőleges O pont melletti egyenes pályán állandó $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzussal haladó részecskét. Meg kell mutatnunk, hogy a részecske mozgása során a θ szög és az r radiális távolság ugyan folytonosan változik, de az L impulzusmomentum állandó marad. Az $L = rp\cdot\sin\theta$ összefüggésben a tényezőket átcsoportosítjuk: $p(r\cdot\sin\theta)$, és figyelembe vesszük, hogy $r\cdot\sin\theta$ az O pont és az egyenes pálya közötti távolsággal egyenlő. Minthogy mind p, mind pedig $r\cdot\sin\theta$ a részecske mozgása során állandó, ezért az O pontra vonatkoztatott L impulzusmomentum is változatlan a részecske egyenesmenti mozgása során.

L = időben állandó (óramutató járásának irányában)



(a) A forgástengelyre szimmetrikusan átellenes helyzetű m_1 és m_2 tömegű részecskék.



(b) Figyeljük meg, hogy $\mathbf{L}_1$ merőleges $\mathbf{r}_1$-re, és $\mathbf{L}_2$ merőleges $\mathbf{r}_2$-re.

12-11 ábra
Egy szimmetrikus pörgettyű szimmetriatengelye (itt a z tengely) körül forog.

12.6 Rögzített szimmetriatengelye körül forgó merev test mozgása

A továbbiakban a *szimmetrikus* merev testnek a *rögzített szimmetriatengelyére vonatkozó* impulzusmomentumát számítjuk ki. Tekintsük a 12-11a ábrán látható szimmetrikus pörgettyűt, amint tengelye, a z tengely körül forog. A forgástengely egyik oldalán található minden m_1 tömegű részecskéhez tartozik egy, a tengelyre szimmetrikus helyzetű m_2 tömegű részecske. A szimmetria következtében az egész pörgettyű ilyen szimmetrikus részecskékből van felépítve. Az egyes részecskék $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ impulzus-momentumának vektorábráját a 12-11b ábra mutatja. (A szokásos módon, minden egyes $\mathbf{L}_i$ vektor merőleges az $\mathbf{r}_i$ és a $\mathbf{p}_i$ vektorokat tartalmazó síkra a jobbkéz-szabálynak megfelelően.) Az $\mathbf{L}_1$ és $\mathbf{L}_2$ vektor z tengely irányú komponensei megegyeznek. A z tengelyre merőleges komponenseik nagysága szintén azonos, de irányuk ellentétes, így összegük zérus. Ezért e két részecske eredő impulzusmomentumának csak z tengely irányú komponense van. Tehát az $\mathbf{L}$ *és a* $\hat{\mathbf{z}}$ *vektor csak azért párhuzamos, mert az* $\mathbf{L}_i$ *vektorok tengelyre merőleges komponensei a szimmetria miatt kiejtik egymást.*

Ezután összegezünk minden szimmetrikus részecskepárra mindaddig, amíg ezt az egész testre el nem végezzük. Így a teljes impulzusmomentum a z tengelyre vonatkozóan:

$$L_z = \Sigma(m_i r_i^2 \omega) = (\Sigma m_i r_i^2)\omega .$$

A második zárójelben lévő mennyiség az (ugyancsak a z tengelyre vonatkozó) I tehetetlenségi nyomaték. Ezért a z tengely körüli forgásra[4] felírható, hogy

$$L_z = I\omega. \qquad \textbf{(12-10)}$$

[4] Feltéve, hogy a test a z tengely körül forog, a (12-10) egyenlet érvényes marad aszimmetrikus tárgyak esetében is.

Az egyenletet vektoriális alakban is felírhatjuk, ha az ω **szögsebességvektort** a jobbkéz-szabálynak megfelelően definiáljuk. (12-12 ábra.) Hasonlóképpen határozható meg a **szöggyorsulás-vektor**, ami $\alpha \equiv d\omega/dt$. Az α vektor a tengellyel párhuzamosan ω irányába mutat, ha a test szögsebessége *nő. Csökkenő* ω esetében α *ellenkező* irányú. (Ez tökéletesen analóg az egyenesvonalú mozgás **v** és **a** vektorának tulajdonságával[5].) Ezt a jelölésmódot alkalmazva

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Szimmetriatengelyük körül}\\ \text{forgó szimmetrikus testekre}\end{array}\right] \qquad (12\text{-}11)$$

Ez az összefüggés csak akkor igaz, ha **L** és $\boldsymbol{\omega}$ azonos irányú.[6] A 6. lábjegyzetben említettek elkerülésére *ebben a fejezetben a merev testek forgásával kapcsolatos problémák vizsgálata csak szimmetrikus testek szimmetriatengely körüli forgására szorítkozik.* (Valamivel általánosabb eseteket majd a következő fejezetben tárgyalunk.)

12.7 A forgó mozgás alapegyenlete

A haladó és a forgó mozgás további analógiáit tárgyalva idézzük fel a haladó mozgás esetére Newton második törvényét: $\Sigma \mathbf{F}_{\text{külső}} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$. A forgó mozgásra vonatkozó megfelelő egyenlet meghatározásához kiszámítjuk egy részecske rögzített ★ tengelyre vonatkozó $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ impulzusmomentumának idő szerinti deriváltját. A vektoriális szorzat deriválásánál gondosan ügyelnünk kell a vektorok és deriváltjaik *sorrendjére.* (Ha a tényezők sorrendjét felcseréljük, akkor a szorzatvektor iránya ellentétes lesz.) A vektoriális szorzat deriválási szabálya hasonló a közönséges szorzat ismert szabályához (G-I függelék). Azaz

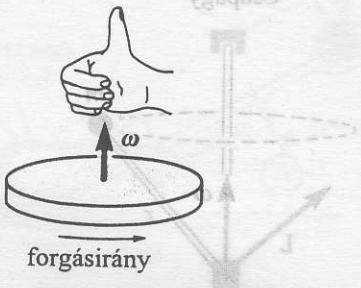
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}\right) + \left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right), \qquad (12\text{-}12)$$

Most figyelembe veszünk két tényt: azt, hogy $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, és $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Ezeket a fenti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\mathbf{v}\times m\mathbf{v}) + \left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right). \qquad (12\text{-}13)$$

De minthogy a **v** vektor ugyanabba az irányba mutat mint az m**v** vektor, azért e két vektor vektoriális szorzata zérus. (Emlékezetbe idézzük, hogy a vektoriális szorzat definíciója tartalmazza a két vektor által bezárt szög szinuszát. Ha a vektorok párhuzamosak, akkor ez a szög 0°, és sin 0°= 0.) Figyelembe vesszük azt is, hogy $\mathrm{d}\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, így a (12-13) egyenlet felírható mint

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,. \qquad (12\text{-}14)$$



(a) Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor. Ha a jobbkéz ujjait a forgás irányába hajlítjuk, a kinyújtott hüvelykujj a forgástengely irányába mutató $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektort jelzi.



(b) Ha ω nő, α az ω vektor irányába mutat.

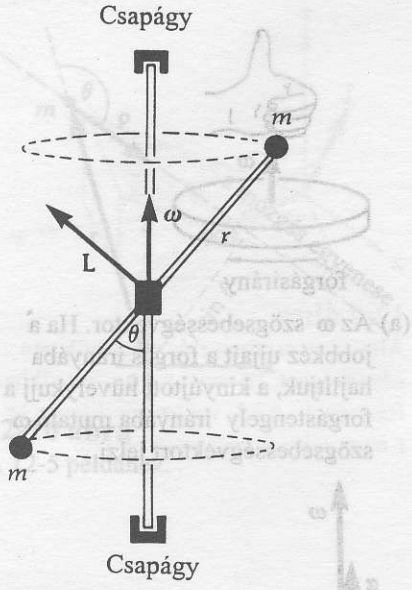


(c) Ha ω csökken, α iránya az ω vektor irányával ellentétes.

12-12 ábra
Az α és az ω vektorok.

[5] Az egyenesvonalú mozgás esetén alkalmazott vektorokkal (**s**, **v**, **a**) analóg módon úgy tűnik, hogy a θ szögelfordulás is vektornak tekinthető. Ez azonban nem áll fenn, amint azt a H függelékben kifejtjük.)

[6] Egy nem a szimmetriatengelye körül forgó merev testre az **L** és az $\boldsymbol{\omega}$ vektor iránya nem azonos. Hogy ezt belássuk, tekintsük a 12-13 ábrán látható „dobverő" alakú tárgyat. Mindegyik részének van (O -ra vonatkozó) **L** impulzusmomentuma az $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ vektoriális szorzatra érvényes jobbkéz-szabálynak megfelelően. Igazolnunk kellene, hogy erre az esetre mind $\mathbf{L}_1$, mind $\mathbf{L}_2$ (az O pontból húzva) iránya azonos. Összegük, $\mathbf{L}=\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ az ábrán látható. Vegyük észre, hogy **L** és $\boldsymbol{\omega}$ nem azonos irányúak. Lásd még: 12.10 fejezet, dinamikai kiegyensúlyozatlanság.



12-13 ábra
Merev test forgó mozgása szimmetriatengelyén kívül eső tengely körül. Az elhanyagolható tömegű rúd két végén m_1 és m_2 tömegű test van. A rúd középpontja szilárdan csatlakozik a csapágyakkal rögzített függőleges tengelyhez. A tengely a rúddal θ szöget zár be. A rendszer állandó ω szögsebességgel forog a függőleges tengely körül. (Lásd a 277 oldalon a 6-ik lábjegyzetet.)

Az $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ összefüggés a részecskére ható (★-ra vonatkozó) eredő $\mathbf{M}$ forgatónyomaték, ezért a (12-14) egyenlet:

$$M = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \qquad (12\text{-}15)$$

Részecskékből álló rendszer eredő impulzusmomentuma a részecskék impulzusmomentumának vektori összege:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \cdots = \Sigma \mathbf{L}_i.$$

Az impuzusmomentumok az idő folyamán az egyes részecskékre ható *belső,* valamint *külső* erőktől származó (rögzített ★ tengelyre vonatkozó) eredő fogatónyomatékok hatására megváltoznak. De az összes belső erőtől származó forgatónyomaték összege zérus, mert Newton harmadik törvénye értelmében az összes belső erő páronként egyenlő és ellentétes; így minden egyes erőpár karja zérus *Ezért a belső erők forgatónyomatékainak összege zérus.* A rendszer impulzusmomentuma csupán a *külső* forgatónyomatékok eredőjének következtében változik:

Az impulzusmomentum tétel (Newton második törvényének analogonja)

$$\sum_{(\bigstar \text{ tengelyre})} \mathbf{M}_{\text{külső}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (12\text{-}16)$$

Mind $\mathbf{M}$, mind $\mathbf{L}$ ugyanarra a tengelyre (pontra) vonatkoztatva számítandó. Ha az I tehetetlenségi nyomaték állandó, és ha szimmetrikus test forog a szimmetriatengelye körül, akkor $\mathbf{L} = I\omega$, és így $d\mathbf{L}/dt = Id\omega/dt = I\alpha$.

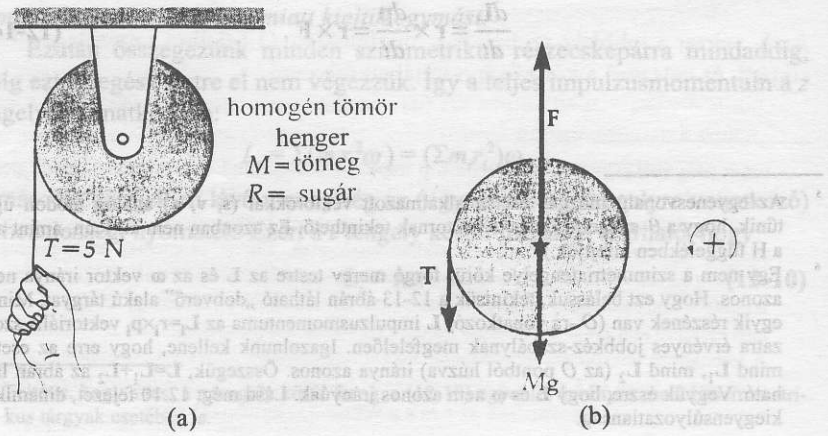
A forgó mozgás alapegyenlete (forgási analógia az $\mathbf{F}_{\text{külső}} = M\mathbf{a}_{\text{TKP}}$ törvényre)

$$\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = I\alpha \qquad \left[\begin{array}{l}\text{szimmetriatengely}\\ \text{körül forgó}\\ \text{szimmetrikus testre}\\ (I = \text{állandó})\end{array}\right] \qquad (12\text{-}16)$$

Minthogy ebben a fejezetben a szimmetriatengelyük körül forgó szimmetrikus testek tárgyalására szorítkozunk, ezért a most következő példákban a (12-16) és a (12-17) egyenleteket fogjuk alkalmazni.

12-6 PÉLDA

Egy M tömegű, R sugarú tömör, homogén anyagú hengert úgy szereltek fel a 12-14a ábrán vázolt vízszintes tengelyre, hogy a tengelyen elhanyagolható súrlódással foroghasson. A hengerre vékony kötél van csavarva. A kötél szabad végét állandó T erő feszíti, így ez az erő a



12-14 ábra
A 12-6 példához.

(nyugalomból induló) hengernek szöggyorsulást ad. Határozzuk meg (a) a henger α szöggyorsulását és (b) ω szögsebességét, miután a kötél d hosszúságnyira letekeredett. (c) Határozzuk meg a fenti mennyiségek értékét, ha $M = 2$ kg, $R = 10$ cm, $T = 5$ N és $d = 40$ cm!

MEGOLDÁS

(a) A 12-14b ábrán az óramutató járásával ellentétes forgásirány pozitív. A 12-3 ábrából látjuk, hogy I értéke $\frac{1}{2}MR^2$.

$$\Sigma M = I\alpha.$$

($\bigstar$ tengelyre)

$$TR = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha.$$

Az α szöggyorsulás: $$\alpha = \frac{2T}{MR}.$$

Az α szöggyorsulás forgási iránya ugyanúgy az óramutató járásával ellentétes, mint az M forgatónyomaték.

(b) Amint a d hosszúságú kötéldarab letekeredik, a henger nyugalmi helyzetéből $\theta = d/R$ szöggel elfordul. A henger e pillanathoz tartozó szögsebességét a (11-14) kinematikai egyenletből számítjuk:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\omega^2 = (0)^2 + 2\left(\frac{2T}{MR}\right)\left(\frac{d}{R} - 0\right)$$

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{Td}{M}}$$

Minthogy a henger gyorsul, ω ugyanúgy, az óramutató járásával ellentétes forgási irányú, mint α.

(c) A numerikus értékek behelyettesítésével következőket kapjuk:

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{(2)(5\,\text{N})}{(2\,\text{kg})(0{,}10\,\text{m})} = 50{,}0\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

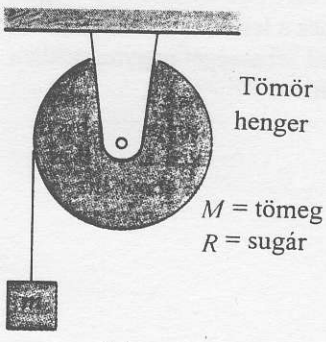
$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{Td}{M}} = \left(\frac{2}{0{,}10\,\text{m}}\right)\sqrt{\frac{(5\,\text{N})(0{,}40\,\text{m})}{(2\,\text{kg})}} = 20{,}0\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

12-7 PÉLDA

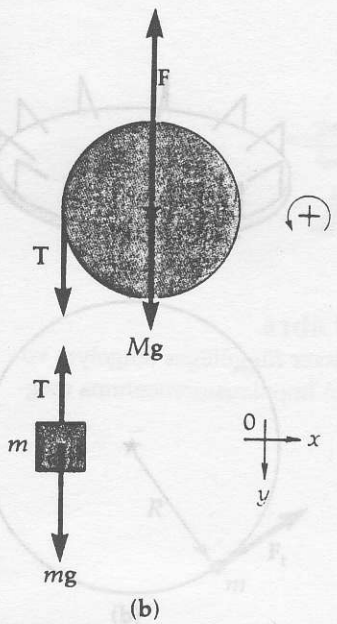
Tegyük fel, hogy az előző példában ahelyett, hogy a kötél végét húznánk $T = 5$ N erővel, a kötél végére egy $W = 5$ N súlyú testet akasztunk. (12-15a ábra.) (a) Ugyanakkora marad-e a henger α szöggyorsulása, mint az előző esetben volt? (b) Ha nem, akkor számítsuk ki ennek értékét ugyanarra az $M = 2$ kg, $R = 10$ cm adatokkal rendelkező hengerre, de $W = mg = 5$ N esetére! (c) Határozzuk meg a kötélt feszítő T erőt az m tömeg süllyedése folyamán!

MEGOLDÁS

(a) A 12-15b ábra a henger és a ráakasztott tömeg vektorábráját mutatja. Arra következtethetünk, hogy a T feszítőerőnek kisebbnek kell lennie, mint az előző példában. Ez azzal indokolható, hogy *ha a feszítőerő egyenlő lenne mg-vel, akkor a kötélre akasztott testre ható eredő erő zérus lenne, és ezért nem gyorsulna. Tehát T kisebb* mint *mg*, következésképpen a henger szöggyorsulásának kisebbnek kell lennie, mint előzőleg volt.



(a)



(b)

12-15 ábra
A 12-7 példához.

(b) Most alkalmazzuk Newton második törvényét az m tömegre és a hengerre. Feltételezve, hogy a kötél nem csúszik, a henger $\theta = d/r$ szöggel való elfordulásakor a kötél d hosszúságú szakasza letekeredik. Ezért a henger α szöggyorsulása az $a = R\alpha$ összefüggés szerint kapcsolatban van a tömeg a gyorsulásával. A haladó és a forgó mozgás között fennálló ezen kapcsolat miatt következetesek leszünk a és α pozitív irányának megválasztásában. Az a vektor számára a lefelé mutató irányt választva pozitívnak, α számára az óramutató járásával ellentétes irányt kell pozitívnak választani. A homogén tömör henger I tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{2}MR^2$.

m haladó mozgása	**A henger forgása**
$\Sigma F = ma$	$\Sigma M = I\alpha$
	(★körül)
$mg - T = ma$	$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$
$m(g-a) = T$	$T = \frac{1}{2}MR\alpha.$

$a = R\alpha$ helyettesítéssel és a két kifejezést egyenlővé téve, T kiküszöbölésével kapjuk:

$$m(g - R\alpha) = \tfrac{1}{2}MR\alpha.$$

innen α értéke

$$mg = R\alpha\left(\frac{M}{2} + m\right)$$

$$\alpha = \frac{2mg}{R(M+2m)}.$$

Mivel mg értéke 5 N, így

$$\alpha = \frac{2mg}{R(M+2m)} = \frac{2(2\,\text{N})}{(0{,}10\,\text{m})(2\,\text{kg}) + (2)(0{,}51\,\text{kg})} = 33{,}1\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

(c) A kötélt feszítő erő az alábbi szerint számítható:

$$T = \frac{1}{2}MR\alpha = \frac{1}{2}(2\,\text{kg})(0{,}10\,\text{m})\left(33{,}1\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) = 3{,}31\,\text{N}.$$

Megjegyezzük, hogy ez *kisebb,* mint az előző példában szereplő 5 N feszítő erő.

12-8 PÉLDA

A 12-16 ábrán látható katapult nagy kövek hajítására szolgáló ősi fegyver. A meghajlított farúd rugóként működik, és (a vízszintes megfeszített huzal által) erőt gyakorol a katapult karjára. A huzal a tengelytől r_1=2 m távolságban csatlakozik a karhoz. A kő tömege 100 kg, és a tengelytől r_2 = 7 m távolságban helyezkedik el. A katapultot tüzelésre készen tartó kötelet elvágják. Ebben az időpontban, amikor is $\phi = 30°$, a huzalt feszítő erő $T = 2\times10^4$ N. A katapult karjának tömegét elhanyagolva határozzuk meg a kő tengelyre vonatkoztatott szöggyorsulását!

MEGOLDÁS

A 12-16b ábra a kilövőkar és a kő vektorábráját mutatja be. Ha az óramutató járásával ellentétes irányt választjuk pozitívnak, akkor a ★ tengelyre vonatkozó eredő forgatónyomaték:

ΣM = (T)(T erőkarja) – (mg)(mg erőkarja)
(★tengelyre)

$= Tr_1 \sin 30° - mgr_2 \sin 60°$

$= (2\times10^4\ \text{N})(2\ \text{m})(0{,}500) - (100\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(7\ \text{m})(0{,}866)$

$\underline{\Sigma M = 1{,}4\times10^4\ \text{N·m}}$.

Az m tömeg tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $I = mr^2 = (100\ \text{kg})(7\ \text{m})^2 = 4{,}90\times10^3\ \text{kg·m}^2$. A szöggyorsulást a

$$\Sigma M = I\alpha$$
(★tengely körül)

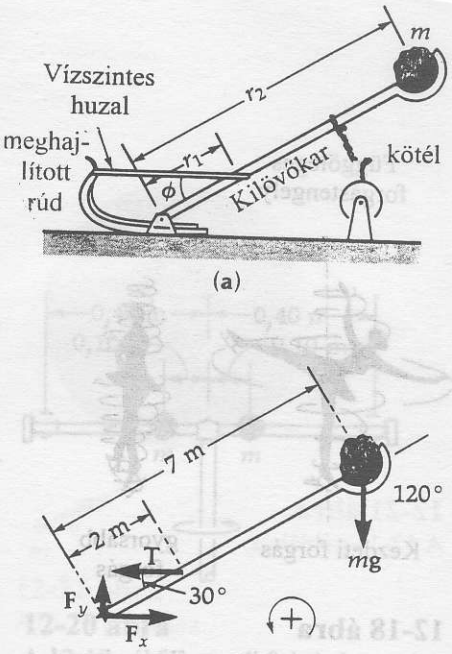
egyenletből nyerjük.

Ebből kifejezve az α szöggyorsulást, felírható, hogy

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{1{,}41\times10^4\ \text{Nm}}{4{,}90\times10^3\ \text{kg m}^2} = 2{,}88\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Megjegyezzük, hogy a szöggyorsulásra adott válaszban szükséges a „radián" egység beírása (hogy megkülönböztessük a „fordulat per másodperc négyzet" egységben megadható értéktől).

Azt a sebességet, amelyre a kő szert tesz, akkor tudjuk megbecsülni, ha feltételezzük, hogy a szöggyorsulás mindaddig állandó, amíg a kő a katapultot – a kar 90°-os szögelfordulásáig – elhagyja. (Ez nem irreális feltételezés, mert annak ellenére, hogy a huzal feszítőereje csösken, erőkarja nő, így szorzatuk nem sokat változik.) E közelítés szerint a kő több mint 20 m/s sebességre tesz szert.



12-16 ábra
A 12-8 példához.

12-9 PÉLDA

Egy 32 kg-os fiú a 3 m átmérőjű ringlispil alapdeszkájának peremén ül, (12-17a ábra). (a) Határozzuk meg a fiú tehetetlenségi nyomatékát a középponti tengelyre. (b) Ha valaki úgy kezdi forgatni a körhintát, hogy ez a fiúra érintő irányú 30 N erőt fejt ki, akkor mekkora szöggyorsulással fog a körhinta forogni?

MEGOLDÁS

(a) Ha a fiút m tömegű tömegpontként kezeljük, akkor I tehetetlenségi nyomatéka a ★ tengelyre

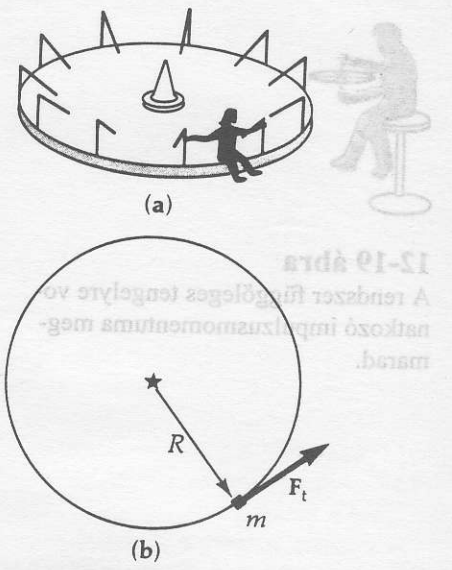
$$I = mR^2 = (32\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m})^2 = 72\ \text{kg·m}^2.$$
(★tengely körül)

(b) A szöggyorsulás kiszámítására a

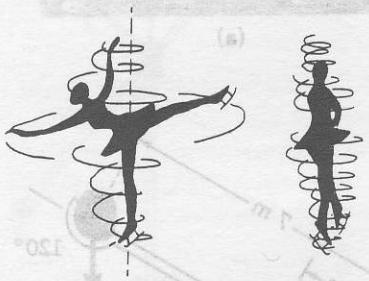
$$\Sigma M = I\alpha$$
(★tengely körül)

egyenletet alkalmazzuk. Innen az α szöggyorsulás

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{FR\sin\phi}{I} = \frac{(30\ \text{N})(1{,}5\ \text{m})(\sin 90°)}{72\ \text{kg m}^2} = 0{,}625\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$



12-17 ábra
A 12-9 példához.



12-18 ábra
A korcsolyázó felhasználja az impulzusmomentum megmaradás törvényét. A forgást nyújtott karral és lábbal kezdi el. Majd testrészeit a forgástengelyhez a lehető legközelebbre húzva forgási sebességét nagymértékben növeli.

12.8 Az impulzusmomentum (perdület) megmaradása

Láttuk, hogy az eredő külső forgatónyomaték az impulzusmomentum változási sebességével (idő szerinti deriváltjával) egyenlő: $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = \mathrm{d}\mathbf{L}/dt$. Ha a rendszer zárt, azaz a (★tengelyre vonatkozó) külső forgatónyomatékok eredője zérus, akkor a (★tengelyre vonarkozó) impulzusmomentum az időben állandó:

A (★tengelyre vonatkozó) impulzusmomentum megmaradása zárt rendszerre* $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}$ **(12-18)**

Ha egy z tengely körül forgó testre ható forgatónyomatékok eredője (a z tengelyre) zérus, akkor impulzusmomentumának z irányú komponense $L_z = I\omega$, ahol I a test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. Erre az esetre[7] az impulzusmomentum megmaradása a következőképpen írható fel:

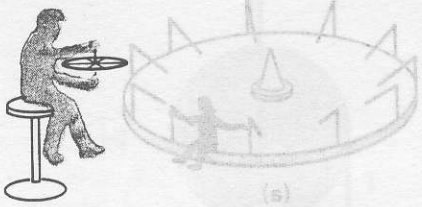
Az impulzusmomentum megmaradása rögzített tengely körül (vagy egy, a tömegközépponton átmenő önmagával párhuzamosan mozgó tengelyre) $I_0\omega_0 = I\omega$ **(12-19)**

Tegyük fel, hogy a zárt rendszer forgás közben a *belső* erők hatására oly módon változtatja meg a tömegeloszlását, hogy egyes részeit a tengelytől távolabb (vagy közelebb) hozza.[8] Ilyen esetben, ha például I csökken, akkor ω növekszik. Így tehát akkor is felléphet szöggyorsulás ($\alpha \neq 0$), ha a rendszerre ható külső forgatónyomatékok eredője zérus, (ha tehát $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0$).

KÍSÉRLETEK BEMUTATÁSA

Az előadás során bemutatott alábbi kísérletek az impulzusmomentum megmaradását illusztrálják rögzített tengely esetén. Egy diák olyan széken ül, amelyik függőleges tengely körül szabadon foroghat. A diák mindkét kezében vízszintesen kinyújtott karral egy-egy nehéz testet tart. A tanár lassan forgásba hozza a széket, majd felszólítja a diákot, hogy húzza be a két karját a mellkasához, így a két nehéz test a forgástengelyhez közelebb kerül. Minthogy a testek forgástengelyhez közelítése csökkenti a zárt rendszer I tehetetlenségi nyomatékát, ezért az ω szögsebesség erőteljesen megnő, illusztrálva az $I\omega$ impulzusmomentum megmaradását.

A következő kísérlet során a forgószéken ülő, eredetileg nyugalomban (forgásmentes állapotban) lévő diák forgó biciklikereket ($L_0 = I_0\omega_0$) tart tengelyével függőlegesen (a z tengely irányában, 12-19 ábra). (A forgási tehetetlenség növelésére a gumitömlőt rendszerint a peremre erősített nehéz fémabronccsal helyettesítik.) Ha a diák a forgó kerék tengelyét 180°-kal elfordítja, akkor a diák-plusz-szék rendszer $2\,I_0\,\omega_0$



12-19 ábra
A rendszer függőleges tengelyre vonatkozó impulzusmomentuma megmarad.

* A megmaradási törvény akkor is igaz, ha nem a tengely körüli forgásokra mondjuk ki. (A fordító megjegyzése)

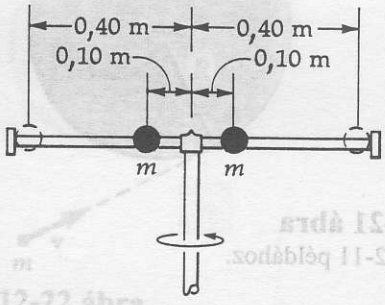
[7] Fontos tulajdonsága a (12-19) egyenletnek, hogy nemcsak rögzített forgástengely esetére érvényes, (mint ebben a fejezetben tárgyaljuk), hanem a tömegközépponton átmenő, olyan forgástengely esetében is, amely a térben úgy tolódik el, hogy *önmagával mindig párhuzamosan marad*. (Erről majd a következő fejezetben lesz szó.)

[8] A tömegeloszlás megváltoztatásának más módja olyan külső erők alkalmazásán alapul, amelyek hatásvonala a tengelyen megy át – tehát ún. *centrális* erők –, úgyhogy ezek eredő forgatónyomatéka, $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}}$ zérus marad.

impulzusmomentumot nyer, a kerék végső forgási irányával *ellentétesen*, úgyhogy a rendszer teljes impulzusmomentuma az eredeti $I_0\omega_0$ marad. Ebben a kísérletben az impulzusmomentum z irányú L_z komponense megmarad. A forgó kerék tengelyének más irányba való elfordítása esetén az impulzusmomentumnak csak a z irányú komponense az, ami megmarad, mivel a szék *nem* zárt rendszer az x és az y tengelyre vonatkozó külső forgatónyomatékokkal szemben.

12-10 PÉLDA

Vízszintes súrlódásmentes rúdon két kisméretű golyó van rögzítve a tengelytől 0,10 m távolságban szimmetrikus helyzetben, ahogyan a 12-20 ábra mutatja. A golyók tömege $m = 0{,}20$ kg. A golyók elég kicsinyek ahhoz, hogy pontszerűnek legyenek tekinthetők. A rúdnak a középpontján átmenő függőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka 0,070 kg·m^2. Miközben az eszköz a függőleges tengely körül percenként 80 fordulatot tesz meg, a golyókat rögzítő retesz kiold. A golyók kifelé csúsznak, és a rúd két végén lévő ütközőnél megállnak. Határozzuk meg a rendszer végső szögsebességét.



12-20 ábra
A 12-10 példához.

MEGOLDÁS

Minthogy a tengelyre külső forgatónyomaték nem hat, alkalmazhatjuk az impulzusmomentum megmaradásának a törvényét. Először átszámítjuk a forgási sebességet radián per másodpercre:

$$\omega = 80\frac{\text{ford.}}{\text{perc}}\left[\frac{1\ \text{perc}}{60\ \text{s}}\right]\left[\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{ford}}\right] = 8{,}37\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

átszámítási tényező

Továbbá mivel $L_0 = L$

$$\left[\left(I_{rúd}\right)_0 + \left(I_{golyók}\right)_0\right]\omega_0 = \left[\left(I_{rúd}\right) + \left(I_{golyók}\right)\right]\omega$$

$$\omega = \omega_0\frac{\left(I_{rúd}\right)_0 + \left(I_{golyók}\right)_0}{\left(I_{rúd}\right) + \left(I_{golyók}\right)}$$

Behelyettesítés után

$$\omega = \left(8{,}37\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\frac{\left(0{,}070\ \text{kg m}^2\right) + (2)(0{,}20\ \text{kg})(0{,}10\ \text{m})^2}{\left(0{,}070\ \text{kg m}^2\right) + (2)(0{,}20\ \text{kg})(0{,}40\ \text{m})^2}$$

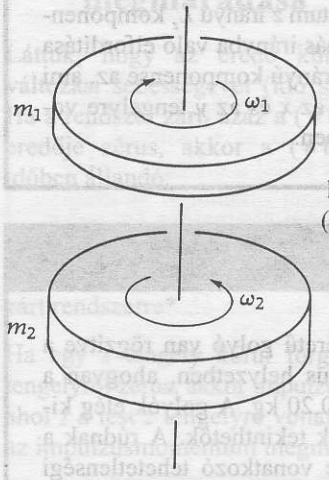
azaz

$$\omega = \left(8{,}37\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\frac{\left(0{,}074\ \text{kg m}^2\right)}{\left(0{,}13\ \text{kg m}^2\right)} = 4{,}76\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

adódik.

Impulzusmomentummal együtt járó ütközések

Olyan ütközések esetén, amelyeknél valamely tengelyre vonatkozó impulzusmomentum fellép, az ütközésben résztvevő testekre érvényes az impulzusmomentum megmaradása, ha ezen tengelyre a külső forgatónyomatékok eredője az ütközés alatt zérus. A következő két példa ezt az esetet illusztrálja.



12-21 ábra
A 12-11 példához.

12-11 PÉLDA

Mint ahogyan a 12-21 ábra mutatja, egy $m = 1{,}2$ kg tömegű homogén tömör tárcsa súrlódásmentesen forog a tárcsa síkjára merőleges, a tömegközépponton átmenő tengely körül. A forgás iránya felülről nézve az óramutató járásával egyező irányú, a kezdeti szögsebesség $(\omega_1)_0 = 2$rad/s. Egy hasonló, ugyanakkora sugarú $m_2 = 2$ kg tömegű tárcsa súrlódásmentesen ugyanarra a tengelyre szerelve, az óramutató járásával ellentétes irányban $(\omega_2)_0$=1,8 rad/s szögsebességgel forog. Most a felső tárcsát ráejtjük az alsóra (amely ezt megtartja), és a tárcsák között fellépő mozgási súrlódás következtében a két tárcsa végül együtt forog. Határozzuk meg az együtt forgó két tárcsa végső ω szögsebességét és az együttforgás irányát! [(★tengelyre vonatkozó) külső forgatónyomaték semmikor sem lép fel.]

MEGOLDÁS

Minthogy a rendszerre külső forgatónyomaték nem hat, érvényes a rögzített függőleges tengelyre vonatkozó impulzusmomentum megmaradása. (De megjegyezzük, hogy a mechanikai energia megmaradása nem érvényes, mert a súrlódás következtében fejlődik valamennyi hő.) A felülről nézve az óramutató járásával ellentétes forgási irányt jelöljük pozitívnak, így a *felfelé* mutató vektorok pozitívak. Következésképpen $\omega_1 = -2$rad/s.

$$L_0 = L$$

$$(I_0)(\omega_1)_0 + (I_2)_0(\omega_2)_0 = (I_1 + I_2)\omega$$

$$(\tfrac{1}{2} m_1 R^2)(\omega_1)_0 + (\tfrac{1}{2} m_2 R^2)(\omega_2)_0 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\omega$$

Az ω szögsebességre innen:

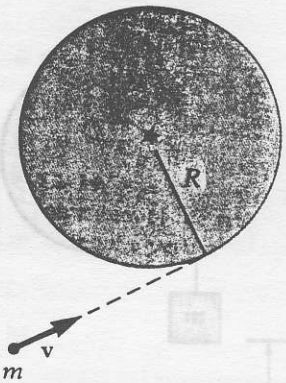
$$\omega = \frac{m_1(\omega_1)_0 + m_2(\omega_2)_0}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(1{,}2\,\text{kg})(-2\,\text{rad/s}) + (2\,\text{kg})(1{,}8\,\text{rad/s})}{(1{,}2\,\text{kg} + 2\,\text{kg})} = 0{,}375\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

adódik: Minthogy az eredmény pozitív, a forgás iránya (felülről nézve) az óramutató járásával ellentétes.

12-12 PÉLDA

Ez a példa azt mutatja be, hogy az impulzusmomentum fogalma nem kötődik a forgó mozgáshoz. Tegyük fel, hogy a 12-8 példában szereplő 32 kg tömegű gyermek a (3 m átmérőjű) ringlispil kerületét érintő egyenes mentén 1,8 m/s sebességgel fut a földön, és a deszkázatra ugrik. (12-22 ábra.) (a) Határozzuk meg a gyermek L impulzusmomentumát a ringlispil ★ tengelyére vonatkozóan a felugrás előtt! (b) Ha a ringlispil kezdetben nyugalomban van, határozzuk meg az ω szögsebességét, miután a fiú a deszkázatra ugrott és ott megkapaszkodott! A ringlispil tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka 720 kg·m^2.



12-22 ábra
A12-12 példához.

MEGOLDÁS

(a) A fiú impulzusa $p = mv$ =(32 kg)(1,8 m/s) =57,6 kg·m/s. Így impulzusmomentuma a ★tengelyre:

L =(p)(momentumkar) = (57,6 kg·m/s)(1,5 m) = 86,4 kg·m^2/s.

(b) Miután a fiú elrugaszkodott a földről, hogy a ringlispilre az érintő irányából ráugorjon, a ringlispilből és a fiúból álló rendszerre a tengelyre vonatkozóan külső forgatónyomaték már nem hat, a rendszer zárt. Így a★tengelyre vonatkozó impulzusmomentum megmarad a „befogási" ütközés során. Mint minden rugalmatlan ütközéskor, *az energia nem marad meg.* Az ütközés alatt a tartó csapágyak vízszintes irányú erő lökést fejtenek ki a ringlispilre (azért, hogy azt rögzítsék), így az *összimpulzus sem marad meg.* Azonban ha a csapágyak súrlódásmentesek, akkor forgatónyomatékot nem fejtenek ki, így *a ★ tengelyre vonatkozó impulzusmomentum az ütközéskor megmarad.*

$$L_0 = L$$

$$(L_{fiú})_0 + (L_{rsp})_0 = [I_{fiú} + I_{rsp}]\omega$$

$$86{,}4 \text{ kg·m}^2/\text{s} + 0 = [(72 + 720)\text{kg·m}^2]\omega.$$

Tehát az ω szögsebesség $\omega = \dfrac{86{,}4 \text{ kg m}^2/\text{s}}{792 \text{ kg m}^2} = 0{,}109 \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Rugalmatlan ütközések alkalmával a mechanikai energia egy része hővé alakul, ill. maradandó deformáció létrehozására fordítódik. A következő példa ezt illusztrálja forgó mozgással együttjáró ütközés esetére.

12-13 PÉLDA

Számítsuk ki az előző példa esetén az ütközés során bekövetkezett ΔK mechanikai energiaváltozást

MEGOLDÁS

A kezdeti mechanikai energia a fiú kinetikus energiája: az egyenesvonalú mozgása során: $K_0 = \frac{1}{2}mv^2$. Az ütközés után a végső forgási kinetikus energia $K = \frac{1}{2}I_{rsp}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{fiú}\omega^2$. Így:

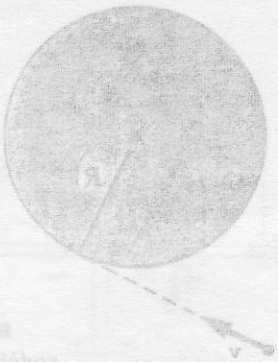
$$\Delta K = K - K_0$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}[I_{rsp} + I_{fiú}]\omega^2 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}[(720 + 72)\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}](0{,}109\ \text{rad/s})^2 - \tfrac{1}{2}(32\ \text{kg})(1{,}8\ \text{m/s})^2$$

$$\Delta K = -32{,}7\ \text{J}.$$

A negatív előjel arra utal, hogy ennyi kezdeti mechanikai energia elveszett (átalakult) hő- vagy egyéb energiává.



12.9 A forgó testen végzett munka és a forgási energia

A haladó- és a forgó mozgás analógiájának további kiterjesztéséhez tekintsük most azt a ΔW munkát, amelyet a rögzített tengelyre szerelt tárcsán egy külső F erő végez. (12-23 ábra.) Az erő a tárcsa síkjában hat. Amint a tárcsa egy kicsiny $\Delta\theta$ szöggel elfordul, az F_t tangenciális erőkomponens egy kicsiny $\Delta S = r\Delta\theta$ ívhosszal elmozdul, így az erő $\Delta W = F_t\,\Delta S = F_t r\Delta\theta = M\,\Delta\theta$ munkát végez.

	Elemi munka	Összes munka	
Munkavégzés forgó mozgás esetén	$\Delta W = M\Delta\theta$	$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta$	**(12-20)**

A munka egysége N·m [J]. (A szöggel kapcsolatos dimenzió nélküli „radián" egységet szokás szerint elhagyjuk.)

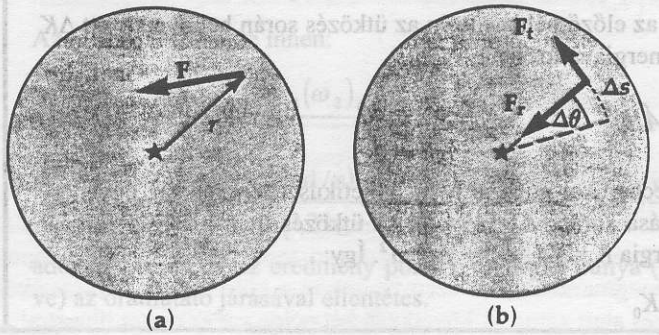
A (12-2) egyenletből azt kapjuk, hogy

Forgási kinetikus energia	$K_{rot} = \tfrac{1}{2}I\omega^2$	**(12-21)**

Konzervatív rendszerben, amelyben a külső erők és nyomatékok eredője zérus, mind a haladó-, mind a forgó mozgásra érvényes a mechanikai energia megmaradása:

A mechanikai energia megmaradása	$E_0 = E$ $U_0 + K_0 = U + K$	**(12-22)**

Hasonlóképpen a munkatétel is alkalmazható forgó mozgás esetén



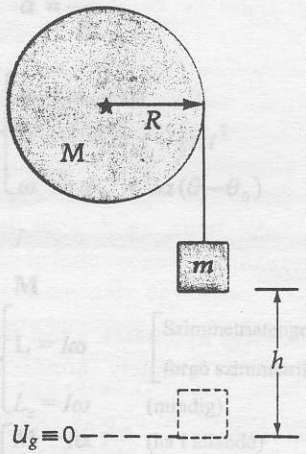
12-23 ábra
A rögzített tengelyre szerelt tárcsára a külső F erő hat. A (b) ábrán az erő tangenciális és radiális komponensre van bontva.

A munkatétel rögzített tengely körüli forgásra

$$\left[\begin{array}{l}\text{A forgatónyomatékok}\\ \text{összes munkája}\end{array}\right] = \Delta K_{rot} \qquad \textbf{(12-23)}$$

12-14 PÉLDA

Egy homogén, tömör hengerre felcsavart kötél végére m tömegű test van erősítve a 12-24 ábra szerint. A henger tömege $M = 4m$, sugara R, és súrlódásmentes csapágy tartja. Alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának elvét az m tömeg gyorsulásának meghatározására. (Ez a 12-6 példában tárgyalt feladat más megoldása. Ez a megközelítés rendszerint egyszerűbb, mint a Newton törvények alkalmazása.)



12-24 ábra
A 12-14 példához.

MEGOLDÁS

Célszerű azt feltételezni, hogy az m tömegű test nyugalomból indul, és h távolságnyira mozdul lefelé. (Ez a távolság a számítás során ki fog esni.) A rendszer konzervatív, és az energia megmaradás elve alapján könnyen kiszámíthatjuk a test sebességét, ha h magassággal lejjebb kerül. A gravitációs potenciális energia $U_g \equiv 0$ referencia szintjeként az m tömeg végső helyzetét választjuk.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + (K_{trans})_0 + (K_{rot})_0 = U_g + K_{trans} + K_{rot}$$

$$(mgh_0) + (\tfrac{1}{2}mv^2)_0 + (\tfrac{1}{2}I\omega^2)_0 = mgh + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh + (0) + (0) = (0) + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(4m)R^2]\omega^2.$$

Minthogy a kötél az R sugarú hengerről csúszás nélkül tekeredik le, ezért $v = R\omega$: Ezt behelyettesítve

$$2gh = v^2 + \tfrac{1}{2}(4)v^2 = 3v^2.$$

innen

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gh}\,.$$

Az m tömegű test függőleges gyorsulását a kinematikai egyenletből nyerjük:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

Behelyettesítés után

$$\frac{2}{3}gh = 0 + 2ah$$

adódik, ahonnan

$$a = \frac{1}{3}g.$$

12-15 PÉLDA

Miután egy spirálrugót hossztengelye körül egyensúlyi helyzetéből 60°-kal elcsavartunk, 0,30 N·m forgatónyomaték szükséges ahhoz, hogy ebben a megfeszített helyzetben nyugalomban maradjon. Feltételezve a Hooke törvény érvényességét, amely szerint a visszatérítő forgatónyomaték a szögelfordulással arányos, határozzuk meg (a) a

rugó κ un. torziós rugóállandóját, és (b) a megcsavart rugóban tárolt potenciális energiát!

MEGOLDÁS

Az egyszerű rugóra vonatkozó Hooke törvény $F = -kx$, ahol k a rugóállandó. Ezzel analóg módon felírható az ideális spirálrugóra vonatkozó Hooke törvény: $M = -\kappa\theta$, ahol M a forgatónyomaték, k pedig az un. csavarási vagy torziós rugóállandó.

(a) A θ szög $\quad \theta = 60°\left(\dfrac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = \dfrac{\pi}{3}\text{ rad}.$

$$M = -\kappa\theta \text{ -ból } \kappa = \frac{M}{\theta} = \frac{(0{,}30\,\text{Nm})}{\left(\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right)} = 0{,}287\,\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}.$$

(b) A megfeszített rugóban a potenciális energia

$$U_{rugó} = \frac{1}{2}\kappa\theta^2 = \frac{1}{2}\left(0{,}287\,\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}\right)\left(\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right)^2 = 0{,}157\,\text{Nm} = 0{,}157\,\text{J}.$$

12-16 PÉLDA

Egy 0,13 kg·m^2 tehetetlenségi nyomatékú köszörűkőre 25 N·m állandó forgatónyomaték hat. Határozzuk meg energetikai megfontolásokkal a szögsebességet (fordulat per másodpercben) a köszörűkő 15 fordulata után. (A súrlódás elhanyagolásával.)

MEGOLDÁS

A forgó mozgásra felírt munkatételről megállapítottuk, hogy

$$[\text{Az eredő forgatónyomaték munkája}] = \Delta K_{rot}$$

$$M\theta = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - \tfrac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$(25\,\text{Nm})(15\,\text{ford.})\underbrace{\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1\,\text{ford.}}\right)}_{\text{átszámítási tényező}} = \frac{1}{2}(0{,}13\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2 - 0 \qquad \textbf{(12-24)}$$

Innen ω értéke:

$$\omega = \sqrt{\frac{(25)(15)(2\pi)(2)}{(0{,}13)}} = 190\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Fordulat per másodpercre átszámítva:

$$190\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \underbrace{\left(\frac{1\,\text{ford.}}{2\pi \text{ rad}}\right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 30{,}3\,\frac{\text{ford}}{\text{s}}.$$

A fenti példa egy, a forgási problémákkal kapcsolatos megszívlelendő figyelmeztetést tartalmaz arra az esetre, ha a feltett kérdésre a választ radián helyett fordulatszámmal kell megadni. A munka $M\theta$ kifejezésében a θ szö-

12-1 táblázat

haladó mozgás		forgó mozgás	
elmozdulás	x	szögelfordulás	θ
sebesség	$v = \frac{dx}{dt}$	szögsebesség	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
gyorsulás	$a = \frac{dv}{dt}$	szöggyorsulás	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Kinematikai egyenletek			
(állandó gyorsulás esetén)	$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{cases}$	(állandó szöggyorsulás esetén)	$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$
tömeg	m	tehetetlenségi nyomaték	I
erő	$\mathbf{F}$	forgatónyomaték	$\mathbf{M}$
impulzus	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	impulzusnyomaték (perdület)	$\begin{cases} \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} & \text{[Szimmetriatengelyük körül forgó szimmetrikus testekre]} \\ L_z = I\omega & \text{(mindig)} \end{cases}$
Newton II. törvénye	$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a} & \text{(állandó } m \text{ mellett)} \\ \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \end{cases}$	A forgó mozgás alapegyenlete	$\begin{cases} \mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha} & \text{(ha I állandó)} \\ \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \end{cases}$
erőimpulzus	$\mathbf{F}\Delta t = \Delta\mathbf{p}$	forgatónyomaték-impulzus	$\mathbf{M}\Delta t = \Delta\mathbf{L}$
munka	$\Delta W = F\Delta x$	munka	$\Delta W = M\Delta\theta$
mozgási energia	$K = \frac{1}{2}mv^2$	mozgási energia	$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
teljesítmény	$P = Fv$	teljesítmény	$P = M\omega$
Hooke–törvény	$F = -kx$	Hooke-féle forgató-nyomaték-törvény	$M = -k\theta$

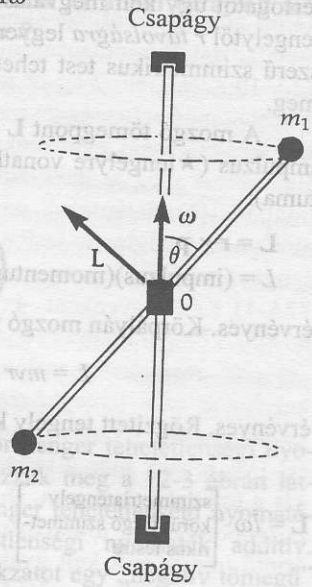
get mindig radiánban kell kifejezni. Helytelen tehát úgy okoskodni, hogy azért, mert a végeredményt fordulat per percben keressük, a feladat megoldása során mellőzhetjük a 15 fordulat radián egységre való átszámítását. Az átszámítás elhagyása helytelen eredményre vezet. Minden forgással kapcsolatos összefüggésben a szögelfordulást radiánban kell megadni.[9]

A 12-1 táblázatban összefoglaltuk és párhuzamba állítottuk a haladó és a forgómozgás egyenleteit.

12.10 Dinamikai kiegyensúlyozatlanság

Minden merev testnek, még a legszabálytalanabbnak is, van három, egymásra merőleges, ún. *fő tehetetlenségi tengelye.* (Szimmetrikus testek esetében mindegyik szimmetriatengely fő tehetetlenségi tengely.) Jóllehet a fő tehetetlenségi tengelyek definiálása meghaladja e könyv kereteit, de jelentőségük miatt mégis említést teszünk róluk. Ugyanis a fő tehetetlenségi tengelyek körül végzett forgás esetében az L impulzusmomentum-vektor párhuzamos az ω vektorral, és ekkor a (12-11) egyenlet érvényes. Az ilyen esetek vizsgálata egyszerű, itt csak ezekkel foglalkozunk.

Ha az **L** és **ω** vektor – mint pl. a 12-25 ábrán – nem párhuzamos, akkor a vizsgálat bonyolult. Ilyenkor a rendszer dinamikailag kiegyensúlyozatlan,



12-25 ábra
A dobverőhöz hasonló idom merev rúdra szerelt két m tömegű testből áll. A rúd a forgástengelyre rögzítve van; a bezárt szög θ. A rendszer forgása során mindkét test $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ impulzusmomentuma egyirányú. A két vektor $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ összegét az ábra mutatja. Az **L** vektor a rendszer ω szögsebességű forgása során a függőleges forgástengely körül körbejár. Tehát **L** és ω nem párhuzamosak egymással.

[9] Az egyetlen kivételt a kinematikai egyenletek képezik. Azokban megengedhető, hogy „fordulatot" használjunk radián helyett, mivel ott ugyanaz az átszámítási tényező szerepel az egyenletek két oldalának minden tagjában.

és a forgás alatt oldalirányban „ütni" kezd. Az **L** impulzusmomentum-vektor a rendszer forgása során körbejárja a függőleges tengelyt és a csapágyaknak forgatónyomatékot kell gyakorolniuk a rendszerre, hogy létrehozzák az impulzusmomentum irányváltozását. A rúd is úgy mozogna, hogy a θ szög 90°-ra álljon be, hogy így a rajta lévő tömegekkel egyetlen, a forgástengellyel párhuzamos síkba kerülne. A rúd ferde helyzetének fenntartása a függőleges befogócsapágyakra nagy feszültséget gyakorol. Nagy fordulatszám mellett emiatt túlzott csapágykopás vagy a tartószerkezet törése következhet be, hacsak a forgó rendszert a szimmetriát helyreállító tömegek hozzáadásával „dinamikailag ki nem egyensúlyozzák."[10] Szokásos a gépjárművek kiegyensúlyozatlan kerekének peremére kicsiny ólom „súlyokat" erősíteni a nagy sebességnél jelentkező ütés és berezgés csökkentésére.

Összefoglalás

Az **I tehetetlenségi nyomaték** a test forgási tehetetlenségét fejezi ki a ★tengely körüli szöggyorsulással szemben:

tömegpont-rendszerre $I = \sum_i m_i r_i^2$ **folytonos tömegeloszlásra** $I = \int r^2 dm$ (az egész testre)

A dm elemi tömeg $\rho\, dV$-vel egyenlő (ahol ρ a sűrűség és dV a térfogatelem).Megjegyezzük, hogy a dV elemi térfogatot úgy kell megválasztani, hogy a dm a forgástengelytől r *távolságra* legyen. A 12-3 ábra néhány egyszerű szimmetrikus test tehetetlenségi nyomatékát adja meg.

A mozgó tömegpont **L impulzusmomentuma** a **p** impulzus (★tengelyre vonatkozó) nyomatéka (momentuma):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

L = (impulzus)(momentumkar) = $(mv)(r \sin\theta)$.

érvényes. Körpályán mozgó részecskére,

$$L = mvr = mr^2\omega$$

érvényes. Rögzített tengely körül forgó testre

$\mathbf{L} = I\omega$ [szimmetriatengely körül forgó szimmetrikus testre] $L_z = I\omega$ [mindig, ha I a z tengelyre vonatkozik és a test z körül forog]

A forgó mozgás alapegyenlete:

$\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = I\alpha$ [szimmetriatengelye körül forgó szimmetrikus testre (I állandó)]

$\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = \mathrm{d}\mathbf{L}/dt$ [általános alak]

Az I tehetetlenségi nyomatékot a (diagramokon feltüntetendő) ★tengelyre kell számítani. A helyes vektorábra, amelyben az erővektorokat a támadási pontból kiindulva rajzoljuk fel; ez a támadáspont, sokat segít az erőkarok kiszámításánál és a forgatónyomatékok forgási irányának meghatározásánál.

Az olyan rendszerek esetében, amelyekre (a ★ tengelyre vonatkozóan) külső forgatónyomaték nem hat, érvényes az **impulzusmomentum megmaradása**:

$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}$ [Rögzített z tengelyre vonatkoztatva, amikor I is a z tengelyre vonatkozik, (vagy egy a tömegközépponton átmenő, önmagával párhuzamosan haladó tengelyre.)]

$I_0\omega_0 = I\omega$

A forgatónyomaték **munkája** θ szögelfordulás során:

$\Delta W = M\,\Delta\theta$ és $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta$

A forgási (kinetikus) energia: $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$

A **munkatétel** forgó mozgásra:

[A forgatónyomatékok összes munkája] $= \Delta K_{rot}$

A haladó és a forgó mozgást leíró mennyiségekre vonatkozó analógiák a 12-1 táblázatban találhatók.

[10] Megjegyezzük, hogy *statikus* egyensúlyban ez a probléma nem jelentkezik. A dobverő a tömegközéppontjára vonatkozóan *minden* rúdállásban statikus egyensúlyban van. A dinamikai kiegyensúlyozatlanság csak akkor lép fel, ha a rendszer forog.

Kérdések

1. Súrlódásmentesen csapágyazott függőleges tengelyre tárcsát erősítettek. A forgásban lévő tárcsa külső peremén egy egér ül. Az egér most megindul a tengely felé a tárcsára festett sugárirányú vonal mentén. Mi történik a tárcsa szögsebességével? Ha csak a tárcsára ható erőket vesszük figyelembe, mi okozhatja a tárcsa szögsebességét megváltoztató forgatónyomatékot?
2. Két egyforma műhold, *A* és *B* kering a Föld körül *R*, illetve 2*R* sugarú körpályán. Egyenlő-e az érintő irányú sebességük? Ha nem, melyiküké nagyobb? Mit mondhatunk a szögsebességükről, impulzusmomentumukról, forgási kinetikus energiájukról?
3. Magyarázzuk meg, hogyan képes az egyenletesen fújó szél a szélmalom lapátjaira forgatónyomatékot gyakorolva a szélkereket forgásba hozni?
4. Tegyük fel, hogy ismeretlen sűrűségű anyagból gömböt készítettek. Anélkül, hogy lyukat fúrnánk a gömbbe, meg tudjuk-e határozni, hogy a gömb tömör, vagy üreges?
5. Egy ember a forgó zsámolyon ülve kinyújtott karral két egyenlő tömegű testet tart. A zsámoly forgása közben elejti a testeket. Megváltozik-e az impulzusmomentuma? Alkalmazható-e erre az esetre az impulzusmomentum megmaradása?
6. Mi történik a gépkocsi kerekeinek impulzusmomentumával, amikor a mozgó kocsit megállítják? Sérül-e ebben az esetben az impulzusmomentum megmaradásának az elve?
7. Miért indítják a Cape Canaveralban kilőtt műbolygókat inkább nyugati, mint keleti irányba?
8. A legtöbb helikopter farába a helikopter hossztengelyére merőleges vízszintes tengely körül forgó kisméretű légcsavart szerelnek. Miért?
9. Magyarázzuk meg, hogy miért lehet egy *egyenes* vonal mentén haladó testnek impulzusmomentuma!
10. Egy test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Ha impulzusmomentuma egy bizonyos (az egyenesen kívül lévő) *O* pontra *L*, mekkora az impulzusmomentuma egy olyan *O* pontra, amelyik az egyenestől háromszor akkora távolságra van? Mekkora az impulzusmomentuma az *egyenesen* lévő pontra?

Feladatok

12.2 A tehetetlenségi nyomaték

12A-1 Négy darab *l* hosszúságú súlytalan rúdból készített négyzet sarkaiban egy-egy *m* tömegű tömegpont van. Határozzuk meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát, ha (a) a négyzet síkjára merőleges, középponton átmenő tengely körül, (b) a négyzet síkjában lévő, az egyik oldal felezőpontján és a középponton átmenő tengely körül, (c) az egyik oldalon átmenő tengely körül, (d) az egyik csúcsból az átlósan szemközti csúcson átmenő tengely körül forog.

12A-2 A nitrogén molekula (N_2) atomjai között a kötéstávolság $1{,}10\times10^{-10}$ m. Az egyes nitrogén atomok tömege $1{,}661\times10^{-27}$ kg. Határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékot az atomokat összekötő egyenesre merőleges, a tömegközépponton átmenő tengelyre.

12B-3 Elhanyagolható tömegű rudakkal összekötött egy síkba eső hat egyenlő nagyságú tömegpont szabályos hatszöget alkot. A rendszer teljes tömege *M*, és az egyes tömegpontok a hatszög középpontjától *R* távolságra vannak. Számítsuk ki a rendszer tehetetlenségi nyomatékát két szemközti tömegponton átmenő tengelyre! A megoldás $\frac{1}{2}MR^2$ úgy tűnik, hogy a tehetetlenségi nyomaték négynél több tömegpont esetében a tömegpontok számától független (ha a szabályos sokszög csúcsainak a száma páros).

12.3 A tehetetlenségi nyomaték számítása folytonos tömegeloszlás esetében

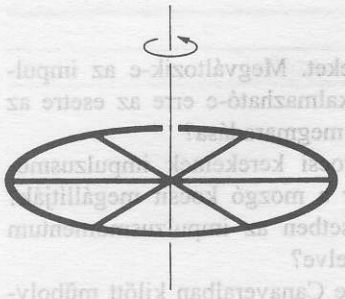
12A-4 Egy *M* tömegű huzalt két félkörből álló „*S*" alakra hajlítottak a 12-26 ábrán látható módon. Határozzuk meg tehetetlenségi nyomatékát az ábrán berajzolt tengelyre! A félkörívek sugara *R*.



12-26 ábra
A 12A-4 feladathoz.

12B-5 Felhasználva a tömör henger tehetetlenségi nyomatékának képletét, határozzuk meg a 12-3 ábrán láthatóhoz hasonló üreges henger tehetetlenségi nyomatékát. (Útmutatás: a tehetetlenségi nyomaték additív. Próbáljuk meg a kívánt alakzatot egy „negatív tömegű" tömör henger és egy nagyobb tömör henger összegzésével kialakítani! A negatív tömeg tárgyalásához lásd a 10-6 példát!)

12A-6 Számítsuk ki a 12-27 ábrán látható kerék tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot. Az abroncs tömege *M*, és a hat küllő mindegyikének tömege is *M*. Tekintsük az abroncsot *R* sugarú vékony karikának, a küllőket vékony rudaknak! [Az *l* hosszúságú rúd egyik végén átmenő (a rúdra merőleges) tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}Ml^2$.]



12-27 ábra
A 12A-6 feladathoz.

12.4 Az inerciasugár

12A-7 40 kg tömegű üreges henger belső és külső sugara 2 cm, illetve 4 cm. Határozzuk meg a henger tengelyére vonatkozó inerciasugarat.

12A-8 Egy lendkerék egy homogén, tömör 30 cm sugarú 5 kg-os tárcsából áll, amelyet körülvesz egy koncentrikusan elhelyezett 40 kg tömegű homogén üreges henger. Utóbbi belső sugara 30 cm, külső sugara 40 cm. Határozzuk meg az inerciasugarát.

12.5 Az impulzusmomentum (perdület)

12A-9 Az $1{,}7\times10^{-27}$ kg tömegű proton 5×10^{6} m/s sebességű egyenes vonalú mozgással a nyugalomban lévő neutronhoz közelít. A proton pályája 1×10^{-11} méterrel kerüli el a neutront. Mekkora a protonnak a neutronra vonatkoztatott impulzusmomentuma?

12A-10 Kisméretű 2 kg-os test 3 m átmérőjű körpályán 4 m/s állandó sebességgel mozog. (a) Határozzuk meg a test tehetetlenségi nyomatékát a kör középpontjára. (b) Határozzuk meg az impulzusmomentumot a kör középpontjára. (c) Határozzuk meg azt az érintőirányú erőt, amelynek hatására a test a középpont körül 5 rad/s^2 szöggyorsulással mozog.

12A-11 Két, egyenként 4 kg-os tömegpont 0,40 m hosszú, könnyű merev rúddal van összekapcsolva. Ezt a „súlyzó" rendszert vízszintes, súrlódásmentes felületre helyezzük és a tömegközépponton átmenő függőleges tengely körül 3 rad/s szögsebességű forgásba hozzuk. (a) Határozzuk meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát a tömegközéppontra. (b) Határozzuk meg a tömegközéppontra az impulzusmomentumot. (c) Mekkora érintő irányú erőt kell gyakorolni mindegyik testre ahhoz, hogy a szöggyorsulás 6 rad/s^2 legyen?

12B-12 Az $\mathbf{F} = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}$ (newtonban mért) erő 4 m/s sebességgel tolódik el az x tengely irányában. a) Mekkora az impulzusmomentuma az origóra vonatkozóan a 0 időpontban (a mozgás kezdetén) ? Mekkora lesz az erőnek az origóra vonatkozó impulzusmomentuma 1 másodperc múlva?

12B-13 Az (5m, 12m, 0) koordinátákkal megadott pontban $\mathbf{F} = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}$ (newtonban kifejezett) erő hat. Határozzuk meg a koordinátarendszer origójára vonatkoztatott forgatónyomaték nagyságát és irányát.

12.7 Newton második törvénye forgó mozgás esetében (A forgó mozgás alapegyenlete)

12A-14 Tömör, homogén, henger alakú köszörűkő tömege 2 kg, átmérője 20 cm. Nyugalmi helyzetből indítva a köszörűkő állandó szöggyorsulással 3 s alatt 3300 fordulat per perc forgási sebességet ér el. (a) Határozzuk meg, hányat fordul a köszörűkő a gyorsulás folyamán. (b) Határozzuk meg azt a forgatónyomatékot, amellyel a köszörűkőnek ekkora szöggyorsulást lehetett adni!

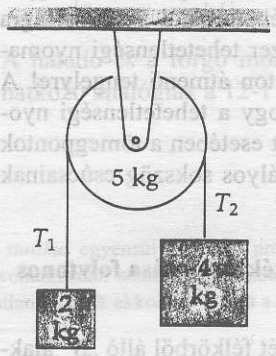
12A-15 Egy 0,40 kg-os gyöngyszem súrlódásmentesen csúszik egy huzalból hajlított 0,60 m átmérőjű vízszintes síkú körön. Milyen nagy érintő irányú erő hatására lesz a gyöngyszemnek 4 rad/s^2 szöggyorsulása?

12A-16 Egy lendkerék tömege 500 kg, inerciasugara 60 cm. (a) Mekkora állandó nagyságú forgatónyomaték hatására lesz a nyugalomból induló lendkeréknek 20 s alatt 600 fordulat per perc a fordulatszáma? (b) Ha a lendkerék sugara 80 cm, mekkora állandó tangenciális erő hoz létre ekkora forgatónyomatékot?

12B-17 Egy 0,75 kg tömegű repülőgép-modell huzalon kipányvázva 30 m sugarú körpályán repül. A repülőgép motorja 0,80 N erőt fejt ki, a huzalra merőlegesen. (a) Határozzuk meg a kör középpontjára vonatkoztatva a motor által kifejtett forgatónyomatékot! (b) Határozzuk meg a repülőgép szöggyorsulását a repülés folyamán. (c) Határozzuk meg a repülőgép pályaérintő irányú gyorsulását!

12A-18 Egy tárcsa alakú homogén tömör köszörűkő sugara 7 cm, tömege 2 kg. Nyugalomból indul és egyenletesen gyorsul annak az állandó, 0,6 N·m forgatónyomatéknak hatására, amelyet a motor fejt ki a kerékre. (a) Mennyi ideig tart, amíg a kerék eléri 1200 fordulat per perc végső üzemi fordulatszámát? Hány fordulatot tesz meg a kerék a gyorsulás időtartama alatt?

12B-19 A 12-28 ábrán látható homogén tömör henger sugara 10 cm, tömege 5 kg, és vízszintes súrlódásmentes tengelyre van szerelve. A 2 kg-os és a 4 kg-os hasábokat nyugalmi helyzetből elengedjük. A kötél és a henger között csúszás nem lép fel. Newton törvényeinek alkalmazásával a két hasábra és a hengerre határozzuk meg (a) a T_1 és a T_2 kötélerőt a hasábok gyorsulásának



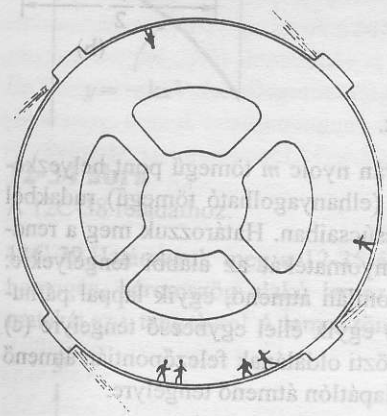
12-28 ábra
A 12B-19 és a 12B-20 feladathoz.

ideje alatt, és (b) a 4 kg-os hasáb sebességét a nyugalmi helyzettől mért 4 m távolságu süllyedés után!

12B-20 Oldjuk meg a 12B-19 feladat (b) kérdését az energia megmaradásának elvét alkalmazva.

12B-21 Egy M tömegű, k inerciasugarú, nagy, kerék alakú űrállomást konstruáltak olyan térben, ahol a gravitáció elhanyagolható. Annak érdekében, hogy az űrhajósok számára mesterséges gravitációt biztosítsanak, a forgástengelytől R távolságra lévő külső perem közelében a kereket a 19-29 ábrán bemutatott szimmetrikus helyzetű négy rakétamotorral forgásba hozzák. (a) Határozzuk meg azt az ω szögsebességet, amely a peremen a földi gravitációval egyenlő nagyságú mesterséges gravitációs gyorsulást okoz! Mennyi ideig kell működtetni a négy, egyenként F érintőirányú erőt kifejtő rakétamotort, hogy (a nyugalomból induló) rakéta az ehhez szükséges szögsebességet elérje?

12B-22 Tegyük fel, hogy az előző példában szereplő rakéták egyikét valamilyen valószínűtlen hiba folytán ellenkező irányban szerelték fel. A négy rakétát az előző példában szereplőnél sokkal rövidebb Δt időre bekapcsolják, majd kikapcsolják. Így a rakéták még a kerék észrevehető megmozdulása előtt leállnak. A kerék azonban impulzusmomentumhoz jut. Feltéve, hogy a kerék nyugalmi helyzetből indul, fejezzük ki a haladási és forgási sebességet a megadott mennyiségek függvényében, valamilyen inerciarendszerre vonatkoztatva.



12-29 ábra
A 12B-21 és a 12B-22 feladathoz.

12B-23 Elhanyagolható tömegű, 1 m hosszú merev rúd egyik vége függőleges tengelyhez van csapágyazva úgy, hogy a vízszintes síkban szabadon foroghat. Szabad végére 0,4 kg-os testet erősítettek. A rúd középpontjára a rúdra merőlegesen vízszintes irányú 5 N erőt alkalmaznak. (a) Határozzuk meg a rúdnak a csapágy körüli szöggyorsulását! (b) Nyugalomból indulva hány radiánnal fordul el 4 s alatt? (Az erő a mozgás folyamán merőleges marad a rúdra.)

12B-24 Homogén, tömör, hengerformájú, 50 cm átmérőjű, 60 kg tömegű köszörűkő nyugalmi állapotból 20 s alatt 800 fordulat per perc szögsebességre tesz szert. (a) Mekkora állandó forgatónyomaték hatott a köszörűkőre? (b) A köszörűkőhöz egy fém szerszámot szorítunk. A szorító erő radiálisan befelé mutató komponense 20 N. A szerszám és a köszörűkő között a mozgási súrlódási együttható 0,50. Mekkora teljesítményt kell a motornak a köszörűkő számára átadnia, hogy a forgás sebessége 800 fordulat per perc maradjon? Tegyük fel, hogy a csapágysúrlódás elhanyagolható.

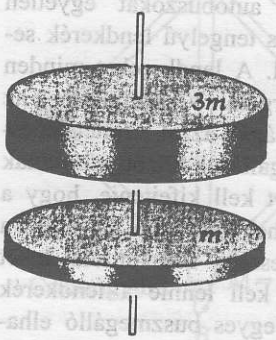
12.8 Az impulzusmomentum (perdület) megmaradása

12B-25 Tekintsünk egy olyan körbe forgó vidámparki járatot, amelyet egy súrlódásmentes csapágyakon nyugvó, vízszintes köralakú tárcsára szereltek. A tárcsa sugara 3 m, tömege 1000 kg és inerciasugara 2 m. A befékezett tárcsa szélén egy 80 kg-os ember 2m/s sebességgel körben fut. Ekkor a tárcsa fékjét kiengedik, az ember abbahagyja a futást és a tárcsa szélére leül. Határozzuk meg, hogy ekkor a tárcsa mekkora szögsebességgel fog forogni. (Útmutatás: Megváltozik-e a rendszer teljes impulzusmomentuma?)

12B-26 Az előző feladatban szereplő 80 kg-os ember a szabadon forgó tárcsa közepén van. A tárcsa 3 s alatt tesz meg egy fordulatot. Az ember a mozgó tárcsán sugárirányban kifelé mászik egészen a külső peremig és ott leül. Határozzuk meg a forgó tárcsa végsebességét!

12B-27 Egy téglalap alakú tömör , homogén anyagú ajtó tömege 13 kg, szélessége 1 m, magassága 2 m. Egyik oldalán zsanérozás úgy van felerősítve, hogy a függőleges tengely körül elfordulhat. Egy 380 m/s sebességű 12 g tömegű lövedék merőlegesen az ajtó közepébe ütközik és ott beágyazódik. Határozzuk meg (radián per másodpercben) az ajtó szögsebességét közvetlenül a lövedék becsapódása után. Az ajtó zsanérra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $I = Mb^2/3$, ahol b az ajtó szélessége; az ajtó magassága nem játszik szerepet. Miért? (Útmutatás: Megmarad-e a zsanérra vonatkoztatott impulzusmomentum az ütközés folyamán? Megmarad-e az energia?)

12B-28 A 12-30 ábrán látható két tömör tárcsa sugara R, egyik tömege m, a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd ráejtjük az eredetileg nyugalomban lévő alsó tárcsá-



12-30 ábra
A 12B-28 feladathoz.

ra. A tárcsák – a közöttük fellépő súrlódás hatására – végül közös ω szögsebességgel együtt forognak. A megadott mennyiségek alapján határozzuk meg (a) a végső ω szögsebességet és (b) a tárcsák egymáson való csúszásakor keletkező teljes súrlódási hőenergia mennyiségét! (Feltételezzük, hogy a felső korongot olyan kis magasságból ejtjük le, hogy a gravitációs potenciális energia változása elhanyagolható.) (c) Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási „ütközésnek"?

12.9 Munka és energia forgó mozgás esetén

12A-29 Egy m tömegű műbolygó R sugarú körpályán kering a Föld körül. Impulzusmomentuma L. Mekkora a kinetikus energiája m, L és R függvényében?

12A-30 Fonál végén lévő m tömegű testet függőleges síkban mozgásba hozunk úgy, hogy folytonosan körbe mozog. Amikor a test a tetőponton van, akkor a középpontra vonatkoztatott impulzusmomentuma kisebb, mint amikor az alsó ponton halad át. Magyarázzuk meg az impulzusmomentum csökkenését és növekedését okozó forgatónyomaték eredetét!

12B-31 80 cm átmérőjű és 11 kg·m^2 tehetetlenségi nyomatékú kereket vízszintes súrlódásmentes tengelyre szereltek. A kerék peremére tekert zsinór 6 N nagyságú állandó feszítőereje a kereket adott szöggyorsulással forgatja. Ha a kerék nyugalmi helyzetből indul, mekkora lesz az ω szögsebesség három fordulat után? Oldjuk meg a feladatot kétféleképpen: keressük meg a szöggyorsulást (a) kinematikai egyenletek felhasználásával és (b) a forgó mozgásra alkalmazott munkatétel felhasználásával!

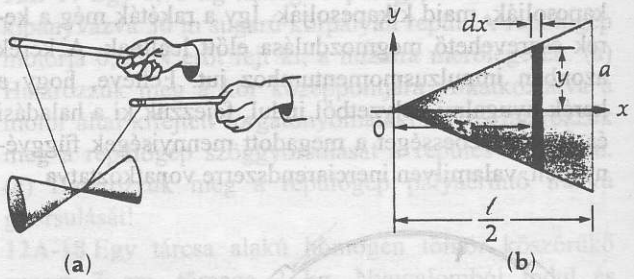
12B-32 Egy kis játszótéri ringlispil sugara 2 m, tehetetlenségi nyomatéka 600 kg·m^2. Egy 30 kg-os gyermek a középpontban ül, mialatt a ringlispil elhanyagolható súrlódású csapágyon **0,2** ford/s fordulatszámmal forog. A gyermek ezután az alaplap pereméig kimászik és leül. A gyermeket tömegpontnak tekintve (a) határozzuk meg a ringlispil végső szögsebességét (fordulat per másodpercben), (b) a rendszer kezdeti forgási kinetikus energiáját és (c) a rendszer végső forgási kinetikus energiáját! (d) Ha az (a) és a (b) kérdésre adott válasz különböző, magyarázzuk meg, mi történt az energiakülönbséggel!

12B-33 Javasolták, hogy az autóbuszokat egyetlen nagy, alulra szerelt, függőleges tengelyű lendkerék segítségével lássák el energiával. A lendkereket minden buszmegállóban fel kellene pörgetni. Vizsgáljuk meg az ilyen rendszer megvalósíthatóságát, azzal a feltételezéssel, hogy a 15 percenkénti megállások között a busznak átlagosan 75 kW teljesítményt kell kifejtenie, hogy a lendkerék 2 tonnánál nem lehet nehezebb és, hogy a lendkerék maximális szögsebessége 100 fordulat lehet percenként. (a) Mekkorának kell lennie a lendkerék forgási energiájának minden egyes buszmegálló elhagyásakor? (b) Mekkorának kell lennie a lendkerék inerciasugarának? (c) Mit gondolunk, megvalósítható ez a javaslat?

12B-34 Egy 163 kg·m^2 tehetetlenségi nyomatékú lendkerék 1280 fordulat per perc szögsebességgel forog, majd 2 perc alatt állandó nagyságú (negatív) szöggyorsulással leállítják. (a) Mekkora a lendkerék kezdeti kinetikus energiája? (b) Mekkora forgatónyomatékkal kell a lendkerékre hatni, hogy ez a lassulás létrejöjjön? (c) Ha a fékező mechanizmus a tengely (23 cm átmérőjű) peremére ható súrlódás, mekkora a csúszó súrlódási erő? (d) Számítsuk ki a súrlódási erő által végzett $f_k \Delta s$ munkát, és igazoljuk hogy a keletkezett hő megegyezik a lendkerék kezdeti forgási kinetikus energiájával!

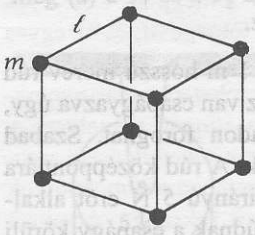
További feladatok

12C-35 A *diabolo* egy homogén, tömör, kettős kúp alakú játékszer, amit két pálcára kötözött zsineggel pörgetnek és dobálnak. (12-31 ábra.) Számítsuk ki az M tömegű, a alapkör sugarú, l teljes hosszúságú diabolo tehetetlenségi nyomatékát a középponti tengelyre! (Útmutatás: Osszuk fel a kúpot változó y sugarú dx vastagságú tárcsákra, a 12-31b ábra szerint.)



12-31 ábra
A 12C-35 feladathoz.

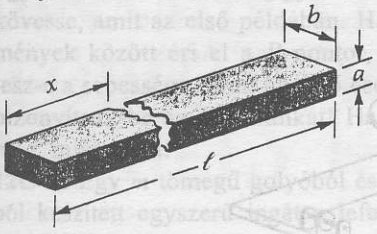
12C-36 A 12-32 ábrán nyolc m tömegű pont helyezkedik el l hosszúságú (elhanyagolható tömegű) rudakból összeállított kocka csúcsaiban. Határozzuk meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát az alábbi tengelyekre: (a) a kocka középpontján átmenő, egyik lappal párhuzamos tengelyre (b) egyik éllel egybeeső tengelyre (c) egyik lap két szemközti oldalának felezőpontján átmenő tengelyre (d) egyik lapátlón átmenő tengelyre.



12-32 ábra
A 12C-36 feladathoz.

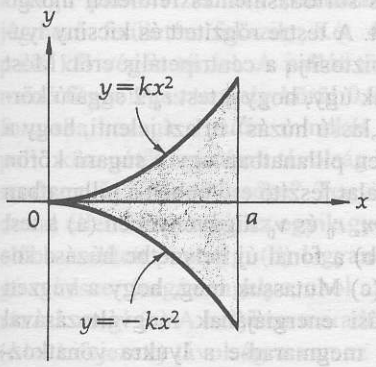
12C-37 A 12-33 ábrán bemutatott vékony, $a \times b \times l$ méretű hasáb inhomogén anyagból készült. A hasáb ρ sűrűsége az x távolság függvényében a $\rho = kx^3$ összefüggés szerint változik. (Megjegyzés: a és b elhanyagolható l mellett.) (a) Mi a k együttható dimenziója? (b) Integ-

rálással határozzuk meg, hogy a vékony hasáb tömege $M = abkl^4/4$. (c) Fejezzük ki az $x = 0$ helyen a hasáb keresztmetszetének középpontján átmenő vízszintes (a hasáb hossztengelyére merőleges) y tengelyre vonatkoztatva a hasáb tehetetlenségi nyomatékát M és l függvényében.



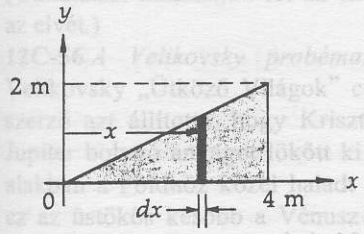
12-33 ábra
A 12C-37 feladathoz.

12C-38 A 12-34 ábrán látható alakra vágott vékony fémlemez tömege M. Határozzuk meg az y tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát M és a függvényében!



12-34 ábra
A 12C-38 feladathoz.

12C-39 Határozzuk meg a 12-35 ábrán látható vékony homogén, háromszög alakú lemez tehetetlenségi nyomatékát az y tengelyre! A lemez tömege 47 kg.



12-35 ábra
A 12C-39 feladathoz.

12C-40 Az m tömegű részecskét az $(x_1, 0, 0)$ pontban elengedik. Ezt követően a (lefelé irányított) pozitív y tengely irányában szabadon esik, a gravitáció hatása alatt. (a) Határozzuk meg az m tömegre ható $(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$ forgatónyomatékot az O origóra, és mutassuk meg, hogy ez a mennyiség időben állandó! (b) Keressünk formulát az O origóra vonatkoztatott $(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$ impulzusmomentumra az idő függvényében!

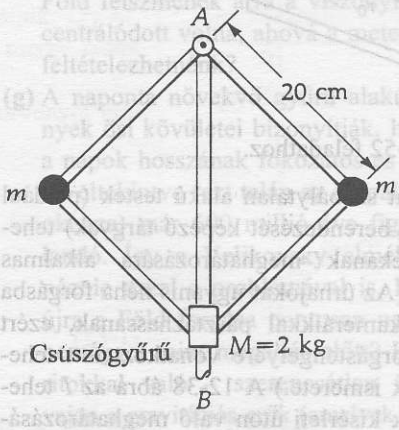
12C-41 Két, nem egyenlő M és m tömegű csillag kettőscsillag-rendszert képez. A gravitáció a két csillagot egymástól D távolságban tartja, mialatt a csillagok a közös tömegközéppontjuk körüli körpályán mozognak, azonos ω szögsebességgel. (a) A csillagokat tömegpontként tekintve, határozzuk meg (az adott szimbólumok függvényében) impulzusmomentumaik tömegközéppontra számított L_M/L_m arányát. (b) Fejezzük ki a rendszer teljes K_{rot} forgási kinetikus energiáját M, m, D, és ω függvényében.

12C-42 Egy origó középpontú kör két szemközti (diametrális helyzetű) pontjában két azonos tömegű test helyezkedik el. Mindkettő azonos és állandó szögsebességgel mozog az origó körül az xy síkban. Mutassuk meg, hogy a testek impulzusmomentuma az xy sík minden pontjára ugyanaz!

12C-43 A bolygómozgás második Kepler törvénye a következőképpen fejezhető ki: bármely bolygót a Nappal összekötő egyenes egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Mutassuk meg, hogy $dA/dt = L/(2m)$, ahol dA/dt az a sebesség, amellyel az egyenes a területet súrolja (az ún. területi sebesség), L a bolygó Nap körüli impulzusmomentuma és m a bolygó tömege. (Útmutatás: Tekintsük a rádiusz $d\theta$ szögű elfordulása során közelítőleg súrolt, háromszög alakú területet.)

12C-44 Kisméretű műbolygó saját tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka 21,7 kg·m^2. A műbolygóba, forgástengelyével párhuzamos tengelyű kis elektromotort szereltek. A műszakiak – a motor bekapcsolásával – a műbolygót 24°-kal el akarják fordítani. (a) Ha a motor forgó részének tehetetlenségi nyomatéka 8×10^{-4} kg·m^2, hány teljes fordulatot kell megtenni a motornak a műbolygóhoz rögzített koordinátarendszerben? (b) Szükséges-e, hogy a motor és a műbolygó tengelyei egybeessenek, vagy elég, ha a két tengely egymással párhuzamos?

12C-45 A 12-36 ábrán bemutatott forgó függőleges AB rúdra szerelt csuklós centrifugálregulátort arra tervezték, hogy elzárja az üzemanyagot, ha az AB rúd szögsebessége a 300 fordulat per perc értéket meghaladja. A



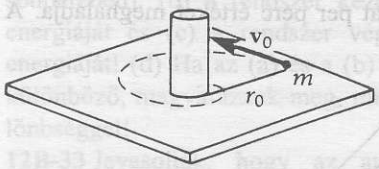
12-36 ábra
A 12C-45 feladathoz.

szabályozónak négy (súrlódásmentes csuklókkal) összekapcsolt csatlakozója van, mindegyik 20 cm hosszú, és tömegük elhanyagolható. A rúdon az $M = 2$ kg tömegű gallér súrlódásmentesen csúszhat. A szabályozó mechanizmus akkor zárja el az üzemanyagot, amikor a gallér tömegközéppontja a csúcshoz 10 cm-nél közelebb kerül. (a) Mekkora a két test (azonos) m tömege? Mekkora húzóerő ébred a maximális szögsebesség esetén a két felső csatlakozóban? Készítsünk megfelelő vektorábrát.

12C-46 Egy 5 tonna súlyú műbolygó körpályán kering a Föld körül. Kismértékű légellenállás hatása alá kerülve spirálpályán közelít lassan a Földhöz. 805 km-rel a Föld fölött keringési ideje 101,5 perc. Miután a műbolygó spirálpályán a Föld felszínéhez közelítve már csak 644 kilométer magasan kering, keringési ideje 98,1 perc. (a) Mekkora a műbolygó impulzusmomentuma a Föld középpontjára vonatkoztatva a kezdeti és a végső állapotban? Tegyük fel, hogy a Föld sugara 6440 km. (b) Feltéve, hogy a spirál meredeksége annyira kicsi, hogy a pálya minden körülfordulásnál körnek tekinthető, mekkora a kezdeti és a végső állapothoz tartozó sebesség? (Vegyük észre: annak ellenére, hogy a légellenállás a sebességgel ellentétes irányú, a műbolygó sebessége nő!)

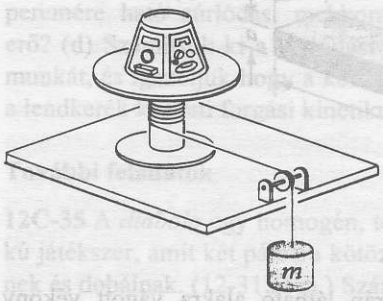
12C-47 Az előbbi példában szereplő műbolygó pályasugarának ismertetett csökkenése 500 nap alatt ment végbe. Becsüljük meg a súrlódási erő nagyságát!

12C-48 A 12-37 ábrán az m tömegű test v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozog. A testhez erősített fonál a test mozgása során egy rögzített hengeralakú pecekre tekeredik, ily módon a test szűkülő spirálpályára kényszerül. Ha v_0 a sebesség akkor, amikor a fonál hossza r_0, mekkora lesz a sebesség, amikor a sugár $r_0/2$-re csökken? Fejtsük ki részletesen a választ! (Útmutatás: a test pillanatnyi sebessége mindig merőleges a fonálra. Megmarad-e a pecek középpontjára vonatkozó impulzusmomentum? Megmarad-e az energia?)



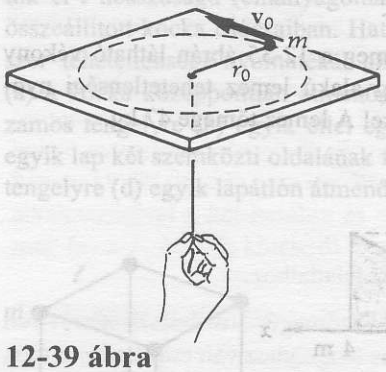
12-37 ábra
A 12C-48 és a 12C-52 feladathoz.

12C-49 Ez a feladat szabálytalan alakú testek (például egy űrhajó hasznos berendezését képező tárgyak) tehetetlenségi nyomatékának meghatározására alkalmas módszert ismertet. (Az űrhajókat ugyanis néha forgásba kell hozni, hogy kameráikkal pásztázhassanak, ezért fontos az űrhajó forgástengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték ismerete.) A 12-38 ábra az I tehetetlenségi nyomaték kísérleti úton való meghatározásának egyik módját mutatja. Forgó tárcsa r sugarú tengelyére csavart, csigán átvetett zsinór végén m tömegű test függ. A vizsgált tárgyat a forgó tárcsára helyezik. Ha az m tömegű testet elengedik, akkor az, egyenletes gyorsulással süllyedve h távolság megtétele után v sebességre tesz szert. Mutassuk meg, hogy a berendezés I tehetetlenségi nyomatéka (a forgótárcsa tehetetlenségi nyomatékát is beleértve) $mr^2(2gh/v^2 - 1)$.



12-38 ábra
A 12C-49 feladathoz.

12C-50 A 12-39 ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 kezdősebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. (A „lassú húzás" itt azt jelenti, hogy a test közelítőleg minden pillanatban egy r sugarú körön mozog, és hogy a fonalat feszítő erő ebben a pillanatban mv^2/r.) Számítsuk ki m, r_0 és v_0 függvényében (a) a test végső sebességét és (b) a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát! (c) Mutassuk meg, hogy a végzett munka a test mozgási energiájának megváltozásával egyenlő! (Útmutatás: megmarad-e a lyukra vonatkoztatott impulzusmomentum? Megmarad-e az energia?)



12-39 ábra
A 12C-50 és a 12C-52 feladathoz.

12C-51 Egy 2 kg tömegű test 5 m sugarú körpályán mozog. A nyugalomból induló testnek a kör középpontjára számított L impulzusmomentuma az idő függvényében az $L = 3t^2$ összefüggés szerint növekszik. (a) Mekkora a kör középpontjára vonatkozó $\mathbf{M}(t)$ forgatónyomaték (b) Határozzuk meg az $\omega(t)$ szögsebesség változását az idő függvényében.

12C-52 A 12-37 ábrán a kezdeti feltételek a következők: az m tömegű test v_0 sebességgel mozog, amikor a fonál hossza r_0. Egy későbbi időpontban a test a spirál-

pálya valamely P pontjába érkezik ahol sebessége v (ez a pont nem szerepel az ábrán),. Most tekintsük a 12-39 ábrát. Tegyük fel, hogy itt a testet *ugyanabból a pontból* és *ugyanazzal a* v_0 *kezdősebességgel* indítjuk, mint az iménti példában szereplő testet. De most ügyesen úgy húzzuk a fonalat, hogy a test ugyanazt a pályát kövesse, amit az első példában. Ha a test ilyen körülmények között éri el a P pontot, vajon ugyanakkora lesz-e a sebessége, mint az első esetben volt? Ha igen, bizonyítsuk be az állításunkat! Ha nem, magyarázzuk meg, miért nem!

12C-53 Egy m tömegű golyóból és l hosszúságú fonálból készített egyszerű ingát a lefelé irányító függőlegessel bezárt θ ($< 90°$) szögű kezdőhelyzetben elengedünk. A forgatónyomaték segítségével számítsuk ki azt a munkát, amit a gravitáció végez amíg az inga golyója a legmélyebb pontját eléri. Mutassuk meg, hogy az eredmény megegyezik a golyó súlyának és a mozgás függőleges vetületének szorzatával.

12C-54 Egy 70 kg tömegű, l hosszúságú homogén anyagú palló vízszintes (súrlódásmentesnek tekintett) jégmező felületén fekszik. Két 40 kg-os gyermek a palló két végén térdel. A pallót tömegközéppontján átmenő függőleges tengely körül 0,9 rad/s szögsebességű forgásba hozzuk. Ezután mindkét gyermek bemászik a palló közepétől számított távolság feléig. (a) Mekkora a rendszer új szögsebessége? Tegyük fel, hogy a mondottal ellentétben csak az egyik gyermek mászik a palló előbb említett pontjáig. (b) Ugyanott van-e a jégen forgó rendszer forgástengelye, ahol az előbb volt? Magyarázzuk meg! (c) A helyben maradt gyermektől mekkora (l-lel kifejezett) távolságra van az új forgástengely? (d) Határozzuk meg a rendszer végső szögsebességét!

12C-55 Egy D hosszúságú vékony rúd egyik vége vízszintes tengellyel a padlóra van erősítve. Szabad végét felemelve a rúd a vízszintessel θ szöget zár be. Ekkor – nyugalmi helyzetből – elengedjük. Határozzuk meg azt a sebességet, amellyel a rúd vége a padlóhoz csapódik! (Útmutatás: használjuk fel az energia megmaradásának az elvét.)

12C-56 *A Velikovsky probéma.* 1950-ben adták ki Velikovsky „Ütköző Világok" című könyvét. Ebben a szerző azt állította, hogy Krisztus előtt 1500 körül a Jupiter bolygó anyagot lökött ki magából, ami üstökös alakban a Földhöz közel haladt el. (Bizonygatta, hogy ez az üstökös később a Vénusz bolygóvá alakult.) Az ezzel járó meteorit záporról feltételezte, hogy a Föld forgását – legalábbis egy kis időre – megállította. Velikovsky azt is állította, hogy később, Krisztus előtt 747-ben, majd 687-ben a Mars hatására a korábbi katasztrófa kisebb mértékben megismétlődött.

Vizsgáljuk meg ezt az elméletet a fizika szempontjából, hogy lássuk, vajon lehetségesek-e az állításai? Durva becsléseket fogunk alkalmazni, minden paraméterre csupán egyetlen jellemző adatot használva. A feladat megoldásához SI egységekben a következő paraméterekre lesz szükségünk:

A Föld tömege 6×10^{24} kg
A Föld sugara: 6×10^{6} m
Szögsebessége: 7×10^{-5} rad/s
} Ezek közelítő értékek.

(a) Homogén tömör gömbnek tekintve a Földet, számítsuk ki SI egységekben impulzusmomentumát! Ez az, aminek az ellen kellett volna hatnia, hogy a Föld forgása leálljon (és mellesleg, amit majd később valahonnan pótolni kellett volna, hogy a Föld újra forogni kezdjen).

(b) A legkedvezőbb esetben a meteoriteknek az egyenlítőre érintőlegesen kellett volna beesniük. Tegyük fel, hogy a meteoritek a Föld pályasíkjával párhuzamosan, de a Föld keringési irányával ellentétesen mozogtak, hogy becsapódáskor a Föld tömegközéppontjához viszonyított sebességük 60 km/s volt (mintegy kétszerese a Föld Nap körüli pályasebességének). Mekkora volt a meteoritek összességének tömege, ha az egyenlítőre tangenciálisan becsapódva megállították a Föld tengely körüli forgását? (Ilyen ütközésekre nincs semmilyen geológiai bizonyíték.)

(c) Mekkora lett volna a meteoritek összes térfogata, ha feltételezzük, hogy olyan kőzet típusú anyagból álltak, aminek sűrűsége lényegében a földkéreg sűrűségével megegyező: 2700 kg/m^3. (A meteoritek mintegy 94 %-a kőzet típusú anyag. Összehasonlításul: a Hold térfogata kb. 22×10^{18} m^3.)

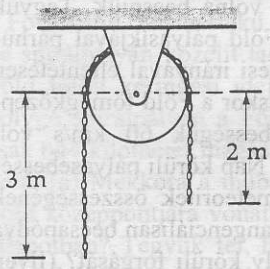
(d) Tegyük fel, hogy a (b) részben mondott becsapódás után a Föld tömegközéppontja folytatta Nap körüli pályáját. Mekkora lett volna az a teljes kinetikus energia, amely a Föld tengely körüli forgásának leállítása és a befogott meteoritek sebességváltozása következtében másfajta energiává alakult?

(e) Hogyan változott volna valójában a Föld tömegközéppontjának mozgása a meteoritekkel való (b) pontban leírt ütközés következtében?

(f) A földi légkör egységnyi felületére egységnyi idő alatt merőlegesen beeső szoláris energia 1370 W/m^2. A (d) pontra adott válasszal való összehasonlíthatóság érdekében számítsuk ki azt az energiát, amit a Föld 24 óra alatt a Naptól kap! Mi lett volna a következménye annak, ha a meteoritek energiája a Föld felszínének arra a viszonylag kis részére koncentrálódott volna, ahová a meteoritek becsapódását feltételezhetnénk?

(g) A naponta növekvő gyűrű alakú korall képződmények ősi kövületei bizonyítják, hogy a Föld forgása a napok hosszának fokozatos és enyhe növekedésétől eltekintve (ezt talán az árapályból eredő súrlódás okozza) már 600 millió éve figyelemreméltóan állandó. Így a Velikovsky elméletnek szembe kell néznie azzal a problémával is, hogy hogyan indult újra a Föld forgása pontosan ugyanazzal a szögsebességgel mint megállás előtt? Egy újabb – meteoritokkal való – szerencsétlen ütközéstől eltekintve vajon a gravitációs erők (amelyek centrálisak) megváltoztathatják-e a Föld forgásállapotát?

(h) Velikovsky kritikusai rámutattak arra, hogy mi történt volna az óceánokkal, a légkörrel, az emberekkel és egyéb, a Föld felszínén lévő laza tárgyakkal, ha a Föld forgása rövid időre leállt volna. Próbáljuk meg körüljárni ezt az ellenvetést azzal a feltételezéssel, hogy a földforgás leállási folyamata elég hosszú ideig (mondjuk, egy vagy két óráig) tartott. Becsüljük meg azt az oldalirányú gyorsulást, ami a földi egyenlítőn fellépett volna, és röviden fejtsük ki, túlélhető lett volna-e egy ilyen esemény, vagy nem!

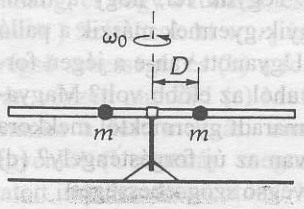


12-40 ábra
A 12C-57 feladathoz.

12C-57 Egy hajlékony lánc tömeg/hosszúság aránya $\lambda = 2$ kg/m. A lánc nyugvó állapotban egy csigán a 12-40 ábrán látható módon helyezkedik el. A csiga henger alakú, homogén, tömör, tömege 10 kg, sugara 20 cm. A rendszert nyugalmi helyzetéből elengedjük. Számítsuk ki az energia megmaradásának elvét felhasználva a lánc alsó pontjának sebességét 1 m süllyedés után, ha a lánc a csiga forgása során nem csúszik meg.

12C-58 Képzeljük el, hogy egymillió, egyenként 1000 kg tömegű versenykocsi a 45°-ik szélességi körön nyugati irányban hajt. A kocsik úgy mozognak, hogy róluk a Nap az égboltnak mindig ugyanazon fix pontján látható. (Ehhez kb. 1150 km/óra sebesség lenne szükséges.) A nyugalomból történő indulás és a szükséges gyorsulás következtében a Föld szögsebessége ω_0-ról ω -ra változik. (a) Ha a kocsik 24 órán át folytatnák mozgásukat, mekkora lenne a megváltozott nap hossza? Rövidülne, vagy hosszabbodna? Adjuk meg a választ relatív változásként: $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0$. (b) Az atomórák pontossága 1 a 10^{11}-hez. Ki tudná-e mutatni az atomóra ezt a változást?

12C-59 Ahogyan a 12-41 ábra mutatja, két kisméretű egyenlő tömegű test elhanyagolható tömegű vízszintes rúdon szabadon, súrlódásmentesen csúszhat. Kezdetben a testek a középpontja körül ω_0 szögsebességgel szabadon forgó rúd forgástengelyére szimmetrikus D távolságban rögzítve vannak. Ezután a testek rögzítése kioldódik, s ezt követően azok a rúdon kifelé csúszva csökkentik a rúd szögsebességét. Számítsuk ki a testek rúd menti v sebességét abban a pillanatban, amikor a rúd középpontjától $2D$ távolságra vannak! Fejezzük ki az eredményt D és ω_0 függvényében! (Útmutatás: tekintsük külön a mozgás radiális komponensétől és külön a forgástól származó energiát.)



12-41 ábra
A 12C-59 feladathoz.

10A-15 a) 200 N b) 173 N jobbra, 100 N felfelé
10A-17 0,94 m
10A-19 A válasz adott.
10B-21 A válasz adott.
10B-23 $\theta = \text{arctg}\,(f/m_s)$
10B-25 a) 1011 N b) 854 N, 14,2° a vízszintes felett
10B-27 a) 214 N b) 369 N, 54,5° a vízszintes felett
10B-29 $b(1+\sqrt{3})$
10B-31 515 N
10B-33 a) 1386 N b) 1297 N, 67,7° a vízszinteshez
10B-35 A válasz adott.
10B-37 $\theta = \text{arctg}\,\mu_k)$
10B-39 a) $N_A = N_B = 60$ N b) 16,4 N
10C-41 15,9°
10C-43 2230 N
10C-45 A válasz adott.
10C-47 A válasz adott.
10C-49 a) 17,6 N b) 42,9 N
c) 13,3 N, 41,0° a függőlegestől
10C-51 A válasz adott.
10C-53 A válasz adott.
10C-55 $(0{,}3a / 4)$
10C-57 A válasz adott.
10C-59 $1{,}04T$

XI. Fejezet

11A-1 a) $3{,}14 \times 10^{-4}$ m/s b) $1{,}75 \times 10^{-3}$ rad/s
11A-3 kismutató $\frac{1}{45} \times 10^{-4}$ rad/s; asztronauta $1{,}05 \times 10^{-3}$ rad/s; nagymutató $1{,}75 \times 10^{-3}$ rad/s; köszörűkő 628 rad/s
11A-5 a) 17,4 s b) 4,85 rev
11B-7 13,5 s
11B-9 A válasz adott.
11A-11 43,4 rad/s
11B-13 $\frac{v}{\pi D}\sqrt{\frac{2h}{g}}$
11C-15 $\delta = (R-r)\theta / r$

XII. Fejezet

12A-1 a) $2m\ell^2$ b) $m\ell^2$ c) $2m\ell^2$ d) $m\ell^2$
12B-3 A válasz adott.
12B-5 A válasz adott.
12A-7 3,16 cm
12A-9 $8{,}50 \times 10^{-32}$ kg·m²/s
12A-11 a) 0,320 kg·m² b) 0,960 kg·m²/s c) 4,80 N
12B-13 32,9 N·m $-\hat{z}$ irányban
12A-15 0,480 N
12B-17 a) 24,0 N·m b) $3{,}56 \times 10^{-2}$ rad/s²
c) 1,07 m/s²
12B-19 a) $T_1 = 24{,}2$ N, $T_2 = 30{,}0$ N b) 4,30 m/s
12B-21 a) $\sqrt{g/R}$ b) $\frac{Mk^2}{4F}\sqrt{\frac{g}{R^3}}$
12B-23 a) 6,25 rad/s² b) 50 rad
12B-25 0,103 rad/s
12B-27 0,526 rad/s
12A-29 $L^2/2mR^2$
12B-31 2,87 rad/s²
12B-33 a) 67500 kJ b) 24 m
12C-35 $\frac{3}{5}Ma^2$
12C-37 c) $2Ml^2/3$
12C-39 376 kg·m²
12C-41 a) m/M b) $\frac{1}{2}\left[mM/(m+M)\right]D^2\omega^2$
12C-43 A válasz adott.
12C-45 a) 0,506 kg b) 60,4 N
12C-47 $1{,}97 \times 10^{-3}$ N
12C-49 A válasz adott.
12C-51 a) 6t Newton méterben, ha t másodpercben adott
b) $0{,}060t^2$ radiánban ha t másodpercben adott
12C-53 A válasz adott.
12C-55 $\sqrt{3gD\sin\theta}$
12C-57 2,20 m/s
12C-59 $D\omega_o\sqrt{\frac{3}{2}}$

XIII. Fejezet

13A-1 a) 4,00 J b) 2,00 J c) 6,00 J
13A-3 5,96 m/s
13B-5 $\theta = \text{arctg}\,(7\mu_s/2)$
13B-7 A válasz adott.
13B-9 A válasz adott.
13B-11 a) 66,7 rad/s b) 8,84 rad/s
13A-13 $M\ell^2/3$
13B-15 $g\sin\theta/(1+k_o^2/R^2)$
13B-17 35,3°
13B-19 a) 7,48 m/s b) 55,0°
13B-21 a) 0,741 rad/s b) az óramutató járásával azonos irányban
13C-23 $[11(R-r)]/4$
13C-25 $h = \frac{7}{5}R$
13C-27 $a = F/(M + m/3)$
13C-29 b) $\frac{4T}{11}$
13C-31 arc sin (r/R)
13C-33 A válasz adott.
13C-35 $\frac{2}{3}\ell$
13C-37 a) $5v_o/7$ b) $12mv_o^2/49f$
13C-39 a) $2Mg/3$, lefelé b) $R/2$ a TKP-től
13C-41 A válasz adott.
13C-43 a) $v_o/3$ b) 0,500
13C-45 a) $F_1 = 197$ N, $F_2 = 131$ N
13C-47 jobbra

A FORGÓ MOZGÁS DINAMIKÁJA II (FORGÁS MOZGÓ TENGELY KÖRÜL)

„A gyorsan forgó pörgettyű olyan, mint az öszvér: egyik sem arra indul, amerre taszítják."

13.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a merev test *rögzített* tengely körüli forgását tárgyaltuk. Most kiterjesztjük vizsgálatainkat arra a sokkal általánosabb esetre, amikor a test egyidejűleg forgó és haladó mozgást is végez – ilyen például a lejtőn legördülő labda, vagy egy olyan tárgy, amelyet úgy hajítunk fel, hogy a mozgása közben egyik feléről a másikra fordul. (13-1c ábra.) Ezek az összetett mozgások egyszerűen leírhatók, a tömegközéppont haladó mozgásának és a tömegközéppont körüli forgásnak az eredőjeként. A feladatok megoldásánál ezt a kétféle mozgástípust mindig külön-külön vizsgáljuk.

Az egyszerűség kedvéért általában nagyfokú szimmetriával rendelkező testek (gömbök, hengerek, karikák) mozgását vizsgáljuk, amelyek úgy mozognak a térben, hogy *mozgó tengelyük mindig párhuzamos marad.*

13. 2 Testek általános mozgása

A továbbiakban a test fogalmát általánosabb értelemben használjuk, így pl. testnek tekintünk egy tömegközéppontrendszert vagy egyetlen merev testet vagy azok egy rendszerét.

A 9. fejezet (9-14) egyenletében levezettük Newton második törvényét egy tömegpontrendszerre :

Az M *tömegű test tömegközéppontjának (TKP) haladó mozgása olyan, mintha egyetlen* M *tömegű pont mozogna a külső eredő erő hatására.*

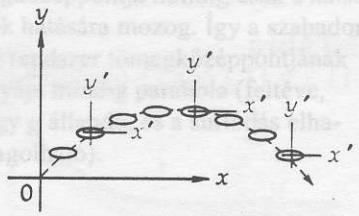
Newton második törvénye a tömegközéppont haladó mozgására

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{TKP} \qquad (13\text{-}1)$$

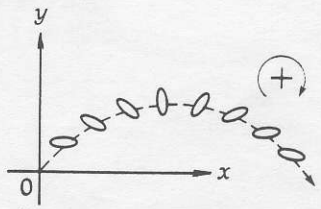
Meghatároztuk a külső forgatónyomatékok erőjének a hatását is (12-16) egyenlet szerint.



(a) A tömegközéppont körüli egyszerű forgás.



(b) Egyszerű haladó mozgás.



(c) Összetett haladó és forgó mozgás.

13-1 ábra.
Merev test néhány lehetséges mozgása kétdimenzióban.

Valamely test rögzített ★tengelyre vonatkozó impulzusmomentumának változási sebessége egyenlő az erre a tengelyre vonatkozó külső forgatónyomatékok eredőjével.

$$\sum \mathbf{M}_{ext} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha \,, \qquad \textbf{(13-2)}$$

ahol mind **M**, mind I a rögzített ★ tengelyre vonatkozik. A következőkben pedig minden bizonyítás nélkül kimondjuk az alábbi fontos tételt:

Egy test tömegközéppontra vett impulzusmomentumának változási sebessége egyenlő a tömegközéppontra vett külső forgatónyomatékok eredőjével még akkor is, ha a test tömegközéppontja – a gyorsulást is beleértve – elmozdul.

Az impulzusmomentum-tétel a tömegközéppont körüli forgásra

$$\sum_{(\text{TKP körül})} \mathbf{M}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{dt} \qquad \textbf{(13-3)}$$

Amennyiben a test síkmozgást végez (ekkor a test minden egyes pontja a mozgás során egy síkban marad) és a tömegközépponton átmenő forgástengely szimmetriatengely, akkor a (13-3) egyenlet a

$$\sum_{(\text{TKPkörül})} \mathbf{M} = I\alpha_{TKP}$$

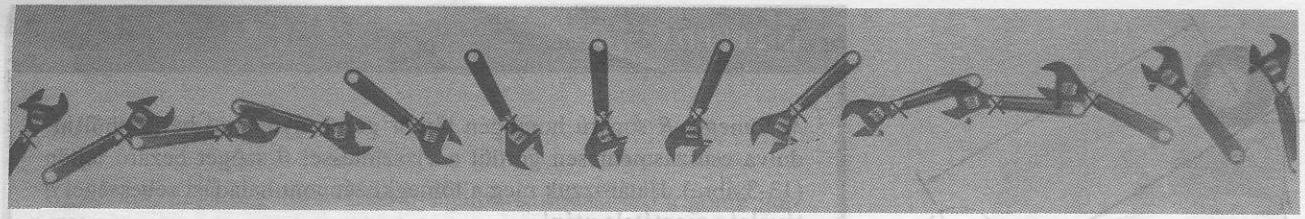
alakra egyszerűsödik, ahol **M** és I a tömegközéppontra vonatkozik[1] és I a szimmetria miatt állandó. Ekkor L és ω párhuzamosak, azaz $\mathbf{L} = I\omega$

A (13-1) és a (13-2) egyenlet érvényes bármely testre vagy bármely részecskékből álló zárt rendszerre. Levezetésüknél a testek *merevsége* nem volt lényeges követelmény. Ezért a belőlük levonható következtetések a nemmerev testekre is, érvényesek így alkalmazhatók csillagok gömbszerű halmazára, vagy egy a levegőben tekeregve eső macskára, amelyik mindenképpen a talpára szeretne esni. Például a kilőtt srapnell felrobbanása nem változtatja meg a tömegközéppont mozgását; a repeszek egészének tömegközéppontja, változatlanul parabola pályán mozog bár a repeszek különféle pályákon érnek földet,. Minthogy a srapnell repeszeit szétrobbantó erők teljes egészben *belső* erők, azért a rendszerre ható egyetlen külső erő a gravitáció. Ennélfogva $F_{ext} = Ma_{TKP}$, a tömegközéppont ugyanazt a hajítási pályát követi, függetlenül attól, hogy volt-e robbanás, vagy sem. Hasonlóképpen, ha egy műugró egyszer már elhagyta az ugródeszkát, tömegközéppontjának mozgását már nem tudja megváltoztatni, tekintet nélkül arra, hogyan mozgatja kezét, lábát (13-2c ábra).

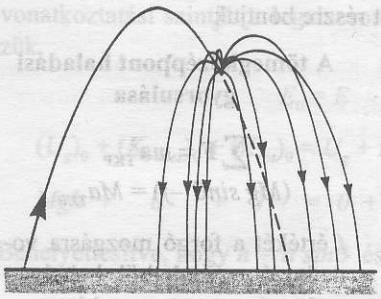
13.3 Felületen való gördülés

Gyakori jelenség, hogy egy test egy felületen gördül. A csúszásmentes gördülés esetében a tömegközéppont haladó mozgása (x, v és a kinematikai jellemzőkkel) szoros kapcsolatban van a tömegközéppont körüli (θ, ω és α mennyiségekkel kifejezett) forgó mozgással. Erre az esetre felírható, hogy $x = r\theta$, $v = r\omega$ és $a = r\alpha$. A teljes K kinetikus energia a tömegközéppont

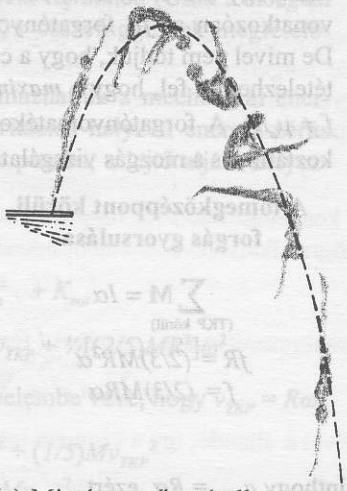
[1] A 13.4 pontban tárgyaltak szerint van néhány olyan eset, amikor a forgatónyomaték számítására nem csak a tömegközéppont, hanem más pont is használható még akkor is, ha a tömegközéppont gyorsul. Azonban addig, amíg nem ismerjük azokat a megszorításokat amelyek mellett más pont is használható, a legbiztosabb a tömegközéppontra vonatkoztatni akkor is ha a tömegközéppont gyorsul.



(a) Vízszintes súrlódásmentes felületen csúszó csavarkulcsról készült felvétel. Minthogy a csavarkulcsra ható erők eredője zérus, azért tömegközéppontja (kereszttel jelölve) a csavarkulcs forgása közben egyenesvonalú pályán állandó sebességgel halad.



(b) Ha egy lövedék repülés közben felrobban, a széthulló repeszek tömegközéppontjának parabolapályája ugyanaz, mint ami robbanás nélkül lett volna.



(c) Miután a műugró elhagyta az ugródeszkát, tömegközéppontjának parabola pályáját már nem tudja megváltoztatni.



(d) Lehetséges, hogy a lécet átugró atléta tömegközéppontja a léc alatt megy át? A fénykép a bolgár Stefka Konstadinovát mutatja, amint saját magasugró rekordját javítja 1987-ben a Római Atlétikai Világbajnokságon.

13-2 ábra.
Belső erők nem tudják megváltoztatni a pontrendszer tömegközéppontjának mozgását. A pontrendszer tömegközéppontja mindig csak a *külső* erők hatására mozog. Így a szabadon eső rendszer tömegközéppontjának pályája mindig parabola (feltéve, hogy g állandó, és a súrlódás elhanyagolható).

körüli forgás K_{rot} kinetikus energiájának és a tömegközéppont haladó mozgása K_{trans} kinetikus energiájának az összege. [Lásd a (9-22) és a (9-23) egyenleteket.]

Kinetikus energia
(csúszásmentes gördülés) $$K = K_{rot} + K_{transz} = \frac{1}{2} I_{TKP}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \quad \textbf{(13-4)}$$

Ezeknek a fogalmaknak az alkalmazását a következő példák illusztrálják.

13-1 PÉLDA

Homogén tömör gömb állandó sebességgel csúszásmentesen gördül vízszintes felületen. Teljes kinetikus energiájának mekkora hányada a tömegközéppont körüli forgásának energiája?

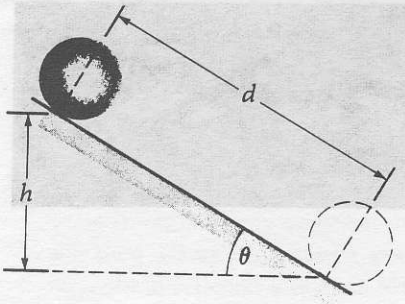
MEGOLDÁS

A keresett energiahányad

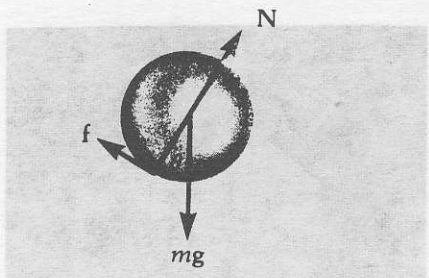
$$\frac{K_{rot}}{K_{összes}} = \frac{K_{rot}}{K_{trans} + K_{rot}} = \frac{(1/2)I\omega^2}{(1/2)Mv_{TKP}^2 + (1/2)I\omega^2} = \frac{½[(2/5)MR^2]\omega^2}{½Mv_{TKP}^2 + ½[(2/5)MR^2]\omega^2}$$

Minthogy a gömb csúszásmentesen gördül, $v_{TKP} = R\omega$:

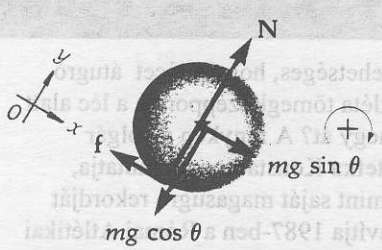
$$\frac{K_{rot}}{K_{össz}} = \frac{(2/5)v_{TKP}^2}{v_{TKP}^2 + (2/5)v_{TKP}^2} = \frac{2}{7}.$$



(a)



(b) A vektorábra



(c) Egymásra merőleges komponensekre bontott erők diagramja. Minthogy a tömegközéppont a lejtőn lefelé gyorsul, ezt az irányt választjuk pozitívnak és (mert $a = R\alpha$), az óramutató járásával egyező forgási irányt pozitívnak.

13-3 ábra.
A 13-2, a 13-3 és a 13-6 példához.

13-2 PÉLDA

M tömegű, *R* sugarú homogén tömör gömb nyugalmi helyzetből indulva csúszásmentesen gördül a vízszintessel θ szöget bezáró lejtőn (13-3 ábra). Határozzuk meg a tömegközéppont haladási sebességét *d* távolság megtétele után!

MEGOLDÁS

Minthogy nincs csúszás, ezért a súrlódás, (ami a tömegközéppontra vonatkozóan az *fR* forgatónyomatékot adja) *nyugalmi* súrlódási erő. De mivel nem tudjuk, hogy a csúszás határán van-e a gömb, ezért nem tételezhetjük fel, hogy a *maximális* nyugalmi súrlódás működik (azaz $f \neq \mu_s N$). A forgatónyomatékokat a tömegközéppontra fogjuk vonatkoztatni, és a mozgás vizsgálatát két részre bontjuk

A tömegközéppont körüli forgás gyorsulása

$$\sum_{(\text{TKP körül})} \mathbf{M} = I\alpha$$

$$fR = (2/3)MR^2\alpha$$

$$f = (2/3)MR\alpha$$

Minthogy $a_{TKP} = R\alpha$, ezért

$$f = (2/5)Ma_{TKP}$$

A tömegközéppont haladási gyorsulása

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\text{TKP}}$$

$$(Mg\sin\theta - f) = Ma_{TKP}$$

f értékét a forgó mozgásra vonatkozó egyenletből behelyettesítve és a_{TKP}-ra megoldva:

$$\left(Mg\sin\theta - \frac{2Ma_{TKP}}{5}\right) = Ma_{TKP}$$

$$(5/7)(g\sin\theta) = a_{TKP}$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk azt a pillanatnyi sebességet, amellyel a tömegközéppont a gömb *d* távolsággal való elmozdulása után halad, figyelembe kell venni, hogy a tömegközéppont a_{TKP} gyorsulása állandó. Ezért a haladó mozgásra vonatkozó kinematikai egyenletet kell alkalmazunk:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = (0)^2 + 2[(5/7)\, g\sin\theta)(d - 0)$$

$$v = \sqrt{\frac{10gd\sin\theta}{7}}.$$

A fenti példa a gördülő testek vizsgálatával kapcsolatosan fontos szempontot illusztrál. Ha a test *csúszásmentesen gördül*, akkor a test tömegközéppontjának v_{TKP} haladási sebessége és a test ω szögsebessége között fennáll a $v_{TKP} = R\omega$ összefüggés. Hasonlóképpen érvényes, hogy $a_{TKP} = R\alpha$.

Egyenleteinkben az *x* tengely pozitív irányát és a pozitív forgásirányt úgy választjuk meg, hogy *a tömegközéppont pozitív irányú elmozdulása a tömegközéppont körüli forgás pozitív irányának feleljen meg.*

13-3 PÉLDA

Itt az előző példának egy másik megoldási módszerét mutatjuk be. Vegyük észre, hogy miután a gömb a lejtőn *d* távolsággal legördült, a tömegközéppont $h = d\sin\theta$ függőleges távolságnyira lejjebb került. Az energiamegmaradás törvényének alkalmazásával meghatározható

a h függőleges távolsággal lesüllyedt gömb tömegközéppontjának sebessége.

MEGOLDÁS

Úgy tűnik, hogy a gömbre ható nyugalmi súrlódási erő a gömb gördülése során elmozdul, amiből (tévesen) arra következtethetnénk, hogy ez az erő valamilyen munkát végez, vagy hőt termel. Ez nem igaz; a gördülési folyamatban a nyugalmi súrlódási erő csupán átkerül a gördülő test egyik érintkezési pontjáról a másikra. Továbbá, ha egy test csúszásmentesen gördül, akkor hő sem fejlődhet. (Csak a *mozgási* súrlódási erő hatására jön létre hő az $f_k \cdot x$ összefüggésnek megfelelően.)

A rendszer konzervatív, ezért alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét, A gravitációs helyzeti energia zérus vonatkoztatási szintjét a legalacsonyabb pontba, a lejtő aljára helyezzük.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + (K_{transz})_0 + (K_{rot})_0 = U_g + K_{transz} + K_{rot}$$

$$Mgh + 0 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}Mv_{TKP} + \tfrac{1}{2}[(2/5)MR^2]\omega^2$$

Behelyettesítve, hogy $h = d\sin\theta$ és figyelembe véve, hogy $v_{TKP} = R\omega$,

$$Mgd\sin\theta = (1/2)Mv_{TKP}^2 + (1/5)Mv_{TKP}^2$$

$$gd\sin\theta = (7/10)Mv_{TKP}^2$$

$$v_{TKP} = \sqrt{\frac{10gd\sin\theta}{7}}.$$

Amint a fenti példa mutatja, az energiamegmaradás elvének alkalmazása gyakran a rövidebb módszer. Sőt, bizonyos esetekben, az energiamegmaradási elv alkalmazása az egyetlen lehetséges módszer, mert pl. a következő példában a_{TKP} és α *iránya* folytonosan változik, és a kinematikai egyenletek nem alkalmazhatók.

13-4 PÉLDA

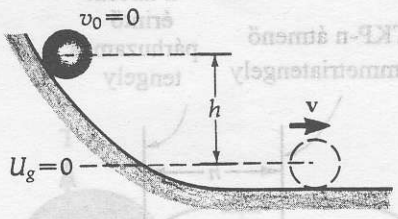
M tömegű, R sugarú tömör gömb nyugalmi helyzetből indulva csúszásmentesen legördül egy görbült pályán (13-4 ábra). Határozzuk meg a tömegközéppont sebességét, miután a gömb függőlegesen h távolsággal lejjebb került.

MEGOLDÁS

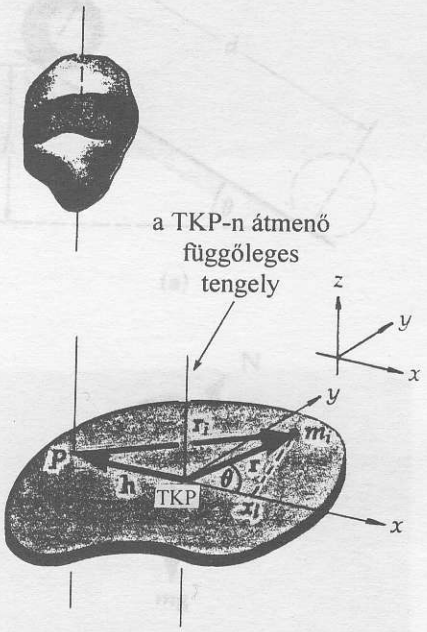
A feladat megoldására a kinematikai egyenletek nem alkalmazhatók, mert a gömb mozgása során a tömegközéppont gyorsulása nem állandó, (lejtőn a gyorsulás állandó lenne). Az egyetlen lehetséges megoldási módszer az energiamegmaradási tétel alkalmazása:

$$E_0 = E$$

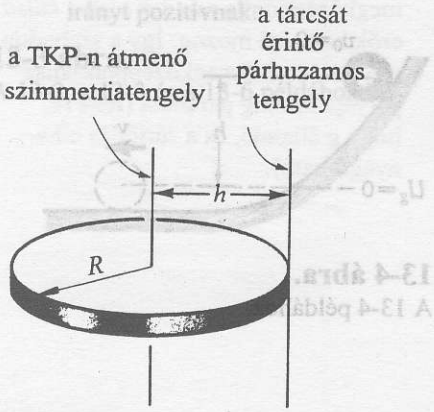
A mozgás végső szakasza gördülés *vízszintes pályán*.



13-4 ábra.
A 13-4 példához.



13-5 ábra.
Látható egy vékony vízszintes szelet. Ha ismerjük a szelet síkjára merőleges, a szelet tömegközép-pontján (itt az *xy* tengelyek origóján) átmenő forgástengelyre vonatkozó I_{TKP} tehetetlenségi nyomatékot, akkor a Steiner tétellel bármely más *P* ponton átmenő párhuzamos tengelyre is megkaphatjuk a tehetetlenségi nyomatékot.



13-6 ábra.
A 13-5 példához.

13.4 A párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel)

A $\sum \mathbf{M} = I\alpha$ összefüggés alkalmazásához mindeddig olyan tengelyt használtunk, ami átmegy a tömegközépponton. De más tengelyt is használhatunk, feltéve, hogy ez rögzítve van, vagy úgy mozog, hogy megtartja irányát a térben (azaz *önmagával párhuzamosan* mozog). A tehetetlenségi nyomaték számítását az olyan tengelyekre, amelyek nem mennek át a tömegközépponton, nagy mértékben megkönnyíti a *Steiner tétel* vagy a *párhuzamos tengelyek tétele néven* ismert tétel.

Tekintsünk egy tetszőleges alakú testet, amelynek a tömegközéppontján átmenő tengelyére ismerjük az I_{TKP} tehetetlenségi nyomatékot. Képzeljük el a tengelyre merőlegesen a testből kivágott vékony lemezt. (13-5 ábra) Tegyük fel, hogy a *P* ponton átmenő, *és az eredeti tengellyel párhuzamos* tengelyre akarjuk a tehetetlenségi nyomatékot meghatározni. Ha a test egyik tömegpontját m_i-vel jelöljük, akkor a lemez *P* pontra vett *I* tehetetlenségi nyomatéka

$$I = \sum m_i r_i^2$$

A koszinusz tételt (D függelék) az r, r_i és a h szakaszokból alkotott háromszögre alkalmazva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$r_i^2 = r^2 + h^2 + 2rh\cos\theta$$

Behelyettesítve ezt az értéket *I* fenti kifejezésébe:

$$I = \sum m_i r^2 + \sum m_i h^2 + \sum m_i \left(2rh\cos\theta\right)$$

Mivel h állandó, így a szumma jel elé kiemelhető:

$$I = \sum m_i r^2 + h^2 \sum m_i + 2h \sum m_i r\cos\theta$$

Az első tag éppen a tömegközéppontra vonatkoztatott I_{TKP} tehetetlenségi nyomaték, a második tag Mh^2, ahol *M* a test egész tömege. A harmadik tag zérussal egyenlő, mert $r\cos\theta = x_i$ nem más, mint az r szakasznak az x tengelyre eső vetülete, és a tömegközéppont definíciójából (9.4 fejezet) az egész rétegre $\sum m_i x_i = 0$. Az eljárást a testet alkotó összes rétegre kiterjesztve megkapjuk a párhuzamos tengelyek tételét:[2]

Steiner tétel $$I = I_{TKP} + Mh^2 \qquad \textbf{(13-5)}$$

Az összefüggést könnyen megjegyezhetjük, ha a mozgást úgy tekintjük, mint *a test tömegközéppont körüli forgásának és a tömegközéppont új tengelye körüli körön végzett transzlációjának eredőjét.* A második tag abból adódik, hogy a testet a tömegközéppontjába koncentrált, az új tengely körüli h sugarú körön mozgó tömegpontnak tekintjük.

13-5 PÉLDA

Határozzuk meg az *M* tömegű, *R* sugarú homogén tömör tárcsa tehetetlenségi nyomatékát a síkjára merőleges, egy kerületi ponton átmenő tengelyre vonatkozóan. (13-6 ábra).

MEGOLDÁS

A tömegközépponton átmenő, a tárcsa síkjára merőleges tengelyre a tehetetlenségi nyomaték $\frac{1}{2}MR^2$. A Steiner tétel alkalmazásával

$$I = I_{TKP} + Mh^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

[2] Egy ezzel kapcsolatos összefüggés *poláris-axiális tételként* ismeretes. (Megfogalmazva a 13C-33 feladatban.)

13-6 PÉLDA

Tekintsünk ismét egy lejtőn csúszás nélkül legördülő homogén tömör gömböt (13-2 és 13-3 példa). A Steiner tétel felhasználásával határozzuk meg a gömb tömegközéppontjának gyorsulását. (Lásd a 13-7 ábrát.)

MEGOLDÁS

A Steiner tételt alkalmazzuk a *pillanatnyi forgástengelyre*, vagyis a gömb és a felület P érintkezési pontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték kiszámítására. Ezután Newton $\sum \mathbf{M}_{(\text{TKP körül})} = I\alpha_{TKP}$ törvényét használjuk fel a gyorsulás kiszámítására. A P pontra vett I_P tehetetlenségi nyomaték:

$$I_P = I_{TKP} + Mh^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

Az Mg erő az egyetlen, ami a P pontra forgatónyomatékot gyakorol, az erőkar $R\sin\theta$. A P pont körüli forgó mozgásra érvényes második Newton törvénnyel a következőt kapjuk:

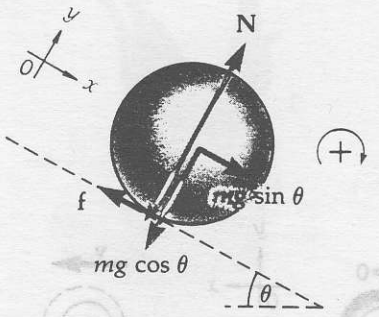
$$\sum_{(\text{P körül})} \mathbf{M} = I_P\alpha$$

$$Mg(R\sin\theta) = \frac{7}{5}MR^2\alpha$$

$$\frac{5}{7}g\sin\theta = R\alpha.$$

Mivel $a_{TKP} = R\alpha$, ezért $a_{TKP} = \frac{5}{7}g\sin\theta$.

Ez ugyanaz az eredmény, amit már előzőleg megkaptunk. A módszer előnye itt abban jelentkezik, hogy α meghatározására a haladó és a forgó mozgásokra érvényes egyenletek egyidejű megoldása helyett elegendő csupán a forgási egyenlettel dolgozni.



13-7 ábra.
A 13-6 példához. Az a P pont, amelyikre a forgatónyomatékot számítjuk, a gömb és a lejtősík érintkezési pontja.

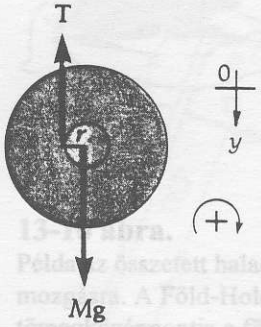
13-7 PÉLDA

A jojó nevű játékszer fonalát rögzítve a jojó függőlegesen legördül. Tömege M, inerciasugara k, tengelyének sugara r. Newton második törvényéből kiindulva határozzuk meg a jojó tömegközéppontjának a_{TKP} gyorsulását!

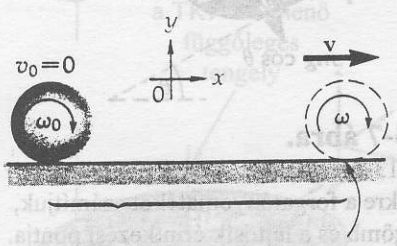
MEGOLDÁS

A 13-8 ábrán a mozgó jojóra ható erők vázlata látható. A tömegközéppontra számított forgatónyomatékokat felírva (figyelembe véve, hogy $a_{TKP} = r\alpha$), a következőket kapjuk:

A tömegközéppont haladó mozgása	**A tömegközéppont körüli forgó mozgás**
$\sum F_y = ma_y$	$\sum \mathbf{M}_{(\text{TKP körül})} = I\alpha$
(*) $Mg - T = Ma_{TKP}$	$Tr = Mk^2\left(\frac{a_{TKP}}{r}\right)$
$Mg - M\frac{k^2}{r^2}a_{TKP} = Ma_{TKP}$	$T = M\frac{k^2}{r^2}a_{TKP}.$
$a_{TKP} = \frac{g}{\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)}$	Helyettesítsük ezt az eredményt a bal oldali (*) kifejezésbe!



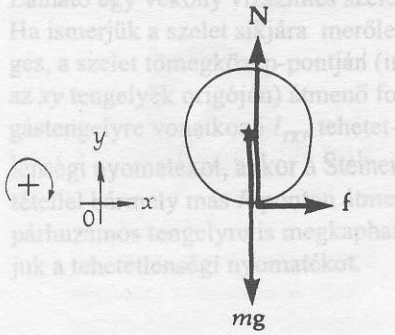
13-8 ábra.
A 13-7 példához.



Csúszva gördülő mozgás d távolságon ($s \neq R\theta$ és $v \neq R\omega$)

Ettől a ponttól kezdve a korong csúszás nélkül gördül ($v = R\omega$)

(a)



(b)

13-9 ábra.
A 13-8 példához.

Csúszva gördülés

A következő példákban olyan jelenségeket tárgyalunk, amelyeknél csúszás lép fel a gördülő test és a pálya felülete között. Emlékezzünk: ha csúszás is fellép, akkor $x \neq r\theta$, $v \neq r\omega$ és $a \neq r\alpha$. *Minthogy a tömegközéppont gyorsul, ezért a forgatónyomatékokat feltétlenül a tömegközéppontra vonatkozóan kell számítani (lásd a 13-3 egyenletet).*

13-8 PÉLDA

M tömegű *R* sugarú homogén tömör gömböt tengelye körül vízszintesen megforgatunk, majd vízszintes felületre helyezve elengedünk. (13-9 ábra) Az elengedés pillanatában a gömb tömegközéppontja nyugalomban van. A pörgés következtében a gömb haladni kezd a felületen, tömegközéppontjának haladási sebessége felnövekszik, miközben (tömegközéppont körüli) szögsebessége fokozatosan csökken. Attól kezdve, hogy $v_{TKP} = R\omega$, a gömb állandó sebességgel, csúszás nélkül gördül. A gömb és a felület között a csúszási súrlódási együttható μ_k. Tekintsük azt az állapotot, amikor a gömb csúszva gördül, miközben tömegközéppontja is gyorsul! Határozzuk meg (a) a tömegközéppont a_{TKP} gyorsulását és (b) a gömb tömegközéppont körüli α szöggyorsulását.

MEGOLDÁS

(a) A 13-9b ábra a gömb vektorábráját mutatja. (Meg kell értenünk, miért mutat a felület által a gömbre ható súrlódási erő jobbra.) A jobbra mutató irányt ill. óramutató járásával megegyező irányt választjuk pozitívnak. Minthogy csúszás lép fel, a csúszó súrlódási erő $f = \mu_k N$. Ez az erő a tömegközéppont gyorsulását okozó vízszintes eredő erő, továbbá ez hozza létre azt a tömegközéppontra ható (negatív) forgatónyomatékot, ami a szögsebességet lassítja. A haladó és a forgó mozgás között most is van kapcsolat, de a csúszás miatt $s \neq R\theta$, $v \neq R\omega$ és $a \neq R\alpha$. Mivel függőleges irányú gyorsulás nincs, azért a függőleges erők összege zérus:

$$\sum F_y = 0$$

$$(N - Mg) = 0$$

$$N = Mg$$

A vízszintes irányú erőkre $\sum F_x = ma_x$

Minthogy az egyetlen vízszintes erő $f = \mu_k N$, behelyettesítés után

$$\mu_k N = Ma_{TKP}$$

adódik; figyelembe véve a fenti $N = Mg$ összefüggést:

$$\mu_k Mg = Ma_{TKP}$$

innen

$$a_{TKP} = \mu_k g.$$

(b) Mivel a pozitív forgásirányt az óramutató járásával megegyezőnek választottuk, a súrlódási erő forgatónyomatéka a tömegközéppontra vonatkozóan negatív, így az α szöggyorsulás is negatív. *Minthogy a tömegközéppont gyorsul, a forgatónyomatékokat a tömegközéppontra vonatkozóan kell felvennünk. A forgó mozgás alaptörvényéből azt* kapjuk, hogy

$$\sum_{(\text{TKP-ra})} \mathbf{M} = I\alpha \qquad (I \text{ is a TKP-ra})$$

$$-(fR) = [\left(\frac{2}{5}\right)(MR^2)\alpha]$$

$$\alpha = -\frac{\mu_k Mg}{(2/5)MR} = -\frac{5\mu_k g}{2R}.$$

13-9 PÉLDA

Egy gépkocsit vezetője gyorsan akarja megállítani és úgy lép a fékre, hogy az egyik kerék a megállásig részben csúszik, részben forog. Ha az R sugarú kerék az úton D távolságnyira csúszva θ szöggel fordul el ($D>R\theta$), mennyi hőt termel az f_k csúszó súrlódási erő?

MEGOLDÁS

Mivel a kerék forgás közben csúszik is, két különböző hatás lép fel egyidejűleg. A mozgás forgási összetevője miatt a súrlódási erő csak áthelyeződik egyik érintkezési pontról a másikra anélkül, hogy az erő munkát végezne, vagy hőt termelne. (Ez hasonlít a csúszásmentes gördüléshez.) A mozgás csúszási összetevője azonban hőt fejleszt. Ennek mennyisége az úttest és a kerékfelület közötti csúszási távolságtól függ. Ez a csúszási távolság a teljes D haladási távolság és a forgásból származó $R\theta$ távolság különbsége. Ezért a fejlődő hő

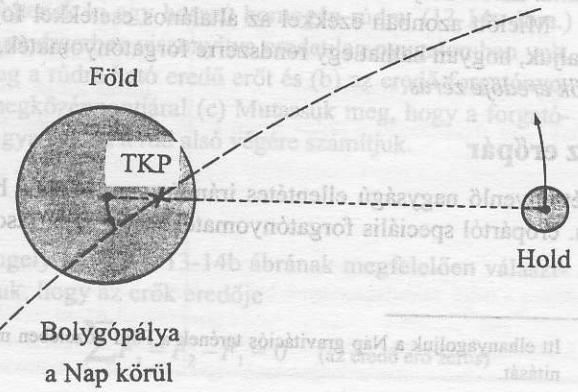
$$E_{hő} = f_k(D - R\theta).$$

13.5 Térbeli általános mozgás

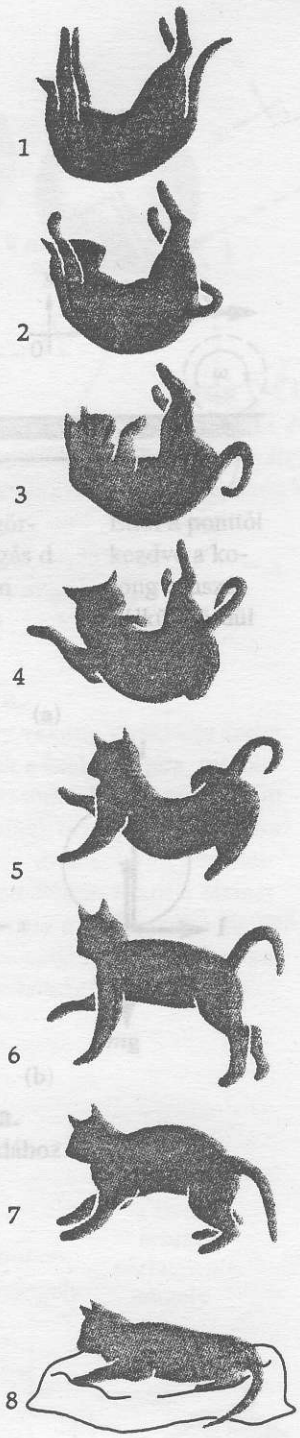
Minden, külső erők hatása alatt álló test a Newton második törvénye által megszabott módon viselkedik:

A tömegközéppont haladó mozgása	A tömegközéppont körüli forgó mozgás
$\sum \mathbf{F}_{\text{külső}} = M\mathbf{a}_{\text{TKP}}$	$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = I_{TKP}\alpha.$

Erre az általános mozgástípusra a Föld-Hold rendszer (13-10 ábra) szolgáltat példát. A Nap által a rendszerre kifejtett teljes gravitációs erőt úgy tekinthet-



13-10 ábra.
Példa az összetett haladó és forgó mozgásra. A Föld-Hold rendszer tömegközéppontja a földfelszín alatt van kb. 1700 km mélyen. A Föld-Hold rendszernek e tömegközéppont körüli forgása során maga a tömegközéppont Nap körüli pályán mozog.

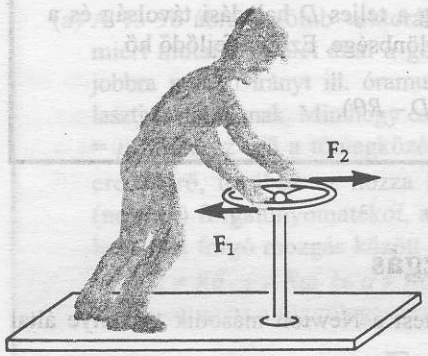


(b) A fordulást általában a test elülső része kezdi, így a macska, ha az esési magasság kicsi, legalábbis a mellső lábaira esik. A mellső lábak a has alá húzódnak, csökkentve a tehetetlenségi nyomatékot a fordulás alatt. A hátsó lábak mindaddig nyújtva maradnak, ameddig a mellső rész félig-meddig elfordul, ezután az elülső lábak nyúlnak ki és a hátsók húzódnak be, és a test hátsó része fordul. A teljes folyamat alatt a farok gyorsan körbecsapódik a teljes impulzusmomentum megtartása érdekében. A vázlatok 1/20 s időközökkel felvett fényképek alapján készültek. (Kérjük, ne ismételje meg senki ezt a kísérletet; a macskák lába gyakran eltörik, vagy még nagyobb baj is történhet a talajt elérve.)



(a) Az alapmanőver belülről kifelé fordítja az U alakú testhelyzetet, a macska a hátát az U alak külső oldaláról a belső oldal felé fordítja. A mellső és a hátsó testrészek függőleges tengely körül *ellentétes* irányba fordulnak, *megtartva az impulzusmomentumot*

13-11 ábra.
A szabadon eső macskára nem hat külső forgatónyomaték, hogyan lehetséges tehát, hogy mégis el tudja játszani a „mindig talpraesés" legendás tettét, még ha háttal lefelé ejtik is le? A macska bonyolult mozgása megfelel az impulzusmomentum megmaradása törvényének.



13-12 ábra.
A régi típusú villamos kocsin a fékező ember a fékkerék szemközti oldalaira két egyenlő nagyságú ellentétes irányú erőt gyakorolt. Ezt a két erőt *erőpárnak* nevezzük.

jük, mintha a rendszer tömegközéppontjára koncentrálódna.[3] Ez a rendszerre ható külső eredő erő okozza azt, hogy a tömegközéppont a Nap körül körpályán mozog, míg a Föld és Hold között működő „belső" gravitációs erő a két test közös tömegközéppont körüli forgását okozza. Más példa lehet az űrben gyorsan forgó űrhajó, miközben irányító rakétái különböző tolóerőt fejtenek ki és forgatónyomatékot is gyakorolnak a tömegközéppont körül. Külső forgatónyomaték híján a rendszer impulzusmomentumának állandónak kell maradnia. Erre a helyzetre a 13-11 ábrán láthatunk érdekes példát.

Mielőtt azonban ezekkel az általános esetekkel foglalkoznánk, megtárgyaljuk, hogyan hathat egy rendszerre forgatónyomaték, ha *a rendszerre ható erők eredője zérus*.

Az erőpár

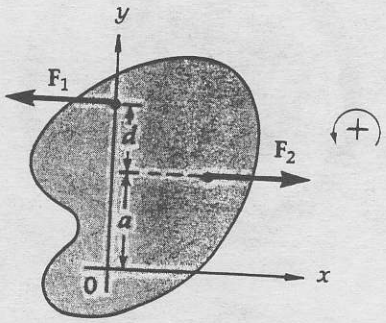
Két egyenlő nagyságú ellentétes irányú, nem azonos hatásvonalú erőtől, az ún. erőpártól speciális forgatónyomaték származik, lásd a 13-12 ábrát. Noha

[3] Itt elhanyagoljuk a Nap gravitációs terének a Föld közelében meglévő csekély inhomogenitását.

ebben az esetben a testre ható erők eredője zérus, az erőpár forgatónyomatékot fejt ki. Továbbá *az erőpár forgatónyomatékának értéke független annak a ★ pontnak megválasztásától amelyre a forgatónyomatékot számítjuk.* Ezt a következő példán mutatjuk be.

13-10 PÉLDA

A 13-13 ábrán látható merev testre az x tengellyel párhuzamos két egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú erő hat. Számítsuk ki (a) a tárgyra ható eredő erőt, (b) az eredő forgatónyomatékot arra a pontra, amelyben az F_1 erő támad, és (c) az eredő forgatónyomatékot az O origóra.



13-13 ábra.
A 13-10 példához.

MEGOLDÁS

(a) Az erők összege:

$$\sum F_x = -F_1 + F_2 = 0.$$

Az eredő erő zérus, az erőpár nem hoz létre haladó mozgást.

(b) Az F_1 erő támadáspontjára az F_1 erő nem fejt ki forgatónyomatékot, mert erőkarja zérus. Az óramutató járásával ellentétes forgásirányt választva pozitívnak azt kapjuk, hogy

$$\sum_{(F_1 \text{ támadáspontjára})} \mathbf{M} = (\text{erő})\cdot(\text{erőkar})$$

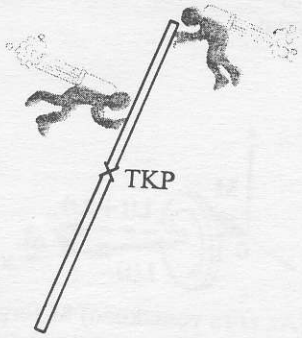
$$\sum \mathbf{M} = (F_2)(d) = F_2 d \quad \text{(az óramutató járásával ellentétesen)}$$

(c) Az origóra a következőképpen számítjuk ki az eredő forgatónyomatékot:

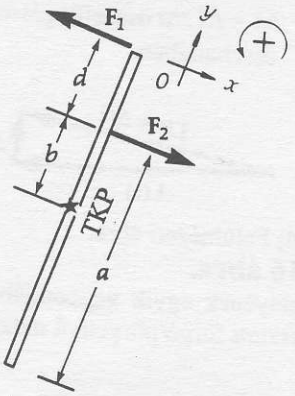
$$\sum_{(\text{az } O \text{ pontra})} \mathbf{M} = (\text{erő})\cdot(\text{erőkar})$$

$$\sum \mathbf{M} = (F_1)(a+d) - (F_2)(a) = F_1 d \quad \text{(az óramutató járásával ellentétesen)}$$

Minthogy $F_1 = F_2$, így ez a forgatónyomaték ugyanaz, mint amit a (b) pontban számítottunk ki. Az a távolság nem jelenik meg az eredményben, alátámasztva azt, hogy ha $\sum \mathbf{F} = 0$, akkor a forgatónyomaték bármely pontra számítva Fd.



(a) Az asztronauták a rúdra merőleges erőt fejtenek ki.



(b) A rúdra ható erők vektorábrája.

13-14 ábra.
A 13-11 példához.

13-11 PÉLDA

Két asztronauta űrállomás felépítésén dolgozik az űrben, gyakorlatilag a súlytalanság állapotában. Az asztronauták két ellentétes irányú, egyenlő nagyságú F erőt fejtenek ki egy hosszú homogén rúdra. (13-14a ábra.) A rúd egy inerciarendszerhez viszonyítva eredetileg nyugalomban volt. (a) Határozzuk meg a rúdra ható eredő erőt és (b) az eredő forgatónyomatékot a rúd tömegközéppontjára! (c) Mutassuk meg, hogy a forgatónyomaték értéke ugyanaz, ha a rúd alsó végére számítjuk.

MEGOLDÁS

(a) A pozitív x tengely irányát a 13-14b ábrának megfelelően választva megállapítjuk, hogy az erők eredője

$$\sum F_x = F_2 - F_1 = 0 \quad \text{(az eredő erő zérus)}$$

(b) A tömegközéppontra számítva a forgatónyomatékokat és a ⊕ szimbólummal jelölt, az óramutató járásával ellentétes irányt pozitívnak választva (figyelembe véve, hogy $F_1 = F_2$) arra jutunk, hogy

$$\sum \mathbf{M} = F_1(b + d) - F_2(b) = Fd$$ (óramutató járásával ellentétes irányban) (TKP-ra)

(c) A forgatónyomatékot a rúd alsó pontjára számítva:

$$\sum \mathbf{M} = F_1(a + d) - F_2(a) = Fd$$ (óramutató járásával ellentétes irányban) (a rúd alsó végére)

Megjegyzés: A két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő *erőpár*. Minthogy eredő erő nincs (az eredő zérus), ezért **a rúd tömegközéppontja az inerciarendszerben nem végez haladó mozgást, nyugalomban marad.** De az erőpár által létesített eredő Fd forgatónyomaték a rudat tömegközéppontja körül az óramutató járásával ellentétes forgási irányban szöggyorsulásra kényszeríti. Ha az erők továbbra is merőlegesen hatnak a forgó rúdra, a szöggyorsulás változatlanul fennáll, tehát a rúd tömegközéppontja egy inerciarendszerhez viszonyítva nyugalomban marad, de a rúd maga a tömegközéppontja körül egyre nagyobb szögsebességgel forog.

13-12 PÉLDA

Vékony, l hosszúságú rúd gravitáció mentes (súlytalan) környezetben, kezdetben nyugalmi helyzetben van egy inerciarendszerben. A rúd egyik végét hosszára merőleges irányú ütés éri. Mekkora távolságra jut el a rúd tömegközéppontja mialatt a rúd a tömegközéppontja körül egy teljes fordulatot végez? (Érdekes, hogy a válasz független a rúd tömegétől és az ütés erősségétől.)

MEGOLDÁS

A rúd végére mért merőleges ütés a rúd tömegközéppontjának impulzust ad, és a tömegközéppont körül impulzusmomentumot létesít.

A tömegközéppont haladó mozgása	**A tömegközéppont körüli forgó mozgás**
$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$	$\sum \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$
$\int F\,dt = M\Delta v_{TKP}$	$\frac{l}{2}\int F\,dt = I_{TKP}\Delta\omega$
$\int F\,dt = M(v_{TKP} - 0)$	$\frac{l}{2}(Mv_{TKP}) = \frac{Ml^2}{12}(\omega - 0)$
Az eredményt a jobb oldali egyenletbe helyettesítjük.	Legyen Δt a teljes 2π rad elfordulás ideje. Mindkét oldalt Δt -vel szorozva azt kapjuk, hogy $\underbrace{v_{TKP}\Delta t}_{x} = \left(\frac{2}{l}\right)\left(\frac{l^2}{12}\right)\underbrace{\omega\,\Delta t}_{\theta = 2\pi \text{ rad}}$
	$x = \frac{l\pi}{3}$

13.6 A pörgettyű

Figyeljük meg a búgócsigát, amint megdőlt tengelye körül lebilincselően szépen mozog. A búgócsiga tengelye a függőleges körül lassan körbejár, és kúppalástot ír le, úgy tűnik, mintha „dacolna a gravitációval". A búgócsigának ezt a mozgását precessziónak nevezzük. Adott dőlési szög mellett minél gyorsabban pörög, annál lassabb a precesszió. Természetesen ez nem sérti a gravitációs törvényt, a búgócsiga csupán az $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ képlet előírásának engedelmeskedik. A *pörgettyű mozgása* bizonyos esetekben sokkal összetettebb is lehet, és szokatlan vonásainak magyarázatára terjedelmes könyveket szenteltek. A jelenségnek számos műszaki alkalmazása is van.

A mozgás vizsgálatára egy egyszerű pörgettyüt – egy tengelyre szerelt tárcsát választunk. Emlékeztetünk arra, hogy az egyenes mentén $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzussal mozgó m tömegű test megtartja állandó $\mathbf{p}$ impulzusát, ha külső erők nem hatnak rá. Hasonlóképpen a forgó pörgettyű $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ impulzusmomentuma is állandó, ha külső forgatónyomatékok nem hatnak rá. Az ilyen un. erőmentes pörgettyű (13-15 ábra) megtartja forgástengelyének irányát egy inerciarendszerben (pl. az állócsillagok rendszerében). E tulajdonságot hasznosítja a *pörgettyűs iránytű*. A kettős kardán felfüggesztés megakadályozza, hogy a forgó pörgettyűre forgatónyomaték hasson, így impulzusmomentuma megtartja beállított (mondjuk az Északi Sarkcsillag felé mutató) irányát még akkor is, ha egy hajón vagy repülőgépen a Földön körbehordozzák.*



13-15 ábra.
Ez a pörgettyű kettős kardáncsuklóra van szerelve. Állványa bármilyen helyzetbe fordítható anélkül, hogy az elfordítás révén a forgó pörgettyűre forgatónyomaték hatna.

A pörgettyű mozgásának legmeglepőbb jelenségét ábrázolja a 13-16a ábra. Ha egy vízszintes tengelyű forgó pörgettyű csak a tengely egyik végpontjában van alátámasztva (ezt az O pontot tekinthetjük rögzítettnek), akkor azt várnánk, hogy a tengely lefelé dől annak az (O pontra vonatkoztatott) $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$ forgatónyomatéknak megfelelően, amelyet a gravitáció gyakorol a tömegközéppontra. Ehelyett a tengely – meglepő módon – vízszintes síkban forog körbe, azaz precessziót végez.

A pörgettyű precessziója olyan forgó mozgásra szolgál példaként, amelyben a forgástengely nem marad párhuzamos, hanem irányát változtatja. A mozgás vizsgálatára azzal az egyszerűsítő feltevéssel élünk, hogy az egyetlen impulzusmomentumot maga a pörgettyű forgása okozza. (Elhanyagoljuk azt a kicsi impulzusmomentumot, ami a tömegközéppontot vízszintes körön mozgató precesszióból adódik. Azonban, amint majd látni fogjuk, minél gyorsabban forog a pörgettyű, annál lassúbb a precesszió, így a fenti feltevés gyorsan forgó pörgettyűkre helytálló.)

Tekintsük az O rögzített alátámasztási pontra ható $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ forgatónyomatékot (13-16 ábra). Ahhoz, hogy a pörgettyű $\mathbf{L}(t)$ impulzusmomentumát a forgatónyomaték vektorának irányában $\Delta\mathbf{L}$ értékkel megváltoztassa, a pörgettyű tengelye vízszintes síkban fog körbe forogni, azaz egy

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

szögsebességű precessziót fog végezni. Ezt a szögsebességet a 13-16d ábra alapján a $\Delta L = L\Delta\phi$ összefüggésből számítjuk ki. Elosztva Δt értékkel

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = L\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

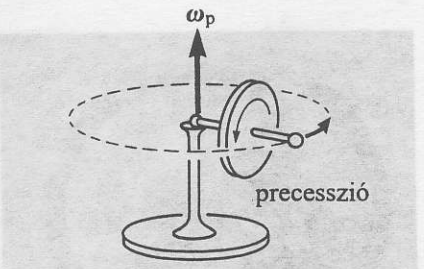
adódik. Mivel $|\mathbf{M}| = \Delta L / \Delta t$, és $\omega_P = \Delta\phi / \Delta t$, ezek behelyettesítésével

$$M = L\omega_P \qquad \textbf{(13-6)}$$

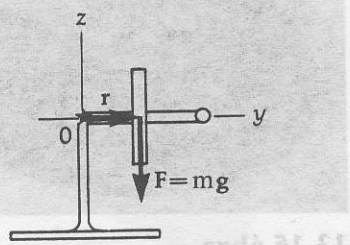
A 13-16b ábráról leolvasható, hogy $M = mgr$, tehát a precesszió ω_P szögsebessége[4]

* A magyarázat kissé túlegyszerűsített ezért félreérthető. A pörgettyűs iránytű a Coriolis erő miatt kezdeti beállításától függetlenül mindig a Föld forgástengelyének (nem a mágneses pólusnak) É-i pólusa felé áll be. (A fordító megj.)

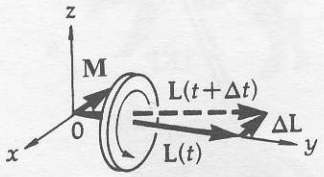
[4] Minthogy ω_P fordítottan arányos L -lel, azért amikor a súrlódás hatására a csiga lassul, és emiatt L csökken, a precesszió ω_P szögsebessége egyre nagyobb lesz.



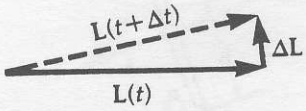
(a) Vízszintes tengelyének egyik pontjában alátámasztott forgó pörgettyű tengelye ω_p szögsebességgel vízszintes síkban *precessziót* végez.



(b) A tömegközéppontra ható F gravitációs erő az *O* rögzített tengelypontra $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ forgatónyomatékot gyakorol. Az **M** vektor a rajz *O* pontjában a rajz síkjára merőlegesen *befelé* mutat.



(c) (Az *O*-ra vonatkozó) **M** forgatónyomaték ugyanolyan irányú mint az impulzusmomentum **ΔL** megváltozásának iránya az $\mathbf{M} = \Delta\mathbf{L}/\Delta t$ összefüggéssel összhangban.



(d) Felülnézeti ábra.

13-16 ábra.
Tengelyének egyik végpontjában alátámasztott forgó pörgettyű mozgása.

$$\omega_P = \frac{mgr}{L}. \qquad (13\text{-}7)$$

Az ω_P vektor iránya a függőleges *z* tengely irányába mutat. A (13-6) egyenlet vektoriális alakban:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L} \qquad (13\text{-}8)$$

vagy mivel $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, ezért

A forgó pörgettyű precessziójának ω_P szögsebessége

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_P \times I\boldsymbol{\omega}. \qquad (13\text{-}9)$$

Ha emlékezetünkben tartjuk az alábbi (a $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ összefüggésből levezetett) szabályt, akkor a precesszió irányát könnyen meghatározhatjuk:

A pörgettyű precessziója — **Az L impulzusmomentum vektor követni igyekszik a M forgatónyomaték vektor irányát.**

Ez magyarázza a pörgettyű meglepő viselkedését, midőn tengelyére forgatónyomaték hat. Például a vízszintes tengelyű forgó pörgettyű tengelyvégének fölfelé billentése a tengelyt jobbra, vagy balra lendíti ki a pörgettyű forgási irányától függően.

A Föld kidomborodása az egyenlítő környezetében azt eredményezi, hogy a Nap inhomogén gravitációs tere a Földre forgatónyomatékot gyakorol (vö. 10. fejezet 9. lábjegyzet). Következésképpen a Föld tengelye lassú precessziót végezve olyan kúpot ír le, amelynek alkotója a tengellyel 23,5°-os szöget zár be és ezalatt az Északi Sarkcsillag felé mutató állásából elmozdul. Egy teljes fordulatot kb. 25800 év alatt tesz meg.[5]

13-13 PÉLDA

Kisméretű pörgettyű forgó részének (rotorjának) tömege 0,220 kg, tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka $2{,}5\times10^{-4}$ kg·m^2. (A tartókeret tömege elhanyagolható.) A pörgettyűt forgás közben egyik végén csukló tartja vízszintes tengellyel. A rotor tömegközéppontja 5 cm távolságra van a csuklótól. A pörgettyű vízszintes síkban precessziót végez, 6 s alatt ír le egy teljes kört. (a) Határozzuk meg a rotor ω szögsebességét (fordulat per perc egységben). (b) Tegyük fel, hogy a csuklótól kifelé nézve a tengely mentén azt látjuk, hogy a rotor az óramutató járásával ellentétesen forog. Kérdés: Milyen forgási irányban látjuk a precessziót, ha a pörgettyűt felülről figyeljük?

MEGOLDÁS

(a) A fizikai elrendezést a 13-17 ábra illusztrálja. Minthogy $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ és **r** merőleges egymásra, a csuklóra ható **M** forgatónyomatékának nagysága $rmg \sin 90° = rmg$. Tudjuk, hogy a pörgettyű vízszintes síkban végzett precessziója miatt az ω_P vektornak függőlegesnek kell lennie (de pillanatnyilag még nem tudjuk, hogy

[5] Ez okozza azt, hogy évszázadok múltán az égbolton a zodiákus tizenkét csillagképének helyzete a tavaszi napéjegyenlőséghez képest fokozatosan eltolódik. Az az asztrológiai kifejezés, hogy „belépünk a Vízöntő korszakába" azt jelenti, hogy hozzávetőlegesen a 2000-ik esztendőben a Nap keresztezve az égi egyenlítőt belép a tavaszi napéjegyenlőség idején a Vízöntő csillagképbe, vagyis a „Vízöntő Házába" lép és ebben a szektorban marad az elkövetkező 2000 éven át. Ma a 2000 évvel ezelőtt megnevezett állatövi jegyek közel egy teljes csillagképpel csúsztak el attól a csillagcsoporttól, amelyről eredetileg elnevezték őket, amelyről azt hitték, hogy „befolyásolják" az emberek ügyes-bajos dolgait. Mi több, az egyes „Házak" közötti pontos határokról az asztrológusok mind a mai napig vitatkoznak. Bár az eltérés csekély, mégis esetenként a bolygók egyikét másikát különböző „Házakba" helyezik attól függően, hogy a jó tucatnyi definícióból melyiket fogadják el, és ennek következtében a horoszkópok kissé eltérnek egymástól.

felfelé avagy lefelé kell-e mutatnia). Tehát ω_P és $\mathbf{L}$ merőlegesek egymásra, így vektoriális szorzatuk abszolút értéke $|\omega_P \times \mathbf{L}| = \omega_P I\omega \sin 90° = \omega_P I\omega$. A (13-9) egyenlet alapján:

$$|\mathbf{M}| = |\omega_P \times \mathbf{L}|$$

$$rmg = \omega_P I\omega$$

$$\omega = \frac{rmg}{\omega_P I} \qquad \textbf{(13-10)}$$

Behelyettesítés után ω_P szögsebességre a következőt kapjuk:

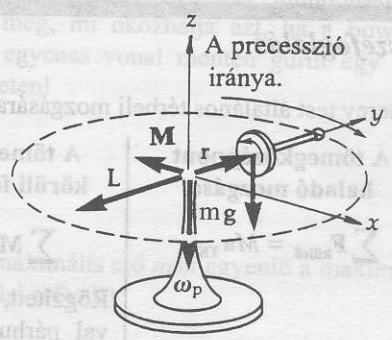
$$\omega_P = \underbrace{\left(\frac{1\,\cancel{\text{ford.}}}{6\,\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\cancel{\text{ford.}}}\right)}_{\text{(Átsz. tényező)}} = \frac{\pi}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A (13-10) egyenletből a rotor szögsebessége (fordulat per percben kifejezve):

$$\omega = \frac{(0{,}050\,\text{m})(0{,}220\,\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(2{,}5\times10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\right)}$$

$$= \frac{1294}{\pi}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\underbrace{\left(\frac{60\,\cancel{\text{s}}}{1\,\text{perc}}\right)\left(\frac{1\,\text{ford.}}{2\pi\,\cancel{\text{rad}}}\right)}_{\text{(Átszámítási tényező)}} = 3932\,\text{ford / perc}.$$

(b) A 13-17 ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az $\mathbf{M} = \omega_P \times \mathbf{L}$ összefüggésnek felülről nézve az óramutató járásával egyező irányú precesszió felel meg (vagyis az ω_P vektor lefelé mutat).



13-17 ábra.
A 13-13 példához.

Egyszerűbb tájékozódás céljából a 13-1 táblázatban összefoglaltuk a forgó mozgásra vonatkozó alapvető egyenleteket a használhatóságuk korlátaira utaló megjegyzésekkel.

13-1 TÁBLÁZAT A forgó mozgás egyenleteinek összefoglalása

Egyenlet	Megjegyzések
$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	A forgatónyomaték definíciója (egy O pontra vonatkoztatva).
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	A részecske impulzusmomentumának definíciója (egy O pontra vonatkoztatva).
$I = \sum m_i r_i^2$ (vagy $= \int r^2 dm$)	Egy O pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték definíciója.
Általános eset	
$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	Az impulzusmomentum tétel
$\sum \mathbf{F}_{\text{külső}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{TKP}}}{dt}$	Newton második törvénye a tömegközéppont haladó mozgására.
Speciális esetek	
$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = I\alpha$ $\mathbf{L} = I\omega$ $L_z = I\omega$	Szimmetriatengely körül forgó szimmetrikus testre (I = állandó). Mindig igaz, ha I a z tengelyre vonatkozik

Összefoglalás

A merev test általános térbeli mozgására

A tömegközéppont haladó mozgása	A tömegközéppont körüli forgó mozgás
$\sum \mathbf{F}_{\text{külső}} = M\mathbf{a}_{\text{TKP}}$	$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ Rögzített, vagy önmagával párhuzamosan mozgó tengelyre $\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = I\alpha$

A **párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel)** szerint bármely, a tömegközépponton átmenő tengellyel párhuzamos tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot az

$$I = I_{TKP} + Mh^2$$ (h a két párhuzamos tengely közötti távolság)

összefüggéssel határozhatjuk meg.

Az összetett forgó és haladó mozgás **kinetikus energiája:**

$$K = K_{rot} + K_{transz} = \frac{1}{2} I_{TKP}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{TKP}.$$

Zárt (a környezetétől elszigetelt) rendszerre érvényes (a ★ tengelyre vonatkozó) **impulzusmomentum megmaradása:**

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}.$$

Speciális esetek:

Szimmetrikus test szimmetriatengely körüli forgása	A (rögzített) z tengely körüli forgás
$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$	$L_z = I\omega$ (I a z tengelyre)

Zárt, konzervatív rendszerre érvényes a mechanikai energia megmaradása:

$$E_0 = E.$$

A pörgettyű. Külső forgatónyomatékok hiányában a forgó pörgettyű tengelye megtartja térbeli irányát ($\mathbf{L}$ = állandó).

Ha a forgó pörgettyű tengelyének az iránya egy $\mathbf{M}$ forgónyomaték hatására megnövekszik, akkor a tengely iránya olyan ω_P szögsebességgel változik, ami az

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L}$$

összefüggésnek felel meg (ezt precessziónak nevezzük).

A precesszió iránya a következőképpen is meghatározható: *Az* $\mathbf{L}$ *impulzusmomentum-vektor követni igyekszik az* $\mathbf{M}$ *forgatónyomaték-vektor irányát.*

Kérdések

1. Két m tömegű, v sebességű korcsolyázó párhuzamos pályán közelít egymáshoz. A pályák távolsága d. Abban a pillanatban amikor egymás mellé érnek, az egyik könnyű bambuszrudat nyújt át a másiknak, amit az utóbbi erősen megragad. Írjuk le ezt követően a rúdba kapaszkodó két korcsolyázó mozgását. Milyen mozgás jönne létre, ha a korcsolyázók tömege különböző lenne?
2. Tekintsünk egy egyenes mentén állandó sebességgel mozgó részecskét! Egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol-e az egyenesen kívül lévő rögzített pontból a részecskéhez mutató rádiuszvektor?
3. Tegyük fel, hogy egy motor kimenő teljesítménye arányos a tengely ω szögsebességével. Határozzuk meg a tengely által kifejtett forgatónyomaték és a szögsebesség közötti összefüggést!
4. Két homogén, tömör tárcsa „versenyt gurul" lefelé egy lejtőn. Tömegeik egyenlőek, de egyikük sugara kétszer akkora mint a másiké. Melyikük „győz"? Melyikük győzne, ha sugaraik egyenlőek, de tömegeik különbözőek lennének?
5. Homogén tömör gömb és homogén tömör tárcsa versenyez egymással a lejtőn. Melyikük „győz", ha tömegük és sugaruk megegyező? Lehetséges e, hogy valamelyikük győzzön, ha tömegeik egyenlőek, de sugaraik aránya megváltozott? Lehetséges-e, hogy valamelyikük győzzön, ha sugaraik egyenlőek, de tömegeik aránya megváltozott?
6. Tekintsük a cirkuszi légtornászt, amint a levegőben repülve bukfencezik. Képes-e arra, hogy tömegközéppontjának pályáját a szabadesési pályától eltérőre változtassa?
7. Egy részecske csak az xy síkban mozog. Határozzuk meg az origóra vonatkozó impulzusmomentumának lehetséges irányait!
8. Egy biliárd játszmában egy golyó ferdén (nem merőlegesen) ütközött a mandinernek (a biliárd asztal rugalmas belső peremének), de függőleges tengely körül végzett pörgése következtében a mandinerről merőlegesen pattant vissza. Írjuk le a golyó forgását, a forgás irányát!
9. A *bowling* (egyfajta tekejáték) golyója csak akkor gurul szabályszerűen, ha alakja tökéletes és jól ki van egyensúlyozva. Az ujjak és a hüvelykujj számára fúrt lyukak közelébe a szokásos bowling golyókba a hiányzó tömeg pótlására többlet-súlyt építenek be. 1980-ban új típusú golyót vezettek be, amelyen két többletsúly volt, egyik az ujj számára készített lyukak, másik a hüvelykujj számára készített lyuk közelében. A feltaláló szerint ez a meg-

oldás nagy mértékben javítja a gördülés pontosságát. Feltételezve, hogy mindkét változat a golyó tömegközéppontjára vonatkozóan helyesen van kiegyensúlyozva, vajon az újabb verzió valóban javítja a gördülés karakterisztikus tulajdonságait? Tárgyaljuk meg, mi okozhatja azt, ha a bowling golyó nem egyenes vonal mentén gurul egy vízszintes felületen!

Feladatok

13.3 Gördülés felület mentén

13A-1 Egy 2 kg tömegű, 30 cm átmérőjű homogén tömör tárcsa 2 m/s sebességgel csúszás nélkül gördül vízszintes felületen. Határozzuk meg (a) haladási kinetikus energiáját, a tömegközéppontra vonatkozó forgási kinetikus energiáját, (c) és a teljes energiáját!

13A-2 Az előírásos kosárlabda átmérője 25,4 cm és tömege 0,567 kg. Vékony, elhanyagolható falvastagságú gömbhéjnak tekinthetjük. Mennyi idő alatt gurul le a nyugalmi helyzetből induló labda a 30°-os 11 méter hosszú lejtőről? (Javaslat: először számítsuk ki a lejtő aljára érés sebességét az energiamegmaradás törvényéből, majd alkalmazzuk a kinematikai egyenleteket.)

13A-3 Homogén tömör gömb csúszás nélkül gördül le a vízszintessel 25°-os szöget bezáró lejtőn. Határozzuk meg a nyugalmi helyzetből induló gömb sebességét 6 m út befutása után!

13A-4 Homogén tömör gömb (tömege M, sugara R) csúszás nélkül gördül le a vízszinteshez ω szög alatt hajló lejtőn. Nyugalmi helyzetből indulva s hosszúságú utat tesz meg. Határozzuk meg kétféleképpen is a tömegközéppont v sebességét a lejtő alján: (a) az energiamegmaradás törvényével és (b) Newton törvényeinek alkalmazásával!

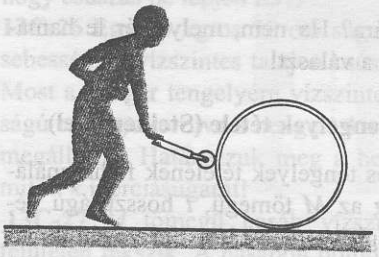
13B-5 Homogén gömb gördül érdes felületű lejtőn. A gömb és a felület között a nyugalmi súrlódási együttható μ_s. Keressük azt a maximális θ szöget, amit a sík felület a vízszintessel bezár és amin a gömb csúszás nélkül legördülhet. Fejezzük ki az eredményt μ_s függvényében!

13B-6 Egy homogén tömör gömb és egy homogén tömör henger nyugalmi helyzetből egyszerre indulva csúszás nélkül gördül le egy lejtőn. Mindkettő tömege M, sugara R. Melyik ér hamarabb a lejtő aljára? Indokoljuk a választ!

13B-7 Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le a vízszinteshez θ szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi súrlódási együttható legkisebb értéke $(\text{tg}\,\theta_0)/3$ kell, hogy legyen!

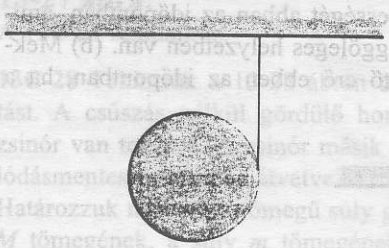
13B-8 Egy fiú az M tömegű, R sugarú karikát a kezében lévő bot végére szerelt súrlódásmentes kerék segítségével vízszintesen hajtja az út mentén (13-18 ábra). Ily módon a karikára vízszintes irányú, a karika tömegközéppontja felé mutató erőt fejt ki, anélkül, hogy érintőleges erőt fejtene ki a peremre. (a) Vázoljuk a karikára ható erőket! (b) Ha a talaj és a karika között a nyugalmi súrlódási együttható μ, mekkora lehet az a (gördülő karikára alkalmazott) maximális F erő, amely mellett a karika még nem csúszik meg a talajon?

(Megjegyzés: a maximális erő *nem* egyenlő a maximális nyugalmi súrlódási erővel!)



13-18 ábra.
A 13B-8 feladathoz.

13B-9 Homogén tömör M tömegű R sugarú henger palástjára szövet szalagot tekertek. A szalag vége a menynyezethez van erősítve, (13-19 ábra). A hengert a szalag segítségével vízszintes helyzetben tartják, majd nyugalmi helyzetből elengedik. (a) Kérdés: miközben a henger lejjebb süllyed, a tömegközéppontja elmozdul-e jobbra vagy balra, vagy pedig egyenesen lefelé halad? Indokoljuk meg a választ! (b) Mutassuk meg, hogy a tömegközéppont gyorsulása $2g/3$.

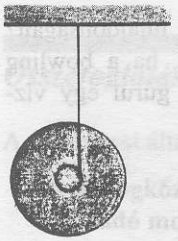


13-19 ábra.
A 13B-9 feladathoz.

13B-10 A jojó zsinórja a 2 mm sugarú belső tengelyre van felcsavarva, ahogyan a 13-20 ábra mutatja. A jojó tömege 200 g és inerciasugara 2 cm. (A zsinór vastagsága elhanyagolható.) (a) Mennyi idő alatt tekeredik le 1 m hosszú zsinór, midőn a jojót nyugalmi helyzetéből elengedik? (b) Mekkora a forgási kinetikus energia és a haladási kinetikus energia aránya a jojó süllyedése közben?

13B-11 Egy 30 m/s sebességgel haladó gépkocsi kerekeinek átmérője 90 cm. (a) Határozzuk meg a kerekek tengely körüli forgásának szögsebességét! (b) Mind a négy kereket 40 teljes fordulat alatt egyenletes fékezéssel megállítják. Határozzuk meg a kerekek szöggyorsulását!

13B-12 Két homogén tömör henger (egyik tömege M és sugara R, másiké $2M$ és $R/2$) nyugalmi helyzetből egyszerre indítva csúszásmentesen gördül a lejtőn. Egyszer-



13-20 ábra.
A 13B-10 feladathoz.

re érnek-e a lejtő aljára? Ha nem, melyik ér le hamarabb? Indokoljuk meg a választ!

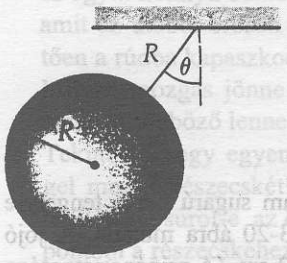
13.4 A párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel)

13A-13 A párhuzamos tengelyek tételének felhasználásával határozzuk meg az M tömegű, l hosszúságú vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát a rúd végén átmenő, a rúdra merőleges egyenesre!

13A-14 A párhuzamos tengelyek tételével határozzuk meg a homogén tömör gömb tehetetlenségi nyomatékát a gömbfelületet érintő egyenesre vonatkozóan!

13B-15 Egy R sugarú kerék a vízszinteshez θ szöggel hajló lejtőn csúszásmentesen gördül. A kerék inerciasugara k. Számítsuk ki a kerék haladási gyorsulását, ha a forgatónyomatékot (a) a kerék tömegközéppontjára, (b) a lejtő és a kerék érintkezési pontjára számítjuk.

13B-16 Az $R = 20$ cm sugarú vékonyfalu üres gömb 20 cm hosszú fonálon függ (13-21 ábra.) A gömböt akkor engedik el nyugalmi helyzetéből, midőn a fonál a függőlegessel 40°-os szöget zár be. (a) Határozzuk meg a tömegközéppont sebességét abban az időpontban, amikor a fonál éppen függőleges helyzetben van. (b) Mekkora a fonalat feszítő erő ebben az időpontban, ha a gömb tömege 2 kg?

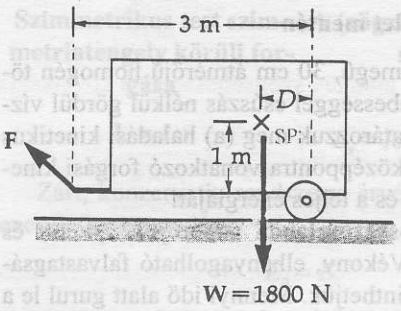


13-21 ábra.
A 13B-16 feladathoz.

13.5 Térbeli általános mozgás

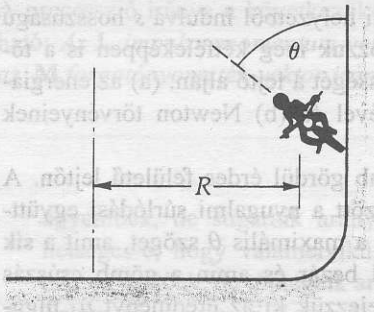
13B-17 Midőn egy motorkerékpáros vízszintes pályán egy kanyarban 30 km/h sebességgel halad, tömegközéppontja 10 m sugarú körön mozog. Határozzuk meg azt a függőlegessel bezárt szöget, amellyel „bedől".

13B-18 Megrakott pótkocsi súlypontja (SP) a 13-22 ábrán látható helyen van. A pótkocsi és a rakomány együttes súlya 1800 N. A vontató (az ábrán nem látszik) a pótkocsira **F** erőt fejt ki. Az erő függőleges komponense a teher egy részét tartja, vízszintes komponense 1,4 m/s^2 gyorsulással bal felé gyorsítja a pótkocsit. A súrlódás elhanyagolható. (a) Mekkora az F erő vízszintes és függőleges komponense, ha $D = 0{,}5$ m? (b) Mekkorának kellene D-nek lennie, hogy $F_y = 0$ legyen?



13-22 ábra.
A 13B-18 feladathoz.

13B-19 Egy vásári mutatványos hengeralakú fal belső felületén motorozik (13-23 ábra). Tömegközéppontja egy vízszintes síkban fekvő $R = 4$ m sugarú körön mozog. A fal és a kerekek között a nyugalmi súrlódási együttható 0,7. Határozzuk meg (a) azt a minimális v sebességet és (b) az ehhez tartozó θ szöget, amely lehetővé teszi, hogy a motoros ezt a mozgást fenntartsa!



13-23 ábra.
A 13B-19 feladathoz.

13.6 A pörgettyű

13B-20 Pörgettyű rotorja (forgó része) egy 12 cm sugarú homogén tömör tárcsa, amely egy 23 cm hosszú tengely közepére van szerelve. A tengelyt egyik végén csukló tartja vízszintesen, miközben a rotor 1200 fordulat per perc fordulatszámmal pörög. Határozzuk meg a precesszió ω_P szögsebességét (fordulat per perc egységben)!

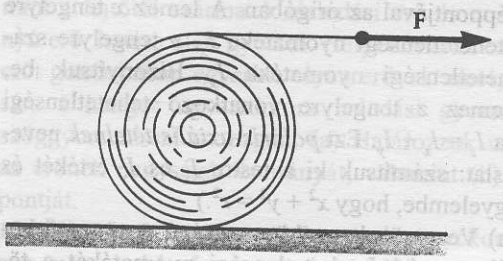
13B-21 Játékcsiga tömege 500 g, inerciasugara 2 cm és tömegközéppontja a kihegyezett végétől 5 cm-re van. 90 ford/s fordulatszámú, felülről nézve az óramutató járásával megegyező irányú pörgésbe hozva oly módon helyezzük durva talajra, hogy tengelye a függőlegessel 20°-os szöget alkot (13-24 ábra.) (a) Határozzuk meg a tengely precessziójának ω_P szögsebességét! (b) Határozzuk meg a precesszió irányát (a mozgást felülről nézve)! Indokoljuk okfejtésünket!



13-24 ábra.
A 13B-21 feladathoz.

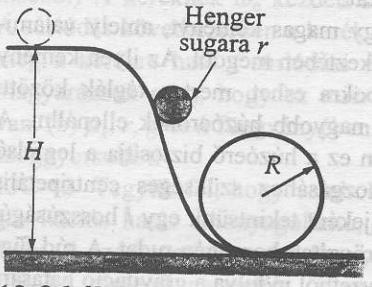
További feladatok

13C-22 Vékony papírszalagból csévélt M tömegű tekercset a szalag végénél fogva vízszintes irányú F erővel húzunk a 13-25 ábrán vázolt módon. Feltételezzük, hogy a tekercs homogén tömör hengernek tekinthető és, hogy a tekercs nem csúszik meg. (a) Mutassuk meg, hogy a tekercsre ható nyugalmi súrlódási erő jobbra irányul! (b) Határozzuk meg a tekercs tömegközéppontjának gyorsulását és (c) a tekercsre ható nyugalmi súrlódási erőt!



13-25 ábra.
A 13C-22 feladathoz.

13C-23 Az r sugarú homogén tömör henger csúszás nélkül zérus kezdő sebességgel legördül a 13-26 ábrán bemutatott hurkot képező pálya H magasságban lévő pontjáról. A hurok sugara R ($R>r$). Határozzuk meg azt a legkisebb H magasságot, ami biztosítja, hogy a henger mindvégig érintkezésben maradjon a pályával.



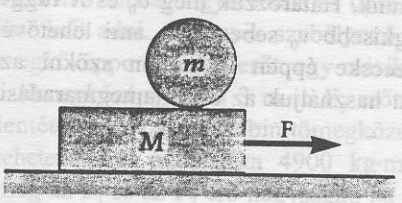
13-26 ábra.
A 13C-23 feladathoz.

13C-24 Oldjuk meg az előbbi feladatot a hurokpályán legördülő homogén tömör r sugarú gömbre is!

13C-25 Az R sugarú billiárdgolyó súrlódásmentes vízszintes asztalon nyugszik. A golyót az asztal fölött h magasságban vízszintes erőimpulzus éri. Mekkora legyen h értéke, hogy a meglökött golyó ne csússzon meg, amikor gördülni kezd? (Útmutatás: az $F\Delta t$ erőimpulzus a tömegközéppontnak $m\Delta v$ impulzust ad át: hasonlóképpen a tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomaték impulzusa megváltoztatja a tömegközéppontra vonatkozó impulzusmomentumot. Milyen kapcsolatnak kell fennállnia e két jelenség között ahhoz, hogy csúszás ne lépjen fel?)

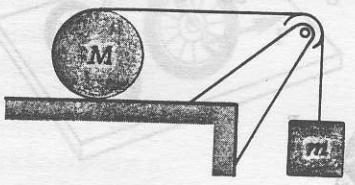
13C-26 Egy 90 kg-os 30 cm sugarú gyephenger 2 m/s sebességgel vízszintes talajon csúszásmentesen gördül . Most a henger tengelyére vízszintes irányú 65 N nagyságú erőt gyakorolva a hengert 4 s alatt (csúszás nélkül) megállítjuk. Határozzuk meg a henger tengelyére számított k inerciasugarat!

13C-27 M tömegű hasáb vízszintes súrlódásmentes felületen fekszik. A hasábon homogén m tömegű tömör henger nyugszik (13-27 ábra). Most a hasábra vízszintes F erőt gyakorolunk. Ennek következtében amint a hasáb gyorsul, a henger csúszás nélkül hátrafelé gördül. Vezessünk le a hasáb gyorsulására egy az F, az M és a m mennyiségekkel kifejezett összefüggést.



13-27 ábra.
A 13C-27 feladathoz.

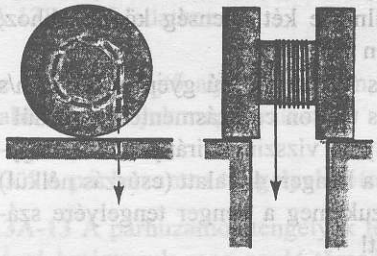
13C-28 Tekintsük a 13-28 ábrán bemutatott összeállítást. A csúszás nélkül gördülő homogén henger köré zsinór van tekerve. A zsinór másik része súlytalan súrlódásmentes csigán van átvetve és a végén súly függ. (a) Határozzuk meg az m tömegű súly gyorsulását a henger M tömegének, a súly m tömegének és a g nehézségi gyorsulásnak függvényében. (b) Mutassuk meg, hogy a megoldás független a henger és a vízszintes felület között fellépő súrlódási erő irányának megválasztásától! (c) Állapítsuk meg a súrlódási erő helyes irányát.



13-28 ábra.
A 13C-28 feladathoz.

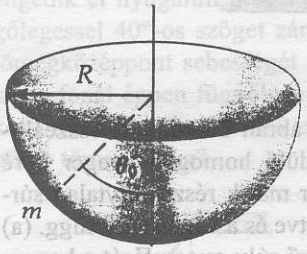
13C-29 A 13-29 ábrán látható orsó két egyforma, egyenként M tömegű R sugarú tárcsából és egy M tömegű $R/2$ sugarú belső tömör hengerből áll. A belső hengerre csavart fonál lelógó végét állandó T feszítő-

erővel húzzuk. Ennek következtében az orsó vízszintes irányban gyorsul miközben az asztalon csúszás nélkül gördül. (Az asztalba vágott rés lehetővé teszi, hogy az orsó mozgása közben a fonál függőleges maradjon.) Határozzuk meg M és T függvényében (a) az orsó tömegközéppontjának a gyorsulását és (b) az orsóra ható vízszintes erőt!



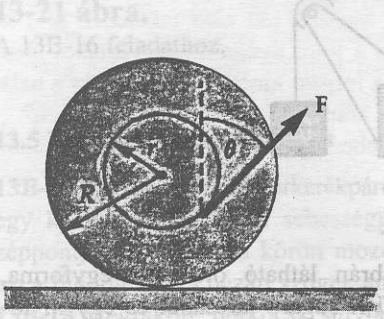
13-29 ábra.
A 13C-29 feladathoz.

13C-30 A 13-30 ábra mutatja, hogy az m tömegű részecske súrlódásmentesen mozoghat egy R sugarú, félgömb alakú, rögzített edény belsejében. A θ_0 szöggel megadott helyzetű részecskének vízszintes irányú v_0 kezdősebességet adunk. Határozzuk meg θ_0 és R függvényében azt a legkisebb v_0 sebességet, ami lehetővé teszi, hogy a részecske éppen ki tudjon szökni az edényből! (Javaslat: használjuk az energiamegmaradási törvényt.)



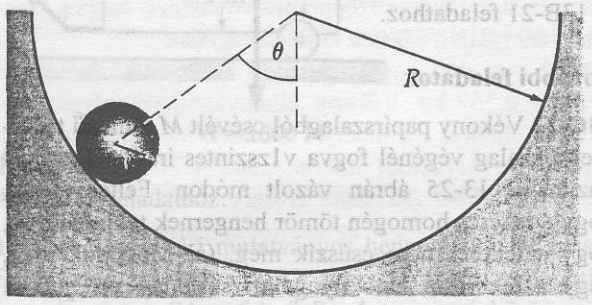
13-30 ábra.
A 13C-30 feladathoz.

13C-31 Egy orsó belső hengerére szövetszalagot csévéltek. (Az orsó belső, ill. külső sugara r, ill. R.) Az orsót a 13-31 ábrán bemutatott módon vízszintes felületre helyezik és a szalagot a függőlegessel alkotott θ szög irányában úgy húzzák, hogy az orsó állandó szögsebességgel forogjon, de haladó mozgást ne végezzen. Az orsó és a felület között némi súrlódás lép fel. (a) Készítsünk vázlatot a fellépő erőkről és (b) határozzuk meg a θ szöget!



13-31 ábra.
A 13C-31 feladathoz.

13C-32 Homogén tömör r sugarú golyót R sugarú félgömb alakú edény belsejébe teszünk. A golyót a függőlegessel θ szöget bezáró helyzetéből (13-32 ábra) elengedjük. Ha a golyó csúszás nélkül gördül, határozzuk meg tömegközéppontjának sebességét az edény legmélyebb pontjában.



13-32 ábra.
A 13C-32 feladathoz.

13C-33 Tekintsünk egy vékony lemezt az xy síkban, tömegközéppontjával az origóban. A lemez x tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka I_x, y tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka I_y. Bizonyítsuk be, hogy a lemez z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $I_z = I_x + I_y$. Ezt *poláris-axiális tételnek* nevezik. (Javaslat: számítsuk ki a testre I_x és I_y értékét és vegyük figyelembe, hogy $x^2 + y^2 = r^2$.)

13C-34 (a) Vezessük le az l hosszúságú m tömegű homogén vékony rúd I tehetetlenségi nyomatékát a tömegközépponton átmenő, rúdra merőleges tengelyre. (b) Terjesszük ki eredményünket a homogén, négyzetalakú, vékony lemez tömegközéppontján átmenő, egyik élével párhuzamos tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának kiszámítására! (c) Felhasználva a *poláris-axiális tételt* (lásd az előző feladatot) vezessük le a négyzetalakú homogén lemez tömegközéppontján átmenő, a lemezre merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

13C-35 Tekintsünk egy magas kéményt, amely valamilyen külső hatás következtében megdől. Az ilyen kémény a dőlés közben darabokra eshet, mert a téglák közötti habarcs nem tud már nagyobb húzóerőnek ellenállni. A kémény eldőlése során ez a húzóerő biztosítja a legfelső rétegek körpályán mozgásához szükséges centripetális erőt. E feladat modelljeként tekintsünk egy l hosszúságú, alsó végén csuklóval rögzített homogén rudat. A rúd függőleges nyugalmi helyzetből indulva a gravitáció hatására megdől. A rúd hosszának hányadrészében lesz a rúd tangenciális gyorsulása nagyobb, mint a nehézségi gyorsulás tangenciális komponense?

13C-36 Tegyük fel, hogy egy homogén tömör henger ω_0 kezdeti szögsebességgel forog, amikor nyugalmi hely-

zetben lévő tömegközépponttal vízszintes felületre helyezik. Határozzuk meg azt a d távolságot, amit a henger a felületen gördülve és csúszva megtesz, amíg nem kezd el csúszás nélkül gördülni!

13C-37 Homogén, tömör kugligolyót (tömege M, sugara R) egyenes vonalú mozgással (gördülés nélkül) hajítanak rá a tekepálya padlójára v_0 kezdősebességgel. Egy kezdeti D távolságot részben csúszva tesz meg, közben növekvő forgási sebességre (szögsebességre) tesz szert, és a D távolság befutása után csúszás nélkül gördül. Az állandó csúszási súrlódási erő f. (a) Fejezzük ki a megadott adatokkal a golyónak azt a v_0 sebességét, amivel csúszás nélkül gurulni kezd! (b) Határozzuk meg a D távolságot! (Megjegyzés: amíg a golyó a D távolságon belül van, addig $a \neq R\alpha$.)

13C-38 A tekejátékos v_0=10 m/s sebességgel hajítja a golyót a pályára anélkül, hogy kezdeti forgást adna neki. A golyó d = 15 méter vízszintes utat csúszik (közben gördül is), mielőtt *csúszásmentesen* kezd gördülni. Számítsuk ki a golyó és a pálya közötti csúszási súrlódási együtthatót. A megoldáshoz az alapvető elvekből induljunk ki!

13C-39 R sugarú M tömegű homogén henger csúszás nélkül gördül a θ hajlásszögű lejtőn. Gördülés közben a henger három erő, mégpedig: a gravitációs erő, valamint a lejtőtől származó súrlódási erő és normális irányú erő hatása alatt gyorsul. Helyettesítsük ezt a három erőt gondolatban *egyetlen* olyan erővel, amelynek hatására a henger ugyanakkora haladási gyorsulással és szöggyorsulással mozogna. (a) Határozzuk meg ennek az erőnek nagyságát és irányát, valamint (b) támadáspontját.

13C-40 Egy 3 kg tömegű, 2 m hosszú, vékony, homogén merev rúd vízszintes sima felületen nyugszik. A rudat most a középpontjától 25 cm távolságban, a rúdra merőlegesen vízszintes 9 N·s nagyságú erőimpulzus éri. (a) Írjuk le a rúdnak az ezt követő mozgását, beleértve a numerikus értékeket is! (b) Mekkora távolságra mozdul el a tömegközéppont a rúd egy teljes fordulata alatt?

13C-41 Egy m tömegű, k inerciasugarú kereket vízszintesen rögzített r sugarú tengely tart. (A tengely átmérője a kerék tengelyfuratának átmérőjénél valamivel kisebb.) A keréknek ω_0 kezdeti szögsebességet adunk. A súrlódás következtében a kerék lelassul. (a) Keressük meg a kerékre ható f súrlódási erő támadáspontját és magyarázzuk meg, hogy ez miért *nem* a furat tetején van. (b) μ_k, r, g és k függvényében határozzuk meg az α szöggyorsulást!

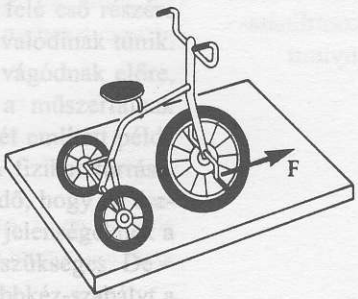
13C-42 Tegyük fel, hogy valahol a világűrben, ahol a gravitációs hatás elhanyagolható, űrállomást szerelnek össze. A szerkezeti elemek vékony I alakú, 8 m hosszú, 100 kg tömegű gerendák. A magában álló gerenda egyik végén a gerendára merőlegesen 20 N nagyságú erő hat. A gerenda az állócsillagokhoz viszonyított nyugalmi helyzetéből megindul, az erő nagysága és az állócsillagokhoz viszonyított iránya változatlan marad. (a) Írjuk le *kvantitatíve* a gerendának a középpontja körül végzett mozgását! (b) Írjuk le *kvalitatíve* a gerendának a középpontja körül végzett mozgását!

13C-43 Vékony, D hosszúságú elhanyagolható tömegű rúd két végére egy-egy kisméretű m tömegű testet erősítettek. Az összeállítás vízszintes súrlódásmentes felületen nyugszik. Egy ugyancsak m tömegű gitt-golyó v_0 kezdősebességgel csúszik a rúd felé a rúdra merőleges irányban, az egyik testnek ütközik és hozzáragad. (a) Határozzuk meg a rendszer ütközés utáni ω szögsebességét! (b) Határozzuk meg a rendszer végső kinetikus energiájának és a gitt-golyó kezdeti kinetikus energiájának arányát! (c) Elfordul-e a rúd ezt követően 360°-kal? Ha nem, akkor mekkora az elfordulás legnagyobb szöge? Magyarázzuk meg a jelenséget.

13C-44 Tegyük fel, hogy a 13C-42 feladatban az F = 20 N erő állandóan merőleges marad az űrben mozgó gerendára. Ahogyan az előbb, a gerenda most is az állócsillagokhoz viszonyított nyugalmi helyzetből indul. Írjuk le *kvalitatíve* (a) a gerenda tömegközéppontjának mozgását és (b) a gerendának a tömegközéppontja körül végzett mozgását!

13C-45 Elhanyagolható gravitációjú térben végzett dokkolási manőver során egy 1100 kg-os űrkabinnak 0,06 m/s^2 lineáris gyorsulást és 0,08 rad/s^2 szöggyorsulást kell adni. Az egyik szabályozó rakéta a kabin tömegközéppontjára $\mathbf{F}_1$ erőt, egy másik szabályozó rakéta a tömegközépponttól 3 m-re $\mathbf{F}_2$ erőt fejt ki $\mathbf{F}_1$-gyel ellentétes irányban. A kabin tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka 4900 kg·m^2. (a) Határozzuk meg az $\mathbf{F}_1$ és az $\mathbf{F}_2$ erő nagyságát, ha a kabint $\mathbf{F}_1$ irányában kell egyenes mentén gyorsítani! (b) Más lenne-e a gyorsulás *nagysága*, ha az erőket felcserélnék? (c) Más lenne-e a gyorsulás iránya? Indokoljuk meg a választ.

13C-46 Egy tricikli kormánya úgy van rögzítve, hogy nem lehet elfordítani. Az egyik „alsó" helyzetben lévő pedálra vízszintes F erőt gyakorolunk (13-33 ábra). Feltéve, hogy a tricikli nem farol meg, vajon előre, vagy hátrafelé fog menni? Adjunk magyarázatot!

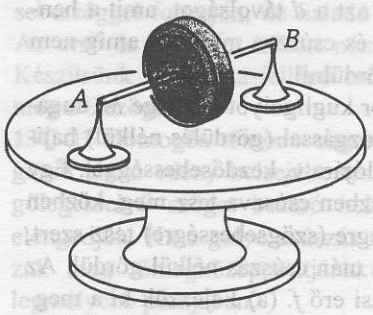


13-33 ábra.
A 13C-46 feladathoz.

13C-47 Kerékpáros lendületből (hajtás nélkül) egyenesen gurul előre. Ha a kerékpár jobbra kezd dőlni,

akkor az első kerék pörgettyűhatása jobbra vagy balra fordítja-e a kereket? Indokoljuk meg a válaszunkat! (Megjegyzés: a pörgettyűhatás, jóllehet valóban létezik, nagyon kicsi a bicikli mozgását befolyásoló egyéb hatásokhoz képest.)

13C-48 Forgó pörgettyű tengelyét két támaszték tartja szimmetrikusan, vízszintes helyzetben a 13-34 ábrán látható módon. A rendszer vízszintes forgóasztalon nyugszik. Ha a forgóasztalt felülről nézve az óramutató járásával megegyező irányban forgatjuk, akkor melyik támaszték, az *A* vagy a *B*, fog nagyobb felfelé mutató erőt gyakorolni a pörgettyűtengely végére? Magyarázzuk meg az érvelésünket.



13-34 ábra.
A 13C-48 feladathoz.

10A-15 a) 200 N b) 173 N jobbra, 100 N felfelé
10A-17 0,94 m
10A-19 A válasz adott.
10B-21 A válasz adott.
10B-23 $\theta = \text{arctg}\,(f/m_s)$
10B-25 a) 1011 N b) 854 N, 14,2° a vízszintes felett
10B-27 a) 214 N b) 369 N, 54,5° a vízszintes felett
10B-29 $b(1+\sqrt{3})$
10B-31 515 N
10B-33 a) 1386 N b) 1297 N, 67,7° a vízszinteshez
10B-35 A válasz adott.
10B-37 $\theta = \text{arctg}\,\mu_k$)
10B-39 a) $N_A = N_B = 60$ N b) 16,4 N
10C-41 15,9°
10C-43 2230 N
10C-45 A válasz adott.
10C-47 A válasz adott.
10C-49 a) 17,6 N b) 42,9 N
c) 13,3 N, 41,0° a függőlegestől
10C-51 A válasz adott.
10C-53 A válasz adott.
10C-55 $(0{,}3a\,/\,4)$
10C-57 A válasz adott.
10C-59 $1{,}04T$

XI. Fejezet

11A-1 a) $3{,}14\times10^{-4}$ m/s b) $1{,}75\times10^{-3}$ rad/s
11A-3 kismutató $\frac{1}{45}\times10^{-4}$ rad/s; asztronauta $1{,}05\times10^{-3}$ rad/s; nagymutató $1{,}75\times10^{-3}$ rad/s; köszörűkő 628 rad/s
11A-5 a) 17,4 s b) 4,85 rev
11B-7 13,5 s
11B-9 A válasz adott.
11A-11 43,4 rad/s
11B-13 $\frac{v}{\pi D}\sqrt{\frac{2h}{g}}$
11C-15 $\delta = (R-r)\theta\,/\,r$

XII. Fejezet

12A-1 a) $2m\ell^2$ b) $m\ell^2$ c) $2m\ell^2$ d) $m\ell^2$
12B-3 A válasz adott.
12B-5 A válasz adott.
12A-7 3,16 cm
12A-9 $8{,}50\times10^{-32}$ kg·m²/s
12A-11 a) 0,320 kg·m² b) 0,960 kg·m²/s c) 4,80 N
12B-13 32,9 N·m $-\hat{z}$ irányban
12A-15 0,480 N
12B-17 a) 24,0 N·m b) $3{,}56\times10^{-2}$ rad/s²
c) 1,07 m/s²
12B-19 a) $T_1 = 24{,}2$ N, $T_2 = 30{,}0$ N b) 4,30 m/s
12B-21 a) $\sqrt{g\,/\,R}$ b) $\frac{Mk^2}{4F}\sqrt{\frac{g}{R^3}}$
12B-23 a) 6,25 rad/s² b) 50 rad
12B-25 0,103 rad/s
12B-27 0,526 rad/s
12A-29 $L^2/2mR^2$
12B-31 2,87 rad/s²
12B-33 a) 67500 kJ b) 24 m
12C-35 $\frac{3}{5}Ma^2$
12C-37 c) $2Ml^2/3$
12C-39 376 kg·m²
12C-41 a) m/M b) $\frac{1}{2}\left[mM\,/\,(m+M)\right]D^2\omega^2$
12C-43 A válasz adott.
12C-45 a) 0,506 kg b) 60,4 N
12C-47 $1{,}97\times10^{-3}$ N
12C-49 A válasz adott.
12C-51 a) 6t Newton méterben, ha t másodprcben adott
b) $0{,}060t^2$ radiánban ha t másodpercben adott
12C-53 A válasz adott.
12C-55 $\sqrt{3gD\sin\theta}$
12C-57 2,20 m/s
12C-59 $D\omega_o\sqrt{\frac{3}{2}}$

XIII. Fejezet

13A-1 a) 4,00 J b) 2,00 J c) 6,00 J
13A-3 5,96 m/s
13B-5 $\theta = \text{arctg}\,(7\mu_s/2)$
13B-7 A válasz adott.
13B-9 A válasz adott.
13B-11 a) 66,7 rad/s b) 8,84 rad/s
13A-13 $M\ell^2/3$
13B-15 $g\sin\theta/(1+k_o^2/R^2)$
13B-17 35,3°
13B-19 a) 7,48 m/s b) 55,0°
13B-21 a) 0,741 rad/s b) az óramutató járásával azonos irányban
13C-23 $[11(R-r)]/4$
13C-25 $h = \frac{7}{5}R$
13C-27 $a = F\,/\,(M + m\,/\,3)$
13C-29 b) $\frac{4T}{11}$
13C-31 arc sin (r/R)
13C-33 A válasz adott.
13C-35 $\frac{2}{3}\ell$
13C-37 a) $5v_o/7$ b) $12mv_o^2/49f$
13C-39 a) $2Mg/3$, lefelé b) $R/2$ a TKP-től
13C-41 A válasz adott.
13C-43 a) $v_o/3$ b) 0,500
13C-45 a) $F_1 = 197$ N, $F_2 = 131$ N
13C-47 jobbra

A MOZGÁS LEÍRÁSA GYORSULÓ KOORDINÁTARENDSZERBEN, TEHETETLENSÉGI ERŐK



Honoré Daumier (francia festő 1808-1879) Benyomások és összenyomódások utazás közben („Ó irgalom, mind elvesztünk." „Dehogy! Csak a vonat indult el ismét ... mindenki tudja, hogy ha a mozdony előre indul, az utasok hátra esnek!") Kőnyomat a The Railroads c. folyóirat 1853 évi 9. számából.
Fotó: Armand Hammer Alapítvány

14.1 Bevezetés[1]

Mindenki tapasztalta már, aki gépkocsiban utazott, hogy ha az autó gyorsan kanyarodik, akkor az utas az ülésnek a kanyar külső oldala felé eső részére sodródik. Az utas számára ez a kifelé irányuló „erő" nagyon valódinak tűnik. Hasonlóképpen a hirtelen fékező autó utasai olyan hevesen vágódnak előre, hogy – hacsak nincsenek bekötve a biztonsági övvel – a műszerfalnak lökődve próbálják elhárítani az előrelökő „erő hatását". A két említett példa egy speciális erőtípust mutat be: olyan erőt, amelynek sem fizikai forrása, sem más, tárgyi eredete nincs. Oka abban a tényben keresendő, hogy *az észlelő személy gyorsuló koordinátarendszerben van*. Ezeknek a jelenségeknek a megértéséhez megszokott gondolkodásmódunk átértékelése szükséges. De – jóllehet első hallásra ez furcsának tűnik – ha valaki képes a jobbkéz-szabályt a vektoriális szorzat esetében eredményesen alkalmazni, akkor a témakör alább következő tárgyalása egyszerűbb, mint ahogyan ez az első pillanatban látszik.

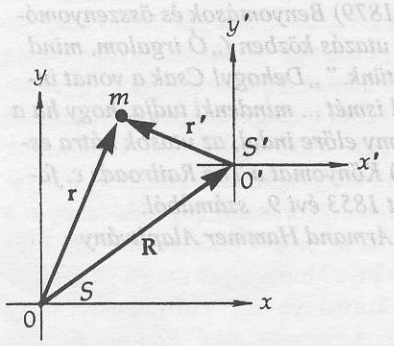
[1] Ennek a fejezetnek egy részét a szerzők átvették a *Physics – A New Intruductory Course*, Science Teaching Center, M.I.T. 1965. c. munkájukból.

14.2 Fiktív erők

Minden erőnek, amelyről ezidáig szó volt, volt valamiféle „forrása". Vagyis az erőt valamely más objektum, fizikai rendszer okozta. Példa erre a kötelet vagy a rugót feszítő erő, a tárgyak ütközésekor fellépő erő és a gravitációs erő. Ezeket „valódi erőknek" fogjuk nevezni, értve ezalatt azt, hogy ezek esetében a testre ható erő okául mindig fellelhető egy másik objektum, amitől az erőhatás származik.

A Newton törvényeket mindeddig „valódi" erőkre alkalmaztuk, s a vizsgált jelenségeket *inercia*rendszerben írtuk le. Inerciarendszerben szerzett ismereteink szerint nagyon elégedettek vagyunk azzal a newtoni gondolattal, hogy a testek nem képesek önmaguk gyorsítására – *a testek gyorsulását külső erőnek (vagy külső erők eredőjének) kell tulajdonítani.* Ha gyorsuló rendszerben tartózkodunk, akkor a gyorsuló koordinátarendszernek az alkalmazása a legmegfelelőbb. Az ilyen rendszerben azonban Newton törvényei eredeti alakjukban nem érvényesek. Ahelyett azonban, hogy elvetnénk, Newton törvényét inkább úgy módosítjuk, hogy a gyorsuló rendszerből megfigyelt jelenségek is a már jól ismert módszerrel legyenek vizsgálhatók. A módosítás abból áll, hogy Newton második törvényének erő-oldalához ún. „tehetetlenségi" vagy „fiktív" erőket[2] adunk hozzá.

14.3 Egyenesvonalú gyorsuló koordinátarendszerek



14-1 ábra
Az S illetve az S' koordinátarendszerben lévő megfigyelő az m tömegű test helyét az $\mathbf{r}$ illetve az $\mathbf{r}'$ helyzetvektorral jelöli. A $\mathbf{R}$ vektor az S' koordinátarendszer origójának az S koordinátarendszer origójához viszonyított helyzetét adja meg.

Az alábbiakban egy m tömegpont mozgását olyan jelölésrendszer segítségével írjuk le, ahogyan az két különböző vonatkoztatási rendszerből látszik.[3] Tekintsünk egy inerciarendszerhez képest nyugvó S koordinátarendszert. Tegyük fel, hogy egy másik S' koordinátarendszer S-hez képest tetszőleges haladó mozgást végez. (14-1 ábra.) Az S' rendszerben végzett mérési adatainkat „vesszővel" (a „'" szimbólummal) fogjuk jelölni. (Kényelmi szempontból az S' rendszer x', y' és z' tengelyeit úgy választjuk meg, hogy azok az S rendszer megfelelő tengelyeivel párhuzamosak legyenek.) Az $\mathbf{R}$ helyvektor az O' origó O-ra vonatkoztatott helyzetét jelöli.

Az S, illetve az S' koordinátarendszerbeli megfigyelők ugyanannak az m tömegpontnak a helyzetét az $\mathbf{r}$, illetve az $\mathbf{r}'$ helyzetvektorral adják meg. Ezekre a vektorokra a vektoriális összegezés szokásos szabálya szerint fennáll:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}. \qquad (14\text{-}1)$$

Ha mind m, mind S' mozgásban van, akkor m sebessége a két koordinátarendszerben a helyzetvektorok idő szerinti deriválásával kapható:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

azaz

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_R \qquad (14\text{-}2)$$

ahol $\mathbf{v}_R$ az O' origó O-hoz viszonyított sebességét jelöli. Hasonlóképpen, ha az m tömegpont gyorsul, akkor ismételt deriválással megkapjuk a gyorsulásokat:

---

[2] A tehetetlenségi vagy fiktív erő más elnevezése: pszeudo vagy inerciaerő.

[3] Az „ahogyan egy adott vonatkoztatási rendszerben *látszik*" szóhasználatot nem kell betű szerint érteni. Egy vonatkoztatási rendszerben lévő test mozgásának „nézése" vagy „megfigyelése" itt annyit jelent, hogy „*a testen* a speciális vonatkoztatási rendszerhez viszonyított *tér- és időméréseket végzünk.*"

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_R}{dt}$$

azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_R \qquad (14\text{-}3)$$

ahol $\mathbf{a}_R$ az O' középpont O-hoz viszonyított gyorsulását jelenti. A (14-3) egyenlet minden esetre érvényes általános összefüggés.

Egyenletesen (gyorsulás nélkül) mozgó rendszer

Először az S rendszerhez képest *egyenletesen* (gyorsulás- és forgásmentesen) mozgó S' rendszer speciális esetét vizsgáljuk, így $\mathbf{a}_R = 0$. Minthogy az S inerciarendszerben érvényesek Newton törvényei, ezért ha m (valódi) külső $\mathbf{F}$ erő hatása alatt áll, akkor

S-ből nézve $$\sum \mathbf{F}_{\text{valódi}} = m\mathbf{a}. \qquad (14\text{-}4)$$

(14-3) egyenletet m-mel szorozva kapjuk:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_R. \qquad (14\text{-}5)$$

De, mivel $\mathbf{a}_R = 0$, azért ez $m\mathbf{a} = m\mathbf{a}'$-re egyszerűsödik, vagy (14-4) miatt,

S'-ből nézve $$\sum \mathbf{F}_{\text{valódi}} = m\mathbf{a}' \qquad (14\text{-}6)$$

(Ha S' egyenletesen halad, nem gyorsul)

Tehát Newton első és második törvénye érvényes az egyenletesen, azaz gyorsulás nélkül mozgó koordinátarendszerekben. Az összes ilyen koordinátarendszert **inerciarendszernek,** vagy tehetetlenségi rendszernek nevezzük, mert Newton első törvénye – a tehetetlenség törvénye – érvényes bennük.

Egyenletesen gyorsuló rendszerek

Tekintsük most azt az érdekesebb esetet, amikor az S' rendszer S-hez viszonyítva egyenesvonalú pályán $\mathbf{a}_R$ állandó gyorsulással mozog. A (14-5) egyenlet átrendezésével:

$$m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_R = m\mathbf{a}'. \qquad (14\text{-}7)$$

Minthogy $\sum \mathbf{F}_{\text{valódi}} = m\mathbf{a}$, ezért írhatjuk:

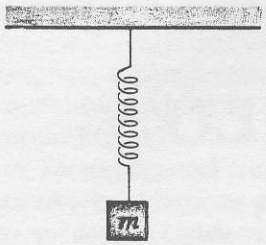
$$\sum \mathbf{F}_{\text{valódi}} - m\mathbf{a}_R = m\mathbf{a}'. \qquad (14\text{-}8)$$

Ez a levezetés döntő lépése. Az S' rendszerben az m tömegpontnak $\mathbf{a}'$ gyorsulása van. A newtoni mechanikában *egy test azért gyorsul, mert zérustól különböző eredő erő hat rá.* Newton gondolkodásmódja mélyen beivódott józan eszünkbe, és annak érdekében, hogy Newton törvényének alakját megtartsuk, kitaláljuk az $[\mathbf{F}_{\text{valódi}} - m\mathbf{a}_R]$ mennyiséget, mint azt, ami $\Sigma\mathbf{F}'$ erőként az m tömegű testre hatva a testnek az S' rendszerben észlelt $\mathbf{a}'$ gyorsulását okozza. Ez a $\Sigma\mathbf{F}'$ eredő erő két részből áll: A *valódi* $\Sigma\mathbf{F}_{\text{valódi}}$ és a $-m\mathbf{a}_R$ un. inercia vagy tehetetlenségi erőből. Ily módon a gyorsuló S' rendszerben Newton második törvényét a következőképpen írhatjuk :

Newton második törvénye (az $\mathbf{a}_R$ gyorsulással mozgó rendszerre módosított alakban)

$$\sum \mathbf{F}' = \underbrace{\Sigma\mathbf{F}_{\text{valódi}}}_{\text{(a valódi erők összege)}} + \underbrace{(-m\mathbf{a}_R)}_{\text{(tehetetlenségi erő)}} \qquad (14\text{-}9)$$

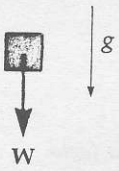
ahol a **tehetetlenségi erőt** így definiáljuk:



(a) A rugóra akasztott test.



(b) A rugóra akasztott test vektorábrája.



(c) A szabadon eső test lefelé gyorsul g gyorsulással.

14-2 ábra
Nyugvó inerciarendszerben vizsgált jelenség, **g** gravitációs mező jelenlétében.

Tehetetlenségi erő (az egyenesvonalú egyenletes gyorsulással mozgó koordináta rendszerben)

$$\mathbf{F}_{\text{tehetetl.}} = -m\mathbf{a}_R \qquad (14\text{-}10)$$

A forgatónyomatékok számítása szempontjából ezt az erőt úgy tekinthetjük, mintha a tömegközéppontra hatna. A tehetetlenségi erő hozzáadása nem csupán matematikai trükk. Amint majd hamarosan látni fogjuk, a gyorsuló rendszerben dolgozó megfigyelők a $-m\mathbf{a}_R$ erő jelenlétét kísérletileg igazolni tudják, méghozzá *pontosan úgy*, mint ahogyan a gravitációs erő jelenlétét igazolják.

Az előjelekre vonatkozóan külön megjegyzést kell tennünk. Az egyenletekben a negatív előjelet mindig beleértjük az $\mathbf{F}_{\text{tehetetl.}}=(-m\mathbf{a}_R)$ tehetetlenségi erő definíciójába. Jegyezzük meg, hogy a tehetetlenségi erő iránya a rendszer $\mathbf{a}_R$ gyorsulásának irányával *ellentétes*. Ez az eljárás összhangban van azzal, hogy egy testre ható eredő erő a testre ható összes erő *összegével* egyenlő. Így a gyorsuló rendszerben az eredő $\Sigma\mathbf{F}'$ erő a valódi és a tehetetlenségi erő $\Sigma\mathbf{F}' = \Sigma\mathbf{F}_{\text{valódi}} + \mathbf{F}_{\text{tehetetl.}}$ *összege*.

Vektordiagramok rajzolásakor a nyilakra soha nem teszünk negatív jelet. Az erők helyes irányát maga a diagram tünteti fel, függetlenül a koordinátarendszer választásából adódó irányok előjelétől. Így a tehetetlenségi erő helyes irányaként az $\mathbf{a}_R$ -rel ellentétes irányt választva, a vázlaton a vektort már csak egyszerűen nagyságával, ma_R-rel jelöljük.

A $(-m\mathbf{a}_R)$ erő forrásaként egyetlen fizikai rendszert vagy testet sem nevezhetünk meg. Ebben az értelemben ez az erő „fiktív". De az S' rendszerben ülő megfigyelő számára valóban „jelen van". Gondoljuk csak meg, miként észleljük a gravitációs erőt egy inerciarendszerben! Ha egy rugóra m tömegű testet akasztunk (lásd a 14-2a ábrát), akkor a rugó megnyúlik és egy felfelé mutató **T** erőt fejt ki, pontosan egyensúlyozva a **W** gravitációs erőt. Valójában éppen abból következtetünk a lefelé mutató gravitációs erőre, hogy a rugó megnyúlt. Ha a **T** erőt a **W** erővel kombináljuk, akkor az m tömegű testre zérus eredő erő hat, és a test nyugalomban marad. Ha a rugó eltörik, akkor a test lefelé gyorsul, ami a gravitációs erő további bizonyítéka. A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ összefüggést alkalmazva azt mondjuk, hogy a lefelé mutató **g** gyorsulást a most egymagában ható **W** gravitációs erő okozza: $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$.

Tegyük fel, hogy ugyanezt a kísérletet gravitációmentes tartományban, de $\mathbf{a}_R$ gyorsulással mozgó S' koordinátatrendszerben (14-3 ábra) végezzük el. Az itteni megfigyelők észlelik a rugó megnyúlását, ami azt jelzi, hogy az m tömegű testre felfelé irányuló erő hat. De mivel a test ebben a rendszerben nyugalomban van, ezért arra következtetnek, hogy egy másik, „lefelé" mutató $-m\mathbf{a}_R$ erő is van jelen, ami a testet az S' rendszerben nyugalomban tartja. Továbbá, ha a rugó elszakad, a megfigyelők a test $-\mathbf{a}_R$ gyorsulással „lefelé" irányuló mozgását észlelik, a kiegyensúlyozatlan $-m\mathbf{a}_R$ erő következményeként.

Tehát a gyorsuló S' rendszerben lévő megfigyelők a $-m\mathbf{a}_R$ tehetetlenségi erő jelenlétére *pontosan* ugyanolyan módon következtetnek, ahogyan mi a gravitációs erőre, és a tehetetlenségi erő számukra ugyanolyan realitás, mint számunkra a gravitációs erő. Persze van a dolognak néhány szokatlan vonása. Szemben azzal, hogy a gravitáció oka egy közelünkben lévő tömeg (a Föld), a tehetetlenségi erő okául semmilyen más testet vagy rendszert nem lehet megjelölni. Minthogy nem anyag fejti ki, nem engedelmeskedik Newton harmadik törvényének sem. *A tehetetlenségi erő annak következménye, hogy a jelenséget gyorsuló rendszerben vizsgáljuk és hogy Newton második törvényének alakját meg szeretnénk tartani.* Szigorúan ragaszkodunk ahhoz a gondolathoz, hogy a testek azért gyorsulnak, mert egy kiegyensúlyozatlan (kompenzálatlan) erő hat rájuk.

A továbbiakban megoldunk néhány, egyenesvonalú gyorsuló koordinátarendszerből megfigyelt mozgásra vonatkozó példát. A jobb érthetőség

kedvéért a példákat az S és az S' rendszerben lévő megfigyelő szempontjából párhuzamosan tárgyaljuk. A fejezet minden példájában fel fogjuk tételezni, hogy az S és az S' rendszerbeli megfigyelő tudja, melyik a „felfelé" mutató irány és, hogy mindkét rendszerben a testekre ható gravitációs erő ugyanaz a W. A kétféle leírás között a tehetetlenségi erők jelenléte vagy hiánya képezi az egyetlen különbséget.

14-1 PÉLDA

Tekintsünk egy vasúti kocsi mennyezetéről zsinóron lelógó m tömegű testet! A kocsinak állandó gyorsulása van (14-4 ábra), aminek következtében a testet felfüggesztő zsinór a függőlegessel θ szöget alkot. Határozzuk meg ezt a szöget a megadott mennyiségek függvényében!

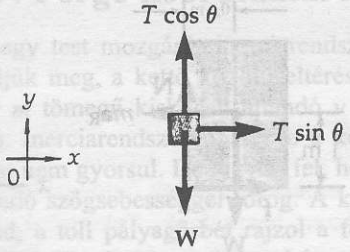
MEGOLDÁS

A feladatot a földhöz rögzített S inerciarendszer és a kocsihoz rögzített gyorsuló S' rendszer megfigyelőjének szemszögéből tárgyaljuk

S-ből megfigyelve
(Földi rendszer)



Minthogy a tárgy jobbfelé gyorsul, azért az erőket olyan egymásra merőleges komponensekre bontjuk, amelyek egyike a gyorsulás irányába mutat.

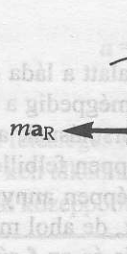


Vízszintes komponens

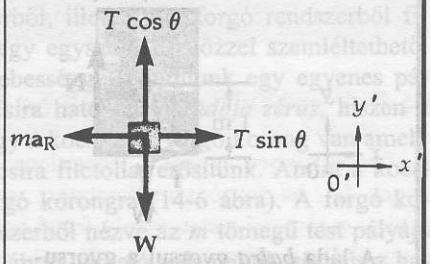
$$\sum F_x = ma_x$$

$$[T\sin\theta] = ma \qquad [1]$$

S'-ből megfigyelve
(Mozgó rendszer)



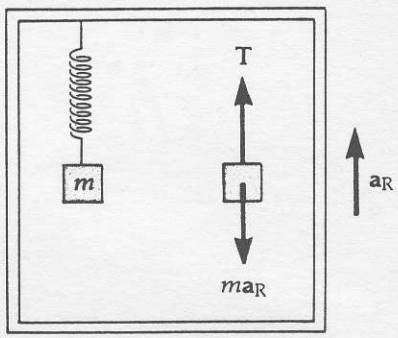
Az erőket két egymásra merőleges komponensre bontjuk. Megjegyezzük, hogy az ma_R tehetetlenségi erő *balra* mutat (mivel a kocsi *jobbra* gyorsul). A test S'-ben nyugalomban van.



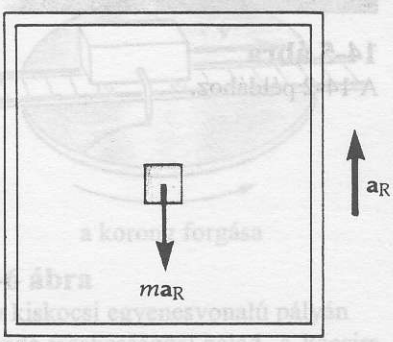
Vízszintes komponens

$$\sum F'_x = 0 \quad \text{(Egyensúly)}$$

$$[T\sin\theta - ma_R] = 0 \qquad [1]$$

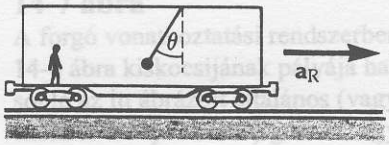


(a) A gyorsuló rendszerben ülő megfigyelők azt hiszik, hogy az m tömegű testre két, egymással egyensúlyban lévő erő hat. Így a megfigyelők magyarázatát tudják adni annak, hogy miért marad az m tömegű test az ő koordinátarendszerükben nyugalomban.

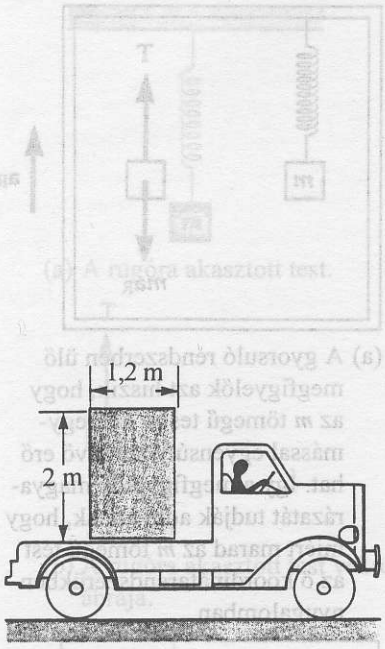


(b) Ha a rugó elszakad, a megfigyelők látják, hogy az m tömegű test a kiegyensúlyozatlan ma_R erő hatására a doboz padlója felé gyorsul.

14-3 ábra
Gravitációs mezőtől mentes térrészben a_R gyorsulással felfelé mozgó dobozhoz rögzített koordinátarendszerre vonatkozó jelenség. Itt tehát gyorsuló koordinátarendszerről van szó.



14-4 ábra
A 14-1 példához.



14-5 ábra
A 14-2 példához.

Függőleges komponens

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(Egyensúly)}$$

$$[T\cos\theta] = mg \qquad [2]$$

[1] -et [2]- vel osztva:

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{ma}{mg}$$

$$tg\,\theta = \frac{a}{g}$$

Függőleges komponens

$$\sum F'_y = 0 \quad \text{(Egyensúly)}$$

$$[T\cos\theta] = mg \qquad [2]$$

[1] -et [2]-vel osztva:

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{ma_R}{mg}$$

$$tg\,\theta = \frac{a_R}{g}$$

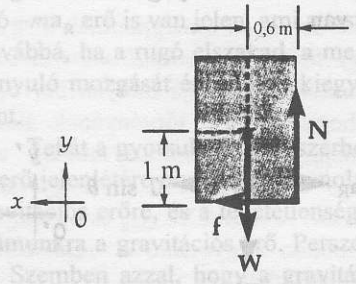
14-2 PÉLDA

Egy 48 km/óra sebességgel haladó teherkocsin 1 × 1,2 × 2 méter méretű, 100 kg tömegű ládát szállítanak. A vezető úgy akar fékezni, hogy a kocsi a lehető leghamarabb megálljon, de a láda ne boruljon fel. A láda a kocsin a 14-5 ábrán látható módon van elhelyezve. Tömegközéppontja a geometriai középpontjában van. Feltételezve, hogy a láda nem csúszik meg, határozzuk meg azt a maximális gyorsulást, amellyel a kocsi a láda felborulásának veszélye nélkül fékezhető le!

MEGOLDÁS

A fékezés ideje alatt a láda (feltéve, hogy nem csúszik meg) felbillenésre hajlamos, mégpedig a kocsi elejéhez legközelebbi éle körül fordulva. Az **a** gyorsulásnak azt az értékét határozzuk meg, amelynek hatására a láda éppen felbillen. Ez ahhoz a határesethez tartozik, amikor a láda csak éppen annyira fordul el, hogy teljes súlyával az első élre támaszkodik, de ahol még éppen forgási egyensúlyban van. Emiatt az **N** normális és az **f** súrlódási erő hatásvonala is ezen az elülső élen megy át. Megjegyezzük, hogy csúszás hiányában *nem* tételezhetjük fel, hogy a nyugalmi súrlódási erő maximális értékét veszi fel. Tehát $f_s \neq \mu_s N$.

Ahogyan *S* -ből látszik
(Földi rendszer)



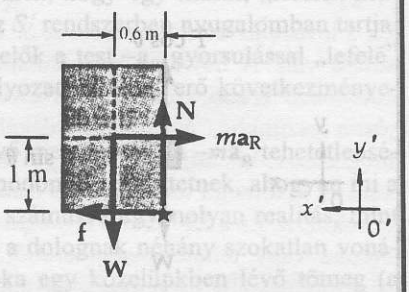
A láda *balra* gyorsul **a** gyorsulással. Forgási egyensúlyban van.

Vízszintes komponens

$$\sum F_x = ma_x$$

$$f = ma \qquad [1]$$

Ahogyan *S'*-ből látszik
(Mozgó rendszer)



A láda haladási és forgási egyensúlyban van. Minthogy *S'* balra gyorsul, azért a $(-ma_R)$ tehetetlenségi erőt jobbra irányítjuk.

Vízszintes komponens

$$\sum F'_x = 0 \quad \text{(egyensúly)}$$

$$f = ma_R \qquad [1]$$

Függőleges komponens

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(egyensúly)}$$

$$N = mg \qquad [2]$$

Forgási egyensúly

Minthogy a test gyorsulva halad, a forgatónyomatékokat *csak* a tömegközéppontra[4] (TKP) kell felírni.

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

(tömegkp-ra) (Forgási egyensúly)

[Óramutató járásával megegyező irányú forgatónyomatékok] = [Óramutató járásával ellentétes irányú forgatónyomatékok.]

$$f(1\text{ m}) = N(0{,}6\text{ m}) \qquad [3]$$

[1]-et és [2]-t [3]-ba helyettesítve:

$$ma\,(1\text{ m}) = mg\,(0{,}6\text{ m})$$

$$a = \frac{2}{3}g$$

Függőleges komponens

$$\sum F'_y = 0 \quad \text{(egyensúly)}$$

$$N = mg \qquad [2]$$

Forgási egyensúly

Minthogy ebben a rendszerben a láda mind haladási, mind forgási egyensúlyban van, ezért a forgatónyomatékokat *tetszőleges tengelyre* számíthatjuk. Az egyik ismeretlen kiküszöbölésére az első élt választjuk tengelynek.

$$\sum \mathbf{M}' = 0$$

(első élre) (Forgási egyensúly)

[Óramutató járásával megegyező irányú forgatónyomatékok] = [Óramutató járásával ellentétes irányú forgatónyomatékok.]

$$ma\,(1\text{ m}) = mg\,(0{,}6\text{ m}) \qquad [3]$$

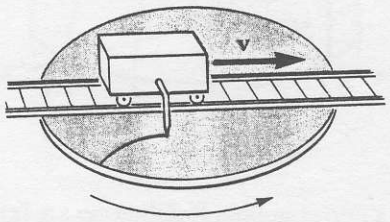
$$a = \frac{2}{3}g$$

Megjegyzés: A láda tömegének megadása felesleges információ. A láda tömegétől függetlenül ugyanazt a fékezést kell alkalmazni. De az fontos, hogy a láda tömegközéppontja a geometriai középpontban van.

A továbbiakban forgó koordinátarendszerekkel foglalkozunk. Tárgyalásunkban állandó szögsebességgel forgó (szöggyorsulás-mentes) rendszerekre szorítkozunk. De a forgás állandó szögsebessége ellenére a centripetális gyorsulás következtében az ilyen koordinátarendszer mégis *gyorsuló*.

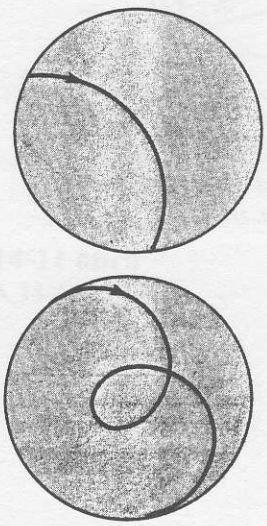
14.4 Forgó koordinátarendszerek

Ha egy test mozgását inerciarendszerből, illetve egy forgó rendszerből figyeljük meg, a kettő közötti eltérés egy egyszerű eszközzel szemléltethető. Egy m tömegű kiskocsit állandó v sebességgel elindítunk egy egyenes pályán. Inerciarendszerből nézve a kocsira ható *erők eredője zérus*, hiszen a kocsi nem gyorsul. De tegyük fel, hogy a kocsi alatt forgó korong van amely állandó szögsebességgel forog. A kocsira filctollat erősítünk. Amint a kocsi halad, a toll pályagörbét rajzol a forgó korongra (14-6 ábra). A forgó koronghoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve az m tömegű test pályája (ahogyan a filctoll felrajzolja) a 14-7 ábrán látható valamelyik görbéhez hasonló. A görbevonalú pálya miatt a forgó vonatkoztatási rendszerben lévő



a korong forgása

14-6 ábra
Egy kiskocsi egyenesvonalú pályán állandó v sebességgel halad. A kocsira erősített írótoll a kocsi pályáját a forgó korongra rajzolja.



14-7 ábra
A forgó vonatkoztatási rendszerben a 14-6 ábra kiskocsijának pályája hasonló az itt ábrázolt általános (vagy ezeknél bonyolultabb) görbék egyikéhez, a forgó korong szögsebességétől függően.

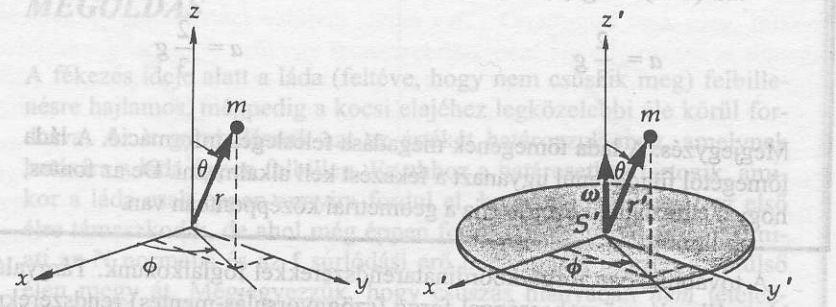
[4] Felidézzük a 10.6 fejezetből, hogy forgatónyomaték számításához (a forgó mozgás alapegyenletével való felírásához) csak akkor választhatunk szabadon bármilyen tengelyt, ha a test haladási és forgási egyensúlyban van. Itt, minthogy lineáris gyorsulással van dolgunk, a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomaték számításához vagyunk kötve. (Ugyanez a megszorítás érvényes gyorsuló koordinátarendszerben is.)

megfigyelő – ha hisz a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény érvényességében – arra következtet, hogy *a testre ható erők összegének zérustól különbözőnek kell lennie, mert a test csak így kényszerülhet görbevonalú mozgásra.* Ekkor a test nyilvánvalóan gyorsul. Inerciarendszerből nézve azonban a testre ható erők összege *zérus*. Ez újabb példa a gyorsuló – ez esetben forgó – vonatkoztatási rendszerben fellépő tehetetlenségi erőre. Először alkalmas jelölésrendszert vezetünk be. Tekintsünk két rendszert:

Az *S* RENDSZER **az „állócsillagokhoz" viszonyítva nyugalomban lévő „stacionárius", vagy inerciarendszer. Kényelmi okból ezt gyakran földi rendszernek nevezzük.**

Az *S'* RENDSZER **az *S*-hez viszonyított ω szögsebességgel forgó koronghoz rögzített rendszer. Az ebben végzett mérési adatokat „vesszővel" (') *jelöljük*, hogy megkülönböztessük az *S* inerciarendszerben végzett mérések *vesszős nélküli* adataitól.**

A szimmetria nyújtotta előnyök kihasználására az r, θ és ϕ gömbi koordinátákat használjuk (14-8a ábra). Kényelmi okból az O és az O' origókat a forgó korong középpontjába helyezzük, hogy ugyanaz az **r** helyzetvektor (ami megegyezik **r'**-vel) adja meg az m tömegű test helyét mindkét vonatkoztatási rendszerben. A z és a z' tengelyek ugyancsak essenek egybe. Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor mindig a forgástengelyben fekszik (14-8b ábra).



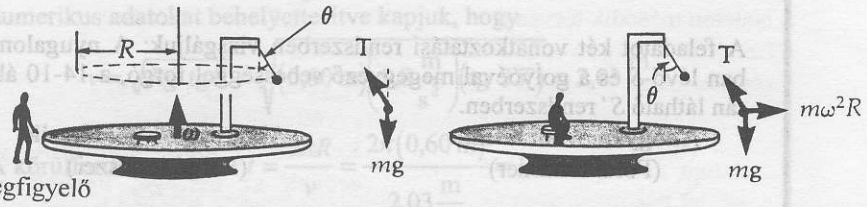
(a) Az r, a θ és a ϕ gömbi koordináták. Az m tömegpont helyzetét az **r** vektor adja meg.

(b) A forgó koronghoz rögzített S' koordinátarendszer z' tengelye a forgástengelyben fekszik. Az m tömegpont helyzetét az **r'** vektor adja meg. Az ω szögsebességvektor a forgástengelyben fekszik.

14-8 ábra
A stacionárius S és a forgó S' vonatkoztatási rendszer kapcsolata.

14.5 A centrifugális erő és a Coriolis erő

A következőkben azokat a tehetetlenségi erőket vizsgáljuk, amelyek akkor lépnek fel, ha forgó vonatkoztatási rendszert használunk. Tekintsünk egy kicsiny m tömegű testet, amely forgó korongra erősített állványra van felfüggesztve. (14-9a ábra.) A test a függőlegessel θ szöget bezáró fonálon függ és *a forgó rendszerben nyugalomban van.* A földi (S rendszerbeli) megfigyelő úgy látja, hogy a test R sugarú körpályán ω szögsebességgel mozog. A fonalat feszítő erő vízszintes komponense, $T\cdot\sin\theta$, az a valódi erő, amely a testnek a körpálya középpontja felé mutató $\omega^2 R$ nagyságú centripetális gyorsulását okozza. De a forgó S' rendszerben (14-9b ábra) a test nyugalomban van, amiből az következik, hogy az m tömegpontra ható erők eredője zérus. Így, az előző bekezdésben ismertetett érveléshez hasonlóan arra következtethetünk, hogy egy $m\omega^2 R$ nagyságú, kifelé mutató tehetetlenségi erő lépett fel,



(a) Az S földi vonatkoztatási rendszerből nézve a labda R sugarú vízszintes körön ω szögsebességgel mozog. T vízszintes komponense a befelé mutató centripetális erő.

(b) A forgó korong S' vonatkoztatási rendszerében a labda nyugalomban van. A kifelé mutató $m\omega^2R$ centrifugális erő tartja egyensúlyban a labdát a forgó koordinátarendszerben.

14-9 ábra
Forgó korongra erősített állványon zsinórra kötött labda lóg.

ami a fonalat feszítő erő valódi, befelé mutató komponensével egyensúlyt tart. Ezt a kifelé mutató F_{cf} erőt **centrifugális erőnek**[5] nevezzük.

Centrifugális erő

$$F_{cf} = m\omega^2 R \qquad \text{[A forgástengelyre merőlegesen kifelé]} \qquad \textbf{(14-11)}$$

ahol R a forgástengelytől mért távolság. Vektoriális alakban[6]

$$\mathbf{F}_{cf} = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \qquad \textbf{(14-12)}$$

ahol $\mathbf{r}'$ az m tömegpont S' rendszerben elfoglalt helyének O' origóból húzott helyzetvektora. A vektoriális szorzást nem kell minden esetben kifejteni, mert mint az általános esetben (14C-31 feladat) majd megmutatjuk, $\mathbf{F}_{cf}$ *mindig a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat.* Mint a többi tehetetlenségi erő definiálásakor, itt is figyeljünk a vektor definíciójában szereplő negatív előjelre. (A vektordiagramokon azonban nem szabad a negatív előjelet használni; az irányt maga a diagram adja meg.) *A centrifugális erő tehetetlenségi erő, csak forgó rendszerben létezik;* inerciarendszerben soha nincs jelen. Ha forgatónyomatékot számolunk, a centrifugális erőt mindig a tömegközéppontra (TKP) hatónak képzeljük éppen úgy, mint a gravitációs erőt.* Valóban, a gyorsuló rendszer megfigyelői számára a tehetetlenségi erők *pontosan* úgy hatnak, mintha egy többlet gravitációs mező lenne „bekapcsolva" – jelen esetben egy radiálisan kifelé irányított mező, amelynek hatása a forgástengelytől mért távolsággal növekszik.

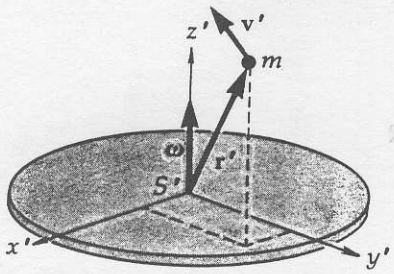
14-3 PÉLDA

Egy zsinór végére erősített golyó $R = 0{,}60$ m sugarú vízszintes körön kering, eközben a zsinór a függőlegessel 35°-os szöget zár be. Számítsuk ki a golyó keringési idejét!

[5] A *centrifugális* szókapcsolatot Newton a latin *centrum* „középpont" és a *fugere* „rohanni", „menekülni" szavakból képezte.

[6] A vektoralgebrában az $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ szorzatot „hármasszorzatnak" nevezik. Lényeges, hogy a zárójelen belüli vektorális szorzást a másik vektorális szorzás elvégzése *előtt* számítsuk ki. (Ha a műveleteket fordított sorrendben végeznénk el, akkor az eredmény mindig zérust adna, mert az $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$ szorzatban $\sin 0°$ zérussal egyenlő.)

* Ez az állítás nem mindig igaz. Egzakt módon akkor teljesül, ha a centrifugális gyorsulás a vizsgált test minden részecskéjére ugyanakkora, ahhoz hasonlóan, ahogyan a gravitációs erő is csak homogén térben egyesíthető a tömegközéppontban. (A fordító megj.)



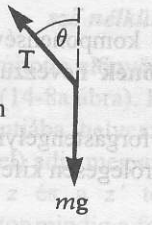
14-10 ábra
A testnek a forgó S' koordinátarendszerből nézve **v'** sebessége van.

MEGOLDÁS

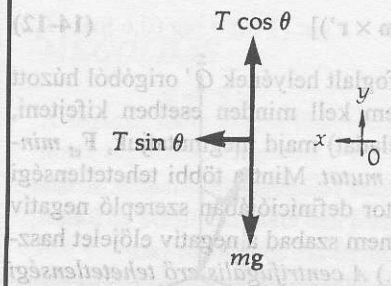
A feladatot két vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk: A nyugalomban lévő S és a golyóéval megegyező sebességgel forgó, a 14-10 ábrán látható S' rendszerben.

Ahogyan *S*-ből látszik
(Földi rendszer)

A golyó állandó sebességgel körpályán mozog, így a kör középpontja felé gyorsul. Ezért a radiális irányt választjuk egyik koordinátairánynak.



Erődiagram



Erődiagram két egymásra merőleges irányban felbontott erőkkel

Vízszintes komponens

$$\sum F_x = ma_x$$

$$T\sin\theta = m\left(\frac{v^2}{R}\right) \quad [1]$$

Függőleges komponens

$$\sum F_y = 0 \quad \text{(Egyensúly)}$$

$$T\cos\theta = mg \quad [2]$$

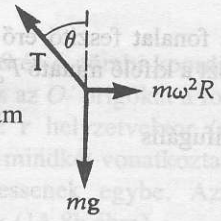
[1]-et [2]-vel osztva kapjuk

$$\frac{T\sin\theta}{T\sin\theta} = \frac{m\left(\frac{v^2}{R}\right)}{mg}$$

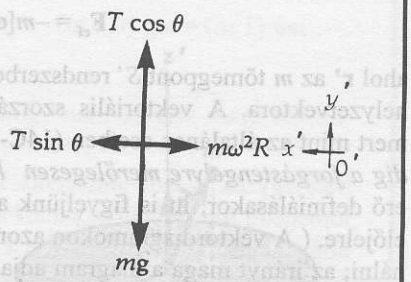
$$tg\,\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Ahogyan *S'*-ből látszik
(Forgó rendszer)

A nyugalom fenntartásához a golyóra a forgó rendszerben a kifelé mutató $mR\omega^2 = m\frac{v^2}{R}$ centrifugális erő is hat.



Erődiagram



Erődiagram két egymásra merőleges irányban felbontott erőkkel

Vízszintes komponens

$$\sum F'_x = 0 \quad \text{(Egyensúly)}$$

$$T\sin\theta = m\omega^2 R\left(= m\frac{v^2}{R}\right) \quad [1]$$

Függőleges komponens

$$\sum F'_y = 0 \quad \text{(Egyensúly)}$$

$$T\cos\theta = mg \quad [2]$$

[1]-et [2]-vel osztva kapjuk

$$\frac{T\sin\theta}{T\sin\theta} = \frac{m\left(\frac{v^2}{R}\right)}{mg}$$

$$tg\,\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Mindkét elemzés ugyanarra az eredményre vezet; v -re megoldva és a numerikus adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$v = \sqrt{Rg\ \mathrm{tg}\theta} = \sqrt{(0{,}60\ \mathrm{m})\left(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(\mathrm{tg}\ 35°)} = 2{,}03\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A körülfordulási idő $t = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi(0{,}60\ \mathrm{m})}{2{,}03\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}86\ \mathrm{s}.$

A Coriolis erő

Ha egy testnek *az S' rendszerből tekintve* **v'** sebessége van (14-10 ábra), akkor további erő jelenik meg. Ezt az $\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}}$ erőt **Coriolis erőnek**[7] nevezzük:

Coriolis erő $$\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \qquad \textbf{(14-13)}$$

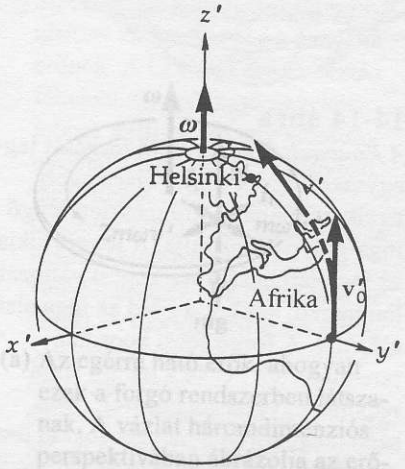
ahol **v'** az m tömegű test S' rendszerben mért sebessége. A negatív előjel fontos, ha az $\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}}$ erő helyes irányának meghatározására a vektoriális szorzat jobbkéz-szabályát akarjuk alkalmazni [lásd a 10.3 fejezetet]. (A vektordiagramokban nem használjuk a negatív előjelet.) A Coriolis erő *eltérítő* erő, mindig merőleges a **v'** sebességre. Ha a test a forgó rendszerben nem mozog, akkor nincs Coriolis erő. Ez *tehetetlenségi erő,* soha nincs jelen inerciarendszerben. Forgatónyomaték számításakor a Coriolis erőt a test tömegközéppontjában (TKP) támadó erőnek tekintjük.*

14-4 PÉLDA

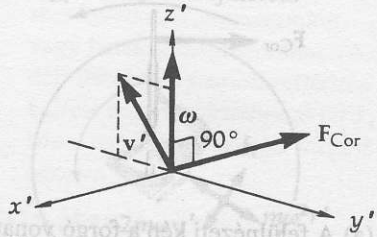
Tegyük fel, hogy a jövőben nagysebességű rakétaposta szolgálatot létesítenek az egyenlítői Középafrika és (az ugyanazon délkörön fekvő) Helsinki között. Ha a repülési programban a Coriolis erőt elhanyagolják, akkor vajon Helsinkitől keletre avagy nyugatra fog-e a rakéta földet érni?

MEGOLDÁS

A 14-11 ábrán látható, hogy a start pillanatában a Coriolis erő zérus (mert a Föld $\boldsymbol{\omega}$ szögsebessége és a kezdeti **v'** sebesség párhuzamosak). Azonban a további repülés során a vektorok szöget zárnak be egymással. Emiatt az $\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$ Coriolis erő keletre mutat, aminek következtében a rakéta Helsinkitől keletre ér földet.



(a) Az egyenlítőről indított rakéta a szaggatott vonallal jelölt pályát követi Helsinki felé.



(b) A rakéta (az $y'z'$ sikban) **v'** sebességgel halad észak felé. A rá ható Coriolis erő iránya $-(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$, (vagyis a $-x$ irány).

14-11 ábra
A 14-4 példához.

Newton második törvényének forgó rendszerekben érvényes alakja

Most megfogalmazzuk Newton második törvényének forgó rendszerekre vonatkozó módosított alakját. Az inerciarendszerekben fellépő $\Sigma\mathbf{F}_{\mathrm{valódi}}$ valódi erőkhöz két „fiktív" tehetetlenségi erőt (inerciaerőt) adunk hozzá:

[7] A Coriolis erőt felfedezőjéről, Gaspard G. Coriolis francia mérnökről nevezték el, aki egyenletét vizikerekek tanulmányozásának eredményeképpen 1835-ben publikálta. A centrifugális- és a Coriolis erő képletének a levezetésére e könyv keretei között nem térhetünk ki.

* Ez alól ismét adódhatnak kivételek pl. akkor, ha a vizsgált kiterjedt test egyes pontjainak sebessége különböző. (A fordító megj.)

Newton második törvénye (módosítva forgó vonatkoztatási rendszerekre)

$$\sum \mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$$

$$\mathbf{F}_{\text{valódi}} + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{Cor} = m\mathbf{a}'$$

Valódi erő

$\sum \mathbf{F}_{\text{valódi}}$

Ez a testre ható valamennyi valódi erőnek az összege; ilyenek pl. az érintkezési erő, a rugóerő, a gravitációs erő, az elektromos és a mágneses erő. Ezek a valódi erők inerciarendszerben is jelen vannak.

Centrifugális erő

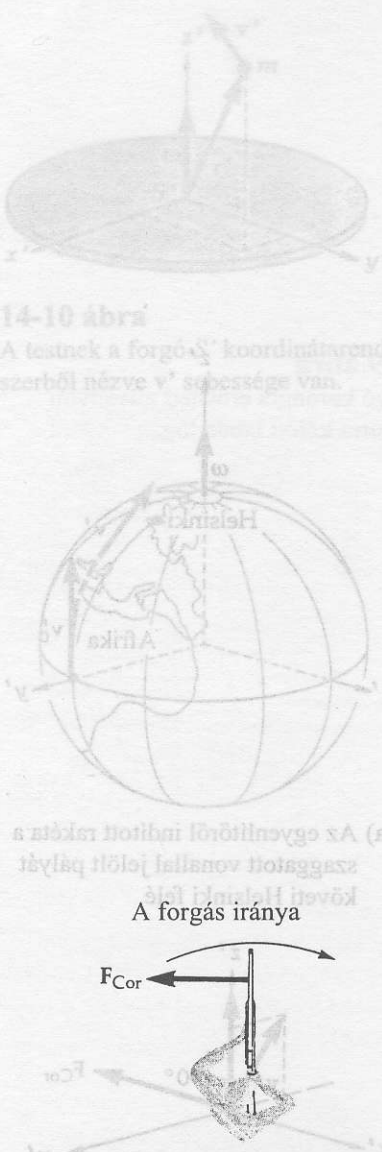
$|\mathbf{F}_{cf}| = m\omega^2 R$

A centrifugális erő a forgástengelytől mért R távolságtól függ. A tengelytől mindig merőlegesen kifelé mutat. Inerciarendszerben nincs jelen. Vektoriális alakban: $\mathbf{F}_{cf} = -m\,[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]$.)

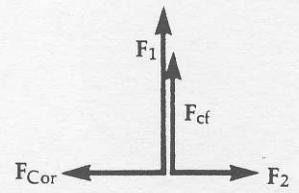
Coriolis erő

$\mathbf{F}_{Cor} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$

A Coriolis erő *eltérítő* erő. Mindig merőleges az m tömegű test $\mathbf{v}'$ sebességére. Ha a testnek a forgó vonatkoztatási rendszerben nincs sebessége, akkor nincs Coriolis erő. Inerciaerő, inerciarendszerekben nincs jelen. A negatív előjelre ügyelni kell.



(a) A felülnézeti kép a forgó vonatkoztatási rendszerben csak a Coriolis erőt tünteti fel a mozgó lövedékre. Az $\boldsymbol{\omega}$ vektor a papír síkjára merőlegesen lefelé irányul, úgyhogy $-(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$ iránya balra mutat.



(b) A lövedékre ható vízszintes erők a cső elhagyását közvetlenül megelőző pillanatban, ahogyan ezek a forgó rendszerben felülnézetből látszanak.

14-12 ábra
A 14-5 példához.

14-5 PÉLDA

Egy céllövő gyorsan mozgó célt követve a csövet vízszintesen tartva *balról jobbra* lendíti puskáját a függőleges tengely körül. A lövedék sebessége 800 m/s. a cső elhagyását közvetlenül megelőző pillanatban. (a) Ha ekkor a puska 1 rad/s szögsebességgel fordul, mekkora a 20 g tömegű lövedékre ható Coriolis erő nagysága? (b) Határozzuk meg annak az erőnek az irányát, amit a puskacső gyakorol a lövedékre!

MEGOLDÁS

(a) A forgó rendszer az oldalra lendülő puskacsővel együtt fordul. Ennek a rendszernek a szögsebessége (ω) függőlegesen lefelé mutat. A lövedékre ható Coriolis erő nagysága: $F_{Cor} = |-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')|$. A 14-12a ábra a *lövedékre ható* Coriolis erő irányát mutatja. Minthogy ω és v' iránya 90°-ot zár be, a vektoriális szorzatban sin 90°=1 szerepel, vagyis

$$F_{Cor} = 2m\omega v' = (2)(0{,}020\,\text{kg})\left(1\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(800\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 32\,\text{N}.$$

(b) A lövedék által a puskacsőre gyakorolt erő ellentétes irányú azzal, amit a puska gyakorol a lövedékre. A forgó rendszerben a lövedéknek nincs oldalirányú gyorsulása. Egyetlen gyorsulása radiális irányú. A 14-12b ábra vázolja a lövedékre ható erőket a cső elhagyását közvetlenül megelőző pillanatban.

F_1 = a táguló gáz által a lövedékre ható erő
F_{Cor} = a lövedékre ható Coriolis erő
F_{cf} = a lövedékre ható centrifugális erő
F_2 = a puskacső által a Coriolis erő kiegyensúlyozására kifejtett, a lövedéket a θ irányban egyensúlyban tartó erő.

Ezért az F_2 erő, amit a puskacső fejt ki a lövedékre, jobbra mutat. Nagysága a Coriolis erőével egyenlő (32 N), és csak akkor lép fel, ha a puskacső a tüzelés pillanatában megtartja állandó ω szögsebességét. A gyakorlatban ez lényegében lehetetlen, hiszen a lövész képtelen az ilyen rendkívül rövid ideig tartó oldalirányú erő kifejtésére. De a lökést érezni fogja!

14-6 PÉLDA

Egy 200 gramm tömegű egér a 10 fordulat per perc sebességgel forgó ringlispíl alaplapján radiális irányban szalad. Az egér sebessége a ringlispílre vonatkoztatva állandó 0,50 m/s. (a) Rajzoljuk meg az egér vektorábráját a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből nézve! (b) Számítsuk ki azt az eredő súrlódási erőt, amit a felület gyakorol az egérre a forgástengelytől 2 m távolságban!

MEGOLDÁS

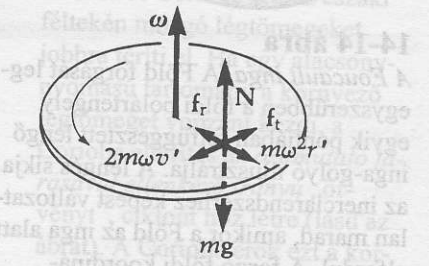
A feladat megoldása sokkal egyszerűbb forgó rendszerben, mert ebben az egér egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Mozgása *gyorsulásmentes*. Ezzel szemben egy inerciarendszerben az egér bonyolult spirálpályán mozog állandóan változó sebességgel és gyorsulással. Ezért a feladatot a forgó rendszerben oldjuk meg. De az egérre még a forgó rendszerben is több erő hat. Ha ezeket egyenként vesszük figyelembe, a feladat közvetlenül megoldható a $\Sigma \mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ törvény alkalmazásával.

(a) Az erők nem komplanárisak (nem egy síkban fekvők), ezért háromdimenziós perspektivikus vázlatot kell készítenünk, lásd a 14-13a ábrát, ahol bejelöltük az önkényesen választott forgási irányt is. Az egérre ható valódi erőkön kívül (amilyen a gravitációs erő és a súrlódási erő) még két tehetetlenségi erő is szerepel: A Coriolis erő és a centrifugális erő. Tehát a következő erőkkel kell számolnunk:

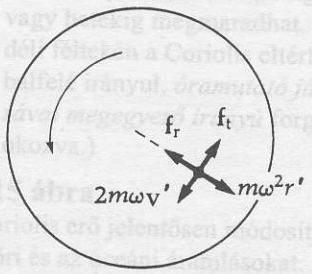
W = mg, a lefelé mutató gravitációs erő.
N = a ringlispíl alaplapjától származó felfelé mutató normális erő.
$2m\omega v'$ = $|-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')|$, a Coriolis erő, amelynek irányát a vektoriális szorzatra vonatkozó jobbkéz-szabály adja meg.
$mr'\omega^2$ = $|-m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]$, a centrifugális erő, amely a forgástengelytől radiálisan kifelé mutat.

Minthogy az egér egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, ezért ebben a rendszerben dinamikai egyensúlyban van (a rá ható erők eredője zérus). Ezért a két vízszintes erő (a Coriolis és a centrifugális erő) más, ugyancsak vízszintes erővel, a súrlódási erővel, tart egyensúlyt. Célszerű a súrlódási erőt két komponensre, radiálisra és tangenciálisra bontani:

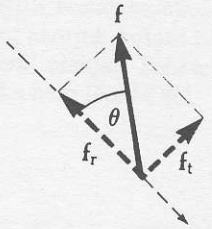
f_r = a súrlódási erő radiális (befelé mutató) komponense, amely a kifelé mutató centrifugális erőt egyensúlyozza ki.
f_t = a súrlódási erő tangenciális komponense, amely a Coriolis erőt egyensúlyozza ki.



(a) Az egérre ható erők, ahogyan ezek a forgó rendszerben látszanak. A vázlat háromdimenziós perspektívában ábrázolja az erőket; az erők egymásra kölcsönösen merőlegesek. N és *mg* egyenlőek és ellentétes irányúak, így könnyen kiejthetők.



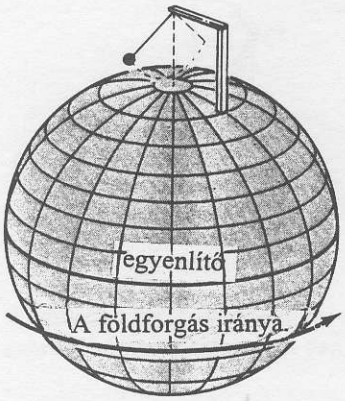
(b) Az egér felülről lefelé merőlegesen nézve (úgy, ahogyan a forgó vonatkoztatási rendszerben látszik).



Kifelé mutató radiális irány.

(c) Az eredő **f** súrlódási erő $\mathbf{f}_t$ és $\mathbf{f}_r$ komponensei.

14-13 ábra
A 14-6 példához.



14-14 ábra

A Foucault inga. A Föld forgását legegyszerűbben a földi polártengely egyik pontjában felfüggesztett lengő inga-golyó illusztrálja. A lengés síkja az inerciarendszerhez képest változatlan marad, amikor a Föld az inga alatt elfordul. A forgó földi koordinátarendszerből nézve a lengés síkja naponta egyszer megfordul. (Más szélességi körön a helyzet sokkal összetettebb. Az elfordulás sebessége $\omega \sin\theta$, ahol ω a Föld forgási szögsebessége, θ a földrajzi szélesség.)

Megjegyezzük, hogy itt nyugalmi súrlódásról van szó, mert az egér nem csúszik. De nem tudjuk, hogy az egér a megcsúszás határán van-e, vagy nem, ezért $f_s \neq \mu_s N$.

(b) A súrlódási erő kiszámítására csak a vízszintes erőkomponenseket feltüntető vázlatot (14-13b ábra) készítünk.

Radiális komponens	**Tangenciális komponens**
$\sum F'_r = 0$ (egyensúly)	$\sum F'_t = 0$ (egyensúly)
$f_r = mr'\omega^2$	$f_t = 2m\omega v'$

A numerikus értékeket SI egységekre átszámítva:

$$m = 0{,}020 \text{ kg}$$
$$r = 2 \text{ m}$$
$$v' = 0{,}50 \text{ m/s}$$
$$\omega = \underbrace{\left(10\frac{\text{ford}}{\text{perc}}\right)\left(\frac{1\,\text{perc}}{60\,\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{ford}}\right)}_{\text{(átszámítási tényező)}} = \frac{\pi}{3{,}0}\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A számértékeket a fenti egyenletbe helyettesítve:

$$f_r = mr'\omega^2 = (0{,}20\,\text{kg})(2\,\text{m})\left(\frac{\pi\,\text{rad}}{3{,}0\,\text{s}}\right)^2 = 0{,}438\,\text{N}$$

$$f_t = 2m\omega v' = (2)(0{,}20\,\text{kg})\left(\frac{\pi\,\text{rad}}{3{,}0\,\text{s}}\right)\left(0{,}50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0{,}209\,\text{N}$$

Az eredő f súrlódási erő nagysága:

$$f = \sqrt{f_r^2 + f_t^2} = 0{,}485\,\text{N}.$$

A súrlódási erő irányát a következőképpen kapjuk:

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{f_t}{f_r}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0{,}209\,\text{N}}{0{,}438\,\text{N}}\right) = 25{,}5°$$

A θ szög jelentésére nézve lásd a 14-13c ábrát.

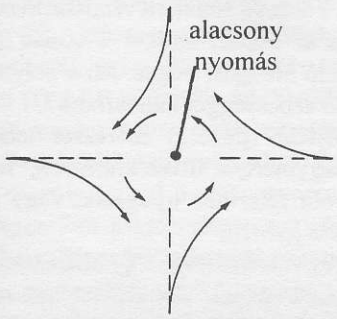
Megjegyezzük, hogy ha a ringlispíl nem forogna, az egérre egyáltalán nem hatna vízszintes irányú erő. Azonban az állandó sebességű forgás következtében van egy radiálisan kifelé mutató erő, ami a távolsággal növekszik (ez a centrifugális erő), valamint az állandó oldalirányú erő (a Coriolis erő). A radiálisan kifelé irányuló sebesség állandó értéken tartására az egérnek „jól le kell tennie a talpát", hogy e két inercia erő ellenében kellően nagy súrlódási erőt biztosítson. Ahhoz, hogy e két inercia erő létezéséről meggyőződjünk, próbáljunk egy forgó ringlispíl alaplapján végigsétálni (de nagyon óvatosan!). Ha nem vigyázunk, ezek az úgynevezett fiktív erők felborítanak! (A szerzők a sérülésekért felelősséget nem vállalnak.)

14.6 Megjegyzések

Amint láttuk, a tehetetlenségi erők kizárólag abból adódnak, hogy vonatkoztatási rendszernek gyorsuló rendszert választunk, és abból, hogy meg akarjuk őrizni Newton második törvényének $\mathbf{\Sigma F} = m\mathbf{a}$ alakját. Hajlamosak vagyunk az észlelt gyorsulást a testre ható erők eredőjének tulajdonítani. De lehet, hogy mélyebb a rejtély és a tehetetlenségi erők egyáltalán nem a képzelet szüleményei. Gyorsuló koordinátarendszerben könnyen meggyőződhetünk



(a) Ez az 1988. március 14-én készült műholdas meteorológiai felvétel a középpontjával az Észak-nyugati Csendes Óceánban elhelyezkedő alacsonynyomású rendszert mutat. A spirális felhőrendszer az óramutató járásával ellenkező irányban forog.



(b) Stabil időjárási örvényrendszer-alakzat az eredménye a Coriolis erőnek. A Coriolis erő az északi féltekén mozgó légtömegeket jobbra téríti el. Ha egy alacsonynyomású tartomány a környező légtömeget vonzani kezdi, a Coriolis eltérítés az *óramutató járásával ellenkező irányú* „örvényt", ciklont hoz létre (lásd az ábrát). A Coriolis erők ezt a körben mozgó levegőt most az alacsonynyomású tartománytól a nagyobb nyomású tartomány *felé* térítik el. Ha a nyomáskülönbségből adódó befelé mutató erők a kifelé ható Coriolis erőkkel egyensúlyban vannak, akkor dinamikailag stabil örvénylő rendszer keletkezik, ami napokig, vagy hetekig megmaradhat. (A déli féltekén a Coriolis eltérítés balfelé irányul, *óramutató járásával megegyező irányú* forgást okozva.)

14-15 ábra
A Coriolis erő jelentősen módosítja a légköri és az óceáni áramlásokat.

arról, hogy a tehetetlenségi erők valóban léteznek; ezek reális, fizikailag mérhető effektusokat hoznak létre. Mi több: a tehetetlenségi erő jelenlétét kísérletileg *pontosan* ugyanolyan módon igazoljuk, mint a gravitációs erő jelenlétét. Az egyetlen különbség csupán annyi, hogy a tehetetlenségi erőt nem tudjuk valami más fizikai objektumtól származtatni úgy, amint azt a gravitáció és más valódi erők esetében szokásosan megtesszük. Ezért a tehetetlenségi erők nem engedelmeskednek Newton harmadik törvényének.

Sok feladatot gyorsuló koordinátarendszerben lehet a legkényelmesebben megoldani. Például a Foucault inga mozgását azokkal a tehetetlenségi erőkkel értelmezhetjük, amelyek akkor lépnek fel, amikor az ingát forgó rendszerből nézzük (14-14 ábra). A nagysebességű centrifugák tanulmányozása is egyszerűbb abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyikben a folyadék nyugszik, mint abban, amelyikben rögzített megfigyelő nézi a forgó tartályt.

Példák a Coriolis erőre

A Coriolis erő sok jelenségben megnyilvánul. A legtöbb ciklon az északi féltekén az óramutató járásával ellenkező irányban forog, a déli féltekén pedig az óramutató járásával megegyező irányban (lásd a 14-15 ábrát). Hasonlóképpen azt is a Coriolis erő segíti elő, hogy mind az alacsony, mind a magas atmoszférikus nyomású tartományok körül kialakuló levegőcirkuláció stabil időjárási képződmény. Minthogy a Coriolis erő az egyenlítő közelében a leggyengébb, az időjárási rendszerek és a velük kapcsolatos szelek gyakran disszipálódnak az egyenlítő közelében, létrehozva az ún. *doldrumokat*, azokat a trópusi óceáni tartományokat, ahol csak könnyű szelek fújnak, vagy teljes szélcsend van. A Coriolis erő érdekes hatással van a forgó mozgást végző sokatomos molekulák rezgő atomjaira is. A Coriolis erő a nagy hatótávolságú rakéták mozgását is döntően befolyásolja.[8] A tehetetlenségi erők segítségével képesek a biológiai rendszerek

[8] Az első világháború kezdetén egy flottabevetés alkalmával Délamerika csücske mellett a Falkland szigeteknél brit tüzérek meglepetéssel látták, hogy pontosan célzott sorozatlövéseik a német hajóktól 100 méterrel balra csapódtak be. A lőelemképző eszköz tervezői tisztában voltak a Coriolis erő hatásával, és ezt számításba is vették, de minden bizonnyal arra számítottak, hogy majd minden tengeri ütközetet az 50° északi szélesség közelében



(a) A közönséges házi légynek és rokonainak olyan páros szerve van(pálcika, végén kis kidudorodással), amely a repülés közben adott síkban rezeg. A fényképen egy lószúnyog (Tipula oleracea) látható. Amikor a légy fordul, ez a szerv ugyanúgy meg akarja tartani rezgési síkját, mint a Foucault inga, ezáltal informálja a legyet a fordulás mértékéről. Ha a légy egyenes vonalban gyorsul, a pálcikák végén lévő tömegek tehetetlenségük miatt lemaradnak, így olyan jelzést adnak, ami lineáris gyorsulásként értelmezhető. Ha ezt a szervet rögzítik, vagy eltávolítják, a rovar nem tud egyenes vonalban repülni, ehelyett össze-vissza véletlenszerű kis körökben repül.



(b) Az emberi fül három félkörös ívjáratában folyadék van. Amikor a fej fordul, a folyadék tehetetlenségénél fogva hátramarad. A folyadéknak az ívjárathoz viszonyított mozgását a csőbe nyúló idegvégződések érzékelik; ezek az idegszálak tudósítják az agyat, ha fordulás történik. Az ívjáratok három, nagyjából egymásra merőleges síkban helyezkednek el, ily módon bármely adott tengely körüli elfordulás észlelhetővé válik. A haladási gyorsulás a „saccule"-nak nevezett kicsiny hólyagban lévő, zselatinszerű anyagba szuszpendált szilárd kalciumkarbonát részecskék mozgása által érzékelhető. Ha a fej egyenes mentén gyorsul, a szilárd részecskék hátramaradnak. A saccule falából kiálló idegszálak érzékelik a részecskék falhoz viszonyított mozgását. Ha a forgó vonatkoztatási rendszerben lévő személy a fejét fordítja, az elmozduló folyadékra ható Coriolis erő effektus váratlan jeleket produkál az agyban, helytelenül valami más tengely körül végzett forgást jelez. Az ezzel járó zavar szédülést és hányingert okoz. Mindez komoly hatással lehet a felállítandó ürállomásokra, amelyeket majd kellő forgásba kell hozni, hogy ezáltal mesterséges gravitáció jöjjön létre.

14-16 ábra

A biológiai szervezeteknek inerciális tájékozódási szervük van. Ezekkel a különféle mozgásokat tehetetlenségi inerciarendszerre vonatkoztatva tudják érzékelni. Ezt itt két példa illusztrálja.

---

fognak megvívni, és sohasem az 50° déli szélesség környékén. Emiatt a brit lövedékek a Coriolis erő eltérítésének *kétszeresével* tértek el a céltól. (Lábjegyzet átvéve: Jerry B. Maion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 2nd ed., New York: Academic Press, 1965, p.346.)

saját haladó és forgó mozgásukat valamely inerciarendszerhez viszonyítva észlelni (lásd a 14-16 ábrát).

Némelykor makacsul állítják, hogy a fürdőkádból kifolyó víz örvénylésének a Coriolis erő következtében kitüntetett forgásiránya van. Az esetek többségében azonban a Coriolis erő elhanyagolható más, nagyobb effektusok mellett – különösképpen az olyanok mellett mint a fürdőkád alakjából, vagy a kád feltöltési körülményeinek következtében fellépő maradék forgatónyomatéktól származó hatások. Az ilyen effektusok néha napokig megmaradnak, és maga a Coriolis erő nehezen mutatható be. De szimmetrikus tartályban gondosan végzett kísérletek azt mutatják, hogy a „fürdőkád-örvény", valóban a Coriolis erőnek tulajdoníthatóan, az északi és a déli féltekén ellentétes forgásirányra hajlamos.

Összefoglalás

Állandó a_R haladó gyorsulással mozgó vonatkoztatási rendszerben:

Megőrizzük Newton második törvényének $\Sigma F' = ma'$ alakját azáltal, hogy a valódi $\Sigma F_{valódi}$ erőkhöz az m tömegű testre ható $-ma_R$ tehetetlenségi erőt is hozzáadjuk.

Tehetetlenségi erő (egyenes vonalú gyorsuló rendszerben) $F_{tehetetl.} = -ma_R$

Tömegpontrendszerre ható forgatónyomaték számítására az $F_{tehetetl.}$ erőt a tömegközéppontban támadó erőnek képzeljük.

Állandó ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben:

Megőrizzük Newton második törvényének $\Sigma F' = ma'$ alakját azáltal, hogy a valódi $\Sigma F_{valódi}$ erőkhöz az m tömegű testre ható két tehetetlenségi erőt, a centrifugális erőt és a Coriolis erőt is hozzáadjuk .

Newton második törvénye (módosítva forgó vonatkoztatási rendszerekre)

$$\overbrace{F_{valódi} + F_{cf} + F_{Cor}}^{\Sigma F'} = ma'$$

Valódi erő $\sum F_{valódi}$ — **Ez a testre ható valamennyi valódi erőnek, mint amilyen az érintkezési erők, a rugóerő, a gravitációs erő, az elektromos és a mágneses erő összege. Ezek a valódi erők inerciarendszerben is jelen vannak.**

Centrifugális erő — **A centrifugális erő a forgástengelytől mért R távolságtól függ. A tengelytől mindig merőlegesen kifelé mutat. Inerciarendszerben nincs jelen. (Vektoriális alakban: $F_{cf} = -m[\omega \times (\omega \times r')]$.)**

$$|F_{cf}| = m\omega^2 R$$

Coriolis erő $F_{Cor} = -2m(\omega \times v')$ — **A Coriolis erő *eltérítő* erő. Mindig merőleges az m tömegű test v' sebességére. Ha a testnek a forgó vonatkoztatási rendszerben nincs sebessége, akkor nincs Coriolis erő. Tehetetlenségi erő, inerciarendszerekben nincs jelen. A negatív előjelre ügyelni kell.**

Gyorsuló rendszerben a tehetetlenségi erők – melyeket „fiktív" erőknek is neveznek – éppen annyira valóságosak, mint a gravitációs erő. Valóban, jelenlétük kísérleti igazolását *pontosan* úgy végezzük, mint a gravitációs erő jelenlétének igazolását. Gyorsuló rendszerben a megfigyelők számára úgy tűnik, mintha egy járulékos gravitációs mező „bekapcsolása" okozná ezeket a tehetetlenségi erőket. De a tehetetlenségi erők eredetét egyetlen más objektumnak sem tulajdoníthatjuk úgy, mint ahogyan ezt a gravitáció vagy más „valódi" erő esetében megtesszük, ezért a tehetetlenségi erők nem engedelmeskednek Newton harmadik törvényének. Inkább arról van szó, hogy a tehetetlenségi erők azért jelennek meg, mert gyorsuló vonatkoztatási rendszerben akarunk dolgozni, és meg akarjuk tartani Newton második törvényének $\Sigma F' = ma'$ alakját. Tehetetlenségi erők inerciarendszerekben soha nem lépnek fel.

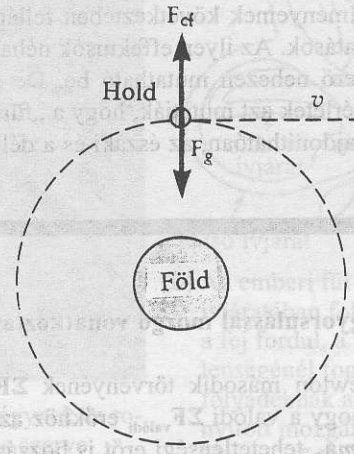
Kérdések

1. Egy függőleges helyzetű szélvédővel felszerelt teherautó v_w sebességgel halad. Ha az esőcseppek függőlegesen v_r állandó végsebességgel hullanak, hány fokos szögben csapódnak a szélvédőre?

2. Egy vasúti kocsi szélső ülésén utazó lány labdát dob át a túloldalon ülő barátjának. A vonat állandó sebességgel halad. Írjuk le a labda mozgását a vasúti kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben és

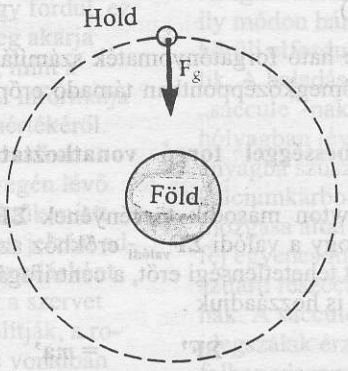
a Földhöz rögzített rendszerben. Ismételjük meg arra az esetre, amikor a vonat egyenesvonalú gyorsuló mozgást végez. Mi a helyzet, ha a vonat állandó sebességgel kanyarodik?

3. Miféle (pontos) méréssel lehetne eldönteni egy nagyméretű liftszekrényben, hogy a lift vajon a Föld felszínén nyugszik, vagy gravitáció híján felfelé gyorsul?
4. Tegyük fel, hogy egy ablaktalan szobában vagyunk nincs nálunk semmilyen műszer. Honnan tudnánk megmondani, hogy vajon forog-e a szoba a függőleges tengely körül, vagy nem? Hogyan tudnánk eldönteni, hogy a forgástengely a szoba belsejében van-e, vagy a szobán kívül? Hogyan lehetne a forgásirányt meghatározni?
5. Milyen eszközök birtokában tudnánk az előző kérdésben szereplő szoba szögsebességének numerikus értékét meghatározni?
6. Tegyük fel, hogy az egyenlítőn egy (elhagyott) bánya aknájába beejtünk egy követ. Tekintettel a Föld forgására, az akna melyik fala felé fog a kő eltérülni?
7. A fejtámasszal felszerelt gépkocsiülés megakadályozza, hogy ha a kocsit hátulról lökés éri, az utas ún. „ostorszíj" sérülést szenvedjen. Fejtsük ki, hogy a kocsiüléshez rögzített rendszerből nézve mi történik egy ostorszíj balesetnél.
8. Írjuk le a (forgó) Föld vonatkoztatási rendszeréből nézve az összes erőt, ami földrajzilag meghatározott helyünkön az asztalon fekvő könyvre hat.
9. Egy teherautó vízzel töltött kádat szállít lefelé a domboldalon, kikapcsolt motorral, fékezés nélkül gyorsulva. Tekintsünk el az induláskor fellépő löttyenéstől, csak a tranziens mozgás lecsengését követő „állandósult" állapotot figyeljük! Kérdés: a víz felszíne vajon a Föld felszínével, vagy a lejtő felszínével párhuzamos? Indokoljuk meg állásfoglalásunkat.
10. Néha azt bizonygatják, hogy a Hold azért nem zuhan földkörüli keringése során a Földre, mert „a Holdra ható kifelé irányuló centrifugális erő éppen egyensúlyban van a befelé irányuló gravitációs erővel". De ha ez igaz lenne, akkor a Holdra ható erők összege *zérus* lenne, és a Hold egyenesvonalú pályán haladna (14-17a ábra). Milyen vonatkoztatási rendszerben lenne az idézett mondat helytálló? (Ez nem a földi rendszer – miért nem?) Vagy nincs is ilyen rendszer?
11. Tekintsük a 14-15b ábrát! Tegyük fel, hogy a közeli széljárás egy alacsonynyomású tartomány körül olyan légáramlást létesít, amelyik „helytelen" irányban (azaz az északi féltekén az óramutató járásával megegyező irányban) forog. Magyarázzuk meg, miért nem lesz tartós ez az alacsonynyomású képződmény!



Ha a Holdra ható erők eredője nulla lenne, a Hold állandó sebességgel egyenes vonalon mozogna

(a) A Holdra ható erők *helytelen* vektorábrája inerciarendszerből nézve. (Inerciarendszerben nem lépnek fel tehetetlenségi erők.)



(b) A Holdra ható erők helyes vektorábrája inerciarendszerből nézve. A kiegyensúlyozatlan F_g gravitációs erő az a centripetális erő, ami a Holdat állandó sebességű körmozgása során folyamatosan a Föld felé „esésre" kényszeríti.

14-17 ábra
A10. kérdéshez.

Feladatok

14-3 Egyenesvonalú gyorsuló koordinátarendszerek

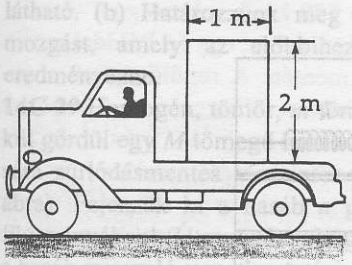
14A-1 Liftszekrényben álló személy rugós erőmérőn 2,50 kg feliratú testet tart. A rugós erőmérő 30 newtont mutat. Mekkora a lift gyorsulása? Alkalmazzuk a lifthez rögzített vonatkoztatási rendszert, és vegyük a gravitáció által okozott helyi gyorsulást 9,8 m/s^2-nek.

14A-2 (3/4)g gyorsulással lefelé mozgó üvegfalú liftszekrény mennyezetéről labdát ejtenek le. Írjuk le a labda gyorsulását (a) a földön nyugvó megfigyelő és (b) a liftben utazó megfigyelő szempontjából! Készítsük el a megfelelő erővektorábrát is.

14A-3 Egy 5 kg-os terhet 7,5 kg teherbírású kötélen emelünk. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben vizsgálva a feladatot, határozzuk meg azt a maximális gyorsulást, amellyel az adott teher emelhető.

14A-4 Egy 80 kg-os ember 1,2 m/s^2 gyorsulással lefelé mozgó liftszekrényben fürdőszoba mérlegen áll. Mekkorának mutatja a skála az ember súlyát? Vizsgáljuk a feladatot (a) inercia rendszerből és (b) a liftszekrényhez rögzített rendszerből!

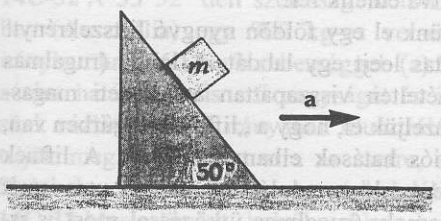
14B-5 Áruszállító teherautóra ládát raktak a 14-18 ábrán látható elrendezésben. A vezető „kilő", azaz nagy gyorsulással indít. A teherautó vonatkoztatási rendszeréből nézve számítsuk ki azt a maximális gyorsulást, amellyel indítva a láda nem borul fel! A láda tömegközéppontja a középpontjában van és a láda nem csúszik meg a teherautó rakterében.



14-18 ábra
A 14B-5 feladathoz.

14B-6 Egy 600 N súlyú személy vízszintesen gyorsuló szekéren áll. Azért, hogy a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben egyensúlyát megtartsa, a függőlegeshez viszonyítva 15°-os szögben meg kell dőlnie. (a) A gyorsulás irányához viszonyítva melyik irányban kell a személynek dőlni? A gyorsuló rendszerben számolva határozzuk meg a gyorsulás nagyságát. (c) Határozzuk meg azt az erőt, amellyel a személy a szekér alapdeszkájára hat. (Útbaigazító kérdés: a szóban forgó személy a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben haladási egyensúlyban van? forgási egyensúlyban van?)

14B-7 Egy m tömegű hasáb sima éken nyugszik (14-19 ábra). Az ék jobbra gyorsul, éspedig oly módon, hogy a hasáb az ékhez viszonyítva nyugalomban marad. Számítsuk ki az a gyorsulást SI egységben.



14-19 ábra
A 14B-7 feladathoz.

14B-8 Egy 50 kg-os ember liftszekrénybe helyezett rugós mérlegen méri a súlyát. Számítsuk ki, mit mutat a mérleg ha (a) a lift állandó 3 m/s sebességgel emelkedik (ez az ember „tényleges súlya"); (b) a lift 3 m/s sebességgel süllyed; (c) a lift emelkedik, de sebességét 2 m/s^2-tel csökkenti; (d) a lift az emelkedés közben sebességet 2 m/s^2-tel növeli; (e) a lift süllyedés közben 2 m/s^2-tel gyorsul és (f) a lift süllyedés közben 2 m/s^2-tel lassul! Készítsünk minden egyes esetre az erővektorok *helyes relatív méreteit* feltüntető vektordiagramot!

14B-9 Egy 1,5 kg-os súly egy 3,6 m/s^2 gyorsulással mozgó vasúti mennyezetére zsinórral van felfüggesztve. A súly a kocsihoz viszonyítva nyugalomban van. Határozzuk meg (a) a zsinór függőleges iránnyal bezárt szögét és (b) a zsinórban ébredő erő nagyságát! A feladatot a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

14B-10 Állandó 2 m/s^2 gyorsulással felfelé mozgó liftben a padlótól 2 m magasról leesik egy tárgy. A tárgy kezdetben a lifthez viszonyítva nyugalmi helyzetben volt. Mennyi idő alatt esik le a padlóra? A feladatot a lifthez rögzített vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg.

14B-11 A gravitáció hatására egy 2,5 kg-os test 9,8 m/s^2 gyorsulással esik. Mekkora többleterőnek kell a testre hatni ahhoz, hogy gyorsulása 12 m/s^2 legyen? Oldjuk meg a feladatot (a) inerciarendszerben és (b) a testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben. (A Föld forgását ne vegyük figyelembe.)

14.5 A Coriolis erő és a centrifugális erő

14A-12 Egy 120 méter átmérőjű nagy, kerékalakú űrállomás a peremén lévő személyek 3 m/s^2 „mesterséges gravitációval" való ellátása céljából forgásban van. Határozzuk meg, mekkora (fordulat per perc egységben mért) fordulatszámmal lehet ezt a hatást elérni!

14A-13 Egy ringlispíl alaplapján, a tengelytől 3,6 m távolságban kisméretű doboz nyugszik. A doboz és az alaplap között a nyugalmi súrlódási együttható 0,30. Számítsuk ki a ringlispíl lapjának a maximális szögsebességét (fordulat per perc egységben), amelynél a doboz még nem csúszik meg! A feladatot kétféleképpen is oldjuk meg: (a) a ringlispílhez rögzített rendszerében és (b) inerciarendszerben.

14A-14 Műrepülőgép pilótája a súlytalanság állapotával kísérletezve hurokrepülést végez. A gép sebessége a hurok legfelső pontján 160 km/h. Mekkora a hurok sugara? Oldjuk meg a feladatot mind a repülőgép vonatkoztatási rendszerében, mind inerciarendszerben.

14A-15 Határozzuk meg a 60 méter sugarú versenypálya szakasz ideális dőlésszögét arra az esetre, ha a kocsik 96 km/h sebességgel veszik a kanyart. Oldjuk meg a feladatot egy gépkocsihoz rögzített koordinátarendszerben.

14B-16 Ha valaki az egyetem területén nyugati irányban fut, pontosan mi lesz a rá ható Coriolis erő iránya?

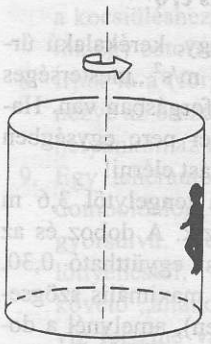
14B-17 A 30° északi szélességi körön fekvő New Orleans-ban egy vonat kelet felé halad. Határozzuk meg a vonatra ható Coriolis erő irányát!

14B-18 Előadási kísérlet során egy simán csúszó 0,5 kg tömegű korongot egy vízszintes, kör alakú, 1,2 m átmérőjű forgó lemez peremétől sugárirányban befelé löknek. A lemez szögsebessége 2 rad/s, és a forgásirány

felülről nézve óramutató járásával megegyező irányú. A forgó rendszerből nézve a korong sebessége 2 m/s. Határozzuk meg közvetlenül a korong elindítását követő pillanatban (a) a korongra ható centrifugális erőt és (b) a korongra ható Coriolis erőt, valamint ezen erők irányát!

14B-19 Egy kisméretű kocka alakú doboz tömegközéppontja a geometriai középpontban van. A dobozt egy vízszintes síkú forgóasztalra helyezzük, úgy, hogy tömegközéppontja a forgástengelytől R távolságra legyen. A doboz egyik oldala merőleges a radiális irányra. Ha a súrlódási erő elég nagy ahhoz, hogy a doboz ne csússzon meg, mekkora az a legkisebb ω szögsebesség, amelynél a doboz a külső éle körül már felbillen? Vizsgáljuk a kérdést a forgó vonatkoztatási rendszerben.

14B-20 Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak (14-20 ábra). Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erő által a falhoz „szögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásnak függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ_s nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot a forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg.



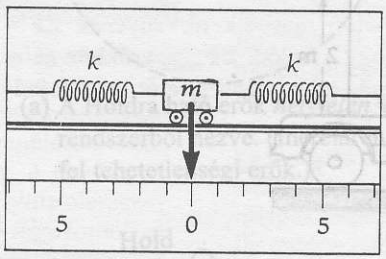
14-20 ábra
A 14B-20 feladathoz.

14B-21 Kicsiny, 2 g tömegű bogár egy felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányban 2 rad/s szögsebességgel forgó vízszintes korongon van, a középponttól 50 cm távolságban. A bogár a forgó rendszerből nézve nyugalomban van. Készítsünk (a forgó korongot felülről nézve) erődiagramot, amely a bogárra ható erőknek csak a vízszintes komponensét ábrázolja. Tüntessük fel ezek numerikus értékét is. Végezzük ezt el (a) inercia rendszerben és (b) a forgó korong rendszerében! Ezután tegyük fel, hogy a bogár állandó 10 cm/s sebességgel egy sugárirányban festett vonalon kifelé indul.

14B-22 Tegyük fel, hogy a Föld tökéletes forgó gömb (azzal ellentétben, hogy alakja inkább lapult szferoid). Egy eszkimó az északi sarkon fürdőszoba mérlegre áll és úgy találja, hogy súlya pontosan 1000 N. Mennyivel tér el a leolvasott érték az előbbi 1000 N-tól ha az egyenlítőn áll rá a mérlegre?

Vegyes feladatok

14C-23 Az *akcelerométer* olyan eszköz, amellyel gyorsulást lehet mérni. Az egyszerű szerkezetű akcelerométer működési elvét a 14-21 ábra érzékelteti. A súrlódásmentes kerekekre szerelt m tömegű testet két azonos rugó feszíti. A test helyzetét a ráerősített mutató skálán jelzi. Ha az eszköz a rugók irányában állandó gyorsulásnak van kitéve, akkor az m tömegű test – tehetetlenségi hatás következtében – középső egyensúlyi helyzetéből elmozdul. (Az ábrán fel nem tüntetett csillapító berendezés kiküszöböli az indulásnál és a megállásnál fellépő rezgést.) Mekkora az egyes rugók k rugóállandója, ha az $m = 0{,}1$ kg tömegű testre szerelt mutató 5 m/s^2 gyorsulás hatására 5 cm elmozdulást jelez? A feladatot kétféleképpen oldjuk meg: inerciarendszerben és az akcelerométer rendszerében.



14-21 ábra
A 14C-23 ábra.

14C-24 Zárt teherkocsi mennyezetére 1 kg tömegű test van felfüggesztve. A megfigyelő megállapítja, hogy a testet felfüggesztő zsinór a függőlegessel állandó 10°-os szöget alkot, és alsó vége a kocsi fara felé tér ki. A zsinórban ébredő erő pontos mérésével hogyan tudná a megfigyelő eldönteni, vajon a kocsi állandó sebességgel lejtőn felfelé halad, vagy pedig vízszintes pályán gyorsulva mozog.

14C-25 Egy 500 kg-os, 7,5 m hosszú homogén acélgerenda fekszik a földön. Egyik végén 90 kg-os ember ül. (a) Az embertől mekkora távolságban kell felerősíteni az emelődaru kötelét, hogy a gerenda ne billenjen fel ha állandó sebességgel emelik? (b) Magyarázzuk meg, miért nem történik szerencsétlenség akkor sem, ha a gerendát gyorsulva emelik fel!

14C-26 Tekintsünk el egy földön nyugvó liftszekrényt! A benne álló utas leejt egy labdát. A labda (rugalmas ütközéssel) ismételten visszapattan az eredeti magasságba. Most képzeljük el, hogy a „lift" a világűrben van, ahol a gravitációs hatások elhanyagolhatók. A liftnek „felfelé" g-vel egyenlő gyorsulást adunk. Az utas ismét leejti a labdát, amely (rugalmas ütközéssel most is ismételten visszapattan a liftszekrény padlóján. Vázoljuk a labda pályagörbéjét egy olyan inerciarendszerben, amelyik a labda elejtésének pillanatában a lift sebességével halad! (Útmutatás: Toljuk el a pályagörbét oldalirányban úgy, hogy a labda felfelé és lefelé haladó pá-

lyája ne fedje egymást. Elegendően hosszú ideig várva hogyan változik a labda sebessége egyetlen visszapattanás során?) A pályagörbe mennyiségi jellemzőit a lehető legpontosabban készítsük el!

14C-27 Egy lejtő hajlásszöge θ. Amikor a lejtő áll, akkor a rajta fekvő hasáb éppen a csúszás határán van. Számítsuk ki a gyorsulásnak azt az érékét, amellyel a lejtőnek mozognia kell ahhoz, hogy a hasáb a *felfelé* csúszás határán legyen. Vizsgáljuk a feladatot a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben. (Útmutatás: először állapítsuk meg μ_s értékét θ függvényében arra az esetre, amikor a lejtő nyugalomban van. Azután ezt az értéket használjuk fel a gyorsuló lejtőre vonatkozó feladatban.)

14C-28 Vízszintesen gyorsuló teherkocsi mennyezetéről labdát ejtenek le. A labda a padlóról néhányszor visszapattan. (a) Készítsünk vázlatot a labda pályájáról, ahogyan az a teherkocsi vonatkoztatási rendszeréből látható. (b) Határozzunk meg olyan gyorsulásmentes mozgást, amely az előbbihez hasonló pályagörbét eredményezne.

14C-29 Homogén, tömör, m tömegű gömb csúszás nélkül gördül egy M tömegű hasábon, amely az F erő hatására súrlódásmentes vízszintes talajon gyorsul (14-22 ábra). Fejezzük ki a hasáb a gyorsulását F, m és M függvényében! (Útmutatás: vizsgáljuk a gömb mozgását a hasáb gyorsuló vonatkoztatási rendszerében.)



14-22 ábra
A 14C-29 feladathoz.

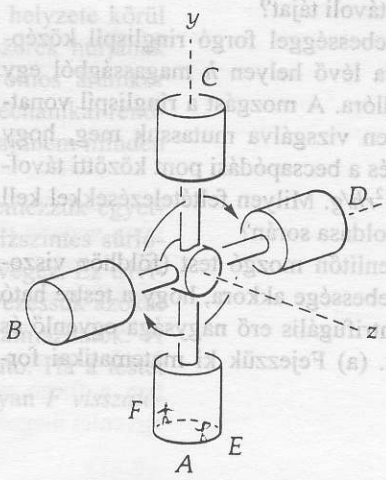
14C-30 Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! Készítsünk felülről nézve diagramot, (A ringlispíl az óramutató járásával ellentétes irányban forog)

14C-31 Az általános esetre érvényes (14-12) egyenlet vektoriális szorzásának elvégzésével mutassuk meg, hogy a centrifugális erő mindig a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat.

14C-32 A 33°52' déli szélességi körön fekvő Sydneyben (Ausztrália) egy 900 kg-os versenyautó nyugati irányban hajt 160 km/h sebességgel. (a) Számítsuk ki az autóra ható Coriolis erő nagyságát és irányát! Készítsünk vázlatot az erő irányának illusztrálására! (b) Ismételjük meg a feladatot arra az esetre, amikor az autó Sydneyben ugyanezzel a sebességgel déli irányban hajt!

14C-33 Mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 gramm tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből. A forgó rendszerben mekkora Coriolis erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában? Milyen irányú ez az erő?

14C-34 A 14-23 ábrán látható tervezett űrállomás négy hengeralakú részből áll, ezek a középponti tengelyhez egy-egy aknával kapcsolódnak. Az űrállomást forgásba kell hozni, hogy centrifugális hatások révén a hengerekben dolgozó űrhajósok számára „mesterséges gravitáció" jöjjön létre. Az asztronauták végtelenített mozgólétrára hasalva kapaszkodnak, így közlekednek az aknákban. A hengerek átmérője 11 méter, hosszuk 13 méter. Az aknák mérete a hengerektől a középponti tengelyig 20 méter. Tekintsük azt az esetet, amikor az űrállomás, ahogyan az ábra mutatja, az xy síkban percenként 4 fordulattal forog. (a) Az A hengerből a középponti tengely felé radiálisan mozogva milyen irányba forduljon az űrhajós, hogy a Coriolis erő a létrához szorítsa, ne pedig ellökje vagy oldalra taszítsa a létrától? (Ha ez nem megoldható, magyarázzuk meg, miért nem!) (b) A hengerek legtávolabbi (sík) lapján lévő asztronauták a földi g nehézségi gyorsulás hányad részét érzékelik? (c) Az A hengerben az E, ill. az F helyen egy-egy asztronauta helyezkedik el (a z tengellyel párhuzamosan). Az E űrhajós egy narancsot dob F űrhajósnak. A dobást végző űrhajós vonatkoztatási rendszerében melyik irányban görbül a mozgás pályája (vagy talán egyenes)?



A henger

14-23 ábra
A 14C-34 feladathoz.

14C-35 Egy ringlispíl felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányban 0,50 rad/s állandó szögsebességgel forog. Egy 40 kg tömegű személy a forgástengelytől mért 2 m távolságban (a ringlispíl forgásával megegyező irányban) körpályán halad és a ringlispílhez viszonyított 2 m/s állandó sebességgel körbejár. Határozzuk meg a forgó rendszerben (a) a személyre ható centrifugális erő, (b) a személyre ható Coriolis erő és (c) a személyre ható teljes súrlódási erő. nagyságát és irányát; (d) mutassuk meg, hogy inerciarendszerben a (c) részfeladatban szereplő súrlódási erő mint egyetlen hatóerő elegendő a mozgás leírásához.

14C-36 Vízszintes forgó korongon egy R hosszúságú sugárirányú egyenes vonalra sima csövet erősítettek. A

csőben az $r = R/2$ helyen kicsiny m tömegű testet rögzítenek. A forgó korong állandó ω szögsebességű forgása közben a testet elengedik és hagyják, hogy szabadon kifelé csússzon. (a) A forgó rendszerből szemlélve készítsünk diagramot a kifelé mozgó testre ható erők vízszintes komponenseiről. (b) A forgó rendszerben számolva mekkora munkát végez a centrifugális erő az m tömegű testen, mialatt ez az $r = R/2$ helyről az $r = R$ helyre csúszik? (c) A forgó rendszerben mekkora kifelé mutató radiális v' sebességgel lép ki az m tömegű test a csőből?

14C-37 Egy R sugarú ringlispíl peremére sínt szereltek. A sínen m tömegű önjáró kocsi halad akkora sebességgel, hogy inerciarendszerből nézve helyben marad, mialatt a korong állandó ω szögsebességgel forog. Számítsuk ki a kocsira ható erőket úgy, hogy a feladatot (a) földi rendszerben vizsgáljuk és (b) a forgó koronghoz rögzített vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk.

14C-38 A percenként tizet forduló ringlispíl szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a labda pályagörbéje jobbra kanyarodik. (a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát! (b) Amikor a labdát dobó lány a ringlispíl közepe felé néz, jobbra, vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

14C-39 Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszerében vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élnünk a feladat megoldása során?

14C-40 A földi egyenlítőn mozgó test (földhöz viszonyított) pillanatnyi sebessége akkora, hogy a testre ható Coriolis erő és a centrifugális erő nagysága egyenlő és irányaik egybeesnek. (a) Fejezzük ki matematikai formulával ennek a sebességnek a nagyságát azzal a feltételezéssel, hogy ez a lehetséges legkisebb sebesség, amely a mondott feltételt kielégíti. Definiáljuk a kifejezésben előforduló összes szimbólumot. (b) Határozzuk meg a sebesség irányát, és készítsünk hozzá rajzos vázlatot.

14C-41 Az egyenlítőn egy kis modellvonat vízszintes körpályán v sebességgel halad. A szerelvény egyik platós kocsiján kicsiny mérleg, rajta m tömegű test nyugszik. (a) Számítsuk ki a mérleg által mutatott „látszólagos súly" teljes intervallumát, ami a forgó Föld rendszerében fellépő Coriolis erőnek a következménye! Fogalmazzuk meg válaszunkat az egyenlítő R sugarának, a Föld ω szögsebességének, a g nehézségi gyorsulásnak, az m tömegnek és a v sebességnek a függvényében! (b) Milyen irányban mozog a platós kocsi, amikor legnagyobb a „súly"?

14C-42 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel vízszintesen repül az Északi Sark felett, egy (a Földdel együtt forgó) hosszúsági kör mentén. A repülőgépben „nyugalomban lévő" függőón van felfüggesztve. Számítsuk ki a repülőgépben, valamint egy az Északi Sarkon felépített „igluban" (eszkimó jégkunyhóban) felfüggesztett függőón zsinórja által bezárt szöget.[9] Tegyük fel, hogy g értéke a repülőgépben ugyanakkora, mint a kunyhóban.

14C-43 Tekintsünk egy testet, amely az egyenlítő kivételével a Föld egy tetszőleges pontján vízszintes irányú v sebességgel mozog. Mutassuk meg, hogy a testre ható Coriolis erő vízszintes komponense az adott helyen független a vízszintes sebesség *irányától*!

[9] Átvéve Keith Simon *Mechanics* c. könyvének egy feladatából (Addison-Wesley, Reading, Mass 1979.)

XIV. Fejezet

14A-1 2,2 m/s² felfelé
14A-3 5 m/s²
14B-5 g/2
14B-7 11,7 m/s²
14B-9 a) 20,6° b) 18 N
14B-11 5,5 N
14A-13 8,54 fordulat per perc
14A-15 50,4
14B-17 délre 60° a vízszintes alatt
14B-19 $\sqrt{g/R}$
14B-21 a) a sugárirányban befelé mutató súrlódási erő $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N
b) a súrlódási erő és az $f_{cf} = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N centrifugális erő
c) A korong rendszerében az a)-ban és b)-ben adott erő plusz az $f_{Cor} = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N Coriolis erő, a bogár haladási irányától jobbra, valamint egy ugyanakkora tangenciális, balfelé mutató súrlódási erő komponens $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N
d) inerciarendszerben: csak a két súrlódási erő összetevő hat: $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N sugár irányban befelé és $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N érintőirányban a bogártól balra.
14C-23 5 N/m
14C-25 a) 3,17 m
14C-27 $g\text{tg}\,2\theta$
14C-29 $F/(M + 2m/7)$
14C-31 A válasz adott.
14C-33 7,5 N balra
14C-35 a) 20 N sugár irányban kifelé
b) 80 N sugár irányban kifelé
c) 180 N sugár irányban befelé
14C-37 a) nulla b) $m\omega^2 R$ befelé
14C-39 A válasz adott.
14C-41 a) $4m\omega v$ b) nyugat felé

XV. Fejezet

15A-1 a) 0,020 m b) 0,942 m/s a középpontban
c) 17,8 m/s² a szélső helyzetekben
15B-3 0,0356 m
15B-5 $4\pi^2 f^2 A/g$
15B-7 a) 0,910 s⁻¹ b) 0,588 N
15A-9 a) 0,50 s b) 128 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ c) 1,5 m/s
d) 18,9 m/s² e) 9 J f) 0,75 m/s
g) 9,45 m/s²
15A-11 a) 1,19 Hz b) 0,210 s c) 0,784 N lefelé
15B-13 a) 8,17 cm b) 1,42 s⁻¹
15B-15 a) 0,0280 J b) 1,03 m/s c) 0,0158 J
d) 0,0123 J
15B-17 a) 0,10 m b) –0,0654 m c) 0,262 s
d) 0,0160 J e) 0,0160 J
15A-19 a) 0,136 Hz b) 7,37 s
15B-21 A válasz adott.
15A-23 19,9 s
15B-25 1,58 s
15B-27 0,790 Hz
15B-29 a) 3,559 Hz b) 3,554 Hz; 1,38 s
15A-31 1,104 cm³
15A-33 952 N/m²
15B-35 AY/L_o
15C-37 a) $3k$, $1{,}5k$ b) $\sqrt{2}$:1
15C-39 $4mg/l$
15C-41 A válasz adott.
15C-43 A válasz adott.
15C-45 A válasz adott.
15C-47 $\pi b A^2 \omega$
15C-49 a) 0,149 m b) 132°
15C-51 b) $(y/2)(\Delta L/L)^2$

XVI. Fejezet

16A-1 a) $3{,}32 \times 10^{-5}$ N b) $5{,}92 \times 10^{-3}$ N
16A-3 $g/9$
16A-5 35,0 N
16A-7 30,3 km/s
16A-9 2,41
16B-11 $4\pi^2/Gm$, $3{,}00 \times 10^{-19}$ s²/m³
16B-13 a) 84,4 perc b) 7,90 km/s
16B-15 $\frac{128}{81} G\pi^2 R^4 \rho^2$
16B-17 $8{,}74 \times 10^7$ m
16B-19 $1{,}62 \times 10^{27}$ kg
16B-21 $1{,}91Gm/l^2$ az átmérő mentén ellentétes sarok felé
16A-23 A válasz adott.
16B-25 a) $1{,}32 \times 10^{12}$ m/s² b) $9{,}21 \times 10^{13}$ N
c) $7{,}70 \times 10^{-11}$ J
16B-27 $\sqrt{(GM/R)(2-\sqrt{2})}$
16A-29 2380 m/s
16A-31 4R/3
16B-33 $3Gm^2/l$
16B-35 $\sqrt{2Rg(1+R/r)}$
16B-37 A válasz adott.
16B-39 A válasz adott.
16C-41 $\sqrt{125\pi/3G\rho}$
16C-43 b) $2\pi\sqrt{D^3/3GM}$
16C-45 b) $6{,}54 \times 10^{-3}$
16C-47 $Gm^2/3L^2$
16C-49 $2\sqrt{R^3/GM}$

REZGÉSEK

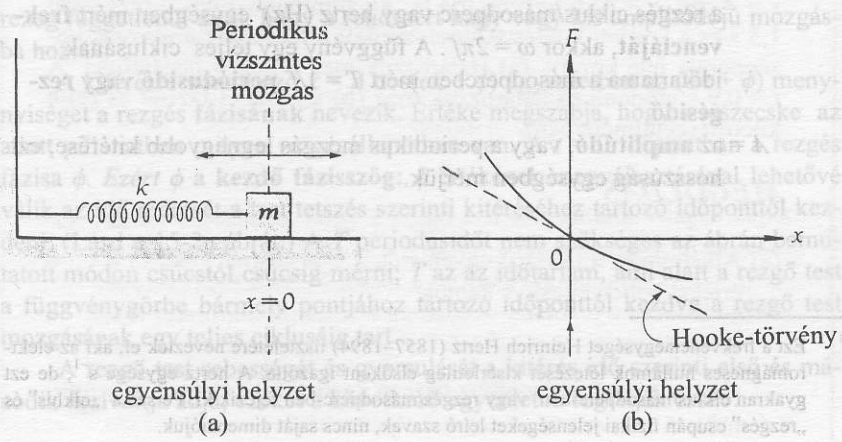
Keveset tudunk, mégis csodálatos, hogy ez milyen sok, s még csodálatosabb, hogy kevés ismeretünk mekkora hatalom a kezünkben.

BERTRAND RUSSELL

15.1 Bevezetés

Számos test *periodikus,* azaz az idő függvényében szabályosan ismétlődő mozgást végez. Az inga ide-oda leng, a benzinmotor hengereinek dugattyúi előre-hátra mozognak; minden atom és molekula egyensúlyi helyzete körül rezeg. Az orgonasípok, és a kürtök légoszlopainak, a hangszerek húrjának rezgése ugyancsak periodikusan változó mozgás. Az elektromos áramkör váltakozó áramát ugyanazzal az egyenlettel írjuk le, mint a mechanikai rendszerek rezgő mozgását. Tehát a periodikus mozgás a fizika majdnem minden ágában előforduló, széles körben elterjedt jelenség.

A következőkben a rezgő rendszerek közös vonásait elemezzük egyetlen m tömegű test mozgásának megfigyelése révén, amely vízszintes súrlódásmentes felületen, rugó hatása alatt egydimenziós mozgást végez. Ez triviális példának tűnhet, de egyszerűsége lehetővé teszi, hogy levezessük azokat az általános egyenleteket, amelyek nagyon sok esetben alkalmazhatók. A testhez a rugót csatlakoztatnak, amint ez a 15-1a ábrán látható. Ha a testet nyugalmi helyzetéből x távolságnyira elmozdítjuk, a rugó olyan F *visszaté-*



15-1 ábra
A természetben számos visszatérítő erő jól megközelíti a rugó által kifejtett (szaggatottan rajzolt) ideális, lineárisan változó visszatérítő erőt: $F = -kx$

rítő erőt gyakorol a testre, amely arányos az elmozdulással; ezt Hooke-törvénynek nevezik:

A Hooke-törvény $$F = -kx \tag{15-1}$$

ahol k a newton/méterben kifejezett **rugóállandó**.

Számos olyan fizikai rendszer van, amelyben az erő jó közelítéssel ennek a törvénynek engedelmeskedik. De ha az erő nem lineáris függvénye az elmozdulásnak, kis elmozdulások esetén ekkor is gyakran jól közelíthető lineáris függvénnyel (a függvénygörbe érintőjével) (15-1b ábra).

15.2 Egyszerű harmonikus rezgő mozgás

A következőkben matematikai összefüggéseket vezetünk le a rezgő mozgás tulajdonságainak leírására. Newton második törvényéből indulunk ki:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{15-2}$$

A Hooke-törvény behelyettesítésével

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{15-3}$$

adódik, azaz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x . \tag{15-4}$$

Ahhoz, hogy ezt az egyenletet „megoldjuk", meg kell találnunk azt az $x(t)$ függvényt, amelynek idő szerinti második deriváltja megegyezik a függvény negatív többszörösével. Mivel a szinusz és a koszinusz függvény ilyen tulajdonságú, ezért a keresett $x(t)$ függvényt ezek segítségével oly módon írjuk fel, hogy a független változót (ami általában valamilyen θ szög) a t idő valamilyen ω-szorosának tekintjük, ahol ω a radián/másodpercben mért ún. **körfrekvencia**. (Jegyezzük meg, hogy itt ω értéke mindig állandó, ellentétben a forgó mozgással, ahol ω a szögsebesség, és változhat.) A (15-4) egyenlet megoldását tehát az

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15-5}$$

alakban írjuk fel, ahol

ϕ = egy tetszőleges állandó, a radiánban mért (a $t = 0$ időponthoz tartozó) ún. **kezdő fázisszög**.

ω = a **körfrekvencia**, radián/másodperc egységben mérve. Ha f jelenti a rezgés ciklus/másodperc vagy hertz (Hz)[1] egységben mért **frekvenciáját**, akkor $\omega = 2\pi f$. A függvény egy teljes ciklusának időtartama a másodpercben mért $T = 1/f$ **periódusidő** vagy **rezgésidő**.

A = az **amplitúdó**, vagy a periodikus mozgás legnagyobb kitérése, ezt hosszúság egységben mérjük.

[1] Ezt a frekvenciaegységet Heinrich Hertz (1857–1894) tiszteletére nevezték el, aki az elektromágneses hullámok létezését kísérletileg elsőként igazolta. A hertz egysége s^{-1}, de ezt gyakran ciklus/másodperc-ben vagy rezgés/másodperc-ben fejezik ki. Persze a „ciklus" és „rezgés" csupán fizikai jelenségeket leíró szavak, nincs saját dimenziójuk.

Mivel $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin \omega t$, a ϕ fázisszög segítségével kifejezett (15-5) függvény a (15-4) differenciálegyenlet *általános* megoldását szolgáltatja, amely a szinusz és a koszinusz függvényt egyaránt tartalmazza. Ez a megoldás az **egyszerű harmonikus rezgő mozgás**nak nevezett periodikus mozgást írja le: egyszerű, mert egyidejűleg fellépő több különböző frekvencia helyett csupán egyetlen frekvenciával jellemezhető. A „periodikus mozgás" elnevezés talán alkalmasabb lenne, de az „egyszerű harmonikus rezgő mozgás" elterjedtebb.

A (15-5) függvény kétszeri idő szerinti differenciálásával (lásd a G-I függeléket) a következőt kapjuk:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \textbf{(15-6)}$$

Összehasonlítva a (15-4) és (15-6) egyenleteket, megállapítható, hogy a (15-5) függvény akkor elégíti ki a (15-4) egyenletet, ha

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad \textbf{(15-7)}$$

Behelyettesítve az $\omega = 2\pi f$ összefüggést és f-re megoldva, kapjuk az egyszerű harmonikus rezgő mozgás *frekvenciáját*:

$$\frac{k}{m} = (4\pi^2 f^2)$$

Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás frekvenciája

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(15-8)}$$

A T *rezgésidő* a mozgás egy teljes ciklusának időtartama. Azaz

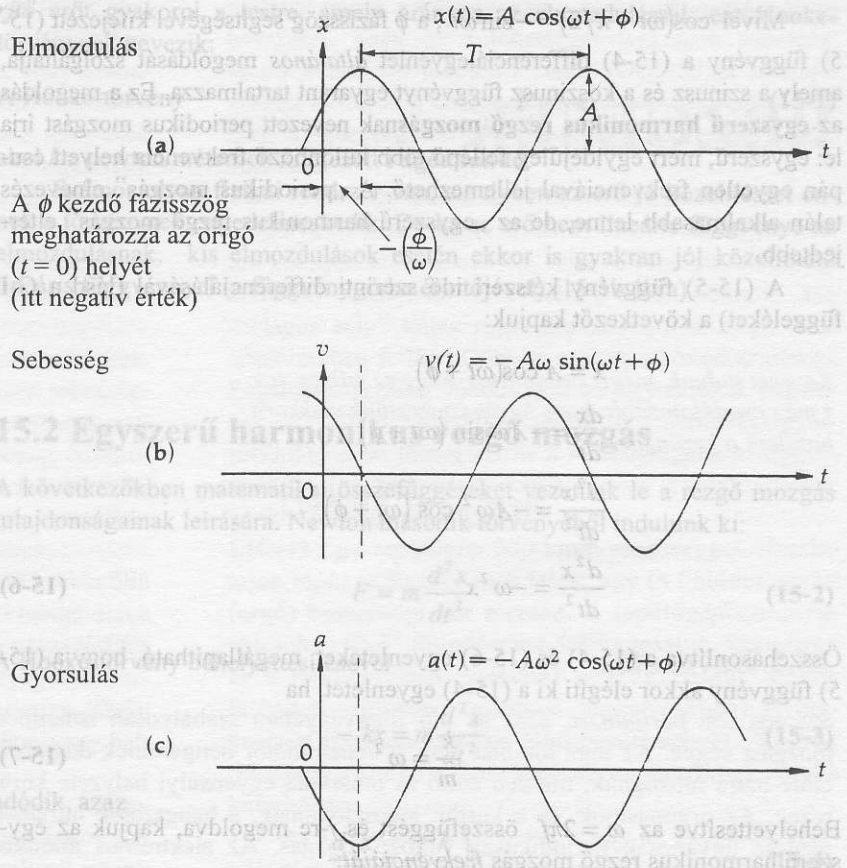
Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás rezgésideje

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(15-9)}$$

Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás fontos jellemzője, hogy az f frekvencia és a T rezgésidő *független az A amplitúdótól*. Ezért egy rugóból és a hozzá kapcsolódó testből álló rendszer mindig *ugyanazzal* a frekvenciával rezeg függetlenül attól, hogy a rendszert nagy vagy kis amplitúdójú mozgásba hozták.

A kitérésre vonatkozó $x = A\cos(\omega t + \phi)$ egyenletben az $(\omega t + \phi)$ mennyiséget a rezgés **fázisának** nevezik. Értéke megszabja, hogy a részecske az adott pillanatban milyen rezgésállapotban van. A $t = 0$ időpontban a rezgés fázisa ϕ. *Ezért* ϕ a **kezdő fázisszög:** ϕ értékének megválasztásával lehetővé válik az idő mérését a test tetszés szerinti kitéréséhez tartozó időponttól kezdeni. (Lásd a 15-2a ábrát.) A T periodusidőt nem szükséges az ábrán bemutatott módon csúcstól csúcsig mérni; T az az időtartam, ami alatt a rezgő test a függvénygörbe bármely pontjához tartozó időponttól kezdve a rezgő test mozgásának egy teljes ciklusáig tart.

A rezgő test sebességét és gyorsulását a kitérés idő szerinti első és második deriváltja adja, ezeket a következő egyenletek foglalják össze:



15-2 ábra
Az $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ függvény szerint mozgó részecske egyszerű harmonikus mozgása. Ha a kezdő ϕ fázisszög zérus, akkor a függőleges koordinátatengely a szaggatott vonallal jelölt helyzetbe tolódik.

Egyszerű harmonikus rezgőmozgás

Kitérés	$x = A\cos(\omega t + \phi)$	**(15-10)**
Sebesség	$\frac{dx}{dt} = v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$	**(15-11)**
Gyorsulás	$\frac{dv}{dt} = a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$	**(15-12)**
Körfrekvencia	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	**(15-13)**

15-1 PÉLDA

Egyszerű harmonikus rezgő mozgást végző részecske kitérését az $x = A\cos(\omega t + \phi)$ függvény írja le. Az amplitúdó 2 cm, a rezgésidő 1,5 s és a kezdeti kitérés 0,4 cm, amikor a részecske a mozgás középpontja felé közelít. (a) Határozzuk meg a kezdő fázisszöget. A $t = 0{,}9$ s időpontban határozzuk meg (b) a mozgás fázisát és (c) a kitérést (centiméterben).

MEGOLDÁS

(a) Alkalmazva a (15-10) egyenletet, $x = A\cos(\omega t + \phi)$, és a $t = 0$ értéket behelyettesítve kapjuk:

$$x_0 = A\cos\phi$$

ahol x_0 a $t = 0$ időponthoz tartozó kezdeti kitérés és A az amplitúdó. A numerikus adatok behelyettesítésével

$$(0{,}4\,\text{cm}) = (2\,\text{cm})(\cos\phi)$$

innen $$\phi = \arccos\left(\frac{0{,}4\,\text{cm}}{2\,\text{cm}}\right) = 1{,}37\,\text{rad}$$

Jegyezzük meg, hogy ϕ érékét radiánban kell kifejezni, minthogy ω *mértékegysége* rad/s.

(b) A (15-10) függvény felírásához előbb ki kell számítanunk ω értékét:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{(1{,}5\,\text{s})} = 4{,}19\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Így a (15-10) egyenlet

$$x = (2\,\text{cm})\cos\left[\left(4{,}19\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)t + 1{,}37\,\text{rad}\right]$$

A [ ] zárójelben lévő kifejezés a *fázis*. A $t = 0{,}9$ s időpontban

$$\text{a fázis} = \left[\left(4{,}19\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}9\,\text{s}) + 1{,}37\,\text{rad}\right] = 5{,}14\,\text{rad}$$

(c) A $t = 0{,}9$ s időpontban a kitérés:

$$x = (2\,\text{cm})\cos(5{,}14\,\text{rad}) = 0{,}829\,\text{cm}.$$

15-2 PÉLDA

Egy a Hooke-törvényt követő rugóra erősített 200 gramm tömegű test 4 cm amplitúdójú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez (15-1a ábra). A rugóállandó 25 N/m. a) Számítsuk ki a rezgés frekvenciáját és b) a rezgés egy teljes ciklusának időtartamát (a rezgésidőt). Tekintsük azt az időpontot, amikor a rezgő test egyensúlyi helyzetétől jobbra 2 cm távolságra van és jobbfelé mozog. Számítsuk ki ebben az időpontban a test c) sebességét és d) gyorsulását!

MEGOLDÁS

a) A rezgés f frekvenciája a (15-8) képlet szerint:

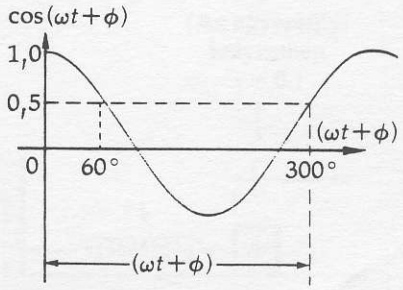
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\,\text{N/m}}{0{,}200\,\text{kg}}} = 1{,}78\frac{\text{ciklus}}{\text{s}} = 1{,}78\,\text{Hz}$$

b) A T periódusidő a (15-9) képlet szerint:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\left(1{,}78\frac{\text{ciklus}}{\text{s}}\right)} = 0{,}562\,\text{s}$$

c) Annak érdekében, hogy a rezgő test mozgásáról világos képet alkothassunk, célszerű az x kitérést t függvényében grafikusan vázolni (15-3 ábra). Először a mozgás fázisát, azaz $(\omega t + \phi)$ értékét számítjuk ki, ezért a numerikus adatokat a (15-10) egyenletbe helyettesítjük és az egyenletet $(\omega t + \phi)$ -re megoldjuk:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$



15-3 ábra
A 15-2 példához.

$$(2\,\text{cm}) = (4\,\text{cm})\cos(\omega t + \phi)$$

ahonnan

$$(\omega t + \phi) = \arccos\left(\frac{2\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}\right) = \arccos(0{,}5) = 60°.$$

adódik. Az ábráról azonban leolvasható, hogy 60°-nál a test balfelé halad (az x kitérés csökken). Ezért az a szög, amit keresünk, egy olyan időponthoz tartozik, amikor x = 2 cm, és a test *jobbra* halad (az x kitérés növekszik). Ez a szög 300°-os, amelynek koszinusza ugyanaz, mint 60° koszinusza[2] . Tehát $(\omega t + \phi) = 300°$, és a sebesség az ehhez tartozó pillanatban a (15–11) képlet szerint:

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = -(0{,}04\,\text{m})(2\pi)\left(1{,}78\frac{\text{ciklus}}{\text{s}}\right)\sin 300°$$

$$v = 0{,}387\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{(jobbfelé irányul)}$$

(d) A gyorsulás számítása:

$$a = -\omega^2 x = -\left[(2\pi)\left(1{,}78\frac{\text{ciklus}}{\text{s}}\right)\right]^2 (0{,}02\,\text{m})$$

$$a = -2{,}50\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad \text{(balfelé irányul)}$$

Jegyezzük meg, hogy a sebesség és a gyorsulás ellentétes irányú, mert a test mozgása lassul.

15-3 PÉLDA

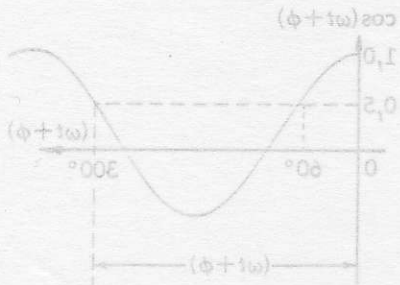
A 15-4 ábrán egy egyszerű harmonikus rezgő mozgás grafikonja látható. Határozzuk meg a mozgás $x = A\cos(\omega t + \phi)$ egyenletében szereplő A, ω és ϕ paraméterek numerikus értékét SI egységekben.

MEGOLDÁS

A grafikont tanulmányozva látjuk, hogy az amplitúdó A = 0,02 m, és a rezgésidő T = 0,8 s. Ezért az ω körfrekvencia

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{0{,}8\,\text{s}} = 7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A ϕ fázisszög meghatározására helyettesítsük be a grafikonról leolvasható értékeket. Például t = 0,3 s időpontban a legnagyobb a kitérés, azaz x = 0,02 m. Tehát a koszinusz függvény értéke +1. Ez akkor igaz, ha a koszinusz függvény argumentuma $n\pi$, ahol $n = 0, \pm 2, \pm 4$, stb. A koszinusz függvény argumentumát most zérusnak választjuk:



[2] Ez az egyszerű harmonikus rezgő mozgás vizsgálatának egyik lehetséges hibaforrására utal. Minthogy a rezgő mozgást végző részecske később újra áthalad ugyanazon a ponton, az ellenkező irányból, óvatosan kell eljárni az adott feladatnak megfelelő időpont meghatározásánál. Továbbá, mivel a zsebszámológépek mindig csak 90°-nál kisebb abszolut értékű szögeket adnak eredményül, könnyen elnézhetjük a valójában más negyedekben lévő szögeket. Az ilyen típusú hiba elkerülésére célszerű felrajzolni a kitérést a t függvényében. A következő fejezet más segédeszközt is nyújt ehhez, mégpedig az ún. *referencia-kört.*

$$\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}3\,\text{s})+\phi=0$$

$$\phi=-2{,}36\,\text{rad}=-135°.$$

Ez a válasz nem egyértelmű. Ha az argumentum értéke 2π, akkor a következőt kapjuk:

$$\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}3\,\text{s})+\phi=2\pi\,\text{rad}$$

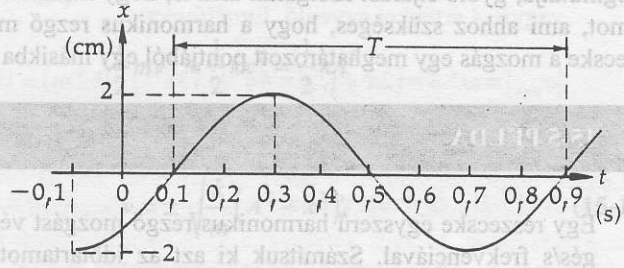
$$\phi=+3{,}93\,\text{rad}=+225°.$$

A két különböző eredmény az origó (a koszinusz függvény kezdőpontjától számított) $-t$ irányú vagy $+t$ irányú eltolásának felel meg. Az origó *negatív t* irányú 135°-os eltolása révén a koszinusz függvénygörbe ugyanazon pontjára jutunk, mint az origó *pozitív t* irányú 225°-os eltolásával. Így a kérdésre két lehetséges válaszunk van:

$$x=(0{,}02\,\text{m})\cos\left[\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)t-2{,}36\,\text{rad}\right]$$

és

$$x=(0{,}02\,\text{m})\cos\left[\left(7{,}85\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)t+3{,}93\,\text{rad}\right].$$



15-4 ábra
A 15-3 példához.

15-4 PÉLDA

Egy mennyezeti gerendára erősített függőleges rugó alsó végére egy 7 kg tömegű test van függesztve. A testet függőleges rezgésbe hozzuk, a rezgésidő 2,6 s. Számítsuk ki a rugó k rugóállandóját.

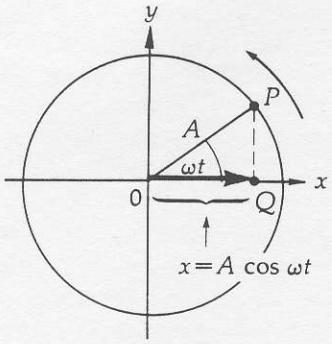
MEGOLDÁS

A (15-9) egyenletből

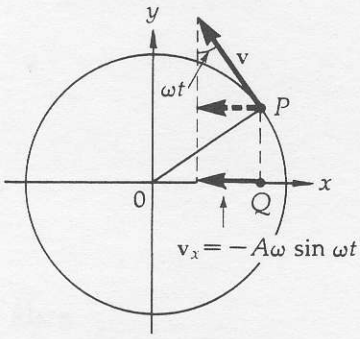
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ebből a k rugóállandót kifejezve

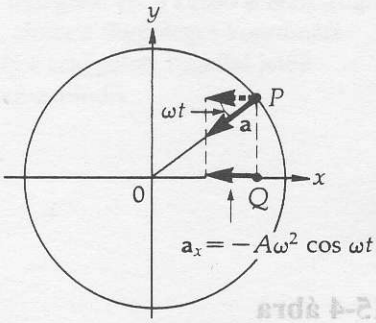
$$k=\frac{4\pi^2 m}{T^2}=\frac{4\pi^2(7\,\text{kg})}{(2{,}6\,\text{s})^2}=40{,}9\ \text{N/m}$$



a) A Q pont.



b) A Q pont v_x sebessége.



c) A Q pont $\mathbf{a}_x$ gyorsulása.

15-5 ábra
A $\pm x$ tengely mentén egyszerű harmonikus mozgással ide-oda mozgó Q pont *referenciaköre.*

15.3 A harmonikus rezgő mozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolata

Az előzőekben számos különböző egyenlet szerepelt. Alkalmas geometriai modell segítségével ez a sokféle függvénykapcsolat könnyen megjegyezhető. A modell neve **referenciakör.**

Tekintsünk egy P pontot, ami egy A sugarú körön állandó ω szögsebességgel mozog. Ha a P pont a $t = 0$ időpontban az x tengely $x = A$ koordinátájú pontjából indul, akkor valamely későbbi t időpontban az A sugár x tengellyel bezárt szöge ωt, (lásd a 15-5a ábrát.) A P pont x tengelyre eső vetülete a Q pont. Amint P végigjárja a kört, Q az $\pm x$ tengely mentén balra és jobbra mozogva egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. A Q pont origótól mért kitérése $x = A\cos\omega t$, azonos a (15-10) egyenlettel, ha a ϕ kezdő fázisszög zérus.

A ϕ kezdő fázisszög alkalmas megválasztásával az idő mérését akkor kezdhetjük el ($t = 0$), amikor a pont a kör tetszőleges helyén van, ami azt jelenti, hogy éppen akkora a harmonikus rezgő mozgást végző test kezdeti kitérése. Általában az egyszerű harmonikus rezgő mozgás az egyenletes körmozgás *bármelyik* átmérőre (nem csak az x tengelyre) eső vetületének tekinthető.

A 15-5b ábrán a mozgó P pont $\mathbf{v}$ sebességvektorának nagysága $A\omega$. A $\mathbf{v}$ vektor $\pm x$ tengelyre vetítésével $v_x = -A\omega\sin\omega t$, a (15-11) egyenletnek megfelelően. (A negatív előjel helyénvaló, mert az óramutató járásával ellentétes irányban mozogva, $\omega t < 90°$ esetén a részecske az x tengely negatív irányában mozog.) Hasonlóképpen, a 15-5c ábrán a mozgó P pont $\mathbf{a}_{cp}$ centripetális gyorsulásának nagysága $\mathbf{a}_{cp} = A\omega^2$, és x irányú vetülete $a_x = -A\omega^2\cos\omega t$ (lásd a (15-12) egyenletet). Ezért a referenciakör az egyszerű harmonikus rezgőmozgás tanulmányozásának igen hatásos eszköze. Mint ezt a következő példa megmutatja, gyors eljárást szolgáltat arra is, hogy kiszámítsuk azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy a harmonikus rezgő mozgást végző részecske a mozgás egy meghatározott pontjából egy másikba jusson.

15-5 PÉLDA

Egy részecske egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez 200 rezgés/s frekvenciával. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy a részecske a középső $x = 0$ (egyensúlyi) helyzetéből az $x = A/2$ pontba (a maximális kitérés felére) jusson!

MEGOLDÁS

Minthogy a gyorsulás változik a mozgás során, nem használhatjuk a kinematikai egyenleteket. Azonban a referenciakörre hivatkozva (15-6 ábra) megállapítható, hogy a képzelt P pont a keresett időtartam alatt 30°-os középponti szöghöz tartozó ívet ír le. Tekintettel arra, hogy a P pont a teljes ciklus T periódusideje alatt állandó nagyságú sebességgel mozog, ezért a t idő a T periódusidő alábbi törtrésze:

$$t = \left(\frac{30°}{360°}\right)T = \frac{T}{12}$$

A rezgésidő $T = 1/f = 1/(200\ \mathrm{s^{-1}}) = 5\times10^{-2}$ s. Tehát

$$t = \frac{5\times10^{-3}}{12} = 4{,}17\times10^{-4}\ \mathrm{s}$$

15.4 A harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyai

Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyait a 7.6 fejezetben tárgyaltuk. Hasznos lenne most újraolvasni ezt a fejezetet. Mintegy áttekintésképpen összefoglaljuk az összefüggéseket. Ha nincs súrlódás, akkor a rendszer konzervatív, tehát igaz az *energia megmaradása*:

$$E_0 = E$$

$$U_0 + K_0 = U + K$$

ahol U és K pillanatnyi értékei:

Potenciális energia U $$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(15-14)}$$

Kinetikus energia K $$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{(15-15)}$$

Összes energia E $$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{(15-16)}$$

A 15-7a ábra U és K változását mutatja a t idő függvényében. Vegyük észre, hogy az E összes energia állandó marad, közben az energia folyamatosan oda és vissza alakula potenciális és a kinetikus energiaforma között. Az energia az alábbi időpontokban teljes egészében az egyik vagy a másik alakban van jelen:

	A maximális kitérésnél (ha $v = 0$)	A középpontban (ha $x = 0$)	
Összes E energia	$E = \frac{1}{2}kA^2$	$E = \frac{1}{2}m(v_{max})^2$	**(15-17)**

A (15-16) és (15-17) egyenletek alapján bármely x kitéréshez megkapjuk a v sebességet:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

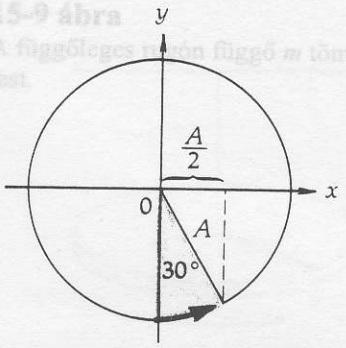
ebből kifejezve a v sebességet:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}. \qquad \textbf{(15-18)}$$

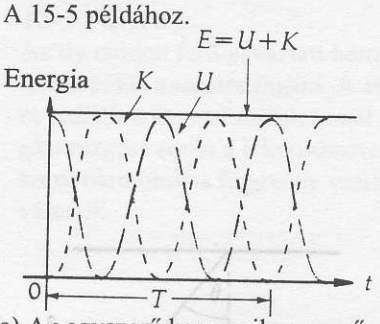
Minthogy a sebesség az $x = \pm A$ helyen irányt változtat, ezért ezeket a mozgás *forduló pontjainak* nevezzük. Ezek azok a korlátok, vagy határok, amelyeken belül az egyszerű harmonikus rezgő mozgás végbemegy. Az energiadiagramok hasznosak, mert belőlük a mozgás sok fontos jellemzője levezethető.

15-6 PÉLDA

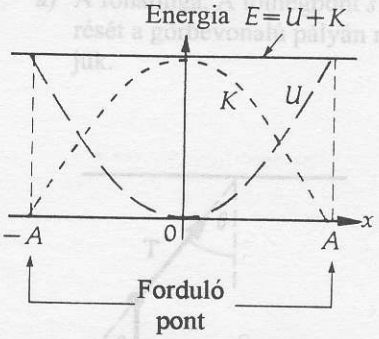
Egy 2 kg tömegű testet rugóra erősítettek és vízszintes sima felületre helyeztek (15-8 ábra). Ha a testet (az x tengely origójától) 0,2 m-re elhúzzák, ezen helyzetének megtartásához 20 N vízszintes irányú erő szükséges. A testet most, x_0 =0,2 m kezdeti kitéréséből elengedik és ezt követően a test egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Határozzuk meg a k rugóállandót. b) Határozzuk meg az egyszerű harmonikus rezgő mozgás f frekvenciáját. c) Határozzuk meg a test v_{max} maximális sebességét. Hol lép fel a maximális sebesség? d) Határozzuk meg a test maximális a_{max} gyorsulását. Hol lép fel a maximális gyorsulás? e) Határozzuk meg a rezgő rendszer teljes E energiáját. Ha az x pillanatnyi kitérés a legnagyobb kitérés egyharmadával egyenlő, akkor mekkora f) a sebesség és g) a gyorsulás?



15-6 ábra
A 15-5 példához.

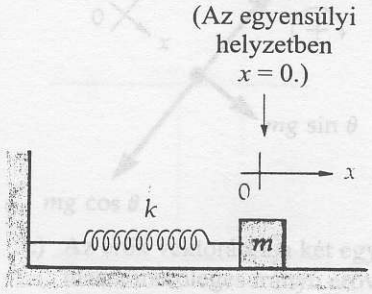


a) Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiája, mint a t idő függvénye.



b) Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiája, mint az x kitérés függvénye.

15-7 ábra
Az egyszerű harmonikus rezgő mozgás energiaviszonyai.



Súrlódásmentes felület

15-8 ábra
A 15-6 példához.

MEGOLDÁS

a) Ha a testet $x = 0{,}2$ m-re kitérítik, akkor a rugó $F = -20$ N erőt fejt ki rá. (A negatív előjel onnan adódik, hogy az erő az x tengely negatív irányába mutat.) Így, a (15-10) egyenlet alapján a k rugóállandó

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{(-20\,\mathrm{N})}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

b) A (15-18) egyenletből

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2\,\mathrm{kg}}}$$

$$= 1{,}13\frac{\text{ciklus}}{\mathrm{s}} \qquad \text{(vagy 1,13 s}^{-1}\text{, vagy 1,13 Hz)}$$

c) A (15-11) egyenletből $v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$, vagyis a sebesség maximális, ha $\sin(\omega t + \phi) = \pm 1$ Ezért:

$$v_{\max} = \pm A\omega = \pm(0{,}2\,\mathrm{m})(2\pi)(1{,}13\,\mathrm{s}^{-1}) = \pm 1{,}41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A sebesség akkor maximális, amikor a test az $x = 0$ egyensúlyi helyzetén halad át. A ± előjel arra utal, hogy a test ebbe a pontba mindkét irányból érkezhet.

d) A (15-12) egyenletből $a = -\omega^2 x$. A negatív előjel arra utal, hogy az a gyorsulás az x kitéréssel ellentétes irányú. A gyorsulás akkor éri el legnagyobb értékét, amikor a kitérés maximális, vagyis A értékkel egyenlő. Ennélfogva:

$$|a_{\max}| = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A = 4\pi^2(1{,}13\,\mathrm{s}^{-1})^2(0{,}2\,\mathrm{m}) = 10{,}1\,\mathrm{m/s}^2$$

A maximális gyorsulás tehát a mozgás szélső helyzeteiben lép fel.

e) A (15-16) egyenlet szerint

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\left(100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0{,}2\,\mathrm{m})^2 = 2{,}00\,\mathrm{J}$$

A teljes energiát így is kiszámíthatjuk:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})\left(1{,}41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 2{,}00\,\mathrm{J}$$

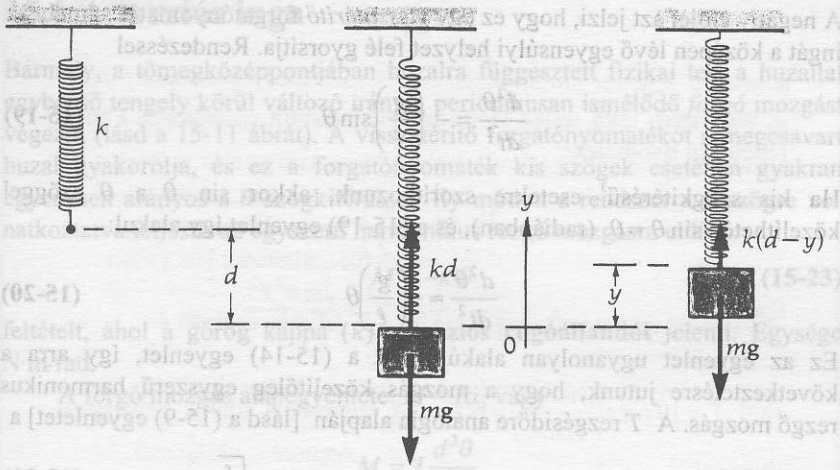
f) A (15-18) egyenlet szerint

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right)}$$

$$v = \pm(0{,}2\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}}{2\,\mathrm{kg}}\left(1 - \frac{1}{9}\right)} = \pm 1{,}33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

g) Az $x = A/3$ kitéréshez tartozó gyorsulás meghatározására a (15-12) egyenletet alkalmazzuk:

$$a = -\omega^2 x = -(2\pi f)^2 x = -(2\pi)^2(1{,}13\,\mathrm{s}^{-1})^2\left(\frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{3}\right) = -3{,}36\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



a) b) Egyensúlyi helyzet c)

15-9 ábra
A függőleges rugón függő m tömegű test.

A függőleges rugón függő test

Ha a (konstans k rugóállandójú) függőleges rugón m tömegű test függ (15–9 ábra), akkor a rugó d távolsággal megnyúlik, hogy a test egyensúlyban legyen. A rugó a testre egy felfelé irányuló kd erőt gyakorol, ami éppen a lefelé mutató mg nehézségi erővel tart egyensúlyt. Ha az y koordinátatengely origója az egyensúlyi helyen van, és ha az y tengely pozitív irányát felfelé mutatónak választjuk, akkora testre ható erők eredője $\Sigma F = kd - mg = 0$. Ha a testet most y távolságnyira felfelé elmozdítjuk, akkor

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$k(d-y) - mg = ma.$$

De $kd-mg = 0$, ezért a fenti egyenlet $-ky = ma$ alakra egyszerűsödik, így a testre ható $F = -ky$ eredő visszatérítő erő pontosan megfelel a vízszintes mozgásra érvényes Hooke törvénynek. Tehát a függőleges rugón függő test egyszerű harmonikus rezgő mozgását, *feltéve, hogy az origót az egyensúlyi helyen választjuk meg*, ugyanazok az egyenletek írják le, amelyeket a sima vízszintes síkon mozgó testre levezettünk. A frekvencia, a rezgésidő, az energia és a mozgás többi egyenlete is, függetlenül attól, hogy a mozgás vízszintes-e vagy függőleges, azonos.

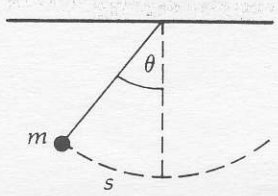
15.5 A fonálinga

Tekintsünk egy idealizált ingát, amely ℓ hosszúságú könnyű fonálra függesztett pontszerű m tömegű testből áll (15-10a ábra). Az inga a gravitáció hatására függőleges síkban leng. Most megmutatjuk, hogy kis szögkitérés esetén az inga mozgása közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgás.

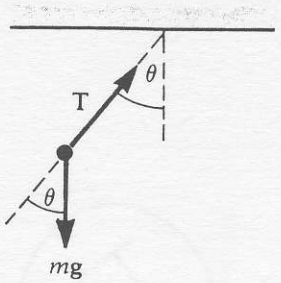
Az erőket a 10-15b ábra mutatja. Görbevonalú mozgások esetén az erők felbontásához az egyik irányt mindig radiálisan befelé mutatónak választjuk. A 15-10c ábra a két, egymásra merőleges irányban felbontott erőt szemlélteti. A felfüggesztési pontra vett forgatónyomaték

$$\Sigma M = I\alpha$$

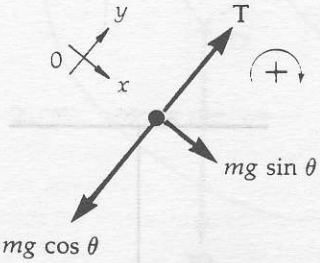
$$-mg\ell \sin\theta = \left(m\ell^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



a) A fonálinga. A tömegpont s kitérését a görbevonalú pályán mérjük.



b) A vektorábra.



c) Az erők vektorábrája két egymásra merőleges irányú erővektor komponenssel.

15-10 ábra
A fonálingára ható erők.

A negatív előjel azt jelzi, hogy ez egy *visszatérítő* forgatónyomaték, amely az ingát a középen lévő egyensúlyi helyzet felé gyorsítja. Rendezéssel

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{\ell}\right)\sin\theta \qquad \textbf{(15-19)}$$

Ha kis szögkitérésű[3] esetekre szorítkozunk, akkor sin θ a θ szöggel közelíthető: $\sin\theta \approx \theta$ (radiánban), és a (15-19) egyenlet így alakul:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\left(\frac{g}{\ell}\right)\theta \qquad \textbf{(15-20)}$$

Ez az egyenlet ugyanolyan alakú, mint a (15-14) egyenlet, így arra a következtetésre jutunk, hogy a mozgás közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgás. A T rezgésidőre analógia alapján [lásd a (15-9) egyenletet] a

A fonálinga lengésideje (kis kitérések esetében)

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \textbf{(15-21)}$$

kifejezés adódik.

A T rezgésidőre a pontos megoldás:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{(1^2)(3^2)}{(2^2)(4^2)}\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cdots\right] \qquad \textbf{(15-22)}$$

A 15°-nál kisebb kitérésekre (vagyis, amikor az inga 30°-os szögtartományban leng), a (15-21) és a (15-22) összefüggések között az eltérés kisebb, mint 0,5%.

15-7 PÉLDA

Határozzuk meg a (kis amplitúdóval lengő) fonálinga méterben kifejezett hosszát, ha percenként 12 rezgést végez.

MEGOLDÁS

Minthogy $T = 1/f$, ezért a (15-21) egyenlet felírható a következőképpen:

$$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Ebből kifejezve az ℓ hosszúságot:

$$\ell = \frac{g}{4\pi^2 f^2}.$$

Az f frekvencia

$$f = \left(12\frac{\text{rezgés}}{\text{perc}}\right)\underbrace{\left(\frac{1\text{ perc}}{60\text{ s}}\right)}_{\substack{\text{Átszámítási}\\ \text{tényező}}} = 0{,}2\,\text{s}^{-1}$$

Tehát

$$\ell = \frac{(9{,}8\,\text{m/s}^2)}{4\pi^2(0{,}2\,\text{s}^{-1})^2} = 6{,}20\,\text{m}.$$

[3] Mivel $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$, azért kicsiny θ szögekre $\sin\theta \approx \theta$ (radián.).

15.6 A torziós inga

Bármely, a tömegközéppontjában huzalra függesztett fizikai test a huzallal egybeeső tengely körül változó irányú, periodikusan ismélődő *forgó* mozgást végezni (lásd a 15-11 ábrát). A visszatérítő forgatónyomatékot a megcsavart huzal gyakorolja, és ez a forgatónyomaték kis szögek esetében gyakran egyenesen arányos a θ szögkitéréssel. Íly módon a rendszer a θ szögre vonatkoztatva teljesíti az egyszerű harmonikus rezgő mozgásra előírt

$$M = -\kappa\theta \qquad \textbf{(15-23)}$$

feltételt, ahol a görög kappa (κ) a **torziós rugóállandót** jelenti. Egysége N·m/rad.

A forgó mozgás alapegyenlete: $M = I\alpha$, vagy

$$M = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ezt az $M = -\kappa\theta$ egyenletbe behelyettesítve a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta$$

differenciálegyenletet kapjuk. Az egyenesvonalú rezgő mozgásra vonatkozó (15-4) egyenlet megoldásával analóg módon, ennek a differenciálegyenletnek a megoldása

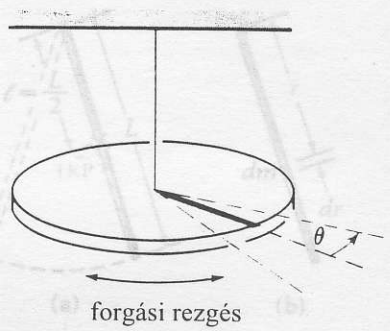
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

ahol θ_0 a mozgás radiánban mért *szögamplitúdója*. A formulát a (15-4) egyenlettel összehasonlítva, az analógia révén a rezgés T periódusidejére az alábbi kifejezést írhatjuk fel:

A torziós inga rezgésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \qquad \textbf{(15-24)}$$

(Ameddig a visszatérítő forgatónyomaték követi a Hooke-törvényt, nem szükséges azt a közelítő egyenlőségjelet alkalmazni, ami az egyszerű fonálinga egyenletében megjelenik.)



forgási rezgés

15-11 ábra
Az íly módon felfüggesztett homogén tárcsa példa a torziós ingára. A tárcsára radiális irányban rajzolt vonal forgási rezgése során a θ koordináta egyszerű harmonikus függvény szerint változik.

15-8 PÉLDA

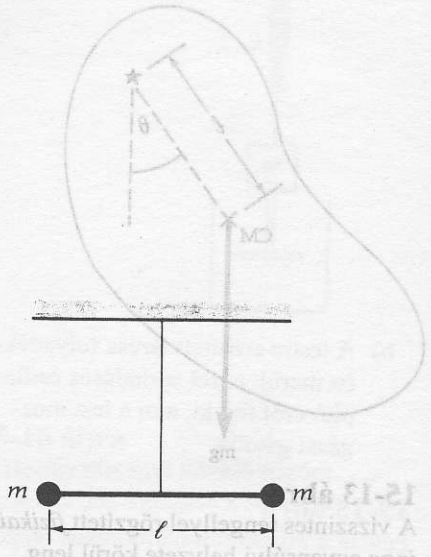
Elhanyagolható súlyú, ℓ = 0,10 m hosszú rúd két végére két egyenlő, kicsi, m = 0,002 kg tömegű test van erősítve. A rúd a középpontjára erősített vékony huzalon vízszintesen függve torziós ingát képez, ahogyan a 15-12 ábrán látható. Ha a rendszert a huzalon át fektetett függőleges tengely körül rezgésbe hozzák, akkor a rezgés periodusideje 10 perc. Határozzuk meg a huzal κ torziós rugóállandóját.

MEGOLDÁS

A torziós rezgés rezgésidejének

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

egyenletét a κ torziós rugóállandóra megoldva:



15-12 ábra
A 15-8 feladathoz.

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

A rúd végén lévő testek (felfüggesztési pontra vonatkozó) I tehetetlenségi nyomatéka

$$I = 2mr^2 = (2m)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2$$

Ezért

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\right) = \frac{2m\pi^2\ell^2}{T^2}$$

ahol $T = 10\,\text{perc}\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{perc}}\right) = 600\,\text{s}$. A numerikus adatok behelyettesítésével

$$\kappa = \frac{2(2{,}0\times10^{-3}\,\text{kg})(\pi^2)(0{,}10\,\text{m})^2}{(600\,\text{s})^2} = 1{,}10\times10^{-9}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$

15.7 A fizikai inga

Ha egy tetszőleges alakú merev testet tömegközéppontjától tetszőleges ℓ távolságban rögzített vízszintes tengelyre függesztünk fel, akkor a test a gravitáció hatására lengeni képes (lásd a 15-13 ábrát). A fonálingával ellentétben, amelynek (ideális) pontszerű ingateste súlytalan fonálon függ, a valóságos fizikai testből készült ingát fizikai ingának nevezzük. Ebben az esetben a felfüggesztési pontra vonatkozó M visszatérítő forgatónyomatékot a tömegközéppontra ható nehézségi erő okozza:

$$M = -mg\ell\sin\theta$$

Kicsiny szögkitérések esetén $\sin\theta$ a θ szöggel közelíthető:

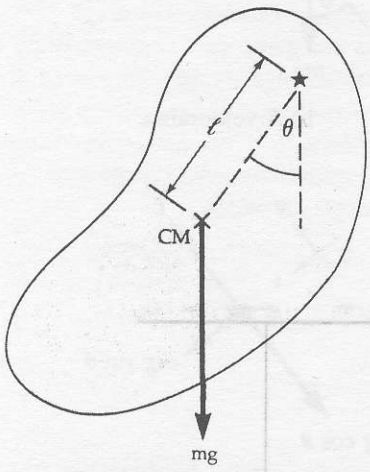
$$M \approx -mg\ell\theta$$

Ennélfogva az állandó $\kappa = mg\ell$ visszatérítő forgatónyomaték következtében

A fizikai inga lengésideje

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \qquad \textbf{(15-25)}$$

ahol I a test rögzített tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka. A Steiner tétel, amelyet a 13.4 fejezetben tárgyaltunk, jól alkalmazható az olyan tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték meghatározására, amely nem megy át a tömegközépponton. Ilyen esetben $I = I_{TKP} + Mh^2$.



15-13 ábra
A vízszintes tengellyel rögzített *fizikai inga* egyensúlyi helyzete körül leng.

15-9 PÉLDA

L = 1,1 m hosszú, m = 2,5 kg tömegű vékony homogén rúd egyik vége vízszintes tengelyhez van rögzítve úgy, hogy a rúd függőleges síkban ide-oda lenghet. Kis amplitúdójú lengések esetére a) határozzuk meg a mozgás közelítő T lengésidejét és b) annak a fonálingának az L' hosszát, amelynek azonos a lengésideje.

MEGOLDÁS

a) A fizikai inga lengésideje (kis amplitúdójú mozgás esetén) a (15-25) egyenlettel adható meg: $T = 2\pi\sqrt{I / mg\ell}$, ahol ℓ a tengelytől a tömegközéppontig mért távolság. A 15-14 ábrából a Steiner tétel felhasználásával – vagy közvetlen integrálással – meghatározhatjuk egy, a végén vízszintes tengelyre rögzített vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát.

A Steiner tétellel

A 12. fejezetből ismert, hogy a vékony rúd tömegközéppontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$I = \frac{1}{12}mL^2$$

A Steiner tétel [(13-8) egyenlet] szerint a rúd végén átmenő párhuzamos tengelyre a tehetetlenségi nyomaték

$$I = I_{TKP} + MR^2$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}mL^2.$$

Közvetlen integrálással

A tehetetlenségi nyomaték általános kifejezése (12-2 egyenlet):

$$I = \int r^2\,dm$$

A tömegelemet a következő képpen választjuk meg:

$$dm = \rho_\ell\,dr$$

ahol ρ_ℓ a hosszúságegységre eső tömeg. (Esetünkben $\frac{m}{L}$.) Ezért

$$I = \int_0^L r^2\rho_\ell\,dr = \rho_\ell\int_0^L r^2\,dr$$

$$I = \rho_\ell\frac{r^3}{3}\Big|_0^L = \frac{1}{3}\rho_\ell L^3$$

Mivel $\rho_\ell = \frac{m}{L}$, így

$$I = \underline{\underline{\frac{1}{3}mL^2}}$$

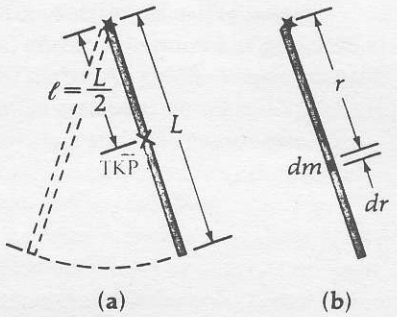
Tehát a periódusidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}mL^2\right)}{mg\left(\frac{L}{2}\right)}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(1{,}1\,\mathrm{m})}{3\left(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}} = 1{,}72\,\mathrm{s}$$

b) Az L' hosszúságú fonálinga lengésideje $T = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$. Összevetve ezt a (15-25) összefüggéssel és az L' hosszúságot kifejezve, azt kapjuk, hogy:

$$L' = \frac{2Ig}{mgL} = \frac{2\left(\frac{1}{3}mL^2\right)g}{mgL} = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(1{,}1\,\mathrm{m}) = 0{,}733\,\mathrm{m}$$



15-14 ábra
A 15-9 feladathoz.

15.8 A rezonancia

Egy „gumiasztal" (amin cirkuszi akrobaták ugrálnak) könnyen hozható nagy amplitúdójú rezgésbe. Nem kell hozzá egyebet tenni, csak a lengés sajátfrekvenciájával (vagy ennek maradéknélküli osztójával egyező frekvenciával) ismétlődő kicsiny ütéseket mérni rá. Továbbá szükséges, hogy az impulzusokat a mozgás alkalmas fázisában adjuk át, ne a mozgással ellentétesen, nehogy az amplitúdót – növelés helyett – csökkentsük. Ez a két tényező – az impulzusok *sajátfrekvenciával* és *alkalmas fázisban* való gyakorlása – fontos szerepet játszik a következőkben tárgyalt mozgás-típusban.

Azt a jelenséget, amelyben egy rendszer a reá alkalmazott impulzusok közül bizonyos sajátfrekvenciákra szelektív módon reagál, **rezonanciának** nevezzük. Ez a a fizika sok ágában előfordul, például a mechanikában, az optikában és az elektromos áramkörökben csakúgy, mint az atomfizikában és a magfizikában. A mechanikai ingának csak egyetlen sajátfrekvenciája van, amelyre rezonál. Az olyan rendszereknek mint a rezgő húr vagy a dob, sok sajátfrekvenciájuk van, a rajtuk gerjeszthető különböző frekvenciájú állóhullámok következtében. Bevezető tárgyalásunkban figyelmünket egydimenziós rendszerek vizsgálatára korlátozzuk. A következtetéseket azonban könnyen kiterjeszthetjük a bonyolultabb két- és háromdimenziós esetekre.

Csillapított rezgések

Tekintsünk egy rugóra felfüggesztett testet, amely a Hooke-törvényt követi (15-15 ábra). Ha nem lenne súrlódás, akkor a rendszer az ω_0 sajátfrekvenciával rezegne [a (15-7) és a (15-8) egyenletekből]:

ω_0 sajátfrekvencia (súrlódás nélkül)

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(15-26)}$$

ahol ω_0 radián/másodpercben van mérve.

Milyen hatást vált ki a súrlódás? Sok esetben a súrlódás közelítőleg a mozgás *sebességével* arányos[4]. Vagyis

A súrlódási erő

$$f_k = -bv = -b\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(15-27)}$$

ahol a b állandó a **csillapítási tényező**.

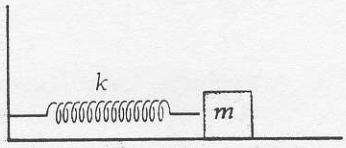
Newton $\Sigma F = ma$ második törvényét alkalmazzuk. Mivel a testre *két* erő hat:

$$\left[-kx - b\frac{dx}{dt}\right] = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

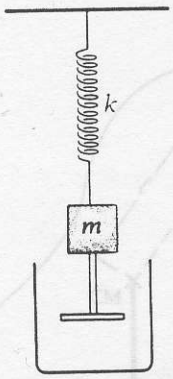
innen rendezéssel

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \textbf{(15-28)}$$

adódik. Ezt a differenciálegyenletet a test **mozgásegyenletének** nevezik. Ha a csillapítás kicsi, azaz $\left(\frac{b}{2m}\right) < \sqrt{\frac{k}{m}}$, a megoldás (vagyis az egyenletet kielégítő x, mint t függvénye):



a) A vízszintes felületen súrlódás lép fel.



b) A testre erősített tárcsa folyadékba merül, ezzel súrlódásos csillapító erőt fejt ki, ami a test mozgását gátolja.

15-15 ábra
Példák a csillapított harmonikus rezgő mozgásra. A test mozgása mindkét esetben súrlódási erők ellenében megy végbe.

[4] Mérsékelt sebesség esetén a csúszó felületek közötti súrlódási erő állandó. Nagyobb sebességeknél a súrlódási erő változik, rendszerint csökken a sebességgel. Folyadékban való mozgásnál azonban a súrlódási erő nagyobb sebességeknél általában növekedik. A lamináris áramlás (ezzel majd a 17. fejezet foglalkozik) bizonyos eseteiben a súrlódási erő közel arányos a sebesség négyzetével.

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t - \alpha) \qquad \textbf{(15-29)}$$

ahol az A amplitúdó az idővel exponenciálisan csökken, mivel a súrlódás fogyasztja a rezgő test energiáját (a súrlódás **disszipatív** erő).

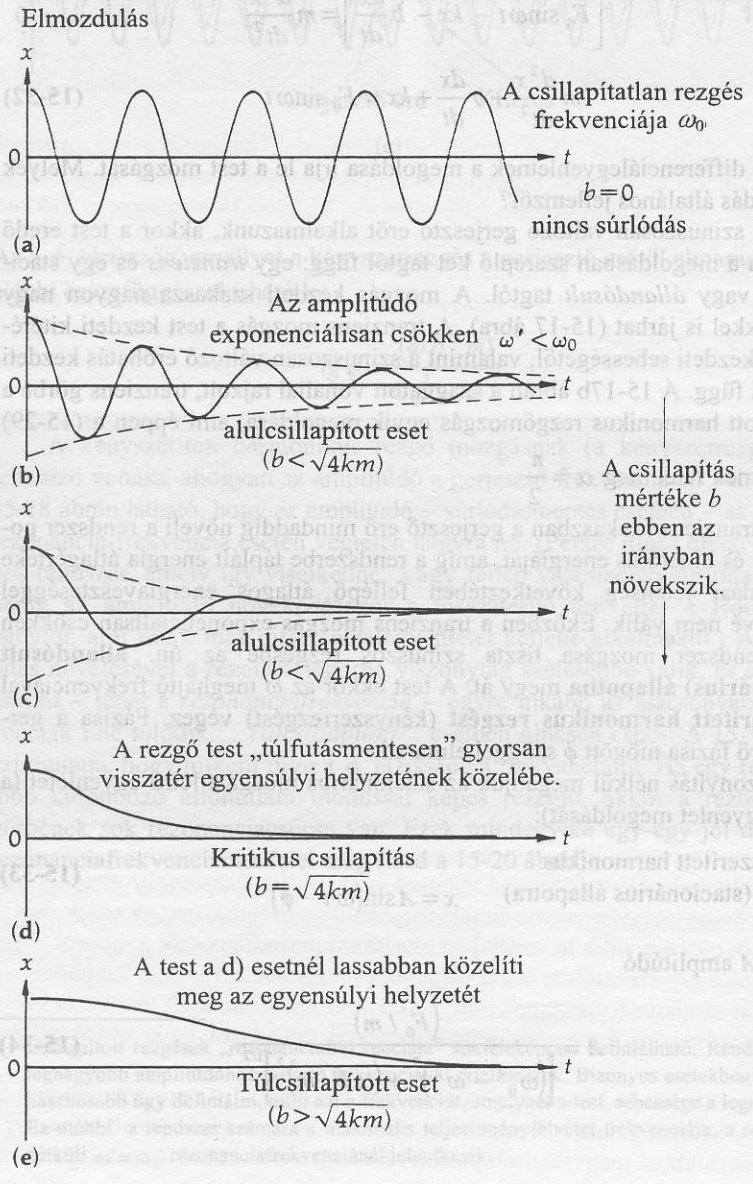
Exponenciális amplitúdócsökkenés csillapítás hatására

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \qquad \textbf{(15-30)}$$

Viszonylag kis csillapítás esetén a rendszer ω_0-nál valamivel kisebb ω' frekvenciával rezeg:

CSILLAPÍTOTT ω' FREKVENCIA
(kis csillapítás esetén, ha $\left(\frac{b}{2m}\right) < \sqrt{\frac{k}{m}}$)

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \textbf{(15-31)}$$



15-16 ábra
A Hooke törvényt követő rugóra akasztott test mozgása a súrlódási erő növelésének függvényében. A test mindegyik esetben nyugalmi helyzetből indul és kezdeti kitérése x_0.

Az α *fázisszög* és az A *amplitúdó* a $t = 0$ időponthoz tartozó kezdeti feltételektől függ. A 15-16 ábrán látható esetben a test x_0 kezdeti kitéréssel indul (ez itt az A_0 amplitúdó). Az egyes görbék a súrlódási erő növelésének kvalitatív hatását érzékeltetik. Az ilyen mozgást **csillapított harmonikus mozgásnak nevezzük**, mert a rezgés amplitúdója exponenciálisan csökken, miközben a rezgés energiája súrlódás következtében hővé alakul.

Kényszerrezgések

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a rendszerre egy külső „gerjesztő erő" hat. Feltételezzük, hogy ez az erő a következőképpen adható meg:

A gerjesztő erő $F = F_0 \sin \omega t$.

Vezessük be a következő jelöléseket: ω jelenti a gerjesztő frekvenciát, ω' a kis csillapításhoz tartozó frekvenciát és ω_0 a csillapítás nélküli sajátfrekvenciát. Az ω gerjesztő frekvencia bármekkora értéket felvehet.

A testre most *három* erő hat: egy Hooke-törvény szerinti $-kx$ erő, egy ellenállási $-b(dx/dt)$ erő és az $F_0 \sin\omega t$ gerjesztő erő. A test mozgását Newton második törvénye szabja meg:

$$\Sigma F = ma$$

$$\left[F_0 \sin\omega t - kx - b\frac{dx}{dt}\right] = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

azaz

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin\omega t \qquad \textbf{(15-32)}$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása írja le a test mozgását. Melyek a megoldás általános jellemzői?

Ha szinuszosan változó gerjesztő erőt alkalmazunk, akkor a test eredő mozgása a megoldásban szereplő két tagtól függ: egy *tranziens* és egy stacionárius vagy *állandósult* tagtól. A mozgás kezdeti szakasza nagyon nagy kitérésekkel is járhat (15-17 ábra). A tranziens mozgás a test kezdeti kitérésétől és kezdeti sebességétől, valamint a szinuszosan változó erőhatás kezdeti fázisától függ. A 15-17b ábrán a szaggatott vonallal rajzolt, tranziens görbe a csillapított harmonikus rezgőmozgás egyik megoldása, ami éppen a (15-29) egyenletnek felel meg $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

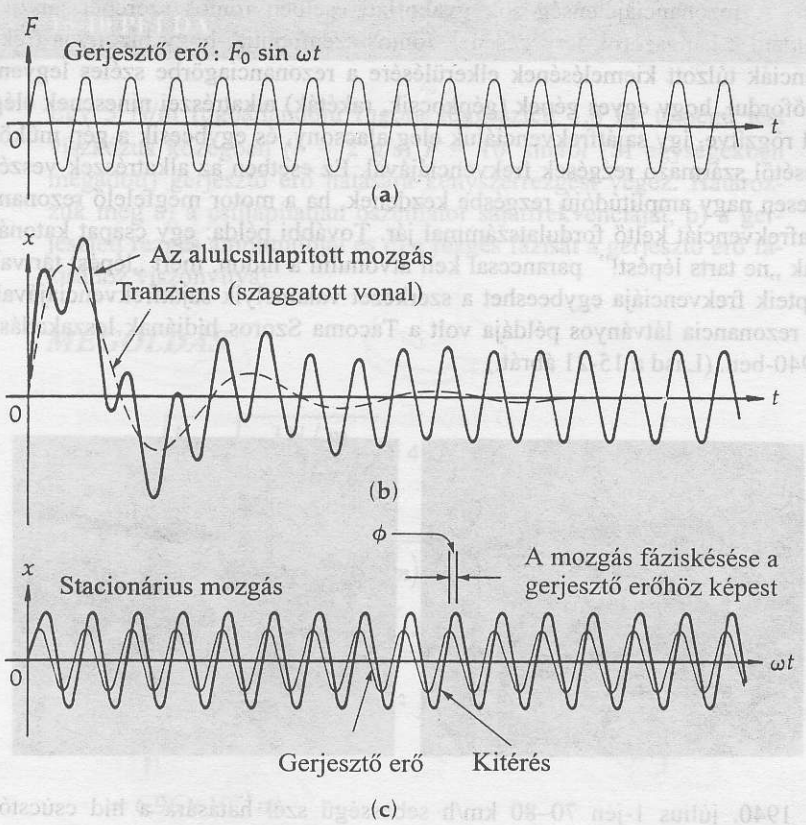
A tranziens szakaszban a gerjesztő erő mindaddig növeli a rendszer potenciális és kinetikus energiáját, amíg a rendszerbe táplált energia átlagértéke a súrlódási jelenség következtében fellépő átlagos energiaveszteséggel egyenlővé nem válik. Eközben a tranziens mozgás exponenciálisan csökken és a rendszer mozgása tiszta szinuszos rezgésbe az ún. **állandósult (stacionárius) állapotba** megy át. A test ekkor az ω meghajtó frekvenciával **kényszerített harmonikus rezgést** (kényszerrezgést) végez. Fázisa a gerjesztő erő fázisa mögött ϕ szöggel elmarad.

Bizonyítás nélkül megadjuk az stacionárius mozgást leíró egyenletet (a 15-32 egyenlet megoldását):

A kényszerített harmonikus mozgás (stacionárius állapotra) $x = A\sin(\omega t - \phi)$ **(15-33)**

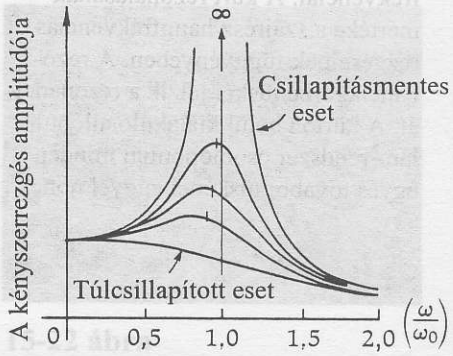
ahol az A amplitúdó

$$A = \frac{(F_0/m)}{\left[(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega b/m)^2\right]^{1/2}} \qquad \textbf{(15-34)}$$



15-17 ábra

Kényszerrezgés csillapítással.
a) görbe: A harmonikus gerjesztő erő.
b) görbe: Az eredő mozgás kis csillapítás esetében, a tranziens szakasszal, amely a súrlódás nagyságától (a b csillapítási tényezőtől) függve exponenciálisan csökken.
c) görbe: A tranziens szakasz lecsengése után a test az ω gerjesztő frekvenciával stacionárius rezgést végez, de fázisa a gerjesztő erő fázisától ϕ szöggel elmarad.



A gerjesztőerő ω és a rezgő rendszer ω_0 frekvenciájának ω/ω_0 aránya

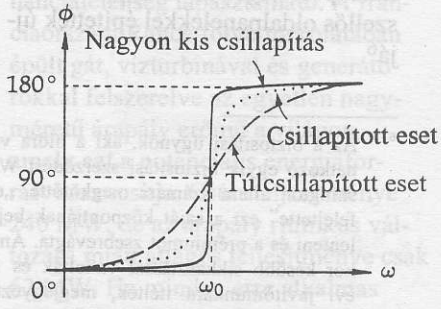
Az a ϕ *fázisszög*, amellyel a kényszerrezgés a gerjesztő erőtől elmarad, az alábbi összefüggéssel írható le:

$$tg\,\phi = \frac{(\omega\, b / m)}{\omega_0^{\,2} - \omega^2}$$

A kényszerített harmonikus rezgő mozgásnak (a kényszerrezgésnek) jellemző vonása, ahogyan az amplitúdó a gerjesztő frekvenciával változik. A 15-18 ábrán látható, hogy az amplitúdó – súrlódásmentes esetben – az $\omega = \omega_0$ rezonancia-frekvencia esetén végtelen nagyra nő. (Persze nincs olyan valóságos rendszer, amely így viselkedne. Vagy fellép valamennyi súrlódás, vagy pedig az amplitúdó növekedésekor a visszatérítő erő eltér a Hooke-törvénytől, ami miatt más differenciálegyenletet kellene alkalmazni.) A csillapítás növelésével a rezonanciagörbe viszonylag szélesebbé válik, és *a görbe csúcsa* – tehát a *rezonanciafrekvencia* – egyre inkább az alacsonyabb frekvenciák felé tolódik.[5] *„Túlcsillapított"* esetben nincsen csúcs. A 15-19 ábra azt mutatja, hogy miként függ a ϕ fázisszög a frekvenciától. Ha egy rendszer több különböző állóhullám módussal képes rezegni, akkor a rezonanciagörbének sok rezonanciacsúcsa van. Ezek mindegyike egy-egy jól definiált rezonanciafrekvenciának felel meg (lásd a 15-20 ábrát).

15-18 ábra

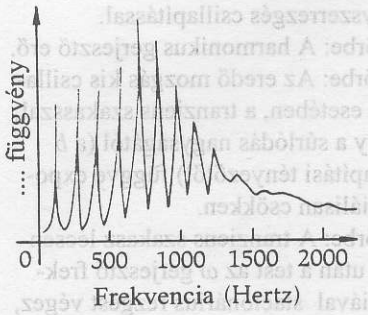
A kényszerített harmonikus rezgés amplitúdója, mint a gerjesztő erő ω frekvenciájának függvénye. Az egyes görbék a csillapítási tényező különböző értékeinek felelnek meg. A görbék csúcsához közel rajzolt rövid függőleges vonalak a gerjesztőerő nélküli esetre vonatkoztatva a csillapított rezgések ω' frekvenciáit (lásd a 15-30 egyenletet) jelölik.



15-19 ábra

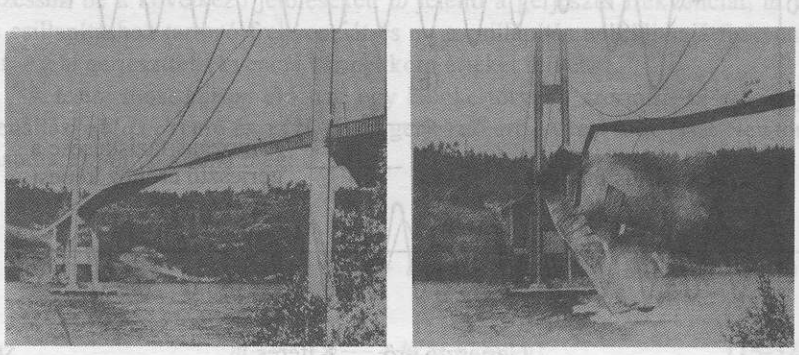
A ϕ fázisszög (amennyivel a kitérés a kényszererő mögött marad) az ω kényszerfrekvencia függvényében. A görbék három különböző csillapítási esetet mutatnak be.

[5] Csillapított rezgések „rezonanciafrekvenciája" sokféleképpen definiálható. Rendszerint a legnagyobb amplitúdóhoz tartozó frekvenciával értelmezzük. Bizonyos esetekben azonban hasznosabb úgy definiálni, mint azt a frekvenciát, amelynél a test sebessége a legnagyobb. Ez utóbbi a rendszer számára a maximális teljesítményfelvétel frekvenciája; a csillapítás nélküli $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvenciánál jelentkezik.



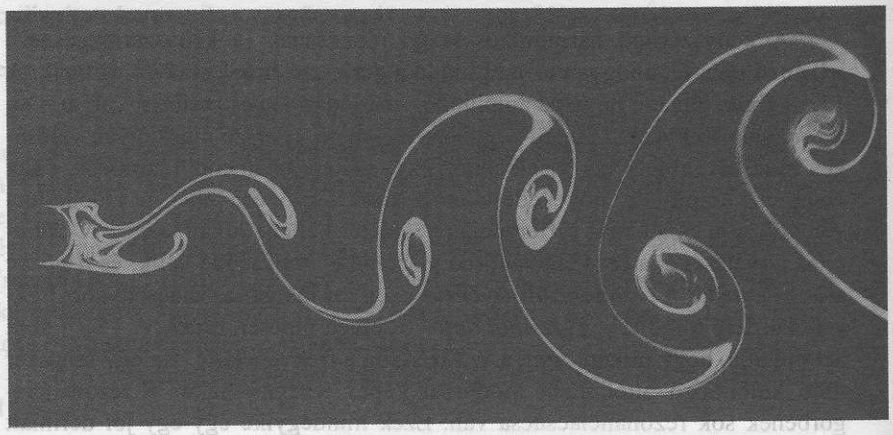
15-20 ábra
Egy tizenkilencedik századi kürt sajátfrekvenciái. A kürt rezonálásának mértéke a szájrész hangfrekvenciás rezgéseinek függvényében. A rezonanciagörbe tüskéi jelzik a rezonanciát. A kürtön belül kialakuló állóhullám-rendszer csomópontjai minden egyes további tüskénél eggyel nőnek.

A rezonanciajelenség sok gyakorlati esetben fontos szerepet játszik. Például a hangszórók tervezésének fontos szempontja, hogy bizonyos frekvenciák túlzott kiemelésének elkerülésére a rezonanciagörbe széles legyen. Előfordul, hogy egyes gépek (gépkocsik, rakéták) alkatrészei nincsenek elég jól rögzítve, így sajátfrekvenciájuk elég alacsony, és egybeesik a gép működésétől származó rezgések frekvenciájával. Ez esetben az alkatrészek veszélyesen nagy amplitúdójú rezgésbe kezdenek, ha a motor megfelelő rezonanciafrekvenciát keltő fordulatszámmal jár. További példa: egy csapat katonának „ne tarts lépést!" paranccsal kell átvonulni a hídon, mert „lépést tartva" lépteik frekvenciája egybeeshet a szerkezet valamelyik sajátfrekvenciájával. A rezonancia látványos példája volt a Tacoma Szoros hídjának leszakadása 1940-ben. (Lásd a 15-21 ábrát.)



a) 1940. július 1-jén 70–80 km/h sebességű szél hatására a híd csúcstól-csúcsig 1,5 m kitérésű függőleges rezgésbe kezdett, és a híd forgalmát lezárták. Négy órával később a fő-hídnyílás hirtelen 14 rezgés/perc frekvenciával torziós rezgésbe kezdett, és az úttest két vége függőlegesen csúcstól-csúcsig mérve 9 méteres kitérést végzett! Kb. 1 órával később a híd kettétört, és a 60 méteres mélységben folyó vízbe zuhant. Csak néhány perccel ezt megelőzve haladt el a híd alatt egy kishajó, fedélzetén a jelenséget közelebbről szemügyre venni akaró érdeklődőkkel.

15-21 ábra
Washington Államban a Puget Sound közelében lévő Tacoma Szoros hídját a helybeliek „Galoppozó Gertie" néven ismerték. Ha mérsékelt szél fújt, gyakran alakult ki rajta függőleges síkú állóhullám rendszer, a két pillér között 0–8 csomóponttal. A függőleges rezgések amplitúdói gyakran olyan nagyok voltak, hogy az elől haladó gépkocsi a mögötte jövő szeme elől szinte teljesen eltűnt. Ez a szokatlan, izgalmas élmény nagyszámú érdeklődőt vonzott a hídhoz többszáz mérföldes környékről. A hidat pótlólagos vázmerevítőkkel és szellős oldalpanelekkel építették újjá[6].



b) A szilárd akadálynak ütköző légáram (vagy folyadékáram) az akadály mögött örvény-leválás néven ismert folyamatban váltakozóan az egyik és a másik oldalon válik le, ezáltal az akadályra periodikus erőt gyakorol. Ilyen effektus következtében hozta függőleges rezgésbe a Tacoma Szakadék hídját az állandó vízszintes irányú szél. (Az ablakban lógó lécroletta vízszintes lapjai is ilyen effektus miatt szoktak csapdosni, ha közöttük átfúj a szél.)
A fényképfelvétel 1 cm átmérőjű szilárd hengeren 1,4 cm/s sebességgel áramló vízről készült. Az áramlást elektrolitos úton kiválasztott, keskeny fénynyalábbal megvilágított parányi hidrogén buborékok teszik láthatóvá.

[6] Az a biztosítási ügynök, aki a hídra vonatkozó egyik biztosítási szerződést Washington állam számára megkötötte, „elfelejtette" ezt a saját központjának bejelenteni és a prémiumot zsebrevágta. Amikor később sikkasztással vádolták és 15 évi javítómunkára ítélték, megjegyezte: ha a híd csak egy héttel is tovább megmaradt volna, akkor a csalás soha nem derült volna ki. Ezt azért mondhatta, mert a híd felügyelői, bízva a híd biztonságában, éppen egy héttel később akarták felmondani a szerződést'. A szabálytalanság ellenére a biztosító társaság tiszteletben tartotta a szerződést.

15-10 PÉLDA

Egy 3 N/m rugóállandójú rugóra függesztett 1,8 kg tömegű test viszkózus közegben (b = 2 g/s) $F = 10^{-3}\sin 40t$ (SI egységekben megadott) gerjesztő erő hatására kényszerrezgést végez. Határozzuk meg a) a csillapítatlan oszcillátor sajátfrekvenciáját, b) a gerjesztett rezgés amplitúdóját és c) a rezgés fázisát a gerjesztő erő fázisához viszonyítva!

MEGOLDÁS

a) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3\,\mathrm{N/m}}{1{,}8\times10^{-3}\,\mathrm{kg}}} = 40{,}82\,\mathrm{rad/s} = 6{,}50\,\mathrm{Hz}$$

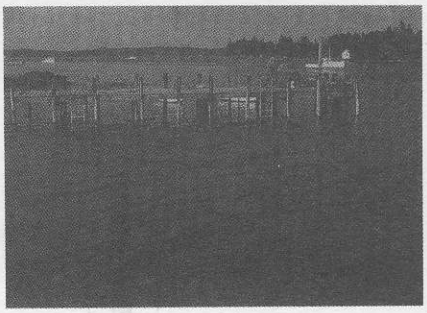
b) $$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega b/m\right)^2}}$$

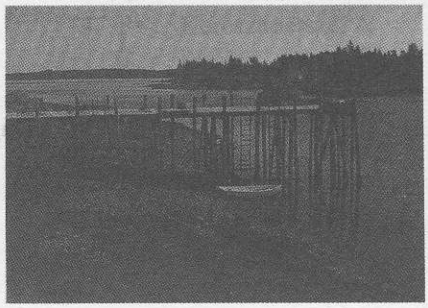
$$A = \frac{\left(1\times10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(1{,}8\times10^{-3}\,\mathrm{kg}\right)}{\sqrt{\left[\left(40{,}82\,\mathrm{s^{-1}}\right)^2 - \left(40\,\mathrm{s^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\left(40\,\mathrm{s^{-1}}\right)\left(2\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}\right)}{\left(1{,}8\,\mathrm{g}\right)}\right)^2\right]}}$$

$$= 6{,}96\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

c) $$\phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\left(\omega b/m\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} = \frac{\left(40\,\mathrm{s^{-1}}\right)\left(2\,\mathrm{g\cdot s^{-1}}\right)/\left(1{,}8\,\mathrm{g}\right)}{\left(40{,}82\,\mathrm{s^{-1}}\right)^2 - \left(40\,\mathrm{s^{-1}}\right)^2}$$

$$\phi = 0{,}588\,\mathrm{rad} = 33{,}7^\circ$$





15-22 ábra
A világon a legnagyobb méretű árapály a nyugat-kanadai New Brunswick és Nova Scotia között fekvő Fundy öbölben jelentkezik. A jelenséget részben rezonancia-hatás okozza. Az öbölben oda-vissza csapódó víz periódusidője kb. 12 óra, nagyjából ugyanannyi, mint az öböl szájánál naponta kétszer jelentkező kb. 3 méteres óceáni árapályé. Ennek a rezonanciának és az öböl felső végének szűkülete következtében az öböl felső végén az árapály szintjének változása akár 15 m is lehet. A világon néhány más öbölben is hasonló rezonanciajelenség tapasztalható. A franciaországi Rance folyó torkolatában épült gát, vízturbinával és generátorokkal felszerelve az egyetlen nagyméretű árapály erőmű a világon, amely ezt a potenciális energiaforrást hasznosítja. Csúcsteljesítménye 240 MW, de az árapály ritmikus változása miatt átlagos teljesítménye csak 62 MW. Ha minden erre alkalmas helyen árapály erőmű létesülne, ezek összes teljesítménye talán 16000 MW lenne, ami nagyjából csak 1%-a a világ jelenlegi elektromos teljesítményigényének.

15.9 Az anyag rugalmas tulajdonságai

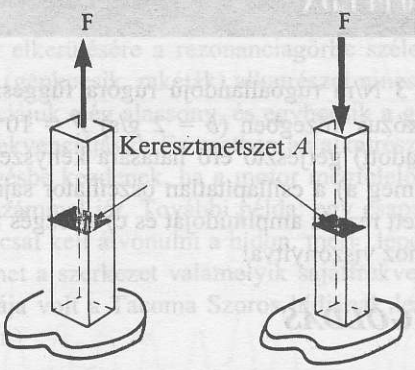
A Hooke-törvénynek megfelelő rugó viselkedése a rugó anyagának rugalmas tulajdonságaitól függ. Minden anyag deformálódik, ha külső erők hatnak rá – nincs tökéletesen merev anyag. Gyakran olyan kicsi a deformálódás, hogy elhanyagolható, és így jogosulttá válik a „merev" test fogalmának a bevezetése. De más esetekben a deformáció jelentős és mi az alábbiakban ezzel számolunk.

A testek deformálásának három alapvető módja van (15-23 ábra). A testet egy irányban húzhatjuk vagy összenyomhatjuk; a testet a rá ható nyomás növelésével kisebb térfogatúra összenyomhatjuk; és „nyíró" erőt fejthetünk ki rá ahhoz hasonlóan, ahogyan egy könyv felső borítólapját vízszintesen eltoljuk miközben a könyv az asztalon nyugszik. Egyéb, összetettebb deformációk e három alapvető típus kombinációi. Mindegyik esetben a felületen (vagy magában az anyag belsejében) a *felületegységre ható erőt* **feszültségnek** nevezzük:

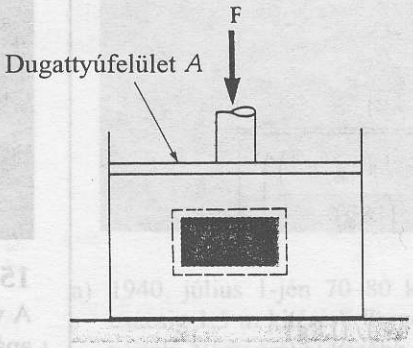
Feszültség

$$\text{Feszültség} = \frac{\text{erő}}{\text{felület}} = \frac{F}{A} \qquad \textbf{(15-35)}$$

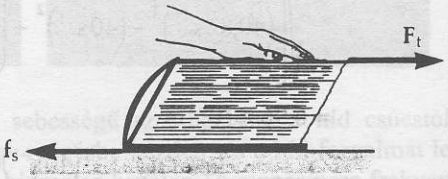
15-23 ábra
Testek deformálásának különböző módjai.



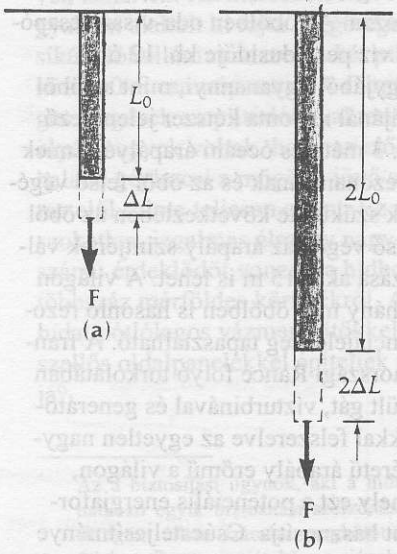
a) Húzó feszültség b) Nyomó feszültség



c) Térfogati összenyomódás megnövelt nyomás hatására



d) Asztalon nyugvó könyvre gyakorolt nyíró-feszültség



15-24 ábra
Az a méret, amellyel egy test adott F erő hatására megnyúlik, arányos a test eredeti hosszával. A b) részábrán látható test hossza kétszer akkora, mint az a) ábrán lévőé, és azonos erő hatására a megnyúlás hossza kétszeres. (A keresztmetszet mindkét esetben azonos.)

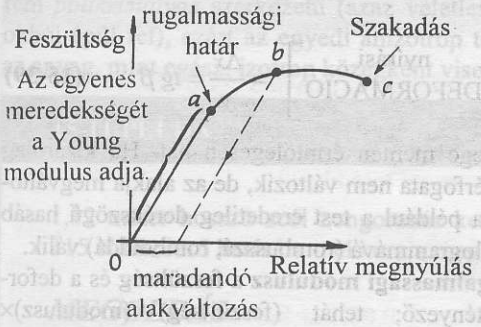
Az anyag feszültség hatására bekövetkező alakváltozását **deformációnak** nevezzük. A deformáció dimenzió nélküli hányados, a *fizikai méretek változásának arányát* méri:

Deformáció

$$\text{Deformáció} = \frac{\text{méretváltozás}}{\text{eredeti méret}} \qquad \textbf{(15-36)}$$

Az, hogy a deformáció dimenzió nélküli arányszám, azt jelenti, hogy csupán az anyag molekuláris tulajdonságától függ, nem pedig a test speciális méreteitől. Ennek belátására tekintsünk egy eredetileg L_0 hosszúságú rudat (15-24a ábra). A rá ható F húzóerő hatására ΔL értékkel megnyúlik, és a deformáció (megnyúlás) $\Delta L/L_0$. Ha most ugyanez az F erő egy $2L_0$ hosszúságú rúdra hat, akkor a rúd megnyúlása $2\Delta L$ lesz (mert kétszer annyi molekulát húzunk szét ugyanazzal az F húzóerővel.) Ennek ellenére a relatív megnyúlás azonos azaz $2\Delta L/2L_0=\Delta L/L_0$. Tehát a deformáció definíciója csak a szóban forgó anyag molekuláris tulajdonságaitól függ, nem pedig az anyag méreteitől.

Rugalmas anyagok azok, amelyekre érvényes a Hooke-törvény. Azaz, a testen bekövetkező deformáció arányos a feszültséggel, és ha a feszültség megszűnik, a test visszanyeri eredeti méreteit. Azonban minden anyagnak van egy *rugalmassági határa*, amelyen túl a deformáció visszaalakulása már nem teljes, maradandó alakváltozás lép fel (15-25 ábra). A feszültség további növelésével az anyag a *törési szilárdság*, vagy *szakítószilárdság* néven ismert feszültségértéknél elszakad, eltörik. A szakítószilárdság húzásra és nyomásra nem ugyanakkora; az üveg például kb. ötször akkora feszültséget bír ki nyomásra, mint húzásra. Ez azért van, mert amikor az atomok egy adott mértékben összébb nyomódnak, akkor a közöttük fellépő taszítóerő nem egyenlő



15-25 ábra
Tipikus feszültség – megnyúlás (alakváltozás) diagram. A diagramnak az origótól az *a* pontig terjedő szakasza egyenes, ennek meredeksége a rugalmassági modulusz. A rugalmasság határán túl az anyag maradandó alakváltozást szenved. Ha például a feszültséget a *b* pontban megszüntetik, az anyag nem veszi vissza teljesen eredeti mérétét, hanem maradandó alakválozás lép fel. Ha a feszültség eléri a *c* pontot, az anyag eltörik (vagy elszakad).

azzal a vonzóerővel, amely azonos nagyságú széthúzás esetén fellép (lásd a 7-10 példát).

Homogén izotróp anyagok (5. lábjegyzet, 361. oldal) rugalmas tulajdonságait leírhatjuk három, egymástól eltérő, **rugalmassági modulusz** néven nevezett állandó megválasztásával*. Ezek azt jellemzik, hogy miként változik meg a test mérete erő hatására. A rugalmassági moduluszok a feszültség és a deformáció közötti arányosságot fejezik ki, és a következőképpen határozhatók meg:

HOSSZIRÁNYÚ DEFORMÁCIÓ. Ha egy lineáris kiterjedésű testet $F_\perp$ erővel húzunk vagy nyomunk, (15-26a ábra), akkor a

$$\left[\begin{array}{c}\text{húzó, vagy}\\ \text{nyomó}\\ \text{FESZÜLTSÉG}\end{array}\right] = \frac{\Delta F_\perp}{A} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{húzási, vagy}\\ \text{nyomási}\\ \text{MEGNYÚLÁS}\end{array}\right] = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad \textbf{(15-37)}$$

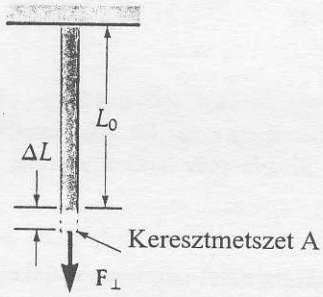
Az $F_\perp$ erő merőleges az A felületre. Ha az A felület a test teljes hossza mentén állandó, akkor a feszültség az anyag teljes térfogatában homogén.

TÉRFOGATI DEFORMÁCIÓ. Ha egy testre gyakorolt nyomást növeljük, (pl. úgy, hogy nyomás alatt lévő folyadékba merítjük), (15-26b ábra), akkor a test minden felületére merőlegesen ható erők a testet kisebb térfogatra nyomják össze. (Hasonlóképpen, a nyomás csökkentésével a test térfogata megnő.) Erre az esetre érvényes a

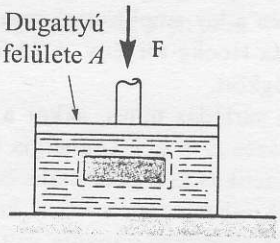
$$\left[\begin{array}{c}\text{térfogati}\\ \text{ÖSSZENYOMODÁS}\end{array}\right] = \frac{\Delta F}{A} = \Delta P \qquad \left[\begin{array}{c}\text{térfogati}\\ \text{DEFORMÁCIÓ}\end{array}\right] = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad \textbf{(15-38)}$$

A test térfogatváltozást szenved, de alakja az eredetivel azonos marad.

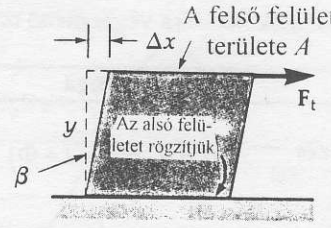
* Homogén izotróp közeg deformációjának leírására két rugalmassági állandó elegendő. Az itt említett három rugalmassági modulusz között fennáll egy összefüggés.(A fordító megjegyzése)



a) Az A területű keresztmetszetre merőleges $\Delta F_\perp$ erő $\Delta F_\perp/A$ húzó *feszültséget* eredményez. Az eredő *alakváltozás* (megnyúlás) $\Delta L/L_0$.



b) Egy hasáb a nyomási $\Delta P = \Delta F/A$ kompressziós *feszültség* hatására $\Delta V/V_0$ kompressziós *alakváltozást* (összenyomódást) szenved.



c) A derékszögű hasáb az A területű fedőlapra *tangenciálisan* ható ΔF_t erő következtében $\Delta F_t/A$ nyíró *feszültségnek* van kitéve. A nyírási *alakváltozás* mértéke $\operatorname{tg}\beta = \Delta x/y$.

15-26 ábra
Az anyag deformációjának három különböző módja.

NYÍRÁSI DEFORMÁCIÓ. Ha egy testet nyíróerő hatásának tesznek ki, (15-26c ábra) akkor a

$$\left[\begin{array}{c}\text{nyírási}\\ \text{FESZÜLTSÉG}\end{array}\right] = \frac{\Delta F_t}{A} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{nyírási}\\ \text{DEFORMÁCIÓ}\end{array}\right] = \frac{\Delta x}{y} = tg\,\beta \qquad \textbf{(15-39)}$$

A ΔF_t erő a felület legfelső rétege mentén érintőlegesen hat. Ha kizárólag nyíróerő van jelen, akkor a test térfogata nem változik, de az alakja megváltozik, azaz a test deformálódik. Ha például a test eredetileg derékszögű hasáb volt, akkor keresztmetszete paralelogrammává (rombusszá, romboiddá) válik.

Minden egyes esetben a **rugalmassági modulusz** a feszültség és a deformáció közötti arányossági tényező; tehát (feszültség) = (modulusz)× (deformáció). Ha a feszültség a deformációval jó közelítéssel arányos, akkor a modulusz lényegében állandó, és az anyagról azt mondjuk, hogy engedelmeskedik a Hooke-törvénynek. A rugalmassági moduluszok alábbi kifejezései akkor érvényesek, ha a fizikai méretek viszonylagos megváltozása nagyon kicsi (vagyis mindaddig, amíg $\Delta L << L_0$, $\Delta V << V_0$ és a β szög nagyon kicsi).

Young modulusz (hosszirányú húzás, vagy összenyomás)

$$E = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)} \qquad \textbf{(15-40)}$$

Térfogati modulusz (térfogati összenyomódás)

$$K = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = -\frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)} = -\frac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)} \qquad \textbf{(15-41)}$$

ahol ΔP a nyomásváltozás. (A definícióban lévő negatív előjel K-hoz pozitív értéket rendel, mert a nyomás *növekedése* a térfogat *csökkenésével* jár együtt.)

Nyírási modulusz (nyírás)

$$G = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F_t}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta F_t}{A}\right)}{tg\,\beta} \qquad \textbf{(15-42)}$$

A rugalmassági állandók jellemző értékeit a 15-1 táblázat tartalmazza.

15-1 TÁBLÁZAT A rugalmassági moduluszok közelítő értékei

Anyag	Young modulusz $\left(\frac{N}{m^2}\right)$	Térfogati modulusz $\left(\frac{N}{m^2}\right)$	Nyírási modulusz $\left(\frac{N}{m^2}\right)$
(korona) üveg	7×10^{10}	5×10^{10}	3×10^{10}
alumínium	7×10^{10}	$7{,}5 \times 10^{10}$	$2{,}4 \times 10^{10}$
sárgaréz	9×10^{10}	7×10^{10}	$3{,}5 \times 10^{10}$
öntött bronz	$8{,}1 \times 10^{10}$	$9{,}6 \times 10^{10}$	$3{,}4 \times 10^{10}$
vörösréz	$12{,}3 \times 10^{10}$	$13{,}1 \times 10^{10}$	$4{,}5 \times 10^{10}$
acél	$20{,}6 \times 10^{10}$	$18{,}1 \times 10^{10}$	$8{,}9 \times 10^{10}$
wolfram	35×10^{10}	31×10^{10}	14×10^{10}
víz		$0{,}21 \times 10^{10}$	
higany		$2{,}8 \times 10^{10}$	

Az *anizotrop* anyagok fizikai tulajdonságai irányfüggőek. Például egy fadarabban a rostszerkezet következtében a moduluszok értéke különböző tengelyek mentén különböző. Az egykristályok anizotropok, ha atomi szer-

kezetük az egyes kristálytani irányok mentén különbözőek. A legtöbb szilárd fém *polikristályos* szerkezetű (azaz véletlenszerűen orientált mikrokristályokból épül fel), ezért az egyedi anizotrop tulajdonságok kiegyenlítődnek és az anyag, mint egész, izotrop közegként viselkedik.

15-11 PÉLDA

1,12 méter hosszú acél zongorahúr keresztmetszete 6×10^{-3} cm^2. 115 N húzóerő hatására mekkora a megnyúlása?

MEGOLDÁS

Az acél Young modulusza (15-1 táblázat): $E = 20{,}6 \times 10^{10}$ N/m^2.A (15-40) egyenlet szerint

$$E = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)} = \frac{L_0\,\Delta F}{\gamma\, A} = \frac{(1{,}12\ \text{m})(115\ \text{N})}{\left(20{,}6\times10^{10}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)\left(6\times10^{-7}\ \text{m}^2\right)}$$

Tehát

$$\Delta L = 1{,}04\times10^{-3}\ \text{m} = 1{,}04\ \text{mm}$$

15-12 PÉLDA

Ha egy köbméter tengervíz a felszínről 3 km mélyre süllyed, ahol a nyomás 300 atm, mekkora lesz a térfogat változása? Tegyük fel, hogy a tengervíz kompresszibilitása azonos az édesvízével. (*Megjegyzés*: egy atmoszféra (atm) nyomás $1{,}013 \times 10^5$ N/m^2.)

MEGOLDÁS

A nyomás átszámítása

$$(300\,\text{atm})\underbrace{\left(\frac{1{,}013\times10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1\,\text{atm}}\right)}_{\substack{\text{Átszámítási}\\ \text{tényező}}} = 3{,}04\times10^7\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

A kompresszióra a térfogati moduluszt alkalmazzuk: $K = -\dfrac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)}$.

A ΔV térfogatcsökkenést kiemelve és az egyes értékeket behelyettesítve (beleértve a 15-1 táblázatból vett $B = 0{,}21 \times 10^{10}$ N/m^2 értéket), azt kapjuk, hogy

$$\Delta V = -\frac{V_0\,\Delta P}{B} = -\frac{(1\,\text{m}^3)\left(3{,}04\times10^7\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)}{\left(0{,}21\times10^{10}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)} = -1{,}45\times10^{-2}\ \text{m}^3$$

Tehát az egy köbméter tengervíz új térfogata (1– 0,0145) m^3, vagyis 0,9855 m^3. Megbecsülték, hogy ezen kismértékű kompresszibilitás ellenére az átlagos tengerszint kb. 30 méterrel magasabb lenne a mostaninál, ha a víz tökéletesen összenyomhatatlan volna.

15-13 PÉLDA

Egy 5 cm élhosszúságú kockaalakú gumiszivacs felső lapjára vízszintesen (egyik élével párhuzamosan) 2N erő hat, míg az alsó lapja rögzítve van. Mekkora a nyírási modulusz, ha az erő hatására a felső lap vízszintes irányban 1 mm-rel tolódik el?

MEGOLDÁS

A tg $\beta \cong \beta \cong 0{,}001$ m/0,05 m = 0,02 rad közelítéssel a (15-42) egyenletet alkalmazva felírható, hogy:

$$G = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\operatorname{tg}\beta} \cong \frac{\Delta F}{A\beta} \cong \frac{2\,\mathrm{N}}{\left(2{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2\right)\left(0{,}02\ \mathrm{rad}\right)} = 4\times10^4\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Összefoglalás

Számos természeti jelenségre jellemző, hogy a testek az egyensúlyi helyzetük felé irányuló „visszatérítő" erő hatására rezgő mozgást végeznek. Nagyon sok esetben, különösen a kis amplitúdójú mozgásokra, alkalmazható az $F = -kx$ Hooke-törvény. A 15-2 táblázat összefoglalja a jelenségkört.

Ha súrlódás nincs, akkor a rendszer konzervatív, és az összes $E = K + U$ energia állandó marad, miközben a kinetikus és a potenciális energia egymásba átalakulhat. A sebesség az $x = \pm A$ helyen, a mozgás *fordulópontján* ellenkező irányúra vált. A *referencia kör* (15-5 ábra) és az *energia diagram* (15-7 ábra) hasznos segítséget nyújt az egyszerű harmonikus rezgőmozgás összefüggéseinek megjegyzéséhez.

Kis kitérések esetén a *fonálinga* és a *fizikai inga* mozgása közelítőleg egyszerű harmonikus mozgás, tehát a Hooke-törvény szerint működő visszatérítő forgatónyomaték hatására végbemenő rezgő mozgás.

	Fonálinga	Fizikai inga
Kitérés	$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \Phi)$	$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \Phi)$
Kör-frekvencia	$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}}$	$^*\omega \approx \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$
Rezgésidő	$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$	$^*T \approx \sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$

* Itt I a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, és ℓ a tengelytől a tömegközéppontig mért távolság.

15-2 TÁBLÁZAT

	Egyenesvonalú mozgás	Forgó mozgás
Hooke-törvény	$F = -kx$	$M = -\kappa\theta$
kitérés	$x = A\cos(\omega t + \phi)$	$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$
kör-frekvencia	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$
sebesség	$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$	$\frac{d\theta}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$
gyorsulás	$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$ vagy $a = -\omega^2 x$	$\alpha = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$ vagy $\alpha = -\omega^2\theta$
kinetikus energia	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
potenciális energia	$U = \frac{1}{2}kx^2$	$U = \frac{1}{2}\kappa\theta^2$
összes energia	$E = U + K$	$E = U + K$

Csillapított harmonikus rezgő mozgás megy végbe, ha a rezgő rendszerben súrlódás lép fel. Ha ilyen rendszerre egyszerű harmonikus rezgés szerint változó gerjesztő erő hat, akkor *kényszerített harmonikus mozgás (kényszerrezgés)* lép fel. Egy kezdeti, exponenciálisan csökkenő *tranziens* periódus után a rendszer a gerjesztő erő frekvenciájával *állandósult, stacionárius* állapotban rezeg, de kitérése a gerjesztő erőé mögött fázisban elmarad. A *rezonanciát* különösen nagy amplitúdók létrejötte jellemzi, ami akkor lép fel, amikor a

gerjesztő impulzusok frekvenciája a rendszer sajátfrekvenciáihoz közel van.

A Hooke-törvényt követő kicsiny deformációk esetében homogén és izotróp anyag rugalmas tulajdonságai három **rugalmassági modulusszal** jellemezhető. Ezek mindegyike a **feszültség** és az adott **deformáció** hányadosa:

Young modulusz (hosszirányú nyújtás, vagy összenyomás)
$$E = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)}$$

Térfogati modulusz (térfogati összenyomás)
$$K = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = -\frac{\left(\frac{\Delta F}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)} = -\frac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)}$$

Nyírási modulusz (nyírás)
$$G = \frac{\text{feszültség}}{\text{deformáció}} = \frac{\left(\frac{\Delta F_t}{A}\right)}{\left(\frac{\Delta b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta F_t}{A}\right)}{tg\,\beta}$$

Minden anyagnak van *rugalmassági határa*, amelyen túl maradandó alakváltozás lép fel, és van *szakítószilárdsága*, amelynél az anyag elszakad vagy eltörik.

Kérdések

1. A liftbe ingaórát helyezünk. Késni, vagy sietni fog-e az óra, ha (a) a lift felfelé gyorsul, és ha (b) lefelé gyorsul?
2. A nagy amplitúdóval lengő inga lengésideje kisebb vagy nagyobb, mint a kis amplitúdóval lengőé?
3. Ideális (tömeg nélküli) rugóra függesztett test rezgésideje $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Ha most figyelembe vesszük a rugó tömegét is, akkor az m értékét a rugó tömegének egyharmadával meg kell növelnünk. Magyarázzuk meg kvalitatíve, mi lehet az oka annak, hogy ezt az értéket (nem pedig a rugó teljes tömegét) vesszük számításba!
4. Az érc- vagy olajtelepek geológiai felkutatásának egyfajta technikai módszeréhez olyan ingát alkalmaznak, aminek lengésideje nagy pontossággal mérhető. Hogyan működik ez a módszer?
5. Zsinóron függő vízzel telt gömböt ingaként lengésbe hozunk. A gömb alján kis lyuk van, a víz ezen keresztül lassan kicsurog. Magyarázzuk meg, miért növekszik eleinte az inga lengésideje, és miért csökken ezután.
6. Egyszerű harmonikus rezgő mozgások milyen kombinációja képes egy „végtelen jelet" (∞) kirajzolni?

Feladatok

15.2 Egyszerű harmonikus rezgő mozgás

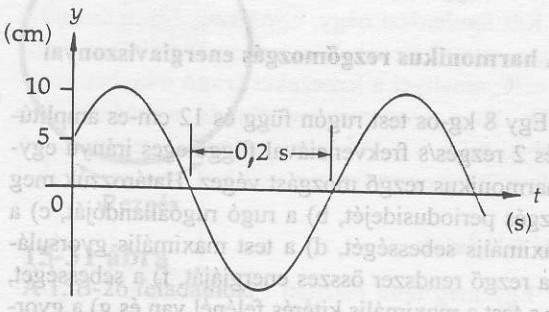
15.3 A harmonikus rezgő mozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolata

15A-1 20 g tömegű részecske egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval. (a) Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán? (b) Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel? (c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását. Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

15A-2 Felső végével állványhoz rögzített függőleges rugó alsó végén 2 kg tömegű test függ. Ahhoz, hogy a testet egyensúlyi helyzete alatt 4 cm-re nyugalmi helyzetben lehessen megtartani, 2 N lefelé irányuló többlet erő szükséges. Amidőn ez az erőhatás hirtelen megszünik, a test függőleges irányú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez a) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját és b) a rezgés frekvenciáját.

15B-3 Egy 1200 kg-os gépkocsi üresen 0,60 s periodusidővel rugózik. Mennyivel süllyednek le a kerekeket tartó rugók, ha hat, egyenként 80 kg-os személy ül be a kocsiba?

15B-4 Egy test az $x = 0{,}04\cos(2t)$ függvény szerint (minden mennyiség SI egységben) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a) a maximális gyorsulást, b) a mozgás periodusidejét és c) a kitérést 0,5 s-mal azután, hogy a test negatív irányban áthalad a középponton.

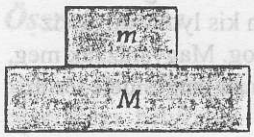


15-27 ábra
A 15A-2 feladathoz.

15B-5 f frekvenciával és A amplitúdóval egyszerű harmonikus rezgőmozgást végző vízszintes felületre pénzérmét teszünk. Határozzuk meg f és g függvényében a felület és az érme között azt a legkisebb μ_s nyugalmi súrlódási együtthatót, amely mellett az érme nem csúszik meg a felületen.

15B-6 Egy test egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez az alábbi egyenlet szerint: $x = 2\cos(10t + \pi/4)$, ahol minden adat SI egységben van. Határozzuk meg a) az amplitúdót, b) a frekvenciát és c) a mozgás T periodusidejét! Határozzuk meg az idő függvényében d) a sebességet és e) a gyorsulást SI egységekben. f) Mekkora a test kitérése a $t = 0{,}2$ s időpontban? Határozzuk meg azt az időtartamot, ami alatt a test az $x = 0$ kitérésről az $x = 1{,}5$ m kitérésre jut.

15B-7 Egy 100 g tömegű hasábot egy 200 g tömegű hasáb tetejére helyezünk a 15-28 ábra szerint. A hasábok között a tapadási súrlódási együttható 0,20. Az alsó hasábot most 6 cm-es amplitúdóval harmonikus rezgő mozgással előre – hátra mozgatjuk. a) Állandónak tartott amplitúdó esetében mekkora az a legnagyobb frekvencia, amelynél a felső hasáb az alsóhoz viszonyítva még nem csúszik meg? b) Mekkora a testekre ható legnagyobb vizszintes irányú erő az a) szerinti mozgás során?



15-28 ábra
A 15B-7 és a 15B-8 feladatokhoz.

15B-8 Tegyük fel, hogy az előbbi feladatban az alsó (200 g tömegű) hasáb nem vízszintesen, hanem *függőlegesen* végzi az egyszerű harmonikus rezgő mozgást! A frekvenciát állandó 2 rezgés/s értéken tartva, az amplitúdót fokozatosan növeljük. a) Határozzuk meg azt az amplitúdót, amelynél a felső (100 g tömegű) hasáb már nem marad érintkezésben az alsó hasábbal. b) Határozzuk meg a hasábok együttesére ható maximális húzóerőt az (a) részfeladat feltétele mellett!

15. 4 A harmonikus rezgőmozgás energiaviszonyai

15A-9 Egy 8 kg-os test rugón függ és 12 cm-es amplitúdóval és 2 rezgés/s frekvenciával függőleges irányú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a) a rezgés periodusidejét, b) a rugó rugóállandóját, c) a test maximális sebességét, d) a test maximális gyorsulását, e) a rezgő rendszer összes energiáját, f) a sebességet, amikor a test a maximális kitérés felénél van és g) a gyorsulást, amikor a test a maximális kitérés felénél van.

15A-10 Egy 48 N/m rugóállandójú rugóra 3 kg tömegű testet függesztünk. A testet nyugalmi helyzetétől 10 cm-rel lejjebb húzzuk és a $t = 0$ időpontban elengedjük. Írjuk fel (SI egységekben) a kitérést mint az idő függvényét.

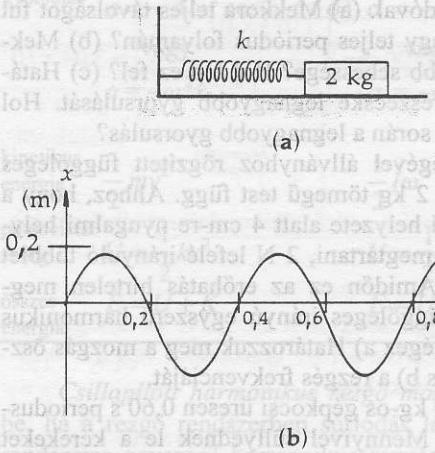
15A-11 100 g tömegű test függ egy függőleges helyzetű (a Hooke-törvényt követő) rugó végén. Ha 40 g-ot helyezünk rá, a rugó további 5 cm-rel nyúlik meg. Most a rugót ezzel a többlettömeggel 10 cm amplitúdójú függőleges rezgésbe hozzuk. a) Határozzuk meg a mozgás frekvenciáját! b) Mennyi idő alatt jut el a test a középső helyzetből a maximális kitérésig? c) Számítsuk ki a testre ható erők eredőjét a felső legnagyobb kitérésnél.

15A-12 Felső végével állványhoz rögzített függőleges rugó alsó végén 2 kg tömegű test függ. Ahhoz, hogy a testet egyensúlyi helyzete alatt 4 cm-re nyugalmi helyzetben lehessen tartani, 2 N lefelé irányuló többlet erő szükséges. Amidőn ez az erőhatás hirtelen megszűnik a test függőleges irányú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját és b) a rezgés frekvenciáját.

15B-13 Egy 2 kg-os test 240 N/m rugóállandójú rugón függ. Most ráteszünk még egy 1 kg tömegű testet, és az együttest a 2 kg-os test nyugalmi helyzetéből kezdősebesség nélkül elengedjük. a) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyre ebből a pontból a testek az elengedés után süllyednek? b) Mennyi a rezgés frekvenciája?

15B-14 A 15-29a ábra szerint a rugóra erősített 2 kg tömegű test a 15-29b ábrán vázolt módon egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a) a rezgés frekvenciáját, b) a rugóállandót és c) a rezgés összes energiáját. d) Írjuk fel (SI egységekben) numerikus egyenlet alakjában az x helyzetváltozását a t idő függvényében!

15B-15 Egy könnyű, 35 N/m rugóállandójú rugóra erősített 50 g tömegű test 4 cm-es amplitúdóval vízszintes felületen rezeg. A súrlódás elhanyagolható. Határozzuk meg a) a rezgő rendszer összes energiáját és b) a test sebességét 1 cm-es kitérésnél. Határozzuk meg a 3 cm-es kitéréshez tartozó c) kinetikus energiát és d) potenciális energiát.



15-29 ábra
A 15A-14 feladathoz.

15B-16 Rugóra erősített test vízszintes súrlódásmentes felületen fekszik és A amplitúdójú egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Összes energiájának hányadrészét teszi ki a kinetikus energia akkor, amikor a kité-

rés $A/2$? b) Mekkora a kitérés akkor, amikor a kinetikus energia az összes energia felével egyenlő?

15B-17 Egy 0,20 kg tömegű test az $y = A\cos\omega t$ egyenletnek megfelelő egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez, ahol $A = 10$ cm és $\omega = 4$ rad/s. Határozzuk meg a kitérést a) a $t = 0$ s időpontban és b) a $t = 1$ s időpontban! c) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a test a nyugalmi helyzetből a fél amplitúdóval egyenlő kitérést ér el. d) Határozzuk meg a test legnagyobb kinetikus energiáját! e) Határozzuk meg a rezgő rendszer összes energiáját.

15B-18 Egy Hooke-törvényt követő rugó végén lévő 200 g-os test az $x = 0{,}05\cos(4t + 30°)$ függvény szerint (az értékek SI-ben) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Vázoljuk fel a mozgás grafikonját! (Jelöljük be numerikusan a $t = 0$ időponthoz tartozó kitérést!) b) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó sebességét. c) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó gyorsulását. d) Határozzuk meg a mozgás periodusidejét. e) Határozzuk meg a rugóállandót. f) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a maximális kitérés helyéről indulva annak fele távolságához jut a test. g) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját.

15.5 A fonálinga

15A-19 Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga a) frekvenciáját és b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó gyorsulás 1,67 m/s^2.

15A-20 Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

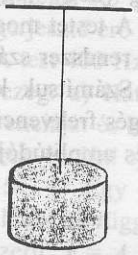
15B-21 Mutassuk meg, hogy ha a gravitációs gyorsulás Δg -értékkel megváltozik, akkor a fonálinga lengésidejének ΔT változása $-T\Delta g/2g$! (Útmutatás: az E függelék hasznos közelítéseket tartalmaz!)

15B-22 Állítják, hogy az ingaóra kissé más sebességgel jár, ha a Hold a fejünk felett van, mint amikor átellenesen a Föld túloldalán található. Fejtsük ki, melyik helyzetben jár az óra gyorsabban, és miért!

15.6 A torziós inga
15.7 A fizikai inga

15A-23 Egy 5 kg tömegű, 4 cm átmérőjű homogén tömör henger torziós ingaként acélhuzalon függ, ahogyan a 15-30 ábra mutatja, és így szimmetriatengelye körül torziós rezgést végez. A huzal torziós rugóállandója 4×10^{-4} N·m/rad. Határozzuk meg a torziós rezgés periodusidejét!

15B-24 Egy 7 kg tömegű, 6 cm sugarú homogén tömör tárcsát egy olyan huzalra függesztették fel, ami a tömegközépponton van átfűzve. A tárcsa síkja vízszintes. Torziós ingaként torziós rezgést végez 12 s periódusidővel. a) Határozzuk meg a huzal torziós rugóállandóját. b) Tegyük fel, hogy a tárcsát ismeretlen I tehetetlenségi nyomatékú testtel helyettesítjük. Mekkora I értéke, ha a periódusidő 17 s?



15-30 ábra
A 15B-23 feladathoz.

15B-25 Egy homogén méterrudat a 70 cm-es jelvonalnál úgy függesztenek fel, hogy kis amplittúdójú rezgéseket végez egy vízszintes tengely körül, amely merőleges a méterrúd hossztengelyére. Mennyi a rezgésidő?

15B-26 Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk (15-31 ábra) úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng. a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periodusidejét. b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

15.8 Rezonancia

15B-27 Egy 4 kg tömegű testet 100 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Hidraulikus csillapítást alkalmazunk, a csillapítási együttható 5 N·s/m. A rendszernek kezdeti kitérést adunk és nyugalmi helyzetéből elengedjük. Mekkora a keletkező rezgés frekvenciája?



15-31 ábra
A 15B-26 feladathoz.

15B-28 Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A testet nyugalmi helyzetéből 0,20 m-rel kitérítjük, és kezdetisebesség nélkül elengedjük. 6 másodperc múlva amplitúdója 0,16 m-re csökken. a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót. b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

rés $A/2$? b) Mekkora a kitérés akkor, amikor a kinetikus energia az összes energia felével egyenlő?

15B-17 Egy 0,20 kg tömegű test az $y = A\cos\omega t$ egyenletnek megfelelő egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez, ahol $A = 10$ cm és $\omega = 4$ rad/s. Határozzuk meg a kitérést a) a $t = 0$ s időpontban és b) a $t = 1$ s időpontban! c) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a test a nyugalmi helyzetből a fél amplitúdóval egyenlő kitérést ér el. d) Határozzuk meg a test legnagyobb kinetikus energiáját! e) Határozzuk meg a rezgő rendszer összes energiáját.

15B-18 Egy Hooke-törvényt követő rugó végén lévő 200 g-os test az $x = 0{,}05\cos(4t + 30°)$ függvény szerint (az értékek SI-ben) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. a) Vázoljuk fel a mozgás grafikonját! (Jelöljük be numerikusan a $t = 0$ időponthoz tartozó kitérést!) b) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó sebességét. c) Határozzuk meg a test $t = 0$ időponthoz tartozó gyorsulását. d) Határozzuk meg a mozgás periodusidejét. e) Határozzuk meg a rugóállandót. f) Határozzuk meg azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a maximális kitérés helyéről indulva annak fele távolságához jut a test. g) Határozzuk meg a mozgás összes energiáját.

15.5 A fonálinga

15A-19 Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga a) frekvenciáját és b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó gyorsulás 1,67 m/s^2.

15A-20 Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

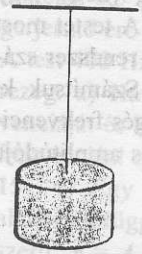
15B-21 Mutassuk meg, hogy ha a gravitációs gyorsulás Δg -értékkel megváltozik, akkor a fonálinga lengésidejének ΔT változása $-T\Delta g/2g$! (Útmutatás: az E függelék hasznos közelítéseket tartalmaz!)

15B-22 Állítják, hogy az ingaóra kissé más sebességgel jár, ha a Hold a fejünk felett van, mint amikor átellenesen a Föld túloldalán található. Fejtsük ki, melyik helyzetben jár az óra gyorsabban, és miért!

15.6 A torziós inga
15.7 A fizikai inga

15A-23 Egy 5 kg tömegű, 4 cm átmérőjű homogén tömör henger torziós ingaként acélhuzalon függ, ahogyan a 15-30 ábra mutatja, és így szimmetriatengelye körül torziós rezgést végez. A huzal torziós rugóállandója 4×10^{-4} N·m/rad. Határozzuk meg a torziós rezgés periodusidejét!

15B-24 Egy 7 kg tömegű, 6 cm sugarú homogén tömör tárcsát egy olyan huzalra függesztették fel, ami a tömegközépponton van átfűzve. A tárcsa síkja vízszintes. Torziós ingaként torziós rezgést végez 12 s periódusidővel. a) Határozzuk meg a huzal torziós rugóállandóját. b) Tegyük fel, hogy a tárcsát ismeretlen I tehetetlenségi nyomatékú testtel helyettesítjük. Mekkora I értéke, ha a periódusidő 17 s?



15-30 ábra
A 15B-23 feladathoz.

15B-25 Egy homogén méterrudat a 70 cm-es jelvonalnál úgy függesztenek fel, hogy kis amplittúdójú rezgéseket végez egy vízszintes tengely körül, amely merőleges a méterrúd hossztengelyére. Mennyi a rezgésidő?

15B-26 Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk (15-31 ábra) úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng. a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periodusidejét. b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

15.8 Rezonancia

15B-27 Egy 4 kg tömegű testet 100 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Hidraulikus csillapítást alkalmazunk, a csillapítási együttható 5 N·s/m. A rendszernek kezdeti kitérést adunk és nyugalmi helyzetéből elengedjük. Mekkora a keletkező rezgés frekvenciája?



15-31 ábra
A 15B-26 feladathoz.

15B-28 Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A testet nyugalmi helyzetéből 0,20 m-rel kitérítjük, és kezdetisebesség nélkül elengedjük. 6 másodperc múlva amplitúdója 0,16 m-re csökken. a) Határozzuk meg a súrlódási erőtől származó csillapítási együtthatót. b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

15B-29 Egy 30 g tömegű testet 15 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. a) Határozzuk meg (négy jegy pontossággal) a test sajátfrekvenciáját! b) A testet most olyan folyadékba merítjük, amely a rezgő rendszer számára 70 g/s csillapítási tényezőt jelent. Számítsuk ki (négy jegy pontossággal) a csillapított rezgés frekvenciáját! c) Mennyi idő alatt csökken a rezgés amplitúdója az eredeti érték egy ötödére?

15.9 Az anyag rugalmas tulajdonságai

15A-30 Egy hegymászó biztonsági célból 50 m hosszú, 10 mm átmérőjű nylon kötelet használ. Ha a kötél egyik vége a 90 kg-os hegymászót tartja, akkor 1,6 métert nyúlik. Határozzuk meg a kötél anyagának Young-moduluszát!

15A-31 400 km-rel a Föld felszíne alatt a nyomás $1{,}36 \times 10^{10}$ Pa. Ha ebből a mélységből 1 cm^3 rezet hoznánk fel, mennyi lenne a térfogata a Föld felszínén?

15A-32 a) Határozzuk meg annak a 18 m hosszú acélhuzalnak a legkisebb átmérőjét, amelyik az alsó végén függő 380 kg-os teher hatására nem nyúlik 9 mm-nél többet! b) Fellép-e maradandó alakváltozás, ha az anyag rugalmassági határa 3×10^8 N/m^2?

15A-33 Egy 7 cm élhosszúságú zselatin kocka egy tányéron fekszik. A felső lapra gyakorolt 0,2 N vízszintes irányú erő hatására a kocka teteje 3 mm-t eltolódik. Számítsuk ki a zselatin nyírási moduluszát!

15A-34 Egy 8 cm élhosszúságú zselatin kockára egy gyermek nyíró feszültséget fejt ki oly módon, hogy alaplapját rögzítve tartja, míg felső lapjára vízszintes irányú 1,3 erőt gyakorol. Mennyi a zselatin nyírási modulusza, ha a felső lap a feszültségmentes állapotból 1 cm-rel mozdul el?

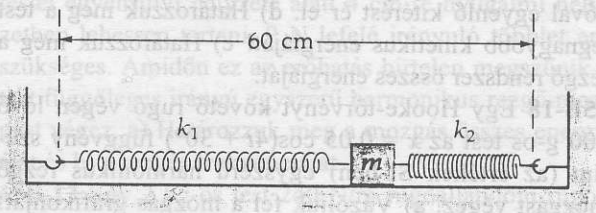
15B-35 Ha egy huzalt húzunk, akkor annak x megnyúlása arányos az F húzóerővel. Így az anyag a Hooke-törvényt követi: $-F = kx$. Fejezzük ki a k rugóállandót az E Young-modulusz, az L_0 hosszúság és az A keresztmetszet függvényében.

15B-36 Két fémlemezt négy, egyenként 7 mm átmérőjű acélszegeccsel erősítettek össze. Számítsuk ki azt a maximális erőt, amellyel a lemezeket érintő irányban meghúzhatjuk, ha a szegecsekben ébredő nyírófeszültség nem lépheti túl a 8×10^7 N/m^2 értéket! Tételezzük fel, hogy a feszültség egyenletesen oszlik el a szegecseken.

További feladatok

15C-37 Egy meg nem feszített l hosszúságú, k rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik. a) Fejezzük ki mindegyik rugó darab k rugóállandóját. b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

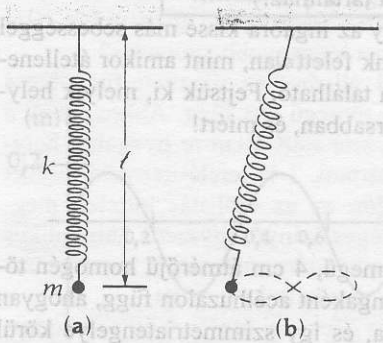
15C-38 Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban 20 cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek: $k_1 = 40$ N/m, és $k_2 = 80$ N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó $m = 0{,}60$ kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól 60 cm távolságban lévő kampókhoz erősítik (15-32 ábra). Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható, a) a baloldali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete? b) Mekkora a test egyszerű harmonikus rezgő mozgásának a frekvenciája a rugók irányában?



15-32 ábra
A 15C-38 feladathoz.

15C-39 Egy k rugóállandójú rugó végére akasztott m tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban) l hosszúságúra nyújtja. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 15-33b ábra szerint függőleges síkban mozogva „nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a k rugóállandót m, l és g függvényében.

15C-40 Az L hosszúságú, vékony homogén rudat oly módon rögzítik, hogy a gravitáció hatására függőleges síkban leng. A felfüggesztési pont a rúd tömegközéppontjától számítva, különböző r távolságra állítható be. a) Fejezzük ki e fizikai inga T lengésidejét L, r és g függvényében! b) A kapott kifejezést differenciálva és zérussal egyenlővé téve mutassuk meg, hogy a legkisebb T_{min} lengésidő az $r = L/\left(2\sqrt{3}\right)$ távolsághoz tartozik.



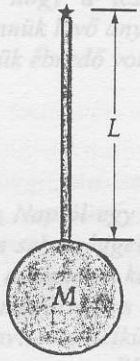
15-33 ábra
A 15C-39 feladathoz.

15C-41 a) Igazoljuk, hogy az egyszerű harmonikus rezgő mozgás kinetikus energiájának idő szerinti átlaga egyenlő a potenciális energia idő szerinti átlagával! (Javaslat: átlagoljunk a mozgás egy periodusára!) b) Mutassuk meg, hogy ha a mozgás egy ciklusának teljes

hosszára átlagolunk, akkor az átlagok a következőek: $K_{átl.} = (1/3)kA^2$ és $U_{átl.} = (1/6)kA^2$, (lásd a 15-7 ábrát a 351. oldalon). c) Adjuk meg a fizikai okát, miért különböznek egymástól az a) és a b) válaszok!

15C-42 Egy ingaóra tökéletesen pontos azon a helyen, ahol a nehézségi gyorsulás éppen 9,80 m/s^2. Ha az órát magasabb helyre visszük, naponta 8 másodpercet késik. Számítsuk ki g értékét az új helyen! (Útmutatás: az E függelékben hasznos közelítés található.)

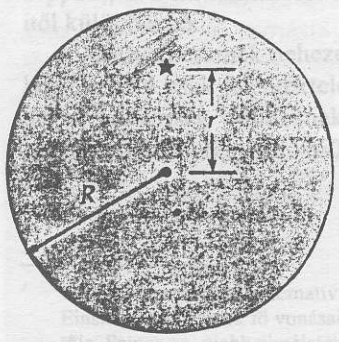
15C-43 Mutassuk meg, hogy a fizikai inga lengésidejére vonatkozó összefüggés speciális esetként tartalmazza a fonálinga lengésidejét!



15-34 ábra
A 15C-44 feladathoz.

15C-44 A 15-34 ábra nagyapáink órájának ingáját mutatja be. Ez egy L hosszúságú 1 kg tömegű karcsú rúd és a ráerősített 2 kg-os, 10 cm sugarú homogén tömör korong. Határozzuk meg L értékét annak alapján, hogy kis amplitúdójú rezgések esetén az ingaóra minden másodpercben kattan egyet, azaz lengésideje 2 s.

15C-45 Egy R sugarú, homogén, tömör tárcsát a síkjára merőleges vízszintes tengelyre rögzítünk úgy, hogy fizikai ingaként lengéseket végezzen. A tengely állítható, így a tárcsát a tömegközépponttól különböző r távolságokban döfheti át (lásd a 15-35 ábrát). Csupán kis kitérésű rezgésekre szorítkozunk. a) Jelöljük az $r = R$ értékhez tartozó lengésidőt T_0-lal, az r tengelytávolság más értékéhez tartozó lengésidőt T-vel. Ábrázoljuk a T/T_0 -arányt r/R függvényében $R/4$ -nél nagyobb tengelytávolságokra! Differenciálás segítségével mutassuk meg, hogy akkor legrövidebb lengésidő, ha $r = R/\sqrt{2}$!



15-35 ábra
A 15C-45 feladathoz.

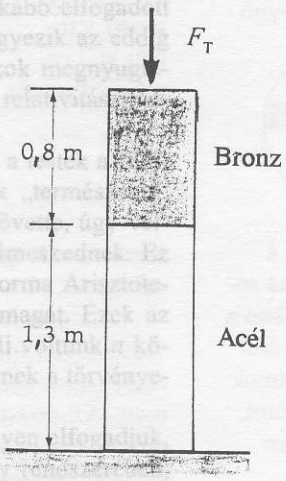
15C-46 Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián F_0. A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg. a) Határozzuk meg az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciáját és b) a rezgés amplitúdóját a 395 Hz gerjesztő frekvencián! c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát.

15C-47 Egy csillapított oszcillátort a gerjesztő erő az alábbi időfüggéssel leírható (állandósult) rezgésre kényszerít: $x = A \sin\omega t$. Mekkora a munkavégzés a fékező erő ellenében a mozgás egy teljes ciklusa során, ha a fékező erő $-bv$? (Útmutatás: milyen kapcsolatban van az erő és a sebesség a munkával?)

15C-48 Egy csillapított rezgő rendszer rugóállandója 6000 N/m, a rezgő test tömege 40 kg. A súrlódási erőtől származó csillapítási tényező 200 N·s/m. A testre szinuszos $F = (20\ \text{N})\ \sin\omega t$ gerjesztő erő hat, és a gerjesztő erő frekvenciája a rendszer rezonanciacsúcsán áthaladva változik. a) Határozzuk meg a legnagyobb amplitúdójú mozgás frekvenciáját. b) Határozzuk meg az a) kérdéshez tartozó amplitúdót.

15C-49 Egy 160 N/m rugóállandójú rugón 0,40 kg tömegű test függ. A test mozgását $f = -bv$ ellenállási erő akadályozza, ahol $b = 4$ N·s/m. A testre (20 N) $\sin(25t)$ gerjesztő erő hat, és a tranziens állapot lecsengése után állandósult rezgés áll be. a) Határozzuk meg a rezgés amplitúdóját! b) Hány fokkal marad el a rezgés fázisa a szinuszos gerjesztő erő mögött?

15C-50 Egy hengeres oszlopnak az átmérője mindenütt 40 cm, és a 15-36 ábrán láthatóan két különböző anyagból készült. Határozzuk meg azt az F_T terhelő erőt, amelynek hatására az oszlop teljes deformációja –0,05 mm!



15-36 ábra
A 15C-50 feladathoz.

15C-51 Egy L hosszúságú A keresztmetszetű huzalt ΔL hosszúsággal megnyújtunk. a) Mutassuk meg, hogy a huzal megnyújtásakor végzett munka: $W = [EA(\Delta L)^2]/2L$. (b) Számítsuk ki a megnyújtott huzal térfogategységében tárolt energiát. (A ΔL megnyúlást a térfogat meghatározásakor hanyagoljuk el)

XIV. Fejezet

14A-1 2,2 m/s² felfelé
14A-3 5 m/s²
14B-5 g/2
14B-7 11,7 m/s²
14B-9 a) 20,6° b) 18 N
14B-11 5,5 N
14A-13 8,54 fordulat per perc
14A-15 50,4
14B-17 délre 60° a vízszintes alatt
14B-19 $\sqrt{g/R}$
14B-21 a) a sugárirányban befelé mutató súrlódási erő $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N
b) a súrlódási erő és az $f_{cf} = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N centrifugális erő
c) A korong rendszerében az a)-ban és b)-ben adott erő plusz az $f_{Cor} = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N Coriolis erő, a bogár haladási irányától jobbra, valamint egy ugyanakkora tangenciális, balfelé mutató súrlódási erő komponens $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N
d) inerciarendszerben: csak a két súrlódási erő összetevő hat: $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N sugár irányban befelé és $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N érintőirányban a bogártól balra.
14C-23 5 N/m
14C-25 a) 3,17 m
14C-27 $g\text{tg}\,2\theta$
14C-29 $F/(M + 2m/7)$
14C-31 A válasz adott.
14C-33 7,5 N balra
14C-35 a) 20 N sugár irányban kifelé
b) 80 N sugár irányban kifelé
c) 180 N sugár irányban befelé
14C-37 a) nulla b) $m\omega^2 R$ befelé
14C-39 A válasz adott.
14C-41 a) $4m\omega v$ b) nyugat felé

XV. Fejezet

15A-1 a) 0,020 m b) 0,942 m/s a középpontban
c) 17,8 m/s² a szélső helyzetekben
15B-3 0,0356 m
15B-5 $4\pi^2 f^2 A/g$
15B-7 a) 0,910 s⁻¹ b) 0,588 N
15A-9 a) 0,50 s b) 128 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ c) 1,5 m/s
d) 18,9 m/s² e) 9 J f) 0,75 m/s
g) 9,45 m/s²
15A-11 a) 1,19 Hz b) 0,210 s c) 0,784 N lefelé
15B-13 a) 8,17 cm b) 1,42 s⁻¹
15B-15 a) 0,0280 J b) 1,03 m/s c) 0,0158 J
d) 0,0123 J
15B-17 a) 0,10 m b) –0,0654 m c) 0,262 s
d) 0,0160 J e) 0,0160 J
15A-19 a) 0,136 Hz b) 7,37 s
15B-21 A válasz adott.
15A-23 19,9 s
15B-25 1,58 s
15B-27 0,790 Hz
15B-29 a) 3,559 Hz b) 3,554 Hz; 1,38 s
15A-31 1,104 cm³
15A-33 952 N/m²
15B-35 AY/L_o
15C-37 a) $3k$, $1{,}5k$ b) $\sqrt{2}$:1
15C-39 $4mg/l$
15C-41 A válasz adott.
15C-43 A válasz adott.
15C-45 A válasz adott.
15C-47 $\pi b A^2 \omega$
15C-49 a) 0,149 m b) 132°
15C-51 b) $(y/2)(\Delta L/L)^2$

XVI. Fejezet

16A-1 a) $3{,}32 \times 10^{-5}$ N b) $5{,}92 \times 10^{-3}$ N
16A-3 $g/9$
16A-5 35,0 N
16A-7 30,3 km/s
16A-9 2,41
16B-11 $4\pi^2/Gm$, $3{,}00 \times 10^{-19}$ s²/m³
16B-13 a) 84,4 perc b) 7,90 km/s
16B-15 $\frac{128}{81} G\pi^2 R^4 \rho^2$
16B-17 $8{,}74 \times 10^7$ m
16B-19 $1{,}62 \times 10^{27}$ kg
16B-21 $1{,}91Gm/l^2$ az átmérő mentén ellentétes sarok felé
16A-23 A válasz adott.
16B-25 a) $1{,}32 \times 10^{12}$ m/s² b) $9{,}21 \times 10^{13}$ N
c) $7{,}70 \times 10^{-11}$ J
16B-27 $\sqrt{(GM/R)(2-\sqrt{2})}$
16A-29 2380 m/s
16A-31 4R/3
16B-33 $3Gm^2/l$
16B-35 $\sqrt{2Rg(1+R/r)}$
16B-37 A válasz adott.
16B-39 A válasz adott.
16C-41 $\sqrt{125\pi/3G\rho}$
16C-43 b) $2\pi\sqrt{D^3/3GM}$
16C-45 b) $6{,}54 \times 10^{-3}$
16C-47 $Gm^2/3L^2$
16C-49 $2\sqrt{R^3/GM}$

A GRAVITÁCIÓ

Gravitáció, (főnév) Az hogy a testek hogyan közelednek egymáshoz a vonzóerő hatására, a bennük lévő anyag tömegétől függ – és az, hogy mennyi a testek tömege, a közöttük ébredő vonzóerőből állapítható meg

AMBROSE BIERCE
((The Enlarged Devils Dictionary),
(Az ördög kibővített szótára))

93 millió mérföldnyire a Naptól egy gömbölyűre kopott sziklán ülök, amely óránként 1000 mérföldes sebességgel pörög ... fejem kifelé mutat a térbe és semmi sincs közöttem és a végtelen között, csak az, amit gravitációnak nevezünk, amit nem is tudok megérteni, s amit senki sem tud sehol megvásárolni, hogy tartalékolja egy gravitáció nélküli napra

RUSSELL BAKER
(Am. Journal of Physics 43, 704 (1975))

16.1 Bevezetés

Mi a gravitáció? Ez a kérdés komolyan foglalkoztatja a természettudósokat már a régi görögök kora óta. A vita mindmáig tart. A leginkább elfogadott gravitációelmélet – Einstein általános relativitáselmélete – egyezik az eddig végzett néhány kísérlet eredményével, de további bizonyítékok megnyugtatóak lennének. Néhány, további kísérlet, amely az általános relativitáselméletet ellenőrzi, jelenleg előkészítés alatt van[1].

Egészen a tizenhetedik századig arról, hogy miért esnek a testek a földre, a legelterjedtebb vélemény az volt, hogy ez földi testek „természetes" hajlama. De mert ezt a hajlamot a Nap nyílvánvalóan nem követte, úgy vélték, hogy a „mennyei" testek más mozgástörvénynek engedelmeskednek. Ez az égi és földi mozgásokra vonatkozó kettős gondolkodási norma Arisztotelész idejétől (~ Kr.e. 340) mintegy kétezer éven át tartotta magát. Ezek az elképzelések a Földnek kitüntetett szerepet tulajdonítottak. Mi voltunk *a* középpont, és a mi fizikai törvényeink az univerzum többi részének a törvényeitől különböztek.

Az ilyen eszmék nehezen halnak el. Jóllehet, most könnyen elfogadjuk, hogy a Föld csak jelentéktelen helyet foglal el a dolgok nagy rendszerében, de az emberiség otthonának, mint az univerzum középpontjának feladása keserves felismerés volt. 1600-ban az olasz Giordano Bruno filozófust még-

[1] Nemrégiben néhány alternatív gravitációelméletet javasoltak. Ezek az újabb javaslatok Einstein elméletének fő vonásaival összhangban vannak, de bizonyos részletekben eltérnek tőle. Sajnos az újabb elméletek és az Einstein féle általános relativitáselmélet közötti döntéshez szükséges nagyérzékenységű kísérletek tervezése és kivitelezése rendkívül nehéz. Mindeddig az összes csillagászati adat (kísérleti hibahatáron belül) megegyezik Einstein elméletével.

lyán égették meg (egyéb eretnek eszméi miatt is) a Kopernikuszi világrendbe vetett hitéért, amely szerint valóban a Nap a „Naprendszer" középpontja. Később, 1633-ban hasonló gondolatokért Galileo Galileit állították bíróság elé és börtönözték be.

Newton gravitációelmélete a Hold és a bolygók mozgásának megértésének szándékából nőtt ki. Ehhez az alapvető munkát Kepler, Tycho de Brahe és mások végezték, akik az égitestek mozgását nagy pontossággal megállapították és beillesztették egy viszonylag egyszerű modelbe, amely szerint a bolygók a Nap körül ellipszis pályán keringenek. De miért mozognak a bolygók így? Milyen erőhatásra keletkezik a kepleri ellipszis pálya? Newton nagy éleslátással tette meg azt a bátor lépést, hogy az égitestek mozgásának magyarázatát földi megfigyelésekből levont fizikai törvények alapján keresse. Tekintsük át röviden ezt a története.

16.2 A Kepler törvények

A tizenhatodik század végére az égitestek megfigyelése jelentős fejlődést ér el. Egy dán nemes, Tycho de Brahe megépítette az első nagy obszervatóriumot – egy valóban nagyszerű létesítményt – egy Kopenhágához közeli szigeten. Bár a távcsövet még nem találták fel, Tycho éveken keresztül lelkiismeretesen feljegyezte a bolygók mozgásának pontos adatait. Megfigyeléseit elmés mechanikai szerkezetekkel és puszta szemmel végezte. Tycho adatait halála után asszisztense, Johann Kepler tanulmányozta, és ezekből három egyszerű törvényt vezetett le, amelyekkel a bolygók mozgását minden eddiginél nagyobb pontossággal lehetett leírni. A görögök nyomdokait követő Kopernikusz szerint a bolygók körpályán keringenek a Nap körül, Kepler viszont feltételezte, hogy a pályák ellipszisek (lásd a 16-1 ábrát). Kepler három törvénye[2]:

A BOLYGÓMOZGÁS KEPLER FÉLE TÖRVÉNYEI

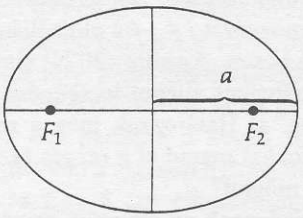
(1) A bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül, amelynek egyik fokuszában a Nap van.

(2) A Naptól a bolygóhoz húzott rádiuszvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket súrol.

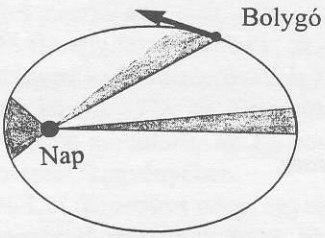
(3) A bolygó T keringési időtartamának négyzete arányos a bolygó Naptól mért középtávolságának[3] köbével. Tehát a T^2/R^3 összefüggés minden bolygóra állandó.

Kepler azt is igazolta, hogy ezek a törvények más bolygórendszerre is alkalmazhatók, pl. a Jupiter holdjaira. Íly módon az elmélet általánosnak látszott.

De e szabályosságok oka ismeretlen volt. Az „erő" fogalma még nem volt kellően megalapozva, jóllehet Galilei megtette az első lépést a világos erőfogalom felé, amikor a mozgás megváltozásának okául az erőt jelölte meg. Az óriási döntő lépést azonban kétséget kizáróan Newton tette meg midőn kiadta a *Principiát*, amelyben megfogalmazta mozgástörvényeit és gravitáció-elméletét.



(a) Elipszis F_1 és F_2 fókuszpontokkal. Az a szakasz az ellipszis nagytengelyének fele.



(b) Kepler második törvénye: a bolygó Nap körüli mozgása során a pálya minden pontjában a Naptól a bolygóig húzott rádiuszvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket súrol. Ezért a bolygó napközelben gyorsabban halad.

16-1 ábra.
A bolygók a Nap körül ellipszispályán mozognak. A Nap az ellipszis egyik fokuszában van. Az ábrákon az „egyenlő területek" törvényének érzékeltetésére az ellipszisek excentricitása el van túlozva. A tényleges bolygópályák sokkal inkább a körhöz hasonlóak.

---

[2] Az eredeti latin szövegben Kepler három törvénye csak 59 szóból áll. Ezek a szavak fektették le a klasszikus mechanika alapjait.

[3] Sok évvel később a newtoni mechanikai és gravitációs törvényből levezetett harmadik Kepler törvény az „átlagtávolságot" az ellipszispálya fél nagytengelyeként adja meg. (Lásd a 16-1a ábrát.)

16.3 Newton tömegvonzási törvénye

Newton lenyűgöző teljesítménye a tömegvonzási törvény kimondása volt, amely a lehulló almára éppúgy érvényes, mint a Hold és a bolygók pályán való maradására. Megállapította, hogy az univerzum bármely két részecskéje között vonzóerő működik, amelynek nagysága

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \textbf{(16-1)}$$

ahol m_1 és m_2 a két részecske tömege, r a részecskék távolsága és G a kísérletileg meghatározott univerzális gravitációs állandó:

$$G = 6{,}672 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}.$$

Vektoriális alakban: az az erő, amit m_1 fejt ki m_2-re

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \textbf{(16-2)}$$

ahol $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ az m_1-*től* (az erő forrásától) az m_2 (amelyre az erő hat) *felé* mutató egységvektor. A negatív előjel vonzóerőre utal. A kettős index azt jelenti, hogy a távolság (vagy erő) az első indexszel jelölttől a második indexszel jelöltig értendő. Newton harmadik törvénye szerint $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Newton tömegvonzási törvényének néhány vonását ki kell hangsúlyozni. Mindenekelőtt azt, hogy nem ad választ arra az alapvető kérdésre, hogy *valójában* mi a gravitáció, vagy, hogy miért léteznek ilyen erők. De meghatároz olyan erőket, amelyek megmagyarázzák egyes testek mozgásának irányát, és tömören kifejezik ezen erők jellemzőit. Az erők mindig párosával jelentkeznek; vagyis két részecske kölcsönös vonzóerővel hat egymásra, nagyságuk egyenlő, irányuk ellentétes – ez megfelel Newton harmadik törvényének. Ilyen, párosával fellépő erők hatnak az univerzum bármelyik két részecskéje között, más objektumok jelenlététől függetlenül. Ha több test van jelen, a szuperpozíció elve alkalmazható: bármely részecskére ható gravitációs erőt a rá ható erők vektori összegeként kapjuk.

Két elektromos töltés között fellépő – taszító vagy vonzó – erővel ellentétben a gravitációs erő mindig vonzó. További eltérés az elektromos vagy a mágneses erők és a gravitációs erő között az, hogy míg az elektromos erők hatását alkalmas fémlemezzel (fémernyővel) vagy a mágnesek közötti mágneses erő hatását elegendően vastag lágyvas lemezzel árnyékolni lehet, addig a gravitációs erők kizárására semmilyen ernyőt vagy pajzsot sem ismerünk.

Érdekes azonban, hogy a két (q_1 és q_2) pontszerű töltés között fellépő elektromos erőt leíró

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \mathbf{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \textbf{(16-3)}$$

összefüggés éppúgy a távolság négyzetével fordítottan arányos, mint a gravitáció törvénye (jóllehet az elektromos erő a töltések előjelétől függően vonzó és taszító lehet). Ezért kutatás folyik egy „egységes térelmélet" kidolgozására, amellyel mind a gravitációs, mind az elektromos erők leírhatóak lennének. De ezek a kísérletek mindeddig nem voltak eredményesek.

NEWTON ÉS A GRAVITÁCIÓ

Newton 23 éves volt amikor megalkotta gravitációelméletét. A Cambridge University diákjaként az 1665–1666. évi himlőjárvány idején vidéki otthonába távozott, hogy ott elszigeteltségben éljen és tanuljon. Bár egészsége kissé gyenge volt, ez az időszak Newton számára nagyon produktív volt. Állítólag egy kertjében lehulló alma hatására jött

arra a gondolatra, hogy talán ugyanaz az erő, ami az almát gyorsítja, vezérli a Hold mozgását is.

De még volt egy nagy akadály. Ha valóban van vonzóerő két *részecske* között, akkor mi lehet a vonzóerő az alma és egy olyan *kiterjedt* test között, mint amilyen a Föld? Mindenesetre a Föld egy közeli elemi tömege bizonyára nagyobb vonzóerőt fejt ki, mint az ugyanekkora, de a Föld túloldalán lévő elemi tömeg. Ennek az előzetesen felmerülő problémának megoldására fejlesztette ki Newton a differenciál- és integrálszámítást* , elvitathatatlan zsenialitásának e másik nagy teljesítményét.

1684-ben egyik barátja, Edmund Halley (akiről a Halley üstököst elnevezték) megpróbálta kideríteni, milyen típusú erő hatására jöhet létre Kepler-törvény szerinti elliptikus pálya. Newton megjegyezte, hogy ő már évekkel azelőtt megoldotta a problémát; a megoldást az $F \propto 1/r^2$ **inverz-négyzetes-törvény** adja. Halley rábeszélte Newtont, hogy ezt és egyéb eredményeit publikálja. Két év intenzív munkájával Newton elkészítette *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* c. munkáját. A mű 1687. évi publikációja Newtont minden idők egyik legnagyobb géniuszává avatta. A *Principiával* Newton Arisztotelész 2000 éves tanításának a kettősségét – a földi és az égi törvények kétféleségét – elsöpörte. Newton elmélete Kepler három törvényét éppúgy megmagyarázta, mint az általános mechanika bárhol másutt érvényes jelenségeit. A *Principia* más, meglepő megállapításai – a matematikában, az optikában és az asztronómiában – megerősítették azt a hitet, hogy az ember képes megérteni és felhasználni a természet jelenségeit.

Centrális erők

A természetben sok példa van **centrális erőre**: *olyan vonzó vagy taszító erőre, amelynek hatásvonala mindig egy rögzített ponton megy át.* Például az a gravitációs erő, amit a Nap gyakorol egy bolygóra, mindig a Nap középpontja felé irányuló centrális erő. A centrális erő érdekes tulajdonsága, hogy azért, mert hatásvonala mindig áthalad az O középponton, nincs az O pontra vonatkozó forgatónyomatéka; ennélfogva *a centrumra vonatkoztatott impulzusmomentum megmarad.* Tehát a bolygó pályájának minden pontjában a bolygó Nap körüli impulzusmomentuma időben állandó. Más példa erre az elektron mozgása a Bohr féle hidrogénatom modellben – az erő, amit a proton gyakorol az elektronra, centrális erő, így az elektron protonra vonatkoztatott impulzusmomentuma időben állandó. Az atommagok tulajdonságainak kutatásában alkalmazott nagyenergiájú szóródási kísérletekben az alfa részecske (aminek pozitív töltése van) pozitív töltésű maghoz közelítve eredeti pályájától centrális taszító erő hatására térül el oly módon, hogy a (lényegében) rögzített magra vonatkozó impulzusmomentuma megmarad.

16-1 PÉLDA

Tekintsünk egy m tömegű műholdat, ami úgy kering a Föld körül, hogy a Föld középpontjától mért földtávoli *apogeum-távolsága* négyszer akkora, mint földközeli *perigeum-távolsága*, ahogyan ezt a 16-2 ábra mutatja. Határozzuk meg a műhold v_a apogeumsebességének és v_p perigeum-sebességének arányát!

* Azidőtájt a differenciál- és integrálszámítási eszméje már „a levegőben volt". Newton matematika tanára, Isaac Barrow már igazolt egy, az alapvető differenciál- és integrálszámítással ekvivalens elméletet. Gottfried Wilhelm von Leibniz, német filozófus és matematikus, a differenciál- és integrálszámítást kilenc évvel később, mindenkitől függetlenül, a maihoz közelebb álló szimbolikával dolgozta ki.

MEGOLDÁS

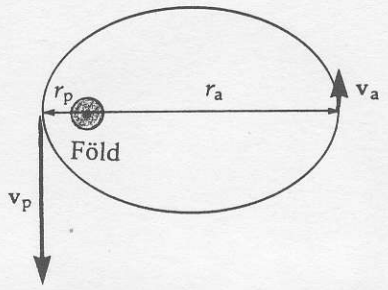
A műholdra ható gravitációs erők eredője *centrális* erő, az elliptikus pályán történő mozgás során mindig a Föld középpontja felé mutat. Ezért a Föld középpontjára vett L impulzusmomentum időben állandó.

$$L_a = L_p$$

Apogeum-ban és perigeum-ban a rádiuszvektorok merőlegesek a trajektóriára, ezért az impulzusmomentumok [a (12-9) egyenlet szerint] a következők:

$$mv_a r_a = mv_p r_p$$

Igy a keresett arány $\dfrac{v_a}{v_p} = \dfrac{m\,r_p}{m\,r_a} = \dfrac{1}{4}.$



16-2 ábra.
A 16-1 példához.

16-2 PÉLDA

Mutassuk meg, hogy amikor egy bolygó a Nap körül kering, akkor (a Naptól a bolygóig húzott) rádiuszvektora egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket súrol.

MEGOLDÁS

A 16-3 ábra a Nap körül keringő bolygó ellipszis-pályáját (a numerikus excentricitást erősen túlozva) vázolja. Mivel a bolygóra ható gravitációs erő mindig a Nap felé mutat, a bolygóra nem hat Napra vonatkozó forgatónyomaték. Tehát a bolygó impulzusmomentuma időben állandó. (Feltételezzük, hogy a Nap nyugalomban van.)

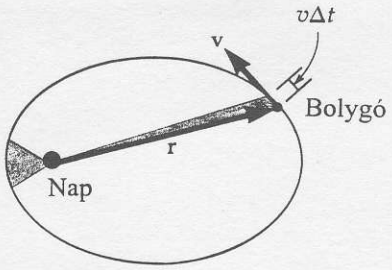
Δt idő alatt a bolygó $v\Delta t$ távolsággal mozdul el. Ezen idő alatt a rádiuszvektor súrolja a beárnyékolt keskeny területet. Számításunk egyszerűsítésére ezt a területet r magasságú, Δx alapú egyenlőszárú háromszöggel közelítjük. A Δx alapot $v\Delta t$ -nek az **r** -re merőleges egyenesre való vetítésével kapjuk. Ha az **r** és a **v** vektorok által bezárt szög Φ, akkor $\Delta x = v\Delta t \sin\Phi$. Így a háromszög ΔA területe

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}(\text{magasság})(\text{alap}) = \tfrac{1}{2} r\, v\Delta t \sin\Phi$$

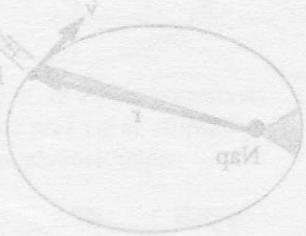
Amint Δt értéke kisebbé válik, ΔA megközelíti a fenti értéket. Számlálót és nevezőt m -mel szorozva, Δt -vel osztva és Δt -vel zérushoz közelítve ($\Delta t \to 0$), kapjuk:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}(mvr\sin\theta)\ .$$

Az $(mvr\sin\theta)$ tényező a bolygó Napra vonatkozó L impulzusmomentuma, ami időben állandó. Így a dA/dt területsebesség, amivel a rádiuszvektor a területet súrolja, ugyancsak időben állandó a pálya bármely szakaszára. Tehát *a sugár egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket súrol*. Ez a következtetés azon a tényen alapul, hogy a gravitációs erő *centrális* erő, nem gyakorol forgatónyomatékot a bolygóra.



16-3 ábra.
A 16-2 pédához



16-3 PÉLDA

A Föld körül körpályán keringő mesterséges hold T idő alatt tesz meg egy teljes fordulatot. (T a mozgás „periódusideje".) Határozzuk meg G, T és M (a Föld tömege) függvényében (a) a mesterséges hold v sebességét és (b) a pálya r sugarát!

MEGOLDÁS

(a) A mesterséges holdra ható gravitációs erő szolgáltatja a centripetális gyorsulást:

$$\sum F = ma$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m\left(\frac{v^2}{r}\right).$$

Abból az összefüggésből, hogy v = (távolság/idő) = $(2\pi r/T)$, azt kapjuk, hogy $r = (Tv/2\pi)$. Behelyettesítve a fenti egyenletbe és mindkét oldalon m/r -rel egyszerűsítve:

$$\frac{GM}{(Tv/2\pi)} = v^2, \qquad \text{vagy} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}.$$

(b) $$r = \frac{Tv}{2\pi} = \frac{T}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 GM}.$$

Minthogy a mesterséges bolygó m tömege nem szerepel a megoldásokban, azért a kapott eredmények a körpályán keringő tetszőleges testre érvényesek.

16.4 Pontszerű és kiterjedt test között fellépő gravitációs erők

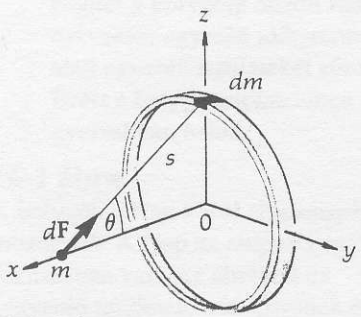
A pontszerű részecske és kiterjedt test között fellépő erőhatás meghatározására alkalmas differenciál- és integrálszámítás kidolgozása során Newton két fontos következtetésre jutott. Feltéve, hogy a kiterjedt (nagyméretű) testnek gömbszimmetriája[4] van, akkor

(a) külső pontokra a nagyméretű test úgy tekinthető, mintha teljes tömege a középpontjában lenne koncentrálva;

(b) a homogén gömbhéj alakú test belsejének bármely pontjában lévő részecskére a gömbhéjtól származó gravitációs erők eredője zérus.

Ezt a két eredményt most levezetjük. A levezetés integrálással jár, de ha lépésenként követjük, akkor az integrálási eljárásra is tanulságos példaként szolgál.

Tekintsük először az m' tömegű vékony gyűrű és a gyűrű tengelyének egyik pontjában elhelyezett m tömegű részecske között fellépő gravitációs vonzóerőt (16-4 ábra). A gyűrűnek az a dm eleme, ami a részecskétől s távolságra van, a részecskére $d\mathbf{F}$ erőt gyakorol. Az erő nagysága



16-4 ábra.
Az m' tömegű vékony gyűrű az yz síkban fekszik. A részecske a gyűrű tengelyén van.

[4] A gömbszimmetria azt jelenti, hogy a sűrűség ugyan változhat a sugárral, de nem függ az iránytól. Így a sűrűség csupán r függvénye: $\rho = f(r)$.

$$dF = G\frac{m\,dm}{s^2}. \qquad \textbf{(16-4)}$$

Most vegyük figyelembe a gyűrű minden elemét. Ha a gyűrű minden elemére összegezünk, akkor a szimmetria miatt az x tengelyre *merőleges* erőkomponensek összege zérus. Így csupán a tengellyel párhuzamos komponenseket kell tekintenünk. Mivel az összeadása során a $\cos\theta$ tényező állandó, így kiemelhető az integráljel elé. Ezért az x tengely menti F_x eredő erő az alábbi integrállal egyenlő:

$$F_x = \int \cos\theta\, dF = \int G\frac{m\cos\theta\, dm}{s^2}$$

$$= G\frac{m\cos\theta}{s^2}\underbrace{\int dm}_{=m'} = G\frac{m'\,m\,\cos\theta}{s^2} \qquad \textbf{(16-5)}$$

ahol az integrálás kiterjesztendő az egész gyűrűre. (Megjegyezzük, hogy a gyűrűt *nem* tekinthetjük úgy, mintha egész tömege a középpontjában lenne. Az ilyen egyszerűsítés csak gömbszimmetrikus testekre érvényes.)

Most tekintsük a részecske és egy vékonyfalú gömbhéj (16-5 ábra) közötti gravitációs vonzóerőt! A héj teljes tömege M, vastagsága a gömb R sugarához viszonyítva elhanyagolható. A gömbhéj dm elemi tömegét úgy választjuk meg, hogy annak minden pontja egyenlő távolságra legyen a részecskétől. A dm elemi tömeg a gömbhéjból kivágott köralakú csík (gömböv). A (16-5) egyenlettel analóg módon az m tömegű részecskére ható dF erő

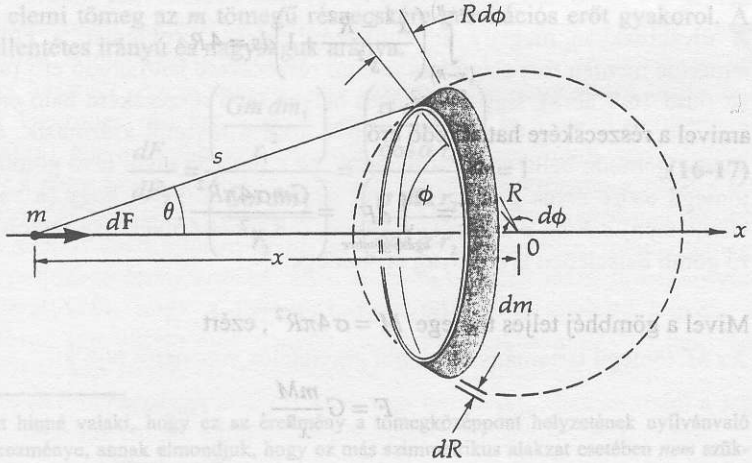
$$dF = G\frac{m\cos\theta\, dm}{s^2} \qquad \textbf{(16-6)}$$

Azonban a dm elemi tömeget más, az egész gömbre kiterjesztendő integrálásra alkalmasabb paraméterrel kell kifejeznünk.

Az elemi köralakú csík (gömböv) sugara $R\sin\Phi$, felszíne:

$$\text{A gömböv területe} = (2\pi R\sin\Phi)(R\,d\Phi) \qquad \textbf{(16-7)}$$

Így, ha a gömbhéj *egységnyi területre jutó tömegét* σ -val jelöljük, akkor az elemi köralakú csík dm tömege



16-5 ábra.
Az R sugarú dR vastagságú gömbhéjból kivágott köralakú dm tömegű szalag által az m tömegű részecskére kifejtett $d\mathbf{F}$ gravitációs vonzóerő.

$$dm = (\text{Terület})\left(\frac{\text{Tömeg}}{\text{Területegység}}\right) = (2\pi R\sin\Phi)(R\,d\Phi)(\sigma) = 2\pi\sigma R^2 \sin\Phi\, d\Phi \quad \textbf{(16-8)}$$

Az integrál egész gömbre való kiterjesztése céljából a koszinusz tétel segítségével az s és Φ változók között a következő összefüggés írható fel:

$$s^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\Phi \quad \textbf{(16-9)}$$

Differenciálva:

$$2s\,ds = 2Rx\sin\Phi\, d\Phi \quad \textbf{(16-10)}$$

$$R\sin\Phi\, d\Phi = \frac{s\,ds}{x}. \quad \textbf{(16-11)}$$

Azt is figyelembe vesszük, hogy a 16-5 ábra alapján

$$\cos\theta = \frac{x - R\cos\Phi}{s}$$

ami a koszinusz tétel szerint

$$\cos\theta = \frac{x^2 - R^2 + s^2}{2xs}. \quad \textbf{(16-12)}$$

alakban is felírható. A (16-8), a (16-11) és (16-12) egyenleteket a (16-6) egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$dF = \frac{Gm\pi\sigma R}{x^2}\left(\frac{x^2 - R^2}{s^2} + 1\right)ds. \quad \textbf{(16-13)}$$

Ez az erő az, amit az elemi köralakú csík (gömböv) fejt ki a részecskére. Amint az egyes elemi köralakú csíkoktól származó erők összegezését a teljes gömbre kiterjesztjük, látjuk, hogy az egyetlen változó s, ami az $(x - R)$ és $(x + R)$ határok között változik.

Az integrálás elvégzése egyszerű. Egyelőre az állandókat mellőzve magára az integrálra azt kapjuk, hogy:

$$\int_{(x-R)}^{(x+R)}\left(\frac{x^2 - R^2}{s^2} + 1\right)ds = 4R \quad \textbf{(16-14)}$$

amivel a részecskére ható eredő erő

$$F = \int_{\text{egész gömbre}} dF = \frac{Gm\sigma 4\pi R^2}{x^2}. \quad \textbf{(16-15)}$$

Mivel a gömbhéj teljes tömege $M = \sigma 4\pi R^2$, ezért

$$F = G\frac{mM}{x^2}. \quad \textbf{(16-16)}$$

Ez az eredmény megegyezik azzal, amit akkor kapnánk, ha a héj egész tömege a középpontban lenne koncentrálva.[5]

Egy tömör gömböt úgy képzelhetünk, mintha nagyszámú koncentrikus héjból lenne összerakva, a hagyma rétegeihez hasonlóan. Még akkor is, ha az egyes héjak sűrűsége különböző, mindegyikük tömegét a középpontjába koncentrálva képzelhetjük. Így, *feltéve, hogy a tömör gömbnek gömbszimmetriája van* (vagyis, hogy sűrűsége csupán r függvénye),

A göbbszimmetrikus tömegeloszlású, gömbalakú testen kívül lévő m tömegű részecskére	***a gömb által a részecskére ható gravitációs erő ugyananolyan, mintha a gömb tömege a középpontban volna koncentrálva.***

Mi van azzal a részecskével, amelyik a gömbhéj alakú test *belsejében* van? Az eredő erőt rögtön kiszámíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a (16-14) integrál határai most $(R - x)$ és $(R + x)$. Az integrálást elvégezve, a tetszőleges belső helyen lévő részecskére ható eredő erőre zérust kapunk:

Homogén gömbhéj belsejében lévő részecskére	***az a gravitációs erő, amit a homogén gömbhéj a belsejében tetszés szerinti helyen lévő részecskére gyakorol, zérussal egyenlő.***

Utóbbi eredményünket integrálás nélkül, egy (először Newton által elvégzett) érdekes okfejtés-láncolattal is megkaphatjuk. Tekintsük a gömbhéj belsejének tetszés szerinti P pontjában lévő m tömegű részecskét! Képzeljünk egy tetszőleges kiterjedésű, kis nyílásszögű kúpot, amelynek csúcsa a P pontban van! A kúp a gömbhéjból dA_1 területű felületelemet metsz ki (16-6a ábra). Ha vele azonos térszögű[6] kúpot vetítünk az ellenkező irányba, az dA_2 területet metsz ki. Az elemi $d\Omega$ térszöget (*steradiánban* mérve) a dA_n/r^2 hányadossal definiáljuk, ahol dA_n a térszög csúcsából húzott, az r távolságra *merőleges* terület. Számítsuk ki, gömb esetében milyen kapcsolata van a dA_1 és a dA_2 területeknek az r_1 -re és az r_2 -re merőleges dA_{1n} és dA_{2n} vetületeikkel! Minden olyan egyenes vonal mint r_1 és vele együtt r_2 két pontban metszi a gömböt, és a gömbfelület normálisával ugyanazt az α szöget zárja be. Tehát $d\Omega = dA_{1n}/r^2 = (dA_1 \cos\alpha)/r_1^2 = (dA_2 \cos\alpha)/r_2^2$. A σ (az egységnyi felületre jutó tömeg) jelöléssel a két tömegelem

$$dm_1 = \sigma\, dA_1 = \frac{\sigma\, d\Omega\, r_1^2}{\cos\alpha} \qquad \text{és} \qquad dm_2 = \sigma\, dA_2 = \frac{\sigma\, d\Omega\, r_2^2}{\cos\alpha}.$$

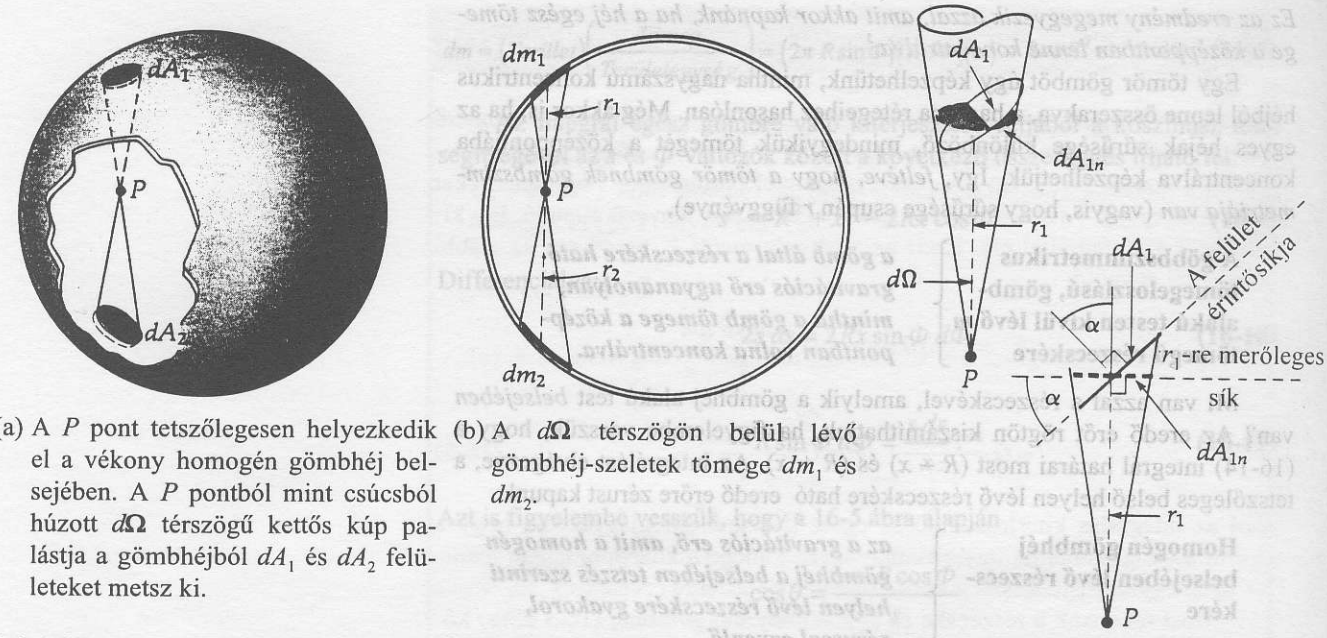
Ez a két elemi tömeg az m tömegű részecskére gravitációs erőt gyakorol. A két erő ellentétes irányú és nagyságuk aránya:

$$\frac{dF_1}{dF_2} = \frac{\left(\dfrac{Gm\,dm_1}{r_1^2}\right)}{\left(\dfrac{Gm\,dm_2}{r_2^2}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\sigma\, d\Omega\, r_1^2}{\cos\alpha\, r_1^2}\right)}{\left(\dfrac{\sigma\, d\Omega\, r_2^2}{\cos\alpha\, r_2^2}\right)} = 1 \qquad \textbf{(16-17)}$$

---

[5] Ha azt hinné valaki, hogy ez az eredmény a tömegközéppont helyzetének nyílvánvaló következménye, annak elmondjuk, hogy ez más szimmetrikus alakzat esetében *nem* szükségszerűen igaz. Például a homogén kockaalakú test nem úgy vonza a külső testeket, mintha tömege a középpontba volna koncentrálva. A fánk alakú test gravitációs mezője sem ekvivalens egy, a közepébe gondolt tömegpont gravitációs mezőjével. Csak azok a testek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, amelyeknek a tömegeloszlása *gömbszimmetrikus*.

[6] A térszög definíciójára lásd az E függeléket. Lásd továbbá a 25.2 fejezet hasonló részletét.



(a) A P pont tetszőlegesen helyezkedik el a vékony homogén gömbhéj belsejében. A P pontból mint csúcsból húzott $d\Omega$ térszögű kettős kúp palástja a gömbhéjból dA_1 és dA_2 felületeket metsz ki.

(b) A $d\Omega$ térszögön belül lévő gömbhéj-szeletek tömege dm_1 és dm_2.

(c) A dA_{1n} terület a dA_1 terület r_1 -re merőleges síkra vett vetülete. Nagysága $dA_{1n}=dA_1\cos\alpha$.

16-6 ábra.
A vékony homogén gömbhéj tetszőleges belső P pontjában elhelyezkedő m tömegű részecske.

Tehát a két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú, így kiegyenlítik egymást. Az m -re ható eredő erő zérus! Az elemi tömegek teljes gömbhéjra való páronkénti számbavételével arra a következtetésre jutunk, hogy a homogén gömbhéj belsejében bárhol lévő m tömegű részecskére a gömbhéjtól származó gravitációs erők eredője zérus.

A következő két konklúziót néha *héjelméletnek* nevezik:

A HÉJELMÉLET

Homogén gömbhéj olyan vonzóerőt gyakorol egy rajta kívül elhelyezkedő részecskére, mintha a héj egész tömege a középpontban lenne.

Homogén gömbhéj a belsejében lévő részecskére nem gyakorol gravitációs erőt, bárhol legyen is a részecske a gömb belsejében.

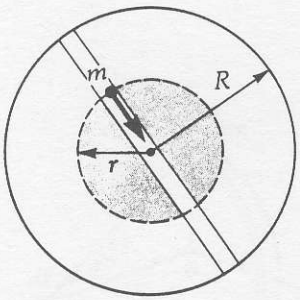
Alagutak

A továbbiakban megtárgyalhatunk egy érdekes problémát: a Földnek az átmérője mentén fúrt alagútban mozgó részecskére ható eredő erő problémáját (lásd 16-7 ábra). Egy tetszőleges helyen lévő részecskére ható eredő gravitációs erő a Föld tömegének csupán attól a részétől származik, ami az r sugarú gömbön belül van. (Mint láttuk, az r sugáron kívül lévő gömbhéj az m tömegű testre zérus gravitációs erőt gyakorol.) *Feltéve, hogy* (a valósággal ellentétben) *a Föld ρ sűrűsége állandó*, (az ábrán árnyékolva rajzolt) r sugarú gömb belsejében lévő anyag M' tömege:

$$M' = \rho V' = \rho\,(4/3)\,\pi r^3.$$

Az M' tömegű tartomány az alábbi gravitációs vonzóerőt fejti ki:

$$F = -G\frac{mM'}{r^2} = -G\frac{m}{r^2}\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right) = -\underbrace{\left(\frac{Gm\rho 4\pi}{3}\right)}_{k} r = -kr \qquad \textbf{(16-18)}$$

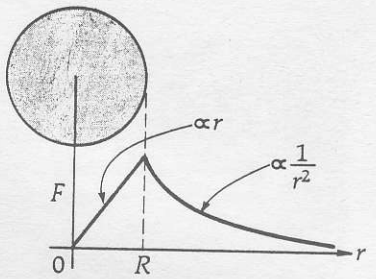


16-7 ábra.
A Föld átmérője mentén fúrt alagútban mozgó részecskére ható erő a Föld tömegének az ábrán árnyékolva jelölt részétől származik,.

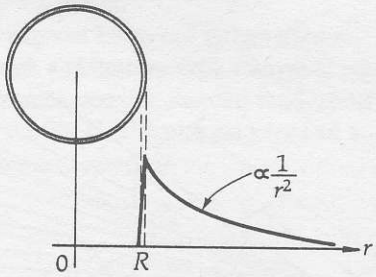
ahol a negatív előjel a Föld középpontja felé mutató irányt jelöli, és k állandó. Ez éppen az egyszerű harmonikus rezgő mozgás feltétele. Ha a Föld forgásától eltekinthetnénk, akkor egy ilyen lyukba ejtett részecske egyszerű harmonikus rezgő mozgással ide-oda oszcillálna. Hasonlóképpen bebizonyítható, hogy a

Föld felületének *bármely* két (nem feltétlenül átellenes) pontját összekötő egyenes, síma falú alagútba ejtett részecske is egyszerű harmonikus rezgő mozgást végezne ugyanazzal a rezgésidővel, mint az átmérő szerinti alagútban.

A 16-8 ábrán látható diagram a homogén tömör gömb illetve a homogén gömbhéj középpontjától különböző távolságra lévő részecskére ható gravitációs erő nagyságát vázolja.



(a) Homogén tömör gömb esetében.



(b) Homogén vékony gömbhéj esetében.

16-8 ábra.
Az m tömegű részecskére ható **F** gravitációs erő a középponttól mért r távolság függvényében.

16-4 PÉLDA

Határozzuk meg egy M tömegű homogén tömör gömb és a 16-9 ábrán látható helyzetű l hosszúságú, m tömegű vékony homogén rúd között ható gravitációs vonzóerőt!

MEGOLDÁS

Mivel a gömb homogén, úgy tekinthető, hogy az egész tömege a középpontjába van koncentrálva. Newton tömegvonzási törvénye szerint a dm elemi tömegre ható dF erő

$$dF = G\frac{M}{x^2}dm$$

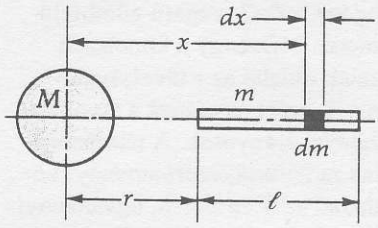
ahol $$dm = \frac{m}{l}dx.$$

dm -et behelyettesítve és a rúd hosszára integrálva:

$$F = \int_r^{r+l} G\frac{mM}{lx^2}dx = G\frac{mM}{l}\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_r^{r+l}$$

$$= G\frac{mM}{l}\left[\frac{l}{r(r+l)}\right] = G\frac{mM}{r(r+l)}$$

Mint várható volt, ha $r >> l$, akkor a rúd majdnem úgy viselkedik, mint egy, a gömb középpontjától r távolságra lévő tömegpont.



16-9 ábra.
A 16-3 példához.

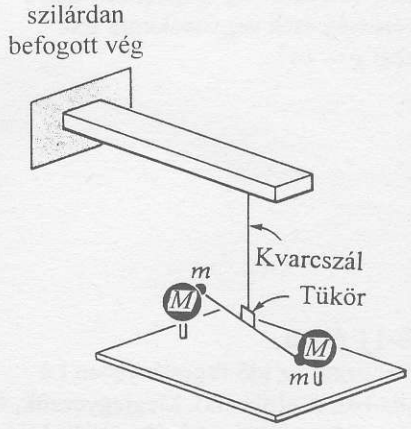
A Cavendish kísérlet

A G univerzális gravitációs állandó (ami nem tévesztendő össze a g gravitációs gyorsulással) numerikus értékét egészen 1798-ig nem ismerték pontosan, amikor is meghatározására az angol fizikus, Henry Cavendish, torziós mérleget használt. Az eszköz nagyon vékony fém- vagy kvarc-szálra függesztett vízszintes rúd két végére szerelt két kis m tömegű gömbből áll (16-10 ábra). Két nagyobb, egyenként M tömegű ólomgömböt úgy helyeznek el, hogy a nagy és kis gömb-párok közötti gravitációs erőhatás a rudat a felfüggesztő szál mint tengely körül elcsavarja. Mivel állandó sűrűségű gömböket használnak, azért minden gömb gravitációs hatása olyan, mintha tömege a középpontjában lenne koncentrálva. A rúdra erősített tükör távoli ernyőre fénysugarat vetít, hogy a fellépő kicsiny elfordulás mérhető legyen. A szóbanforgó gravitációs erők nagyon kicsinyek, tipikusan 10^{-10} N nagyságrendűek, (durván 10 000 -szer kisebbek az emberi hajszál súlyánál).

Kísérleti nehézségek miatt G az összes természeti állandó közül a legkevésbé pontosan ismert. Mint már említettük, jelenleg elfogadott értéke

$$G = 6{,}672\times10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}. \qquad \textbf{(16-19)}$$

Két test között ható gravitációs erő mindaddig elhanyagolható a testek mozgásának meghatározásánál, amíg legalább egyikük tömege nem nagyon nagy.



16-10 ábra.
A G gravitációs állandó meghatározására Cavendish által használt gravitációs torziós mérleg. A mérés eredményeként Cavendish volt az első, aki az $F_g = GM/r^2 = mg$ összefüggésből a Föld M tömegét meghatározta.

16.5 A gravitációs mező

Amikor Newton gravitáció elmélete először vált ismertté, talán abból adódott a legkomolyabb kritika, hogy a kortársaknak nehézséget okozott olyan erőt elfogadni, amely a távolba hat. Newton szemléletében a gravitációs erő valahogyan a teljesen üres téren átjutva befolyásolja távoli testek mozgását. Bár Newton nem tudta pontosan megmagyarázni, hogy hogyan keletkezik az erő, úgy érezte, hogy elmélete azért sikeres, mert a testek megfigyelt tulajdonságairól kielégítően ad számot.

Mintegy másfél évszázaddal később Michael Faraday az elektromágnességgel kapcsolatos elméletének kidolgozása során a távoli testek közötti kölcsönhatás (erőhatás) megértésére új gondolatmenetet javasolt. Bár elmélete az elektromosan töltött testek közötti erőhatást magyarázta, ugyanez a koncepció – a *mező* – alkalmazható volt a gravitációs vonzásra is. Ez a koncepció nagymértékben egyszerűsíti az összes távolbaható-erő matematikai tárgyalását.

A gravitáció esetében az elgondolás a következőképpen vethető fel. Tekintsük a B testre gravitációs hatást kifejtő A testet. Azt mondjuk, hogy az A test „gravitációs mező" létesítésével módosítja a körülötte lévő teret. A mező minden irányban kiterjed és a végtelenben zérusra csökken. Az A test mezejében helyet foglaló B test a mezőtől származó erőt a mezőnek *ezen a helyén* érzékeli. Íly módon a gravitációs mező *lokális* jelenléte gyakorol erőt, nem pedig valamely távoli test. (Persze a helyzet szimmetrikus: Az A test a B test által létesített mezőtől származó gravitációs erőt érzi.)

Az M tömegponttól r távolságban a **g gravitációs térerősséget** *az egységnyi tömegre ható erővel* definiáljuk. (16-2) egyenlet szerint az M tömegű test az m tömegűre r távolságból

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

erővel hat, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ az M tömegponttól m felé mutató egységvektor. Tehát a **g** gravitációs térerősség

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

F kifejezését behelyettesítve

(az M tömegponttól származó) Gravitációs térerősség

$$\mathbf{g} = -\left(\frac{GM}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(16-20)}$$

A negatív előjel arra utal, hogy **g** és $\hat{\mathbf{r}}$ ellentétes irányúak. Tehát **g** mindig a gravitációs mezőt létesítő test *felé* mutat. Kiterjedt test által létesített gravitációs mező térerőssége a kiterjedt test elemi részecskéi által létesített térerősségek vektori összege.

A következő példa olyan problémák megközelítésére mutat hasznos módszert, amelyekben két, egymáshoz hasonló jelenséget kell összehasonlítani. A módszer lényege abban áll, hogy a két jelenségre analitikus alakban felírt egyenlőségek hányadosából számos ismeretlen mennyiség kiesik, és a tárgyalás ezáltal egyszerűbbé válik.

16-5 PÉLDA

Távoli csillag körül keringő bolygóhoz közeledve az űrhajós megállapítja, hogy a bolygó sugara feleakkora, mint a Földé. Leszállva a felszínre, úgy találja, hogy a gravitációtól származó gyorsulás kétszerese a Föld felszínén lévőnek. Határozzuk meg a bolygó M_p tömegét a Föld M_e tömegével kifejezve!

MEGOLDÁS

Valahányszor össze akarunk hasonlítani két hasonló jelenséget, az a legegyszerűbb, ha az egyikre (analitikus alakban) felírt egyenletet elosztjuk a másik jelenségre vonatkozó azonos egyenlettel. Így módon a közös tényezők kiesnek, és a számítás egyszerűbbé válik.

A feladat megoldásában a p indexet a bolygóra, az e indexet a Földre vonatkozó mennyiségek indexelésére használjuk. Alkalmazzuk a bolygó ill. a Föld felületén szabadon eső m tömegű testre a $\Sigma F = ma$ törvényt!

A Földön	**A bolygón**
$\Sigma F = ma$	$\Sigma F = ma$
$G\frac{M_e m}{r_e^2} = mg_e$	$G\frac{M_p m}{r_p^2} = mg_p$

Az egyenleteket egymással osztva

$$\frac{\left(G\frac{M_p m}{r_p^2}\right)}{\left(G\frac{M_e m}{r_e^2}\right)} = \frac{mg_p}{mg_e}.$$

adódik. Egyszerűsítés után:

$$\left(\frac{M_p}{M_e}\right)\left(\frac{r_e^2}{r_p^2}\right) = \frac{g_p}{g_e}$$

A bolygó paramétereit a Földre vonatkozó szimbólumokkal kifejezve

$$g_p = 2g_e \qquad \text{és} \qquad r_p = (1/2)r_e$$

Ezeket a paramétereket egyenletünkbe helyettesítve

$$\left(\frac{M_p}{M_e}\right)\left(\frac{r_e^2}{[(1/2)r_e]^2}\right) = \frac{2g_e}{g_e}.$$

Egyszerűsítés után az alábbi egyenletre jutunk:

$$\frac{M_p}{M_e}(4) = 2.$$

Azaz

$$M_p = \frac{1}{2}M_e.$$

g változásáról

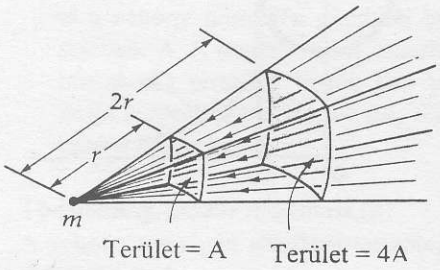
A g gravitációs gyorsulásra végzett nagyon pontos mérések néhány figyelemreméltó jelenséget fedeztek fel. Egy rendkívül stabil és érzékeny műszer – a szupravezető graviméter – kifejlesztésével g értékének a szilárd Föld deformációiból adódó változásai világosan kiderültek. Ha a Föld alakja úgy változik meg, hogy felszíne a középponthoz közelebbre vagy távolabbra kerül, akkor az eltolódás g változásával detektálható.

A szupravezető graviméter érzékenysége figyelemreméltó: $\Delta g/g \approx 10^{-11}$. Abszolút hibája 0,2%. A legnagyobb változást g értékében a Nap és a Hold relatív helyzetváltozásából adódó napi két „árapály" jelenség okozza a szilárd Föld anyagában. Figyeljük meg a 16-11 ábra diagramjában (észlelési hely: La Jolla, California), hogy a hetek múl-

távval a jelenségek maximumai a Nap és a Hold relatív helyzetének változása következtében eltolódnak. Ezek az „árapály" jelenségek a földfelszín középponttól mért távolságában napi 20 cm ingadozást okoznak. Más változásokat okoz La Jolla közelében a tenger árapálya azáltal, hogy a földfelszínt – a Föld árapályával némi fáziseltolódásban – többletnyomással terheli. A légköri nyomás helyi növekedése g csekély csökkenésével jár a megnagyobbodott légtömegektől származó felfelé irányuló tömegvonzás következtében. Mindezek az effektusok jó korrelációban vannak az észlelt adatok változásával.

Az ilyen diagramok *Fourier analízis* (F függelék) néven ismert matematikai eljárással analizálhatók. A Fourier analízis különválasztja az egész rezgést felépítő frekvenciakomponenseket, ezáltal lehetővé válik az összetevők különböző természeti okokkal való összekapcsolása. A készülék érzékenységét és megbízhatóságát folyamatosan tökéletesítik úgy, hogy végül majd lehetségessé válik a G univerzális gravitációs állandó esetleges változásának detektálása. Az ilyen változások, ha valóban vannak, nagy jelentőségűek lennének a fizika, az asztronómia és kozmológia területén. Ez a technika a földrengés-előrejelzésre is izgalmas lehetőséget ad. Bizonyíték van rá, hogy néhány földrengést megelőzően a földfelszín geológiai szempontból nézve rövid idő alatt drámai módon néhány centiméterrel megemelkedett.

Ez is azt példázza, hogy a pontos mérési technika fejlesztése más területek megjósolhatatlan „robbanásszerű" fejlődéséhez vezethet. Olyan jelenség ez, ami újra és újra megismétlődik a természettudományok történetében. (Lásd még a 28-11 ábrát.)

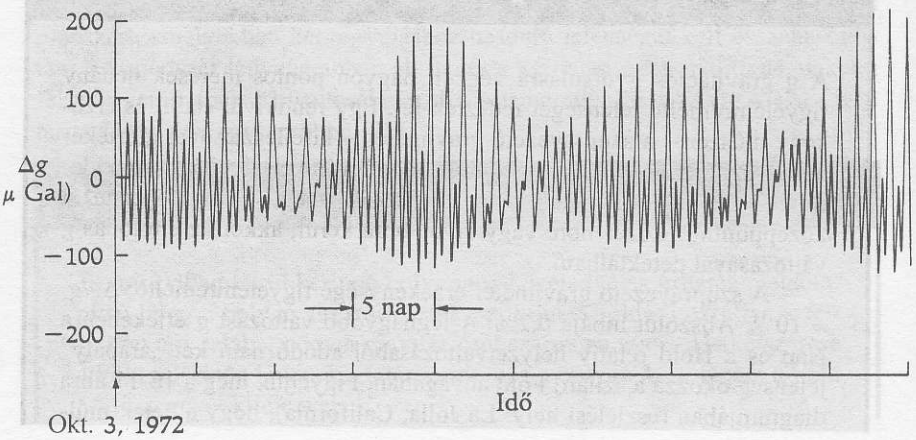


16-12 ábra.
Az m tömegpont körüli gravitációs mező reciprok-négyzetes törvénye. A vázlaton a tömegpontból induló térszög két, r és $2r$ sugarú gömbfelületet metsz. Minthogy a kimetszett négyzetek oldalai az r távolsággal arányosak, azért *területeik* a távolság négyzetével arányosak. A térerősségvonalak radiálisak, ezért amennyi vonal áthalad az A területen, ugyanannyi megy át a $4A$ területen is. Mivel a g térerősség az egységnyi felületen átmenő erővonalak számával arányos, ezért, ha a távolság megduplázódik, a térerősség csak negyedakkora lesz. Tehát $g \approx 1/r^2$.

Gravitációs erővonalak

A gravitációs mező elképzelésére alkalmas egyik módszer a mező **erővonalak** sorával való szemléltetése úgy, hogy a vonalak minden pontjához húzott érintő a gravitációs erő irányába mutasson. Gömbalakú testek esetében ezeknek a vonalak radiálisan befelé irányulnak. A gravitációs mező erőssége mindenütt arányos *a vonalakra merőleges egységnyi felületen áthaladó erővonalak számával*. A 16-12 ábra mutatja, hogy az ilyen radiális vonalsor valóban a reciprok-négyzetes-erőtörvényhez vezet. Ha az egységnyi felületet kétszer akkora távolságra visszük, a felületen áthaladó erővonalak száma negyedannyi lesz.

Léteznek-e valóban erővonalak? A vasreszelékkel szemléletessé tett mágneses erővonalak képe (16-13 ábra) arra csábít, hogy elhiggyük, valóban léteznek ilyen mágneses erővonalak. Ezek csupán a fogalom megértését se-

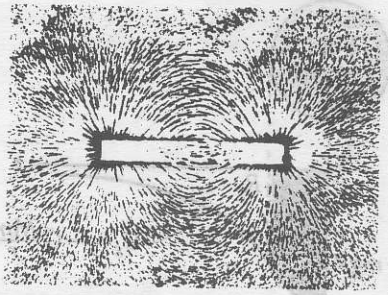


16-11 ábra.
g változása az idő függvényében La Jolla-ban (California). Megjegyezzük, hogy 1 Gal $\equiv 10^{-2}$ m/s^2. (Az eredmény R. J. Warburton és J. M. Goodkind, University of California at San Diego, La Jolla, California, valamint C. Beaumont, Department of Energy, Mines, and Resources, Ottawa, Canada, kutatók munkája.)

gítik. A erővonalak száma adott esetben önkényes, és minden, számunkra kényelmes arányosság egyaránt elfogadható.

Kézikönyvekben megtalálható a Föld különböző helyén mért **g** értékek táblázata. A táblázatokban szereplő **g** a Föld forgásából származó centrifugális hatást tartalmazza. Ez indokolt, hiszen legtöbbször a Földet tekintjük vonatkoztatási rendszernek, és g értékét helyileg határozzuk meg ingakísérlettel, vagy hasonló módszerrel.

Meglepő az a pontosság, amellyel *g* mérhető: értéke *graviméterrel* $1/10^{11}$ pontossággal határozható meg. (A Föld felszínén ez kevesebb mint egytized milliméter magasságváltozásnak felel meg!) Repülőgépen egy hasonló készülék érzékelni tudja a föld alatti olajmezőket vagy ásványkincseket, mert ezek a szabálytalanságok *g* értékében kis változásokat okoznak. Mesterséges holdra telepítve, az eszköz hegyeket és krátereket térképezhet a Holdon vagy a bolygókon, és felszín alatti nagysűrűségű tömegeket érzékelhet.



16-13 ábra.
A mágnest környező térben a vasreszelék a mágneses erők irányával párhuzamos vonalak mentén rendeződik el. Az így előálló alakzat képet ad a *mágneses mezőről.*

16.6 A gravitációs potenciális energia

Említettük a 7. fejezetben, hogy a gravitációs erők konzervatív erők. Ezért tehát definiálhatjuk az $U(r)$ potenciálfüggvényt, amit az F konzervatív erővel az

$$U_b - U_a = -\int_a^b F \cdot dr \qquad \textbf{(16-21)}$$

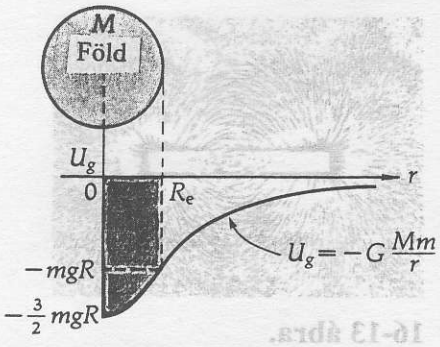
összefüggés kapcsol össze. Az előzőekben csak azokat az eseteket vettük figyelembe, amikor a test a Föld felszínéhez közel maradt, ahol *g* értéke lényegében állandó volt. Most azonban a Földtől messze lévő pályán haladó műholdak és rakéták mozgására is ki akarjuk terjeszteni tárgyalásunkat. Tekintsünk egy *m* tömegű részecskét, amely a Földön kívül, a Föld középpontjától *r* távolságban van. Az a *gravitációs potenciális energia* függvény, amit levezetünk, a részecske-plusz-Föld rendszerrel, mint egésszel van kapcsolatban. Csak egyetlen változója van: a részecske és a Föld középponja közötti *r* távolság.

$$U_b - U_a = -\int_a^b \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)dr = GMm\int_a^b \frac{dr}{r^2} \qquad \textbf{(16-22)}$$

(F kifejezése tartalmazza a negatív előjelet, arra utalva, hogy vonzásról, vagyis $-\mathbf{r}$ irányú erőről van szó.) Ha az *m* tömegpont a Föld felszínétől távol is mozoghat, célszerű a *zérus referencia potenciált* a részecske végtelen távoli helyzetére, tehát az $\mathbf{r} = \infty$ helyre definiálni. Az integrálás útja a zérus referenciahelytől bármely adott pontig teljesen önkényes, mert konzervatív erők esetében az integrál független az úttól. Az integrálás egyszerűbbé tételére sugármenti utat választunk. Így, annak során, hogy a részecske a végtelenből $[U_g(\infty) \equiv 0]$ a Föld középpontjától *r* távolságban, de a Földön kívül lévő helyre mozdul, az U_g **gravitációs potenciális energia** kifejezését az

$$U_g - 0 = GMm\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = -G\frac{Mm}{r}\Big|_\infty^r$$

kifejezéssel adhatjuk meg.



16-14 ábra.
Az $U_g(r)$ gravitációs potenciális energia r függvényében egy olyan rendszer, amely a Földből és egy pontszerű m tömegből áll. Az $U_g \equiv 0$ referenciahelyzet arra az esetre vonatkozik, amikor az m tömegpont a végtelenben van.

Gravitációs potenciális energia

$$U_g = -G\frac{Mm}{r}$$ (a Földön kívüli pontban) $U_g \equiv 0$, ha $r = \infty$. **(16-23)**

A 16-14 ábra a potenciális energiát vázolja a Föld belső és külső pontjaiban. (Lásd a 16C-23 feladatot.)

A (16-23) egyenlettel megadott U_g kapcsolatban van azzal az $U_g = mgy$ egyenlettel, amelyet a Föld közelében – tehát feltételezetten homogén gravitációs térben – végzett mozgásokra már alkalmaztunk. A kapcsolat bizonyítására megjegyezzük, hogy a földfelszín közelében U_g (lényegében) lineárisan változik az y magassággal, mert y nagyon kicsi a Föld R sugarához képest. Tekintsük a potenciális energia ΔU_g változását, miközben az m tömegű test a Föld felszínéről y magasságba emelkedik:

$$\Delta U_g = U_g(R+y) - U_g(R)$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{R+y} - \frac{1}{R}\right)$$

$$= GMm\left(\frac{y}{(R+y)(R)}\right).$$

Mivel $y << R$, tehát

$$\Delta U_g \cong \frac{GMm}{R^2}y.$$

A földfelszín közelében $g = GM/R^2$, ezért

$$\Delta U_g \cong mgy.$$

Az a tény, hogy a Föld közelében végbemenő eseményekre az $U_g \equiv 0$ potenciális energiaszintet a Föld felszínéhez rendeljük, olyan jelenségekre pedig, ahol r változásai nagyok, az $U_g \equiv 0$ választást a végtelen távoli ponthoz kötjük, ΔU_g számításában semmi különbséget nem okoz (csupán annyit, hogy a magasabbrendű tagokat elhanyagolva kis elmozdulásokra állandó g értékkel számolunk).

16.7 A szökési sebesség és a kötési energia

Energetikai meggondolások alapján könnyen kiszámíthatjuk azt a legkisebb kezdeti sebességet, amivel a Föld felszínéről indított test úgy szökhet el a Földről, hogy soha nem vissza. (Számításainkban elhanyagoljuk a földi atmoszféra súrlódási ellenállását és egyéb, a Föld forgása és más égitestek jelenléte miatt bekövetkező zavaró effektusokat.)

A feladat példa az energia megmaradására. Ha egy test a földfelszín közelében v sebességgel mozog, akkor K kinetikus energiája $\frac{1}{2}mv^2$. Ily módon összes energiája $E = U_g + K$. Ahhoz, hogy a test éppen csak elszökjön a Földről anélkül, hogy visszaesne, az szükséges, hogy a végtelent zérus kinetikus energiával érje el. Ha a minimális szökési sebesség a Föld felszínén v_e, akkor

$$E_0 = E$$

$$U_0 + K_0 = U + K$$

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0 + 0.$$

Innen v_e értéke

A legkisebb szökési sebesség a földről

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \textbf{(16-24)}$$

ami a Föld felszínén 11,2 km/s -mal egyenlő. A részecske kilövésének *iránya* közömbös (a légkör súrlódásának, a Föld forgásának[7], a Hold gravitációs hatásának, stb. elhanyagolása mellett).

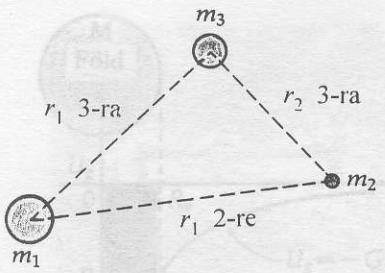
Érdekes, hogy a szökési sebesség a szökő részecske tömegétől független. De ha a földi légkör esetét nézünk, látjuk, hogy a könnyebb komponensek (hidrogén és hélium) könnyebben kiszöknek, mint a nehezebb komponensek (oxigén és nitrogén). Ennek az az oka, hogy állandó hőmérsékleten a gázok minden atomjának vagy molekulájának átlagosan ugyanakkora $K = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energiája van. Így a könnyebb atomok és molekulák átlagsebessége nagyobb, mint a nehezebbeké. Persze nem minden részecske mozog pontosan ugyanazzal a sebességgel; némelyiknek az átlagosnál nagyobb, némelyiknek az átlagosnál kisebb sebessége van. A mi légkörünkben a hidrogén és a hélium sebességtartományának felső részében már elegendően nagy a sebesség ahhoz, hogy ezek a gázok a Föld gravitációs mezőjéből kiszökhessenek. Valójában úgy hisszük, hogy a Föld és a Naprendszer főként hidrogént és héliumot tartalmazó intersztelláris (csillagközi) gázból és porból állt össze és csupán egy – két százalékban más elemekből. Ma azonban a földi atmoszféra csupán milliomod résznyi hidrogént és héliumot tartalmaz. A Holdon olyan kicsi a szökési sebesség, hogy a Hold semmiféle észlelhető légkört nem tud a felszínén tartani. Ezzel szemben a Föld tömegénél 318-szor nagyobb tömegű Jupiter atmoszférájának kb. 84%-a hidrogénből, 15%-a héliumból áll, és csak 1%-ban tartalmaz nehezebb molekulákat. Ez az összetétel feltételezhetően hasonló a Naprendszert kialakító csillagközi gáz összetételéhez.

Az atmoszférából csak nagy magasságban szöknek meg molekulák, ahol a levegő sűrűsége annyira kicsi, hogy a v_e szökési sebességnél nagyobb sebességü molekulának esélye van arra, hogy az ütközést más molekulákkal elkerülve megszökhessen. A Föld esetében ez a magasság durván 600 km fölött van, az *exoszférának* nevezett tartományban, ahol a hőmérséklet 1500° C nagyságrendű. (Ez a magas hőmérséklet nem jelenti azt, hogy ott egy űrhajós vagy egy mesterséges hold megégne. A levegő annyira ritka, hogy a levegő molekulái nem tudják gyorsabban átadni energiájukat annál, mint ahogyan a test az energiát kisugározza.)

Pályagörbék energetikai meggondolás alapján történő kiszámításának egyik szokásos módja azon alapul, hogy a potenciális energia *skalár mennyiség*, és skalár mennyiségekkel a matematika könnyebben boldogul, mint vektorokkal. Például a 16-15 ábrán vázolt három test kölcsönös gravitációs energiáját az egyes tömegpárok gravitációs potenciális energiájának összegezésével számíthatjuk ki:

---

[7] A szökési sebességet a nem forgó Földre számítottuk ki. Tehát a sebességek az „álló" csillagokhoz képest *nyugalomban lévő* vonatkoztatási rendszerre érvényesek. (Klasszikusan, a Föld légkörén túl lévő mesterséges hold „nem tudja", hogy a Föld forog alatta.) Ha a szökési sebességet a földfelszíni kilövő állomásra vonatkoztatva akarnánk kiszámítani, korrekcióba kellene venni a földfelszín forgási sebességét és a földfelszín sebességéhez viszonyított kilövési irányt. Kihasználva azt az előnyt, amit a Föld forgása nyújt, a mesterséges holdakat gyakran keleti irányban indítják.



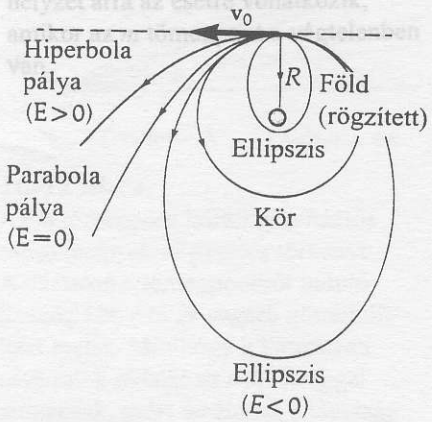
16-15 ábra.
A három tömegből álló rendszer.

$$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} \qquad \text{(16-25)}$$

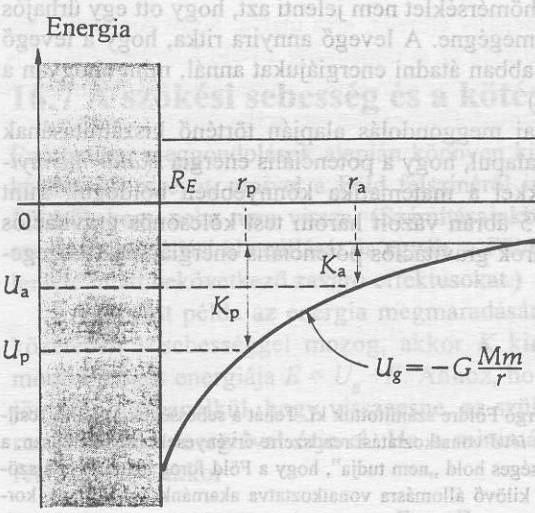
A (16-25) egyenlet a rendszer gravitációs potenciális energiáját adja meg, ha a potenciális energia zéruspontját úgy választjuk meg, hogy a rendszer minden tagja egymástól végtelen távol van. Ha a testeket egymástól végtelen messzire akarjuk távolítani, akkor ezt az energiamennyiséget arra a munkára kell fordítanunk, amit a testeket között kölcsönösen fellépő gravitációs vonzóerő ellenében a széjjelhúzáshoz végezni kell. Ez a kötési energiának nevezett (negatív) potenciális energia tartja össze a rendszert.

16.8 A mesterséges holdak mozgásának energiaviszonyai

Egy érdekes jelenkori probléma az M tömegű Föld körül keringő m tömegű mesterséges hold mozgása. Mivel a Föld tömege sokkal nagyobb a műholdénál, azért úgy tekinthetjük, hogy a Föld egy inerciarendszerben nyugszik, és az m tömegű műhold sokféle lehetséges pályán mozoghat a Föld körül. A 16-16 ábra $E=U_g+K$ összes energia különböző értékeihez tartozó néhány pályagörbét mutat be, ha a v_0 kezdősebesség merőleges a Föld középpontját és a műholdat összekötő egyenesre. Ellipszis pálya esetében az ellipszis egyik fókuszában a Föld van. Érdemes emlékezni arra, hogy a gravitációs erő nemcsak, hogy konzervatív, de gömbalakú testekre *centrális*, így nem tud forgatónyomatékot gyakorolni a mesterséges holdra. Következésképpen *az összenergia és az impulzusmomentum megmarad*. Ezt a két elvet ellipszispályákra alkalmazva, a pályák különböző jellemzői kiszámíthatók: pl. a bármely ponthoz tartozó sebesség, a perigeum távolság (a Földhöz legközelebbi távolság), az apogeum távolság (a pálya legnagyobb távolsága a Földtől), (16-17 ábra). Ha az összes energia $E < 0$, a mesterséges hold a Föld körüli kör- vagy ellipszispályához van kötve. Ha $E > 0$, a pálya hiperbola, és a mesterséges hold elszökik a Földtől. A parabola pálya ($E = 0$) az a nem zárt pálya, amely a zárt (kör és ellipszis) pályagörbék és a nyílt (hiperbola) pályagörbék közötti választóvonalat jelenti.



16-16 ábra.
A Föld középpontjától R távolságban az ábrázolt módon a különböző v_0 kezdősebességgel indított mesterséges holdak lehetséges pályái. A pálya típusa az $E = U_g + K$ összes energiától függ.



16-17 ábra.
Az ellipszispályán keringő mesterséges hold számára az U_g gravitációs potenciális energia az apogeumhoz tartozó U_a és a perigeumhoz tartozó U_p szélső értékek között változik. (Mindkettő numerikus értéke negatív.) A teljes E (< 0) energia állandó marad: $E = U_g + K$. A (mindig pozitív) kinetikus energia a megfelelő K_a és K_p értékek között változik. Ha $E < 0$, akkor a mesterséges hold pályája *zárt*, nem tud kiszökni a Föld gravitációs mezejéből. $E > 0$ esetén a mesterséges hold pályája *nyílt*, és ki fog szökni a földi gravitációs mezőből.

16-6 PÉLDA

Egy mesterséges hold ellipszis pályán mozog a Föld körül. A pálya Földtől mért legkisebb és legnagyobb távolsága 400 km és 3000 km. Határozzuk meg a mesterséges hold sebességét apogeum és perigeum helyzetben.

MEGOLDÁS

Mivel a műhold tömege a Föld tömegéhez képest elhanyagolható, a Föld tömegközéppontját nyugalomban lévőnek tekintjük. A gravitáció *centrális* erő (azaz a Föld tömegközéppontjának irányába hat), ezért a műhold Föld tömegközéppontjára vonatkozó impulzusmomentuma időben állandó. Ennélfogva az impulzusmomentum megmaradása érvényes.

Az apogeum és a perigeum helyzetre az a és p indexeket használva, ($6{,}36 \times 10^6$ m földsugárral számolva) $r_a = 9{,}36 \times 10^6$ m és $r_p = 6{,}76 \times 10^6$ m. Az impulzusmomentum megmaradása értelmében

$$L_p = L_a$$

$$mv_p r_p = mv_a r_a$$

$$v_p r_p = v_a r_a \qquad \textbf{(16-26)}$$

Az energiamegmaradási törvényt alkalmazva

$$E_p = E_a$$

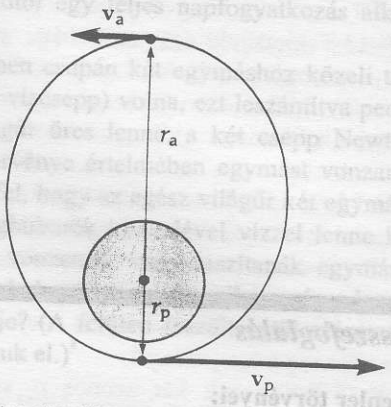
$$U_p + K_p = U_a + K_a$$

$$-G\frac{Mm}{r_p} + \frac{1}{2}mv_p^2 = -G\frac{Mm}{r_a} + \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$2GM\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) = v_a^2 - v_p^2 \qquad \textbf{(16-27)}$$

Mivel G, M, r_p és r_a értékeit ismerjük, két egyenletet (16-26 és 16-27) kell használnunk a két ismeretlen (v_p és v_a) meghatározására. Az egyenleteket megoldva

$$v_p = 8250\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{és} \qquad v_a = 5960\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



16-18 ábra.
Mesterséges hold földkörüli ellipszis pályán.

16-7 PÉLDA

Tekintsünk egy mesterséges holdat (tömege m), amely a Föld (tömege M) körül, a Föld középpontjától r távolságban körpályán kering. Mutassuk ki, hogy ennél a pályasugárnál kinetikus energiájának nagysága feleakkora, mint gravitációs potenciális energiája.

MEGOLDÁS

A körmozgáshoz szükséges centripetális erőt a mesterséges holdra ható gravitációs erő szolgáltatja.

$$\sum F_r = ma_r$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\left(\frac{v^2}{r}\right)$$

Ebből az összefüggésből a kinetikus energia kifejezhető:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{GMm}{r}\right]$$

ami feleakkora, mint a gravitációs potenciális energia az r helyen. *Ez az összefüggés érvényes minden olyan körpályán történő mozgásra, ami az inverz-négyzetes-erőtörvény hatására jön létre.*

Összefoglalás

Kepler törvényei:

(1) Mindegyik bolygó olyan ellipszispályán kering, amelynek egyik fókuszpontjában a Nap van.
(2) A Naptól a bolygóig húzott rádiuszvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket súrol.
(3) A bolygó T keringési idejének négyzete arányos a Naptól mért R középtávolságának harmadik hatványával.

Newton tömegvonzási törvénye két m_1 és m_2 tömegű test között:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

ahol r a testek közötti távolság és G az univerzális gravitációs állandó, értéke $6{,}672 \times 10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

Azok a gömbalakú testek, amelyeknek sűrűsége csak r függvénye (azaz a gömbszimmetriájú testek), olyan erőt gyakorolnak egy külső pontban lévő részecskére, mintha egész tömegük a középpontjukban lenne koncentrálva. Egy homogén gömbhéj nem fejt ki erőt a belsejében lévő részecskére. Ezért egy gömbszimmetrikus test tetszőleges belső r pontjában lévő tömegpontra a gömbnek csak attól a részétől származik gravitációs vonzóerő, amely az r sugáron belül van.

A **g** *gravitációs térerősség* hasznos fogalom a gravitációval kapcsolatos problémákhoz. Az M tömegű test által létesített külső gravitációs mező **g** térerőssége definíció szerint

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\left(\frac{GM}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}.$$

A U_g *gravitációs potenciális energiát* az

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 F \cdot dr.$$

összefüggéssel határozzuk meg.
Ha az $r = \infty$ helyen $U_g \equiv 0$, akkor

$$U_g = -G\frac{Mm}{r}.$$

A v_e *legkisebb szökési sebesség* az M tömegű, R sugarú bolygó felszínéről minden (bármekkora m tömegű) testre azonos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Mesterséges holdak mozgására $E = U_g + K$ összefüggés érvényes és mind az energia, mind az impulzusmomentum megmarad. A zárt szatellitpályák $E < 0$ esetén körök vagy ellipszisek lehetnek, amelyeknek egyik fókuszában van a Föld. $E > 0$ esetén a pályagörbe hiperbola, és így a test csak egyszer halad el a Föld mellett. Az $E = 0$-értékhez parabola pálya tartozik, amelyre az jellemző, hogy a test sebessége a végtelenben zérushoz tart.

Kérdések

1. Lehetséges-e egy műholdat olyan földkörüli pályára állítani, amelynek síkja nem megy át a Föld középpontján?
2. Meg tudjuk-e határozni egy bolygó tömegét, ha csak pályasugarát és a Föld tömegét ismerjük? Ha nem, akkor minimálisan milyen adatokra van még szükségünk?
3. A légellenállást (súrlódást) és a Föld forgását elhanyagolva földkörüli pályára állítható-e egy műbolygó úgy, hogy egy óriási nagy, földhöz rögzített ágyúból kilövik?
4. A csillagközi tér átlagos sűrűsége durván egy hidrogénatom köbcentiméterenként. Napunk tömege kb. 2×10^{30} kg. Mekkora volt annak a gáznak a kezdeti térfogata, amelyikből Napunk keletkezhetett, ha sűrűsége az átlagosnál ötször nagyobb volt?
5. Tegyük fel, hogy a jövő hét folyamán G értéke fokozatosan a jelenlegi érték felére csökken. Írjunk le néhány változást, ami azon a héten történne.
6. Ha egy testre ható gravitációs erő a test tömegével arányos, miért nem esnek a nagyobb tömegű testek nagyobb gyorsulással, mint a kisebbek?
7. A Holdra visznek egy ingaórát és egy karórát. Melyik fog gyorsabban járni a Holdon?
8. A Hold tömege már azelőtt ismert volt, hogy bárki odautazhatott volna és megmérhette volna felszínén a szabadon eső test gyorsulását. Hogyan határozták meg a Hold tömegét?

9. Tegyük fel, hogy rugós mérleggel megmérjük egy test súlyát az egyenlítőn. Tegyünk fel két esetet: megmérjük a súlyát délben, amikor a Nap éppen a fejünk felett van, és megmérjük éjfélkor, amikor a Nap pontosan a Föld „alatt" van. Ha eltekintünk a Föld forgásától, de tekintetbe vesszük napkörüli pályamozgását, különbözik-e a két mérés eredménye? Változik-e a válasz, ha tekintetbe vesszük a Föld forgását?
10. Elemezzük, mi történik egy kisméretű űrállomással, ha a benne lévő űrhajós az egyik falról a másikra ugrik? Mi történne akkor, ha az űrhajós elkezdene körbefutni a belső falon?
11. A Nap által a Holdra gyakorolt gravitációs erő kb. kétszer akkora, mint az a gravitációs erő, amit a Föld gyakorol a Holdra. Miért nem húzza el a Nap a Holdat a Földtől egy teljes napfogyatkozás alkalmával?
12. Ha a világűrben csupán két egymáshoz közeli test (mondjuk két vízcsepp) volna, ezt leszámítva pedig az egész világűr üres lenne, a két csepp Newton gravitációs törvénye értelmében egymást vonzaná. Most tegyük fel, hogy az egész világűr két egymáshoz közeli légbuborék kivételével vízzel lenne kitöltve. Vajon vonzanák, vagy taszítanák egymást, vagy esetleg a buborékok mindegyikére zérus lenne az erők eredője? (A felületi feszültségtől származó erőt hanyagoljuk el.)[8]

Feladatok

16.2 Kepler törvényei

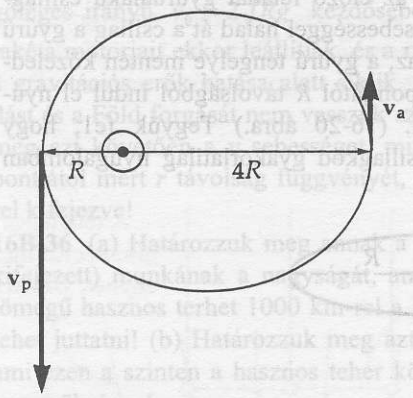
16.3 Newton tömegvonzási törvénye

16A-1 Mi gyakorol nagyobb gravitációs vonzást a földi testekre: (a) a Hold, vagy (b) a Nap? Számítsuk ki ezeket az erőket 1 kg tömegű testre.

16A-2 Ha egy szabadon eső meteor a Föld felszíne felett 3 földsugárnyi távolságra van, mekkora a gyorsulása a Föld gravitációs erejének hatására?

16A-3 Határozzuk meg a gravitációs gyorsulást a földfelszíni g gyorsulás függvényében a földfelszín felett a Föld átmérőjével megegyező magasságban!

16A-4 Egy műhold kering a Föld körüli ellipszis pályán (lásd a 16–19 ábrát) úgy, hogy apogeum, illetve perigeum helyzetben a távolsága a Föld középpontjától R, illetve $4R$. Határozzuk meg a két helyzethez tartozó sebesség v_a/v_p arányát!



16-19 ábra.
A 16A-4 feladathoz.

16A-5 Egy űrhajós súlya a Hold felszínén 140 N. Mekkora gravitációs erővel hat rá a Hold, ha az űrhajós holdsugárnyi magasságban körpályán kering?

16A-6 Kezdő fizikusok laboratóriumaiban a G gravitációs állandó mérésére használt Cavendish típusú mérlegnél olyan 1,5 kg és 15 g tömegű ólomgömböket alkalmaznak, amelyeknek középpontjai 4,5 cm távol vannak egymástól. Számítsuk ki a gömbök között ható erőt oly módon, hogy a gömböket a középpontjukba helyezett tömegpontokként kezeljük.

16A-7 A Föld–Nap távolság $1{,}65 \times 10^8$ km (perihelion) és $1{,}70 \times 10^8$ km (aphelion) között változik. A föld legkisebb pályamenti sebessége 32,8 km/s. Határozzuk meg a legnagyobb pályamenti sebességet.

16B-8 A Hold felszínén a gravitációs erő kb. egyhatoda a Föld felszínén lévőnek. Ha a Hold sugara kb. egynegyede a Föld sugarának, hányszorosa a Hold átlagos sűrűsége a Föld átlagos sűrűségének?

16A-9 Asztrológusok állítják, hogy a bolygók helyzetének változásai hatással vannak életünkre. Becsüljük meg egy 2000 kg-os gépkocsitól származó gravitációs erő és a Mars bolygó által ránk kifejtett gravitációs erő arányát, ha a gépkocsi tömegközéppontjának a tőlünk való távolsága 2 m, a Mars bolygó távolsága (földközelben) kb. 56 millió km és a Mars tömege $6{,}5 \times 10^{23}$ kg. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy testünk és a gépkocsi pontszerű test.

16B-10 A hidrogén atomban az elektron és a proton távolsága 5×10^{-11} m. Ha a közöttük ható erő csak gravitációs volna, mennyi lenne az elektron proton körüli keringésének periódusideje? Tömegeik: $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg és $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

16B-11 Kepler harmadik törvénye kimondja, hogy a bolygók keringési idejének négyzete arányos a Naptól mért középtávolság harmadik hatványával. Határozzuk meg az arányossági tényezőt ezen paraméterek segítségével körpálya esetén és számítsuk ki az arányossági tényező numerikus értékét!

16B-12 A Föld körül ellipszis pályán keringő mesterséges hold perigeum távolsága a földfelszín fölött két földsugár. Apogeum helyzetben negyedakkora a sebessége, mint perigeum helyzetben. Mekkora a mesterséges

[8] A feladatot L. Epsteins és P. Hewitt „Thinking Physics" (Gondolkodtató Fizika) c. könyvéből vettük át. (Insight Press, San Francisko, 1979.) 1. kötet 125 old.

hold földfelszín feletti maximális távolsága? A választ a Föld R sugarának függvényében adjuk meg!

16B-13 Tekintsünk egy műholdat, amely a Földhöz nagyon közeli pályán kering. Kizárólag a $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ és az $R = 6{,}37 \times 10^6$ m földsugárral számolva határozzuk meg (a) a T keringési időt percekben és (b) a pályamenti sebességet!

16B-14 Az *Explorer VII* műholdat az ionoszféra-kutatási feladattal 1960 november 3-án állították pályára. Pálya-adatai a következők: perigeum távolsága 459 km, apogeum távolsága 2289 km (mindkettő a Föld felszínétől mérve) és keringési ideje 112,7 perc. Határozzuk meg a v_a/v_p arányt!

16B-15 Tekintsünk két azonos ρ sűrűségű homogén tömör gömböt! Az egyik sugara R, a másiké $2R$. A két test a világűrben van, ahol más testektől származó gravitációs hatás elhanyagolható. Ha a két gömb nyugalomban van, és felületeik érintkeznek, mekkora a gravitációs vonzásból származó nyomó erő a gömbök között? A választ G, R és ρ függvényében adjuk meg!

16B-16 A „szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik. (a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás! (b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve! (c) Határozzuk meg azt a legtávolabbi északi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

16B-17 Egy „szinkron" műholdat, amely a bolygó egyenlítőjének mindig ugyanazon pontja fölött marad, Jupiter körüli pályára állítanak azzal a feladattal, hogy a híres vörös foltot tanulmányozza. A Jupiter 9,9 óránként fordul egyet. Az L függelék adataival számolva határozzuk meg azt a távolságot a Jupiter egyenlítője fölött, ahol az ilyen pálya lehetséges!

16B-18 A Cygnus X-1 -ről, egy égi röntgensugár forrásról röntgensugár impulzusokat észleltek egy nagy magasságban végzett rakétarepülés során. A jelek úgy értelmezhetők, mintha egy fekete lyuk körül 5 ms periódusidővel keringő ionizált anyagcsomótól származnának. Ha ez az anyagcsomó a Nap tömegénél 20-szor nagyobb tömegű fekete lyuk körül körpályán keringene, mekkora lenne a pályasugara?

16B-19 A Jupiter egyik holdjának a pályasugara kb. 10^6 km és keringési ideje mintegy 7 földi nap. Becsüljük meg ezen adatok birtokában a Jupiter tömegét!

16.5 A gravitációs mező

16B-20 Tekintsünk egy egyenletes sűrűségű vékony rudat! Készítsük el a rúd gravitációs erővonalainak vázlatát a rúd közelében, a végeket is beleértve. (Útmutatás: Tekintsük a kis próbatestre ható gravitációs erőt a különböző helyeken.)

16B-21 Három, egyenlő m tömegű tömegpont egy l oldalhosszúságú négyzet három csúcsában van elhelyezve. Határozzuk meg a három tömegponttól származó **g** térerősséget a negyedik csúcsban!

16B-22 Számítsuk ki a (2,0) pontban lévő m tömegű és a (0,2 l) pontban lévő $2\ m$ tömegű tömegpontok által meghatározott **g** gravitációs térerősséget az origóban.

16.6 A gravitációs potenciális energia

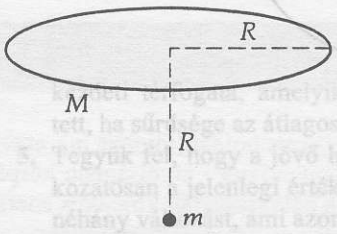
16A-23 Mutassuk meg, hogy a körpályán mozgó meterséges hold potenciális energiája pontosan kétszer akkora, mint kinetikus energiája!

16A-24 Egy függőleges irányba kilőtt rakéta $2g$ gyorsulással mozog felfelé. 40 s múlva kikapcsolják a rakéta motorjait, és ezután a rakéta az elhanyagolható légellenállás mellett egyedül a gravitáció hatása alatt mozog. A g magasságfüggését figyelmen kívül hagyva (a) határozzuk meg a rakéta által elért legnagyobb magasságot és (b) a repülés teljes idejét a kilövéstől a földet érésig. (c) Készítsünk (kvalitatív) sebesség-idő diagramot a teljes repülési időre.

16B-25 Egy szupernova robbanás után egy csillag a gravitációs összeomlás miatt neutroncsillagként ismert extrém sűrű állapotúvá válhat, amelyben minden proton és elektron neutronná van összepréselve. Egy a Nap tömegével nagyjából megegyező tömegű neutroncsillag sugara kb. 10 km lenne. Határozzuk meg (a) a felszínén a gravitációs gyorsulást, (b) egy 70 kg-os ember súlyát a felszínen és (c) azt az energiát, amivel a felszínről egy neutront a végtelenbe lehetne eltávolítani!

16B-26 Képzeljünk el egy m tömegű csillagot, ami egy r sugarú, M tömegű, vékony, gyűrűalakú csillagköd középpontjában van. Határozzuk meg a csillag gravitációs potenciális energiáját m, M, R és G függvényében. Tegyük fel, hogy a csillag potenciális energiája a csillagködtől végtelen távolságban zérus.

16B-27 Tekintsük az előző feladat gyűrűalakú csillagködét. Mekkora v sebességgel halad át a csillag a gyűrű középpontján, ha az, a gyűrű tengelye mentén közeledve a gyűrű középpontjától R távolságból indul el nyugalmi helyzetéből. (16-20 ábra.) Tegyük fel, hogy $M>>m$, tehát, a csillagköd gyakorlatilag nyugalomban marad.



16-20 ábra.
A 16B-27 feladathoz.

16B-28 Nukleáris üzemanyagának kimerülése után Napunk végzete bizonyára az lesz, hogy a Nap tömegével megegyező tömegű, de a Földdel egyező sugarú *fehér törpévé* esik össze. Számítsuk ki (a) a fehér törpe átlagos sűrűségét, (b) a nehézségi gyorsulást a felszínen és (c) egy 1 kg-os test gravitációs potenciális energiáját a felszínen! ($U_g = 0$ a végtelenben.)

16.7 Szökési sebesség és kötési energia

16A-29 Számítsuk ki a szökési sebességet a Hold felszínéről.

16A-30 Alapelvekből kiindulva számítsuk ki a szökési sebességet a Mars felületéről. (Az adatokat lásd az L függelékben.)

16A-31 Egy nem forgó gömbalakú bolygó tömege M, sugara R. A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lőnek ki $v = \sqrt{GM/2R}$ sebességgel. (Ez a bolygó szökési sebességének a fele.) Számítsuk ki, mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától!

16A-32 Az Uránusz bolygó tömege a Föld tömegének kb. 14-szerese, sugara kb. 3,7 földsugár. (a) A Föld megfelelő adataihoz arányítva fejezzük ki a gravitációs gyorsulást az Uránusz felszínén. (b) A bolygó forgásának elhanyagolásával határozzuk meg az Uránusz felszínére vonatkozó minimális szökési sebességet!

16B-33 Három, egyenként m tömegű részecske l oldalhosszúságú egyenlőoldalú háromszög csúcsaiban van. Mekkora munkával lehetne a részecskéket egymástól végtelen távolságra vinni?

16B-34 Jelölje M, illetve R a Föld tömegét, illetve sugarát. (a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen 2 földsugárnyi magasságra emelkedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe. (b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken, vagy változatlan marad-e az (a) kérdésre adott válasz számértéke? Fejtsük ki véleményünket!

16B-35 Az R sugarú Föld felszínén egy rakétának függőleges irányú $v_0 = 2\sqrt{Rg}$ kezdősebességet adnak. A rakéta motorjait ekkor leállítják, és a rakéta ezután csak a gravitációs erők hatása alatt siklik. (A légköri súrlódást és a Föld forgását nem vesszük számításba.) Adjuk meg ezt követően a v sebességet, mint a Föld középpontjától mért r távolság függvényét, g-vel, R-rel és r-rel kifejezve!

16B-36 (a) Határozzuk meg annak a (joule egységben kifejezett) munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne fölé lehet juttatni! (b) Határozzuk meg azt a többletmunkát ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

16B-37 Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

16.8 A mesterséges bolygók mozgásának energiaviszonyai

16A-38 Egy mesterséges bolygó földkörüli ellipszispályán mozog úgy, hogy perigeum, ill. apogeum helyzetben a Föld középpontjától mért magasság D, ill. $4D$. (a) Határozzuk meg a két helyzethez tartozó sebességek v_p/v_a arányát! (b) Határozzuk meg ugyanezen helyzetek *összes* (kinetikus és potenciális) energiáinak E_p/E_a arányát!

16B-39 Tekintsünk egy földkörüli körpályán keringő mesterséges holdat! A megfelelő összefüggésekre hivatkozva adjunk választ arra, hogy az alábbi mennyiségek állandóak maradnak, vagy megváltoznak-e a mozgás során: (a) a kinetikus energia, (b) a gravitációs potenciális energia, (c) az impulzus és (d) az impulzusmomentum. Most tekintsük az ellipszispályán mozgó mesterséges holdat. Melyek lesznek változatlanok a fenti mennyiségek közül, és melyek változnak meg?

További feladatok

16C-40 A Föld és a Hold közötti távolság melyik pontjában lesz a gravitációs erők eredője zérus egy kisméretű testre.

16C-41 Bizonyos kettőscsillag rendszerben két csillag körpályán kering közös tömegközéppontjuk körül. A csillagok gömbalakúak, sűrűségük (ρ) azonos, sugaraik R és $2R$. Középpontjuk $5R$ távolságra van egymástól. Határozzuk meg a csillagok T keringési idejét ρ, R és G függvényében.

16C-42 Három, egyenként M tömegű csillag egy egyenlőoldalú háromszög egy-egy csúcsában van. Síkban, közös tömegközéppontjuk körül keringenek, kölcsönös gravitációs vonzás következtében relatív távolságaikat állandó értéken tartják. Fejezzük ki ennek a forgómozgásnak a T periódusidejét M, G és D függvényében, ahol D a háromszög oldalának hossza.

16C-43 A M, illetve $2M$ tömegű csillag közös tömegközéppontjuk körül körpályán kering. A középpontjuk távolsága D. (a) Adjuk meg a tömegközéppont helyét! (b) Határozzuk meg a tömegközéppont körüli keringés T periódusidejét M, D, valamint a G univerzális gravitációs állandó függvényében!

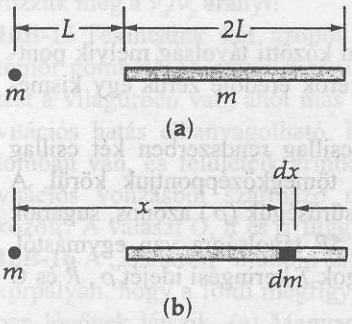
16C-44 Állítólag egy a kereskedelemben kapható, hordozható graviméter elég érzékeny ahhoz, hogy g $1 : 10^{11}$ arányú változásait detektálni tudja. A Föld felszínén milyen magasságváltozás járna g ekkora megváltozásával? Vegyük a Föld sugarát 6×10^6 méternek. (Javaslat: nézzük meg az E függelékben $1/(1+x)$ közelítő formuláját az $x << 1$ esetre!)

16C-45 A Föld lapultsága miatt a Föld középpontjának a távolsága az egyenlítőtől $r_e = 6{,}378 \times 10^6$ m, az északi saroktól pedig $r_p = 6{,}357 \times 10^6$ m. Az eltérés a kettő között: $\Delta r = 22 \times 10^3$ m. (a) Határozzuk meg egy m tömegű testre ható *gravitációs erő* relatív megváltozását, ha a testet az északi sarokról az egyenlítőre viszik. (A relatív változást a $\Delta F/F$ aránnyal definiáljuk, ahol ΔF az erő változása, F az eredeti erő.) (b) Számítsuk ki a relatív megváltozás numerikus értékét.

16C-46 A G univerzális gravitációs állandó egyik pontos geofizikai meghatározása a gravitációs gyorsulás Föld felszínén mért és egy bányaakna mélyén mért értéke közötti különbségen alapul. Vezessünk le formulát G-re a gravitációs gyorsulás Δg változásának, az akna D mélységének és az akna menti ρ átlagsűrűségnek függ-

vényében. Tételezzük fel, hogy a Föld sűrűsége csupán a Föld középpontjától mért távolságtól függ.

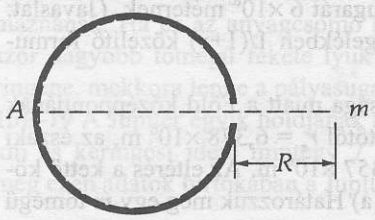
16C-47 A 16-21 ábrán látható kicsiny test és vékony homogén rúd mindegyikének tömege m. Mindkettő ugyanazon egyenesen fekszik, ahogyan ez az ábrán látható. A kicsiny test L távolságban van a $2L$ hosszúságú rúd végétől. Határozzuk meg azt a gravitációs vonzóerőt, amellyel a rúd a kicsiny testre hat! (Javaslat: tekintsük a dm = (tömeg/hosszúság)dx elemi tömeg által kifejtett erőt, és ezt integráljuk, hogy a teljes erőt megkapjuk.)



16-21 ábra.
A 16C-47 feladathoz.

16C-48 Egy gömbszimmetrikus test sűrűsége $r \leq R$ esetében $\rho = kr$, és $r > R$ esetén $\rho = 0$. (a) Határozzuk meg a test tömegét. (b) Határozzuk meg a gravitációs mezőt r függvényében az R sugarú gömbön belül és kívül.

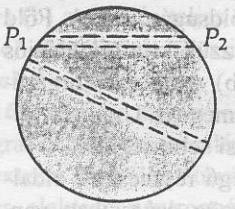
16C-49 Egy vékony, M tömegű és R sugarú gömbhéj rögzítve van. A héjon a 16-22 ábra szerint kis lyuk van. A lyukon sugár irányban átfektetett egyenesen a héjtól R távolságban lévő kicsiny testet kezdősebesség nélkül elengedjük. A test ennek következtében (csak) a gömbhéjtól származó gravitációs erő hatására mozog. Mennyi idő alatt teszi meg a test az utat a *lyuktól* az átellenes helyzetű A pontig?



16-22 ábra.
A 16B-49 feladathoz.

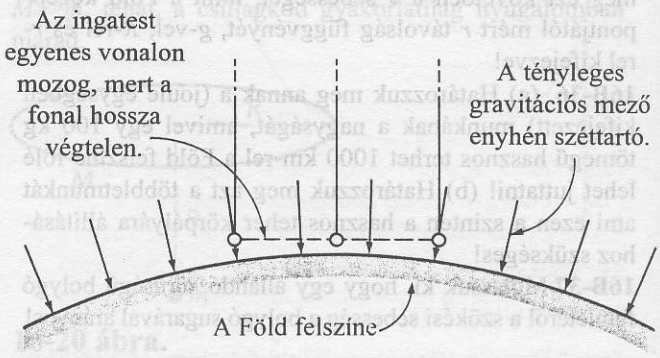
16C-50 Képzeljünk el egy egyenesen a Föld középpontjáig fúrt lyukat! A lyukba kicsiny m tömegű testet ejtünk. A Föld forgásának és a súrlódás különböző forrásainak elhanyagolásával számítsuk ki a test sebességét a Föld középpontjába érkezés pillanatában.

16C-51 Tekintsük a Földet R sugarú, M tömegű homogén gömbnek! Az alábbi esetekben mutassuk ki, hogy az m tömegű testre ható visszatérítő erő arányos az egyensúlyi helyzettől mért kitéréssel, és hogy ezért a mozgás egyszerű harmonikus rezgőmozgás. Mutassuk meg, hogy mindegyik esetben a harmonikus rezgőmozgás T periódusideje azonos. Lásd a 16-23 ábrát! (a) A Földbe símafalú egyenes lyuk van fúrva az egyik átmérő mentén, és ebbe kicsiny m tömegű testet ejtenek. (A test ezt követően a Föld egyik oldalától a másikig egyszerű harmonikus rezgőmozgást végez.) (b) A Földbe símafalú egyenes lyukat fúrnak egy húr mentén (nem átmérő mentén) a felszín P_1 pontjától a felszín egy önkényesen választott másik P_2 pontjáig. A lyuk egyik végén m tömegű testet ejtenek be.



16-23 ábra.
A 16C-51 feladathoz.

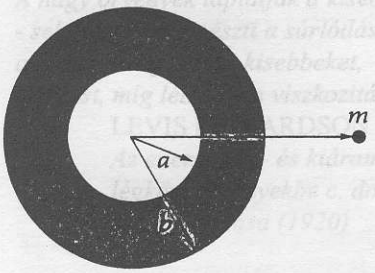
16C-52 Tekintsük a Földet M tömegű, R sugarú homogén gömbnek! Mutassuk ki, hogy az alábbi három eset az előző feladat T periódusidejére vezet, ami azonos az előző feladatban meghatározott időtartammal. (a) A földfelszínen meglévő térerősségű *homogén* gravitációs mezőben kis amplitúdóval lengő, a Föld R sugarával egyező l hosszúságú ($l = R$) fonálinga; (b) egy lényegében végtelen hosszú fonálinga (16-24 ábra), amelynek ingateste a földfelszíni valóságos (tehát $1/r^2$ -tel arányos) gravitációs térben kis amplitúdóval leng; és (c) egy a Földet majdnem súroló körpályán keringő mesterséges hold, (feltételezve, hogy a pálya sugara a Föld sugarával egyenlő).



16-24 ábra.
A 16C-52 feladathoz.

16C-53 Egy test súrlódás nélkül *egyenes* pályán mozog (azaz a pálya nem követi a Föld görbületét). Ha a pálya vízszintes, akkor a test a pálya mentén ide-oda csúszik. Határozzuk meg kis amplitúdójú rezgésének periódusidejét.

16C-54 Homogén anyagból készített gömb közepében gömbalakú lyuk van (16-25 ábra). A gömbhéj tömege M, belső és külső sugara a, ill. b. Tekintsük a gömbhéj által az m tömegpontra gyakorolt $F(r)$ erőt, ha a tömegpontnak a középponttól mért r távolsága változik ($0 < r < \infty$). (a) Vázoljuk fel az $F(r)$ erőt r függvényében, és jelöljük be az $r = 0$, a és b pontokban (az adott paraméterekkel és G -vel kifejezett) egzakt értékeket! Az $a < r < b$ tartományban jelezzük, hogy a diagram vajon lineáris, konkáv, vagy konvex! (b) Készítsünk hasonló diagramot az $U(r)$ gravitációs potenciális energiára r függvényében, ahol $U(\infty) \equiv 0$!



A gömbhéj tömege M.

16-25 ábra.
A 16C-54 feladathoz.

16C-55 Képzeljük el, hogy a Föld (tömege M, sugara R) középpontjáig keskeny lyukat fúrtak úgy, hogy az m tömegpont radiálisan mozoghat a Föld belsejében. Adjuk meg a tömegpont $U(r)$ potenciális energiáját ($r < R$ esetre) mint r függvényét! (Javaslat: minthogy a Föld felszínén $U(R) = -GMm/R$, induljunk ki ebből, felhasználva a $\Delta U = -\int \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$ összefüggést. Azután számítsuk ki a Földnek azt az r ponthoz tartozó résztömegét, ami az m tömegpontra erőt gyakorol.)

16C-56 A Föld forgását és más bolygók jelenlétét nem tekintve számítsuk ki a Cape Canaveralból indított rakéta (Földre vonatkoztatott) szökési sebességét, ami elég ahhoz, hogy a rakéta elhagyja a Naprendszert! (Megjegyzés: mind a Földet, mind a Napot vegyük számításba.) Elfogadható-e a többi bolygóra vonatkozó feltételezésünk? Igazoljuk válaszunkat!

16C-57 Egy R sugarú, és eredetileg M tömegű tömör homogén gömbbe átmérője mentén hengeres furatot készítettek. A kifúrt anyag tömege m. A henger tengelye mentén, a gömb középpontjától $2R$ távolságra kicsiny m tömegű test van elhelyezve. Határozzuk meg a testre ható gravitációs erőt! (Javaslat: a lyukfúrás lényegében kivonja a kifúrt (hiányzó) anyagtól származó erőt; lásd a 16-47 feladatot.)

16C-58 Egy ember a Föld felszínén guggoló helyzetből felugorva tömegközéppontját h magasságra tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kis bolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyná annak vonzáskörét.

XIV. Fejezet

14A-1 2,2 m/s² felfelé

14A-3 5 m/s²

14B-5 g/2

14B-7 11,7 m/s²

14B-9 a) 20,6° b) 18 N

14B-11 5,5 N

14A-13 8,54 fordulat per perc

14A-15 50,4

14B-17 délre 60° a vízszintes alatt

14B-19 $\sqrt{g/R}$

14B-21 a) a sugárirányban befelé mutató súrlódási erő $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N

b) a súrlódási erő és az $f_{cf} = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N centrifugális erő

c) A korong rendszerében az a)-ban és b)-ben adott erő plusz az $f_{Cor} = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N Coriolis erő, a bogár haladási irányától jobbra, valamint egy ugyanakkora tangenciális, balfelé mutató súrlódási erő komponens $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N

d) inerciarendszerben: csak a két súrlódási erő összetevő hat: $f_r = 4{,}00 \times 10^{-3}$ N sugár irányban befelé és $f_t = 8{,}00 \times 10^{-4}$ N érintőirányban a bogártól balra.

14C-23 5 N/m

14C-25 a) 3,17 m

14C-27 $g\text{tg}\,2\theta$

14C-29 $F/(M + 2m/7)$

14C-31 A válasz adott.

14C-33 7,5 N balra

14C-35 a) 20 N sugár irányban kifelé
b) 80 N sugár irányban kifelé
c) 180 N sugár irányban befelé

14C-37 a) nulla b) $m\omega^2 R$ befelé

14C-39 A válasz adott.

14C-41 a) $4m\omega v$ b) nyugat felé

XV. Fejezet

15A-1 a) 0,020 m b) 0,942 m/s a középpontban
c) 17,8 m/s² a szélső helyzetekben

15B-3 0,0356 m

15B-5 $4\pi^2 f^2 A/g$

15B-7 a) 0,910 s^{-1} b) 0,588 N

15A-9 a) 0,50 s b) 128 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ c) 1,5 m/s
d) 18,9 m/s² e) 9 J f) 0,75 m/s
g) 9,45 m/s²

15A-11 a) 1,19 Hz b) 0,210 s c) 0,784 N lefelé

15B-13 a) 8,17 cm b) 1,42 s^{-1}

15B-15 a) 0,0280 J b) 1,03 m/s c) 0,0158 J
d) 0,0123 J

15B-17 a) 0,10 m b) –0,0654 m c) 0,262 s
d) 0,0160 J e) 0,0160 J

15A-19 a) 0,136 Hz b) 7,37 s

15B-21 A válasz adott.

15A-23 19,9 s

15B-25 1,58 s

15B-27 0,790 Hz

15B-29 a) 3,559 Hz b) 3,554 Hz; 1,38 s

15A-31 1,104 cm³

15A-33 952 N/m²

15B-35 AY/L_o

15C-37 a) $3k$, $1{,}5k$ b) $\sqrt{2}$:1

15C-39 $4mg/l$

15C-41 A válasz adott.

15C-43 A válasz adott.

15C-45 A válasz adott.

15C-47 $\pi b A^2 \omega$

15C-49 a) 0,149 m b) 132°

15C-51 b) $(y/2)(\Delta L/L)^2$

XVI. Fejezet

16A-1 a) $3{,}32 \times 10^{-5}$ N b) $5{,}92 \times 10^{-3}$ N

16A-3 $g/9$

16A-5 35,0 N

16A-7 30,3 km/s

16A-9 2,41

16B-11 $4\pi^2/Gm$, $3{,}00 \times 10^{-19}$ s²/m³

16B-13 a) 84,4 perc b) 7,90 km/s

16B-15 $\frac{128}{81} G\pi^2 R^4 \rho^2$

16B-17 $8{,}74 \times 10^7$ m

16B-19 $1{,}62 \times 10^{27}$ kg

16B-21 $1{,}91Gm/l^2$ az átmérő mentén ellentétes sarok felé

16A-23 A válasz adott.

16B-25 a) $1{,}32 \times 10^{12}$ m/s² b) $9{,}21 \times 10^{13}$ N
c) $7{,}70 \times 10^{-11}$ J

16B-27 $\sqrt{(GM/R)(2-\sqrt{2})}$

16A-29 2380 m/s

16A-31 4R/3

16B-33 $3Gm^2/l$

16B-35 $\sqrt{2Rg(1+R/r)}$

16B-37 A válasz adott.

16B-39 A válasz adott.

16C-41 $\sqrt{125\pi/3G\rho}$

16C-43 b) $2\pi\sqrt{D^3/3GM}$

16C-45 b) $6{,}54 \times 10^{-3}$

16C-47 $Gm^2/3L^2$

16C-49 $2\sqrt{R^3/GM}$

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84{,}5$ perc
16C-53 1,41 óra
16C-55 $\frac{GMm}{2R}\left[3-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$
16C-57 $\frac{Gm}{R^2}\left(\frac{M}{4}-\frac{m}{3}\right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%
17B-3 A válasz adott.
17A-5 250 N
17A-7 20 cm
17B-9 a) 5000 kg/m^3 b) 667 kg/m^3
17B-11 a) 2704 kg/m^3 b) 59,8 N
17B-13 0,89 kg/dm^3
17B-15 4,00 mg
17B-17 $\Delta V/V = 0{,}0830$
17A-19 $1{,}77 \times 10^{-3}$ m^3/s
17A-21 40 cm/s
17B-23 $3{,}7 \times 10^4$ N/m^2
17B-25 4,49 atm
17B-27 $\rho A v^2$
17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm
17B-31 A válasz adott.
17C-33 al/g
17C-35 0,933
17C-37 $(1-1/\sqrt{2})$
17C-39 $(1-1/\sqrt{2})$
17C-41 A válasz adott.
17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$
17C-45 A válasz adott.
17C-47 27,3 cm^3/s
17C-49 $H/2$

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2{,}27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m
18A-3 A válasz adott.
18A-5 8,33 cm
18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3{,}14$ m^{-1}, $\omega = 6{,}28 \times 10^{-3}$ s^{-1}
18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m d) 340 m/s
18B-11 18,56 m
18B-13 860 m
18A-15 $2{,}94 \times 10^{-16}$ J/cm^3
18B-17 1,13 μW
18B-19 A válasz adott.
18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang
18A-23 2,07 N
18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm
18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz
18A-29 870 Hz, 2610 Hz
18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m
18B-33 800 Hz
18A-35 19,9 m/s
18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz
18A-39 28,4°
18B-41 5,64 Hz
18C-43 A válasz adott.
18C-45 3,14 m/s, $9{,}87 \times 10^3$ m/s^2
18C-47 $K = 2{,}47 \times 10^{11}$ N/m^2
$G = 1{,}25 \times 10^{11}$ N/m^2
18C-49 b) $v = R\omega$
18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24
18C-53 $\mu = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú
18C-55 12,6 m/s^2
18C-57 60,0 Hz
18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni
19A-3 3×10^{-5}/°C
19B-5 $2{,}17 \times 10^5$ N
19B-7 0,72 l
19A-9 6,44 kJ
19A-11 0,463 kJ/kg·°C
19A-13 0,431 joule/ g·°C
19A-15 0,122 kg
19B-17 0,126 kJ/kg·°C
19B-19 87,5
19B-21 A válasz adott.
19A-23 557 J/s
19A-25 $1{,}38 \times 10^8$ J
19B-27 a) 290 g b) 42,9 g
19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár
19A-31 5,00 W/m^2 °C
19B-33 2,84 J/s
19A-35 a) 61,1 kW·h b) $3,67
19C-37 A válasz adott.
19C-39 a) 13,9 cm b) $2{,}6 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$
19C-41 8,0039 cm
19C-43 a) $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$
19C-45 A válasz adott.
19C-47 $3{,}52 \times 10^4$ s = 9,78 h
19C-49 A válasz adott.
19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l
20A-3 a) 4,48 m^3 b) 5,60 kg
20A-5 0,046 m^3
20A-7 12,0 l
20A-9 $1{,}98 \times 10^5$ Pa

FOLYADÉKOK

A nagy örvények táplálják a kisebbeket
- sebességüket emészti a súrlódás -
a kicsik pedig a még kisebbeket,
folyvást, míg létrejön a viszkozitás

LEVIS RICHARDSON
Az energia be- és kiáramlása a légköri örvényekbe c. dolgozat összefoglalása (1920)

17.1 Bevezetés

Ennek a fejezetnek két fő témája van: nyomás a nyugvó folyadékban, és nyomásváltozás az áramló folyadékban. A *hidrodinamika* a technikának az az ága, amely az áramló folyadékokkal, az *aerodinamika* az amely áramló gázokkal foglalkozik. Tárgyalásunk a legegyszerűbb esetekre fog szorítkozni. Ebben a fejezetben csak kevés új fizikai fogalmat vezetünk be, de érdekes példát jelent majd a Newton törvénynek és az energiamegmaradási törvénynek egy alkalmazása új fizikai körülményekre.

Az anyagról általában azt mondják, hogy *szilárd* vagy *folyékony* állapotban van. Az a szó, hogy **folyadék**, a folyás (mozgás, áramlás) képességére utal, ezért magában foglalja mind a cseppfolyós anyagokat (ezek a köznapi értelemben vett folyadékok), mind a gázokat. Az anyag másik halmazállapotát, a nagy ionizáltságú, pozitív és negatív részecskéket azonos mennyiségben tartalmazó gázt **plazmának** nevezik. (A plazmát néha a folyadék, speciális típusának tekintik.) Az utóbbi időben a plazma tulajdonságait – a magfúziós reakciók szabályozhatóságára irányuló törekvés részeként – intenzíven kutatják.

Ez a széles osztályozás azonban túlságosan leegyszerűsíti a helyzetet. Bizonyos esetekben a folyadék és a gáz (vagy a folyadék és a szilárd anyag) között egyáltalán nem éles a határ. Néhány „szilárdnak" ismert anyagot, pl. az üveget, helyesebb nem teljesen megszilárdult folyadéknak minősíteni. Nincs olyan szilárd anyag, ami tökéletesen merev lenne. Továbbá a szilárd anyagok nagy része jól megkülönböztethető alakokban létezik, különböző olvadásponttal, sűrűséggel és fajhővel. Pl. a szilárd szénnek három különböző módosulata van, és a jégnek hét különböző fázisa létezik.

Az említett bonyolult kérdésekkel nem foglalkozunk a továbbiakban. Helyette az **ideális folyadék**[1] – az összenyomhatatlan és tökéletesen viszkozitásmentes, azaz súrlódásmentes folyadék – viselkedését vizsgáljuk.

[1] A valódi folyadékok között a víz azok közé tartozik, amelyek jól megközelítik az ideális folyadékot, legalábbis mérsékelt nyomás és áramlási sebesség esetében.

17-1 táblázat
Néhány anyag sűrűsége (10^3 kg/m^3)

Szilárd anyagok	
Aluminium	2,70
Bronz	8,6
Réz	8,96
Föld (átlagos)	5,52
a magban	9,5
a kéregben	2,8
Üveg	
közönséges	2,4–2,6
flint	2,9–5,9
Arany	19,3
Gránit	2,7
Jég (0 °C)	0,917
Vas	7,87
Ólom	11,35
Ezüst	10,50
Acél	7,8
Uránium	18,9
Fa (dió)	~0,65
Folyadékok	
Aceton	0,791
Etilalkohol	0,791
Széntetraklorid	1,587
Glicerin	1,26
Higany	13,55
Víz	
0 °C-on	1,000
100 °C-on	0,958
Tengervíz	1,025

A **viszkozitás** az a tulajdonság, amelynek révén a folyadékok és a gázok a bennük mozgó tárgyakra ellenállást fejtenek ki. Az ilyen ellenállási erők nagysága nem állandó, hanem függ a sebességtől. Például, ha sűrű olajba ejtünk egy kicsiny fémgolyót, akkor az hamarosan állandó **végsebességet** ér el, azt a sebességet, amely mellett a viszkózus ellenállási erő egyenlő a golyóra ható gravitációs erővel. Így az eredő erő zérus, és a test gyorsulás nélkül esik. A viszkozitás az egymáson csúszó folyadék- vagy gázrétegeken fellépő ellenállási erővel is kapcsolatban van.

17.2 A sűrűség

Mint már említettük, az anyag ρ sűrűségét így határozzuk meg:

Sűrűség $$\rho \equiv \frac{m}{V} \qquad (17\text{-}1)$$

ahol m a V térfogatot betöltő anyag tömege. Az „ideális" folyadékról feltételezzük, hogy sűrűsége minden nyomáson állandó marad. A víz esetében ez ésszerű feltevés, minthogy kb. 200-szoros légköri nyomás szükséges egy adott térfogat 1%-os összenyomásához.

Valamely anyag vízre vonatkoztatott **relatív sűrűségét** az anyag sűrűségének és a víz sűrűségének hányadosaként definiáljuk. Minthogy ez két sűrűség hányadosa, ezért ez dimenzió nélküli mennyiség:

Relatív sűrűség $$s \equiv \frac{\rho}{\rho_{víz}} \qquad (17\text{-}2)$$

A 17-1 táblázat tételei 10^3 kg/m^3 egységben vannak megadva. Mivel a vízmérték sűrűsége 1,000 kg/m^3, azért a táblázat adatai relatív sűrűségnek is tekinthetők.



17-1 ábra.
Nyomás. Balra: a hótaposó cipők azáltal csökkentik a hóra gyakorolt nyomást, hogy az erőt nagyobb felületen osztják szét. Jobbra: Előfordulhat, hogy egy 100 kg-os férfi kisebb nyomást gyakorol a talajra, mint egy 55 kg-os nő.

17.3 A nyomás

Tekintsük most a folyadék és a tartály között lévő érintkezési felületet! A tartály a folyadék felületére csak *merőleges* irányban tud erőt kifejteni. Ez a megállapítás abból a feltételezésből adódik, hogy a folyadék súrlódásmentes. Tehát, ha a folyadék tangenciális erő hatásának lenne kitéve, a folyadék „rétegei" súrlódás nélkül elcsúsznának egymáson. Így az ideális folyadék tangenciális erőnek nem tud ellenállni, és megfordítva, nem tud tangenciális erőt kifejteni bármilyen vele érintkező felületre sem. Csak a felületre merőleges erő kifejtésére képes.

Ezt a meggondolást a folyadék belső tartományaira is kiterjeszthetjük. Tekintsünk valahol a folyadék belsejében egy tetszőlegesen irányított elemi felületet. A környező folyadék csak merőleges erőt fejthet ki erre a felületre. Így célszerűnek látszik a folyadékban ható p **nyomást** az elemi ΔA felületre kifejtett ΔF erővel kifejezni:

Nyomás
$$p \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad \textbf{(17-3)}$$

Annak ellenére, hogy az erő vektormennyiség, a nyomást *skalár* mennyiségként definiáljuk, minthogy nincs kitüntetett iránya. Mértékegysége erő/felület egységgel mérjük, ez SI rendszerben newton per négyzetméter (N/m^2), hivatalos neve *pascal* (Pa).[2] Néhány más mértékegységet a (17-7) egyenlet sorol fel.

A folyadékok belsejében a nyomásnak nincs kitüntetett iránya. Ezt az alábbi példa illusztrálja. Tekintsünk egy folyadékba merült keskeny, tömör éket (17-2 ábra). Ha a folyadék és az ék sűrűsége egyenlő, akkor az ék nem süllyed le, nem is emelkedik fel: egyensúlyban van.A folyadék az ékre olyan erőket fejt ki, amelyek mindig merőlegesek a felületre, *tekintet nélkül az ék helyzetére*. Tehát a folyadék adott pontjában a nyomásnak nincs kitüntetett iránya.

A következőkben megmutatjuk, hogy a nyugvó folyadékban a nyomás két tényezőtől függ: a folyadék felszínén lévő nyomástól és a felszíntől számított mélységtől. Tekintsük a folyadék kicsiny elemi térfogatát a felszín alatt h mélységben (17-3a ábra). Az elemi térfogat vékony derékszögű hasáb, tömege dm, vastagsága dy. Mindkét vízszintes felületének területe A. A térfogat nyugalomban van, ezért a rá ható erők összege zérus. Az erő minden esetben merőleges a felületre, nagysága a nyomás és a felület nagyságának szorzatával egyenlő.

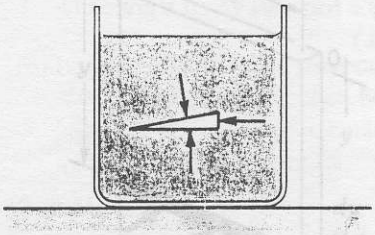
A 17-3b ábra a hasábra ható erők vektorábráját mutatja. A vízszintes erőkomponensek összege a szimmetria miatt zérus. A függőleges erők összege is zérus kell, hogy legyen, de ebbe az összegbe a hasábra ható gravitációs erőt is be kell számítani. Ez az erő $(dm)g = (\rho A dy)g$. A hasáb alsó felületére ható erő (pA), a felső felületre pedig $(p+dp)(A)$ erő hat, ahol dp a hasáb alsó és felső felülete között lévő infinitézimális nyomáskülönbség. Tehát a hasábra ható függőleges erők összege:

$$\sum F_y = 0$$

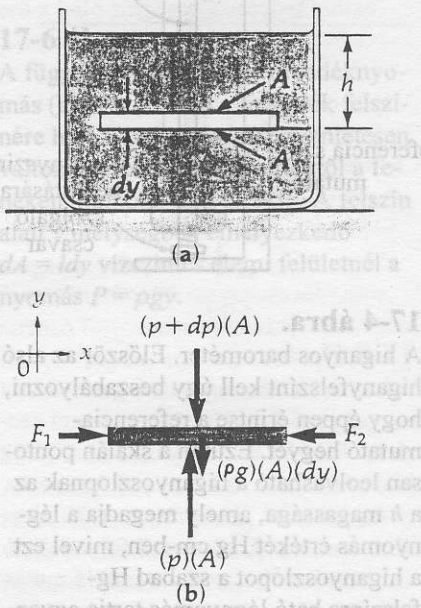
$$pA - (p + dp)A - \rho g A dy = 0$$

$$dp = -\rho g\, dy \qquad \textbf{(17-4)}$$

Válasszuk a függőleges távolság zérus szintjének a folyadék felszínét, és pozitívnak a felfelé mutató irányt! Ekkor, lefelé haladva dy változása ne-



17-2 ábra.
A folyadék olyan erőt fejt ki a bemerülő testre, amely mindenütt merőleges a test felületére.



17-3 ábra.
(a) Az A területű, dy vastagságú, vékony, vízszintes lemezalakú elemi folyadéktérfogat. (b) Az (a) ábrán bemutatott elemi térfogatra ható erők vektorábrája.

[2] A francia filozófus-természettudós Blaise Pascal (1623–1662) tiszteletére, aki a hidrodinamikában jelentőset alkotott.

gatív, és a (17-4) egyenletben a negatív előjel biztosítja, hogy dp változása pozitív legyen. Így a folyadék felszíne alatt tetszőleges h mélységben a p nyomás

$$\int_{p_0}^{p} dp = \int_{y=0}^{y=-h} -\rho g\, dy \qquad (17\text{-}5)$$

$$p - p_0 = \rho g h$$

Nyomás a nyugvó folyadékban

$$p = p_0 + \rho g h \qquad \text{(Ha a } \rho \text{ sűrűség állandó.)}^3 \qquad (17\text{-}6)$$

ahol p_0 a nyomás a felszínen, és h a folyadékfelszín alatti távolság, pozitív számmal kifejezve.

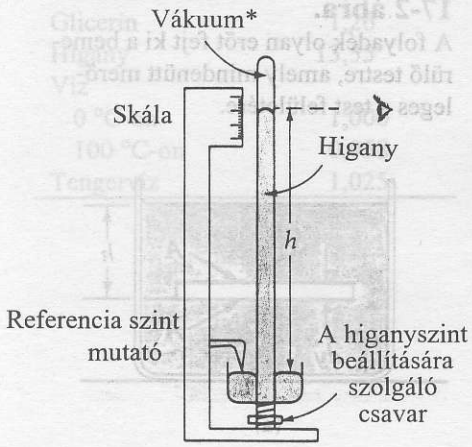
Adott esetben lehetséges, hogy a p_0 felszíni nyomás megegyezik az **átlagos atmoszféra nyomás** értékével, (1 atm) de ettől el is térhet.[4]

Átlagos atmoszféra nyomás

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 1{,}013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &\quad [\textit{pascal} \text{ (Pa) a nyomás SI egysége}] \\ &= 1013 \text{ millibar} \\ &= 76{,}0 \text{ higanycentiméter (Hg cm)} \end{aligned} \qquad (17\text{-}7)$$

A meteorológusok a helyi légköri nyomást gyakran *bar* egységben fejezik ki. Definíció szerint 1 bar = 10^5 N/m^2. Így az átlagos atmoszféra nyomás 1013 millibar. A (17-7) egyenlet másik kifejezése a „Hgcm" rövidítést használja a „higany-centiméter" helyett. Ez a szóhasználat abból a tényből ered, hogy az átlagos atmoszféra nyomás a higanyos barométerben (17-4 ábra) 76,0 cm magas higanyoszlop nyomásával tart egyensúlyt. De jól jegyezzük meg, hogy a nyomás alapvető mértékegysége az *erő per felületegység*, és nem a higanyoszlop centiméterben mért magassága.

A technikában praktikus, kényelmi okból a nyomásmérő műszerek úgy vannak beállítva, hogy zérus értéket mutatnak, amikor a nyomás 1 atm. Így az általános gyakorlat kétfajta nyomást különböztet meg: **abszolút-nyomást** (a fizikában egyszerűen csak *nyomás*) és **műszer-nyomást** (nyomás mínusz 1 atm). Az 1 atm -nál kisebb műszer-nyomás számértéke negatív.



17-4 ábra.
A higanyos barométer. Először az alsó higanyfelszínt kell úgy beszabályozni, hogy éppen érintse a referencia-mutató hegyét. Ezután a skálán pontosan leolvasható a higanyoszlopnak az a h magassága, amely megadja a légnyomás értékét Hg cm-ben, mivel ezt a higanyoszlopot a szabad Hg-felszínre ható légnyomás tartja egyensúlyban. Ez Pascal törvénye.

* A valóságban itt nincs tökéletes vákuum, hanem inkább nagyon alacsony nyomású higanygőz. A legtöbb esetben, a szokásos hőmérséklet mellett – a nagyon pontos méréseket leszámítva – az ebből adódó eltérés elhanyagolható.

17-1 PÉLDA

Egy medence méretei 4,5 m × 9 m. A medencét h = 3 méter magasan vízzel töltik fel. (a) Mekkora erőt fejt ki a víz a medence fenekére? (b) Mekkora a nyomás a fenéken? (c) Mekkora erőt gyakorol a víz a 4,5 m széles oldalfalra? A példában csak a vizet vegyük tekintetbe, a légnyomást hanyagoljuk el. (Megjegyzés: 1 köbméter víz súlya 10^4 N.)

MEGOLDÁS

(a) Minthogy a medence keresztmetszete állandó, azért a víz által a fenékre kifejtett erő a víz súlyával egyenlő:

$$\left(\frac{Súly}{Térfogat}\right)(Térfogat) = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}(4{,}5\,\text{m})(9\,\text{m})(3\,\text{m}) = 1{,}215 \times 10^6\,\text{N}$$

[3] A (17-6) egyenlet nem alkalmazható a légkörre, mert a légkör sűrűsége változik a nyomással.

[4] A legtöbb embert meglepi, hogy a légnyomás a testének felszínére négyzetméterenként mintegy 10 tonna erőt fejt ki. Persze ezt a nyomást kiegyensúlyozza a test belsejéből származó nyomás, és közvetlenül nem érzékeljük. De ha a külső nyomás gyorsan változik, akkor rossz érzést okozhat az, hogy a középfül képtelen elég gyorsan kompenzálni a dobhártya külső oldalán bekövetkezett nyomásváltozást. Például egy magas épület felvonójában, vagy rosszul tömített repülőgép utasfülkéjében a gyors magasságváltozás kényelmetlen érzést okozhat. A nyomáskülönbség kiegyenlítését az ásítás vagy a nyelés néha segíti.

(b) A fenéknyomás (a légnyomás figyelembevétele nélkül)

$$p = \rho g h = \left(10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right)(3\,\text{m}) = 3\times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

(c) Az oldallapon a nyomás egyenletesen változik a felső zérus értéktől az alsó ρgh értékig (lásd a 17-6 ábrát). A csak a víztől származó p nyomás y mélységben

$$p = \rho g y .$$

A dA elemi felületre ható dF erő

$$dF = p\,dA = \rho g y l\,dy .$$

Így az erő összege:

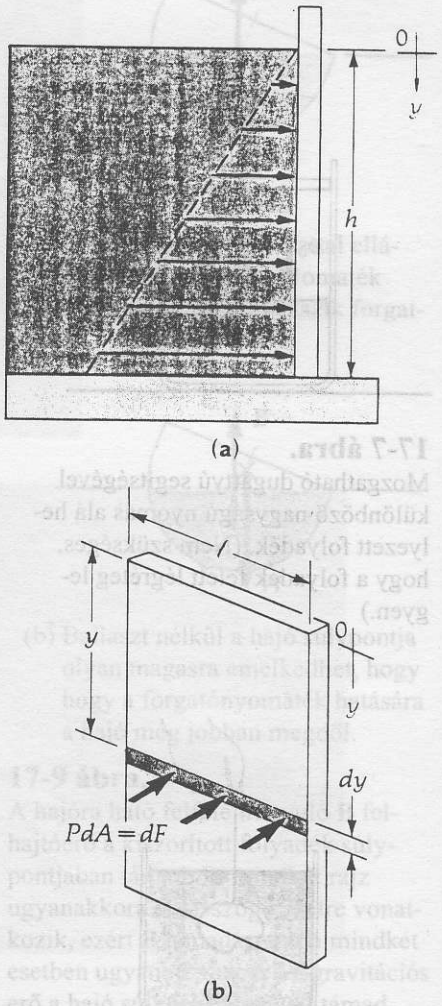
$$F = \int dF = \int_0^h \rho g y l\,dy = \frac{\rho g h^2 l}{2}$$

$$= \frac{\left(10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right)(3\,\text{m})^2(4{,}5\,\text{m})}{2} = 4{,}05\times 10^5\,\text{N}.$$

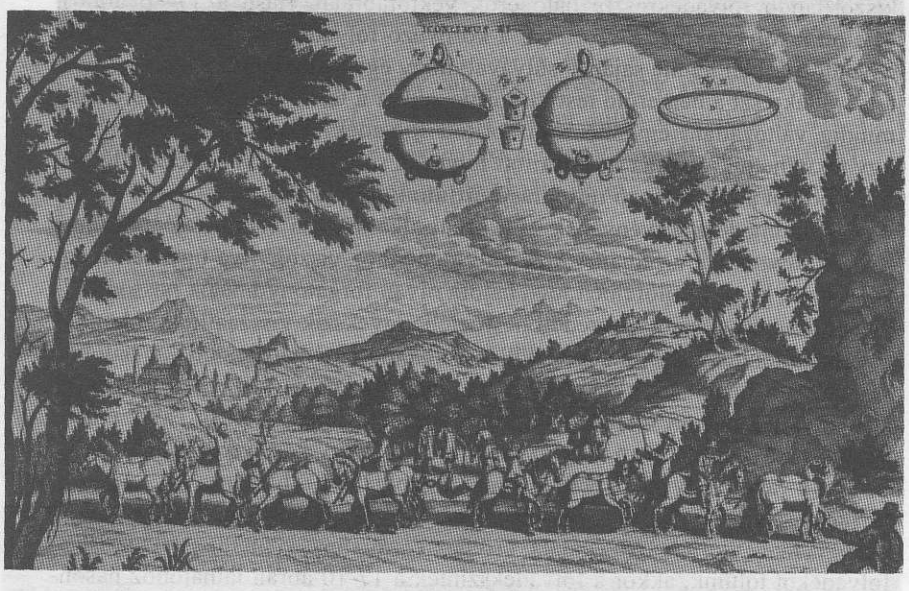
Más megoldás (c) Minthogy a medence oldalfalának szélessége végig azonos, a p nyomás az y mélységgel *egyenletesen* változik. Így a $p_{átl}$ átlagnyomás a vízmélység felében lévő nyomással, vagyis $\rho gh/2$ -vel egyenlő. Az átlagnyomást az oldallap egész területével szorozva kapjuk az erőt:

$$F = (p_{átl})(Terület) = \left(\frac{\rho g h}{2}\right)(hl) = \frac{\rho g h^2 l}{2}.$$

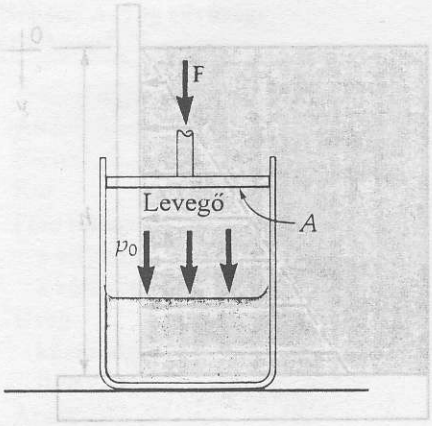
(Jegyezzük meg, hogy ez a módszer nem alkalmazható, ha az oldalfal szélessége változik a mélységgel.)



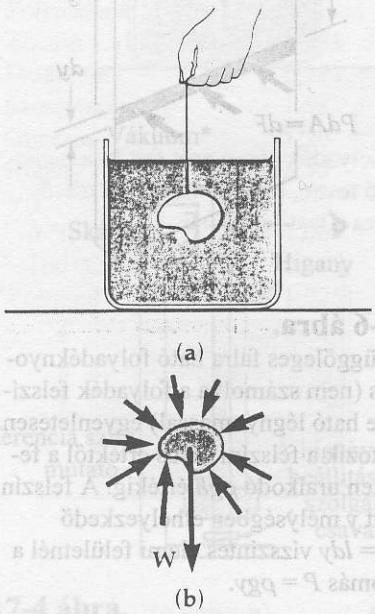
17-6 ábra.
A függőleges falra ható folyadéknyomás (nem számolva a folyadék felszínére ható légnyomással) egyenletesen változik a felszíni zérus értéktől a feneken uralkodó ρgh értékig. A felszín alatt y mélységben elhelyezkedő $dA = ldy$ vízszintes elemi felületnél a nyomás $P = \rho gy$.



17-5 ábra.
1650-ben egy német mérnök, Otto von Guericke elsőként szerkesztett olyan szivattyút, amellyel zérushoz közeli nyomást lehetett előállítani. Magdeburgban úgy igazolta az atmoszféra meglepően nagy nyomását, hogy két összeillesztett 51 cm átmérőjű fém félgömböt evakuált, és bemutatta, hogy 16 ló sem tudja széthúzni a félgömböket. Kétség kívül tisztában volt azzal, hogy a kétfelé húzó 16 ló látványa drámaibb hatású, mintha az egyik félgömbjénél fogva állványhoz erősített eszközt az ugyanekkora erőt kifejtő 8 lóval próbálták volna széthúzni.



17-7 ábra.
Mozgatható dugattyú segítségével különböző nagyságú nyomás alá helyezett folyadék. (Nem szükséges, hogy a folyadék felett légréteg legyen.)



17-8 ábra.
A bemerülő test saját térfogatával megegyező folyadékmennyiséget szorít ki. Mielőtt ez a folyadékmennyiség kiszorult volna, a környező folyadék erőt gyakorolt rá, amint ezt a (b) részábra mutatja. A környező folyadéktól származó erők eredője a felfelé mutató felhajtóerő, ami pontosan egyensúlyt tart a folyadék W súlyával. Ha most ezt a folyadékmennyiséget a bemerülő testtel helyettesítjük, a felfelé mutató felhajtóerő ugyanaz marad: a kiszorított folyadék W súlyával egyenlő nagyságú és ellenkező irányú.

17.4 Pascal törvénye és az Arkhimédész törvény

Ha a folyadék zárt edényben van, akkor egy dugattyúval tetszőleges külső nyomást gyakorolhatunk rá a 17-7 ábrán sematikusan vázolt módon. Továbbra is alkalmazható a (17-6) egyenlet. Ha a bezárt levegő súlyát elhanyagoljuk, a levegő csupán arra szolgál, hogy a dugattyútól származó erőt a folyadékhoz közvetítse. Nyilvánvaló, hogy a levegőnek nem kell jelen lennie ahhoz, hogy a (17-6) egyenlet érvényes legyen. Azt a tényt, hogy a folyadék nyomása bármely mélységben a folyadékra kívülről ható állandó p_0 nyomást is magába foglalja, Blaise Pascal fedezte fel.

PASCAL TÖRVÉNYE **Zárt edényben lévő folyadékra gyakorolt nyomás a folyadék minden részére és az edény falára ugyanolyan mértékben adódik át.**

A folyadékokra vonatkozó másik fontos elvet Arkhimédész (Kr.e. 287-212) fedezte fel. Azt kívánta megállapítani, hogy vajon a király koronája tömör aranyból, vagy csalárd módon ezüsttel ötvözött aranyból készült-e. A koronát sem megfúrnia, sem másként megsértenie nem volt szabad. Az elvet állítólag akkor fedezte fel, amikor fürdés közben karjának és lábának látszólagos súlycsökkenését észlelte. Vett a korona tömegével azonos tömegű arany- és ezüsttömböt. Miután mindet víz alá merítve megmérte, a korona súlyveszteségét a két tárgy súlyvesztése közöttinek találta. Ezzel kiderült, hogy az „arany" korona valójában részben kisebb sűrűségű fémből készült. (A korona készítője nagy bajban volt.) Arkhimédész módszere a fürdőkádban tett felfedezésen alapult.

ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE **Minden, részben vagy teljesen folyadékba merülő testre a kiszorított folyadék súlyával egyenlő felhajtóerő hat.**

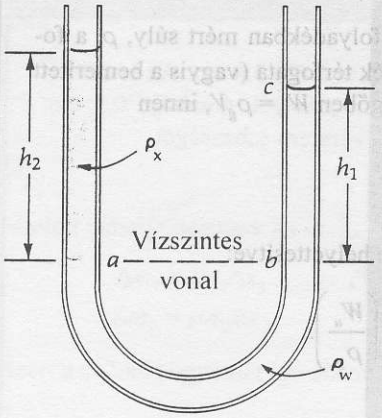
A törvény nyilvánvalóvá válik, ha elkészítjük a majdan bemerülő test által kiszorítandó folyadékrészre ható erők vektorábráját, (lásd a 17-8b ábrát). Mielőtt a folyadékrész kiszorulna, a környező folyadék által rá ható erőnek egyenlőnek kell lennie saját W súlyával, hogy egyensúlyban legyen. Ha most a folyadékrészt a bemerülő test kiszorítja, akkor a testre ható felhajtóerő még mindig változatlan: egyenlő a kiszorított folyadék súlyával. A felhajtóerőt úgy tekinthetjük, mintha a kiszorított folyadék súlypontjában koncentrálódna. Ezt a pontot a **felhajtóerő támadáspontjának** nevezzük.

Arkhimédész törvényének gyakorlati alkalmazása van a hajóépítésben. A hajó súlypontját a felhajóerő támadáspontjához viszonyítva úgy kell megválasztani, hogy a dőlőfélben lévő hajóra olyan forgatónyomaték hasson (17-9a ábra) amely a hajót az eredeti helyzetébe igyekszik visszaállítani. Amikor a hajó különböző szöggel megdől, a felhajtóerő támadáspontja a hajóhoz viszonyítva általában eltolódik, mert megváltozik a kiszorított folyadék alakja. Egy kenuban felállni különösen veszélyes, mert a kenu és az ember együttes súlypontja olyan magasra emelkedhet, hogy könnyen előállhat a 17-9b ábrán vázolt helyzet. További példával szolgál a 17-11 ábra.

Ismeretlen folyadék sűrűségének mérésére egyszerű módszer a következő. Ha vízet tartalmazó U alakú cső egyik szárába a víznél kisebb sűrűségű folyadékot töltünk, akkor a folyadékszintek a 17-10 ábrán láthatóhoz hasonlóan helyezkednek el. Az a pont a víz és a kisebb sűrűségű folyadék közös szintje. Az a és a b pontok egyenlő mélyen vannak a vízben a c pont alatt, így ugyanakkora nyomáson vannak. Ez a *nyomás csak a folyadéktól származik*:

$$p_a = p_b = \rho_w g h_1 \qquad (17\text{-}8)$$

ahol ρ_w a víz sűrűsége. (Itt nem vesszük számításba a levegő nyomását, azaz minden kifejezés műszer-nyomás értéket jelent.)



17-10 ábra.
Egy U alakú csőbe vizet töltöttek; ezután a cső bal oldali szárába kisebb sűrűségű folyadékot töltöttek.

De a nyomás a -ban a h_2 mélységgel és az ismeretlen folyadék ρ_x sűrűségével is kifejezhető:

$$p_a = \rho_x g h_2 \qquad \textbf{(17-9)}$$

A két fenti egyenletet ρ_x -re megoldva:

$$\rho_x = \rho_w \left(\frac{h_1}{h_2} \right). \qquad \textbf{(17-10)}$$

A 17-2 példában Arkhimédész törvényét használhatjuk egy ismeretlen folyadék sűrűségének meghatározására.

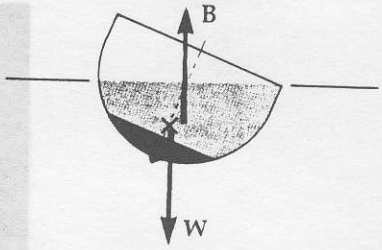
17-2 PÉLDA

Kicsiny, $\rho_g = 2{,}5 \times 10^3$ kg/m^3 sűrűségű üveghenger vékony drótszálra kötve mérlegen függ. Levegőben a henger súlya $W_a = 0{,}15$ N. Ha a henger teljesen bemerül a folyadékba, a látszólagos súlya $W_1 = 0{,}08$ N. Határozzuk meg a folyadék ρ_l sűrűségét! A levegő felhajtóerejét hanyagoljuk el!

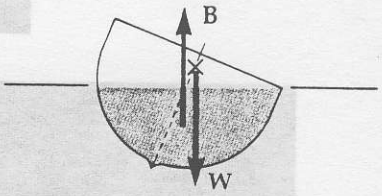
MEGOLDÁS

Az üveghenger látszólagos súlycsökkenése a folyadéktól származó felhajtóerő következménye:





(a) A jól tervezett (ballaszttal ellátott) hajót a forgatónyomaték egyenes állásba igyekszik forgatni.



(b) Ballaszt nélkül a hajó súlypontja olyan magasra emelkedhet, hogy hogy a forgatónyomaték hatására a hajó még jobban megdől.

17-9 ábra.
A hajóra ható felfelé irányuló **B** felhajtóerő a kiszorított folyadék súlypontjában támad. Itt mindkét rajz ugyanakkora dőlésszögű esetre vonatkozik, ezért **B** támadáspontja mindkét esetben ugyanott van. A **W** gravitációs erő a hajó súlypontjában (×) támad. Szimmetrikus felépítésű hajónál a (×) pont a hajó (szaggatott vonallal jelölt) középvonalán van. A (b) ábra esetében, ha a hajónak nincs ballasztja, a (×) pont sokkal magasabban van. (A hajó fedélzet fölötti felépítményét az ábra nem mutatja.) Ez a pont elég magasan lehet ahhoz, hogy az eredő forgatónyomaték az (a) részábrához tartozó forgatónyomatékkal ellentétes irányú legyen, aminek kellemetlen következményei lehetnek.

17-11 ábra.
Amidőn a 480 tonna űrtartalmú „Piero Riero Gambinit" 1952 január 26-án vízre bocsátották, Teduccióban, Itáliában valaki elfelejtette beszerelni a hajó egyenes helyzetben tartásához szükséges ballasztot. Amikor a hajó felborult, ötvennél többen estek vízbe, és mindegyikük komoly sérülést szenvedett.

$$W_a - W_1 = \rho_1 V$$

ahol W_a a levegőben mért súly, W_1 a folyadékban mért súly, ρ_1 a folyadék sűrűsége, V a kiszorított folyadék térfogata (vagyis a bemerített henger térfogata). A henger súlya levegőben $W_a = \rho_g V$, innen

$$V = \frac{W_a}{\rho_g}.$$

Ezt az eredményt az előbbi kifejezésbe helyettesítve:

$$W_a - W_l = \rho_l \left(\frac{W_a}{\rho_g} \right).$$

ρ_l -re megoldva:

$$\rho_l = \left(\frac{W_a - W_l}{W_a} \right) \rho_g = \left(\frac{0{,}15\,\mathrm{N} - 0{,}08\,\mathrm{N}}{(0{,}15\,\mathrm{N})} \right) \left(2{,}5 \times 10^{-3} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \right)$$

$$= 1{,}17 \times 10^{-3} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

17.5 Folyadékok áramlása

A folyadékok dinamikája összetett probléma. Az alábbi leíró jellegű szakkifejezések a folyadékáramlás különleges típusainak jellemzésére használatosak:

nem stacionárius	vagy	stacionárius
összenyomható	vagy	összenyomhatatlan
súrlódásos	vagy	súrlódásmentes
örvényes	vagy	örvénymentes

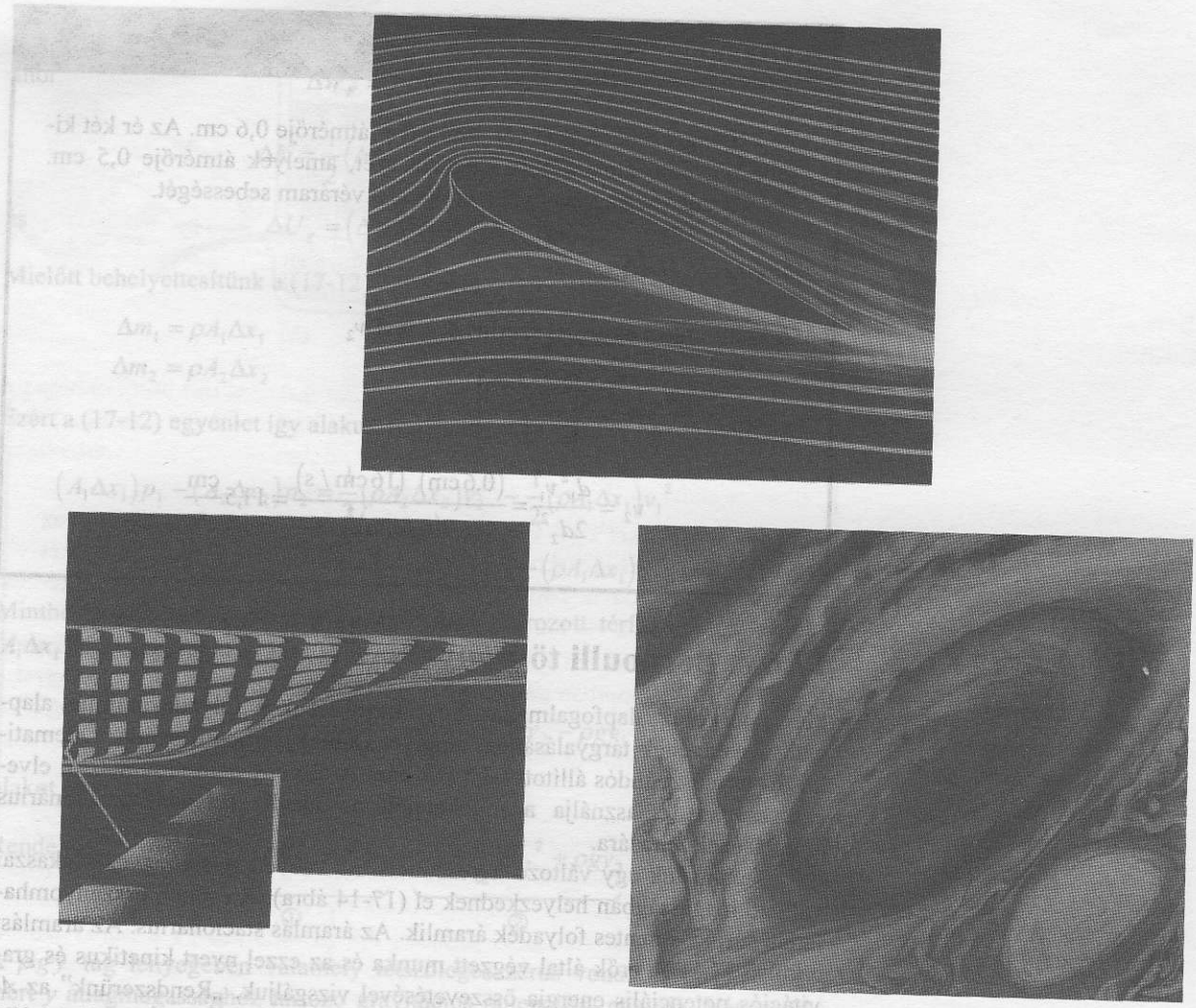
Elsősorban azokat az egyszerűbb eseteket fogjuk tárgyalni, amelyek a fenti párok jobb oldali szakkifejezéseivel kapcsolatosak.

Minthogy a folyadék anyaga nem merev, ezért a folyadék erősen turbulens mozgásra is képes, olyanra, amikor a különböző részecskék pályagörbéi annyira bonyolultak, hogy pontos matematikai leírásuk nem megoldható. **Stacionárius áramlásról** akkor beszélünk, ha az áramlási sebesség a tér minden pontjában az időben állandó. A stacionárius áramlás általában akkor lép fel, ha az áramlás örvénymentes és az áramlási sebesség viszonylag kicsiny.

A folyadékok áramlásának leírására használjuk az **áramvonal** fogalmát. Az áramvonalak stacionárius áramlás esetében kirajzolják a folyadék bármely adott részecskéjének pályagörbéjét. Az áramvonalat az a tulajdonsága határozza meg, hogy minden pontjában az érintője az adott pontbeli sebesség irányába esik.[5] Az áramvonalak láthatóvá tételére számos ügyes technikai megoldást találtak, néhányat a 17-12 ábra illusztrál. Ha az áramvonalak jól definiáltak, és a turbulencia következtében nem kuszálódnak össze, az áramlást **lamináris áramlásnak** mondjuk [a latin *lamina* („vékony lemez", „réteg") alapján].

Az áramlás örvénymentes, ha a folyadék bármely kis elemének impulzusmomentuma a tömegközéppontján átmenő bármely tengelyre zérus. Ha

[5] Nem stacionárius áramláskor a sebesség változik az idővel és az áramvonalak nem esnek szükségszerűen egybe a folyadékrészecskék pályagörbéivel.



17-12 ábra.
Néhány, az áramlást láthatóvá tevő módszer.

örvények, forgók vannak jelen, az áramlás *örvényes*. Az ilyen bonyolult esetekkel nem foglalkozunk.

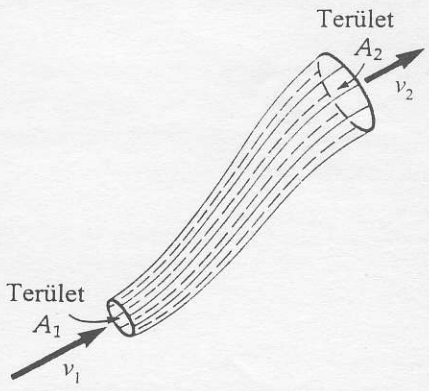
Egy áramvonal nyaláb *áramfonalat* képez, (17-13 ábra). A fonal külső határának áramvonalai egyfajta „csövet" alkotnak (*áramcső*), mert lamináris áramlás esetében egyetlen belső áramvonal sem metszi a határt képező áramvonalakat. Az áramcső A_1 keresztmetszetű egyik végén belépő áramvonalaknak az A_2 keresztmetszetű másik végén mind ki kell lépniük.

Ha a folyadék összenyomhatatlan, ρ sűrűsége mindenütt állandó. Így az áramcső egyik végén egységnyi idő alatt belépő folyadéktérfogatnak egyenlőnek kell lennie a másik végén egységnyi idő alatt kilépő folyadéktérfogattal. A Δt idő alatt belépő folyadék az A_1 keresztmetszetet $v_1\Delta t$ távolsággal tolja el, tehát a belépő folyadékmennyiség térfogata $A_1v_1\Delta t$. Hasonlóképpen, a cső másik végén Δt idő alatt $A_2v_2\Delta t$ térfogat lép ki. A két térfogatot egyenlővé téve, $A_1v_1\Delta t=A_2v_2\Delta t$, és Δt -vel osztva megkapjuk a *kontinuitási egyenletet*:

Kontinuitási egyenlet

$$A_1v_1 = A_2v_2 \qquad \textbf{(17-11)}$$

Az egyenlet mutatja, hogy a sebesség ott nagyobb, ahol a keresztmetszet kisebb.



17-13 ábra.
Az áramlási cső a belsejében áramló folyadékkal. Összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásakor a beáramló folyadékmennyiség egyenlő a kiáramló folyadékmennyiséggel. Matematikailag ezt a jelenséget az $A_1v_1=A_2v_2$ *kontinuitási egyenlet* írja le.

17-3 PÉLDA

Egy 16 cm/s sebességgel vért szállító ér átmérője 0,6 cm. Az ér két kisebb, egyenlő átmérőjű érré ágazik szét, amelyek átmérője 0,5 cm. Határozzuk meg a vékonyabb erekben a véráram sebességét.

MEGOLDÁS

A kontinuitási egyenlet szerint $A_1 v_1 = A_2 v_2$

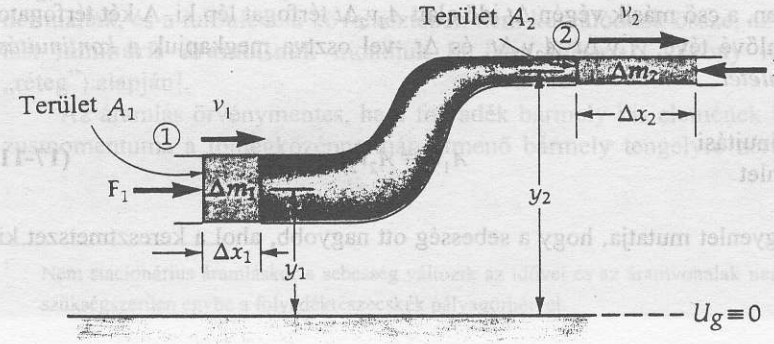
$$\frac{\pi d_1^2 v_1}{4} = 2\left[\frac{\pi d_2^2 v_2}{4}\right]$$

$$v_2 = \frac{d_1^2 v_1}{2 d_2^2} = \frac{(0{,}6\,\text{cm})^2 (16\,\text{cm/s})}{2(0{,}5\,\text{cm})^2} = 11{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

17.6 A Bernoulli törvény

Megismerve az alapfogalmakat, hozzákezdhetünk a folyadékáramlás alapvető törvényének tárgyalásához, amelyet Daniel Bernoulli svájci matematikus és természettudós állított fel 1738-ban. A törvény nem tartalmaz új elveket, csupán felhasználja a munkatételt az ideális folyadék stacionárius áramlásának leírására.

Tekintsünk egy változó keresztmetszetű csövet. A cső egyes szakaszai változó magasságban helyezkednek el (17-14 ábra). A csőben összenyomhatatlan súrlódásmentes folyadék áramlik. Az áramlás stacionárius. Az áramlást a külső $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erők által végzett munka és az ezzel nyert kinetikus és gravitációs potenciális energia összevetésével vizsgáljuk. „Rendszerünk" az A_1 és az A_2 területű keresztmetszetekkel határolt csőszakaszban lévő folyadék. Az összes munka- és energiaátvitel csupán a cső végében lévő Δm_1 és Δm_2 elemi tömegekre vonatkozik, a közbülső folyadék állapota és energiája, ha az áramlás stacionárius, azonos marad. A Δt időtartam alatt a külső F_1 erő Δx_1 távolságnyira mozdul el, és a rendszeren $F_1 \Delta x_1$ munkát végez. Ennek hatására a Δm_1 tömeg magasabb y_2 szintre kerül, ahol a (Δm_1-gyel egyenlő) Δm_2 tömeg v_2 sebességgel mozog. Ezen a magasabb szinten az F_2 külső erő Δx_2 elmozdulással $-F_2 \Delta x_2$ *negatív* munkát végez. (Ez a munka azért negatív, mert az erő és az elmozdulás iránya ellentétes.) A bekövetkezett változások analizálását a munkatétel (6-22) egyenlettel megadott egyik változatának felírásával kezdjük:



17-14 ábra.
A vázlat azt az általános esetet mutatja be, amidőn a változó keresztmetszetű és szakaszonként különböző magasságú csőben örvénymentesen összenyomhatatlan, súrlódásmentes folyadék áramlik. Bernoulli törvénye az energiamegmaradásnak a megfogalmazása erre az esetre.

$$\Delta W_F = \Delta K + \Delta U_g \qquad \textbf{(17-12)}$$

ahol $\Delta W_F = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2$

$$\Delta K = \frac{1}{2}(\Delta m_2) v_2^{\,2} - \frac{1}{2}(\Delta m_1) v_1^{\,2}$$

és $\Delta U_g = (\Delta m_2) g y_2 - (\Delta m_1) g y_1$

Mielőtt behelyettesítünk a (17-12) egyenletbe, figyelembe vesszük, hogy

$$\Delta m_1 = \rho A_1 \Delta x_1 \qquad \text{és} \qquad F_1 = p_1 A_1$$
$$\Delta m_2 = \rho A_2 \Delta x_2 \qquad\qquad F_2 = p_2 A_2$$

Ezért a (17-12) egyenlet így alakul:

$$(A_1 \Delta x_1) p_1 - (A_2 \Delta x_2) p_2 = \frac{1}{2}(\rho A_2 \Delta x_2) v_2^{\,2} - \frac{1}{2}(\rho A_1 \Delta x_1) v_1^{\,2}$$
$$+ (\rho A_2 \Delta x_2) g y_2 - (\rho A_1 \Delta x_1) g y_1 \qquad \textbf{(17-13)}$$

Minthogy a folyadék összenyomhatatlan, a satírozott térfogatok egyenlők: $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$, tehát a (17-13) egyenlet a

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2} - \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

alakot ölti.

Rendezve:

$$\underbrace{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g y_1}_{①} = \underbrace{p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2} + \rho g y_2}_{②} \qquad \textbf{(17-14)}$$

A $\rho g y$ tag lényegében valamely tetszőleges zérus vonatkoztatási szinttől mért y átlagmagassághoz tartozó gravitációs potenciális energia. Végezetül, minthogy az ① és a ② jelölés *bármely* két helyre vonatkozhat, ezért az indexelést elhagyjuk, és kimondjuk:

Összenyomhatatlan súrlódásmentes folyadék stacionárius áramlására

Bernoulli törvénye

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \textit{állandó} \qquad \textbf{(17-15)}$$

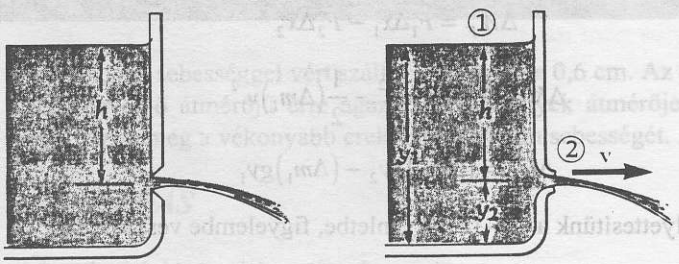
valamely áramfonal bármely pontjára érvényes.

Bernoulli törvénye könnyen megjegyezhető, ha az egyes tagjaiban felismerjük *az egységnyi térfogaton végzett munkát* (amit a környező folyadék végez), *az egységnyi térfogat kinetikus energiáját*, illetve *az egységnyi térfogat potenciális energiáját*. Ilyenformán a Bernoulli törvény az áramló folyadékra fogalmazza meg az energiamegmaradás törvényét.

Hangsúlyoznunk kell, hogy a Bernoulli törvényt erősen idealizált esetre vezettük le. A gyakorlatban a folyadékok viszkozitása, a turbulencia és a gázok összenyomhatósága energiaveszteséggel jár, ez bonyolítja a vizsgálatot. Így Bernoulli törvényének numerikus következtetései egy nagyon körülhatárolt értéktartományon kívül már nem érvényesek.

17-4 PÉLDA

A Bernoulli törvényt felhasználva határozzuk meg egy nagyméretű tartály vízszintje alatt h mélységben elhelyezett kisméretű, csőalakú, vízszintes nyíláson (fúvóka) kiömlő folyadék v kifolyási sebességét.



17-15 ábra.
A 17-3 példához.

MEGOLDÁS

A körülményeket a 17-15b ábra mutatja be. A felszínen lévő ① és az alsó nyílás közvetlen közelében lévő ② jelű pontot vizsgáljuk. A két pontot áramvonalak kötik össze. Tekintve, hogy a tartály nagy, feltételezzük, hogy a víz kiömlése során az y_1 távolság számottevően nem változik, és ezért az ① helyen a sebesség gyakorlatilag zérus. A nyomás mindkét pontban az atmoszférikus nyomással egyenlő, ezért számításaink egyszerűsítésére *műszer-nyomást* használunk. Az $y = 0$ értéket a tartály aljához rendelve a következőket írhatjuk:

$$\overbrace{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1}^{①} = \overbrace{p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2}^{②}$$

$$0 \quad + \quad 0 \quad + \rho g y_1 = \quad 0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$\text{Minthogy } (y_1 - y_2) = h, \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

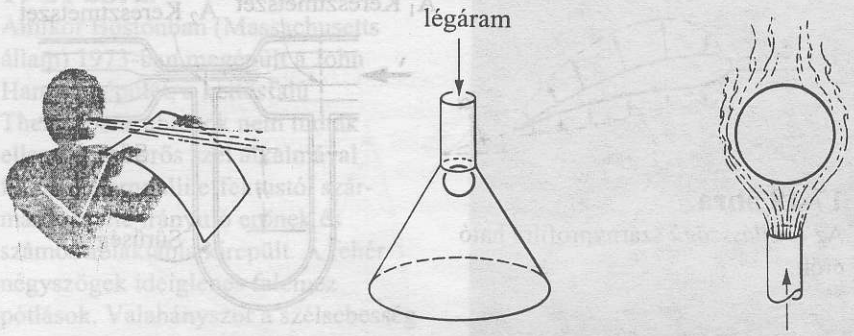
Az eredmény **Torricelli törvény** néven ismert. Kimondja, hogy nyitott tartályból a folyadék szintje alatti h mélységben a kiömlési sebesség egyenlő azzal a sebességgel, amelyre egy test h magasságból szabadon esve felgyorsulna.

Érdekes jelenség áll elő, ha a nyílás – mint a 17-15a ábrán – éles szélű és kör alakú. A folyadék a nyílás után egy rövid távolságon tovább gyorsul, íly módon a kilövellő sugár keresztmetszete szűkül (idézzük fel a kontinuitási egyenletet). A kilövellő sugár jellegzetes, *vena contracta* (szűkített ér) néven ismert alakot vesz fel. Emiatt a sugár úgy néz ki, mintha kisebb átmérőjű vízszintes fúvókából eredne (17-15b ábra). A Torricelli törvény a kontrakció beállása után érvényes.

17.7 Példák a Bernoulli effektusra

Azt a tényt, hogy *a nyomás ott kisebb, ahol a sebesség nagyobb*, Bernoulli effektusnak nevezzük. Ez az effektus számos példán bemutatható, és ezek közt több mulatságos eset is előfordul (lásd a 17-16 ábrát).

A pörgő labda viszkózus anyagban (pl. levegőben) végbemenő mozgása számos különböző, de a Bernoulli effektussal kapcsolatos tényezőtől függ. A pörgetve eldobott labda a szokásos parabola-pályától eltérő, görbevonalú pályán mozog. A jelenséget célszerű olyan koordinátarendszerben vizsgálni,



A papírlap fölött fújt levegő hatására a lap felemelkedik.

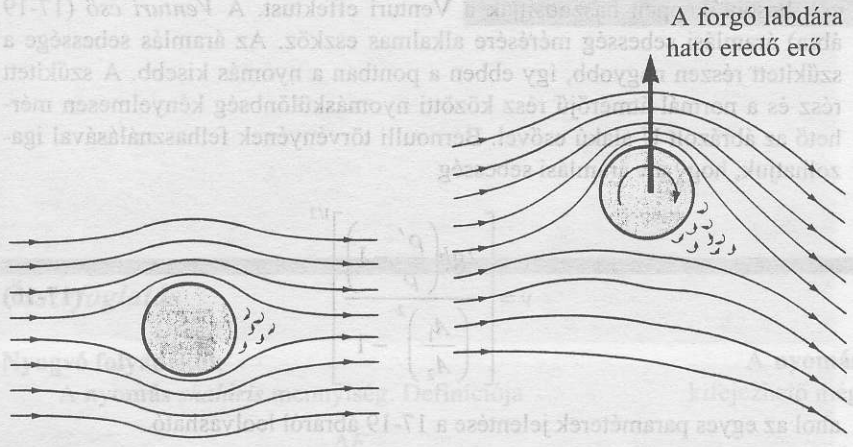
A ping-pong labda a lefordított tölcsérben marad, ha levegőt fújunk a tölcsér szárán lefelé.

A függőleges légáram lebegésben tartja a nagy labdát, a légáram közepén. Ha a labda az egyik oldalra kitér, a Bernoulli effektus visszahúzza.

17-16 ábra.
Példák a Bernoulli effektusra.

amelyben a labda tömegközéppontja nyugalomban van. (17-17 ábra.) Ha a labda felülete érdesített, akkor pörgés közben sokkal eredményesebben képes a levegőt egyik oldalán mintegy „magával vonszolni". Hasonlóképpen a golflabda gödröcskéi lehetővé teszik, hogy a labda felületéhez levegőhatárréteg tapadjon, és íly módon növekedjék az emelkedés magassága, ami a Bernoulli hatás és a légáramlás elterelése révén elérhető.

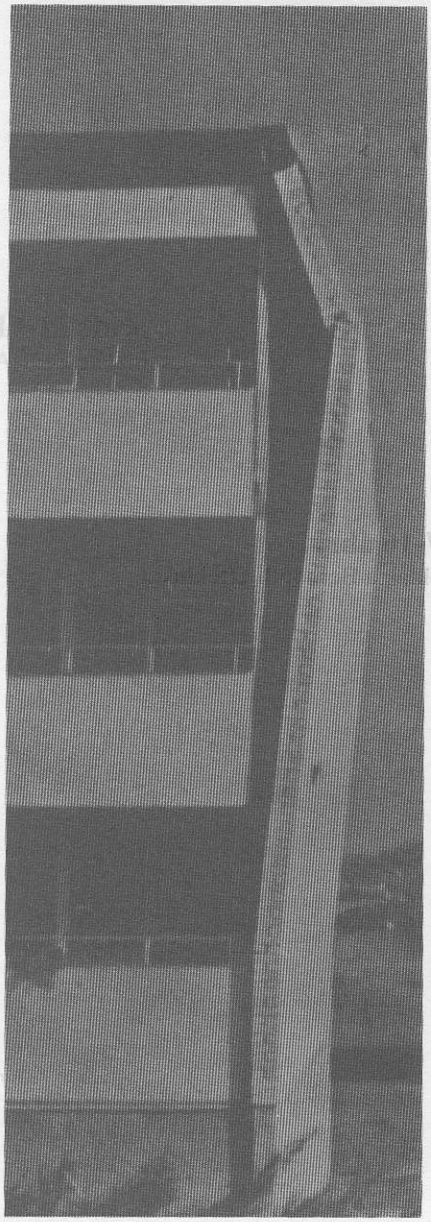
A repülőgépszárnyra ható aerodinamikai emelőerő is számos hatás következménye. A 17-18 ábrán bemutatott szárny kialakítása olyan, hogy a szárny felső felülete fölött a légáramlás sebessége nagyobb, mint az alsó felület alatt, ezáltal a szárnyra a Bernoulli hatás következtében felfelé irányuló erő hat. (Lásd a 17-12a ábrát is.) A jelenség vizsgálatát azonban bonyolultabbá teszi a levegő nagymértékű kompresszibilitása és a turbulencia. Tová-



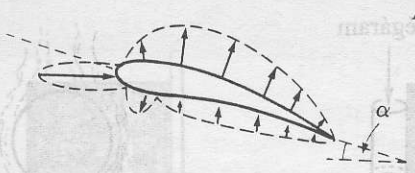
(a) Ha a labda nem pörög, a labda környezetében az áramvonalak szimmetrikusak. A nagy sebesség következtében a labda mögötti tartományban szimmetrikus turbulens örvények alakulnak ki.

(b) Ha a labda pörög, akkor a levegő viszkozitása miatt több levegőt ragad magával fölül, mint alul. Következésképpen a levegő sebessége a labda fölött nagyobb, emiatt ott csökken a nyomás. Továbbá a labda lefelé téríti a légáramot, így ez a légáram felfelé mutató reakcióerőt gyakorol a labdára .

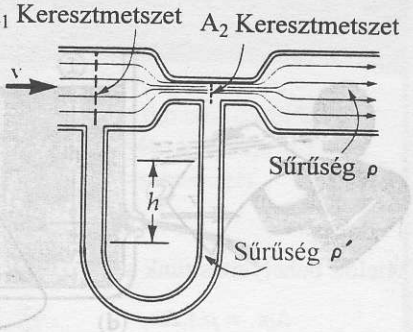
17-17 ábra.
A labda a levegőben balra mozog. A rajzok a labda tömegközéppontjához rögzített vonatkoztatási rendszerben készültek; tehát a levegő balról jobbra áramlik a labda mellett.



17-20 ábra.
Ez a külső téglafal a Bernoulli hatás következtében hajolt ki, amikor a fallal párhuzamos szél hatására helyi nyomáskülönbség keletkezett.



17-18 ábra.
Az α *állásszögű* szárnyprofilra ható erők.



17-19 ábra.
A csövön átáramló folyadék sebességének mérésére szolgáló Venturi-cső. Az U alakú csőben higany (vagy más folyadék) van. A higanyszint-különbség a csőben áramló folyadék áramlási sebességének függvénye. Ahol a cső keskenyebb, ott az áramlási sebesség nagyobb, és ez okozza a lecsökkent nyomást.

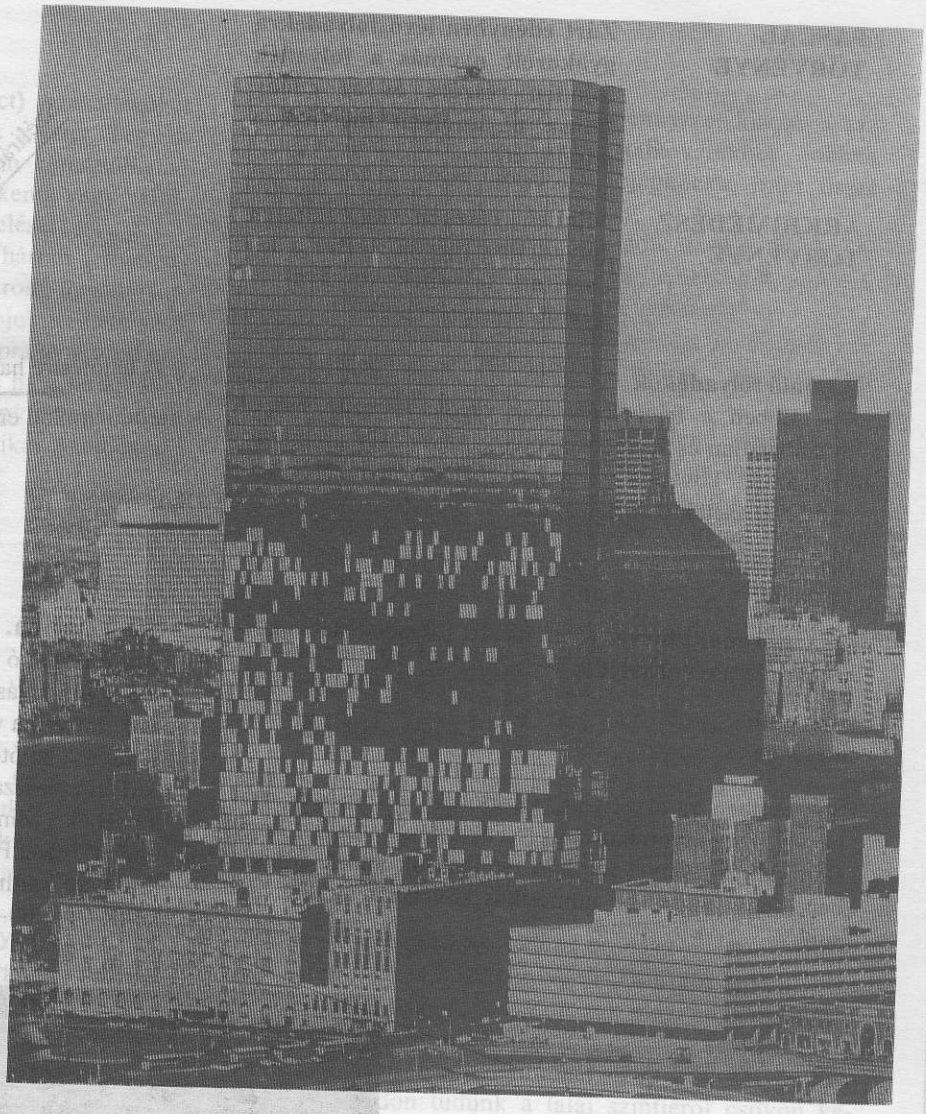
bi hatásként jön szóba a szárnyprofil „állásszöge": a szárnyprofil középvonala és a légáram iránya által bezárt α szög. Az állásszög következtében az alsó felület lefelé téríti a légáramot, ezáltal a szárnyra további felfelé irányuló reakcióerő hat.

Annak a jelenségnek, hogy a csővezeték szűkülő keresztmetszetén csökken a nyomás, **Venturi effektus** a neve. (A turbulencia elkerülésére a csőnek meghatározott módon kell elvékonyodnia.) Az effektust felhasználják benzingőzöknek a gépkocsimotor szívócsövébe juttatására. A porlasztó a rá csatlakozó Venturi torokban kisnyomású tartományt állít elő, amely egy kicsiny fúvókán át benzint szív a torok légáramába. A porlasztók és permetezők hasonlóképpen hasznosítják a Venturi effektust. A *Venturi cső* (17-19 ábra) áramlási sebesség mérésére alkalmas eszköz. Az áramlás sebessége a szűkített részen nagyobb, így ebben a pontban a nyomás kisebb. A szűkített rész és a normál-átmérőjű rész közötti nyomáskülönbség kényelmesen mérhető az ábrázolt U alakú csővel. Bernoulli törvényének felhasználásával igazolhatjuk, hogy a v áramlási sebesség

$$v = \left[\frac{2gh\left(\frac{\rho'}{\rho} - 1\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1} \right]^{1/2} \qquad \textbf{(17-16)}$$

ahol az egyes paraméterek jelentése a 17-19 ábráról leolvasható.

17-21 ábra.
Amikor Bostonban (Massachusetts állam) 1973-ban megépült a John Hancock épület, a kettősfalú Thermopane ablakok nem tudtak ellenállni az erős szél alkalmával fellépő, Bernoulli effektustól származó, kifelé irányuló erőnek és számos ablaktábla kirepült. A fehér négyszögek ideiglenes falemez pótlások. Valahányszor a szélsebesség meghaladta az óránkénti 45 mérföldet (kb. 80 km/óra), a környék utcáit le kellett zárni, hogy a járókelőket a lehulló üvegcserepektől megvédjék, és az épület beköltözését több mint egy évvel el kellett halasztani. Végül is mind a 10348 ablakot, biztonságosan rögzített keretbe foglalt 13 mm vastag hőkezelt üvegből készült, egyedileg legyártott ablaktáblákkal pótolták.



Összefoglalás

Nyugvó folyadékok

A **nyomás** *skaláris* mennyiség. Definíciója

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Nyugvó folyadékok bármely velük érintkező felületre merőleges irányú erőt fejtenek ki.

A folyadékfelszín alatt h mélységben a p nyomás

$$p = p_0 + \rho g h$$

ahol p_0 a nyomás a folyadék felszínén, ρ a folyadék sűrűsége (tömeg/térfogat) és h a folyadékfelszíntől mért (pozitív számmal kifejezett) távolság.

A **nyomás egysége az atmoszféra** (1 atm), amely kifejezhető még az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} 1\ \text{atm} &= 1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa} \\ &= 1{,}013 \times 10^5\ \text{N/m}^2 \\ &= 1013\ \text{millibar} \\ &= 76{,}0\ \text{Hg cm}. \end{aligned}$$

Néhány esetben célszerű **műszer-nyomással** számolni, vagyis olyan nyomásskálával, amelynek zéruspontja az 1 atm nyomásnál van kialakítva.

Az alábbi két törvény a nyugvó folyadékokra vonatkozik:

PASCAL TÖRVÉNYE **Zárt edényben lévő folyadékra gyakorolt nyomás a folyadék minden részére és az edény falára ugyanolyan mértékben adódik át.**

ARKHIMÉDÉSZ TÖRVÉNYE **Minden, részben vagy teljesen folyadékba merülő testre a kiszorított folyadék súlyával egyenlő felhajtóerő hat.**

Áramló folyadékok

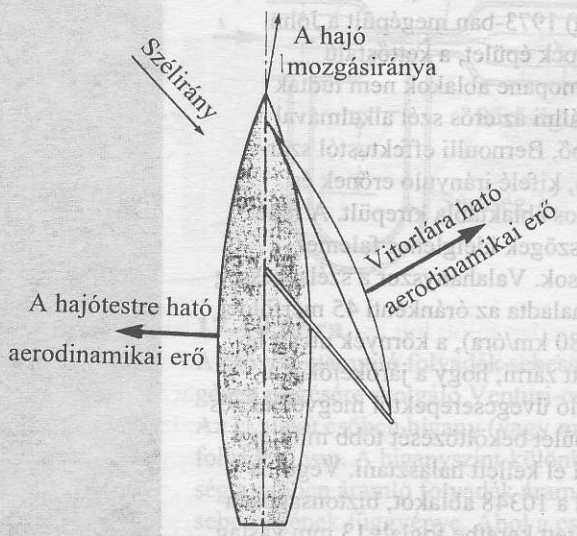
Ebben a fejezetben csak *ideális* – azaz összenyomhatatlan és súrlódásmentes – *folyadékok* áramlását vizsgáljuk. Továbbá vizsgálatainkat örvénymentes stacionárius esetekre korlátozzuk.

Kontinuitási egyenlet $$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

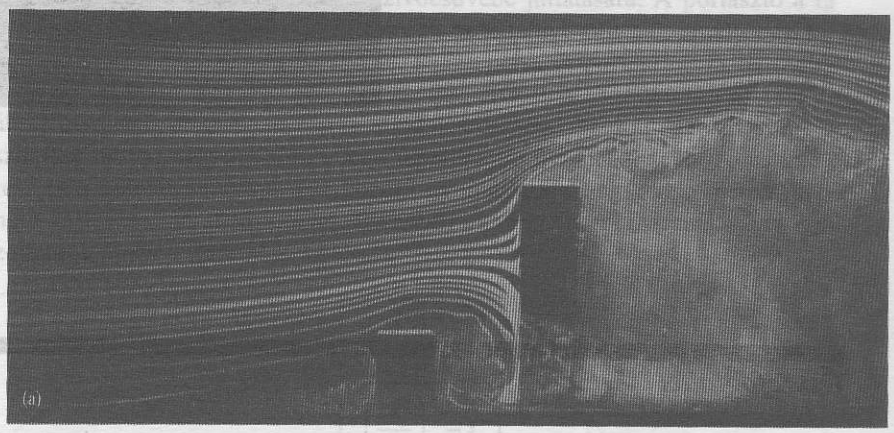
Bernoulli törvénye az ideális folyadék stacionárius áramlására vonatkozik

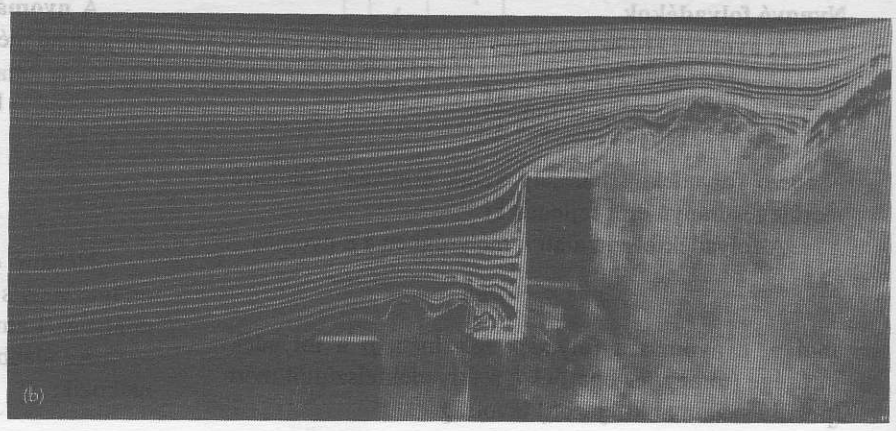
Bernoulli törvénye $$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{állandó}.$$

Sok esetben az örvénylés, a súrlódási veszteségek és a gázok összenyomhatósága szükségessé teszi, hogy Bernoulli törvényét jócskán módosítsuk annak érdekében, hogy pontosabb numerikus következtetésekre jussunk.



17-22 ábra.
A vitorláshajó részben szél ellen is tud vitorlázni. A Bernoulli hatás következtében a hajót a vitorlára ható erő „húzza" a vízen. Ugyanilyen Bernoulli hatást fejt ki a víz is a hajótörzsre, ami az ábrán látható aerodinamikai erőt okozza. (Az ábrából bizonyos fékezőerők hiányoznak.) Mindezen erők eredője ellenszél irányába mutat. (Lásd H. C. Herreshoff és J. N. Newman, „The Study of Sailing Yachts", *Scientific American* (Aug. 1966), pp. 60-68.)

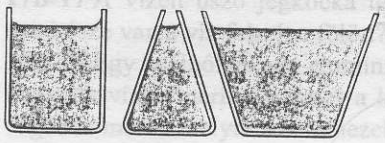




17-23 ábra.
Szélcsatorna kísérletben a két épületmodell körül kialakuló áramvonalakat a csatorna elején beengedett füstsugarak teszik láthatóvá. Az áramlás nagyon turbulens. Az (a) képen az épületek között a lefelé térített áramvonalak jól kialakult örvényt hoznak létre, aminek következtében a járdaszinten zavaróan nagy szél keletkezik. A (b) képen a nagyobb épület tervének módosítása kiküszöböli az örvénylést.

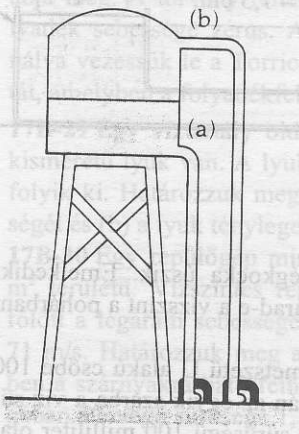
Kérdések

1. A római vízvezetékek (aquaduct) szakadékokat áthidalva csatornákban szállították a vizet. Tegyük fel, hogy egy csatornahídon lassan keresztülhalad egy megterhelt ladik. Növeli, csökkenti, vagy változatlanul hagyja-e a ladik a híd terhelését?
2. Tekintsük a 17-24 ábrán látható három (elhanyagolható tömegű) tartályt! Mindhárom ugyanolyan magasan van vízzel töltve. Alaplapjuk területe azonos, ezért a folyadék által az alaplapra gyakorolt erő mindhárom tartályban egyenlő. De ha a tartályokat mérlegre tesszük, súlyuk nem egyforma. Adjuk magyarázatát ennek a „hidrosztatikai paradoxon" néven ismert jelenségnek!



17-24 ábra.
A 2. kérdéshez.

3. Higanytartály felszínén úszik egy tárgy. Most a tartályt egy üvegharanggal leborítjuk és kiszivatytyúzzuk alóla a levegőt. Mi történik: a tárgy kissé lejjebb süllyed, feljebb emelkedik, vagy bemerülése változatlan marad?
4. Két különböző sűrűségű tárgyat egyenlőkarú mérleg serpenyőibe teszünk. A mérleg azt mutatja, hogy tömegük egyenlő. A mérleget most légmentesen záró kamrába tesszük, ahonnan a levegőt kiszivattyúzzuk. A mérleg most azt mutatja, hogy a két tárgy tömege nem egyenlő. Melyik tárgy tömege nagyobb?
5. Töltsünk meg egy poharat színültig vízzel. Helyezzünk a pohárra egy kartonpapír darabot, és kezünket rajta tartva fordítsuk meg a poharat. Vegyük el kezünket a papírról! A víz nem folyik ki. Magyarázzuk meg a jelenséget!
6. Magyarázzuk meg, hogy a Föld légkörében felszálló héliummal töltött léggömb emelkedési magasságának miért van maximuma! Mely esetben lenne a magasság maximuma nagyobb: ha a ballon térfogata állandó maradna, vagy ha a ballon térfogata a magassággal növekedne (a bezárt gázmennyiség megtartása mellett).
7. A horgászok néha olyan zsinórt használnak, amelyik nem bírja el a horogra akadt hal súlyát. Az ügyes horgász mégis ki tudja fogni a halat anélkül, hogy a zsinór elszakadna. Adjunk rá magyarázatot!
8. Jégkocka úszik egy pohár vízben, majd elolvad. Mi történik a vízszinttel: emelkedik, süllyed, vagy ugyanaz marad? Mi történne, ha a jégkockában kis légbuborék lenne? Ha a jégkockában kis kavics lenne? Mi történne, ha a víz és a pohár kezdetben szobahőmérsékleten (nem pedig 0 °C -on) lenne?
9. Az alkohol sűrűsége valamennyivel kisebb a víz sűrűségénél. Vajon egy italkeverékben jobban vagy kevésbé merül be a jégkocka, mint tiszta vízben?
10. Egy ócskavassal megrakott ladik úszik a tavon. Ha az ócskavasat a vízbe szórják, emelkedik, süllyed, vagy változatlan marad-e a tó vízszintje?
11. Két papírlap egymástól néhány cm távolságra van felfüggesztve. Ha közéjük fújunk, egymás felé mozdulnak. Miért?
12. Két egymással párhuzamosan haladó gépkocsi vezetői tapasztalják, hogy egymás felé húzó erő hat rájuk. A Bernoulli elv alkalmazásával adjuk meg a jelenség magyarázatát! (Hasonló hatás miatt, ha nem elég óvatosak, akkor két egymás mellett haladó nagy hajó is bajba kerülhet.)
13. Egy uszoda vizén egy csónak úszik. A csónak fenekéből kihúznak egy dugót. Fejtsük ki, milyen változás következik be az uszoda vízszintjében, amikor (a) a víz kezd a csónakba ömleni (b) és amikor a csónak már lesüllyedt az uszoda fenekére.
14. Néha a nagy jéghegyek a közelben tartózkodó hajókat veszélyeztetve feldőlnek. Minthogy a jéghegy 89%-a van a víz alatt, hogyan lehetséges, hogy ekkora vízalatti jégtömeggel ez megtörténhet?
15. A Föld egyenlítői kidomborodása miatt a Mississippi forrása közelebb van a Föld középpontjához, mint a torkolata. Magyarázzuk meg, hogyan folyhat a folyó „hegynek felfelé"?
16. Egy magas toronyban elhelyezett víztartályba kétféle módon tudunk a talaj szintjéről csövön keresztül vizet szivattyúzni: (a) a tartály aljába kötött csövön át, vagy (b) a tartály tetején bekötött csövön keresztül a 17-25 ábra szerint. Melyik módszer igényel kisebb teljesítményt a szivattyú üzemeltetéséhez?



17-25 ábra.
A 16. kérdéshez.

Feladatok

17.2 A sűrűség
17.3 A nyomás

17B-1 1983-ban Az Egyesült Államok a tiszta rézből vert cent helyett rézbevonatú cink érmét kezdett kibocsátani. A régi réz cent tömege 3,083 g, az újé 2,517 g. Számítsuk ki, hány (térfogat)százalék cink van az új centben. A réz sűrűsége 8,960 g/cm^3, a cinké 7,133 g/cm^3. A régi és az új érme térfogata egyenlő.

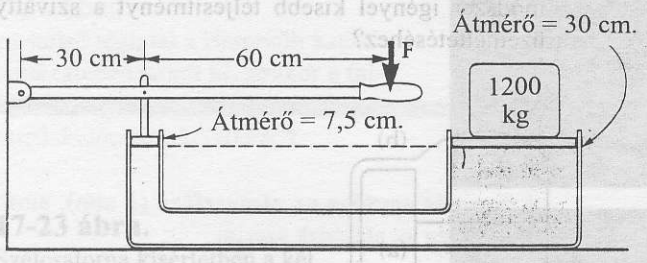
17B-2 Légmentesen zárt teremben a levegő nyomása 0,4%-kal kisebb a termen kívül lévő levegő átlagos atmoszférikus nyomásánál. A teremből egy légmentesen záró 2,20 m magas és 1,20 m széles ajtó nyílik kifelé. Határozzuk meg azt a legkisebb erőt, amellyel az ajtó oldalához elhelyezett fogantyúra kell hatni, hogy az ajtót ki lehessen nyitni! (Útmutatás: tegyük fel, hogy a légnyomástól származó eredő erő az ajtó középpontjában támad.)

17B-3 Mély víztartály alján szögletes doboz fekszik. Mutassuk meg, hogy a doboz egyik függőleges oldalára ható erők eredője az oldal területének és az oldal középpontjában lévő nyomásnak szorzatával egyenlő!

17B-4 Egy 1,8 m ×3,6 m alapú tartály 2,4 m magasságban vizet tartalmaz. A légnyomás elhanyagolásával határozzuk meg (a) a fenékre ható erőt és (b) az 1,8 m ×2,4 m méretű oldalfalra (kizárólag a víztől) ható erőt!

17.4 Pascal törvénye és az Arkhimédész törvény

17A-5 A 17-26 ábrán a hidraulikus emelő dugattyúi körlap alapúak, és azonos magasságban helyezkednek el. Határozzuk meg azt az F erőt, amely az ábrázolt módon tartani tudja az 1200 kg-os terhet!



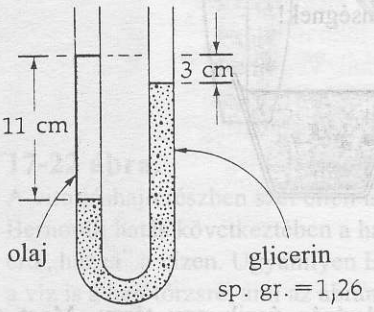
17-26 ábra.
A 17A-5 feladathoz.

17A-6 Egy pohár vízben jégkocka úszik. Emelkedik, süllyed, vagy változatlan marad-e a vízszint a pohárban, amikor a jégkocka elolvad?

17A-7 Egy 1,0 cm^2 keresztmetszetű U alakú csőbe 100 milliliter vizet öntünk. Ezután az egyik szárba a víz sűrűségének 80%-val egyenlő sűrűségű 100 milliliter olajat töltünk úgy, hogy az olaj a vízen ússzon. Határozzuk meg az U cső két szárában a folyadékok szintkülönbségét.

17A-8 Határozzuk meg az olaj relatív sűrűségét a 17-27 ábra adataival!

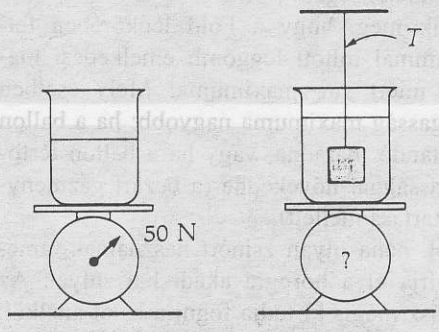
17B-9 Egy tárgy súlya a levegőben 15 N. Vízbe meritve ugyanez a tárgy 12 N súlyú. Ha másik folyadékba merítjük, 13 N a súlya. Határozzuk meg (a) a tárgy sűrűségét és (b) a másik folyadék sűrűségét.



17-27 ábra.
A 17A-8 feladathoz.

17A-10 Egy halász a tó közepére evez, és horgonyt vet. A horgony a tó fenekére süllyed. Ennek következtében vajon emelkedik, változatlan marad, vagy süllyed a tó szintje? A választ indokoljuk meg.

17B-11 Egy részben vízzel töltött tartályt mérlegre helyezünk, és súlyát 50N-nak találjuk. Ezután egy 10 cm élhosszúságú gránitkockát lógatunk a vízbe a teljes bemerülésig úgy, hogy ne érjen hozzá sem az edény falához, sem az aljához. (17-28 ábra.) A bemerülő kockát tartó fonalat feszítő T erő 16,7 N. (a) Határozzuk meg a gránit sűrűségét. (b) Határozzuk meg, mekkora súlyt jelez a mérleg az adott feltételek mellett.



17-28 ábra.
A 17B-11 feladathoz.

17B-12 Hivatkozunk a 17-2 példára. Vezessünk le a folyadék sűrűségére olyan kifejezést, amelyben a levegő felhajtóereje is szerepel.

17B-13 Ahhoz, hogy egy fahasábot teljesen víz alatt tartsunk, a hasáb levegőben mért súlyának egy nyolcad részével egyenlő erő szükséges. Határozzuk meg a fahasáb fajsúlyát!

17B-14 Egy ping-pong labda átlagos sűrűsége 0,084 g/cm^3, és átmérője 3,8 cm. Mekkora erővel lehet teljesen víz alatt tartani?

17B-15 Egy 0,20 fajsúlyú, m tömegű parafadugót egy víztartály aljához erősített cérnaszál tart teljesen a víz alatt. Határozzuk meg a cérnát feszítő T erőt a dugó mg súlyának függvényében!

17B-16 Egy l élhosszúságú kocka teljesen bemerül a ρ sűrűségű folyadékba. A kocka felső lapja vízszintes helyzetű, és D mélységben van a folyadék felszíne alatt. (a) Számítsuk ki a kocka minden egyes lapjára ható erőt. (b) Határozzuk meg a kockára ható erők eredőjét!

17B-17 A vízen úszó jégkocka teljes térfogatának hányadrésze van a víz felszíne fölött?

17B-18 Egy acélból és egy alumíniumból készült tömör tárgynak vízbe merítve azonos a látszólagos súlya. Levegőben mérve melyikük a nehezebb (ha egyáltalán van súlykülönbség közöttük)?

17.5 Folyadékok áramlása

17A-19 Egy 4 cm belső átmérőjű vízszintes csőben víz áramlik. A cső 1,5 cm belső átmérőre szűkül össze, ahol a víz átlagos sebessége 10 m/s. Határozzuk meg a cső vastagabb részén belépő vízáram időegységenkénti térfogatát.

17A-20 Egy r sugarú ér v_0 átlagos sebességgel vért szállít. Három érre osztódik, mindegyik sugara $r/3$. Határozzuk meg mindegyik vékonyabb érben az átlagos sebességet!

17A-21 4 cm belső átmérőjű csőben 10 cm/s sebességgel víz áramlik. A cső egy 2 cm belső átmérőjű csőhöz csatlakozik. Mekkora az áramlás sebessége a vékonyabb csőben?

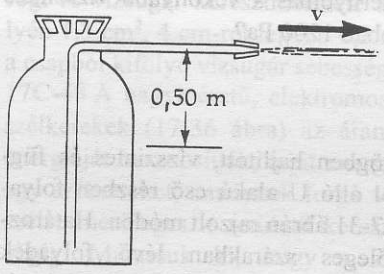
17A-22 Egy 7,5 cm átmérőjű tűzoltó tömlőben a vízáram sebessége 2,4 m/s. (a) Hány liter vizet lövell ki a csővég másodpercenként? (b) A csővég átmérője 3,5 cm-re csökken, milyen nagy a kilövellő víz sebessége?

17.6 A Bernoulli törvény

17B-23 Egy 900 kg/m^3 sűrűségű olajat szállító csővezetékben a műszernyomás 4×10^{-4} N/m^2, és az áramlás sebessége 1,2 m/s. A cső keresztmetszete 8 cm^2. A cső egy másik része 20 cm-rel mélyebben fekszik, és keresztmetszete 6 cm^2. A súrlódási jelenséget elhanyagolva határozzuk meg ez utóbbi helyen a műszernyomást.

17A-24 Vízszintes, 10 cm belső átmérőjű cső fokozatosan 5 cm belső átmérőre szűkül. A víz nyomása a vastagabb csőben 8×10^4 N/m^2, a vékonyabb csőben 6×10^4 N/m^2. Milyen sebesen áramlik a víz a csövekben?

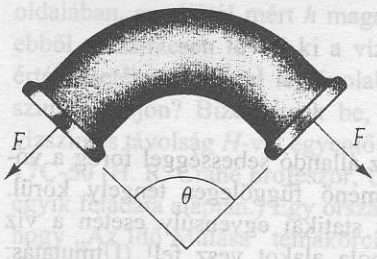
17B-25 Egy tűzoltó készülékből levegő nyomásával nyomják ki a vizet (17-29 ábra). Hány atmoszféra műszernyomás szükséges 30 m/s sebességű vízsugár kilövelléséhez, ha a vízszint 0,50 m-rel van a fúvóka alatt?



17-29 ábra.
A 17B-25 feladathoz.

17B-26 Mekkora teljesítménnyel lehet másodpercenként 50 liter vizet 1 atm nyomáskülönbséggel egy vízszintes csövön átszivattyúzni?

17B-27 Egy A keresztmetszetű cső vízszintes síkban görbül a 17-30 ábra szerint. (Az ábrán nem bemutatott) szomszédos csatlakozó csövek a peremekre egyenlő nagyságú vízszintes F erőt gyakorolnak. A folyadék sebessége v, sűrűsége ρ. Határozzuk meg az F erőt, és mutassuk meg, hogy független a θ szögtől!



17-30 ábra.
A 17B-27 feladathoz.

17B-28 A Torricelli törvény a $v=\sqrt{2gh}$ összefüggés alapján a tartályban lévő folyadék felszíne alatti h mélységben található lyukon kiömlő folyadék v sebességét adja meg. A törvény feltételezi, hogy a felszínen a folyadék sebessége zérus. A Bernoulli törvényt felhasználva vezessük le a Torricelli törvénynek azt a változatát, amelyben a folyadékfelszín v_0 sebessége is szerepel.

17B-29 Egy víztartály oldalán a vízszint alatt 3 m-rel kisméretű lyuk van. A lyukon egy óra alatt 0,17 m^3 víz folyik ki. Határozzuk meg (a) a kilépő vízsugár sebességét és (b) a lyuk tényleges átmérőjét!

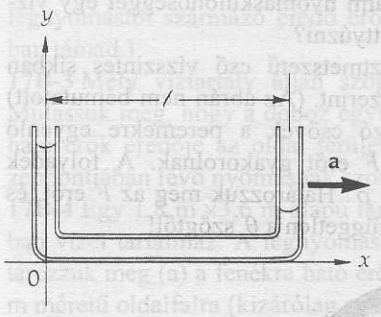
17B-30 Egy repülőgép mindkét szárnyának felülete 27 m^2 területű. Vízszintes repülés közben a felső felület fölött a légáram sebessége 89 m/s, az alsó felület alatt 71 m/s. Határozzuk meg a Bernoulli hatás következtében a szárnyakra ható felhajtóerőt! A repülés magasságában a levegő sűrűsége 1,14 kg/m^3.

17B-31 Vezessük le a (17-16) egyenletet.

17B-32 Egy 4 cm belső átmérőjű vízszintes csövön 1 m/s sebességgel víz áramlik. Ezután a csőrendszer függőleges irányú lesz és 2 m-es szakasz után 8 cm átmérőjű vízszintes csőbe torkollik. (a) Határozzuk meg a víz áramlási sebességét a vastagabb vízszintes csőben! (b) Mekkora a műszernyomás a vékonyabb vízszintes csőben, ha a vastagabban 1200 Pa?

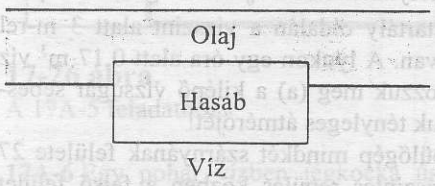
További feladatok

17C-33 Egy derékszögben hajlított, vízszintes és függőleges szakaszokból álló U alakú cső részben folyadékkal van töltve a 17-31 ábrán rajzolt módon. Határozzuk meg a függőleges szárakban lévő folyadék szintkülönbségét, ha a cső az x tengely pozitív irányában a gyorsulással mozog! (Útmutatás: vizsgáljuk a problémát gyorsuló vonatkoztatási rendszerből.)



17-31 ábra.
A 17C-33 feladathoz.

17C-34 Egy vödör víz állandó sebességgel forog a vödör középpontján átmenő függőleges tengely körül. Mutassuk meg, hogy statikai egyensúly esetén a víz felszíne forgási parabola alakot vesz fel! (Útmutatás: vizsgáljuk meg forgó vonatkoztatási rendszerben a folyadékfelszín kicsiny dm elemi tömegére ható erőket. A dm elemi tömeg gravitációs erőből és radiálisan kifelé mutató centrifugális erőből összeadódó effektív súlyának a folyadék felszínére merőlegesnek kell lennie. Ennek alapján mutassuk meg, hogy a felszínen $dx/dy = kx$, ahol k egy állandó. Ez az $y = k'x^2$ eredményre vezet, ami parabola egyenlete.)



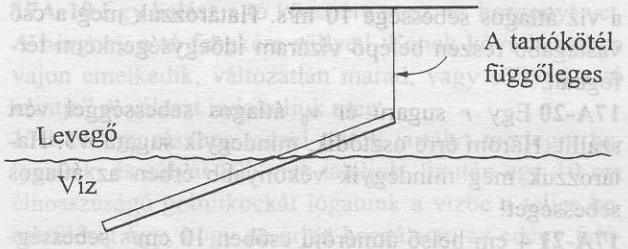
17-32 ábra.
A 17C-35 feladathoz.

17C-35 Víz felszínén vastag olajréteg terül el. (A víz fajsúlya 1,00, az olajé 0,80.) A víz és az olaj közös határfelületén homogén derékszögű hasáb úszik úgy, hogy térfogatának egy harmada az olajban van. (17-32 ábra.) Határozzuk meg a hasáb fajsúlyát!

17C-36 Egy négyszögletes tartályban 2,5 m magasan víz van. A tartály egyik oldalának szélessége 8 m. (a) Határozzuk meg, mekkora erővel nyomja a víz az oldallapot! (A légnyomástól tekintsünk el.) (b) Határozzuk meg a nyomóerő forgatónyomatékát a fenéken lévő oldalélre vonatkozóan! (Javaslat: a 17-6b ábrán a $d\mathbf{F}$ erőtől származó $d\mathbf{M}$ forgatónyomaték $d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$, ahol r a fenéktől az elemi felületig terjedő távolság. A lapra ható forgatónyomatékot az elemi felületekre ható forgatónyomatékok integrálja adja.)

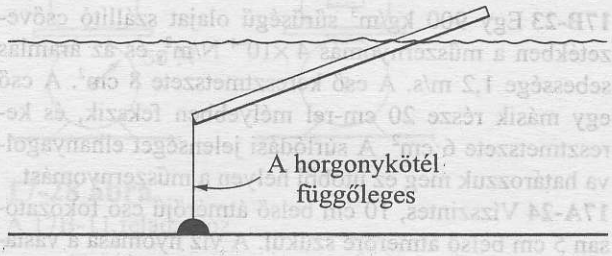
17C-37 Vékony homogén rudat egyik végén függőleges kötél tart. A rúd másik vége szabadon úszik a vízben, ahogyan a 17-33 ábra mutatja. A rúd anyagának fajsúlya 0,50. (a) Vázoljuk fel a rúdra ható erők vektorábráját! (b) A rúd hányadrésze merül a víz alá?

17C-38B Tegyük fel, hogy az előző feladatban a vízszint fokozatosan úgy változik, hogy a rúd és a vízszint által bezárt szög 10° és 80° között változik. (a) Megváltozik-e a kötelet feszítő erő, vagy állandó marad-e a rúd szögállásának változásakor? (b) Egyensúlyi feltételek mellett szükséges-e, hogy a kötél függőleges legyen, vagy állhat más szögben is? Fejtsük ki véleményünket!



17-33 ábra.
A 17B-37 és a 17B-38 feladathoz.

17C-39 Vékony homogén póznából álló bóját édesvízben úgy horgonyoztak le, hogy egyensúlyi helyzetben szöget zárjon be a felszínnel, lásd a 17-34 ábrát. A pózna anyagának fajsúlya 0,50. A pózna hányadrésze nyúlik a víz felszíne fölé?



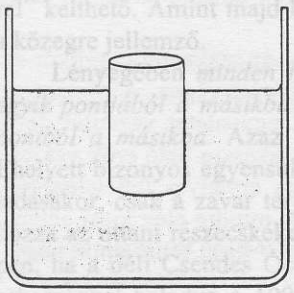
17-34 ábra.
A 17C-39 feladathoz.

17C-40 Egy 40 cm hosszú, 20 cm széles és 5 cm vastag fahasáb fajsúlya 0,70. Mekkora térfogatú ólmot (fajsúlya 11,35) kell a hasáb aljára erősíteni, hogy a vízbe süllyedve felső lapja éppen a víz felületén legyen?

17C-41 A levegő ρ sűrűsége arányos a p nyomással (azaz $\rho = kp$, ahol k állandó). Mutassuk meg, hogy a légkör nyomása a következőképpen változik a magassággal: $p = p_0 e^{-kgh}$, ahol h a p nyomású helyhez tartozó magasság. (Útmutatás: vegyük vizsgálat alá a dy vastagságú, dA területű vízszintes légrétegre ható erőket. Amint negatív y tengely irányába haladva a nyomás p-ről $p+dp$-re változik, az y koordináta változása $-dy$.)

17C-42 Egy parafadugót cérnaszál tart egy vízzel telt serleg alján. A serleget egyenlőkarú mérleg egyik serpenyőjébe helyezzük, és a mérleg másik serpenyőjébe akkora tömegű testet helyezünk, amely a mérleget kiegyensúlyozza. A cérnaszál elszakad és a dugó felszáll. Kérdés, hogy amíg a dugó felfelé száll (de még nem jut a felszínre), emelkedik vagy süllyed a serleget tartó serpenyő, vagy nyugalomban marad? Magyarázzuk meg a jelenséget!

17C-43 Egy henger alakú kanna úgy van terhelve, hogy a 17-35 ábrán látható módon függőleges helyzetben ússzon. A henger keresztmetszetének területe A, tömege m. Határozzuk meg azt a T periódusidőt, amellyel a henger a ρ sűrűségű folyadékban kis amplitúdójú rezgéseket végez! (Útmutatás: nyomjuk le a hengert egy kicsiny y távolsággal. Mekkora lesz a hengerre ható visszatérítő erő?)



17-35 ábra.
A 17C-43 feladathoz.

17C-44 1 cm^2 keresztmetszetű U alakú csőbe száz köbcentiméter higanyt öntünk. A higany mindaddig ide-oda rezeg a cső alján, amíg a statikus egyensúly be nem áll. Határozzuk meg a rezgés periódusidejét.

17C-45 Mutassuk ki, hogy ha a levegő felhajtóerejét elhanyagoljuk, akkor valamely tárgy súlyának $\Delta W/W$ relatív mérési hibája a levegő és a tárgy sűrűségének (ebben a sorrendben képzett) hányadosával egyenlő.

17C-46 Egy tóból vizet szivattyúznak fel a 32 méterrel magasabban fekvő öntöző árokba. A cső szájából a levegőbe ömlik ki a víz. A cső belső átmérője 19 cm, és vízhozama 105 m^3/h. (a) Határozzuk meg a víz áramlási sebességét a csőben. (b) Számítsuk ki azt a műszernyomást, amivel a szivattyú dolgozik. (c) Ha a szivattyú hatásfoka 80%, mennyi a felvett teljesítmény?

17C-47 A vízcsapból függőlegesen kifolyó vízsugár „beszűkül", amikor a gravitáció hatására szabadon csurog. A vízsugár keresztmetszete a csapból kilépés helyén 1,3 cm^2, 4 cm-rel lejjebb 0,3 cm^2. Határozzuk meg a csapból kifolyó vízsugár sebességét!

17C-48 A nagyméretű, elektromos energiát szolgáltató szélkerekek (17-36 ábra) az áramló levegő kinetikus energiáját hasznosítják, mint energiaforrást. Tekintsünk egy szélkereket, amelynek forgó vitorlái a v sebességű szélre merőleges A területű keresztmetszetet söpörnek végig. Mutassuk ki, hogy a szélkeréken átáramló teljesítény $=\frac{1}{2}\rho v^3 A$, ahol ρ a levegő sűrűsége. (b) Az eredeti v_0 szélsebesség hány százalékos növekedése kétszerezné meg az elért teljesítményt? (c) Minthogy a levegő bizonyos (nem zérus) sebességgel hagyja el a szélkereket, a rendelkezésre álló teljesítménynek csak töredéke hasznosítható. A szélkerék forgó alkatrészein fellépő súrlódási veszteség tovább rontja a hatásfokot. Tekintsünk egy 33 méter sugarú vitorlákkal felszerelt szélkereket, olyan helyre telepítve, ahol a szél átlagos sebessége 32 km/h. Számítsuk ki a leadott teljesítményt, ha a hatásfok 14%.

17C-49 Egy víztartályban H magasan áll a víz. A tartály oldalában, az aljától mért h magasságban kis lyuk van, ebből vízszintesen lövell ki a vízsugár. (a) Mekkora h érték esetében spriccel legtávolabbra a vízsugár a vízszintes talajon? Bizonyítsuk be, hogy ez a maximális vízszintes távolság H-val egyenlő!

17C-50 (H. R. Crane profeszor, University of Michigan egyik feladata alapján.) Egy ország vezetője elhatározta, hogy „Az Idő Múlása" témakörcímmel világvásárt rendez. Azt akarta, hogy legyen egy központi kiállítás, ahol különböző típusú órák működő modelljeit mutatják be. Annak érdekében, hogy mindez lenyűgöző legyen, elrendelte: a modelleket létező órákról másolják le, de minden méret lineárisan négyszeresre legyen nagyítva. A megnyitás előtt két órával a modelleket a pontos időre (délelőtti 10:00 órára) beállították. Azonban, amikor délben eljött az ünnepélyes megnyitás ideje, az ország vezetője zavarba jött attól, amit látott. Az órák az alábbi típusúak voltak:

(1) egyszerű ingaóra
(2) torziós ingaóra
(3) zsebóra (balanszkerék típusú)
(4) homokóra, normál méretű homokszemcsékkel, de minden más lineáris mérete felnagyítva, (amikor minden homok lepereg, megfordítják az eszközt és egy számláló jelzi hogy ismét eltelt egy óra)
(5) napóra
(6) vízóra: egy hengeres tartály fenekébe fúrt lyukon víz folyik ki, egy-egy óra elteltét vízszintes vonalak jelzik a hengerpaláston.

Mindegyik típusra állapítsuk meg az óraállást a megnyitó ceremónia időpontjában, és indokoljuk véleményünket! Tegyük fel, hogy a kissé megváltozott súrlódási viszonyok a problémában nem játszanak szerepet. [Útmutatás: Azoknak a mechanizmusoknak a viselkedése, amelyekben a visszatérítő erők vagy forgatónyomatékok arányosak a nyugalmi helyzettől mért kitéréssel, ahhoz a változáshoz hasonló, amely egy rúd lineáris megnyúlása vagy összenyomódása során jön létre, ha a rudat megfelelő léptékkel látják el. (13.11 fejezet)].



17-36 ábra.
A 17C-48 feladathoz. Elektromos energiát termelő „szélkerék telep".

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84{,}5$ perc

16C-53 1,41 óra

16C-55 $\dfrac{GMm}{2R}\left[3-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right]$

16C-57 $\dfrac{Gm}{R^2}\left(\dfrac{M}{4}-\dfrac{m}{3}\right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%

17B-3 A válasz adott.

17A-5 250 N

17A-7 20 cm

17B-9 a) 5000 kg/m^3 b) 667 kg/m^3

17B-11 a) 2704 kg/m^3 b) 59,8 N

17B-13 0,89 kg/dm^3

17B-15 4,00 mg

17B-17 $\Delta V/V = 0{,}0830$

17A-19 $1{,}77 \times 10^{-3}$ m^3/s

17A-21 40 cm/s

17B-23 $3{,}7 \times 10^4$ N/m^2

17B-25 4,49 atm

17B-27 $\rho A v^2$

17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm

17B-31 A válasz adott.

17C-33 al/g

17C-35 0,933

17C-37 $(1-1/\sqrt{2})$

17C-39 $(1-1/\sqrt{2})$

17C-41 A válasz adott.

17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$

17C-45 A válasz adott.

17C-47 27,3 cm^3/s

17C-49 $H/2$

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2{,}27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m

18A-3 A válasz adott.

18A-5 8,33 cm

18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3{,}14$ m^{-1}, $\omega = 6{,}28 \times 10^{-3}$ s^{-1}

18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m d) 340 m/s

18B-11 18,56 m

18B-13 860 m

18A-15 $2{,}94 \times 10^{-16}$ J/cm^3

18B-17 1,13 μW

18B-19 A válasz adott.

18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang

18A-23 2,07 N

18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm

18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz

18A-29 870 Hz, 2610 Hz

18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m

18B-33 800 Hz

18A-35 19,9 m/s

18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz

18A-39 28,4°

18B-41 5,64 Hz

18C-43 A válasz adott.

18C-45 3,14 m/s, $9{,}87 \times 10^3$ m/s^2

18C-47 $K = 2{,}47 \times 10^{11}$ N/m^2
$G = 1{,}25 \times 10^{11}$ N/m^2

18C-49 b) $v = R\omega$

18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24

18C-53 $\mu = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú

18C-55 12,6 m/s^2

18C-57 60,0 Hz

18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni

19A-3 3×10^{-5}/°C

19B-5 $2{,}17 \times 10^5$ N

19B-7 0,72 l

19A-9 6,44 kJ

19A-11 0,463 kJ/kg·°C

19A-13 0,431 joule/ g·°C

19A-15 0,122 kg

19B-17 0,126 kJ/kg·°C

19B-19 87,5

19B-21 A válasz adott.

19A-23 557 J/s

19A-25 $1{,}38 \times 10^8$ J

19B-27 a) 290 g b) 42,9 g

19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár

19A-31 5,00 W/m^2 °C

19B-33 2,84 J/s

19A-35 a) 61,1 kW·h b) $3,67

19C-37 A válasz adott.

19C-39 a) 13,9 cm b) $2{,}6 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$

19C-41 8,0039 cm

19C-43 a) $\dfrac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$

19C-45 A válasz adott.

19C-47 $3{,}52 \times 10^4$ s = 9,78 h

19C-49 A válasz adott.

19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l

20A-3 a) 4,48 m^3 b) 5,60 kg

20A-5 0,046 m^3

20A-7 12,0 l

20A-9 $1{,}98 \times 10^5$ Pa

HULLÁMMOZGÁS

„Aki az óceánon hajózik, annak egyre inkább úgy tünik, hogy az óceán hullámokból áll, nem pedig vízből"

A. S. EDDINGTON
[The Nature of the Physical World, Camgbridge (1929)]

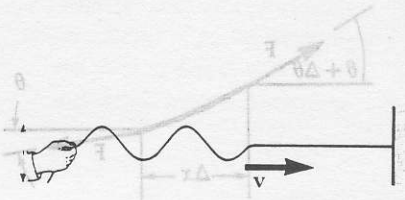
18.1 Bevezetés

A hullámmozgás a fizika majdnem minden ágában előforduló jelenség. A természetben mindenütt találhatók hullámok: van vízhullám, hanghullám, rádióhullám és fényhullám. A hullámmmozgás matematikailag, az un. *hullámegyenlettel* írnak le. Tárgyalásunkat ebben a fejezetben a *mechanikai* hullámokra korlátozzuk. Mechanikai hullám bármely rugalmas közegben a közeg egy kicsiny részének hírtelen elmozdításával, az un. „rugalmas zavarral" kelthető. Amint majd látni fogjuk, a rugalmas zavar terjedési sebessége a közegre jellemző.

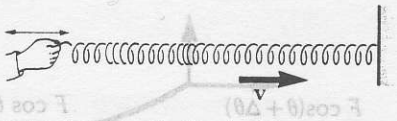
Lényegében *minden hullámmozgás energiát és impulzust szállít a tér egyik pontjából a másikba pontjába anélkül, hogy a tömeg is eljutna egyik pontból a másikba.* Azaz a közeg részecskéi nem haladnak a hullámmal. Ehelyett bizonyos egyensúlyi helyzet körül ide-oda rezegnek a hullám áthaladásakor, csak a zavar terjed. Ha a zavar elér egy távoli helyre, mozgásba hozza az ottani részecskéket, energiát és impulzust adva át nekik. Példaképpen, ha a déli Csendes Óceán viharában keletkezett hullámok 50–70 km/h sebességgel haladva a 10000 km-rel odébb fekvő kaliforniai partok hullámainak energiát és impulzust adnak át, a déli Csendes Óceánból semennyi víz sem jut el Kaliforniába. Csak maga a zavar teszi meg az utat.

A haladó hullámoknak két általános csoportja van, amint ezt a 18-1 ábra illusztrálja. A **transzverzális hullám** esetén a közeg részecskéi a hullám haladási irányára *merőlegesen* rezegnek, és a **longitudinális hullám** esetén a közeg részecskéi a hullám haladási irányával *párhuzamosan* rezegnek. A kötélen kialakuló haladó hullám transzverzális, mert a kötél a haladás irányára merőlegesen rezeg. A levegőben terjedő hanghullámok longitudinális hullámok, mert a levegő gázmolekulái a haladás irányával párhuzamosan rezegnek. Némelyik hullámban, amilyen például a felületi vízhullám, a közeg részecskéinek mozgása egyidejűleg transzverzális- és longitudinális.

Ha a közegnek csak egyszeri „ütést" vagy „lökést" adunk, a forrásból kifelé terjedő zavart **lökéshullámnak** nevezzük. Példa lehet rá a taps levegőben terjedő csattanó hangja, vagy a kifeszített kötélen terjedő zavar, ha a kötelet a végéhez közel éles ütés érte. Ha viszont a zavarkeltés ismétlődik, akkor **hullámvonulatnak** nevezett lökéssorozat keletkezik. A hullámvonulat gyakori alakja jön létre, ha a zavarkeltés olyan egyszerű harmonikus mozgás,

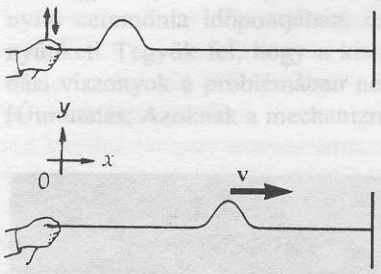


a) *Transzverzális hullámok* a kifeszített kötélen. A kötél részecskéi a hullám haladási irányára merőlegesen térnek ki.



b) *Longitudinális hullámok* a kifeszített rugón. A rugó meneteinek a kitérése a hullám haladási irányával párhuzamos.

18-1 ábra
Ha valamely közeg egy tartományát gyorsan ide-oda mozgatják, akkor periodikus zavarhullám keletkezik. A zavar az adott közegre jellemző v sebességgel terjed.



18-2 ábra
Egyetlen gyors felfelé majd lefelé irányított transzverzális (y irányú) impulzus létesíthető, ami a kifeszített kötélen az x irányban végighalad. (A vázlaton az impulzus amplitúdója erősen túlzott.)

hogy a közeg minden egyes részecskéje egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez a hullám tovahaladása során. Ez a zavartípus **szinuszhullám-vonulat** néven ismert. Ha az ismétlődő zavar összetettebb mozgás, akkor **periodikus hullámvonulatról** beszélünk.

18.2 A hullámegyenlet

Az egyszerűség kedvéért tárgyalásunkat egydimenziós közeggel kezdjük és az eredményeket később kiterjesztjük két- és háromdimenziós esetre is. Tekintsünk egy, az x tengely mentén F erővel kifeszített kötelet! (Azért, hogy az egyszerű harmonikus rezgés T periódusidőjével össze ne keverjük, most a kötelet feszítő erőt F-fel jelöljük.) Ha a kötél egyik végét gyorsan fel és le mozdítjuk, de csak egyszer, ahogyan a 18-2 ábra mutatja, a zavar egyetlen transzverzális lökéshullámot indít el, ami a kötélen végighalad. A legegyszerűbb (ideális) esetben a lökéshullám megtartja alakját vagy **profilját** a haladás során.[1] Minden egyes időpontban a haladó zavar a kötélnek csak egy kis részére korlátozódik, másfelől minden egyes részecske pillanatnyi transzverzális mozgást végez és eredeti nyugalmi helyzetébe tér vissza.

Ennek a mozgásnak a leírásához néhány paraméter szükséges:

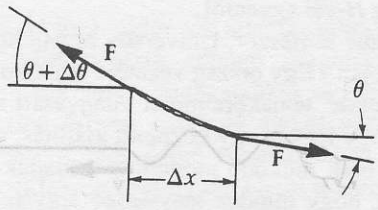
y = a kötél részecskéinek a kitérése az egyensúlyi helyzettől (ez esetben a kitérés a haladás irányára merőleges)
x = a lökéshullám terjedési irányában mért koordináta
t = az idő.
μ = a kötél vonalmenti (lineáris) tömegsűrűsége, amelyet a kötél egységnyi hosszúságának tömegeként (*tömeg per hosszúság*) értelmezünk.

A transzverzális lökéshullám v sebességgel halad a kötél mentén. Feltételezzük, hogy a kitérés olyan kicsi, hogy a lökéshullám áthaladása során az F feszítőerő lényegében állandó marad.

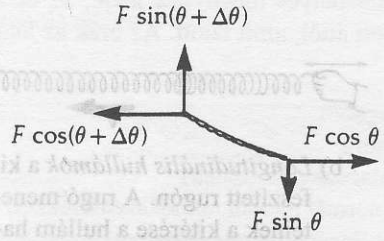
Összpontosítsuk figyelmünket a kötél kicsiny Δx szakaszára, amikor ez a lökéshullám áthaladása folytán transzverzális kitérést végez. A *transzverzális* mozgásra alkalmazott $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvényből egyenletet vezetünk le a lökéshullám *longitudinális* v sebességére. A kötélszakaszra ható erők vektorábrája a 18-3 ábrán látható. Két, kis amplitúdókra érvényes feltételezéssel élünk: (1) a θ szög mindig kicsi, és (2) az y kitérés mindig elég kicsi ahhoz, hogy az F feszítőerő végig állandó maradjon. Mivel θ kicsi felírhatjuk, hogy

$$\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \frac{\partial y}{\partial x} \qquad \textbf{(18-1)}$$

ahol a $\partial y / \partial x$ szimbólumot az y függvény x *szerinti parciális deriváltjának* nevezzük. Ez azt jelenti, hogy az x szerinti deriválást a szokásos módon kell elvégezni, *az összes többi változó* (esetünkben csak t) *állandó értéken tartása mellett.* Azaz a deriválást csak x szerint kell elvégezni. Például az $y = x^2 + t^3$ függvény x szerinti parciális deriváltja $\partial y / \partial x = 2x$, a t szerinti parciális deriváltja pedig $\partial y / \partial t = 3t^2$.



a) A Δx kötélszakasz vektorábrája.



b) A Δx kötélszakaszra ható erők vízszintes és függőleges komponensekre bontva.

18-3 ábra
Az impulzus áthaladása során a Δx kötélszakaszt a rá ható erők felfelé gyorsítják. A szakasz tömege $\mu \Delta x$.

[1] Sok esetben a Hooke-törvényben szereplő rugóállandó, kis mértékben ugyan, de függ az amplitúdótól és a frekvenciától. Ennek következtében a különböző frekvenciájú hullámok sebessége kissé különböző. Ez a lökéshullám szétterülését okozza (a jelenség diszperzió néven ismert), emiatt a zavar profilja fokozatosan alacsonyabbá és szélesebbé válik. Hasonlóképpen, ha a közegben belső súrlódás lép fel, ami miatt a közeg a hullámtól energiát abszorbeálva felmelegszik, a profil amplitúdója kisebbé válik, a hullám *gyengül*.

Mindig érdemes a matematikai szimbólumok fizikai jelentését végiggondolni. A $\partial y/\partial x$ a kötél *hajlásszögét* jelenti (minden egyes x pontban) és $\partial y/\partial t$ a kötélrészecskék *transzverzális sebességét* (minden egyes x pontban). Vegyük észre a hullámmozgással kapcsolatos kétféle sebesség közötti különbséget: a kötélrészecskék sebessége *transzverzális* a hullám kötélmenti haladásának sebessége *longitudinális*.

Kicsiny θ értékekre mind $\cos\theta$, mind $\cos(\theta + \Delta\theta)$ jó közelítéssel 1. Különbségük elhanyagolható, úgyhogy a kötélszakaszra lényegében nem hat vízszintes irányú erő. Azonban e két kicsiny szög szinuszának különbsége viszonylag nagy. Tehát a kötélszakaszra jól észlelhető függőleges (transzverzális) eredő erő hat. Ez az erő:

$$\left(F_{\text{eredő}}\right)_{\text{transz}} = F\sin(\theta + \Delta\theta) - F\sin\theta \qquad \textbf{(18-2)}$$

$$\left(F_{\text{eredő}}\right)_{\text{transz}} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right] \qquad \textbf{(18-3)}$$

ahol kicsiny θ szögre, mivel $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \partial y/\partial x$, ez az x helyen lévő kötélszakasz hajlásszögét jelenti. A $\partial y/\partial x$ mennyiség x-nek és y-nak valamilyen $f(x,y)$ függvénye. A $(\partial y/\partial x)_{x+\Delta x}$ szimbólum azt jelenti, hogy a $\partial y/\partial x$ függvényt az $x+\Delta x$ helyen kell venni; hasonlóképpen $(\partial y/\partial x)_x$ az x helyen veendő. A zárójelben lévő mennyiség azonban kifejezhető az y függvény x szerinti második deriváltjával, hiszen amint ez bármelyik analízis-könyvben megtalálható

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]}{\Delta x} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(18-4)}$$

A második parciális derivált szimbóluma utasítást jelent arra, hogy a parciális deriválást kétszer kell elvégezni:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

a másik t változót állandó értéken tartva.

A (18-3) és a (18-4) egyenletből az eredő erőre a következőt kapjuk:

$$\left(F_{\text{eredő}}\right)_{\text{transz}} = F\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\Delta x. \qquad \textbf{(18-5)}$$

Alkalmazzuk Newton második törvényét a transzverzális mozgásra, és vegyük figyelembe, hogy a kötélszakasz m tömege $\mu\Delta x$:

$$\sum F_y = ma_y$$

Minthogy $a_y = \partial^2 y/\partial t^2$, tehát

$$F\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\Delta x = \mu\,\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \qquad \textbf{(18-6)}$$

Mindkét oldalt Δx -szel osztva és rendezve, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{F}{\mu}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(18-7)}$$

Az F/μ együttható dimenziója tömeg · gyorsulás: tömeg/hosszúság, azaz sebességnek négyzete. Így jelölésünket az $(F/\mu) = v^2$ helyettesítéssel egyszerűbbé téve megkapjuk a **hullámegyenletet**:

A hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(18-8)}$$

Ez az egyenlet a kötél mentén v sebességgel haladó transzverzális hullámokat írja le. Az egyenletet egyszerűen úgy kaptuk, hogy a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ összefüggést alkalmaztuk a kötélszakasz transzverzális mozgására.

18.3 A hullámegyenlet általános megoldása

Miután megkaptuk a haladó hullámok viselkedését leíró hullámegyenletet, a továbbiakban ennek *megoldásait* kell meghatároznunk, azaz az x *és* a t változók olyan függvényeit, amelyek speciális eseteknek felelnek meg. Bármilyen függvényeket kapunk is, azoknak meg kell felelniük a (18-8) egyenlet azon követelményének, hogy idő szerinti második deriváltjuk egyenlő legyen a sebesség négyzetének és a hely szerinti második deriváltnak a szorzatával.

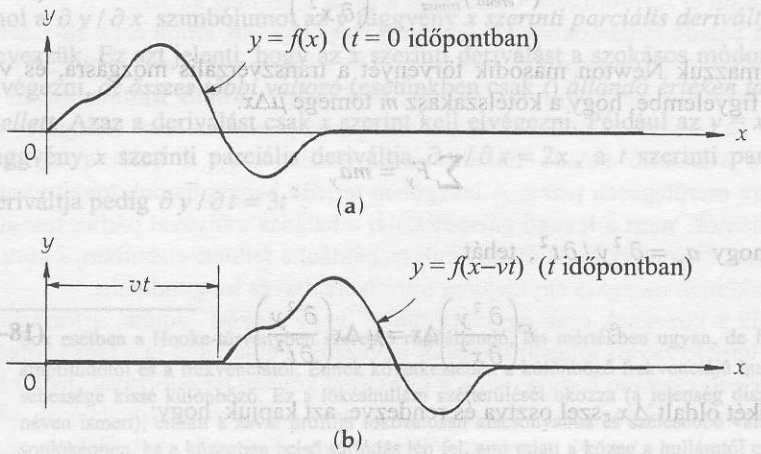
Konkrét példaként vizsgáljuk az x tengely mentén kifeszített húron haladó hullámot. A 18-4 ábra olyan tetszőleges alakú hullámot ábrázol, ami a pozitív x tengely irányában halad. Az (a) részábra a $t = 0$ időpontban ábrázolja a hullámzavart, amikor a hullám alakját valamilyen $f(x)$ függvény írja le:

$$y = f(x) \ (t = 0 \text{ időpontban}) \qquad \textbf{(18-9)}$$

Egy későbbi t időpontban a hullám v sebességgel már elmozdult a kötél mentén, de alakját megtartotta (feltéve, hogy a súrlódás és a diszperzió elhanyagolható). Így az a függvény, amely most írja le a hullámot, a következő:

$$y = f(x-vt) \ (t = t \text{ időpontban}) \qquad \textbf{(18-10)}$$

Első látásra talán csodálkozunk azon, hogy negatív előjel áll abban a függvényben, amelyik az x tengely pozitív irányában haladó hullámot reprezen-



18-4 ábra
Egy tetszőleges hullámalak, amely a kifeszített húron az x tengely pozitív irányában v sebességgel halad.

tálja. Könnyen beláthatjuk azonban, hogy ez miért helyes. Összpontosítsuk figyelmünket a hullám egy kijelölt x pontjára, mondjuk a 18-4 ábrán a legmagasabb csúcsra. Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban a csúcsnak az egyensúlyi helyzettől mért kitérése 2 mm:

$$y_{t=0} = 2 \text{ mm}.$$

Egy későbbi t időpontban ez a csúcs az $x = 2\text{mm}+vt$ helyen található. Innen kifejezzük $y = 2$ mm értékét:

$$y_{t=t} = 2 \text{ mm} = (x - vt).$$

A t paraméter növelésével x -nek is pozitív irányban kell nőni, hogy az $(x–vt)$ érték változatlan maradjon. Láthatjuk, hogy ez megvalósul, mert a csúcs (és a hullám minden más pontja) ugyanazzal a v sebességgel mozog az x tengely pozitív irányában. Íly módon felfedeztünk egy lényeges tényt a hullámegyenlet mindazon megoldására vonatkozóan, amelyek egy, az x tengely pozitív irányában haladó mozgást reprezentálnak: *szükséges, hogy minden megoldás az $(x–vt)$ mennyiség függvénye legyen. Minden $y = f(x - vt)$* általános alakú függvény[2] ilyen haladó hullámot ír le. (Ezt megmutathatjuk, ha y értékét a hullámegyenletbe helyettesítjük, és igazoljuk, hogy az idő szerinti második derivált egyenlő a sebesség négyzetének és a hely szerinti második deriváltnak a szorzatával.) A konkrét függvény az ábrázolni kívánt hullám alakjától fog függni.

Bizonyítsuk be, hogy a hullám sebessége valóban v. Ha követjük a hullámalak egyik kijelölt pontját (mondjuk a csúcsot) amint az az x tengely mentén halad, nyílvánvaló, hogy

$$(x - vt) = \text{állandó}. \qquad \textbf{(18-11)}$$

Az idő szerint differenciálva

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \qquad \textbf{(18-12)}$$

$$\text{vagy} \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Tehát az a sebesség, amellyel a hullám egyik pontja (és így a teljes hullám) az x tengely mentén halad, valóban v. Ezt a sebességet a hullám **fázissebességének** nevezzük, mert a hullám egyik pontjának megadása a hullám **fázisának** megadását jelenti.

Hasonló érveléssel arra jutunk, hogy az x tengely *negatív* irányában haladó hullámok $(x + vt)$ függvényei.Tehát:

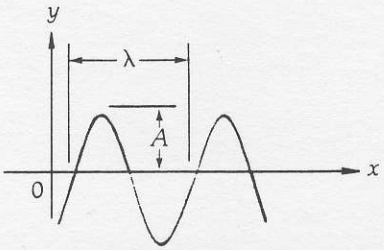
$y = f(x - vt)$ (x *tengely pozitív* irányában haladó hullámok)

$y = f(x + vt)$ (x *tengely negatív* irányában haladó hullámok)

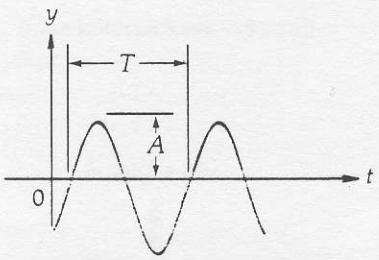
18.4 A hullámegyenlet megoldása egy speciális esetben

Vegyünk most egy speciális esetet – a kifeszített húron terjedő *szinusz*hullám esetét. Matematikai leírás szempontjából ez az egyik legegyszerűbb hullám.

[2] Az a kifejezés, hogy „az $(x–vt)$ mennyiség függvénye", azt jelenti, hogy x-nek és t-nek mindig ugyanabban az $(x - vt)$ alakzatban kell megjelennie. Tehát $\sin\left[(2\pi/\lambda)(x - vt)\right]$ és $(x - vt)$ megfelelő, de $x^2 - (vt)^2$ nem.



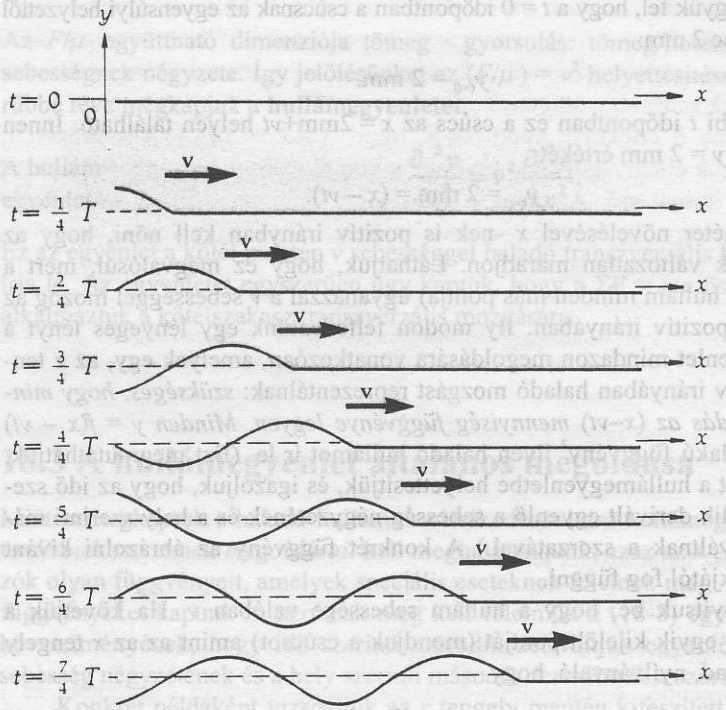
a) A t paramétert rögzítve, figyelmünket a húr teljes hosszában a húr (pillanatnyi) transzverzális kitérésére összpontosítjuk. A λ hullámhossz az azonos fázisban lévő két szomszédos pont távolsága.



b) Az x paramétert rögzítve, a húr x koordinátájú pontjának időbeli transzverzális mozgását vizsgáljuk: ez egyszerű harmonikus rezgő mozgás az y irányban. A T rezgésidő egy teljes rezgéshez szükséges időtartam.

18-6 ábra

Az $y = A \sin(2\pi x/\lambda - 2\pi t/T)$ alakú haladó szinuszhullám. A maximális kitérés nagysága az *A amplitúdó*.



18-5 ábra

A kifeszített húr végpontjára kényszerített transzverzális harmonikus rezgések által keltett haladó szinuszhullámok. A T időtartam az egyszerű harmonikus rezgő mozgás periódusideje.

Ezen kívül ez megfelelő választás is, mert *minden periodikus hullám*, mindegy, hogy mennyire bonyolult, leírható különböző frekvenciájú szinusz- és koszinuszfüggvények összegeként. Az ilyen típusú összeget, amit az F függelék tárgyal, Fourier sornak nevezik. Ha megtanuljuk, hogyan kell kezelni egyetlen szinuszhullámot, akkor már rendelkezünk azzal az alapvető tudással, amivel a Fourier analízist felhasználva bármilyen bonyolultságú periodikus hullámot kezelni tudunk.

A 18-5 ábra egy szinuszhullámot mutat be, ami akkor jön létre, ha a húr egyik végére transzverzális irányban egyszerű harmonikus rezgő mozgást kényszerítünk. A haladó szinuszhullám matematikai leírásának többféle módja van, ilyen pl. a következő:

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt). \qquad \textbf{(18-13)}$$

Ez a hullámfüggvény világosan kifejezésre juttatja azt a tényt, hogy az y kitérés $(x - vt)$ függvénye így tehát valóban olyan hullámot ír le, ami az x tengely pozitív irányában halad. Célszerűbb azonban az egyszerű harmonikus mozgásnál bevezetett jelöléseket használni (lásd a 18-6 ábrát):

$\lambda =$ **hullámhossz**, két szomszédos azonos fázisú pont távolsága
$T =$ **periódusidő**, az az időtartam, amely alatt egy adott pontban egy teljes rezgés végbemegy
$f =$ **frekvencia**, ($f = 1/T$), egy adott pontban az egy másodperc alatt végzett rezgések száma
$A =$ **amplitúdó**, a legnagyobb y irányú kitérés nagysága

Fizikailag a mozgás **forrása** határozza meg a *frekvenciát*, a **közeg** (itt a kifeszített húr) pedig a *sebességet*. A frekvencia és a sebesség segítségével kiszámítható a *hullámhossz*. Minthogy T idő szükséges ahhoz, hogy a hullám v sebességgel egy teljes λ hullámhosszal terjedjen tovább, ezért

$$\lambda = vT \quad \text{vagy} \quad f\lambda = v. \tag{18-14}$$

Behelyettesítve a (18-13) egyenletbe, a hullámfüggvény egy másik, jól alkalmazható alakját kapjuk:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \tag{18-15}$$

Egy még tömörebb és még inkább használható írásmód a k **hullámszámot**[3] és a ($2\pi f$-fel egyenlő) ω **körfrekvenciát** alkalmazza:

$$\text{Hullámszám} \qquad k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{Körfrekvencia} \qquad \omega \equiv \frac{2\pi}{T}$$

(Ne tévesszük össze ezt a k szimbólumot azzal a k szimbólummal, amit az inerciasugárra és a rugóállandóra használtunk.) Minthogy kx és ωt a szinuszfüggvény argumentumában szerepel, ezért ennek a kettőnek (*radián* egységben megadott) dimenzió nélküli kifejezésnek kell lennie.

A (18-15) egyenletbe helyettesítéssel kapjuk:

Haladó szinuszhullámok

$y = A \sin(kx - \omega t)$ (az x tengely pozitív irányában haladó szinuszhullám)

$y = A \sin(kx + \omega t)$ (az x tengely negatív irányában haladó szinuszhullám) **(18-16)**

Mielőtt numerikus példákat mutatnánk, igazoljuk, hogy a kapott megoldás kielégíti a (18-8) általános hullámegyenletet! Szükségünk van mind az idő szerinti, mind a hely szerinti parciális deriváltakra.

Idő szerinti deriváltak	Hely szerinti deriváltak
$y = A\sin(kx - \omega t)$	$y = A\sin(kx - \omega t)$
$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega\, A\cos(kx - \omega t)$	$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t)$
$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx - \omega t)$

Láthatjuk, hogy a második deriváltak olyan kapcsolatban vannak, ami megfelel a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{18-17}$$

hullámegyenletnek. Mivel $\omega/k = (2\pi/T) : (2\pi/\lambda) = \lambda/T = f\lambda = v$, a (18-7) és a (18-8) egyenletekkel összehasonlítva azt kapjuk, hogy

[3] Analógiában az ω körfrekvencia elnevezéssel, alkalmasabb lehetne a k körhullámszám elnevezés. A kvantummechanikában ezt a mennyiséget *redukált hullámszámnak* mondják.

A kifeszített húron haladó transzverzális hullám v terjedési sebessége

$$v = f\lambda = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \textbf{(18-18)}$$

ahol F a húrt feszítő erő, és μ a hosszegységre jutó tömeg (a lineáris tömegsűrűség). Tehát a kapott megoldás megfelel a hullámegyenletnek. Azt is láttuk, hogy a v állandó valóban a hullám terjedési sebessége. Vegyük észre, hogy a sebesség nő, ha az F feszítőerő nő, vagy ha a μ lineáris tömegsűrűség csökken. Mindkét esetben növekszik az a *visszatérítő gyorsulás*, ami a húr egyensúlyi helyzetbe való visszatérését sietteti. Így a sebességre kapott összefüggés egyezik a húr viselkedéséről alkotott elképzelésünkkel.

18-1 PÉLDA

Kifeszített húr mentén haladó szinuszhullámot az alábbi egyenlet ír le:

$$y(x, t) = 0{,}0020 \sin(10x - 120t) \qquad \text{(SI egységekben)}$$

ahol y a húr méterben mért transzverzális kitérése, x a húr mentén méterben mért távolság és t a másodpercben mért idő. a) Határozzuk meg a húr transzverzális kitérésének amplitúdóját, b) a haladó hullám hullámhosszát, c) frekvenciáját és d) a hullámterjedés sebességét!

MEGOLDÁS

Az $y(x, t) = 0{,}0020 \sin(10x - 120t)$ egyenletet a kifeszített húron haladó hullám általános $y = A \sin(kx - \omega t)$ egyenletével összehasonlítva, látjuk, hogy

a) $A = 0{,}0020\,\text{m}$

b) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 10$, azaz $\lambda = \dfrac{2\pi}{10} = 0{,}628\,\text{m}$

c) $\omega = 2\pi f = 120$, azaz $f = \dfrac{120}{2\pi} = 19{,}1\,\text{Hz}$

d) $v = f\lambda = \left(19{,}1\,\text{s}^{-1}\right)\left(0{,}628\,\text{m}\right) = 12{,}0\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

18.5 A hullám terjedési sebessége

Az előzőkben tárgyaltuk a kifeszített húron terjedő transzverzális hullám terjedési sebességét. Más típusú hullámok is az adott közeg rugalmas tulajdonságaitól függő sebességgel haladnak. Például a hanghullámok, amelyek sűrűsödési- és ritkulási longitudinális hullámok, különböző sebességgel terjednek szilárd anyagban, folyadékban és gázban. A fiatal enberek füle számára az érzékelhető frekvenciatartomány kb. 20 Hz -től 20000 Hz -ig terjed. A hallható frekvencia alatti longitudinális mechanikai hullámot **infrahang**hullámnak, míg azokat, amelyek a hallható frekvenciák fölött vannak, **ultrahang**hullámoknak nevezzük.[4]

[4] Sok állatfaj képes meghallanni az ultrahangot. Például a barna delfinek érzékelni tudják egészen a kb. 120kHz-ig terjedő frekvenciákat, de a 10 000 Hz-nál alacsonyabbat nem hallják meg. Tehát a barna delfin nem hallja a zongora hangját, (a zongora legmagasabb

Bizonyítás nélkül közlünk néhány összefüggést a különböző típusú hullámok terjedési sebességére. Jegyezzük meg, hogy a sebességre vonatkozó összefüggés alakja minden esetben

$$v = \sqrt{\frac{\text{Rugalmassági modulusz}}{\text{Sűrűség}}} \qquad \textbf{(18-19)}$$

alakú. (A deformálható anyagokat jellemző rugalmassági moduluszokat a 13.11 fejezetben tárgyaltuk.)

Sűrűsödés-ritkulás-hullám sebessége folyadékban vagy szilárd rúdban

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad \textbf{(18-20)}$$

ahol K a közeg kompressziómodulusza ill. szilárd anyagokban a Young modulusza, ρ a sűrűsége. A földrengés által keltett *primér hullám*, vagy *P-hullám* hasonló ehhez a hullámtípushoz, (jóllehet sebességének precíz kifejezése kissé bonyolultabb). A primér hullámok gyorsabban terjednek, mint más földrengéshullám, így előbbiek elsőnek érkeznek a távoli észlelő állomáshoz. A *szekunder hullámok* vagy *S-hullámok* tarnszverzális hullámok, amelyek szilárd közegben haladva nyírófeszültséget hoznak létre.

Szilárd anyagban terjedő transzverzális (nyíró) hullám sebessége

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad \textbf{(18-21)}$$

ahol G a szilárd anyag nyírási modulusza. Minthogy a folyadékok és gázok nem tudnak nyírófeszültséget kifejteni, azért az ilyen hullámok csak szilárd anyagokban léteznek. A Föld felszíne alá 2900 km-nél mélyebbre nem jut nyíróhullám, amiből következik, hogy ebben a mélységben a Föld magja folyékony állapotban van. (Szeizmikus mérések egy kb. 5100 km mélységben lévő szilárd mag létezését is bizonyítják.) A harmadik földrengés-hullám típusa a *hosszú hullám*, vagy *L-hullám*, ami az S-hullámnál valamivel kisebb sebességgel a felületen halad. Az L-hullámok a vízhullámokhoz hasonlítanak, ezekben transzverzális és longitudinális mozgás egyaránt jelen van, és messze a legpusztítóbb hatásúak.

A hangsebesség levegőben valamelyest bonyolultabb összefüggéssel adható meg, mert több tényezőtől függ. Az előbb tárgyaltakból arra lehetne következtetni, hogy a sebesség $v = \sqrt{K / \rho}$ kellene, hogy legyen. Newton jó fizikai érveléssel valóban levezetett egy ehhez hasonló formulát. Ez azonban kb. 20%-kal[5] eltér a helyes eredménytől. Egy Newton idejében még ismeretlen effektus következtében a gázok kompressziómodulusza két különböző értéket vehet fel attól függően, hogy az összenyomás és a ritkulás (a nyomás egyensúlyi értéke *fölötti* és *alatti* nyomástartomány) állandó hőmérsékleten

frekvenciája 4186 Hz), sem az emberi beszédet, sem a legtöbb vízalatti hangszóró hangját, mert ezek felső frekvenciahatára korlátozott. Következésképpen a barna delfinekkel végzett kommunikációs kísérletek egy része eleve sikertelenségre volt ítélve, mert a kísérletező nem volt tudatában a delfin hallóképessége alsó határának. Kevés állatnak van meg az a képessége, hogy olyan alacsony frekvenciát is érzékelni tudjon, mint az ember.

[5] Annak érdekében, hogy a kétkedőket meggyőzze, Newton esetenként mindent elkövetett, hogy elméletét a kísérleti adatokkal jobb egyezésbe hozza. Richard W. Westall szerint [„Newton and the Fudge Factor", *Science* **179** (Feb. 23 , 1973), p.751.] eklatáns példája volt ennek az a próbálkozás, hogy az elmélet és a kísérleti eredmények között mutatkozó 20%-os eltérést olyan „korrekciós faktor" bevezetésével hozza helyre, aminek tudományos alapja nem volt. Newtonnak ez az emberi gyengesége azonban nem homályositja el teljesítményének mérhetetlen nagyságát.

(*izotermikusan*) vagy hőátadás nélkül (*adiabatikusan*) történik. Mint ezt Pierre Simon de Laplace kb. egy századdal később kimutatta, a hang terjedése adiabatikusan megy végbe.

A hangsebesség gázokban

$$v = \sqrt{\frac{K_{adiabatikus}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma K_{izotermikus}}{\rho}} \qquad \textbf{(18-22)}$$

ahol $\gamma = C_p / C_V$ (levegőre 1,4), a gáz állandó nyomáson és állandó térfogaton vett moláris fajhőjének hányadosa[6]. A képlet egyenértékű a

$$v = \sqrt{\gamma\, p / \rho} \qquad \textbf{(18-23)}$$

összefüggéssel, ahol p a gáz nyomása. A hang kísérletileg kapott terjedési sebessége 20 °C hőmérsékletű levegőben

$$v = 344 \text{ m/s} \qquad \textbf{(18-24)}$$

jó egyezésben a (18-23) egyenletből számítható értékkel. Bonyolultabb vizsgálatok mutatják, hogy a hangsebesség a K abszolút hőmérséklet (273 + t°C) négyzetgyökével arányos [lásd a (19-25) egyenletet].

18.6 Síkbeli és térbeli hullámok

A kifeszített húron kialakuló transzverzális hullámokra kidolgozott egyenletek más típusú hullámmozgást is leírhatnak. Ehhez csak az szükséges, hogy az y kitérést *a közeg részecskéinek egyensúlyi helyzet körül végzett mozgásaként* értelmezzük. Az egyenletek egyaránt jól alkalmazhatók a transzverzális és a longitudinális hullámokra.

Ha egy cső végében elhelyezett dugattyút egyszerű harmonikus rezgőmozgással mozgatunk, akkor a benne lévő levegőben longitudinális szinuszhullám jön létre (18-7 ábra). Midőn a levegő gázmolekulái nyugalmi helyzetük körül rezegnek, nagy nyomású tartományok (vagy *sűrűsödések*) alakulnak ki, ezeket szomszédos kis nyomású tartományok (vagy *ritkulások*) követik. Ez a nyomáskülönbség-rendszer állandó sebességgel halad előre a cső mentén. Ezt szemléltetik az ábrán látható nyilak. Itt persze hanghullámokról van szó. Az emberi fül érzékelő képességének néhány jellemzője a 18-1 táblázatból és a 18-8 ábrából kiolvasható[7].

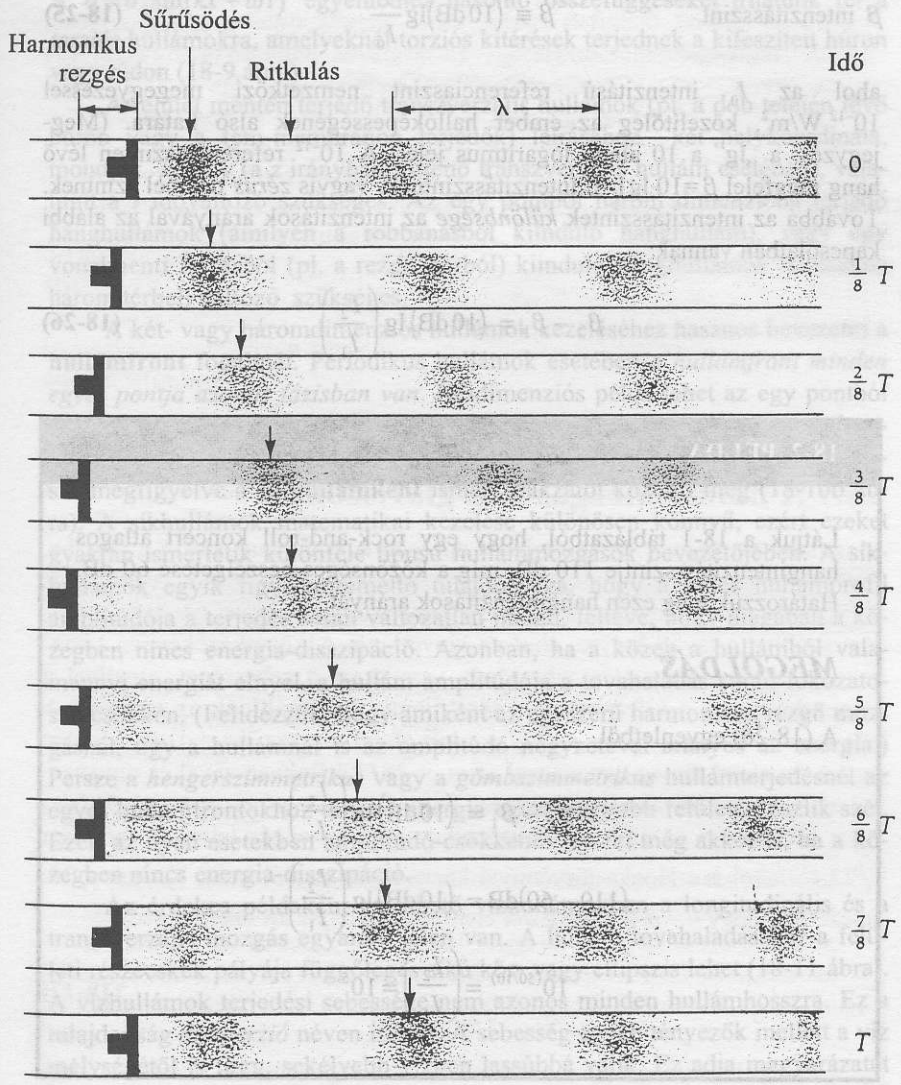
A β *hangintenzitás-szintet decibel*[8] (dB) egységben az alábbi definíció adja meg:

---

6 A moláris fajhő (mólhő) definició szerint az a hőmennyiség, amely ahhoz szükséges, hogy az anyag egy mólnyi mennyiségének hőmérsékletét 1 C° -kal emelje. Gázok esetében ez állandó nyomáson (C_p) , vagy állandó térfogaton (C_V) történhet. Ezt részletesen majd a 21. fejezetben tárgyaljuk.

7 Az emberi fül annyira érzékeny, hogy 3 : 10^{10} arányú nyomásváltozást is érzékelni tud. Ez 10^{-12} W/m^2 hangintenzitásnak felel meg, ehhez a levegő molekuláinak kb. egytized atomsugárnyi amplitúdóval történő mozgása tartozik!

8 A decibel (dB) egység Alexander Graham Bellről kapta nevét. Az emberi hallásérzékenység nagyon nagy tartományt ölel fel. Az intenzitás-arányok logaritmusán alapuló intenzitásszint két okból is kényelmes: először (és főleg), mert az emberi hangérzékelés olyan skálán lineáris, amelyben minden 10 dB növekedéssel a hang erőssége közelítőleg megkétszereződik. Ezen felül a legkisebb érzékelhető intenzitásváltozás – az intenzitástól függetlenül – egy decibel nagyságrendű. Másodszor, az érzékelhető intenzitástartomány 12 nagyságrendű mérete miatt a logaritmikus skála sokkal kényelmesebb a lineárisnál. Maradandó sérülések elkerülése érdekében a tartósan 90 dB fölötti terhelés esetében füldugó használata ajánlatos. Bizonyíték van arra, hogy már lényegesen alacsonyabb szintű "zajszennyezés" is idegességet és vérnyomás-növekedést okozhat.



18-7 ábra
Levegővel telt cső egyik végében lévő dugattyúra harmonikus rezgő mozgást kényszerítünk, az így keltett longitudinális hullámot illusztrálják az egymást követő „állóképek". A sűrűsödésekből és ritkulásokból álló rendszer állandó sebességgel halad a csőben, miközben a közeg részecskéi a haladás irányában egyszerű harmonikus rezgő mozgást végeznek.

18-1 Táblázat
A hangerősség közelítő értéke egy közeli megfigyelő számára

	Intezitás (W/m^2)	Intenzitás-szint (dB)
Nagy rakétamotor	10^{6}	180
Felszálló lökhajtásos gép	10^{3}	150
Fájdalmat okozó hangerő	1	120
Rock and roll zenekar	10^{-1}	110
Légkalapács vagy szegecselő	10^{-2}	100
A halláskárosodáshoz vezető tartós zajszint	10^{-3}	90
Erős utcai forgalom	10^{-5}	70
Normál beszélgetés	10^{-6}	60
Átlagos suttogás	10^{-10}	20
Alig hallható hang	10^{-12}	0

β intenzitásszint

$$\beta \equiv (10\,\text{dB})\lg\frac{I}{I_0} \qquad \textbf{(18-25)}$$

ahol az I_0 intenzitású referenciaszint nemzetközi megegyezéssel 10^{-12} W/m^2, közelítőleg az ember hallóképességének alsó határa. (Megjegyzés: a „lg" a 10 alapú logaritmus jele.) A 10^{-12} referenciaszinten lévő hang megfelel $\beta = 10 \cdot \lg 1 = 0$ intenzitásszintnek, vagyis *zérus* decibel szintnek. Továbbá az intenzitásszintek *különbsége* az intenzitások arányával az alábbi kapcsolatban vannak:

$$\beta_2 - \beta_1 = (10\,\text{dB})\lg\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \qquad \textbf{(18-26)}$$

18-2 PÉLDA

Látjuk a 18-1 táblázatból, hogy egy rock-and-roll koncert átlagos hangintenzitás-szintje 110 dB, míg a közönséges beszélgetésé 60 dB. Határozzuk meg ezen hangintenzitások arányát.

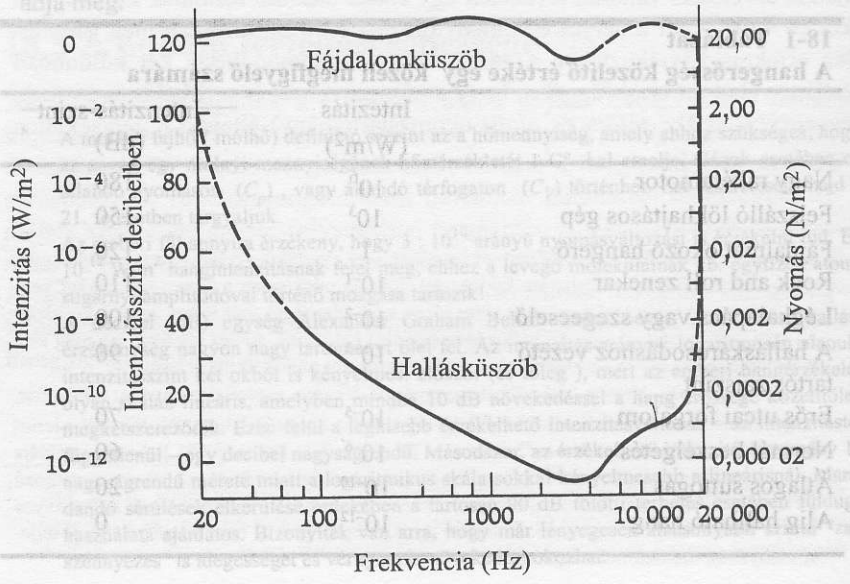
MEGOLDÁS

A (18-26) egyenletből

$$\beta_2 - \beta_1 = (10\,\text{dB})\lg\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

$$(110 - 60)\,\text{dB} = (10\,\text{dB})\lg\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

$$10^{(50/10)} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10^5$$



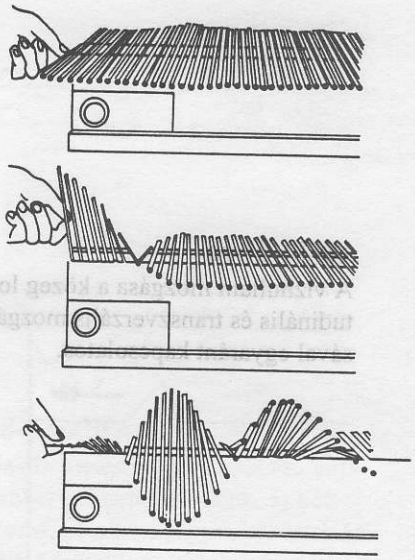
18-8 ábra
Az érzékeny emberi fül számára hallható frekvencia- és intenzitástartományok. Nagyjából az emberiség fele számára a hallható hangintenzitás az alsó görbéhez tartozó értéknek durván 10–100-szorosa. A tartósan 90 dB-nél nagyobb hangszint maradandó hallás-károsodást okoz.

A $\theta = \theta_0 \sin(kx - \omega t)$ egyenlethez hasonló összefüggéseket írhatunk fel a *torziós* hullámokra, amelyeknél torziós kitérések terjednek a kifeszített húron vagy rúdon (18-9 ábra).

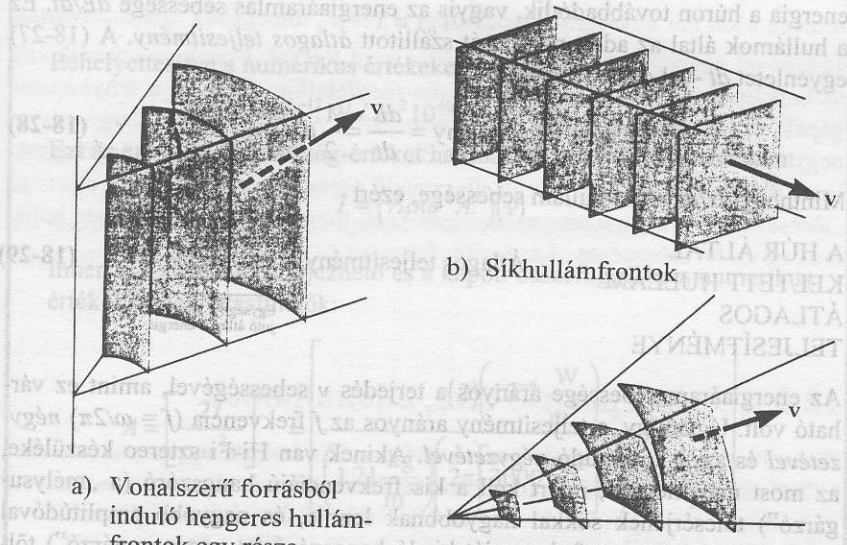
A felület mentén terjedő transzverzális hullámok (pl. a dob tetején lévő bőrön vagy a fém-membránon terjedők) leírásához két helykoordináta, mondjuk x és y (a z irányban történő transzverzális hullám esetében), valamint a t időváltozó szükséges. Az egy pontból három dimenzióba terjedő hanghullámok (amilyen a robbanásból kiinduló hanghullám), vagy egy vonalmenti forrásból (pl. a rezgő húrból) kiinduló hanghullámok leírásához három térbeli változó szükséges.

A két- vagy háromdimenziós hullámok kezeléséhez hasznos bevezetni a **hullámfront** fogalmát. Periodikus hullámok esetében *a hullámfront minden egyes pontja azonos fázisban van*. Kétdimenziós példa lehet az egy pontból (a vízbe dobott kavics helyéről) induló vízhullám. Itt a hullámfrontok koncentrikus körök. Minden háromdimenziós hullámfront a forrástól elég messze megfigyelve a **síkhullámként** ismert alakzatot közelíti meg (18-10b ábra). A síkhullámok matematikai kezelése különösen könnyű, ezért ezeket gyakran ismertetik különféle típusú hullámmozgások bevezetőjében. A síkhullámok egyik figyelemreméltó tulajdonsága, hogy a teljes hullámprofil amplitúdója a terjedés során változatlan marad, feltéve, hogy magában a közegben nincs energia-disszipáció. Azonban, ha a közeg a hullámból valamennyi energiát elnyel, a hullám amplitúdója a tovahaladás során fokozatosan csökken. (Felidézzük, hogy amiként az egyszerű harmonikus rezgő mozgásnál, úgy a hullámnál is az amplitúdó négyzetével arányos az energia.) Persze a *hengerszimmetrikus* vagy a *gömbszimmetrikus* hullámterjedésnél az egyes hullámfrontokhoz tartozó energia egyre nagyobb felületen oszlik szét. Ezért az ilyen esetekben amplitúdó-csökkenés lép fel még akkor is, ha a közegben nincs energia-disszipáció.

Az érdekes példaként említhető vízhullámokban a longitudinális és a transzverzális mozgás egyaránt jelen van. A hullám tovahaladásakor a felületi részecskék pályája függőleges síkú kör- vagy ellipszis lehet (18-11 ábra). A vízhullámok terjedési sebessége nem azonos minden hullámhosszra. Ez a tulajdonság *diszperzió* néven ismert. A sebesség egyéb tényezők mellett a víz mélységétől is függ, sekélyebb vízben lassúbbá válik. Ez adja magyarázatát annak, hogy a tenger hullámai parthoz közeledve átbuknak és megtörnek. A hullám tarajának elegendő előre irányuló impulzusa van ahhoz, hogy a hullám fő tömegén, amely a sekélyebb vízben lelassul, átbukjon.



18-9 ábra
A Bell Telefon Laboratórium által kifejlesztett készülék a hullámmozgás szemléltetésére torziós hullámot alkalmaz. A vízszintesen kifeszített huzalra fémrudakat erősítenek a középpontjuknál fogva. Ha a szélső rudra torziós rezgést kényszerítünk, akkor a huzal mentén torzios szinuszhullám halad végig.

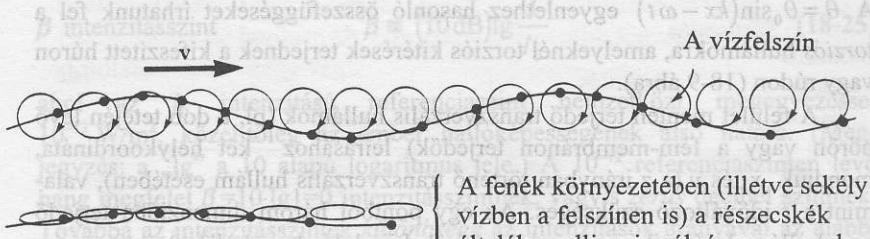


a) Vonalszerű forrásból induló hengeres hullámfrontok egy része

b) Síkhullámfrontok

c) Pontszerű forrásból kiinduló gömbhullámfrontok egy része

18-10 ábra
A hullámfrontok olyan képzeletbeli felületek amelyek pontjai azonos fázisban vannak. A pontszerű- vagy vonalszerű forrástól nagyon nagy távolságban a görbült hullámfront kis része lényegében síkhullám.



18-11 ábra
A vízhullám mozgása a közeg longitudinális és transzverzális mozgásával egyaránt kapcsolatos.

18.7 A hullámmozgás energiaviszonyai

Megmutattuk, hogy a hullámterjedés energiát és impulzust szállít a távolba, anélkül, hogy a közeg részecskéi ténylegesen megtennék az adott távolságot. Az energiabetáplálás a hullámforrásba történik, s ezt az energiát a zavarhullám szállítja a távoli helyre, ahol ez kinyerhető. A következőképpen kiszámítjuk az *energiaáramlás sebességét*, vagyis azt a sebességet, amellyel a szinuszhullámok a kifeszített húr adott pontja felé szállítják az energiát. A húr lineáris tömegsűrűsége μ, így a a húr elemi tömege $dm = \mu \cdot dx$. Minden egyes dm elemi tömeg ugyanazzal az $\omega = 2\pi f$ körfrekvenciával és ugyanazzal az A amplitúdóval végez egyszerű harmonikus rezgő mozgást. A 7. fejezetre hivatkozva az egyszerű harmonikus rezgő mozgás teljes E energiája $1/2\,kA^2$, ahol k a Hooke törvénnyel kapcsolatos rugóállandó. Tudjuk a 15. fejezetből, hogy $k = m\omega^2$, így a dm elemi tömeg teljes dE energiája

$$dE = 1/2\,dm\omega^2 A^2$$
$$dE = 1/2\mu\,dx\omega^2 A^2 \qquad \textbf{(18-27)}$$

Jobbra haladó hullámok esetében ez az energia abból a munkából származik, amit a bal oldalon a húr egy szakasza által gyakorolt erő végez a dm elemi tömegen. Másfelől ez az elemi tömeg a jobb oldali szomszédján maga is munkát végez, és így az energiát továbbadja. Az a sebesség, amivel az energia a húron továbbadódik, vagyis az energiaáramlás sebessége dE/dt. Ez a hullámok által az adott ponton át szállított *átlagos teljesítmény*. A (18-27) egyenletet dt -vel osztva kapjuk:

$$\text{Átlagos teljesítmény} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu\frac{dx}{dt}\omega^2 A^2 \qquad \textbf{(18-28)}$$

Minthogy $dx/dt = v$, a hullám sebessége, ezért

A HÚR ÁLTAL KELTETT HULLÁM ÁTLAGOS TELJESÍTMÉNYE

$$\text{Átlagos teljesítmény} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2}_{\text{Egységnyi hosszra jutó átlagos energia}} v \qquad \textbf{(18-29)}$$

Az energiaáram sebessége arányos a terjedés v sebességével, amint ez várható volt. Ugyanígy, a teljesítmény arányos az f frekvencia ($f = \omega/2\pi$) *négyzetével* és az A amplitúdó *négyzetével*. Akinek van Hi-Fi sztereo készüléke, az most már megérti, miért kell a kis frekvenciájú hangszóró (a „mélysugárzó") tölcsérjének sokkal nagyobbnak lennie, és nagyobb amplitúdóval rezegnie, mint a nagy frekvenciát kiadó hangszóró (a „magassugárzó") tölcsérjének. *Azonos teljesítmény kisugárzásához* minél kisebb a frekvencia, annál nagyobb amplitúdójú hanghullám szükséges.

Háromdimenziós hanghullámok esetében az egységnyi felületen normális irányban átfolyó átlagos teljesítményt definíció szerint az **átlagos energiaáramsűrűségnek** nevezzük és $I_{átl}$ szimbólummal jelöljük. A (18-30) egyenlettel analóg levezetés a következőre vezet:

$$I_{átl} = \frac{\text{Átlagos teljesítmény}}{\text{Felület}} = \left(\frac{\text{Átlagos energia}}{\text{Térfogat}}\right)(\text{Sebesség})$$

Síkbeli hanghullám átlagos energiaáramsűrűsége (Az egységnyi felületen áthaladó átlagos teljesítmény)

$$I_{átl} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2}_{\substack{\text{Egységnyi térfogatra jutó átlagos energia}}} v \qquad \textbf{(18-30)}$$

ahol ρ a levegő sűrűsége (tömeg/térfogat). Az $I_{átl}$ áramsűrűséget watt/méter^2 egységgel mérjük. Figyeljük meg a hasonlóságot ezen egyenlet alakja és a húron végighaladó hullámmal átvitt teljesítményre érvényes egyenlet alakja [(18-29) egyenlet] között.

18-3 példa

Határozzuk meg a 3000 Hz frekvenciájú és 60 dB átlagos intenzitásszintű sík hanghullámban rezgő levegőmolekulák amplitúdóját. A hangsebesség 343 m/s, a levegő sűrűsége 1,21 kg/m^3.

MEGOLDÁS

A decibel skála a hangintenzitások olyan összehasonlítására alkalmas, ahogyan az emberi fül érzékeli a különbséget az eltérő hangintenzitások között, de fizikai szempontból maga az energiaáramsűrűség sokkal jelentősebb. A (18-25) egyenlet alkalmazásával a 60 dB intenzitásszintet átszámíthatjuk I energiaáramsűrűségre:

$$\beta \equiv 10\log\frac{I}{I_0}$$

ahol $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$. I-re megoldva

$$I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}}.$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket, kapjuk:

$$I = 10^{-12}\,\text{W/m}^2\, 10^{60/10} = 10^{-6}\,\text{W/m}^2$$

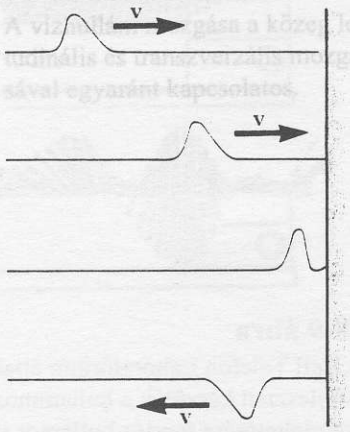
Ezt az energiaáramsűrűség-értéket használjuk a (18-30) egyenletben:

$$I = \left(\tfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\right)(v)$$

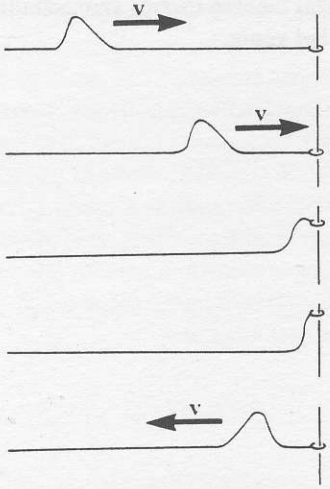
Innen a A amlitudó kifejezhető és a kapott összefüggésbe a numerikus értékek behelyettesíthetők:

$$A = \left[\frac{2I}{\rho\omega^2 v}\right]^{1/2} = \left[\frac{(2)\left(10^{-6}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)}{\left(1{,}21\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(2\pi\left[3000\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]^2\right)\left(343\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}\right]$$

$$= 3{,}68\times 10^{-9}\,\text{m}.$$



a) A falhoz rögzített húron a visszaverődés 180°-os fázisváltozással jár.



b) A húr vége függőleges irányban szabadon elmozdulhat, ha kis tömegű súrlódásmentes gyűrűvel van egy függőleges rúdhoz erősítve. Az impulzus fázisváltozás nélkül verődik vissza.

18-12 ábra
A húron haladó lökéshullám visszaverődése. A lökéshullám alakja itt aszimmetrikus, hogy a visszaverődési folyamatot jobban érzékelhetővé tegyük. Hogy van-e fázisváltozás, vagy nincs, az függ, hogy a húr vége hogyan kapcsolódik a falhoz.

18.8 Hullámok visszaverődése

Tekintsünk egyetlen transzverzális lökéshullámot, ami végighalad egy távoli merev falhoz rögzített húron (18-12 ábra). Ha a beeső hullám alulról konkáv („hullámhegy"), akkor a falhoz érkezve felfelé irányuló erőt gyakorol a falra. Ezért Newton harmadik törvénye értelmében a fal ugyanekkora lefelé irányuló erőt fejt ki a húr végére. (Nem lenne reakcióerő, ha a fal nem volna ott.) A faltól a húrra gyakorolt lefelé irányuló erő alulról konvex lökéshullámot („hullámvölgyet") hoz létre, ami ezt követően az ellenkező irányban halad végig a húron. A hullámhegy „visszaverődött". A beeső hullám amplitúdója pozitív értékről a visszavert hullámban negatívra változott, íly módon 180°-os fázisváltozáson ment át.

Ha az előbbiektől eltérően a húr távoli vége függőlegesen szabadon elmozdulhat (18-12b ábra), akkor a lökéshullám megérkezése az amplitúdó megemelkedését okozza. (Valójában az amplitúdó a kétszeresére nő.) Ez a folyamat olyan visszavert lökéshullámot kelt, amelynek amplitúdója pozitív, így ez esetben fázisváltozás nincs.

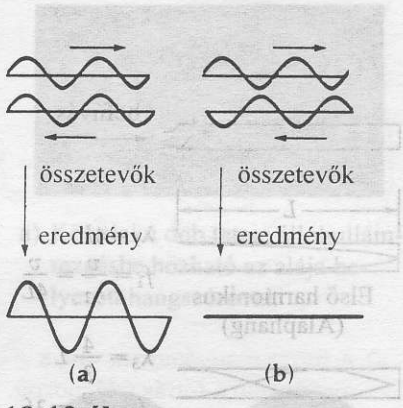
A húr végének függőleges irányú szabad mozgását úgy biztosíthatjuk, hogy azt egy elhanyagolható tömegű gyűrűhöz erősítjük, amely egy végtelen hosszú rúdon függőleges irányban súrlódásmentesen mozoghat. (A rúd egységnyi hosszra eső tömege elhanyagolhatóan kicsi.) A húr lineáris tömegsűrűségében bekövetkező ugrásszerű változás – diszkontinuitás – (μ-ről gyakorlatilag zérusra csökkenés) hozza létre a visszavert lökéshullámot. Ha μ a gyűrű után nagyobbá válik, a visszavert hullámlökés 180° fázisváltozást szenved. Ha μ csökken, nincs fázisváltozás. Általában, minden diszkontinuitás egyaránt létrehoz visszavert és átengedett lökéshullámot. Ezek amplitúdói a diszkontinuitás típusától függenek. A beeső lökéshullám energiája megoszlik a visszavert és az átengedett lökéshullámok között, így ezek amplitúdói kisebbek, mint a beérkező hullám amplitúdója.

Elérhető, hogy a hullámlökés 100% -osan átmenjen a diszkontinuitáson, és így ne lépjen fel visszaverődés. Ez akkor következik be, ha μ elhanyagolható ütemben csökken, azaz a teljes változás (a lökéshullám hosszához képest) nagy távolságon következik be, vagyis, ha a diszkontinuitás kellőképpen fokozatos. Az egyetlen frekvenciát tartalmazó hullámvonulatra (tehát nem az egyetlen lökéshullámra) μ diszkontinuitásának rövid távon történő „kisimítását" teszi lehetővé az alábbi módszer: két húr közé egy „illesztőtag"-nak nevezett, egynegyed hullámhossz hosszúságú húrszakaszt illesztenek. Bebizonyítható, hogy ha az illesztőtag egységnyi hosszra eső tömege a két húr egységnyi hosszra eső μ_1 és μ_2 tömegének $\sqrt{\mu_1\mu_2}$ mértani közepével egyenlő, akkor visszaverődés nem lép fel. Ennek az antireflexiós technikának a fizika más ágában is van megfelelője: példa rá a fényképezőgépek objektívjének antireflexiós bevonata. Az „illesztőtag" egy olyan, negyedhullámhossz vastagságú bevonat, ami megakadályozza egyes frekvenciák visszaverődését. (Az itt illesztendő paraméterek az üveg és a levegő „törésmutatói", ezek a tényezők határozzák meg az elektromágneses hullámok terjedési sebességét . Lásd a 38. fejezetet.)

18.9 A szuperpozíció elve, állóhullámok

Ha egy kifeszített húron két azonos frekvenciájú hullám egymással szemben halad, akkor **állóhullámot** hoz létre. Az állóhullámok képezik a hangszerek működésének alapjait. Állóhullámok a következőképpen jönnek létre.

Tekintsük a 18-13 ábrán látható két egyenlő amplitúdójú és hullámhosszú, ellentétes irányban haladó hullámot! A kitérések összegeződnek, vagy *szuperponálódnak*, stacionárius hullámalakot képeznek, amelyben bizonyos pontok rögzítve maradnak, míg az összes többi az időben azonos frekvenciával rezeg. Azt a tényt, hogy két vagy több kitérés ilyen módon összegeződik, **szuperpozíció elvként**[9] ismerjük. Minthogy a hullámegyenlet *lineáris*, ezért megoldásainak ay_1+by_2 alakú lineáris kombinációja ugyancsak megoldása az egyenletnek. A szuperpozíció elve alkalmazható (legalábbis közelítőleg) mindenféle kis amplitúdójú hullámmozgásra: vízhullámokra, hanghullámokra, elektromágneses hullámokra, és így tovább. A két kitérés fázisától függően az összegezés **erősítő interferenciát** (amplitúdó növekedést), vagy **gyengítő interferenciát** (amplitúdó csökkenést) eredményezhet.



18-13 ábra
Ha ellentétes irányban haladó hullámok szuperponálódnak, a) kétszeres, b) zérus, vagy e két érték közötti bármekkora amplitúdójú kitérés jöhet létre.

Az állóhullámok jellegzetességei matematikailag könnyen bemutathatók. Tekintsünk két, ellenkező irányban haladó, azonos amplitúdójú, azonos frekvenciájú és azonos hullámhosszúságú hullámot:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \qquad (+x \text{ irányban})$$

$$y_2 = A\sin(kx + \omega t) \qquad (-x \text{ irányban})$$

A szuperpozíció elvét alkalmazva megadhatjuk a hullámegyenlet más lehetséges megoldását is:

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \qquad \textbf{(18-31)}$$

A megoldás helyessége a (18-8) egyenletbe közvetlen behelyettesítéssel igazolható. A két szög szinuszának összegét adó

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x + y)\cos\frac{1}{2}(x - y) \qquad \textbf{(18-32)}$$

trigonometrikus összefüggést felhasználva a megoldás így írható:

Állóhullámok $$y = [2A\sin(kx)]\cos(\omega t) \qquad \textbf{(18-33)}$$

A függvény első tényezője, $2A\sin(kx)$, a húr x pontjához tartozó amplitúdót jelenti, a második tényező, $\cos(\omega t)$, leírja a húr bármely pontjának azonos ω körfrekvenciával végzett egyszerű harmonikus rezgő mozgását.

A *minimális* amplitúdójú (nyugalomban lévő) pontokat (18-14 ábra) **csomópontoknak** nevezzük. Az amplitúdó azokon a helyeken zérus, ahol

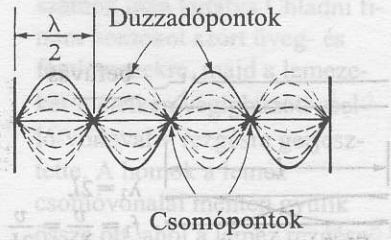
$$kx = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$

vagy, mivel $k = 2\pi/\lambda$,

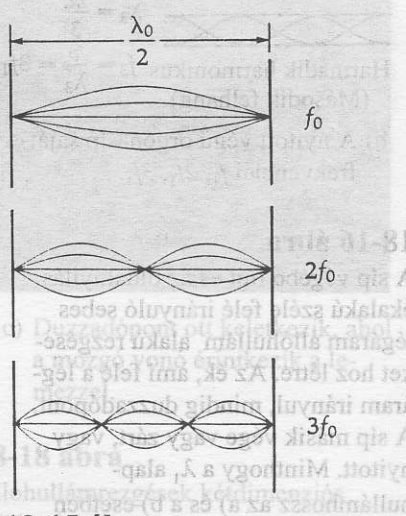
$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}\ldots \qquad \text{(a csomópontok helye)}$$

Tehát: A csomópontok közötti távolság $= \dfrac{\lambda}{2}$.

A *maximális* amplitúdójú helyeket **duzzadópontoknak** nevezzük, ezek a csomópontok közötti távolság felezőpontjában vannak:

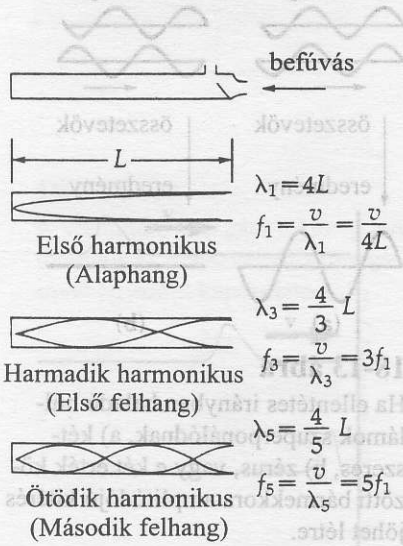


18-14 ábra
Az állóhullámmal kapcsolatos rezgéskép. A szomszédos csomó-pontok távolsága fél hullámhossz.

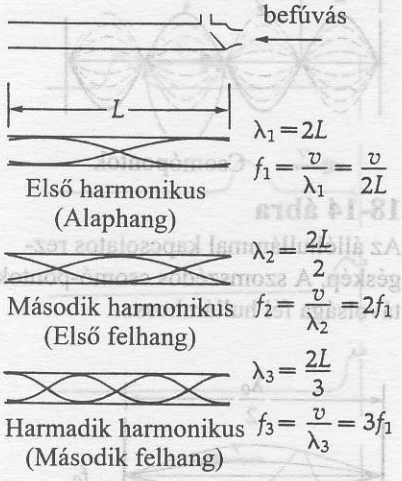


18-15 ábra
Az állandó hosszúságú húron kialakuló állóhullámok frekvenciaviszonyai egész számokkal fejezhetők ki.

[9] A szuperpozíció elvét gyakran használja a fizika, mert ez az egyszerűsítő matematikai tárgyalásmód a kis amplitúdókra rendszerint helytálló. De megjegyezzük, hogy az elv alkalmazása nem vezet mindig helyes eredményre. Ha például nem teljesül a Hooke-törvény (mint ahogyan ez a helyzet a nagy amplitúdójú mozgásoknál), akkor két hullám együttes hatása nem írható le azzal, hogy a két hullámot összeadjuk. A Hi-fi rajongók ezt a jelenséget *intermodulációs torzításként* ismerik . Akkor jelentkezik, ha két szimultán hangzó frekvencia a rendszer nemlineáris tulajdonsága miatt járulékos frekvenciákat hoz létre.



a) A zárt végű orgonasíp sajátfrekvenciái f_1, $3f_1$, $5f_1$, . . .



b) A nyitott végű orgonasíp sajátfrekvenciái f_1, $2f_1$, $3f_1$, . .

18-16 ábra

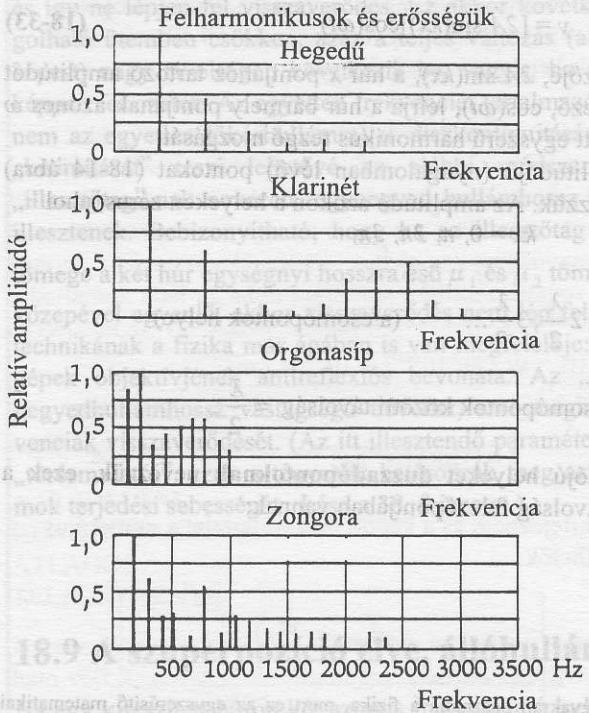
A síp végébe fújt és az oldalnyílás ékalakú széle felé irányuló sebes légáram állóhullám alakú rezgéseket hoz létre. Az ék, ami felé a légáram irányul, mindig duzzadópont. A síp másik vége vagy zárt, vagy nyitott. Minthogy a λ_1 alaphullámhossz az a) és a b) esetben különböző, az egyenlő hosszúságú sípok alap-frekvenciái különbözőek. A sípokban egyidejűleg általában több ilyen rezgésképp is kialakulhat.

$$kx = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \ldots$$

$$x = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \ldots$$ (a duzzadópontok eloszlása)

Ha a húr a csomópontokban rögzítve van, akkor az állóhullámalakú rezgések végtelen hosszú ideig tartanak (feltéve persze, hogy nincs energiadisszipáció, súrlódás, hangenergia kisugárzása, vagy a rögzített pontok berezgése következtében). Ez azért van, mert stacionárius rezgések esetén az energia nem tud a csomóponton átáramlani. Ezzel szemben a húr minden pontja (transzverzális irányban) egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez és pedig úgy, hogy a szomszédos csomópontok között lévő pontok azonos fázisban vannak. Viszont azok a pontok, amelyek egyetlen csomópontot fognak közre, egymáshoz képest 180°-os fáziseltéréssel mozognak. Minthogy a húr rögzített végein csomópontoknak kell lenniük, ezért a húr teljes hosszára *a fél hullámhossz egészszámú többszöröse „fér rá"*. A húr egyidejűleg különböző frekvenciákkal is rezeghet (18-15 ábra). Így egy adott húron egész „frekvenciacsalád", az ún. **harmonikus frekvenciák** : f_1, $2f_1$, $3f_1$, . . . jöhetnek létre. A sorozat minden „megengedett" frekvenciája egyértelműen a két végén rögzített húr csomópontjai által van meghatározva. A legkisebb f_1 frekvenciát **alapfrekvenciának** nevezzük, a nagyobbak rendre a **második harmonikus**, a **harmadik harmonikus**, és így tovább. Ezek frekvenciája az alapfrekvencia egészszámú többszöröse.

Hasonló harmonikus sorozatok határozzák meg a nyitott végű és a zárt végű orgonasípokban kialakuló álló hanghullámokat (18-16 ábra). A rezonancia esetében előálló állóhullám a síp zárt végén mindig csomópontot képez, a duzzadóponttok általában a nyitott végeken és esetleg a levegőbefúvás helyén (a rezgéskeltés helyén) lépnek fel. A zárt végű orgonasípoknál minden páros harmonikus hiányzik. Egy adott hangszer esetén az egyidejűleg megszólaló harmonikusainak száma és amplitúdója szabja meg a hangok „színezetét", ami az egyes hangszereket megkülönbözteti egymástól. (18-17 ábra.)



18-17 ábra

Az eltérő amplitúdójú harmonikus felhangok egyidejű megszólalása okozza az egyes hangszerek jellegzetes hangszínét, ami őket megkülönbözteti egymástól. A legkisebb frekvenciájú rezgés adja a hangszer alaphangját.

A kétdimenziós membránokon és a háromdimenziós tárgyakon is keletkeznek állóhullámok, amint ezt a 18-18 ábra illusztrálja. Az ilyen esetekben a különféle rezgésiképekhez tartozó sajátfrekvenciák *nem* alkotnak olyan harmonikus sorozatot, amely valamilyen alapfrekvencia egészszámú többszöröseiből állna. Ehelyett a frekvenciák (egyszerűbb esetekben) a Bessel függvényekkel és más speciális matematikai függvényekkel vannak kapcsolatban. Általában az állóhullámok képét *csomóvonalak* és *csomófelületek* jellemzik. A háromdimenziós állóhullámrezgések tanulmányozása a fizika és a műszaki tudományok sok területén fontos feladat. Erre nyilvánvaló példaként a hangszórók tervezését említjük. Bizonyára jelentősebb ennél az atommodellek állóhullám-képeinek tanulmányozása. Ezek hasznos vizuális és matematikai modelleket eredményezhetnek, amelyekből számos atomfizikai adatra lehet magyarázatot találni. (Lásd a 44. fejezetet.)

18-4 PÉLDA

A hegedű E húrja 33 cm hosszú, és lineáris tömegsűrűsége $5{,}46\times10^{-4}$ kg/m. Mekkora F erővel kell feszíteni, hogy alapfrekvenciája 660 Hz legyen?

MEGOLDÁS

Az alapfrekvenciához tartozó állóhullám hullámhosszának fele a húr ℓ hosszával egyenlő. Ezért:

$$\lambda = 2\ell = 2(33\,\text{cm}) = 66\,\text{cm}\underbrace{\left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)}_{\substack{\text{Átszámítási}\\ \text{tényező}}} = 0{,}660\,\text{m}$$

A húr hullámainak sebessége így kapható meg:

$$v = f\lambda = \left(660\,\text{s}^{-1}\right)(0{,}660\,\text{m}) = 436\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ezután az F feszítőerő:

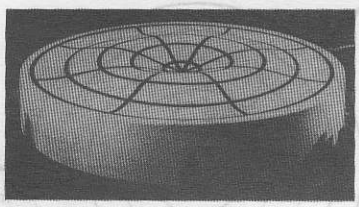
$$\frac{F}{\mu} = v^2$$

$$\text{vagy}\quad F = (\mu)\left(v^2\right) = \left(5{,}46\times10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)\left(436\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 104\,\text{N}.$$

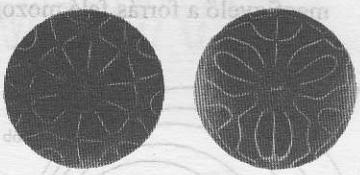
18.10 A Doppler jelenség

A megfigyelő által észlelt hang frekvenciája nemcsak az észlelő és a hangforrás relatív mozgásától függ, hanem attól is, hogy az észlelő vagy a hangforrás mozog-e ahhoz a közeghez viszonyítva, amelyikben a hang terjed. Ezt a jelenséget először Christian Doppler osztrák fizikus értelmezte 1842-ben.

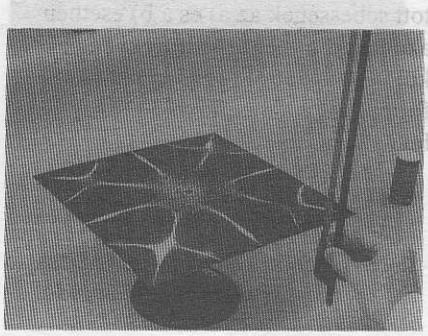
Tárgyalásunkat a következő két esettel kezdjük: amikor a *megfigyelő* mozog a közeghez képest, és amikor a *forrás* mozog a közeghez képest. Tekintsünk egy f frekvenciájú hangot kibocsátó forrást. Ha a forrás nyugalomban van az álló levegőhöz képest, akkor λ a hullámhossz a levegőben, és a hanghullámok v sebességgel terjednek. Az egy helyben maradó megfigyelő egy másodperc alatt $f = v/\lambda$ számú rezgést észlel. Ha azonban a megfigyelő a



a) Kör alakú dob teteje állóhullám-rezgésbe hozható az alája helyezett hangszóróval.

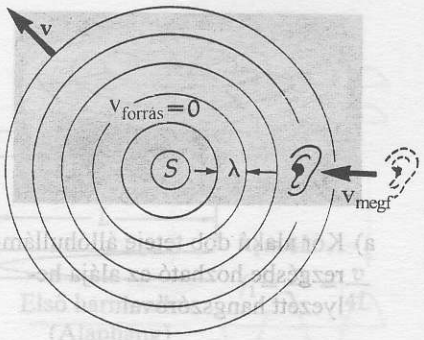


b) Ezeket a csomóvonal alakzatokat felfedezőjükről, a német Ernst F. Chladniról, Beethoven kortársáról, *Chladni ábráknak* nevezik. 1787-ben új zeneszerszámok után kutatva Chladni finom homokot szórt üveg- és fémlemezekre, majd a lemezeket – éleiken végighúzott csellóvonóval – rezgésre gerjesztette. A homok a lemez csomóvonalai mentén gyűlik össze ott, ahol a lemez rezgése elhanyagolható, , íly módon a csomóvonalak láthatóvá válnak.

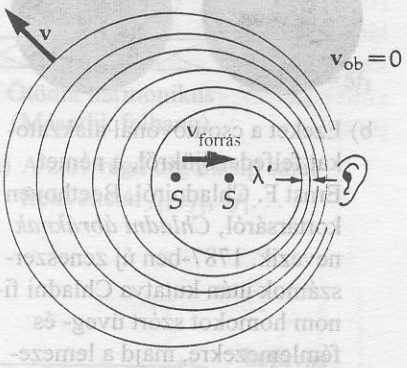


c) Duzzadópont ott keletkezik, ahol a mozgó vonó érintkezik a lemezzel.

18-18 ábra
Állóhullámrezgések kétdimenziós felületeken.



a) A forrás nyugalomban van, a megfigyelő a forrás felé mozog.



b) A megfigyelő nyugalomban van, a forrás a megfigyelő felé mozog.

18-19 ábra
A forrás vagy a megfigyelő mozgásából származó Doppler jelenség. A sebességek a közeghez (levegőhöz) vannak viszonyítva. Bár a viszonyított sebességek az a) és a b) esetben azonosak, a megfigyelt frekvenciák különbözők attól függően, hogy a forrás, vagy a megfigyelő mozog-e a levegőben.

forrás *felé* mozog v_{megf} sebességgel a közeghez (levegőhöz) képest, akkor másodpercenként több rezgést észlel. Azon kívül, hogy érzékeli azt a v/λ számú rezgést, amit nyugvó helyzetben is érzékelne, további, v_{megf}/λ számú rezgést (amennyinek egy másodperc alatt „elébe megy") is érzékel (18-19a ábra). Így tehát az észlelt f' frekvencia:

$$f' = \left(\frac{v}{\lambda} + \frac{v_{megf}}{\lambda}\right) = f\left(\frac{v + v_{megf}}{v}\right) \quad \text{(mozgó megfigyelő)} \quad \textbf{(18-34)}$$

Ha pedig a forrás mozog a megfigyelő felé a közeghez képest $v_{forrás}$ sebességgel, akkor a hang hullámhossza megrövidül. Egy másodperc alatt a $(v - v_f)t$ hosszú távolságon f rezgés nyomódik össze. Így a levegőben a hullámhossz csökken: $\lambda' = (v - v_{forrás})/f$, és a helyben maradó megfigyelő által észlelt frekvencia:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = f\left(\frac{v}{v - v_{forrás}}\right) \quad \text{(mozgó forrás)} \quad \textbf{(18-35)}$$

Ha a mozgások ellentétes irányúak, akkor v_{megf} és $v_{forrás}$ előjelei megfordulnak.

A két effektust egyetlen formulában is összefoglalhatjuk:

A Doppler jelenség hang esetében

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_{megf}}{v \mp v_{forrás}}\right) \quad \textbf{(18-36)}$$

A v_{megf} és a $v_{forrás}$ sebességeket *a közeghez képest* kell mérni. Az előjeleket annak megfelelően kell megválasztani, hogy az észlelt frekvencia a forrás és a megfigyelő relatív *közeledésekor nagyobb*, és relatív *távolodásakor kisebb*.

18-5 PÉLDA

Alacsonyan szálló repülőgép a föld fölött 200 m/s sebességgel suhan egy helyben álló megfigyelőhöz közelítve. A repülőgépre erős hangú, 400 Hz alapfrekvenciájú kürt van szerelve. a) Mekkora frekvenciájú hangot hall a talajon álló megfigyelő? b) Tegyük fel, hogy a kürtöt a földön szólaltatnák meg. Mekkora frekvenciát hallana a közelítő pilóta? A levegő a földhöz képest nyugalomban van. Gázokban a hangsebesség független a nyomástól, de függ a hőmérséklettől. Ebben a példában a hang terjedési sebességét vegyük 340 m/s -nak.

MEGOLDÁS

Ez esetben a forrás és a megfigyelő közeledik egymáshoz, ezért a Doppler jelenség képletében az előjeleket a következő módon kell megválasztani:

$$f' = f\left(\frac{v + v_{megf}}{v - v_{forrás}}\right)$$

a) Mivel $v_{megf} = 0$, ezért

$$f' = f\left(\frac{v}{v - v_{forrás}}\right) = f\left(\frac{1}{1 - \frac{v_{forrás}}{v}}\right) = \left(400\,\mathrm{s^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{200\,\mathrm{m/s}}{300\,\mathrm{m/s}}}\right).$$

$$= 971\,\mathrm{Hz}$$

b) Itt most $v_{forrás} = 0$, így

$$f' = f\left(\frac{v + v_{megf}}{v}\right) = f\left(1 + \frac{v_{megf}}{v}\right) = \left(400\,\mathrm{s}^{-1}\right)\left(1 + \frac{200\,\mathrm{m/s}}{340\,\mathrm{m/s}}\right).$$
$$= 635\,\mathrm{Hz}$$

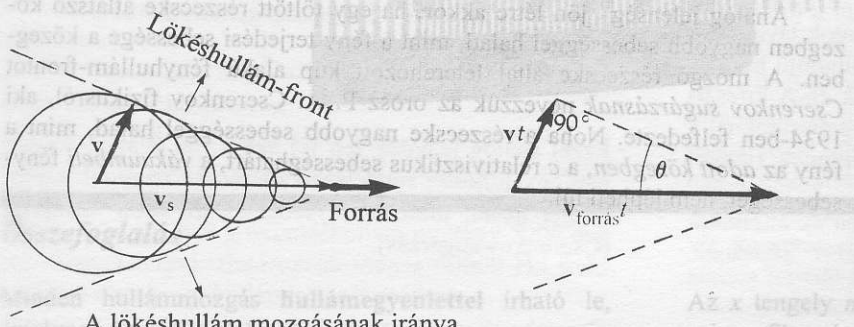
Figyeljük meg: noha a forrás és a megfigyelő mindkét esetben közelít egymáshoz, az észlelt frekvencia attól függően különböző, hogy melyikük mozog a közeghez viszonyítva.

18.11 A lökéshullámok

A (18-35) egyenlet érvényét veszti, ha $v_{forrás}$ vagy v_{megf} a v hangsebességnél nagyobbá válik. Ez a helyzet áll elő , ha egy szuperszónikus repülőgép nagyobb sebességgel repül, mint a hang terjedési sebessége a levegőben. Az ilyen esetekben hirtelen felerősödő nagynyomású hullámfront, *lökéshullám* jön létre, ami a talajra érve „hangrobbanást" okoz. A 18-20 ábra vázolja a lökéshullám-front kialakulását. A mozgó forrás gömbhullám-frontokat hoz létre, amelyek a forrás pályájának különböző pontjaiból indulnak ki. A hullámfrontok külső széle *Mach kúpnak*[10] nevezett kúp alakú burkolót képez, amelynek fél nyílásszöge θ. A geometriai viszonyokból kitűnik, hogy

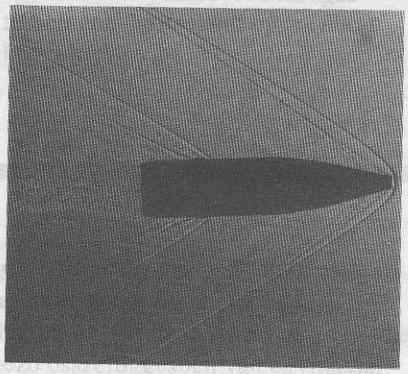
A Mach kúp nyílásszöge $$\sin\theta = \frac{v}{v_{forrás}} \qquad \textbf{(18-37)}$$

A $v/v_{forrás}$ arányt *Mach-féle számnak* nevezzük. Ha azt mondjuk, hogy egy repülőgép 1,8 Mach sebességgel halad, akkor ez azt jelenti, hogy a gép sebessége 1,8 -szer akkora, mint a hang terjedési sebessége a környező levegőben.



a) A hangforrás nagyobb $v_{forrás}$ sebességgel halad, mint a hang v terjedési sebessége a közegben. A gömbhullám-frontok eredője minden pillanatban *Mach kúpnak* nevezett kúp alakú lökéshullámot képez.

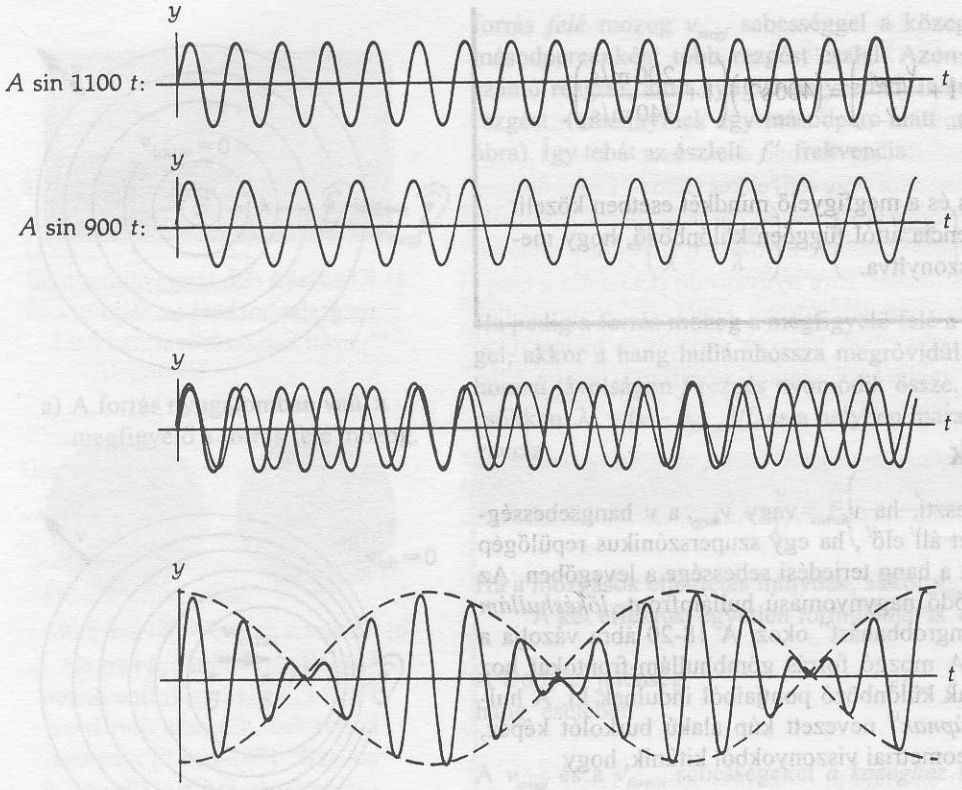
b) t idő alatt a hanghullámok vt utat tesznek meg, míg a forrás elmozdulása $v_{forrás}t$. Így $\sin\theta = v/v_{forrás}$.



c) A fénykép szuperszónikus lövedék lökéshullámait mutatja.

18-20 ábra
A lökéshullám kialakulása.

[10] Ernst Mach (1838-1916), osztrák fizikus és filozófus. Híres könyve, *The Science of Mechanics*, a newtoni mechanika történeti fejlődésének éles kritikája.



a) Két különböző, $\omega_1 = 1100$ rad/s és $\omega_2 = 900$ rad/s frekvenciájú hanghullám.

b) A két hullám közös grafikonon ábrázolva.

c) A két hullám összegeződése olyan hullámot eredményez, amelynek amplitúdója a két frekvencia $\omega_1 - \omega_2 = 200$ rad/s különbségével változik.

18-21 ábra
Két különböző frekvenciájú hullám szuperpoziciója.

Analóg jelenség[11] jön létre akkor, ha egy töltött részecske átlátszó közegben nagyobb sebességgel halad, mint a fény terjedési sebessége a közegben. A mozgó részecske által léterehozott kúp alakú fényhullám-frontot *Cserenkov sugárzásnak* nevezzük az orosz P. A. Cserenkov fizikusról, aki 1934-ben felfedezte. Noha a részecske nagyobb sebességgel halad, mint a fény az *adott közegben*, a c relativisztikus sebességhatárt, a *vákuumbeli* fénysebességet, nem lépheti túl.

18.12 A lebegés

Ha két hanghullám ugyanazon a ponton megy át, akkor kitéréseik a szuperpozíció elvének megfelelően összegeződnek. Ha amplitúdójuk egyenlő és frekvenciájuk csak kevéssel különböznek, akkor összegezésük eredménye a 18-21 c) ábrán látható. Az eredő amplitúdóváltozás **lebegés** néven ismert.

$$y_1 = A \sin \omega_1 t \qquad (\text{ahol } \omega_1 = 2\pi f_1)$$

$$y_2 = A \sin \omega_2 t \qquad (\text{ahol } \omega_2 = 2\pi f_2)$$

$$y = y_1 + y_2 = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \qquad \textbf{(18-38)}$$

[11] A vízhullámok esetében sokkal bonyolultabb a helyzet . A hajó V alakú sodorhullámának fél nyílásszöge mindig $\theta = \arcsin(1/3)$, *függetlenül a hajó sebességétől*. Lásd H. D. Keith, *American Journal of Physics* , **25** (1957), p. 466.

Felhasználva a

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \textbf{(18-39)}$$

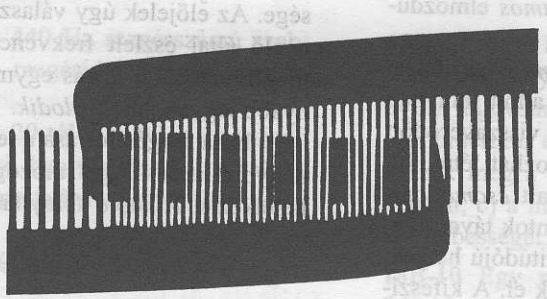
trigonometrikus összefüggést, a (18-38) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$y = \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]}_{\text{A rezgési frekvencia}}\underbrace{\left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]}_{\text{Amplitúdó változás}} \qquad \textbf{(18-40)}$$

Az eredő kitérés az átlagos $(f_1+f_2)/2$ frekvenciával rezeg, az amplitúdó pedig az (f_1-f_2) *lebegési frekvenciával*[12] ingadozik.

Az emberi fül érzékenysége *nemlineáris*. Ennek következményeképpen két elegendő erősségű f_1 és f_2 frekvenciát úgy érzékel, mint két hangot, valamint ezek különféle kombinációit (mint pl. f_2-f_1, $2f_2-f_1$, $3f_1-f_2$, stb.). Ha az f_2-f_1 különbség kevesebb, mint $\approx$ 15 Hz, akkor ezek a *különbségi hangok* a lebegéshez hasonlóan érzékelődnek. A lebegési frekvencia érzékelése nem a fül nemlinearitásának, hanem, amint rámutattunk, amplitúdóingadozások sorozatának következménye.

[12] Az amplitúdó maximális, valahányszor $\cos 2\pi[(f_1-f_2)/2]\,t$ egyenlő ± 1. Mindkét érték egyszer fordul elő egy ciklusban, így a maximális amplitúdójú kitérések száma másodpercenként $2(f_1-f_2)/2 = (f_1-f_2)$. Ez a lebegési frekvencia.



18-22 ábra
Két különböző fogtávolságú fésű egymásra helyezésével a *lebegés* térbeli analogonjaként moiré ábrát kapunk.

Összefoglalás

Minden hullámmozgás **hullámegyenlettel** írható le, amelynek általános alakja

A hullám-egyenlet (egy dimenzióban)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

A hullámokat két általános osztályba soroljuk: *transzverzális* és *longitudinális* hullámok. A kifeszített húron haladó kis amplitúdójú transzverzális szinuszhullámokat a hullámegyenlet alábbi megoldása írja le:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

ahol y = a húr transzverzális kitérése
A = az amplitúdó (a maximális kitérés)
x = a távolság a húr mentén
t = az idő
k = a hullámszám = $2\pi/\lambda$
ω = a körfrekvencia = $2\pi/T = 2\pi f$.

Az x tengely *negatív* irányában haladó hullámoknál a szinuszfüggvény argumentuma $(kx + \omega t)$.

A λ hullámhossz, az f frekvencia és a v terjedési sebesség a következő összefüggésben van egymással:

$$\lambda f = v$$

Egy teljes rezgés időtartama a $T = 1/f$ periódusidő; ennélfogva:

$$\frac{\lambda}{T} = v.$$

Egy F erővel kifeszített, μ lineáris tömegsűrűségű húron a hullám v terjedési sebessége

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

A *decibel* (dB) egységben mért β *intenzitásszint*:

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

ahol $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, a referencia-intenzitás.

A húron áthaladó hullám átvitt *P átlagos teljesítménye*:

$$\text{Átlagos teljesítmény} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\right)}_{\text{Egységnyi hosszra jutó átlagos energia}}(v)$$

ahol μ az egységnyi hosszúságra jutó tömeg. A síkbeli hanghullámok által az egységnyi felületen átvitt átlagos teljesítmény, vagy *az átlagos energiaáramsűrűség*, $I_{átl}$

$$\text{Hanghullámra } I_{átl} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\right)}_{\text{Az egységnyi térfogat átlagos energiája}}(v)$$

ahol ρ a közeg térfogategységre eső tömege, vagy sűrűsége.

A húr mentén terjedő hullámok a húr rögzített végéről 180°-os fázisváltozással, a szabad végről azonos fázisban verődnek vissza. Az általános $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$ egyenlet *longitudinális* szinuszhullámokat is leír, ha az y kitérést a részecskék egyensúlyi helyzetüktől mért, a hullámterjedés irányával *párhuzamos* elmozdulásaként értelmezzük.

A hullámok összeadódva (*szuperponálódva*) interferencia jelenséget hozhatnak létre. Egy adott irányban haladó hullám a vele szemben haladó visszaverődött hullámmal interferálva állóhullámokat hozhat létre. Az állóhullám minimális amplitúdójú pontjait *csomópontoknak* nevezzük, a szomszédos csomópontok távolsága $\lambda/2$. A *duzzadópontok* a maximális amplitúdójú helyek, ezek a csomópontok között helyezkednek el. A kifeszített húr rögzített végei csomópontok. Orgonasípoknál a zárt végek csomópontok, és a duzzadópontok (lényegében) a nyitott végeknél vannak.

A két- és a háromdimenziós esetben az állóhullámok *csomóvonalakat* és *csomófelületeket* képeznek.

Kérdések

1. A zenészek gyakran hangmagassággal, hangerősséggel és hangszínnel (hangminőséggel) jellemzik a hangokat. Nevezzük meg a hanghullámok azon fizikai jellemzőit, amelyek az előbb felsorolt tulajdonságoknak felelnek meg!
2. Szilárd testekben terjedő transzveriális és longitudinális hullámok egyaránt a közeg olyan mozgásával kapcsolatosak, amelyekben a kitérések *lineáris* harmonikus rezgések. Tudnánk-e hullámmozgást kelteni *torziós* harmonikus rezgés segítségével? Milyen lenne ez a hullám?
3. Amikor a legközelebb insztant kávéból kávét készítünk, végezzük el az alábbi kísérletet: töltsük meg az insztant kávét tartalmazó kerámia- vagy üvegcsészét olyan vizzel, ami éppen felforrt. Közvetlenül ezután kocogtassuk a csésze peremét a kanalunkkal! A kocogtatás hangmagassága számottevő mértékben változik. Magyarázzuk meg a jelenséget! (Megjegyzés: a kísérlet műanyagpohárban nem sikerül.)
4. Tegyük fel, hogy a hang terjedési sebessége a levegőben a frekvenciának függvénye, mégpedig a nagyobb frekvenciákhoz nagyobb sebesség tartozik. Hogyan módosulnának a lemezjátszó hangszórójából terjedő zenei hangok, miközben a hangszórótól fokozatosan távolodunk? Az átlátszó közegben (pl. a vízben) terjedő fény sebessége frekvenciafüggő. Mi lenne az imént leírt hangtani jelenség vízuális megfelelője?
5. Tegyük fel, hogy egy meghatározott hangú hangforrás rögzített távolságra van tőlünk. Változik-e az észlelt hang magassága, ha a forrás felől állandó

Minden rezgő rendszerhez tartozik egy „megengedett" frekvenciacsalád, az un. sajátfrekvenciák családja, amely a rendszer összes lehetséges létező állóhullámának felel meg. Mechanikai rendszerek egyidejűleg egynél több sajátfrekvenciával is rezeghetnek.

Ugyanabban az irányban haladó két különböző frekvenciájú hullám összeadódhat. Az eredő hullám amplitúdója az $(f_1 - f_2)$ *lebegési frekvenciával* változik. Hanghullámok esetén az emberi fül számára az f_1 és az f_2 eredeti frekvenciák mellett az $f_1 - f_2$ különbségfrekvencia is érzékelhető.

A különböző frekvenciákat tartalmazó összetett hullámok a Fourier-analízis néven ismert módszerrel szinusz- és koszinuszhullámok összegeként is előállíthatók. (F függelék.)

Ha a hangforrás vagy az észlelő a hangterjedés közegéhez viszonyítva mozog, az észlelt hang f' frekvenciája megváltozik:

Doppler jelenség (hang esetében)

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_{megf}}{v \mp v_{forrás}}\right)$$

ahol f a hangforrás frekvenciája, v a terjedési sebesség a közegben, v_{megf} a megfigyelő közeghez viszonyított sebessége, $v_{forrás}$ a hangforrás közeghez viszonyított sebessége. Az előjelek úgy választandók meg, hogy a megfigyelő által észlelt frekvencia magasabb legyen, ha a megfigyelő és a forrás egymáshoz *közeledik*, és alacsonyabb legyen, ha *távolodik*.

Ha a rezgés forrása a levegőben a hangsebességnél nagyobb sebességgel mozog, akkor kúpos *lökéshullám* keletkezik. A kúp θ félnyílásszögének szinusza:

$$\sin\theta = \frac{v}{v_{forrás}}$$

Ezzel analóg jelenség lép fel akkor, ha átlátszó anyagban egy töltéssel rendelkező részecske nagyobb sebességgel halad, mint a fénysebesség az adott anyagban (Cserenkov sugárzás).

szél fúj felénk? Mi történne, ha a szél felőlünk fújna a hangforrás felé? Mi történne mindkét esetben, ha a hang észlelése közben a szél zérus sebességről indulva egy végső állandó sebességre erősödne?

6. Aki már lakott bérházban, az bizonyára tapasztalta, hogy a szomszédok lemezjátszójából a basszus hangok erőteljesebben hallatszanak át, mint a nagyobb frekvenciájú hangok. Mi köze van ennek a szomszédos lakásokat elválasztó falak hangabszorpciójának frekvenciafüggéséhez? Elemezzük a jelenség fizikai alapjait.
7. Zárt zuhanyozófülkében csukott szájjal dúdoljunk különböző frekvenciájú hangokat, és figyeljük meg, melyekre rezonál jobban a fülke! Magyarázzuk meg, miért rezonál jobban a tömör márványfalú, mint a puhafával borított falú fülke.
8. Énekeljünk állandó hagmagasságú hangot, közben formáljuk szájunkat egymás után az a, e, i, o, u magánhangzóknak megfelelően! Írjuk le, hogyan változnak a hang frekvenciakomponensei az egyes magánhangzók esetében.
9. Tartsunk fülünk elé rezgő hangvillát, a szárak függőlegesen álljanak! Forgassuk a hangvillát szimmetriatengelye körül. Miért változik meg a hang erőssége a forgatás közben?
10. Különböző magánhangzók (pl. „e", „a", „o") mindegyike kimondható a hangszalag azonos frekvenciájú alaphangját alkalmazva. A hangok eltérő felhang tartalma a torok és a száj rezonátorüregének alakításával érhető el. A héliummal (amiben a hang terjedési sebessége a levegőbelinek kb. háromszorosa) teleszívott tüdővel kiadott beszédhang jellemzői jelentősen megváltoznak. Elemezzük, milyen változások következhetnek (vagy nem következhetnek) be, ha héliummal telt tüdővel beszélünk.

Feladatok

Hacsak nincs másként megadva, a hang terjedési sebességét vegyük 344 m/s -nak .

18.4 A hullámegyenlet megoldása egy speciális esetben
18.5 A hullám terjedési sebessége

18A-1 Határozzuk meg a 440 Hz rezgésszámú szabványos zenei „A" hang a) rezgésidejét és b) hullámhosszát a levegőben.

18A-2 Az emberi fül a kb. 20-tól 20000 Hz -ig terjedő frekvencia-intervallumba eső hanghullámokat érzékeli. Határozzuk meg ezek (centiméterben mért) hullámhosszát a levegőben.

18A-3 Igazoljuk, hogy a (18-23) egyenlet jobb oldalának dimenziója *sebesség*.

18A-4 Egy 8 m hosszú kötél teljes tömege 500 g. A kötél 430 N erővel van kifeszítve. Határozzuk meg a kötélen terjedő transzverzális hullám sebességét.

18A-5 Az acélban a nyomáshullám mintegy 5000 m/s sebességgel terjed. Határozzuk meg a 60000 Hz frekvenciájú ultrahang hullámhosszát acélban.

18B-6 Egy síkbeli hanghullám frekvenciája levegőben 440 Hz. Adott pillanatban és adott pontban a hangnyomás $p_0/3$, ahol p_0 a hullám amplitúdója (a levegő átlagos atmoszférikus nyomásához viszonyítva). Határozzuk meg ebben a pontban p_0 függvényében a hullám nyomásának két lehetséges értékét 1 milliszekundummal későbbi időpontban.

18B-7 Egy húr mentén az x tengely pozitív irányában 200 m/s sebességgel haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,7 mm, hullámhossza 20 cm. Határozzuk meg (SI egységekben) a hullámot leíró $y = A \sin(kx - \omega t)$ egyenletben szereplő A, k és ω mennyiségek számértékét.

18B-8 Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s. a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt $y = A \sin(kx - \omega t)$ alakban. b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,10 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

18B-9 Egy hanghullám levegőben haladva (az atmoszférikus nyomáshoz viszonyítva) $p = 1{,}27 \sin \pi(x - 340t)$ függvénnyel megadott nyomásingadozást létesít. (A numerikus értékek SI egységekkel adottak.) a) Határozzuk meg a nyomásváltozás amplitúdóját, b) a frekvenciát, c) a hullámhosszat levegőben és d) a hanghullám sebességét.

18B-10 Egy robbanóanyaggal megrakott kis csónak felrobban. A hangot egy víz alatt úszó személy meghallja, majd fejét a vízből kiemelve meghallja ugyanannak a robbanásnak másik hangját is, ami kisebb sebességgel a levegőn keresztül érkezett. a) Számítsuk ki a víz kompresszió moduluszából (lásd 13.11 fejezet) a vízben terjedő hang sebességét. b) Ha a két hang érkezésének időkülönbsége 5 s, milyen távol volt az úszó személy a robbanás helyétől?

18B-11 Egy követ elengedve egy kútba ejtünk. A csobbanást pontosan 2 másodperccel később halljuk. Milyen mély a kút?

18B-12 Robbanás történik egy vasuti sínen, a sínen ülő megfigyelőtől 1,7 km távolságban. a) Határozzuk meg az acélsínben terjedő nyomás-hanghullám terjedési sebességét. b) Határozzuk meg a megfigyelő által észlelt két hang időkülönbségét: a sínen keresztül érkező és a levegőn át érkező hang időeltolódását.

18B-13 Egy szerelőmunkás ütemesen szeget kalapál. A kalapács-ütések 0,8 s időközzel követik egymást. A munkástól bizonyos távolságban lévő gyermek megfigyeli, hogy a kalapácsütések hangját az ütések között eltelt időtartam felében hallja. Határozzuk meg, milyen messze van a gyermek a szerelőmunkástól.

18.7 A hullámmozgás energiaviszonyai

18A-14 Valaki a közelben kiáltva a fülünknél 80 dB hangintenzitásszintet hoz létre. Hányszor nagyobb ez a hangintenzitásszint, mint a 20 dB -es suttogásé?

18A-15 Egy 340 m/s sebességgel haladó síkbeli hanghullám energiaáramának közepes sűrűsége 10^{-7} W/m^2. Számítsuk ki a hanghullám 1 cm^3 levegőtérfogatban lévő átlagos energiáját.

18A-16 Egy fájdalmat keltő 2000 Hz frekvenciájú hang közepes energiaáramsűrűsége 1 W/m^2. Számítsuk ki a levegőmolekulák rezgésének amplitúdóját az 1,21 kg/m^3 sűrűségű levegőben 342 m/s hangsebesség mellett.

18B-17 Egy 1000 Hz frekvenciájú hangforrás minden irányban egyenletesen bocsát ki hangot. A forrástól 3 m távolságban lévő megfigyelő 40 dB hangintenzitásszintet mér. Számítsuk ki a forrás átlagos kimenő teljesítményét.

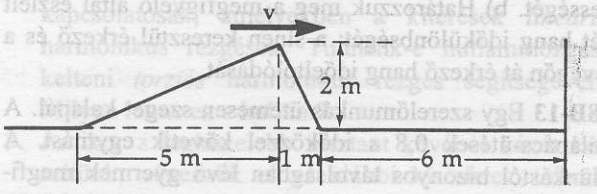
18B-18 Egy bizonyos hanghullám rezgési amplitúdója 50%-kal megnő. Mekkora a hang decibel-szintjének növekedése?

18B-19 Az emberi fül által észlelhető legkisebb intenzitásszint-különbség kb. 0,6 dB. Mutassuk meg, hogy ez a hangforrás által másodpercenként kibocsátott energia kb. 15%-os növekedésének felel meg.

18.8 Hullámok visszaverődése

18A-20 Egy 4 kg tömegű 12 méter hosszú kötél két tartó közé van feszítve. A kötél végére mért éles ütés által okozott lökéshullám a kötél másik végéről 1 másodperc múlva tér vissza. a) Határozzuk meg a kötelet feszítő erőt! b) Másodpercenként hány ütést kell a kötélre mérni, hogy két lökéshullám akkor találkozzék középen, amikor egy-egy lökéshullám a kötél mindkét végéről visszaverődik?

18B-21 Egy kísérletező személy 33 méter távolságra áll egy beton lépcsősor előtt. Egy-egy lépcsőfok magassága 30 cm. A kísérletező egyet élesen tapsol, és figyeli a lépcsősorról érkező visszhangsorozatot. a) Mi lesz a visszhangsorozat alapfrekvenciája, ha a hang terjedési sebessége levegőben 333 m/s? b) Tegyük fel, hogy az előbbitől eltérően a kísérletező személy most egy léckerítés előtt áll, az erre merőlegesen mért l távolságban. A lécek egymástól mért távolsága d. ($l >> d$.) Itt is tapsol egyet tenyerével. Írjuk le, hogy milyen lesz a kerítésről visszaverődő hang. Adjunk magyarázatot a jelenségre.



18-23 ábra
A 18B-22 feladathoz.

18B-22 A 18-23 ábrán látható fűrészfog alakú impulzus 100 m/s sebességgel halad egy kifeszített huzalon. (A transzverzális amplitúdót az ábra túlzottan nagyítva mutatja.) A $t = 0$ időpontban az impulzus vezető éle 6 méterre van a huzal rögzített végétől. Készítsünk vázlatot, amelyen a huzal 0,10 másodperccel későbbi alakja van feltüntetve. Jelöljük be az impulzus jellegzetes méreteit is!

18.9 A szuperpozíció elve, állóhullámok

18A-23 Egy 2 m hosszú húr tömege 1,8 g. Egyik vége egy 60 Hz-cel rezgő vibrátorra csatlakozik. Mekkora feszítő erő hatására alakul ki öt szakaszból álló transzverzális állóhullám a húron?

18A-24 Határozzuk meg az 1 m hosszú orgonasíp legkisebb természetes rezonanciafrekvenciáját 340 m/s hangsebesség esetében, ha a) a síp mindkét vége nyitott, és ha b) a síp egyik vége nyitott, a másik zárt!

18A-25 A piccolo (kisméretű fuvola) teljes hossza 32 cm. Rezonáló légoszlopa úgy rezeg, mint a mindkét végén nyitott síp légoszlopa. a) Határozzuk meg azt a legmélyebb hangot, amit a piccolóval játszani lehet, feltételezve, hogy a hang terjedési sebessége 330 m/s! b) A síp oldalában lévő lyukak a rezonáló légoszlop hosszát lerövidítik. A piccolo legmagasabb hangjának frekvenciája 4000 Hz; határozzuk meg az ennek megfelelően kialakuló állóhullám csomópontjainak egymástól való távolságát.

18A-26 Egy 10^{-3} kg/m lineáris tömegsűrűségű 3 m hosszú húr két pont között van kifeszítve. Az egyik végét transzverzális 200 Hz frekvenciával rezgetik. Mekkora feszítőerő hatására jön létre 3 félhullámból álló állóhullám a húron?

18A-27 Egyik végén zárt orgonasíp alapfrekvenciája 110 Hz. a) Ha a hangsebesség a levegőben 340 m/s, milyen hosszú a síp? b) Milyen hosszú lenne a síp, ha mindkét vége nyitott volna? Mekkora a síp következő állóhullámának frekvenciája az a), illetve a b) kérdés esetén.

18A-28 A cselló A húrjának alapfrekvenciája 220 rezgés/s. A rezgő szakasz hossza 70 cm, tömege 1,2 g. a) Határozzuk meg a húrt feszítő erőt. b) Határozzuk meg annak a harmonikusnak a frekvenciáját, amelynek a húr mentén 3 duzzadópontja van.

18A-29 Vékony sárgaréz rúdban a longitudinális hullámok sebessége 3480 m/s. Határozzuk meg az egyik végén befogott 1 m hosszú sárgaréz rúd longitudinális rezgései során keletkező állóhullámok két legkisebb frekvenciáját. Készítsünk vázlatot az állóhullámok alakjáról.

18B-30 Az alábbi egyenlet egy kifeszített húron kialakult állóhullámot reprezentál: $y = A \sin(2\pi x/\lambda)\sin(2\pi t/T)$. A húr egyik vége az $x = 0$ helyen, másik vége az $x = l$ helyen van rögzítve. a) Határozzuk meg állóhullámok esetében λ és l kapcsolatát! b) Írjuk át (SI egységeket használva) a függvényt arra az esetre, amikor az amplitúdó 2 cm, a csomópontok távolsága 20 cm és a frekvencia 80 ciklus/s!

18B-31 A marimba hangszeren az a fa-rúd, amely megütve hangot ad, úgy rezeg, hogy transzverzális állóhullámok alakulnak ki rajta, a rúd két végén duzzadópontokkal. A 40 cm hosszú rúd legkisebb frekvenciája 87 Hz. a) Határozzuk meg a rúdon kialakuló transzverzális hullám sebességét! b) A kibocsátott hangot a rúd középpontja alá helyezett függőleges rezonátorcső erősíti fel. Ha csak a cső felső vége nyitott és a hangsebesség levegőben 340 m/s, milyen hosszú legyen a cső, hogy a rúd rezgéseire rezonáljon.

18B-32 Függőlegesen álló 1,2 m hosszú üvegcsőben tetszésszerinti magasságra beállítható víz van. Rendelkezésünkre áll egy centiméter skála, hogy a vízszint és a cső (nyitott) felső vége közötti távolságot mérni tudjuk. A cső felső végéhez 528 Hz frekvenciával rezgő hangvillát tartunk. Határozzuk meg ezen a skálán azoknak a vízoszlopmagasságoknak megfelelő értékeket, amelyek mellett 20°C-os levegőben rezonancia jön létre!

18B-33 Egy kifeszített húr alapfrekvenciája 400 rezgés/s. Mekkora lenne a húr alapfrekvenciája, ha hossza feleakkora, átmérője kétszer akkora és a feszítőerő négyszer akkora lenne?

18.10 A Doppler jelenség

18A-34 Egy 20 m/s sebességgel haladó vonat utasai vasúti kereszteződéshez közelednek, ahol egy 400 Hz alapfrekvenciájú gong figyelmeztet a vonat közeledésére. Ezen a napon a hang terjedési sebessége levegőben 330 m/s. a) Milyen frekvenciájú hangot hallanak az utasok, amikor a kereszteződéshez közelednek? b) Milyen frekvenciájú hangot hallanak az utasok, amikor a kereszteződést elhagyják és távolodnak a gongtól? c) Milyen frekvenciát hallana a földön álló megfigyelő, ha a 20 m/s sebességgel közeledő vonaton lenne a 400 Hz frekvenciájú hangot kibocsátó gong?

18A-35 Egy mentőautó jelzőgongjának alapfrekvenciája 500 rezgés/s. Egy napon, amikor a hang sebessége 340 m/s, egy ember az utcán 531 rezgés/s magassággal észleli a közeledő kocsi gongjának hangját. Mekkora sebességgel halad a kocsi?

18B-36 Hangforrás és megfigyelő egymástól adott távolságra helyezkednek el. Ha a levegő mozdulatlan, a megfigyelő megállapítja a beérkező hang frekvenciáját, sebességét és hullámhosszát. Hogyan változnak meg ezek a paraméterek, a) ha állandó szél fúj a forrástól a megfigyelő felé, és b) ha a szél a megfigyelőtől a forrás felé fúj?

18B-37 Egy napon, amikor a levegőben terjedő hang sebessége 330 m/s (és nem fúj a szél), egy hangforrás 1000 Hz frekvenciájú hangot ad ki. Milyen frekvenciát hall a megfigyelő az alábbi körülmények között: a) A megfigyelő 30 m/s sebességgel közeledik a forrás felé. b) A megfigyelő nyugalomban van, és a forrás közeledik a megfigyelő felé 30 m/s sebességgel. c) A megfigyelő is és a forrás is nyugalomban van, de most 30 m/s sebességű szél fúj a forrástól a megfigyelő felé.

18.11 A lökéshullámok

18A-38 Léglökéses vadászgép 1,2 Mach sebességgel (azaz a levegőben terjedő hang sebességénél 1,2-szer gyorsabban) vízszintesen repül. A földi megfigyelő a gépet mekkora szög alatt látja a vízszintes fölött, amikor a hangrobbanást hallja?

18A-39 Az aerodinamikában használatos *Mach szám* a repülőgép sebességének és a gépet környező levegőben terjedő hang sebességének a hányadosa. Ha a szuperszónikus *Concorde* gép 2,1 Mach sebességgel repül ott, ahol a helyi hangsebesség 320 m/s, mekkora a keletkező kúp alakú lökéshullám fél kúpszöge?

18.12 A lebegés

18B-40 Egy orgonasíp hangmagassága azonos a zongora 440 Hz frekvenciájú hangjáéval, ha a hangsebesség a levegőben 340 m/s. A hőmérséklet annyira megnő, hogy a sebesség 346 m/s -ra növekedik. Mekkora lebegési frekvencia lesz hallható, ha ezt a hangot mindkét hangszer egyszerre bocsátja ki? (Tegyük fel, hogy a zongora hangmagassága nem változott meg.)

18B-41 A zongoraklaviatúra bizonyos tartományaiban egynél több húrt is ugyanarra a hangra hangolnak, hogy a hangerő nagyobb legyen. Például a 110 Hz frekvenciájú hanghoz két erre hangolt húr tartozik. Mekkora lebegési frekvencia lesz hallható, ha az egyik húr feszítettsége a normális 600 N-ról 540 N-ra csökken, és a két húrt egyszerre ütik meg?

További feladatok

18C-42 Mutassuk meg, hogy az $y=A(x-ct)^n$ függvény a hullámegyenlet [(18-8) egyenlet] egy lehetséges megoldása, ahol A, c és n állandók.

18C-43 Mutassuk meg, hogy az $y = Ae^{i(kx-\omega t)}$ függvény a hullámegyenlet egyik lehetséges megoldása, ahol $i=\sqrt{-1}$, és ahol A, k és ω állandók.

18C-44 Mutassuk meg, hogy az $y = f(x - vt)$ függvény a hullámegyenletnek megoldása.

18C-45 A hegedűhúr egyik pontja transzverzális rezgést végez 500 rezgés/s frekvenciával és 1 mm amplitúdóval. Határozzuk meg ennek a pontnak a maximális sebességét és gyorsulását.

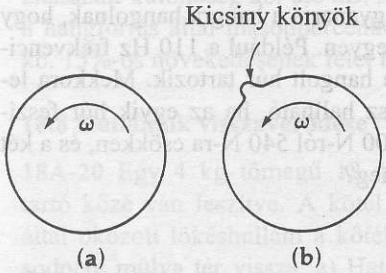
18C-46 Kötélen haladó transzverzális hullám egyenlete $y = 0{,}02 \sin(5x - 80t)$, ahol x és y méterben, t másodpercben van adva. Határozzuk meg a) az amplitúdót, b) a frekvenciát, c) a hullámhosszat és d) a hullám terjedési sebességét a kötélen. e) Határozzuk meg a $t = 0$ időpontban az origótól 40 cm-re lévő pont kitérését. f) Határozzuk meg az e) részfeladatban adott pont transzverzális sebességét.

18C-47 A Föld felszíne alatt 600 km mélyen a P és az S földrengéshullámok sebessége 10,3 km/s illetve 5,66 km/s. Minthogy a közeg három dimenziós kiterjedésű, ezért a P hullámokra vonatkozó (18-20) egyenletben K

értékét $[K + (4/3)G]$ -re módosítjuk. Feltéve, hogy a földkőzet sűrűsége azon a helyen 3,9 g/cm^3, számítsuk ki a K kompresszió moduluszt és a G nyírási moduluszt.

18C-48 A villámcsapás távolságának becslésére ismert módszer a villám és az azt követő mennydörgés észlelése között eltelt másodpercek számlálásán alapul. A másodpercek számát hárommal osztva megkapjuk a villámcsapás kilométerekben mért távolságának közelítő értékét. Határozzuk meg ennek a számításnak százalékos hibáját 20°C-os levegő esetében.

18C-49 Egy hajlékony lánc lineáris tömegsűrűsége μ. Hurkot alakítunk belőle, amit aztán ω szögsebességgel forgásba hozunk. A hurok a forgás következtében olyan merevvé válik, akár egy karika (lásd a 18-24 ábrát). a) A gravitációt elhanyagolva mutassuk meg, hogy a láncot feszítő erő $\mu R^2\omega^2$! (Útmutatás: Készítsünk vektorábrát a lánc kicsiny $\Delta\theta$ középponti szöghöz tartozó Δl hosszúságú ívére. Alkalmazzuk az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvényt a körpályán mozgó $\mu\Delta l$ tömegre.) b) Mutassuk meg, hogy a lánc szabálytalan kidudorodása térben állandó marad a lánc forgása során.



18-24 ábra
A 18C-49 feladathoz.

18C-50 Tegyük fel, hogy egy kifeszített gumiszalag a Hooke törvénynek eleget tevő, k rugóállandójú rugó módjára viselkedik (ami persze nincs így)! Tekintsünk egy gumiszalagot, amely eredeti hosszának kétszeresére van kinyújtva! Ha a szalagot „megpengetjük", f_0 frekvenciájú hangot ad. a) Mekkora lesz a hang frekvenciája, ha az eredeti hosszának négyszeresére kinyújtott szalagot pengetjük meg? (Ne felejtsük el figyelembe venni a lineáris tömegsűrűség megváltozását.) b) A valóságban is végezzük el a kísérletet! A frekvenciaviszonyok az a) részben kiszámítottól eltérők lesznek. A kísérleti eredmény magyarázatára írjuk le (kvalitatíve), hogy miben különbözik a gumiszalag viselkedése a szigorúan vett Hooke-törvény szerinti viselkedéstől.

18C-51 a) Mennyivel nő meg a hang decibel szintje, ha intenzitása ötszörösre növekedik? b) Mekkora az amplitúdók aránya ami ekkora decibelváltozásnak felel meg?

18C-52 Egy síkhullámban a felületegységre jutó energia a hullám térbeli terjedése során állandó (ha disszipatív erők nincsenek jelen). a) Hogyan változik a távolsággal a pontszerű forrásból kibocsátott gömbhullám felületegységre jutó energiája? b) Hogyan változik ez egy lineáris forrásból emittált hengerhullám esetében? c) Hogyan változik az amplitúdó a távolság függvényében az a) feltétel mellett? d) illetve a b) feltétel mellett?

18C-53 Egy 0,40 N erővel feszített húron 100 rezgés/s frekvenciájú folytonos transzverzális szinuszhullám halad. A húr lineáris tömegsűrűsége 2×10^{-3} kg/m^3. Tervezzünk olyan illesztőtagot, ami lehetővé teszi, hogy ezek a hullámok visszaverődés nélkül jussanak egy azonosan kifeszített, de 8×10^{-3} kg/m^3 lineáris tömegsűrűségű húrra.

18C-54 Egy ρ sűrűségű, d átmérőjű huzal két, egymástól l távolságra rögzített tartó közé F erővel van kifeszítve. Határozzuk meg ezen paraméterek függvényében a) a transzverzális hullámok v sebességét, és b) az n-ik állóhullám f_n frekvenciáját.

18C-55 Egy kötél úgy van kifeszítve, hogy a rajta haladó transzverzális hullámok sebessége 16 m/s. A kötélen létrejövő állóhullám csomópontjainak a távolsága 2 m. Ha a rezgések amplitúdóinak maximuma 2 cm, mekkora a duzzadópontok maximális transzverzális gyorsulása?

18C-56 Egy acél zongorahúr lineáris tömegsűrűsége 0,1 g/cm^3. A húr 500 N erővel van kifeszítve. a) Milyen hosszú a húr, ha rezgésének alapfrekvenciája 200 Hz? b) Ha a húr közepén az amplitúdó 2 mm, mekkora itt a maximális transzverzális sebesség?

18C-57 Egy 2 m hosszú, 2 g tömegű húr egyik végét egy 1 m hosszú, 1/4 g tömegű húr végéhez erősítjük. Az így keletkezett 3 m hosszú húr szabad végeit 3,6 N erővel feszítve rögzítjük. Határozzuk meg annak az állóhullámnak a legkisebb frekvenciáját, amelynek csomópontja a húrok összeerősítésénél van.

18C-58 Egy 10 m/s sebességgel haladó vonat függőleges sima sziklafalba vájt alagúthoz közeledik. A hangsebesség 340 m/s. A gépész 300 Hz frekvenciájú sípjelet ad. A vonat utolsó kocsijának utasa egyidejűleg hallja a mozdony sípját és a falról visszaverődő visszhangot. a) Hány lebegést hall az utas másodpercenként? b) Mennyi lenne az utolsó kocsi közelében a földön álló megfigyelő által észlelt lebegési frekvencia? (Útmutatás: alkalmazzuk kétszer a Doppler egyenletet – először úgy, mintha a fal lenne a „megfigyelő", majd úgy, mintha a fal lenne a „forrás".)

18C-59 Egy hegedűs 523 Hz frekvenciájú hangot próbál megszólaltatni, de az ujja nincs helyes távolságra a hegedűlábtól, és így a ténylegesen megszólaló hang frekvenciája 530 Hz. Ha az ujja 25 cm-re van a hegedűlábtól, mennyivel és milyen irányban kell elmozdítania, hogy a hegedű a kívánt hangmagassággal szóljon?

18C-60 Közvetlen behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy minden olyan $f(y)$ függvény ahol $y = (kx-\omega t)$, a $\partial^2 f/\partial t^2 = (\omega/k)^2\partial^2 f/\partial x^2$ hullámegyenletnek megoldása.

Távlatok

Miután a mechanika tárgyalását befejeztük, érdemes ismét visszatekinteni és rámutatni a téma legfontosabb jellegzetességeire. A mechanika feladatainak a megoldására alapvetően három fontos módszert ismertünk meg, ezek:

(1) *A Newton törvények*
(2) *Az energiára és impulzusra* vonatkozó törvények, a munkatétel, valamint az erőimpulzus és az impulzus megváltozása közötti kapcsolat)
(3) *A konzervatív erők és a hozzájuk rendelhető potenciális energia kapcsolata.*

Megmutattuk, hogy ezen törvényekben rejlő gondolatok segítségével hogyan magyarázható a jelenségek széles és változatos köre. Ki kell emelni két fontos speciális témakört: egyik az inerciaerők tárgyalása gyorsuló koordinátarendszerben, másik pedig a tömegvonzás törvénye, ebbe Newton elmélete segítségével nyertünk bepillantást. Természetesen emellett jókora tényanyagot, fogalmakat és egyéb törvényeket is megismertünk. A mechanika lelkét azonban az előbbiekben felsorolt néhány mély gondolat alkotja, olyan szilárd alapot és keretet szolgáltatva, amelyre biztosan építhetünk akkor is, amikor más jelenségeket vizsgálunk. A mechanika szinte minden problémájának a megoldása e nagy horderejű gondolatok egyikének alkalmazásával kezdődik.

A következő öt fejezetben megmutatjuk, hogy a hőhatás is alapvetően leírható a newtoni mechanika fogalmaival ha mikroszkopikus szinten tárgyaljuk azokat. (A hőt korábban egyik testről a másikra áramló titokzatos, súlytalan anyagnak képzelték.)
Különösen hatékonynak bizonyultak az energiára vonatkozó nagy jelentőségű megállapítások, a *termodinamika főtételei,* valamint ezek alkalmazása munkavégző gépek megalkotására. A második főtétel minden bizonnyal a fizika legmélyebb és legátfogóbb törvénye.

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84{,}5$ perc
16C-53 1,41 óra
16C-55 $\frac{GMm}{2R}\left[3-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$
16C-57 $\frac{Gm}{R^2}\left(\frac{M}{4}-\frac{m}{3}\right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%
17B-3 A válasz adott.
17A-5 250 N
17A-7 20 cm
17B-9 a) 5000 kg/m^3 b) 667 kg/m^3
17B-11 a) 2704 kg/m^3 b) 59,8 N
17B-13 0,89 kg/dm^3
17B-15 4,00 mg
17B-17 $\Delta V/V = 0{,}0830$
17A-19 $1{,}77 \times 10^{-3}$ m^3/s
17A-21 40 cm/s
17B-23 $3{,}7 \times 10^4$ N/m^2
17B-25 4,49 atm
17B-27 $\rho A v^2$
17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm
17B-31 A válasz adott.
17C-33 al/g
17C-35 0,933
17C-37 $(1-1/\sqrt{2})$
17C-39 $(1-1/\sqrt{2})$
17C-41 A válasz adott.
17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$
17C-45 A válasz adott.
17C-47 27,3 cm^3/s
17C-49 $H/2$

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2{,}27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m
18A-3 A válasz adott.
18A-5 8,33 cm
18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3{,}14$ m^{-1}, $\omega = 6{,}28 \times 10^{-3}$ s^{-1}
18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m d) 340 m/s
18B-11 18,56 m
18B-13 860 m
18A-15 $2{,}94 \times 10^{-16}$ J/cm^3
18B-17 1,13 μW
18B-19 A válasz adott.
18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang
18A-23 2,07 N
18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm
18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz
18A-29 870 Hz, 2610 Hz
18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m
18B-33 800 Hz
18A-35 19,9 m/s
18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz
18A-39 28,4°
18B-41 5,64 Hz
18C-43 A válasz adott.
18C-45 3,14 m/s, $9{,}87 \times 10^3$ m/s^2
18C-47 $K = 2{,}47 \times 10^{11}$ N/m^2
$G = 1{,}25 \times 10^{11}$ N/m^2
18C-49 b) $v = R\omega$
18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24
18C-53 $\mu = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú
18C-55 12,6 m/s^2
18C-57 60,0 Hz
18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni
19A-3 3×10^{-5}/°C
19B-5 $2{,}17 \times 10^5$ N
19B-7 0,72 l
19A-9 6,44 kJ
19A-11 0,463 kJ/kg·°C
19A-13 0,431 joule/ g·°C
19A-15 0,122 kg
19B-17 0,126 kJ/kg·°C
19B-19 87,5
19B-21 A válasz adott.
19A-23 557 J/s
19A-25 $1{,}38 \times 10^8$ J
19B-27 a) 290 g b) 42,9 g
19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár
19A-31 5,00 W/m^2 °C
19B-33 2,84 J/s
19A-35 a) 61,1 kW·h b) $3,67
19C-37 A válasz adott.
19C-39 a) 13,9 cm b) $2{,}6 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$
19C-41 8,0039 cm
19C-43 a) $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$
19C-45 A válasz adott.
19C-47 $3{,}52 \times 10^4$ s = 9,78 h
19C-49 A válasz adott.
19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l
20A-3 a) 4,48 m^3 b) 5,60 kg
20A-5 0,046 m^3
20A-7 12,0 l
20A-9 $1{,}98 \times 10^5$ Pa

HŐMENNYISÉG ÉS HŐMÉRSÉKLET

Elmélyedni a hőtani kísérletekben
mindig egyik legkedvesebb foglalatosságom volt.

BENJAMIN THOMPSON
(RUMFORD GRÓFJA)

19.1 Bevezetés

Amikor gumilabdát ejtünk a padlóra, fel és le kezd pattogni, miközben a gravitációs potenciális energia és a kinetikus energia folytonosan kicserélődik. A labda, minden egymást követő ugrással, fokozatosan veszít mind kinetikus, mind pedig potenciális energiájából. Hová tűnik az energia? Pótolhatatlanul elveszett? Magára hagyott mechanikai rendszerek megfigyelésekor is arra a következtetésre jutunk, hogy a leállás felé tartanak. Vajon az Univerzum is arra van ítélve, hogy „leálljon" mechnikai energiájának elvesztése miatt? Ezek a kérdések a *termodinamika* hatáskörébe tartoznak, ami a termikus energiával, valamint a termikus energia és más energiafajták – mint például a mechanikai, kémiai, vagy elektromos energia – közötti kölcsönös átalakulással foglalkozik.

19.2 A hőmérséklet

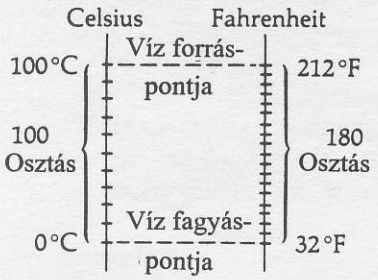
Az előző fejezetekben tanulmányozott minden fogalom végső soron olyan alapvető fizikai mennyiségeken alapult, mint a *tömeg*, *hosszúság* és *idő*. Ezek mérésére önkényes egységeket választottunk, mint a *kilogramm*, a *méter* és a *másodperc*, és gondosan meghatároztuk a mérésükhöz végrehajtandó műveleteket. Minden más mechanikai fogalmat e három alapfogalomból származtattunk. A hőjelenségek leírásakor azt találjuk, hogy egy további alapfogalmat kell bevezetni, ami közvetlenül nem származtatható az említett háromból. Ez az új fogalom a *hőmérséklet*. Más alapvető fizikai mennyiségekkel közös vonása, hogy definíciója eredetileg mindennapi tapasztalatainkon alapult, majd a fogalom fokozatos finomításon és változáson ment át. Teljes és pontos jelentése szoros kapcsolatban van a *mérésére* kidolgozott műveletekkel.

A meleg és a hideg megbízható mérésére különböző eszközöket szerkesztettek, ezek a *hőmérők* amelyekkel pontos és reprodukálható mérések végezhetők. Minden hőmérő egy bizonyos anyag valamely fizikai tulajdonságának megváltozását használja a hőmérséklet fokának jelzésére. Jól használhatóak a következő változásokat felhasználó hőmérők: a) szilárd anyagok és folyadékok hőtágulása, b) gáz nyomásának és térfogatának változása, c) az

elektromos ellenállás változása és d) hevített szálakban és bizonyos kémiai reakciók során bekövetkező színváltozások. Mindegyik hőmérő csak olyan korlátozott hőmérsékleti tartományban használható, ahol a mérőanyag nem szenved fázisalakulást, például folyékonyból légneműbe. A különböző skálákat egymáshoz kalibrálják az egyes átfedő tartományokban.

A Celsius- és a Fahrenheit-féle hőmérsékleti skála*

A higanyt, vagy színezett alkoholt tartalmazó folyadékos hőmérő kétségkívül ismerős mindnyájunk számára. Ez a hőmérő típus olyan hőmérsékleti tartományban használható, ahol sem a folyadék nem forr, ill. nem fagy meg, sem az üveg nem lágyul meg. A numerikus hőmérsékleti skála felállításához a folyadék-oszlop mellett kijelölnek egy lineáris skálát és kiválasztanak két, meghatározott hőmérsékleti pontot. Ez a két pont az, amelynél a) a víz folyadékként és szilárd anyagként egyensúlyban van (*fagyáspont*) és b) a víz folyékony és légnemű anyagként egyensúlyban van (*forráspont*). Mindkét pontot normál légköri nyomásnál (101325 Pa, azaz $\approx 10^5$ Pa) határozzák meg. A hőmérsékletváltozás egységének megállapításához a skálát e két pont között meghatározott számú, egyenlő hosszúságú közre osztják.



19-1 ábra
A higanyoszlop tágulásán alapuló Celsius- és Fahrenheit-féle hőmérsékleti skála.

Az általánosan használt két skála, a 19-1. ábrán látható Celsius- és Fahrenheit-skála[1], amelyeket az 1700-as évek elején vezettek be a nevüket adó fizikusok. Ezeken a skálákon az egységeket *Celsius fokokban* (°C), vagy *Fahrenheit fokokban* (°F) mérik. A Celsius skálán a víz fagyáspontját választjuk zéruspontnak, forráspontját pedig 100 °C-kal jelöljük. A Fahrenheit-skála a fagyáspontot 32 °F-nak, a forráspontot 212 °F-nak választja, így ezen rögzített pontok között 212 – 32 = 180 foknak megfelelő egyenletes beosztás van.

Mivel 100 Celsius fok felel meg 180 Fahrenheit foknak, egy Celsius foknak megfelelő beosztás mérete nagyobb egy Fahrenheit foknak megfelelő beosztás méreténél, mégpedig $\frac{180}{100} = \frac{9}{5}$-szerese. Tehát ha a Celsius fokban mért hőmérsékletet Fahrenheit fokra akarjuk átszámítani, akkor a fagyáspont feletti Celsius fokban mért T_c hőmérséklet $\frac{9}{5}$-szereséhez hozzá kell adni a fagyáspontnak megfelelő 32°-ot; azaz

HŐMÉRSÉKLET ÁTSZÁMÍTÁSA (Celsius fokról Fahrenheit fokra)

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32° \qquad \textbf{(19-1a)}$$

Ahhoz, hogy a Fahrenheit fokban mért hőmérsékletet Celsius fokra számítsuk át, először 32°-ot le kell vonni, hogy megkapjuk a fagyáspont feletti értéket, amelyet $\frac{5}{9}$-del kell megszorozni, hogy a Celsius fokban mért hőmérsékletet megkapjuk:

HŐMÉRSÉKLET ÁTSZÁMÍTÁSA (Fahrenheit fokról Celsius fokra)

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \qquad \textbf{(19-1b)}$$

A fenti kifejezések a víz fagyáspontjánál alacsonyabb hőmérsékletre is érvényesek. Így pl.: közvetlen behelyettesítéssel belátható, hogy –40°C = –40°F.

* A Fahrenheit-féle skála használata hazánkban nem szabványos (A ford. megj.)

[1] Anders Celsius (1701–1744) svéd csillagász alkotta meg a róla elnevezett hőmérsékleti skálát. Gabriel Fahrenheit (1686–1736) német fizikus, a higanyos hőmérő feltalálója.

Tehát az átszámításra szolgáló képlet az alábbi – bizonyos szimmetriát mutató – alakban is felírható:

HŐMÉRSÉKLET ÁTSZÁMÍTÁSA

$$5(T_F + 40°) = 9\,(T_C + 40°) \qquad \textbf{(19-2)}$$

19-1 PÉLDA

Hány Celsius fok felel meg az emberi test 98,6°F-normális hőmérsékletének

MEGOLDÁS

Behelyettesítve a 19-2 egyenletbe:

$$5(°F + 40°) = 9(°C + 40°)$$

$$5(98{,}6°F + 40°) = 9(°C + 40°)$$

Innen a °C-ban mér hőmérséklet:

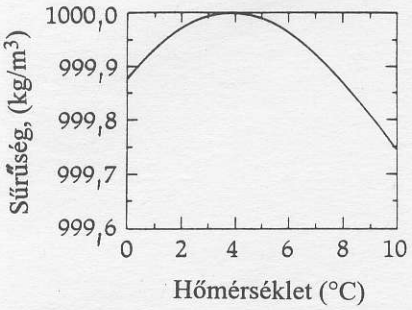
$$C = \frac{5}{9}(98{,}6 + 40°) - 40° = 37{,}0\,°C$$

Ha a különféle folyadékos hőmérőkben különböző folyadékokat használunk mérőközegként, akkor nem lesz két olyan hőmérő, amelyen adott skála-tartományban a leolvasott érték teljesen egyforma. Ez azért van, mert a folyadékok hőtágulása különbözőképpen tér el a lineáristól. Ezek a hőmérsékleti skálák nem fognak egyezni azokkal sem, amelyek más fizikai változásokon, – mint pl. a villamos ellenállás változásai, vagy a színváltozás – alapulnak. Melyik hőmérő méri az „igazi" hőmérsékletet? Ez csak definíció kérdése. *Bármely hőmérő skáláját választhatjuk szabványnak és minden mást eszerint kalibrálhatunk.* Ez esetben a hőmérsékletet „a szabvány **hőmérsékleti** skálán leolvasott"-ként definiáljuk.
De melyik hőmérsékleti skálát válasszuk? Létezik „abszolút" skála, a *Kelvin-féle hőmérsékleti skála*, ez jelenti a nemzetközi megállapodás alapján a szabványos skálát minden tudományos munkánál. Ez valóban alapvető skála, mert az egyes anyagok (mérőeszközök) tulajdonságaitól függetlenül definiálható. Ismertetéséhez azonban a termodinamika néhány alapelvét kell először megtanulni, így a Kelvin-skála megtárgyalását el kell halasztani a 23. fejezetig. Egyelőre a Celsius fok beosztású, higanyos hőmérőt használjuk, ami az ezen fejezetben szereplő legtöbb jelenség tárgyalásához kielégítő.

19.3 Hőtágulás

A hőmérséklet növelésével szinte minden anyag tágul[2]. Ezt a viselkedést megérthetjük az anyagok melegedése során egyre növekvő molekuláris moz-

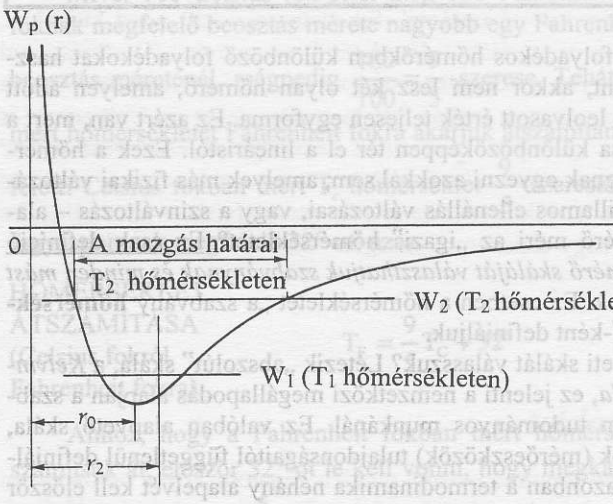
[2] Fontos kivételt képez a víz a 0 °C és 4 °C közötti hőmérséklet-tartományban. (19-2. ábra) E kis tartományban a víz a hőmérséklet növekedésekor összehúzódik. Ennek illusztrálására tekintsünk egy 10 °C-os tavacskát, amikor körülötte a levegő hőmérséklete fagypont alatt van. A felszíni réteg lehűl és sűrűbbé válik, lesüllyed a tó aljára és a könnyebb vizet a tó



19-2 ábra
A víz sűrűsége némileg változik a hőmérséklettel. A tömegegységét eredetileg a maximális sűrűségű víz 1 cm^3-ének tömegeként definiálták. Ezen az egységen alapult az SI rendszer platina-iridium ötvözetből készült – „őskilogrammja". Azok a pontos mérések, amelyek alapját ez az etalon képezi, azt mutatják, hogy a víz maximális sűrűsége, 3,98 °C-hoz tartozik, 999,973 kg/m^3. 10 °C-nál magasabb hőmérsékleten a sűrűség tovább csökken, 100 °C-on 958,38 kg/m^3-t ér el.

gás alapján. Egy egyszerűsített felfogás szerint a szilárd testben a szomszédos atomok között működő erők a hozzájuk tartozó potenciális energia-függvény segítségével adhatók meg, a 19-3. ábrán vázolt módon. Nagyon alacsony hőmérsékleten az atomok közötti átlagos távolság közel r_0. A hőmérséklet növekedésével a rezgő atomok energiát nyernek és szélesebb határok között végeznek rezgő mozgást. *A potenciális energia-görbe aszimmetriája miatt a visszatérítő erő* – ami a görbe negatív meredekségével arányos – r_0-nál nagyobb távolságok esetén kisebb, mint r_0-nál kisebb távolságok esetén és ennek megfelelően az előbbi esetben az atomok *gyorsulása* is kisebb. Így az atomok *viszonylag több időt töltenek* r_0-nál nagyobb távolságokban, mint r_0-nál kisebb távolságokban. Ezért idő szerint átlagolva a mozgást, az atomok között nagyobb átlagos távolságot kapunk, azaz az anyag melegítés hatására tágul. Ha a potenciális energia-függvény teljesen szimmetrikus lenne, nem lenne hőtágulás. (Egyes anyagokban az atomok mozgásában a *transzverzális* – vagy nyíró – típusú rezgés dominál az itt tárgyalt longitudinálissal szemben, ami növekvő hőmérsékletnél a test összehúzódását okozza. Az ilyen anyagok azonban nagyon ritkák.)

Vizsgáljuk most egy eredetileg L_0 hosszúságú tárgy hőtágulásakor bekövetkező ΔL megnyúlását. Kísérletileg igazolható, hogy bizonyos hőmérsékleti tartományon belül a $\Delta L/L_0$ relatív *hosszváltozás* közelítőleg arányos a ΔT hőmérsékletváltozással. A legtöbb mérnöki alkalmazásnál ez a kapcsolat lineárisnak vehető anélkül, hogy komolyabb hibát követnénk el.



19-3 ábra
Kristályos szilárd test két atomjára vonatkozó potenciális energia ($W_{0(r)}$) az atommagok közti távolság függvényében. Egy alacsony, T_1 hőmérsékleten az átlagtávolság kb. r_0, ez a görbe aljának felel meg. Magasabb T_2 hőmérsékleten az átlagtávolság a görbe aszimmetriája miatt r_2-re nő, ami az anyag melegítés hatására bekövetkező hőtágulását okozza.

Így felírható, hogy

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T \qquad (19\text{-}3)$$

LINEÁRIS HŐTÁGULÁS

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T \qquad (19\text{-}4)$$

felszínére kényszeríti. (A különböző sűrűségek miatt bekövetkező keveredés folyamatát *konvekciónak* (áramlás) nevezik.) A keveredés addig folytatódik, amíg lényegében a teljes vízmennyiség nem hűl 4 °C-ra. Ettől a stádiumtól kezdve a felszín további hűlésével a felső réteg sűrűsége csökken, így a felszínen úszik, miközben további keveredés nélkül folytatja a hűlést a fagypont felé. A keletkező jég is a tavacska tetején marad, mivel sűrűsége kisebb, mint az alatta levő vízé. Az állóvíz mélyebb részei csak oly mértékben fagynak be, ahogyan a hővezetés során további hőelvonás történik a közbeeső jégrétegeken keresztül. A víz ezen szokatlan viselkedése fontos következményeket jelent a tengeri életre és magára az evolúcióra vonatkozóan is.

19-1 táblázat Hozzávetőleges hőtágulási együtthatók (20 °C körül)

Szilárd anyagok	Átlagos α $(°C)^{-1}$	Folyadékok	Átlagos β $(°C)^{-1}$
Alumínium	24×10^{-6}	Etilalkohol	$11{,}2 \times 10^{-4}$
Sárgaréz	19×10^{-6}	Benzol	$12{,}4 \times 10^{-4}$
Vörösréz	17×10^{-6}	Benzin	$9{,}5 \times 10^{-4}$
Üveg (a lágy üveg különböző fajtái)	$4\text{-}9 \times 10^{-6}$	Higany	$1{,}8 \times 10^{-4}$
Üveg (Pyrex)	3×10^{-6}	Víz	$2{,}1 \times 10^{-4}$
Jég	51×10^{-6}		
Invar (36% Ni, 64% Fe)	$0{,}9 \times 10^{-6}$		
Nikkel	13×10^{-6}		
Tölgyfa (a rostokkal párhuzamosan)	5×10^{-6}		
Tölgyfa (a rostokra merőlegesen)	34×10^{-6}		
Kvarc (olvadt)	$0{,}4 \times 10^{-6}$		
Acél	12×10^{-6}		

ahol az α arányossági tényezőt **lineáris hőtágulási együtthatónak** nevezzük. Mivel $\Delta L/L_0$ dimenzió nélküli szám, az α együttható mértékegysége 1/°C, vagy $°C^{-1}$. A Celsius- és a Kelvin-skálán a hőmérsékletközök azonosak, így az α számértéke is megegyezik. A 19-1. táblázat ismertet néhány jellegzetes együtthatót.

Mivel a megnyúlt L hosszúság egyenlő $L_0 + \Delta L$-lel, azt is írhatjuk, hogy

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T) \qquad \textbf{(19-5)}$$

19-2 PÉLDA

A korábbi méter-etalon hossza 0 °C-on pontosan 1 m. Ez az „ősméter", amit Franciaországban, Párizs közelében a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őriznek, olyan platina-iridium ötvözetből készül, amelynek átlagos lineáris hőtágulási együtthatója $8{,}9 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$. Határozzuk meg a rúd hosszát 37 °C-on, feltételezve, hogy a számértékek pontosak és α állandó marad.

MEGOLDÁS

A hosszváltozást a

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

összefüggés adja.
Az értékek helyettesítésével

$$\Delta L = (1{,}000\ldots\text{m})[8{,}9 \times 10^{-6}(C°)^{-1}](37C°) = 3{,}293 \times 10^{-4}\,\text{m}$$

Így a megváltozott hosszúság

$$L = L_0 + \Delta L = 1{,}000\,329\,3\,\text{m}$$

Térfogategységre és felületegységre eső hőtágulás

A hőtágulási kísérletek azt mutatják, hogy a $\Delta V/V_0$ relatív térfogatváltozás – bizonyos hőmérsékleti tartományban – arányos a ΔT hőmérsékletváltozással.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T \tag{19-6}$$

TÉRFOGATEGYSÉGRE ESŐ HŐTÁGULÁS

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T \tag{19-7}$$

ahol a β arányossági tényezőt **térfogati hőtágulási együtthatónak** nevezzük. Ez az α lineáris hőtágulási együtthatóval a következő kapcsolatban van. Vegyünk egy kocka alakú[3], V_0 térfogatú anyagot, amelynek élhosszúsága L_0. Az anyag melegítésekor minden éle $L = L_0 + \Delta L$-re tágul. Így az új V térfogat:

$$V = (L)^3 = (L_0 + \Delta L)^3 = L_0^3 + 3L_0^2(\Delta L) + 3L_0(\Delta L)^2 + (\Delta L)^3$$

$$V = L_0^3 \left[1 + 3\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right) + 3\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)^3 \right] \tag{19-8}$$

Általában $\Delta L/L_0 << 1$, így a magasabb rendű tagok elhagyásával jelentéktelen hibát követünk el. Tehát a (19-3) egyenlet felhasználásával, azt kapjuk, hogy

$$V = V_0(1 + 3\alpha \Delta T) \tag{19-9}$$

Mivel $V = V_0 + \Delta V$, következésképpen

$$\Delta V = V_0 3\alpha \Delta T \tag{19-10}$$

A (19-7) egyenlettel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\beta = 3\alpha \tag{19-11}$$

Egy szilárd testben lévő lyuk pontosan úgy tágul, mintha a hiányzó anyag tágulna. Ezért egy hőmérő üveggömb-tartályának térfogata pontosan úgy változik, mint ahogyan az azonos térfogatú szilárd üveg változtatná térfogatát.

Hasonló elemzéssel kimutatható, hogy egy A felület hőtágulása 2α-val egyenlő arányossági tényezővel jellemezhető:

FELÜLETEGYSÉGRE ESŐ HŐTÁGULÁS

$$\Delta A = A_0 2\alpha \Delta T \tag{19-12}$$

$$A = A_0(1 + 2\alpha \Delta T) \tag{19-13}$$

Egy lyuk területe éppen úgy tágul, ahogyan a hiányzó anyag tágulna. Ezért egy felület a hőtágulás során pont úgy változik, mint fényképészeti nagyításkor.

[3] Egy homogén anyag bármilyen önkényesen választott alakú térfogata elemi kockák együtteseként fogható fel. Amint a kockák térfogata végtelenül kicsivé válik, a test térfogata megközelíti a kockák össztérfogatát. Így a kockára kapott eredményünk tetszőleges alakú térfogatra is alkalmazható.



a) A hőtágulásra nem megfelelő ráhagyás (tűrés) okozta, hogy New Jersey-ben ezek a sínek szokatlan „hőhullám"-ba görbültek, kisiklatva egy vasúti kocsit.



b) Ez a betonút egy forró napon meggörbült, mert nem volt megfelelő a „tűrése" a hőtágulás számára.



c) Híd betonútján lévő tágulási illesztések.

19-4 ábra
Példák a hőtágulásra



19-5 ábra
Benjamin Thompson (Rumford gróf) politikai kalandor volt, opportunista, aki sápot húzott a katonai egyezményekből és számos alkalommal különböző külföldi kormányok számára kémkedett. Bár őrnagy volt a Gyarmati Hadseregben, a Függetlenségi Háború idején az angolokkal szimpatizált, így azután feleségét és gyermekét elhagyva Európába menekült. A politikai és üzleti életben megnyilvánuló csavaros észjárása mellett ügyes mérnök-tudós volt, aki jogosan érdemelte ki a tudományos hírnevet. 1791-ben a bajor választófejedelem grófi címet adományozott neki. A Rumford névvel első feleségének szülőhelyét tisztelte: ez Rumford város New Hampshire-ben.

19-3 PÉLDA

Egy autó benzintartálya acélból készült, térfogata 68,19 l. 15 °C-on teletöltötték benzinnel egy föld alatti tároló tartályból. Mennyi benzin folyik ki, ha ezután az autó addig áll a napon, amíg a tartálya 37 °C-ra felmelegszik?

MEGOLDÁS

A 19-1. táblázatból látjuk, hogy az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha_{acél} = 12 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$ és a benzin térfogati hőtágulási együtthatója $\beta_{benzin} = 9{,}5 \times 10^{-4}\ (°C)^{-1}$. Így a térfogatváltozások közötti különbség:

$$\Delta V = \Delta V_{\text{benzin}} - \Delta V_{\text{acél}} = V_0(\beta - 3\alpha)(T - T_0)$$

$$\Delta V = (68{,}19 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)(9{,}5 \times 10^{-4} - 3(12 \times 10^{-6}))1/°\text{C}(37 - 15)°\text{C}$$

$$\Delta V = 1{,}37 \times 10^{-3}\ \text{m}^3 = 1{,}37\ \text{l}$$

19.4 A hőmennyiség

Miért lesz egy test melegebb vagy hidegebb? A XIX. század elejéig az általánosan elfogadott válasz a következő volt: „Mert *caloricumot* (hőanyagot), egy láthatatlan, súlytalan folyadékot nyer vagy veszít, ami egyik testről a másikra képes áramlani." A caloricum-elmélet (hőanyag-elmélet) hőmérsékletváltozással járó jelenségek széles skáláját magyarázta meg. Például, amikor egy forró – feltehetően sok hőanyagot tartalmazó – testet összeérintenek egy hideg testtel, a forró testben lévő felesleges hőanyag átáramlik a hidegbe, amíg mindketten el nem érik a közös közbülső hőmérsékletet. Továbbá a forró testek azért tágulnak, mert a többlet caloricum részei taszítják egymást és az atomokat kicsit széjjelebb nyomják.

1798-ban ezt az elvet megcáfolták. Egy amerikai mérnököt – aki később Bajorországban Rumford grófja lett, – alkalmaztak a bajor hadsereg számára készülő ágyúcsövek fúrására. Az elfogadott hőanyag-elmélet szerint a fúró és az ágyú felforrósodik a fúrási folyamat során, mert a fém szilánkokra forgácsolásakor a caloricum eltávozott belőle. De Rumford megfigyelte, hogy a fúró és az ágyúcső *még forróbb* lett akkor, amikor olyan tompa fúrót használt, ami egyáltalán nem forgácsolta a fémet. A caloricum forrása látszólag kimeríthetetlen volt, s ez a tény nehezen volt összeegyeztethető a hőanyagelmélettel. Ehelyett Rumford felvetette, hogy szerinte a hő forrása a fúrót forgató lovak munkája. Később számos más vizsgálatból arra következtettek, hogy a keletkező hő valójában az energia egy másik alakja, ami az energia megmaradásának elve alapján alakul át.

A mindennapi beszélgetésekben gyakran összecserélik a *hő* és *hőmérséklet* szavakat. Más kifejezések, mint például a „hőenergia", „hőtartalom", napi hőmérséklet, vagy a „hőmennyiség" – szintén hozzájárulnak a zavarhoz. A különböző fogalmak közti eligazodásban segíthetnek a tudományos elemzésekben használatos definíciók.

A HŐMÉRSÉKLET — **A „melegség" foka, egy meghatározott skálán mérve.**

A HŐMENNYISÉG — **A rendszer és környezete között – kizárólag a hőmérsékletkülönbség következtében – kicserélődő energia.**

A hőmennyiség ezen definíciójának vannak bizonyos finomításai. A fenti megállapítás szerint a hőmennyiség az az energia, ami – hőmérsékletkülönbség hatására – egyik rendszerből a másikba *átmegy*, amikor *termikus kölcsönhatásban* vannak. Mielőtt ez az energia átadódik, nem nevezzük hőenergiának, hanem a következő elnevezés használatos:

f

TERMIKUS ENERGIA (VAGY BELSŐ ENERGIA) — **Atomok és molekulák véletlenszerű mozgásának következtében fellépő kinetikus és potenciális energia.**

Így egy rendszer *hőmérséklete* az a paraméter, ami leírja, hogy termikus kölcsönhatás esetén mennyit ad át belső energiájából az egyik test a másiknak.

Az energia annak ellenére, hogy a természettudományokban rendkívül fontos szerepet tölt be, meglehetősen különös és nehezen megfogható fogalom. Mindenütt különböző formában van jelen: munka (mechanikai energiaátvitel során), gravitációs potenciális energia, mozgási energia, kémiai energia, hő (termikus energiaátvitel során), stb. Mégis, nincs arra példa, hogy valaha is közvetlenül mértek volna energiát. Ehelyett, mindig közvetve származtatjuk más mérésekből. Például a mechanikai munkával kapcsolatos energiát erő és elmozdulás mérésével, a belső energiát pedig tömeg és hő-

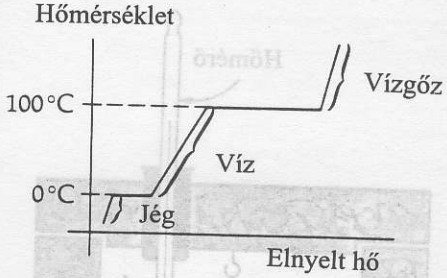
mérséklet mérésével határozhatjuk meg. De maga az energia és különösen az energiamegmaradás, az egész természettudományban talán a legfontosabb és a legszilárdabban megalapozott fogalom. Az egyik szerző szavaival: „Az energia mindent megmagyaráz".

A termikus energia mértékegysége a kalória (cal), amelyet eredetileg úgy definiáltak, mint 1 g víz hőmérsékletét 1 °C-kal (14,5 °C-ról 15,5 °C-ra) növelő hő mennyiségét (1 atm nyomáson)[4]. A termikus és a mechanikai energia egységei közötti kapcsolat azokból a kísérletekből adódott, amelyekben mechanikai energia meghatározott mennyiségét alakították át súrlódással termikus energiává. Az első pontos méréseket James Joule, egy angol sörfőző végezte, aki számos kísérleti összeállítást próbált ki, többek között víz gyors keverését résekkel ellátott lapátkerekekkel, amiket a gravitáció hatására lereszkedő nehéz súlyok mozgattak. A modern kísérletekben sokkal pontosabb értékeket kapunk vízbe merített ellenállás elektromos fűtésével. Sajnálatos módon, a kalóriának számos különféle definíciója létezik, s mindegyik más-más eljáráson alapul. (Például a *termokémiai kalória* = 4,184 J és az International Table (IT) által meghatározott kalória = 4,186 J). 1948-ban a 9. Általános Súly- és Mértékügyi Konferencia a hő hivatalos egységeként a mechanikai energia egységét, a *joule*-t (J) *fogadta el.* Így a **kalória** most SI egységben, joule-ban *kifejezve*[**]:

A KALÓRIA $1\ \text{cal} \equiv 4{,}184\ \text{J}$ **(19-14)**

19.5 Hőfelvétel és fázisátalakulás

Ha egy anyag hőt vesz fel, az mindig valamilyen változással jár. A hőtágulás mellett emelkedhet a hőmérséklet, vagy **fázisátalakulás** következhet be, amelynek során az anyag fizikai jellemzői megváltoznak, miközben hőmérséklete állandó marad. Például ha kezdetben fagyáspont alatt lévő jeget melegítünk, a jég hőmérséklete fokozatosan emelkedik, amíg 0 °C-on ($\approx 10^5$ Pa nyomáson) olvadni nem kezd, azaz a jég halmazállapota szilárd állapotból folyékonyra változik. Ettől a ponttól tovább folytatva a hőközlést[5], a hőmérséklet 0 °C marad, amíg az összes jég meg nem olvad. Ezután további melegítés hatására a víz hőmérséklete a forráspontig emelkedik, ahol újabb fázisátmenet történik, a víz gőzzé alakul, miközben a víz-gőz keverék hőmérséklete 100 °C marad. Mikor a víz teljesen gőzzé alakult, akkor további hőközlés hatására a hőmérséklet 100 °C fölé nő. A 19-6 ábra a *hőközlés görbéjét* mutatja az *olvadás* és *forrás* fent leírt folyamatára. Ha gőzből indulunk ki és hűtjük, az ellentétes fázisátmeneteket *lecsapódásnak* és *fagyásnak* nevezzük. További fázisátalakulás a szublimáció, amely bármely hőmérsékleten bekövetkezhet, és amelynek során a szilárd anyag a folyadék-fázison való átmenet nélkül közvetlenül gőzzé alakul. Ismert példa a „száraz jég" (szilárd CO_2) *szublimációja*. Tehát amikor hőt közlünk egy anyaggal, akkor a hőtáguláson kívül két másik változás történhet: hőmérsékletnövekedés vagy az anyag fizikai tulajdonságainak megváltozása, miközben fázisátalakuláson megy keresztül.



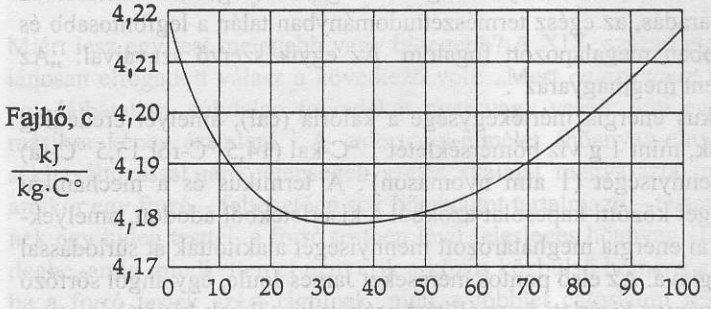
19-6 ábra
Egy adott jégminta melegedési görbéje. Fázisátmenet során a hőközlés ellenére a hőmérséklet állandó marad. (Állandó nyomás mellett)

---

[4] A táplálkozás szakemberei kissé eltérő egységet használnak az élelmiszer energiatartalmának mérésére, ami a fent definiált kalória ezerszerese (kcal). Az, hogy egy édesség „250 kcal-t tartalmaz" azt jelenti, hogy miután kivonták belőle a vizet, normál légköri nyomáson, tiszta oxigénben elégetve, a cukorka 250 000 cal energiát termel.

[**] Hazánkban a joule egység kötelező használatát törvény rögzíti (A fordító)

[5] A hőközlés olyan lassan történjék, hogy a jég olvadásakor azonos hőmérséklet uralkodjék az egész keverékben, miközben tart a fázisátmenet. Ezt a termikus egyensúlyként ismert feltételt a következő fejezetben tárgyaljuk.



19-7 ábra
A víz fajhője a hőmérséklet függvényében.

A fajhő

Azt a hőmennyiséget, ami egységnyi tömegű anyag hőmérsékletét egy fokkal növeli, az anyag **fajlagos hőkapacitásának**, röviden **fajhőnek** (c) nevezzük. Mivel a fajhő kis mértékben változik a hőmérséklettel (ld. 19-7 ábra), a pontos meghatározásoknak tartalmaznia kellene a megfelelő hőmérsékletfüggést is. A gyakorlatban a fajhő a vizsgált hőmérsékleti tartományban többnyire állandónak vehető, így rendszerint *átlagos* fajhőt használunk:

ÁTLAGOS FAJHŐ
$$c \equiv \left(\frac{1}{m}\right)\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad \textbf{(19-16)}$$

ahol m az anyag tömege, ΔQ a közölt hő és ΔT a hőmérsékletváltozás. Úgy is felírhatjuk, hogy a

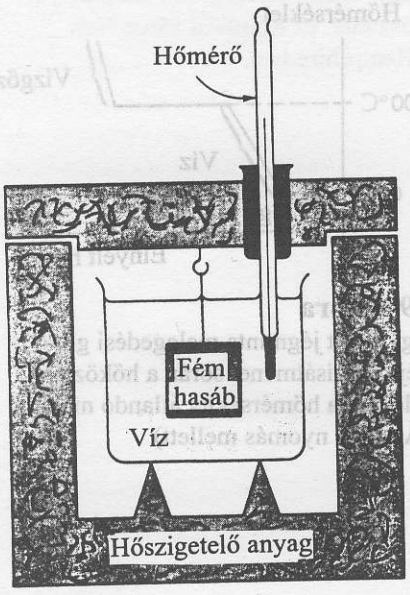
HŐKÖZLÉS SORÁN FELLÉPŐ HŐMÉRSÉKLETVÁLTOZÁS
$$Q = mc\Delta T \qquad \textbf{(19-17)}$$

ahol Q a közölt (vagy elvont) hő, ami ΔT hőmérsékletváltozást okoz. A különböző kézikönyvek táblázataiban a fajhőre a következő egységek találhatók:

	Metrikus egység	SI egység
fajhő egységek	$\left[\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot\text{C°}}\right]$	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C°}}\right]$

A 19-2 táblázat a különböző anyagok átlagos fajhőit tünteti fel.

A fajhő *kísérleti meghatározására* a kutatók gyakran alkalmazzák a keverési módszert. Ekkor egy hőszigetelt edényt, a *kalorimétert* használják (19-8 ábra). Mivel tökéletes hőszigetelő nem létezik, az edény és környezete közti elkerülhetetlen – és meghatározatlan – „hőszivárgás" okozta nehézségek miatt nem könnyű pontos fajhő értékeket mérni.



19-8 ábra
Egyszerű kaloriméter, amellyel meghatározható egy fémtömb fajhője. A fémet vízbe merítjük és leolvassuk a hőmérsékletváltozást.

19-4 PÉLDA

Kaloriméterben lévő 300 g tömegű vörösréz tartály 500 g vizet tartalmaz. A tartály és a víz egyaránt 20 °C-os szobahőmérsékleten van. Egy 1 kg-os vörösréz hasábot 100 °C-ra hevítünk, majd a vízbe merítjük. A tartálynak és tartalmának végső egyensúlyi hőmérséklete 32 °C. Határozzuk meg a vörösréz átlagfajhőjét (c_{Cu}) erre a hőmérséklettartományra, feltéve, hogy a kaloriméter tökéletesen hőszigetelt és a hőmérő hőkapacitását elhanyagolhatjuk.

19-2 táblázat ÁTLAGOS FAJHŐK, c
(0 °C-100 °C-ra, ha nincs egyéb megjegyzés és $\approx 10^5$ Pa nyomásra)

Anyag	kJ/(kg °C)	cal/(g °C)
Szilárd anyagok		
Alumínium	0,913	0,218
Réz	0,389	0,0930
Vas	0,460	0,110
Higany	0,139	0,0332
Nikkel	0,43T	0,103
Ólom	0,130	0,0311
Jég (–10 °C–0 °C)	2,04	0,488
Üveg (Koronaüveg)	0,84	0,20
Fa	1,3–2,9	0,3–0,7
Beton	0,88	0,21
Folyadékok		
Víz (14,5 °C–15,5 °C)	4,186	1,000
Víz	4,19	1,00
Etilalkohol	2,43	0,58
Tengervíz	3,89	0,93
Gázok ($\approx 10^5$ Pa állandó nyomáson)		
Hidrogén	14,2	3,40
Hélium	5,24	1,25
Levegő (0 °C–200 °C)	0,996	0,238
Vízgőz (100 °C)	1,76	0,421

MEGOLDÁS

Használjuk a „keverési mószert". Az energiamegmaradást alkalmazva erre a zárt rendszerre felismerjük, hogy a vörösréz hasáb energiaváltozása, $m_h c_h (T - T_h)$, – ami negatív mennyiség, mivel $T_h > T$, – és a víz és a tartály által felvett hő összege zérust eredményez:

$$0 = \left[\begin{matrix}\text{hasáb által}\\ \text{leadott hő}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\text{víz által}\\ \text{felvett hő}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\text{tartály által}\\ \text{felvett hő}\end{matrix}\right]$$

Átrendezés után:

$$m_h c_h (T_h - T) = (m_v c_v (T - T_0) + m_{Cu} c_{Cu} (T - T_0)$$

adódik. Innen

$$68 c_{Cu} = 25116 + 3{,}6 c_{Cu}$$

Ezt c_{Cu}-ra megoldva kapjuk: $c_{Cu} = 0{,}390 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{C}^\circ}$

Fázisátalakulás

A fázisátalakulás során átvitt hőmennyiséget az adott fázisátmenetre vonatkozó **latens hőnek**[6] (L) vagy átalakulási hőnek nevezzük. A fázisátmenet létrehozásához szükséges hőmennyiség (állandó hőmérsékleten):

[6] A latens szó a latin latere szóból származik, jelentése: „rejtett".

19-3 táblázat Átalakulási hők (≈10^5 Pa nyomáson)

	Olvadáspont		Fagyáshő, L_0		Forráspont		Párolgáshő, L_p	
	K	°C	kJ/kg	cal/g	K	°C	kJ/kg	cal/g
Hélium	3,5	–269,65	5,23	1,25	4,216	–268,9	20,9	4,9
Hidrogén	14,01	–259,14	57,8	13,8	20,28	–252,87	452	108
Nitrogén	63,29	–209,86	25,7	6,12	77,35	–195,8	201	48,0
Oxigén	54,35	–218,8	13,8	3,3	90,188	–182,96	211,8	50,6
Etilalkohol	158,7	–114,5	108,99	26	351	78	854	204
Higany	234,31	–38,84	11,3	2,7	629,73	356,58	272	65,0
Víz	273,15	0,00	334	79,8	373,15	100,00	2256	539
Ólom	600,45	327,3	24,7	5,9	2013	1740	871	208
Ezüst	1235	961,93	111	26,5	2485	2212	2356	563
Vörösréz	1356	1083	205	49,0	2868	2595	4774	1141

FÁZISÁTMENETET LÉTREHOZÓ HŐMENNYISÉG

$$Q = mL \qquad (19\text{-}18)$$

ahol m az anyag tömege, L a latens hő. Az egyes latens hő értékek víz esetében:

	olvadás- vagy fagyáshő (0 °C-on, ≈10^5 Pa nyomáson)	Párolgási, vagy lecsapódási hő[7] (100 °C-on, ≈10^5 Pa-nál)
VÍZ FÁZIS-ÁTALAKULÁSA	L_f=3,336 ×10^5 J/kg (= 79,72 cal/g)	L_v = 2,256 ×10^6 J/kg (= 539,6 cal/g)

Megjegyzendő, hogy több, mint ötször annyi hőmennyiség szükséges a folyékony víz 100 °C-on történő elpárologtatásához, mint ugyanannyi víz felmelegítéséhez 0 °C-ról 100 °C-ra. A vízgőz lecsapódásakor leadott nagy átalakulási hő miatt sokkal veszélyesebb a 100 °C-os vízgőzzel történő érintkezés, mint a 100 °C-os vízzel való. A 19-3 táblázat különböző anyagok latens hőjét tartalmazza.

Mikroszkópikus méretekben a fázisátmenetekkel kapcsolatos latens hő rendszerint megváltoztatja az anyag mikroszerkezetét. Amikor egy szilárd anyag megolvad, az elnyelt hő legnagyobb része arra fordítódik, hogy az atomok és molekulák közötti kötéstávolságot megnövelje, s így nagyobb mozgási lehetőséget biztosítson a részecskék számára. A térfogatváltozás kicsi, így a hőnek csak kis része fordítódik a térfogatváltozással kapcsolatos $p\Delta V$ munkára. A párolgás és a szublimáció azonban nagy térfogatváltozással jár, így az atomok közötti vonzó erők legyőzésén kívül energiára van szükség ahhoz a pdV munkához is, amit az anyag légnemű állapotba történő tágulásakor a légkör visszanyomásához kell végezni. Érdekes módon a kézikönyvekben felsorolt folyadékok között a víz párolgási hője a legnagyobb, ez a vízmolekulák közti szokatlanul erős vonzás következménye. Így a vízmolekulák szétválasztásához, hogy az anyag gőz halmazállapotú legyen, nagy energia szükséges.

19-5 PÉLDA

Mennyi hőmennyiség szükséges –30 °C -os jég 100 °C-os gőzzé alakításához (≈10^5 Pa nyomáson), ha a jég tömege 2 kg?

[7] A párolgási hő függ a hőmérséklettől. Például vízre 0°C-on L_p=2,49·106 J/kg (=595 cal/g)

MEGOLDÁS

Feltételezve, hogy a 19-2 és 19-3 táblázat adatai érvényesek erre a hőmérséklettartományra, a következőképpen számolunk:

1. Q_1 hőmennyiség szükséges a jég hőmérsékletének –30 °C-ról 0 °C-ra történő emeléséhez:

$$Q_1 = m_i c_i \Delta T_i = (2\,\text{kg})(2{,}04\,\text{kJ/kg}\cdot\text{C}^\circ)[0-(-30\,^\circ\text{C})] = 122{,}4\,\text{kJ}$$

2. Q_2 hőmennyiség szükséges a 0 °C jég 0 °C-os vízzé alakításához:

$$Q_2 = m_i L_W = (2\,\text{kg})(334\,\text{kJ/kg}) = 668\,\text{kJ}$$

3. Q_3 hőmennyiség szükséges a 0 °C-os víz 100 °C-ra való melegítéséhez:

$$Q_3 = m_w c_w \Delta T_w = (2\,\text{kg})(4{,}186\,\text{kJ/kg}\cdot\text{C}^\circ)(100\,^\circ\text{C}-0\,^\circ\text{C}) = 837{,}2\,\text{kJ}$$

4. Q_4 hőmennyiség szükséges a 100 °C-os víz 100 °C-os gőzzé alakításához:

$$Q_4 = m_w L_w = (2\,\text{kg})(2256\,\text{kJ/kg}) = 4512\,\text{kJ}$$

Tehát az összes szükséges hőmennyiség:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = (122{,}4 + 668 + 837{,}2 + 4512)\,\text{kJ} = 6140\,\text{kJ}$$

19-6 PÉLDA

300 g, 30 °C-os vizet ráöntünk egy 50 g-os, –5 °C-os jégkockára. Határozzuk meg a víz végső hőmérsékletét, amennyiben az egész jég megolvad, ill. a keverék hőmérsékletét, ha a jég nem olvad meg teljesen. Tegyük fel, hogy az edény és a tartalma közti hőátadás elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A keverési módszert alkalmazva (ld. 19-4 példát), felismerjük, hogy a víz által leadott hőmennyiség egyenlő a jég által felvett hőmennyiséggel. Nem tudjuk azonban előre, hogy vajon az egész jégkocka megolvad-e. Első próbálkozásként tegyük fel, hogy teljesen megolvad (ami egy fázisátalakulást jelent) és hogy a megolvadt jégből keletkező víz ezután a keveréknek valamilyen közbülső T hőmérsékletére melegszik. Minden hőmérsékletváltozást pozitív mennyiségként írva:

(víz által leadott hőmennyiség) = (a 0 °C-ra felmelegedő jég által felvett hőmennyiség) + (0 °C-on a jég megolvasztásához szükséges hőmennyiség) + (a jégből lett víz hőmérsékletének 0 °C-ról a végső T-re emeléséhez szükséges hőmennyiség)

$$m_v c_v \Delta T_v = m_j c_j \Delta T_j + m_j L_0 + m_j c_v \Delta T_j$$

ahol ΔT_j = a jég hőmérsékletemelkedése, L_0 = a víz olvadáshője és ΔT_j = a megolvadt jég hőmérsékletnövekedése. (Megjegyezzük, hogy a víz és a jég fajhője különböző.)

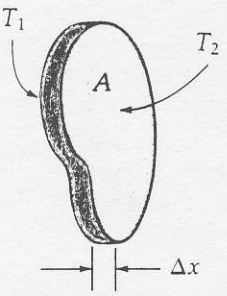
$$(300\,\mathrm{g})\left(4{,}186\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{C}^\circ}\right)(30^\circ\mathrm{C}-T)=(50\,\mathrm{g})\left(2{,}04\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{C}^\circ}\right)[0^\circ\mathrm{C}-(-5^\circ\mathrm{C})]$$
$$+(50\,\mathrm{g})\left(334\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{C}^\circ}\right)$$
$$+(50\,\mathrm{g})\left(4{,}186\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{C}^\circ}\right)(T-0^\circ\mathrm{C})$$

A kijelölt műveleteket elvégezve: $T = 13{,}9^\circ\mathrm{C}$

Ha feltevésünk, miszerint az egész jég megolvad, helytelen lenne, akkor a hőmérlegre felírt egyenletnek nem lenne pozitív T megoldása.

19.6 Hővezetés

Ha egy tárgyat úgy hozunk fizikai érintkezésbe a tőle eltérő hőmérsékletű másikkal, hogy hő áramlik át az érintkezési felületen, a folyamatot vezetés által történő **hőterjedésnek** nevezzük. Egy anyag hővezetési képességét egy jellemző állandó (λ), az anyag **hővezetőképessége** (hővezetési tényezője) határozza meg. Ez a következő kísérleti elrendezéssel határozható meg. Képzeljünk egy Δx hosszúságú, A keresztmetszetű, homogén lemezt, amelynek két lapja közt ΔT hőmérsékletkülönbség van, ($\Delta T = T_2 - T_1$), ahogyan ezt a 19-9 ábra illusztrálja. (Feltételezzük, hogy nincs hőveszteség.)



19-9 ábra
Δx vastagságú, A keresztmetszetű lemez. A szemközti oldalak hőmérséklete T_1 és T_2.

A ΔT idő alatt átáramló ΔQ hőmennyiségre kísérletileg azt találták, hogy

HŐVEZETÉS
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda A\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad (19\text{-}19)$$

ahol ΔQ az átáramlott hőmennyiség, Δt az időtartam. Mivel a hő mindig a magasabb hőmérsékletű helyről áramlik az alacsonyabb hőmérsékletűre, ΔQ pozitív, ha $\Delta T/\Delta x$ negatív – ezért van a negatív előjel a (19-19) egyenletben. A $\Delta T/\Delta x$ mennyiséget *hőmérsékleti gradiensnek* nevezzük. A grediens olyan matematikai kifejezés, amely valamely mennyiség egységnyi hosszra jutó megváltozását adja meg. Bár a hővezetőképesség a hőmérséklet növelésével kismértékben nő, az eltérés sok esetben elhanyagolható. A 19-4. táblázat λ jellegzetes értékeit sorolja fel[8] néhány anyagra.

19-4 táblázat Hővezetési tényező (0 °C-on és $\approx 10^5$ Pa nyomáson)

Anyag	(W/m·°C)	(cal/m·s·°C)
Szilárd anyagok		
Polisztirol hab	0,01	0,002
Fa *	0,09	0,02
Üveg *	0,8	0,2
Beton *	0,9	0,2
Jég	2,21	0,528
Acél *	48	11
Vas	86,5	20,7
Alumínium	236	56,4
Vörösréz	403	96,3
Ezüst	429	102
Folyadékok		
Víz	0,566	0,135
Gázok		
Széndioxid	0,0145	0,00346
Száraz levegő	0,0237	0,00566
Hélium	0,141	0,0337
Hidrogén	0,167	0,0398

* Az anyag összetételének megfelelően változó

[8] Az építőiparban a hőszigetelés osztályozása az ún. hőszigetelési érték (R) szerint történik. R értékét a következő egyenlet definiálja:

A HŐSZIGETELÉS R-ÉRTÉKE: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A\Delta T}{R}$

ahol $\Delta Q/\Delta t$ az A felületű szigetelőn egységnyi idő alatt átmenő hőmennyiség, ha a szigetelés szemközti felületei között ΔT a hőmérsékletkülönbség. A hőszigetelés R-értéke és a szigetelő anyag λ hővezetési tényezője között így $R=\Delta x/\lambda$ az összefüggés, ahol Δx a szigetelő anyag vastagsága. Ez a definíció azért kényelmes, mert két, vagy több egymással érintkező, különböző lemez teljes R-értéke az egyes R-értékek összege. (A definíció analóg az Ohm-törvény R ellenállásával, a hőáram mértéke megfelel az elektromos áramnak, a hőmérsékletkülönbség a potenciálkülönbségnek.) Így egy R-19-es szigetelőréteg és mellette egy R-6-os szigetelőréteg ekvivalens egy R-25-ös szigetelővel.

19-7 PÉLDA

Vörösréz bevonatú rozsdamentes acél edény esetében 1 mm vastag rézlemez 2 mm vastag acéllemezzel érintkezik, amint azt a 19-10 ábra mutatja. A vörösréz külső felülete állandóan 400 °C-os, az acél külső felülete 20 °C-os. a) Határozzuk meg az acél-vörösréz érintkezési felület hőmérsékletét (T). b) Hány joule hőt vezet át az edény alja másodpercenként, ha az edény aljának területe 160 cm^2? A rozsdamentes acél hővezetési állandója $\lambda = 30$ W/m. °C

MEGOLDÁS

a) A vörösrézen átáramló hőnek ugyanannyinak kell lenni, mint az acélon átáramlónak (máskülönben a két fém közötti érintkezésnél állandóan növekvő termikus energiát találnánk.) Felhasználva a (19-19) egyenletet

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{\text{Cu}} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{\text{acél}}$$

$$-\lambda A\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{Cu}} = -\lambda A\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{acél}}$$

A T hőmérsékletű határfelület esetében

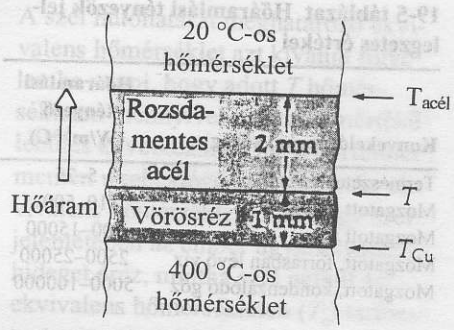
$$\lambda_{\text{Cu}}\left(\frac{T_{\text{Cu}} - T}{(\Delta x)_{\text{Cu}}}\right) = \lambda_{\text{acél}}\left(\frac{T_{\text{acél}} - T}{(\Delta x)_{\text{acél}}}\right)$$

Innen: $T = 386°\text{C}$

b) Hogy megkapjuk a hőáram sebességét, alkalmazzuk a határfelületi hőmérsékletet az acéllemezre:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda A\frac{\Delta T}{\Delta x} = -\left(30\frac{\text{W}}{\text{m °C}}\right)(0{,}016\ \text{m}^2)\left(\frac{386°\text{C} - 20°\text{C}}{0{,}002\ \text{m}}\right)$$

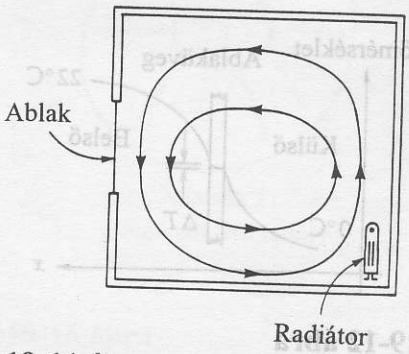
$$= 87{,}8\ \text{kW}$$



19-10 ábra
A 19-7 példához. Hővezetés két különböző anyag közötti határfelületen keresztül.

19.7 Hőterjedés áramlással

Amikor fűtött felület gázzal vagy folyadékkal érintkezik, a hőt a felülettől döntően a környező folyadék, vagy gáz tényleges mozgása szállítja el. A közeg a felület közelében felmelegszik és ennek következtében sűrűsége megváltozik (a hőtágulás miatt), ami *természetes konvekciós áramlást* eredményez, hiszen a könnyebb közeg felemelkedik, hogy helyet cseréljen a hidegebb, sűrűbbel (19-11 ábra). A Föld légkörében a természetes konvekció nagyon fontos szerepet játszik a nagyobb szélrendszerek kialakításában. Ha a közeg mozgását szivattyú, vagy ventillátor okozza, akkor *kényszeráramlásról* beszélünk. A konvekció sokkal hatásosabb módja a hőterjedésnek, mint a vezetés. A konvekció során maga a közeg is áramlik, míg a hővezetés a molekuláris rezgéseken és az elektronok viszonylag lassúbb diffúzióján keresztül valósul meg.



19-11 ábra
Radiátorral fűtött szobában a levegő konvekciós áramai segítik a hő terjedését a szoba más részeibe. A meleg levegő a radiátor fölött felemelkedik, míg a hideg az ablak közelében leszáll.

19-5 táblázat Hőáramlási tényezők jellegzetes értékei *

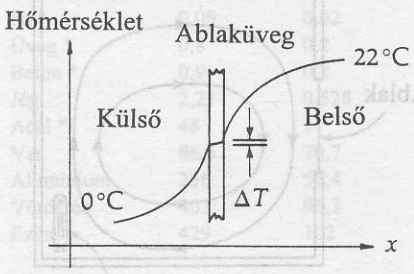
Konvekció típusa, közeg	Hőáramlási tényező ($W/m^2 \cdot °C$)
Természetes levegő	5–25
Mozgatott levegő	10–500
Mozgatott víz	100–15000
Mozgatott, forrásban lévő víz	2500–25000
Mozgatott, kondenzálódó gőz	5000–100000

*J. P. Holman: Heat Transfer, 4th ed. McGraw-Hill, New York, 1976. (A McGraw-Hill Book Company engedélyével)

A konvekcióra nehéz kvantitatív elméletet kidolgozni, mert a közeg mozgása nagyon sok tényezőtől függ. Például függ a felület alakjától és orientációjától: függőleges felület sokkal lassabban ad le hőt, mint a vízszintes. Szerepet játszik a közeg sűrűsége, viszkozitása, hővezetőképessége, fajhője és hőtágulási együtthatója is. Az is jelentős, hogy a mozgás inkább turbulens, mint lamináris (ld. 17.6 fejezet). Gyakorlatilag mindezen változókat egyetlen **hőáramlási tényezőben** (α) szokás összefogni, a következő kifejezés segítségével:

HŐTERJEDÉS ÁRAMLÁSSAL
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha A \Delta T \qquad (19\text{-}20)$$

ahol $\Delta Q/\Delta t$ az időegység alatt átvitt hőmennyiség, A a felület nagysága, ΔT a felület és a közegnek a felülettől távol lévő része közti hőmérsékletkülönbség. A mérnökök bizonyos egyszerű geometriai formákat és leegyszerűsített közelítésekkel kísérletileg meghatározott α értékeket használnak (ld. 19-5 táblázat). A legtöbb esetben α-t $(\Delta T)^{\frac{1}{4}}$-del arányosnak találták.



19-12 ábra
Tipikus hőmérsékletek egy hideg, szélcsendes napon egy ablak körül. A levegő alacsony hővezetőképessége miatt az üvegen mért hőmérsékletkülönbség (ΔT) csak néhány tized fok, míg az üveg átlaghőmérséklete a külső és belső hőmérséklet középértéke.

19-8 PÉLDA

Elemezzük egy ablak 2 mm vastag, 1,5 m^2 területű üvegén keresztül történő hőterjedést, ha egy szélcsendes napon a belső hőmérséklet 22 °C, a külső 0 °C.

MEGOLDÁS

Ha elhanyagoljuk a konvekciós hatásokat és feltételezzük, hogy a hőmérsékletkülönbség teljes egészében az üveglapon keresztül alakul ki, akkor az üvegen át történő hővezetésre tévesen nagy értéket kapunk. A (19-19) egyenletből

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \left(0{,}8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}^\circ}\right)(1{,}5\,\text{m}^2)\left(\frac{22\,\text{C}^\circ}{0{,}002\,\text{m}}\right) = 13\,200\,\text{W}$$ nagyon nagy!

A hőmérsékletesést az üvegen keresztül tulajdonképpen a levegő alacsony hővezetőképessége csökkenti. (Ha egy hideg napon megérintjük a belső ablakfelületet, az lényegesen hidegebb, mint a szobahőmérséklet és a külső felület sokkal melegebb, mint a kinti levegő.) A 19-12 ábra tipikus hőmérsékleteloszlást mutat, ahol az üvegre eső hőmérsékletkülönbséget – kísérletileg – 0,2 °C körülinek találták. Ezt az értéket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \left(0{,}8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{C}^\circ}\right)(1{,}5\,\text{m}^2)\left(\frac{0{,}2}{0{,}002}\right) = 120\,\text{W}$$

Ennek a hőterjedésnek egyenlőnek kell lennie az ablak egyik oldalán konvekció útján adódó hőárammal. Ha feltételezzük, hogy a külső üvegfelület 11 °C középhőmérsékleten van, az α hőáramlási tényező

$$\alpha = \frac{\Delta Q/\Delta t}{A \Delta T} = \frac{100\,\text{W}}{(1{,}5\,\text{m}^2)(11^\circ\text{C})} = 6{,}06 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ}$$

Ez az érték a 19-5 táblázatban bemutatott tipikus értékeknek megfelel.



19-13 ábra
A szél hűtőhatását meghatározó ekvivalens hőmérséklet azt kívánja figyelembe venni, hogy adott T hőmérsékleten mennyivel nagyobb mértékű lehűlés következik be, ha a bőrfelület mentén v sebességű szél süvít. Az ekvivalens hőmérséklet jelzi, hogy szél jelenlétében az ember ugyanolyan hideget érez, mintha szél nélkül az ekvivalens hőmérsékleten (T_e) tartózkodna. Egy érdekes történeti háttérrel bíró tapasztalati képlet az ezt leíró

$$T_e = 33 - \left[10{,}45 + 10\sqrt{v} - v\right] \times (33 - T)/22$$

formula, ahol T_e és T mértékegysége °C, a sebesség egysége m/s. Hogy ez a becslés milyen pontosan tükrözi a tényleges fiziológiai hatást, az vitatott kérdés. Mindazonáltal a szél hűtő hatásának megfelelő ekvivalens hőmérsékletet az időjárásjelentésben is gyakran megemlítik.
Lásd: „ Brrrr! The origin of the wind chill factor" The Physics Teacher 27, 1 (Jan. 1989.). p 59–60.

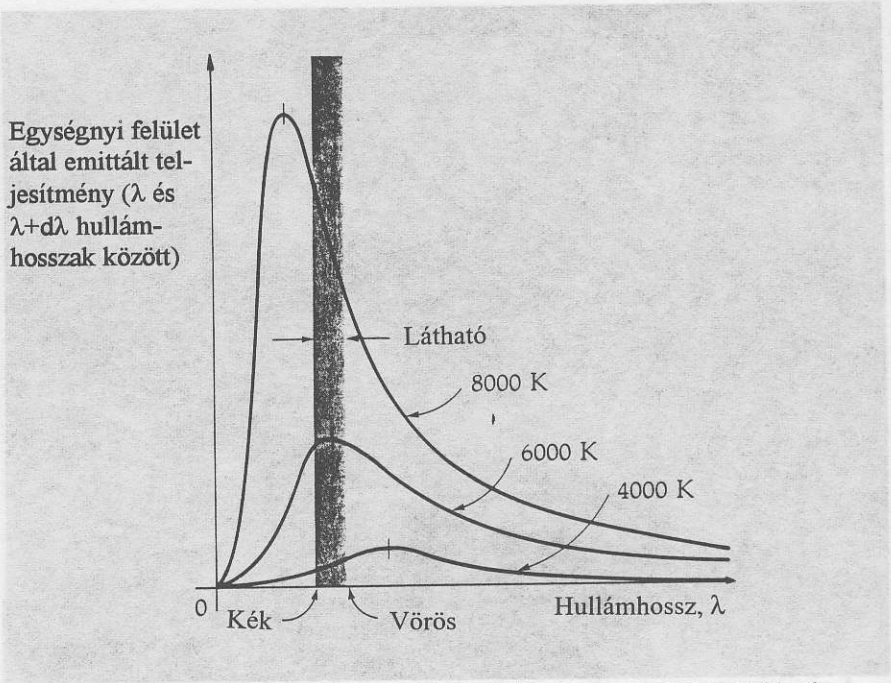
Amikor fúj a szél, akkor a meleg tárgyak felszínének közelében a levegőrétegek sokkal gyorsabban elmozdulnak, mint ahogyan kizárólag a konvekció következtében tennék. Ez csökkenti az üveg külső felületének hőmérsékletét, jelentősen megnövelve a hőleadást. Az időjárásjelentésekben említésre kerülő kifejezés, mely szerint *a szél hűtőhatása* csökkenti a hőérzetet, azt jelenti, hogy a szél miatt hidegebbnek érezzük a levegőt. A szél hűtőhatását azzal a hőmérséklettel mérjük, amely ahhoz lenne szükséges, hogy az adott hőleadás szélcsendes levegőben jöjjön létre. Így egy hideg, szeles napon, 0 °C-os levegőhőmérsékletnél a szél hűtőhatása következtében a hőmérsékletérzet –35 °C, mert a hőleadás a szélcsendes levegőben –35 °C-on bekövetkező lehűléssel ekvivalens. Ezen a hőrmésékleten a szabad bőrfelület egy percen belül megfagyhat, de –60 °C-os hőérzetnél a fagyás már néhány másodperc alatt bekövetkezik.

19.8 Hőterjedés sugárzással

A hő vákuumban *sugárzás* útján terjed, amint azt a Nap sugárzó energiája mutatja, amikor az üres világűrön áthaladva éri el a Földet. A *sugárzás* fogalma itt „elektromágneses hullámot" jelent, ami a vákuumban fénysebességgel ($c = 3 \times 10^8$ m/s) terjed (ld. 35. fejezet). Minden felület folyamatosan emittál sugárzó energiát a felület természetétől és a kelvinben mért abszolút T hőmérséklettől függő mértékben.
Az abszolút hőmérsékleti skála és a Celsius-fokban mért T_C hőmérséklet között a következő összefüggés áll fenn:

$$T \text{ (kelvinben)} = T_C \text{ (°C-ban)} + 273$$

A 19-14 ábra az ún. „fekete test"-re közöl néhány jellegzetes adatot (a fekete test leírására később visszatérünk). 600 K alatt lényegében minden sugárzás az *infravörös* tartományba esik, melynek hullámhossza a látható fényénél hosszabb. Ahogy a test melegszik, fakó vörösben kezd izzani, mivel a látható hullámhosszak tartományában az emisszió a vörös területen erősebb. 6000 K hőmérsékleten – a Nap felszíni hőmérséklete körüli értéknél – a fekete test a legerősebben a látható hullámhosszak középső tartományában sugároz és a szín sárgásfehérnek tűnik. A hőmérséklet további növekedésével a sugárzási



19-14 ábra
Fekete test egységnyi területe által λ és $\lambda + d\lambda$ közötti hullámhossztartományban kisugárzott teljesítmény a hullámhossz függvényében három különböző hőmérsékleten. Az elektromágneses színkép látható része csak kis hullámhossztartományt fog át. Az összes hullámhosszra vonatkozó teljes teljesítmény – adott hőmérsékleten – a görbe alatti terület. Megjegyezzük, hogy a hőmérséklet növelésével a terület T^4 szerint nő és hogy a görbe csúcsa – amit kis függőleges vonalakkal jelöltünk – a rövidebb hullámhosszak felé tolódik el.

görbe maximuma még inkább a rövidebb hullámhosszak felé tolódik, és a szín kékesfehérré válik.

Egy T hőmérsékletű A felületről a teljes hullámhossz-tartományban egységnyi idő alatt kisugárzott összes energiát a *Stefan-Boltzmann törvény* írja le:

STEFAN-BOLTZMANN SUGÁRZÁSI TÖRVÉNY[9] (a teljes hullámhossztartományban)

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma A T^4 \qquad ([T]=K) \qquad \textbf{(19-21)}$$

A teljes hullámhossz-tartományban egységnyi idő alatt kibocsátott energia ($\Delta Q/\Delta T$) W-ban) egy adott hőmérsékletre vonatkozóan, a 19-14 ábrán látható spektrális sugárzási görbe alatti terület. Az **emisszióképesség** (e) zérus és egy

Tartsd hidegen!*

Ha az emberi testnek nem lenne megfelelő hűtési mechanizmusa, hamar „túlfornánk". Az izmok hatásfoka a munkavégzés során nagyon gyenge, kevesebb, mint 20%. Így az élelmiszerekből származó energiának közel 80%-a a test belsejében termikus energiává alakul. Egy nyugalomban lévő felnőtt emberben a napi termikus energiatermelés kb. 7500 kJ, ami megfelel 90 W-nak. Ha ez a belső energia nem disszipálódna, akkor óránként kb. 3 °C-os hőmérséklet emelkedést okozna, ami néhány órán belüli halált eredményezne.
Érdekes módon, az emberi szöveten keresztül történő hővezetés nagyon kismértékű, a hővezetési tényező megközelítőleg a jó hőszigetelő parafáéval azonos. Így a test belsejében fejlődő hő legnagyobb része csapdába lenne zárva, ha nem működne egy másik hőszállító mechanizmus, a vér cirkulációja. A vér könnyen elnyeli a hőt és gyorsan a bőrfelszínhez közeli hajszálerekbe szállítja. Ott csak egy vékony szövetrétegen kell átvezetni a termikus energiát ahhoz, hogy a bőrfelszínt elérje.

[9] Az összefüggést először 1879-ben J. Stefan osztrák fizikus írta fel, aki John Tyndall brit fizikus kísérleti adatait elemezte. Öt évvel később Ludwig Boltzmann adta meg a kifejezés elméleti levezetését.

* (Forrás: Paul Davidovits: Phisics in Biology and Medicine, Prentice-Hall, 1975. pp. 142–144)

Ezzel egyidőben a megnövekedett vérhőmérsékletet a test termosztátja, a – mélyen az agy belsejében elhelyezkedő – *hypotalamus* méri. Ez információt küld, ami különböző hőelnyelési mechanizmusokat hoz működésbe, többek között a verejtékmirigyeket. Az izzadság kb. 2300 kJ/kg hőt nyel el, miközben elpárolog, azaz folyadékból gőz állapotba megy át. Ez olyan hatékony hűtési mechanizmus, hogy – kísérleti körülmények között – emberek sérülés nélkül túléltek olyan hosszú ideig tartó hőhatást 125 °C-os levegőben, ami egyébként a bélszín elkészítéséhez is elegendő.
Másfelől, hideg időben, az alacsony bőrhőmérséklet a hajszálerek összehúzódását eredményezi, s ezzel korlátozza a vér cirkulációját a bőrfelszín közelében. Ez a hatás megnöveli a vér cirkulációja nélküli szövet vastagságát, ezáltal jobb hőszigetelést biztosít, ami megvédi a belső testrészeket a túlzott hőveszteségtől.

között változik és az egyes sugárzó felületek emittáló (sugárzást kibocsátó) tulajdonságáról ad számot. (Ez általában kicsi a világos színű sima felületekre és nagy a sötét, durva felületekre.). Az A terület négyzetméterben adott és T az abszolút hőmérséklet kelvinben (ld. a 19-25 egyenletet). A σ *Stefan-Boltzmann állandó*:

STEFAN-BOLTZMANN ÁLLANDÓ
$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

19-9 PÉLDA

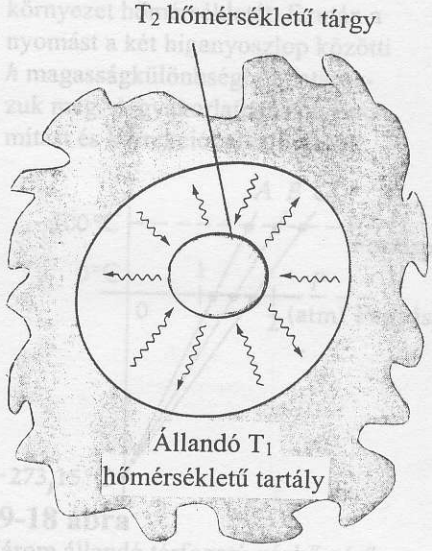
Határozzuk meg a teljes kisugárzott teljesítményt, amit egy vékony, 20 cm × 40 cm területű vörösréz lemez felülete bocsát ki 600 °C-on. A vörösréz emisszióképessége 0,6.

MEGOLDÁS

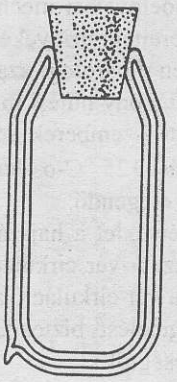
A teljes terület (mindkét oldalé): $2 \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}4\ \text{m} = 0{,}160\ \text{m}^2$.
A kelvinben mért hőmérséklet: $K = 600\ ^\circ\text{C} + 273 = 873\ \text{K}$. A 19-20 egyenlet szerint:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (0{,}60)\left(5{,}67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}\right)(0{,}160\,\text{m}^2)(873\,\text{K})^4 = 3160\,\text{W}$$

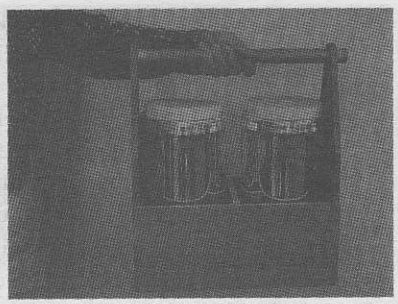
Amidőn egy test a ráeső elektromágneses hullámokat elnyeli, akkor az felveszi a hullámok energiáját, s a test hőmérséklete növekszik. Az *eredő* energiaátvitel azonban a tárgyat körülvevő környezettől is függ, mivel a tárgy nemcsakkisugároz, hanem el is nyel energiát a környezetéből. Tekintsünk egy T_2 hőmérsékletű tárgyat, amely állandó, (alacsonyabb) T_1 hőmérsékleten tartott tartályban van (19-15 ábra). A test több energiát sugároz, mint amennyit elnyel, amíg le nem hűl a környezetével azonos hőmérsékletre. Ekkor a test termikus egyensúlyban van, azaz a környezetébe időegység alatt kisugárzott energia azonos az időegység alatt abszorbeált (elnyelt) energiával. Vagyis időegység alatt $e\sigma AT^4$ nagyságú energiát sugároz és $e\sigma AT^4$ nagyságú energiát nyel el. Így ugyanazt az e értéket használjuk mind az emisszióra, mint az abszorpcióra. *Egy jó abszorbeáló anyag egyben jó sugárzó is.* Megfordítva, egy ragyogó felület, ami rosszul nyeli el a sugárzást, egyszersmind rosszul emittál. Ha egy test *tökéletes elnyelő* ($e = 1$), akkor **fekete testnek** nevezzük, mert felülete szobahőmérsékleten egyöntetű feketének tűnik. Ez a test nem veri vissza a ráeső sugárzást és saját sugárzása nagyrészt a távoli



19-15 ábra
Egy T_2 hőmérsékletű test T_2^4-nel arányos mértékben sugároz energiát, és a környezetéből T_1^4-nel arányos mértékű energiát nyel el. Végül a test T_1-re hűl le és a környezetével termikus egyensúlyba kerül.



a) Vákuumos termoszpalack kettős üvegfallal, közte légritkított térrel. A vákuum gyakorlatilag kiküszöböli a hővezetést és a hőáramlást. A vákuumban egymással szemközti belső falak ezüstözöttek; mivel ezek a tükröző felületek erősen visszaverők, gyenge hősugárzók, így csökkentik a hőátvitelt a résen keresztül.



b) Hasonló konstrukciót használnak a Dewar-palackokhoz, amelyeket alacsony hőmérsékletű méréseknél nagyon hideg folyadékok tárolására, mint például a folyékony N_2, He stb. alkalmaznak. A tetejét szándékosan nyitva hagyják, vagy a dugót csak nagyon lazán illesztik, hogy megelőzzék a folyadék enyhe forrásából kialakuló túlnyomás fellépését. A forrás azért következik be, mert az üveg maga kis mértékben vezeti a hőt. Azok a Dewar-palackok, amelyek véletlenül szorosan le voltak fedve, egy idő múlva felrobbantak.

19-16 ábra
Tároló edények nagyon hideg folyadékok számára.

infravörösbe esik. (Mindazonáltal egy fekete test elegendően magas hőmérsékleten fehéren izzana!)

A felületek emisszióképessége az elektromágneses hullámok hullámhosszával változik. A látható tartományban egy sötét bőrű ember bőrének emisszióképessége 0,8, míg egy világos bőrű ember esetében $e \approx 0{,}65$. A testhőmérsékleten és az ember normális környezetének hőmérsékletén a kisugárzott energia nagyrésze az infravörös tartományba esik, ahol az emisszióképesség lényegében minden bőrszínre $e = 1$.

19-10 PÉLDA

Egy meztelen 1,7 m^2 bőrfelületű ember szaunában ül, aminek a fala 61 °C-os. Mekkora eredő sugárzó energiát abszorbeál az ember időegység alatt, ha testének hőmérséklete 37 °C? Tegyük fel, hogy $e = 1$ a falakra és a bőrfelületre egyaránt.

MEGOLDÁS

A hőmérsékletek kelvinben: $T_1 = 310$ K, $T_2 = 334$ K. Így az eredő hőátvitel:

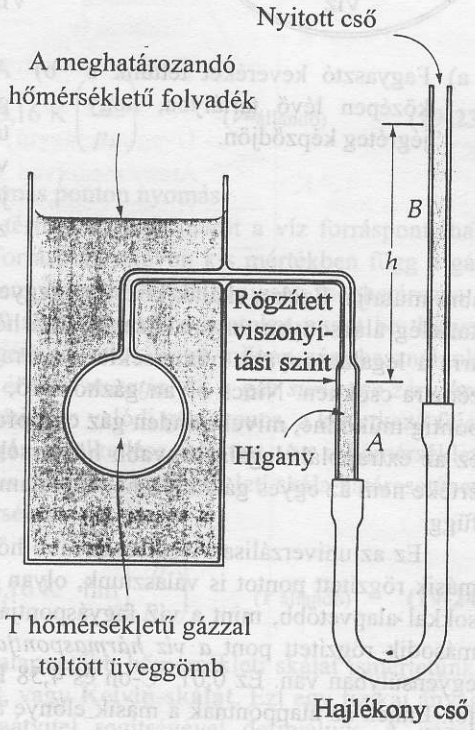
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma A(T_2^4 - T_1^4)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (1)\left(5{,}67 \times 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K^4}}\right)(1{,}7\,\mathrm{m^2})\left[(334\,\mathrm{K})^4 - (310\,\mathrm{K})^4\right] = 107\,\mathrm{W}$$

Figyelmeztetés: Vigyázzunk, hogy elkerüljük azt az általános hibát, hogy $(\Delta T)^4$-t használunk $T_2^4 - T_1^4$ helyett. Adott felületről időegység alatt kibocsátott energia csak a felület hőmérsékletétől függ, és független a szomszédos abszorbeáló anyag hőmérsékletétől. Itt a felület által emittált energia és abszorbeált energia közötti különbséget keressük, így a környezet, (vagy egy közeli energiasugárzó) hőmérsékletét kell figyelembe venni.

19.9 Az állandó térfogatú gázhőmérő

Amikor a különböző anyagokat és fizikai tulajdonságaikat vizsgáljuk abból a célból, hogy jó hőmérőt tervezzünk, akkor egy bizonyos tulajdonság – érzékenység és reprodukálhatóság szempontjából – kiemelkedik minden más közül. Bár az ennek alapján kialakított hőmérő használata nehézkes, sokkal pontosabb, mint a jól ismert higanyos hőmérő. Ez a 19-17 ábrán látható *állandó térfogatú gázhőmérő*, amelynél a *gáz nyomása* az a termometrikus tulajdonság, ami a hőmérséklet meghatározására alkalmazható.

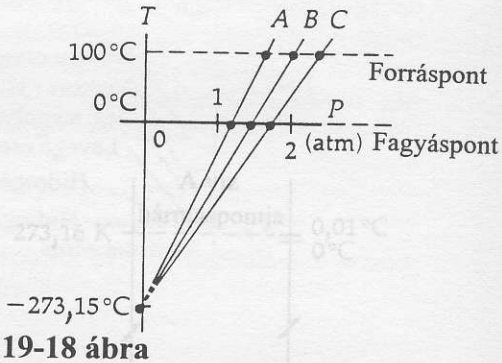


19-17 ábra
Állandó térfogatú gázhőmérő. A gázzal töltött üveggömb a meghatározandó hőmérsékletű folyadékba merül. A *B* cső emelésekor vagy süllyesztésekor az *A* csőben lévő higanyoszlop magassága a viszonyítási szinten marad. Így az üveggömbben lévő gáz megtartja állandó térfogatát, miközben felveszi a környezet hőmérsékletét. Ezután a nyomást a két higanyoszlop közötti *h* magasságkülönbségből határozzuk meg. A gyakorlatban sok finomítást és korrekciót alkalmaznak.

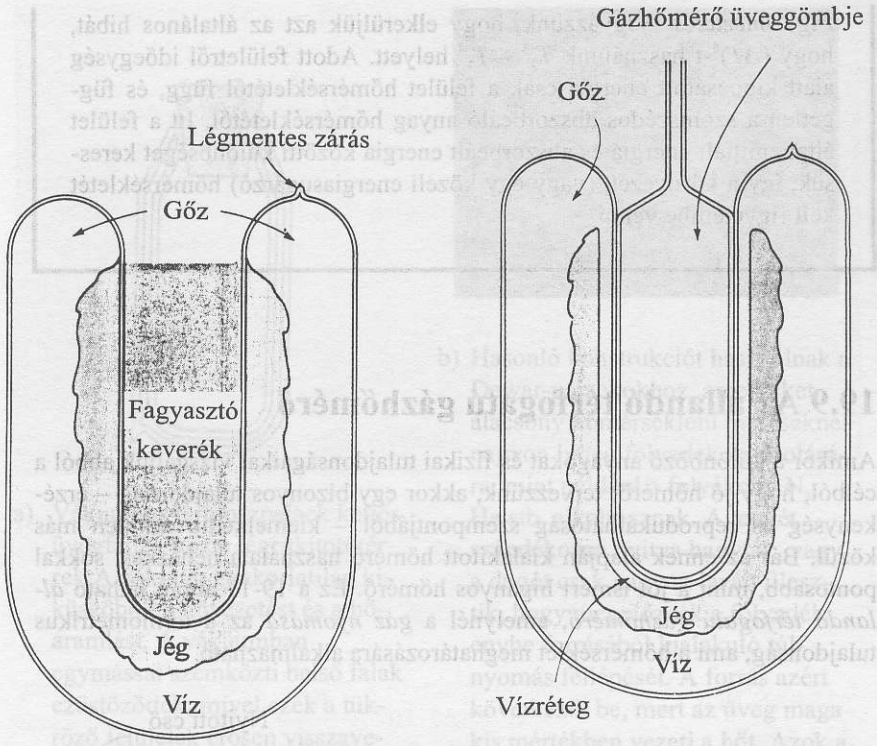
Ezt az új hőmérsékleti skálát a *mérendő* hőmérsékletű környezetben lévő, állandó térfogatú gáz T hőmérséklete és p nyomása közti lineáris kapcsolat meghatározásával alakíthatjuk ki. Így $T \equiv a \cdot p$, ahol a az arányossági tényező. Ebből következik, hogy két hőmérséklet aránya megegyezik a hozzá tartozó két nyomás arányával:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \textbf{(19-22)}$$

Tegyük fel, hogy különféle valódi gázokkal kísérletezünk, különböző nyomásokon. Mindegyikre kialakítunk egy hőmérsékleti skálát a víz fagyáspontjának és forráspontjának felhasználásával, ahogyan azt a 19-18



19-18 ábra
Három állandó térfogatú gázhőmérő skála (*A*, *B* és *C*). A hőmérőkben azonos minőségű, de különböző mennyiségű gáz van. Bár az eltérő gázmennyiségek esetén az egyenesek meredeksége különböző, minden egyenes ugyanarra a legalacsonyabb hőmérsékletre, –273,15 °C-ra extrapolálható, ahol a nyomás zérus lenne.



a) Fagyasztó keveréket tettünk a középen lévő tartályba, hogy jégréteg képződjön.

b) A gázhőmérő üveggömbjét a fagyasztó keverék helyére tesszük a tartályban. Ennek hatására egy vékony jégréteg megolvad, így a jég, a víz és a gőzfázis együtt létezik és egyensúlyban marad.

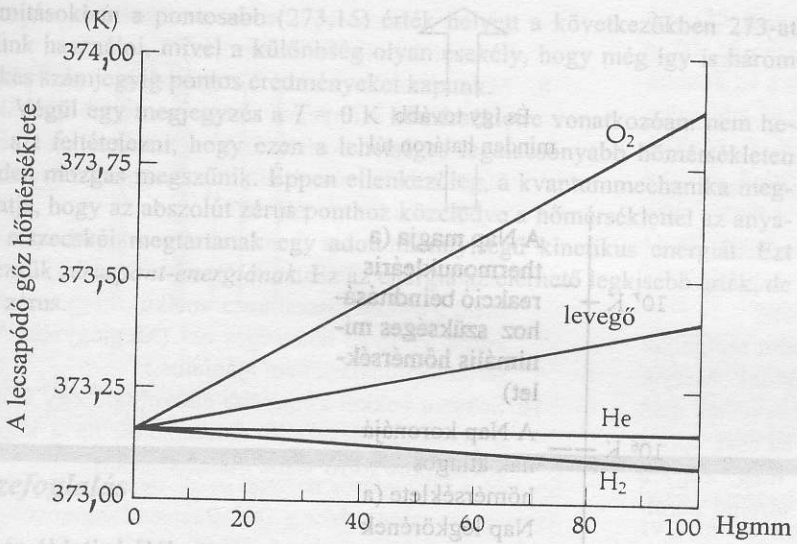
19-19 ábra
A hármaspont-cella egy zárt kamra, ami egyensúlyban tartalmaz vizet, víz-gőzt és jeget, a hármasponti hőmérsékleten.

ábra mutatja. Ezek a skálák közel megegyezőek, feltéve, hogy a nyomásokat elég alacsonyan tartjuk. Ezenkívül a hőmérsékleti skálák mind ugyanarra a legalacsonyabb hőmérsékletre extrapolálhatók, amelynél a nyomás zérusra csökken. Nincs olyan gázhőmérő, ami ténylegesen eddig a zéruspontig működne, mivel minden gáz cseppfolyósodik, mielőtt ezt elérné. De ez az extrapolált legalacsonyabb hőmérséklet minden gázra azonos, tehát értéke nem az egyes gázoktól, hanemvalamennyi gáz közös tulajdonságától függ.

Ez az univerzálisan legalacsonyabb hőmérséklet a –273,15 °C. Ha egy másik rögzített pontot is választunk, olyan hőmérsékleti skálát kapunk, ami sokkal alapvetőbb, mint a víz fagyáspontján és forráspontján alapuló. Ez a második rögzített pont *a víz hármaspontja*, ahol a víz, a vízgőz és a jég egyensúlyban van. Ez 0,01 °C-on és 4,58 Hgmm (610,1 Pa) nyomásnál lép fel. Ennek az alappontnak a másik előnye az, hogy sokkal könnyebben reprodukálható, mint a víz fagyás- és forráspontja.

Ha erre az alappontra építve akarunk szabványosított hőmérsékletskálát készíteni, akkor a 19-19 ábrán látható *hármaspont-cellát* használjuk. Az új hőmérsékletközök megegyeznek a Celsius-skáláéval, zérus pontként pedig a legkisebb extrapolált pontot használjuk, ekkor a hármasponti hőmérséklet 273,16 K. A hőmérséklet SI-egysége a *kelvin* (K), amit a víz hármasponti hőmérsékletének 1/273,16-od részeként határoznak meg[10]. A további hőmérsékleteket a

[10] A K mellett a °C-tól és a °F-tól eltérően nem használjuk a fok jelölést. A hőmérséklet kelvinben csak K. Így 50 K „50 kelvin"-nek és nem „50 kelvin fok"-nak olvasandó.



Gázbuborék nyomása a víz hármaspontján (p_h)

19-20 ábra
Állandó térfogatú gázhőmérőben négy különböző gáz felhasználásával kapott kísérleti adatok a lecsapódó vízgőz hőmérsékletének meghatározására. A görbéket egymás utáni leolvasások eredményeként kapjuk, ahogy a gáz nyomása a hármaspontban egyre kisebb és kisebb lesz a gáz mennyiségének csökkentésével. Adott p_h értékek mellett leolvasott hőmérsékletek csekély mértékben különböznek a különböző gázok esetében. (Az eltérések nagyon kicsik, – az ordináta skálája erősen fel van nagyítva.) Ahogyan a nyomás zérushoz közeledik, a határesetben leolvasott hőmérséklet minden gázra ugyanahhoz a numerikus értékhez, 73,15 K - hez tart. Mivel az adatok hélium esetében majdnem állandók, a hélium kis nyomáson közel ideális gázként viselkedik.

$$T = 273{,}16\ \text{K}\left(\frac{p}{p_h}\right) \qquad (V\text{=állandó}) \qquad \textbf{(19-23)}$$

egyenletből kapjuk, ahol p_h a hármas ponton nyomás.

Használjuk ezt az állandó térfogatú gázhőmérőt a víz forráspontjának mérésére. Azt találjuk, hogy a forráspont nagyon kis mértékben függ a gáz típusától és a felhasznált gáz mennyiségétől. (A mennyiség meghatározza a hármaspont nyomását.). A 19-20 ábra jellegzetes adatokat mutat be. Figyelemre méltó azonban, hogy függetlenül attól, hogy milyen gázt használunk, *minden gázhőmérő ugyanazt az értéket mutatja, ha a gáz sűrűsége zérushoz tart.* Kis nyomás értékeknél így minden valódi gáz azonos, a következő fejezetben tárgyalandó ún. **ideális gáz** viselkedése felé tart. Az a hőmérsékleti skála, amit ezzel az eljárással a kis nyomású hőmérsékleti skála határesetében definiálunk, az ideális gáz hőmérsékleti skálája:

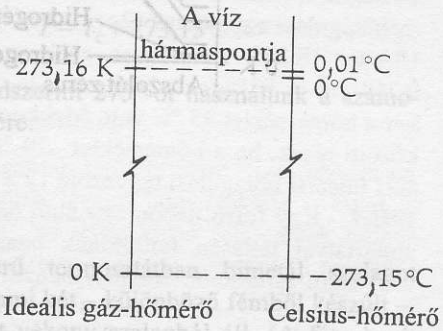
IDEÁLIS GÁZ HŐMÉRSÉKLET

$$T = 273{,}16\ \text{K}\lim_{p_h \to 0}\left(\frac{p}{p_h}\right) \qquad (V\ \text{állandó}) \qquad \textbf{(19-24)}$$

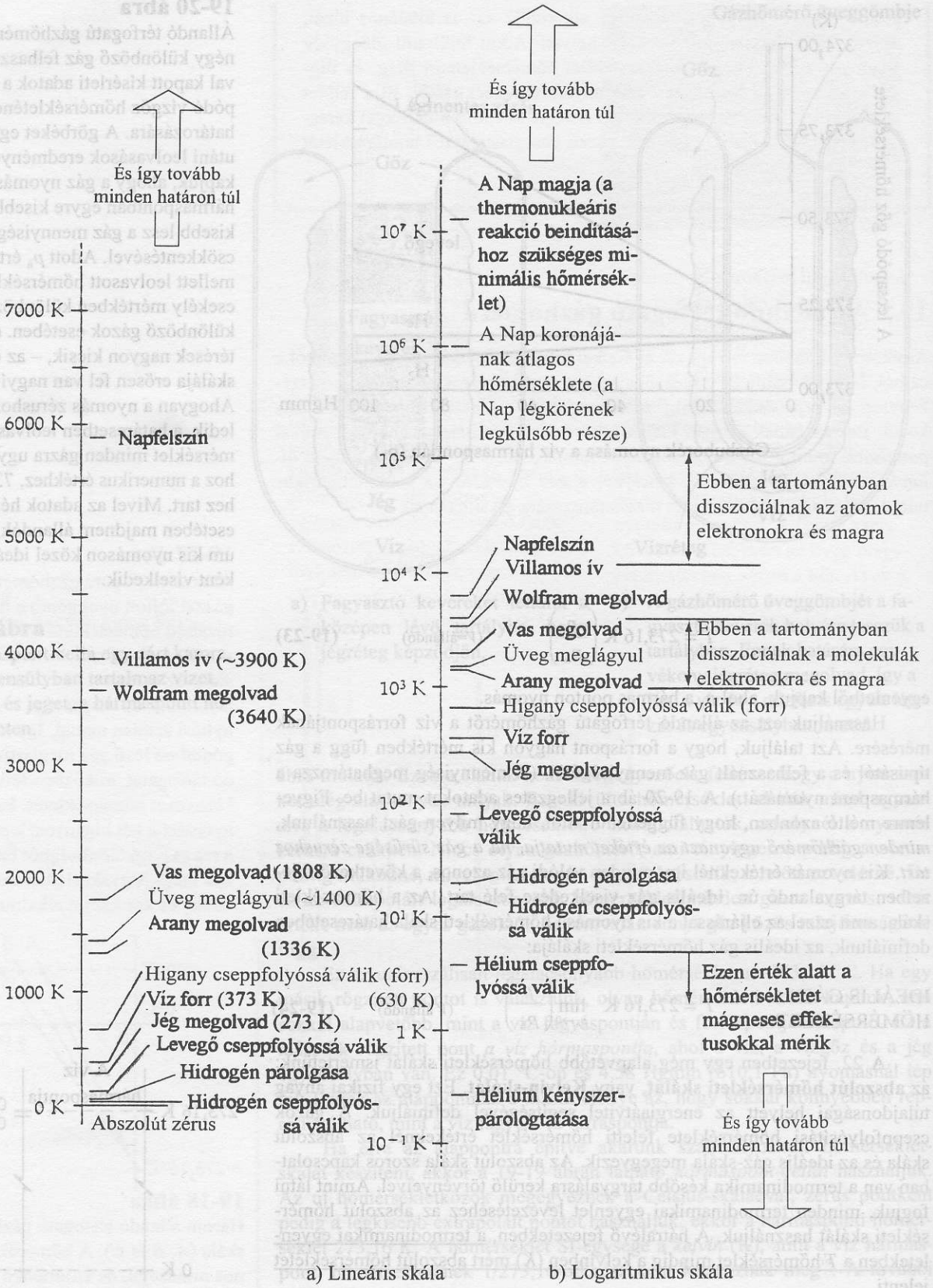
A 22. fejezetben egy még alapvetőbb hőmérsékleti skálát ismertetünk: az **abszolút hőmérsékleti skálát**, vagy **Kelvin-skálát**. Ezt egy fizikai anyag tulajdonságai helyett az energiaátvitel segítségével definiáljuk. A gázok cseppfolyósítási hőmérséklete feletti hőmérséklet értékeknél az abszolút skála és az ideális gáz-skála megegyezik. Az abszolút skála szoros kapcsolatban van a termodinamika később tárgyalásra kerülő törvényeivel. Amint látni fogjuk, minden termodinamikai egyenlet levezetéséhez az abszolút hőmérsékleti skálát használjuk. A hátralévő fejezetekben, a termodinamikai egyenletekben a T hőmérséklet mindig a kelvinben (K) mért abszolút hőmérsékletet jelenti.

A CELSIUS- ÉS KELVIN-FÉLE HŐMÉRSÉKLETI SKÁLÁK KÖZÖTTI KAPCSOLAT

$$T = T_C + 273{,}15^\circ \qquad \textbf{(19-25)}$$



19-21 ábra
A Celsius-skála és az ideális gáz-skála közötti kapcsolat.



19-22 ábra
Néhány jellegzetes pont a Kelvin-féle hőmérsékleti skálán. A logaritmikus skála a rendkívül nagy és kicsi értékekre vonatkozó adatok ábrázolásánál hasznos. Megjegyezzük ,hogy a lineáris skálával ellentétben, – ami a lehetséges legkisebb hőmérsékletről, zérusról indul – a logaritmikus skála, ahogyan egyre jobban megközelíti a zérust, minden határon túl folytatódik negatív irányban. A legalacsonyabb hőmérséklet, amit eddig kísérletileg elértek (1988-ban) $2 \cdot 10^{-8}$ K körül van.

Számításokban a pontosabb (273,15) érték helyett a következőkben 273-at fogunk használni, mivel a különbség olyan csekély, hogy még így is három értékes számjegyig pontos eredményeket kapunk.

Végül egy megjegyzés a $T = 0$ K hőmérsékletre vonatkozóan: nem helyes azt feltételezni, hogy ezen a lehetséges legalacsonyabb hőmérsékleten minden mozgás megszűnik. Éppen ellenkezőleg, a kvantummechanika megmutatja, hogy az abszolút zérus ponthoz közeledve a hőmérséklettel az anyagok részecskéi megtartanak egy adott mennyiségű kinetikus energiát. Ezt nevezzük *zéruspont-energiának*. Ez az energia az elérhető legkisebb érték, de nem zérus.

Összefoglalás

Hőmérsékleti skálák

Mind a Fahrenheit-, mind a Celsius-féle skála a víz normál légköri nyomáson mért fagyás- és forráspontján alapul:

	Fahrenheit	Celsius	
Forrás:	212 °F	100 °C	100 °C
Fagyás:	32 °F	0 °C	
	180 °F		

Következésképpen 1°C-egység = (9/5)°F-egység.

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32° \qquad \text{és} \qquad 5(T_F + 40°) = 9(T_C + 40°)$$
$$T_C = \tfrac{5}{9}(T_F - 32°)$$

Hőtágulás

Lineáris hőtágulás: $L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$

ahol α a *lineáris hőtágulási együttható*.

Felületegységre eső hőtágulás: $A = A_0(1 + 2\alpha\Delta T)$

Térfogategységre eső hőtágulás: $V = V_0(1 + 3\alpha\Delta T)$

Ezt a kifejezést sokszor $3\alpha = \beta$ helyettesítéssel írjuk fel, ahol β a *térfogati hőtágulási tényező*.

A hő mechanikai egyenértéke: 1 cal ≡ 4,186 J (a *kalória* definíciója):

Fajhő c: $\Delta Q = mc\Delta T$

Átalakulási (latens) hő L: $Q = mL$

Hővezetés: $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = -\lambda A\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)$

ahol λ az anyag *hővezetési tényezője* és Δt az időtartam.

Hőáramlás: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha A\Delta T$

ahol α a *hőáramlási tényező* (értékei kísérletek alapján közelítőleg meghatározva).

Hősugárzás: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma AT^4$

ahol e az *emisszióképesség* (értéke 0 és 1 között); σ a Stefan-Boltzmann állandó, $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}$ W/m^{2}K^4, T a kelvinben mért hőmérséklet.

Meghatározható egy, az állandó térfogatú gázok viselkedésére alapozott ideális gáz hőmérsékleti skála, amelynek, mint etalonnak, számos előnye van. A Celsius-hőmérséklet (T_C) és a kelvinben mért **ideális gáz hőmérséklete** (T) közötti kapcsolat

$$T = T_C + 273{,}15°$$

Feladatokban rendszerint 273°-ot használunk a számolás megkönnyítésére.

Kérdések

1. Említsünk néhány hibát, ami fellép az egyszerű, egyenletes keresztmetszetű kapillárissal bíró higanyos hőmérőnél amelynek a skálája lineáris.
2. Amikor egy higanyos hőmérő üveggömbjét (higanytartályát) forrásban lévő vízbe merítjük, először kicsit csökken a hőmérséklet és csak azután kezd emelkedni. Magyarázzuk meg!
3. Egy egyszerű termosztátban bimetál szalagot használnak, ami két – különböző fémből készült –, összeerősített vékony szalagból áll. (A fémeknek különböző hőtágulási együtthatójuk van.) Miért használható ez hőmérsékletérzékelőként?
4. Felmelegített sárgaréz gyűrűt rácsúsztatnak egy hideg alumínium hengerre, amivel szorosan illesz-

kedik. Szét lehet-e szedni a két tárgyat, miután azonos lett a hőmérsékletük, anélkül, hogy szét kellene vágni?

5. Tegyük fel, hogy készítettünk egy fordított hőmérsékleti skálát, ahol a magasabb hőmérsékletekhez kisebb számértékek tartoznak. Ismertessük egy ilyen skála előnyeit és hátrányait!
6. Mind a hullámterjedés, mind a hővezetés során energiaátvitel történik. Melyek a hasonlóságok és a különbségek ezen két folyamat között?
7. Tegyük fel, hogy néhány perccel azelőtt szolgálják fel kávénkat, mielőtt ráérnénk meginni. Melyik esetben marad tovább meleg: ha felszolgálás után azonnal beletesszük a tejszínt, vagy ha csak éppen mielőtt elkezdjük inni? (Jegyezzük meg, hogy a lehűlés nagymértékben a felszínről történő párolgás következménye, mivel a csésze fala meglehetősen jó hőszigetelést biztosít.)
8. Miért érezzük sokkal hidegebbnek a padlócsempét, mint a szőnyeget, amikor mezítláb kisétálunk a szőnyeggel borított hálószobából a csempézett fürdőszobába, annak ellenére, hogy mindkét helyiség azonos hőmérsékletű?
9. Egy előadáson a tanár veszélyes kísérletet mutat be, nedves ujját olvadt ólomba mártja (327 °C), majd gyorsan visszahúzza anélkül, hogy megégett volna. Hogyan lehetséges ez? (Megjegyzés: A kísérlet kipróbálása nem ajánlatos.)
10. Sokszor sokkal könnyebb eltávolítani egy üvegről a szorosan illeszkedő fémkupakot, ha a kupakot rövid időre forró vízbe mártjuk. Miért?

Feladatok

19.3 Hőtágulás

19A-1 Acél mérőszalagot 20 °C-on történő leolvasásra kalibráltak. Ha –10 °C-ra esik a hőmérséklet, milyen korrekciót kellene alkalmazni 20 000 m pontos leolvasásához?

19A-2 15,24 m hosszú acél vasúti síneket úgy raknak le, hogy végeik között kis réseket hagynak a hőtágulásra. Ha 10 °C-os hőmérsékleten fektették le a síneket, mekkora minimális réssel lehet megakadályozni, hogy 50 °C-os hőmérsékleten összeérjenek? A lineáris hőtágulási tényező a sínekre $1{,}1 \times 10^{-5}$ 1/°C.

19A-3 Egy 15,24 m hosszúságú ólomcső –20 °C-ról +30 °C-ra melegítve 2,286 cm-rel nyúlik meg. Határozza meg az ólom hőtágulási tényezőjét!

19A-4 1971-ben a világ leghosszabb hajója az acélból készült *Europoort* olajszállító tartályhajó volt, amelynek hossza 347,8 m. Mekkora hőmérsékletváltozás okozna rajta egy 28 cm-es hossznövekedést?

19B-5 Egy 4 cm átmérőjű acélrudat úgy melegítenek, hogy 70 °C legyen a hőmérsékletnövekedés, majd két merev tartó között rögzítik. A rúd ezután eredeti hőmérsékletére hűl. Számítsuk ki a rúdban ébredő erőt, ha a Young-modulusz az acélra $20{,}6 \times 10^{10}$ N/m^2 és a lineáris hőtágulási együttható 12×10^{-6} 1/°C.

19A-6 18,288 m hosszú acél vasúti sín-elemeket 0,254 cm-es hézagokkal fektettek le olyan napon, amikor a hőmérséklet 35 °C volt. Mekkorák lesznek a sínek közötti rések, ha a hőmérséklet –29 °C-ra csökken? Az acél lineáris hőtágulási tényezője 12×10^{-6} 1/°C.

19B-7 Egy forró napon egy autó 68,13 l-es acél benzintartályát teljesen feltöltötték benzinnel egy hideg, föld alatti tartályból. Mennyi benzin folyik ki, mire a kezdetben 20 °C-os, teletöltött benzintartály és tartalma eléri a végső, egyensúlyi 38 °C-os hőmérsékletet? A benzin hőtágulási együtthatója $9{,}5 \times 10^{-4}$ 1/°C.

19A-8 Egy 70 cm × 140 cm területű, téglalap alakú acéllemezt 0 °C-ról 29 °C-ra melegítünk. Mekkora a lemez felületének megváltozása?

19.5 Hőfelvétel és fázisátalakulások

19A-9 Hány joule hőmennyiség szükséges 200 g vas hőmérsékletének 20 °C-ról 90 °C-ra történő emeléséhez?

19A-10 Mennyi hőt kell közölni egy 40 g-os, 0 °C-os jégkockával ahhoz, hogy 27 °C-os vízzé alakuljon?

10A-11 Egy 600 g-os fémtárggyal 2,5 kJ hőt közlünk, miközben hőmérséklete 27 °C-ről 36 °C-ra emelkedik. Határozzuk meg a fém fajhőjét!

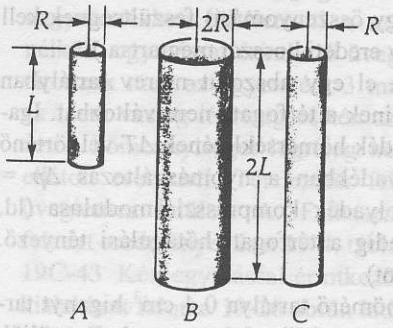
19A-12 A légkondícionálók időegység alatti munkavégzőképességének régies egysége a „tonna". Az „1 tonnás" besorolás azt jelentette, hogy a légkondícionáló időegység alatti hőelvonása megfelelne annak a teljesítménynek, ami ahhoz szükséges, hogy 1 tonna 0 °C-os jég 24 óra alatt olvadjon meg. Fejezzük ki a „tonna" egységet watt-ban!

19A-13 Egy 2 kg-os, 90 °C-os bronz tárgyat 1 liter 20 °C-os vízbe merítenek. Az egyensúlyi hőmérséklet 32 °C lesz. Határozzuk meg a bronz fajhőjét!

19A-14 Egy anyag 100 g-jának 20 °C-ról 28 °C-ra történő melegítéséhez 2,5 kJ hőmennyiség szükséges. Határozzuk meg az anyag fajhőjét!

19A-15 Mennyi vizet kellene egy 70 kg-os ember bőréről elpárologtatni ahhoz, hogy teste 1 °C-kal lehűljön, ha feltételezzük, hogy az emberi test fajhője megegyezik a vízével? A 37 °C-os (a felnőtt ember „normál" hőmérséklete) víz párolgáshője 2427 kJ/kg.

19B-16 Határozzuk meg, mekkora az a hőmennyiség, ami 2 kg, –10 °C-os jég 200 °C-os, túlhevített gőzzé alakításához szükséges.



19-23 ábra
A 19B-26 feladathoz.

19B-17 500 g, 100 °C-ra hevített sörétet 200 g tömegű üveg főzőpohárban lévő 300 g vízbe szórunk, aminek kezdeti hőmérséklete 20 °C. Az egyensúlyi hőmérséklet 23,4 °C lesz. Az üveg fajhője 0,84 kJ/kg °C. Mekkora a sörét fajhője, ha a környezet hőfelvétele elhanyagolható?

19B-18 Hideg napokon testünk termikus energiájának egy részét a belélegzett levegő felmelegítésére fordítjuk. Nyugalomban lévő felnőtt ember percenként kb. 11-szer lélegzik, minden légzés térfogata 0,5 l. Számoljuk ki az óránkénti hőveszteséget egy –18 °C-os hideg napon, feltételezve, hogy a tüdő a beszívott levegőt a 37 °C-os normál testhőmérsékletre melegíti fel.

19B-19 Egy 200 g tömegű üvegedényben (fajhője: 0,84 kJ/kg °C), 100 g 27 °C-os víz van. Hány gramm 100 °C-os vörösréz hozzáadásával emelhetjük a hőmérsékletet 31 °C-ra?

19B-20 Egy 0 °C-os vizet tartalmazó edénybe egy 50 g tömegű, –20 °C-os jégkockát dobunk. Mennyi víz fagy jéggé?

19B-21 Egy állandó A keresztmetszetű hengeres rúd hossza L. Anyagának jellemzői a következők: sűrűsége ρ, fajhője c, lineáris hőtágulási együtthatója α. Igazoljuk, hogy a rúd hosszát ΔL-lel megnövelő ΔQ hőmennyiség független az eredeti hossztól.

19B-22 Ballisztikus ingával végzett kísérletben egy 2 g-os ólomgolyó 300 m/s sebességgel ütközik egy 1 kg tömegű fahasábbal. Számoljuk ki a golyó hőmérsékletének megnövekedését, ha az „elveszett" mechanikai energia fele a golyó melegítésére fordítódik. Az ólom fajhője: 0,130 kJ/(kg °C).

19.6 Hővezetés

19A-23 Határozzuk meg egy 20 cm hosszú, 4 cm átmérőjű hengeres vörösréz rúdon időegység alatt átvezetett hőmennyiséget, ha a rúd két vége 0 °C, ill. 220 °C hőmérsékletű!

19A-24 Alumínium edény fenekének átmérője 20 cm, vastagsága 1 mm. A tűzhelyre helyezett edény aljának külső és belső felülete között állandó, 4,2 °C hőmérséklet-különbség áll fenn. Hány joule energia áramlik át az edény fenekén 1 perc alatt?

19A-25 Egy épület téglafalának mérete: 4 m × 10 m és a fal 15 cm vastag. (λ = 0,8 W/(m °C). Mennyi hő áramlik át a falon 12 óra alatt, ha az átlagos belső hőmérséklet 20 °C, a külső pedig 5 °C?

19B-26 A 19-23 ábrán három hengeres vörösréz rúd látható. Felső végeiket azonos hőmérsékleten tartjuk, alsó végeik is egy kisebb, közös hőmérsékleten vannak. Oszályozzuk a rudakat hővezetés szerint, a legjobbal kezdve a sort!

19B-27 Egy 10 cm hosszú, 4 cm^2 keresztmetszetű vörösréz rúd egyik végét 0 °C-os jégben tartjuk, másik vége 100 °C-os vízgőzzel érintkezik. Határozzuk meg a) a 10 perc alatt megolvasztott jég mennyiségét és b) a 100 °C-on 10 perc alatt vízzé kondenzált gőz mennyiségét, miközben elhanyagoljuk a rúd oldalán át fellépő hőveszteséget!

19B-28 A kereskedelmi forgalomban kapható „hőszállító cső" olyan zárt, légmentes, 28 cm hosszú, 0,95 cm átmérőjű cső, amiben a munkafolyadékot tartalmazó kapilláris szál található. Az egyik végét melegítve, a folyadék elpárolog, miközben a cső gyorsan megtelik gőzzel. A gőz – a nem melegített felülettel érintkezve, – lecsapódik és párolgáshőjét átadja a falnak. Azt állítják, hogy ez a cső „százszor" jobb hővezető, mint a legjobb fémes vezető. Határozzuk meg az ekvivalens hővezetési tényezőt a következő adatokból: maximális hőmérséklet-gradiens 9,84 °C/m, a hőáramerősség 60 W. Hasonlítsuk össze az eredményt a 19-4 táblázat értékeivel!

19B-29 a) Mennyi energia távozik 24 óra alatt egy 21 °C-os szobából az 1 m × 2 m méretű, 4 mm vastag ablaküvegen keresztül egy olyan napon, amikor a külső hőmérséklet 0 °C? A hővezetési tényező az ablaküvegre 0,8 W/(m °C). b) Ha egy amerikai ház villamos fűtésének költsége 8 cent/kWh, és a házban 10 ilyen méretű ablak van, mennyit fizet a tulajdonos 24 órára, hogy pótolja az ablakon keresztül kiszökött hőt? (Megjegyezzük, hogy ez a számítás nagymértékben túlbecsüli az energiaveszteséget, mivel elhanyagoltuk a 19-8 példában tárgyalt konvekciós hatásokat.)

19B-30 Egy 4 cm falvastagságú doboz teljes felszine 1,2 m^2 és szigetelő anyagból készült. A doboz belsejében egy 10 W-os villamos fűtőtest a belső hőmérsékletet állandóan 15 °C-kal a külső hőmérséklet fölött tartja. Határozzuk meg a szigetelő anyag hővezetési tényezőjét.

19.7 Hőterjedés áramlással
19.8. Hőterjedés sugárzással

19A-31 Egy üvegablak területe 2 m^2. Szélcsendes napon, amikor a külső levegő hőmérséklete – távol az ablaktól – +10 °C, az üveg külső felületének hőmérséklete 15 °C. Határozzuk meg a hőáramlási együtthatót, ami indokolná az időegység alatti 50 W-os hőveszteséget az ablakon át, feltételezve, hogy a levegő hővezetőképessége elhanyagolható.

19B-32 A 19B-29 feladatban az ablak 4 mm vastag és a hővezetési tényező 0,8 W/(m^2 °C). Tegyük fel, hogy a

levegő hőáramlási együtthatója az ablakon belül 5 W/(m^2 °C), és határozzuk meg a levegő hőmérsékletét az ablak belső felületénél. Az ablak külső felülete az erős szél miatt 0 °C-os.

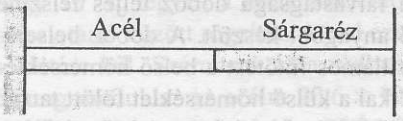
19B-33 Egy 3 cm élhosszúságú alumínium kockát lámpakorommal vontak be és így ideális hősugárzó lett. A kockát vákuum kamrába tették, amelynek falait 27 °C-on tartották. Milyen teljesítményű legyen az a villamos fűtőtest, amely annyi energiát ad a kockának, hogy hőmérséklete állandóan 90 °C maradjon?

19B-34 A Nap felszíni hőmérséklete 5780 K, és a sugara $6{,}96 \times 10^8$ m. a) Határozzuk meg a Nap felszínéről kisugárzott összes teljesítményt! b) Mekkora a napsugárzás teljesítménye a Föld felszínének 1 m^2-ére ha ez a felület merőleges a beeső sugárzás irányára? Tekintsünk el a Föld légkörének abszorpciójától és tegyük fel, hogy a napfelszín „ideális" sugárzó.

19A-35 Egy, – a beeső napsugárzás elnyelésére készített – háztető felülete 7 m × 10 m. A Föld felszínére jutó napsugárzás 840 W/m^2. A Nap sugarai átlagosan 60 °-os szöget zárnak be a tető síkjával. a) Naponta hány kWh hasznos energiát biztosít ez az energiaforrás, ha a beeső energia 15%-a alakul át hasznos villamos energiává? Tegyük fel, hogy a Nap naponta átlagosan nyolc órán át sugároz. b) Mennyi pénzmegtakarítást jelent ez az energiaforrás naponta, ha az átlagos amerikai felhasználó háztartásában 1 kW×h energiáért 6 centet fizet?

További feladatok

19C-36 Azonos keresztmetszetű, egyenként 30 cm hosszúságú acél és sárgaréz rudakat egymáshoz erősítettek a két végénél és a 19-24 ábra szerint két rögzített támasztékhoz hegesztették. Határozzuk meg az egyenes rudakban ébredő feszültséget és a relatív megnyúlást 10 °C-on, ha 100 °C-on a rudak feszültségmentesek. A támasztékok közötti távolság állandó marad.



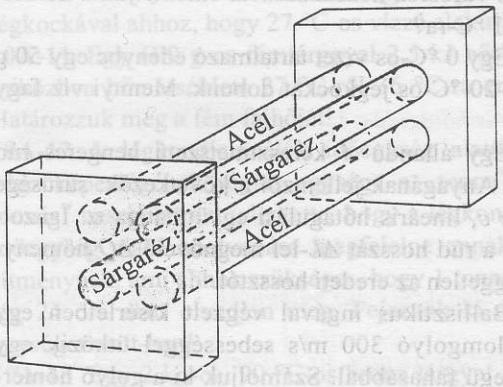
19-24 ábra
A 19C-36 feladathoz

19C-37 *Termikus feszültség*. Ha egy rúd végeit tökéletesen rögzítve tartjuk, miközben hőmérsékletét növeltük, vagy csökkentettük, a rúdban nyomó, vagy húzó feszültség, ún. *termikus feszültség* keletkezik. Tekintsünk egy L_0 rögzített hosszúságú, állandó A keresztmetszetű rudat, amelynek hőmérséklete ΔT-vel megváltozik. Igazoljuk, hogy a rúdban ébredő mechanikai feszültség: $F/A = -E\alpha\Delta T$, ahol E a Young-modulus (ld. 15.9 fejezet), α a hőtágulási együttható. (Útmutatás: ha a rúd hossza a hőmérsékletváltozás következtében szabadon változhatna, $\Delta L/L_0$ relatív hosszváltozás jönne létre. E hosszváltozás megakadályozására ellentétes irányú (nyújtási, vagy összenyomási) feszültségnek kell kitenni a rudat, hogy eredeti hosszát megtartsa.)

19C-38 Képzeljünk el egy abszolút merev tartályban lévő folyadékot, aminek a térfogata nem változhat. Igazoljuk, hogy a folyadék hőmérsékletének ΔT-vel történő változásakor a folyadékban a nyomásváltozás $\Delta p = K\beta\Delta T$, ahol K a folyadék kompresszió-modulusa (ld. 15.9. fejezet), β pedig a térfogati hőtágulási tényező. (ld. az előző feladatot)

19C-39 Higanyos hőmérő tartálya 0,4 cm^3 higanyt tartalmaz. A kapilláris átmérője 0,1 mm. a) Becsüljük meg, hogy – az üveg tágulását figyelmen kívül hagyva – mennyit mozdulna el a higanyoszlop a kapillárisban, midőn a hőmérséklet 25 °C-ról 40 °C-ra változik? A higany térfogati hőtágulási együtthatója $1{,}82 \times 10^{-4}$ 1/°C. b) Mekkora az üveg térfogati hőtágulási együtthatója, ha a higanyoszlop tényleges elmozdulása 11,9 cm?

19C-40 Két acélrudat és két sárgaréz rudat, – melyek mindegyike 40 cm hosszú és 10 cm^2 keresztmetszetű, – a 19-25 ábra szerinti módon, két nagy fémhasábhoz hegesztettek. A hasábok szabadon elmozdulhatnak, egymás felé, vagy egymástól távolodva. 20 °C-on nincs feszültség a rudakban. Határozzuk meg a rudakban ébredő feszültséget, ha a hőmérsékletet 300 °C-ra növeljük, és feltételezzük, hogy a rudak és a hasábok nem görbülnek meg.



19-25 ábra
A 19C-40 feladathoz

19C-41 A „zsugor kötés"-nek nevezett eljárás során sárgaréz korongot kell behelyezni egy alumínium hengerbe. Amikor a korong és a henger is 27 °C-os hőmérsékletű, akkor a korong átmérője kissé nagyobb a henger belső átmérőjénél. Ha mindkettőt 100 °C-ra melegítjük, akkor mivel a henger jobban tágul, mint a korong, a korong behelyezhető a hengerbe. Szobahőmérsékletre hűtve, viszont a henger szorosan tartja a korongot. A henger átmérője 27 °C-on pontosan 8,0000 cm. Mekkora legyen a korong megfelelő átmérője, hogy amikor mindkettőt 100 °C-ra melegítjük, a henger átmérője 0,001 cm-rel nagyobb legyen, mint a korongé?

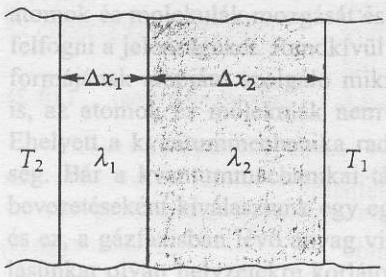
19C-42 A két ablaküveg közé berétegzett levegő nagymértékben tökéletesíti a szigetelést két, légréteg nélküli, egymással érintkező üveglemezhez képest. Határozzuk meg az egyenként 3 mm vastag ablaküvegek és 1 cm vastag légréteg esetén az időegység alatt átvezetett hőmennyiséget légréteg nélküli és a légréteggel ellátott eseteknél. Tételezzük fel, hogy az egységnyi üveglemez felülete A. Felhasználhatók a következő feladat eredményei és a 19-4. táblázat numerikus adatai.

19C-43 Két, egymással érintkező, különböző anyagból kialakított falon a 19-26 ábrán látható módon hőt vezetnek keresztül. A Δx_1 vastagságú rész hővezetési tényezője λ_1, a másik Δx_2 vastagságú részé λ_2. A külső falakat T_1 és T_2 hőmérsékleten tartják. (ahogyan az ábra mutatja) a) Határozzuk meg az állandósult állapot T_x hőmérsékletét a két anyag közti határfelületen. b) Igazoljuk, hogy a fal A felületén időegység alatt átszállított hőmennyiség:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{A(T_2 - T_1)}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}}$$

Megjegyzés: ez az eredmény általánosítható egymással érintkező n számú falra is:

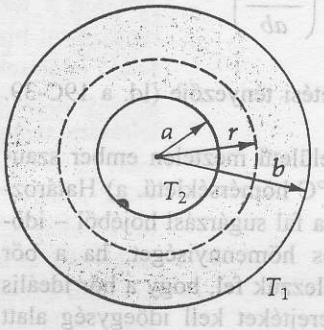
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{A(T_2 - T_1)}{\sum \frac{\Delta x_n}{\lambda_n}}$$



19-26 ábra
A 19C-43 feladathoz

19C-44 Egy 8 cm átmérőjű gőzvezetéket 3 cm vastag szigetelőanyag vesz körül. A vezeték hőmérséklete 100 °C, a szigetelő külső felülete 30 °C. A szigetelő hővezetési tényezője 0,01 W/(m°C). Határozzuk meg a dT/dr hőmérsékleti gradienst a szigetelő a) belső, b) külső felületén! Felhasználható a következő feladat eredménye.

19C-45 Gőzvezetéket szigetelő anyagból készült réteg vesz körül, ahogyan a 19-27 ábra mutatja. A szigetelés belső és külső sugara a és b, a belső és a külső felület hőmérséklete T_2, ill. T_1. Igazoljuk, hogy L hosszúságú vezetéken az időegység alatti, sugárirányú hőáram:



19-27 ábra
A 19C-44, 19C-45 és 19C-46 feladathoz.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi\lambda(T_2 - T_1)}{\ln(b/a)/L}$$

ahol λ a szigetelő hővezetési tényezője. (Útmutatás: ha A az r sugarú hengeres felület területe, dT/dr a sugármenti hőmérsékleti gradiens, akkor $\Delta Q/\Delta t = -\lambda A(dT/dr)$ = állandó. Rendezzük át és integráljuk ezt a kifejezést a megfelelő változók szerint.)

19C-46 Két gőzvezetéket, (A és B) szigetelő köpeny vesz körül. A B vezeték átmérője kétszer akkora, mint az A-vezetéké és a B-vezetéket körülvevő szigetelő anyag egységnyi hosszra vonatkozó teljes térfogata is kétszerese az A-hoz tartozóénak. Az A szigetelésének vastagsága megegyezik az A vezeték sugarával. Határozzuk meg az („időegység alatti hőveszteség a B vezetékre)/(időegység alatti hőveszteség az A vezetékre") arányt! Felhasználható az 19C-44. feladat eredménye.

19C-47 0 °C-os állóvíz felületét 4 cm vastag jégréteg borítja. –10 °C-os hőmérséklete mellett, mennyi idő múlva lesz a jég vastagsága 8 cm? (Útmutatás: ahhoz, hogy dx vastagságú jeget fagyasszunk x vastagságú jégrétegen keresztül, dQ hőmennyiséget kell a víztől elvonni. Vagyis $dQ = L\rho A dx$, ahol ρ a jég sűrűsége, A a terület, L a fagyáshő.)

19C-48 Tegyük fel, hogy egy ember bőrének felületén egy kis terület hőmérséklete a normális 37 °C fölé, 37,5 °C-ra emelkedik. Határozzuk meg $\Delta H/H$ kiszámításával, – ahol H az egységnyi felület által időegység alatt kisugárzott energia nagysága – hogy mennyit növekszik az egységnyi területre vonatkozó sugárzási teljesítmény a melegebb területen a normális sugárzási teljesítményhez viszonyítva! (Útmutatás: használjuk fel a binomiális sort $(T + \Delta T)^4$ közelítéséhez!)

19C-49 Egy golyót szigetelő réteggel vettek körül. A szigetelés belső és külső sugara a és b, a belső és a külső felület hőmérséklete T_2, ill. T_1. Igazoljuk, hogy a sugárirányú hőáram kifelé:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{4\pi\lambda(T_2 - T_1)}{\left(\frac{b-a}{ab}\right)}$$

ahol λ a szigetelés hővezetési tényezője (ld. a 19C-39. feladat útmutatását!)

19C-50 Egy 1,7 m^2 bőrfelületű meztelen ember szaunában ül, aminek fala 61 °C hőmérsékletű. a) Határozzuk meg az ember által – a fal sugárzási hőjéből – időegység alatt elnyelt teljes hőmennyiséget, ha a bőr hőmérséklete 37 °C. (Tételezzük fel, hogy a bőr ideális hőelnyelő.) b) Mennyi verejtéket kell időegység alatt elpárologtatni e hőelnyelés kompenzálásához? A verejték párolgási hője megegyezik a 37 °C-os víz párolgáshőjével: 2427 kJ/kg.

19C-51 Ónos esőből 5 cm-es jégréteg rakódott a járdára. Ezután a felhők eloszlottak, kisütött a Nap. A levegő hőmérséklete 0 °C. Mennyi idő alatt olvasztja meg a napsugár a jeget? (Télen a napsugaraknak (a normális iránnyal bezárt) beesési szöge nagyobb, mint nyáron, így a napenergia talajra sugárzott átlagos teljesítménye csak 210 W/m^2.)

19C-52 Isaac Newton javasolt olyan lehűlési törvényt, amely kimondja, hogy egy forró testből időegység alatt kibocsátott hő arányos a test és környezete közötti hőmérsékletkülönbséggel. Mutassuk meg, hogy ez a törvény megegyezik a (19-21) egyenlettel azokra az esetekre, amikor a tárgy és környezete közötti hőmérsékletkülönbség kicsi! (Útmutatás: bontsuk tényezőire a $(T_2^4 - T_1^4)$ kifejezést és használjuk a $T_1/T_2 \approx 1$ közelítést!)

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84{,}5$ perc
16C-53 1,41 óra
16C-55 $\frac{GMm}{2R}\left[3-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$
16C-57 $\frac{Gm}{R^2}\left(\frac{M}{4}-\frac{m}{3}\right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%
17B-3 A válasz adott.
17A-5 250 N
17A-7 20 cm
17B-9 a) 5000 kg/m^3 b) 667 kg/m^3
17B-11 a) 2704 kg/m^3 b) 59,8 N
17B-13 0,89 kg/dm^3
17B-15 4,00 mg
17B-17 $\Delta V/V = 0{,}0830$
17A-19 $1{,}77 \times 10^{-3}$ m^3/s
17A-21 40 cm/s
17B-23 $3{,}7 \times 10^4$ N/m^2
17B-25 4,49 atm
17B-27 $\rho A v^2$
17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm
17B-31 A válasz adott.
17C-33 al/g
17C-35 0,933
17C-37 $(1-1/\sqrt{2})$
17C-39 $(1-1/\sqrt{2})$
17C-41 A válasz adott.
17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$
17C-45 A válasz adott.
17C-47 27,3 cm^3/s
17C-49 $H/2$

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2{,}27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m
18A-3 A válasz adott.
18A-5 8,33 cm
18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3{,}14$ m^{-1}, $\omega = 6{,}28 \times 10^{-3}$ s^{-1}
18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m d) 340 m/s
18B-11 18,56 m
18B-13 860 m
18A-15 $2{,}94 \times 10^{-16}$ J/cm^3
18B-17 1,13 μW
18B-19 A válasz adott.
18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang
18A-23 2,07 N
18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm
18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz
18A-29 870 Hz, 2610 Hz
18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m
18B-33 800 Hz
18A-35 19,9 m/s
18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz
18A-39 28,4°
18B-41 5,64 Hz
18C-43 A válasz adott.
18C-45 3,14 m/s, $9{,}87 \times 10^3$ m/s^2
18C-47 $K = 2{,}47 \times 10^{11}$ N/m^2
$G = 1{,}25 \times 10^{11}$ N/m^2
18C-49 b) $v = R\omega$
18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24
18C-53 $\mu = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú
18C-55 12,6 m/s^2
18C-57 60,0 Hz
18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni
19A-3 3×10^{-5}/°C
19B-5 $2{,}17 \times 10^5$ N
19B-7 0,72 l
19A-9 6,44 kJ
19A-11 0,463 kJ/kg·°C
19A-13 0,431 joule/ g·°C
19A-15 0,122 kg
19B-17 0,126 kJ/kg·°C
19B-19 87,5
19B-21 A válasz adott.
19A-23 557 J/s
19A-25 $1{,}38 \times 10^8$ J
19B-27 a) 290 g b) 42,9 g
19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár
19A-31 5,00 W/m^2 °C
19B-33 2,84 J/s
19A-35 a) 61,1 kW·h b) $3,67
19C-37 A válasz adott.
19C-39 a) 13,9 cm b) $2{,}6 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$
19C-41 8,0039 cm
19C-43 a) $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$
19C-45 A válasz adott.
19C-47 $3{,}52 \times 10^4$ s = 9,78 h
19C-49 A válasz adott.
19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l
20A-3 a) 4,48 m^3 b) 5,60 kg
20A-5 0,046 m^3
20A-7 12,0 l
20A-9 $1{,}98 \times 10^5$ Pa

AZ IDEÁLIS GÁZ ÉS A KINETIKUS GÁZELMÉLET

„Nem túl kicsi,
Nem túl inhomogén,
Nem túl homogén"

LÁNCZOS KORNÉL
(a statisztikailag elemezhető rendszerek ismertető jelei)

20.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben megtesszük az első lépéseket ahhoz, hogy az anyag makroszkopikus tulajdonságainak mélyére hatoljunk, és – ha lehetséges – az atomok és molekulák mozgását és kölcsönhatását figyelembe véve próbáljuk felfogni a jelenségeket. Rendkívül nehéz feladat az anyag összes megjelenési formájának alapjául szolgáló mikroszkopikus „gépezet" megértése. Először is, az atomok és molekulák nem követik a newtoni mechanika szabályait. Ehelyett a kvantummechanika radikálisan eltérő megközelítésére van szükség. Bár a kvantummechanikai tárgyalást későbbre halasztjuk, e szemlélet bevezetéseként kiválasztunk egy egyszerű problémát, amit meg tudunk oldani és ez, a gázfázisban lévő anyag viselkedése. Annak érdekében, hogy tárgyalásunkat olyan helyzetekre korlátozzuk, amelyeknél a kvantumhatások elhanyagolhatók, elkerüljük majd a szélsőségesen alacsony hőmérsékleteket, ahol a légnemű anyag megközelíti a folyékonyba való fázisátalakulást és a nagyon nagy nyomásokat, ahol a gázmolekulák olyan szorosan vannak „összepréselve", hogy számításba kell venni maguknak a molekuláknak a méretét is.

A következő négy fejezetben két különböző nézőpontból közelítjük meg a témát. A termodinamika az anyag makroszkopikus vizsgálatával foglalkozik, azaz olyan laboratóriumi mérésekkel, mint pl. egy anyag melegítésekor, vagy összenyomásakor a térfogat- és hőmérsékletváltozás meghatározása. (Ami mikroszkóp alatt látható, az szintén makroszkopikus jelenségnek minősül.) Az anyag viselkedésének megértéséhez vezető másik megközelítést statisztikus mechanikának nevezik: ez a mikroszkopikus képpel foglalkozik, azaz maguknak az atomoknak és molekuláknak a mozgásával. Mivel az egyes atomok, vagy molekulák mozgását külön-külön képtelenek vagyunk követni, a részecskék átlagos viselkedésének leírására matematikai módszereket alkalmazunk.

Az anyag e kétféle szemlélete – a makroszkopikus és a mikroszkopikus – együttesen egységes világképet alkot, mivel a makroszkopikus jellemzők valójában a nagyszámú mikroszkopikus kölcsönhatás időbeli átlagértékei. Például a gáz nyomása lényegében nem más, mint az edény falával történő rendkívül nagy számú molekuláris ütközés átlagos hatása.

20.2 Az ideális gáz

Amidőn a természettudományban egy fizikai elméletet megalkotunk, azt rendszerint bizonyos fogalmak definíciójával és az azokra vonatkozó megfelelő jelölések bevezetésével kezdjük. Ezután a fogalmak közötti összefüggéseket matematikai egyenletekkel fejezzük ki. Az anyag fizikai állapotának leírására szolgáló matematikai összefüggést **állapotegyenletnek** nevezzük, mert ez az egyenlet *bármilyen lehetséges feltétel mellett* leírja az anyag állapotát. A legtöbb anyag állapotegyenlete olyan bonyolult, hogy pontos alakját nem ismerjük. Elképzelhető azonban olyan példa, – ez az ún. *ideális gáz*, – amelynek az állapotegyenlete nagyon egyszerű. Ez egy fontos egyenlet, mert a valódi gázok közepes nyomásnál és hőmérsékleten jól követik az ideális gáz viselkedését. Bevezető tárgyalásunk során csak a gáz *egyensúlyi állapotával* foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy mind a hőmérsékletnek, mind a nyomásnak a gáz teljes térfogatában azonosnak kell lennie. (Ha például a térfogatban gyors változások történnek, és a gáz egyes részei átmenetileg nagyobb sűrűségűre lettek összenyomva, mint más helyeken; akkor az állapotegyenlet csak azokra a részekre alkalmazható, ahol azonos feltételek uralkodnak. Ezeket az eseteket a következő fejezetben részletesebben is tárgyaljuk.)

Vizsgálatainkhoz alkalmas rendszert alkot pl. egy olyan hengerbe zárt gáz, amely surlódás nélkül mozgó dugattyúval van ellátva. (20-1 ábra). Már a kezdeti kísérletekben nyilvánvalóvá vált, hogy adott mennyiségű gáz jellemző paraméterei: a nyomás (p), a térfogat (V) és az abszolút hőmérséklet (T). Igy az állapotegyenlet felírható, mint egy $f(p,V,T)$ függvény. Az első sikerek a megfelelő összefüggések felfedezésében Robert Boyle brit kémikus (1660) és két francia fizikus, J. A. C. Charles és Joseph Louis Gay-Lussac (1802) nevéhez fűződnek. Különböző gázok meghatározott mennyiségével végzett nagy számú kísérlet alapján a következő összefüggésekre jutottak:

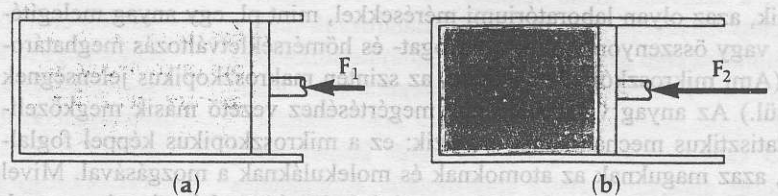
BOYLE-TÖRVÉNY $p\,V =$ állandó (állandó hőmérsékleten) **(20-1)**

CHARLES- ÉS GAY LUSSAC TÖRVÉNY - $\frac{V}{T} =$ állandó (állandó nyomáson) **(20-2)**

E két összefüggés egyetlen egyenletbe foglalható:

$$\frac{pV}{T} = \text{állandó} \qquad \textbf{(20-3)}$$

A következő gondolatmenetből az adódik, hogy a (20-3) egyenletben szereplő konstansnak *arányosnak kell lenni a szóban forgó gáz tömegével.* Tegyük fel, hogy a V térfogatú gáz nyomása és hőmérséklete adott. Ha most



20-1 ábra
A gázok viselkedésének vizsgálatára szolgáló egyszerű termodinamikai rendszer: hengerben lévő, súrlódásmentesen mozgatható dugattyúval elzárt gáz. Boyle összefüggést talált az állandó hőmérsékletű gáz térfogata és a nyomása között.

csak egy részét, mondjuk az eredeti térfogat felét vizsgáljuk, akkor ebben a második esetben azonos nyomás- és hőmérsékletértéknél a térfogat csak fele akkora. Ahhoz, hogy a (20-3) egyenlet mindkét esetben érvényes legyen, az állandónak kell azt az információt tartalmaznia, mely szerint a kisebb térfogatban az eredetihez képest csak a fele mennyiségű gáz van.

A gáz mennyiségének kifejezésére alkalmas egy dimenzió nélküli mennyiség, amit mólszámnak neveznek. A **mól** (mol) definíciója:

EGY MÓL (mól) **Bármely anyagból az a mennyiség, ami ugyanannyi elemi részecskét tartalmaz, mint ahány atom található 0,012 kg 12-es C izotópban. Ezt a számot Avogadro-számnak nevezzük**[1]

AVOGADRO SZÁM $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ **részecske/mol**

Amikor a mól-t használjuk, meg kell határozni a részecskék fajtáját. Ezek lehetnek atomok, molekulák, ionok, elektronok, más részecskék, vagy egyes részecskék meghatározott csoportjai. Így például 1 mól jelenthet 1 mól elektront, 1 mól atomot, vagy 1 mól molekulát.

A kémikusok felfedeztek néhány érdekes tényt a mólnyi mennyiségről. A következőkben ezeket tekintjük át. **Normál állapotban a** hőmérséklet és nyomás rendre 0°C és $1{,}013246\ 10^5$ Pa. *Normál állapotban bármely gáz mólnyi mennyisége azonos térfogatot foglal el:*

MÓLNYI MENNYISÉGŰ GÁZ TÉRFOGATA 0°C-ON ÉS ≈ 10^5 Pa NYOMÁSON $0{,}0224\ m^3$ vagy 22,4 liter

Egy másik jól használható tény az, hogy tetszőleges anyag mólnyi mennyiségének grammokban kifejezett tömege számértékben megegyezik az **atomi tömegegységben** kifejezett **molekulatömeggel**[2].

ATOMI TÖMEGEGYSÉG (u) **Az atomi tömegegységet a ^{12}C szénizotóp atom tömegének (beleértve az elektronokat is) 1/12-ed részeként definiálták: $1\ u \approx 1{,}66053\ 10^{-27}$ kg**

Ezeket az összefüggéseket egyesítve, a (20-3) egyenlet állandóját *nR*-nek választották, ahol *n* a mólszám, *R* pedig a kísérletileg meghatározott univerzális gázállandó, olyan mértékegységben, ami ellentmondásmentessé teszi az egyenletet:

UNIVERZÁLIS GÁZÁLLANDÓ

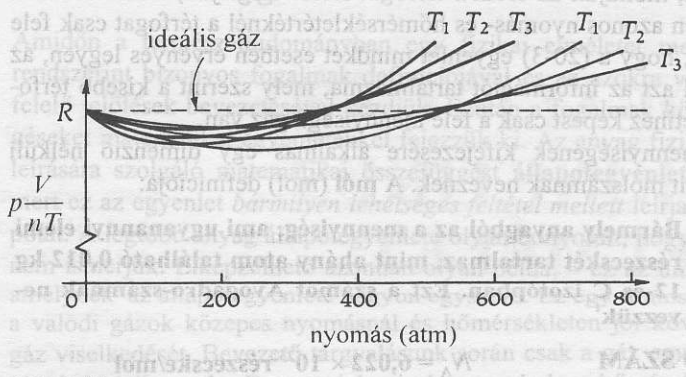
$$R \begin{cases} = 8{,}315\ \text{J} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \\ = 0{,}08206\ \text{l} \cdot \text{atm} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \\ = 1{,}986\ \text{cal} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \end{cases}$$

Az „*univerzális*" szó azt jelenti, hogy adott mértékrendszerben *R* minden gázra azonos értékű. Így jutunk tehát az ideális gáz állapotegyenletéhez:

---

[1] Amadeo Avogadro gróf olasz kémikus és fizikus, (1776–1856) tiszteletére, aki 1811-ben javasolta, hogy az atomokból álló modell segítségével meg lehetne magyarázni a gáz viselkedésének különböző tulajdonságait.

[2] A molekulatömeg szorosan kapcsolódik a **relatív móltömeg** fogalmához. A relatív molekula-tömeget az adott molekulát felépítő atomok **relatív atomtömegének** összeadásával kapjuk. Például mivel a hidrogén (H) és az oxigén (O) relatív atomtömege 1, illetve 16, a víz (H_2O) relatív molekulatömege 18. Molekulatömege 18 u. Ezenkívül 18 g víz 1 mólnyi, azaz az Avogadro-számnak megfelelő molekulát tartalmaz. (Pontosabb relativ atomtömeg értékére vonatkozóan lásd a J függeléket)



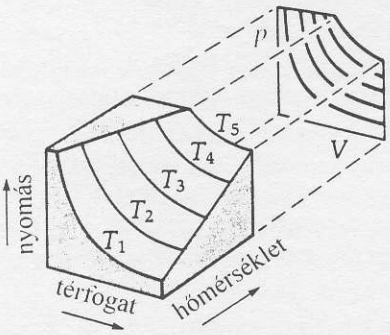
20-2 ábra
Két valódi gáz kvalitatív viselkedése. A pV/nT összefüggés értékeit ábrázoltuk három különböző hőmérsékletre. Jegyezzük meg, hogy a nyomás csökkenésével minden valódi gáz esetében pV/nT azonos értékhez közelít. Ez az érték az R univerzális gázállandó. Ideális gáz esetén a pV/nT értéke R, tetszőleges nyomáson és hőmérsékleten.

IDEÁLIS GÁZ ÁLLAPOTEGYENLETE

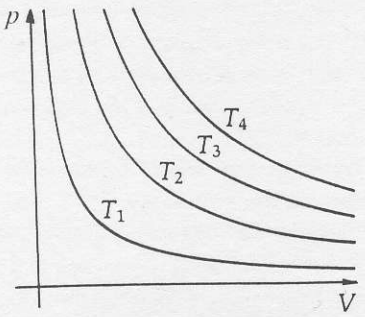
$$pV = nRT \qquad (20\text{-}4)$$

ahol T-t kelvinben kell kifejezni. (Tudjuk az előző fejezetből, hogy a termodinamikai egyenletekben a hőmérsékletet kelvinben kell kifejezni.).

A (20-4) egyenletet az *ideális* gáz állapotegyenletének nevezzük, mivel ez írja le azt a viselkedést, ami felé minden reális gáz tart, ha a nyomása nagyon kicsivé válik. Ezt vázolja kvalitatíven a 20-2 ábra. A nyomás csökkenésével pV/nT kísérleti értéke minden gáz esetében R értékéhez közelít. Tehát az **ideális gáz** úgy definiálható, mint olyan – hipotetikus – gáz, amelynél pV/nT összefüggés értéke egyenlő az R állandóval bármely nyomás mellett. Néhány atmoszférányi tartományban a legtöbb valódi gáz viselkedése jól megközelíti ezt. Különösen jellemző ez az egyatomos gázokra, ha atomjaik távol vannak egymástól, (így tömegpontokként viselkednek) és nincsenek

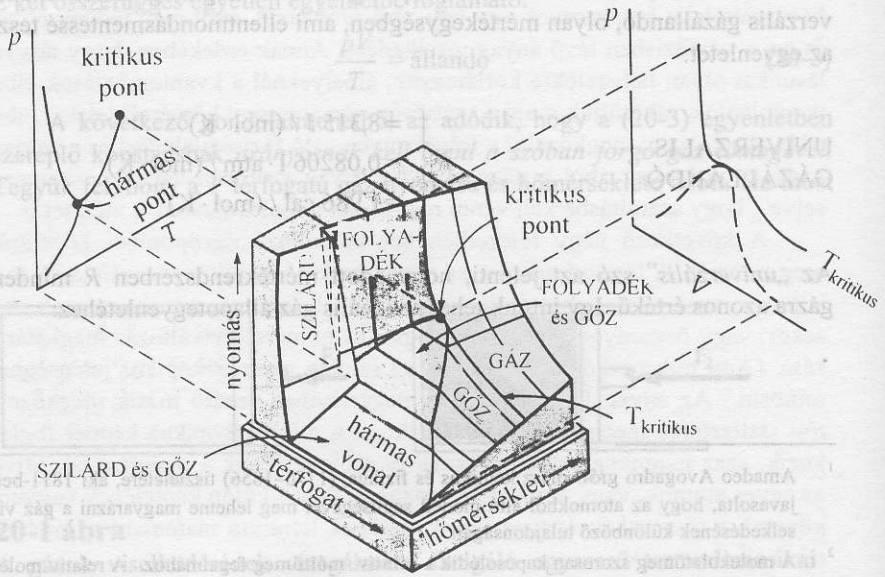


a) Az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletének megfelelő háromdimenziós p-V-T felület. A felületre berajzoltuk az állandó hőmérséklet görbéit.



b) A nyomás-térfogat síkra történő vetítést *p-V diagramnak* nevezik, ez az egyik leghasznosabb grafikon az ideális gáz viselkedésének elemzése szempontjából. Az állandó hőmérsékletű görbék, az *izotermák*, hiperbola-sokaságot alkotnak.

20-3 ábra
Ideális gáz nyomása, térfogata és hőmérséklete közötti kapcsolatok.

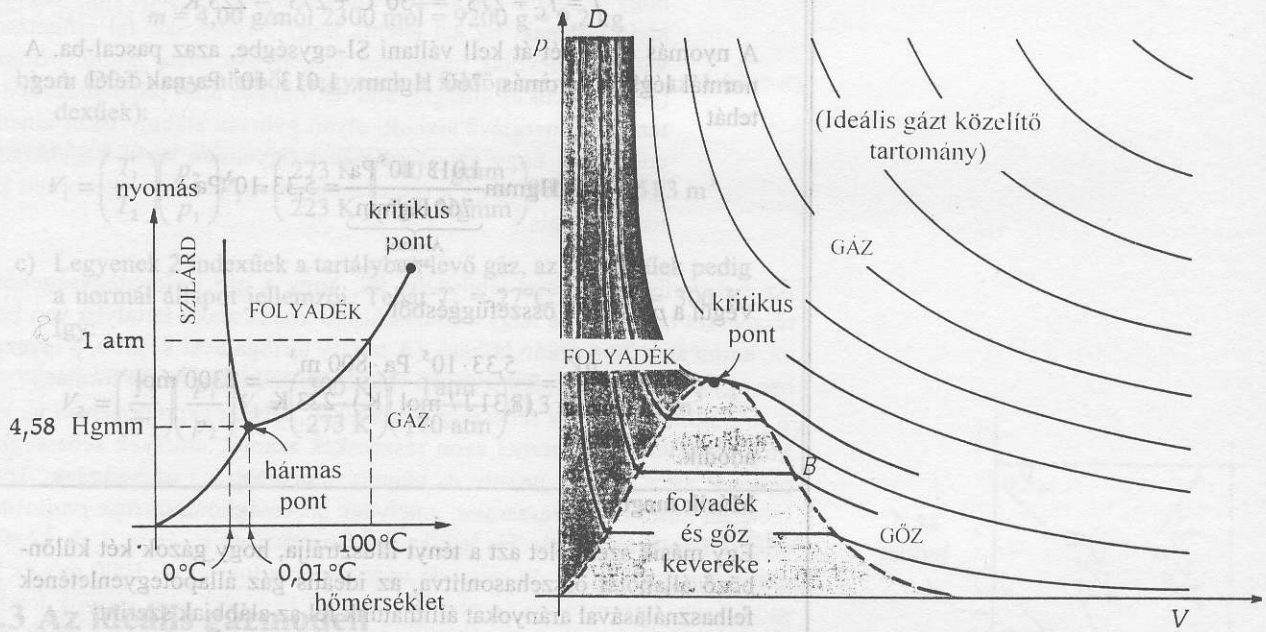


20-4 ábra
Az állapotegyenletet ábrázoló háromdimenziós felület olyan anyag esetében, amely fagyáskor a vízhez hasonlóan tágul. A skálák torzítottak, hogy a jellegzetes vonások világosabbak legyenek.

túl közel a cseppfolyósodás hőmérsékletéhez. A hélium kis nyomáson tulajdonképpen egészen addig ideális gázként viselkedik, amíg néhány foknyira meg nem közelíti a Kelvin-skála abszolút zérus pontját. Így az „ideális gáz" fogalma nincs túl távol attól, ami ténylegesen megvalósul. *A feladatokban – hacsak nem jelezzük másként – feltételezzük, hogy minden reális gáz ideálisként viselkedik.*

Az ideális gáz állapotegyenletét egy háromdimenziós felülettel szemléltethetjük, ahogyan ezt a 20-3 ábra mutatja. Az állandó hőmérsékletű görbéket **izotermáknak** nevezik (a görög isos szóból, aminek jelentése: „egyenlő", vagy „azonos"). A *p-V* síkra kivetítve, az izotermák hiperbola sokaságot alkotnak. (Emlékeztetünk arra, hogy a hiperbola egyenlete: pV = állandó).

A valódi anyagok szilárd, folyékony vagy gáz halmazállapotra érvényes állapotegyenlete általában nagyon bonyolult. Valójában a pontos állapotegyenlet sokszor ismeretlen is. Mindazonáltal felvázolhatók olyan diagramok, amelyek a kvalitatív jellemzőket jól bemutatják, mint ahogyan ezt a 20-4 és 20-5 ábra illusztrálja. Két jellemző dolgot kell megjegyezni. A 20-4 ábra mutatja, hogy a gázok nem cseppfolyósíthatók a *kritikus hőmérséklet* felett, bármilyen nagy nyomást alkalmazunk is. A 20-5b nyomás-hőmérséklet diagramján a *hármaspont* azt a nyomást és hőmérsékletet jelzi, ahol az anyag szilárd, folyékony és gőz halmazállapotban egyidejűleg létezhet.



a) A 20-4 ábra vetülete a nyomás-hőmérséklet síkon. A különböző fázisokat elválasztó három görbe metszéspontját hármas-pontnak nevezzük. (A numerikus értékek a vízre vonatkoznak.)

b) A 20-4 ábra vetülete a nyomás-térfogat síkon. A $T_{kritikus}$ feletti hőmérsékleteknél a gáz nem cseppfolyósítható semmilyen nyomáson, mert ezeken a hőmérsékleteken az ütközések átlagenergiája elég nagy ahhoz, hogy a molekulákat folyadékként összetartó kötőerőket szétszakítsa. Az izoterma mentén A-tól B-ig az anyag gőzfázisban van. (A $T_{kritikus}$ alatti légnemű állapotra szokás a *gőz* elnevezést használni.) B-től C-ig kondenzáció megy végbe, miközben az ehhez a hőmérséklethez tartozó állandó gőznyomásnál folyadék és gőz keveréke keletkezik. A tiszta folyadékfázis esetében, C-től D-ig, az izoterma csaknem függőleges, ami azt jelenti, hogy nagy nyomásnövekedés szükséges a folyadéknak kisebb térfogatúra történő összenyomásához.

20-5 ábra

A *p-T* és *p-V* diagram a cseppfolyósodó gáz viselkedésének jellegzetességeit mutatja. Ezek annak a háromdimenziós *p-V-T* felületnek (20-4 ábra) a vetületei, amely a szilárd, folyékony és légnemű anyagra vonatkozó állapotegyenletet reprezentálja. (Az itt ábrázolt értékek tartománya nem tartalmazza a szilárd fázisú állapotot.)

20-1 PÉLDA

Nagy magassági kutatásokat végző léggömb hélium gázt tartalmaz. 20 km-es maximális magasságnál a külső hőmérséklet –50°C, és a nyomás 40 Hgmm-re csökkent. Ebben a helyzetben a léggömb térfogata 800 m^3. Határozzuk meg a léggömbben lévő hélium mólszámát, feltéve, hogy a hélium hőmérséklete és nyomása megegyezik a környező légkörével.

MEGOLDÁS

Mivel feltételezzük, hogy minden valódi gáz ideális gázként viselkedik, az ideális gáz állapotegyenlete, a $pV = nRT$ összefüggés bármilyen feltételek mellett érvényes az állapotjelzőkre. Az első lépés az, hogy az összes adatot egységes mértékrendszerre számítjuk át. Az SI-egységeket választjuk és az R = 8,31 J/mól K értéket használjuk. Mint már említettük, a hőmérsékletet kelvinben kell kifejezni. Tehát a 19-25 egyenletből

$$T = T_C + 273° = -50°C + 273° = 223\ K$$

A nyomás egységét át kell váltani SI-egységbe, azaz pascal-ba. A normál légköri nyomás, 760 Hgmm, 1,013 10^5 Pa-nak felel meg, tehát

$$40\,\text{Hgmm}\underbrace{\frac{1{,}013\cdot 10^5\,\text{Pa}}{760\,\text{Hgmm}}}_{\substack{\text{Átváltási}\\ \text{arány}}} = 5{,}33\cdot 10^3\,\text{Pa}$$

Végül a $pV = nRT$ összefüggésből

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{5{,}33\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot 800\ \text{m}^3}{(8{,}31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})\cdot 223\ \text{K}} = 2300\ \text{mol}$$

adódik.

Másik megoldás:

Egy másik szemlélet azt a tényt illusztrálja, hogy gázok két különböző állapotát összehasonlítva, az ideális gáz állapotegyenletének felhasználásával arányokat állíthatunk fel az alábbiak szerint:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \qquad \textbf{(20-5)}$$

Ennek az egyenlőségnek az az előnye, hogy *az egyes arányok tetszőleges mértékegységben kifejezhetők*, mivel ugyanaz az átszámítási tényező jelenik meg a számlálóban és a nevezőben is.

A nyomás lehet: atm. Hgcm, Pa, stb.
A térfogat lehet: liter, m^3, stb.
Az anyagmennyiség lehet: mol, kg, stb.

Figyelmeztetés: a nyomásnak mindig *abszolút* nyomásnak kell lenni (nem műszer-nyomásnak) és a hőmérsékletet mindig *kelvinben* kell megadni. (Más hőmérséklet- és nyomás-skálák *additív* konstansokban térnek el ezektől, amikkel nem lehetne egyszerűsíteni.).

Helyettesítsük be például a normál állapothoz tartozó értékeket az 1 indexű állapotra vonatkozóan:

$$\left(\frac{760\ \text{Hgmm}}{40\ \text{Hgmm}}\right)\cdot\left(\frac{0{,}0224\ \text{m}^3}{800\ \text{m}^3}\right)=\left(\frac{1\ \text{mol}}{n_2}\right)\cdot\left(\frac{273\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right)$$

n_2-re megoldva, adódik: $n_2 = 2300$ mól.

20-2 PÉLDA

Határozzuk meg az előző példában szereplő adatokkal *a)* a hélium tömegét és *b)* a léggömb térfogatát, amikor normál nyomáson és hőmérsékleten elindították a földről! *c)* Mekkora térfogatú tartály tartja ezt a nagy mennyiségű héliumot 27°C-on, 170 atm nyomáson?

MEGOLDÁS

a) A hélium relatív molekulatömege 4,00, így 1 mól hélium tömege 4,00 g. Tehát 2300 mól tömege:

$$m = 4{,}00\ \text{g/mól}\ 2300\ \text{mól} = 9200\ \text{g} = 9{,}2\ \text{kg}$$

b) A (20-5) egyenletből (legyenek a földön mért értékek az 1 indexűek):

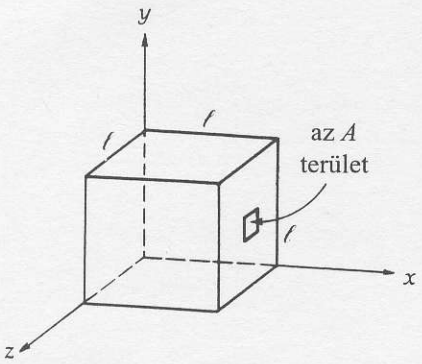
$$V_1 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)V_2 = \left(\frac{273\ \text{K}}{223\ \text{K}}\right)\left(\frac{40\ \text{Hgmm}}{760\ \text{Hgmm}}\right)800\ \text{m}^3 = 51{,}3\ \text{m}^3$$

c) Legyenek 2 indexűek a tartályban levő gáz, az 1 indexűek pedig a normál állapot jellemzői. Tehát $T_2 = 27°\text{C} + 273° = 300$ K. Így:

$$V_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)V_1 = \left(\frac{300\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right)\left(\frac{1\ \text{atm}}{170\ \text{atm}}\right)51{,}3\ \text{m}^3 = 0{,}33\ \text{m}^3$$

20.3 Az ideális gázmodell

A következőkben az ideális gáz egyszerű modelljét ismertetjük, amely kezdetben a molekuláknak csak két jellemzőjét foglalja magában: ez a *tömeg* és a *sebesség*. Érdekes, hogy az ideális gáz általános viselkedése már ilyen egyszerű modellel is értelmezhető. Nem részletezzük a további lépéseket, az elmélet tökéletesíthető úgy, hogy megadjuk a molekulák véges méretét és alakját (ahelyett, hogy tömegpontoknak gondolnánk őket). Ezzel számot adhatunk olyan tulajdonságokról, mint a viszkozitás, a diffúziós tényező, és a hővezető képesség. Ha megadjuk a molekulák közötti hosszú hatótávolságú erők jellemzőit, további jelenségeket tudunk megmagyarázni, pl. a csepp-folyósodást és a megszilárdulást. Ha ezenkívül az egyes molekuláknak és atomoknak valamilyen belső szerkezeti felépítést is tulajdonítunk, akkor előre meg tudjuk mondani az anyag kémiai, elektromos és mágneses jellemzőit, az emissziós és abszorpciós színképet, és így tovább. Ez minden fizikai elmélet fejlődésének a mintája. A lehető legegyszerűbb modellel kezdjük, ami – a kísérleti eredményeket illetően, – néhány helyes előrejelzéshez vezet. A későbbi módosítások kiterjesztik és tökéletesítik az egyezést. Néha ez a folyamat addig folytatódik, amíg látszólag alig észrevehető eltérés lép fel az



20-6 ábra
A kocka alakú, zárt térrész, térfogategységenként N részecskét tartalmaz, (mindegyikük m tömegű) amelyek különböző sebességű, véletlenszerű mozgást végeznek.

elméleti és a kísérleti eredmények között, mondjuk a numerikus adatok ötödik, vagy hatodik tizedesjegyében. Ezen a ponton drámai áttörést érhet el az, aki olyan radikálisan új modellt javasol, amely nemcsak megmagyarázza mindazt, amit a régi elmélet tudott, hanem a régi elméletben megmaradt kis mérvű ellentmondást is helyesen feloldja. Ezek a fizikának azok az izgató fejleményei, amelyek indokolt tiszteletet vívtak ki Newton, Einstein, Bohr, Planck, Schrödinger és mások számára.

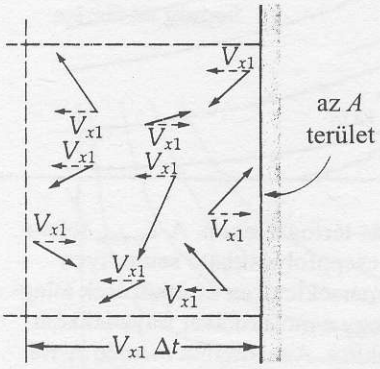
Az ideális gázra vonatkozó első modellünk a következő feltevéseket tartalmazza:

1. A gáz nagyszámú azonos tömegpontból áll. (Ezek valójában atomok, vagy stabil molekulák modelljei, és időnként e nevekkel fogjuk jelölni őket, annak ellenére, hogy – ebben az első közelítésben – mindössze a tömeg és a sebesség az, amit jellemzőjükként megadunk.) Az egyes részecskék tömege m.
2. A részecskék különböző sebességű, véletlenszerű mozgást végeznek és oly módon ütköznek rugalmasan a fallal[3], hogy az impulzusuk és a mozgási energiájuk megmarad.
3. A részecskék és a falak között, az ütközések alatti kölcsönhatásoktól eltekintve nem hatnak erők. Az ütközésekről feltételezzük, hogy az ütközések közötti időtartamokhoz képest elhanyagolható ideig tartanak. Ez azt jelenti, hogy a részecske–fal erőhatások a valódi molekulák méretéhez viszonyítva *rövid hatótávolságúak.* (Az a kinetikus energia, ami az ütközés alatt pillanatszerűen potenciális energiává alakult, olyan gyorsan alakul vissza kinetikus energiává, hogy ezt az effektust figyelmen kívül hagyhatjuk és feltételezzük, hogy a részecskék energiája teljes egészében kinetikus energia.)

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a gáz térfogategységeként N részecskét tartalmaz és hogy l élhosszúságú kocka alakú tartályba van bezárva, amint az a 20-6 ábrán látható. (A tartály térfogatával később, a levezetésben egyszerűsíthetünk, így jogosan választjuk ezt a megfelelő formát.)

Tekintsünk egy **v** sebességű részecskét. Sebességkomponensei v_x, v_y, v_z. Most kísérjük figyelemmel azon részecskék számát, amelyek sebességkomponense az x tengely pozitív és negatív irányában v_{xl} nagyságúak. Természetesen nincs olyan részecske, amelynek sebességkomponense *pontosan* v_{xl} értékű. Pontosabb kijelentés lenne: „a komponensek v_{xl} és $v_{xl} + \Delta v$ közti tartományba esnek, ahol Δv kicsi, de véges intervallum", (pl. 1000 m/s és 1001 m/s közötti tartományba esnek). A rövidség kedvéért nem visszük tovább a Δv jelölést, de az itt következő tárgyalás során gondolnunk kell a fentiekre.

Jelöljük n_1-gyel a v_{xl} nagyságú sebességkomponenssel rendelkező, egységnyi térfogatban lévő részecskék számát. Ezekből a részecskékből bizonyos számú Δt időtartamon belül ütközni fog az $x = \ell$ távolságban levő, A felületű zárófallal. Az ütköző részecskéknek nyilvánvalóan a $v_{xl}\Delta t$ távolságon belül kell lenniük a faltól ahhoz, hogy Δt idő alatt elérjék a falat. Ezért ezek a $(v_{xl}\Delta t)A$ térfogatban helyezkednek el, amint azt a 20-7 ábra mutatja. Mivel átlagosan a részecskék fele távolodik a faltól, Δt idő alatt az A felületű falba ütköző részecskék száma



20-7 ábra
A vázlat azokat a részecskéket ábrázolja, amelyek $\pm x$ irányú sebességkomponense v_{xl} és a fal közelében, $(v_{xl}\Delta t)A$ térfogat-ban helyezkednek el. Mivel átlagosan ezek fele $-x$ irányban mozog, ezért Δt idő alatt csak a részecskék fele ütközik a fallal. (A fallal való ütközés nélkül az adott térfogatból kilépő molekulák számát kiegyenlíti a környezetből a választott térrészbe belépő részecskék száma.)

[3] Ha a részecskék valóban tömegpontok, nem kerülhetnek egymással kölcsönhatásba (mert végtelenül kicsiny méretűek). Talán reálisabb lenne az elhanyagolható, de véges méretű apró, kemény golyóból álló modell. Mindegy, hogy e kezdeti tárgyalás során melyik modellt választjuk, mivel a molekulák egymással történő rugalmas ütközése közben megmarad mind az impulzus, mind az energia. Ezért az ütközésnek ez a fajtája semmiképpen nem változtatja meg a gáz makroszkopikus viselkedését.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\text{egységnyi térfogatban lévő,}\\ v_{x1}\text{ sebességkomponensű}\\ \text{részecskék száma}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\text{a }\Delta t\text{ idő alatt a falba ütköző}\\ \text{részecskék számára}\\ \text{elég közeli teljes térfogat}\end{bmatrix}= \tag{20-6}$$

$$=\frac{1}{2}n_1 v_{x1}\Delta t\,A=\frac{n_1 v_{x1}\Delta t\,A}{2}$$

Minden részecske $F_1\Delta t = \Delta p_1$ erőimpulzust közvetít a falnak, s ez $2mv_{x1}$-gyel egyenlő. (A 2 tényező abból adódik, hogy a v_{x1} sebességkomponens pontosan az ellenkezőjére változik a rugalmas ütközés során.) Így a falon az ezzel a sebességkomponenssel rendelkező összes részecskétől származó erőimpulzus

$$\text{erőimpulzus}=\begin{bmatrix}\Delta t\text{ idő alatt a falba}\\ \text{ütközések száma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{az egyes ütközések által}\\ \text{közvetített erőimpulzus}\end{bmatrix}$$

$$F_1\Delta t=\left[\frac{n_1 v_{x1}A\Delta t}{2}\right]\left[2mv_{x1}\right] \tag{20-7}$$

$$F_1 = n_1 mA v_{x1}^2$$

Mivel a nyomás $p_1 = F_1/A$, így

$$p_1 = n_1 m v_{x1}^2 \tag{20-8}$$

Hasonlóképpen a további sebességtartományokra:

$$p_2 = n_2\, m\, v_{x2}^2$$

$$p_3 = n_3\, m\, v_{x3}^2$$

$$\vdots$$

Az x-irányú összes sebességtartományból adódó p nyomás ezek összege:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \ldots \tag{20-9}$$

amit a (20-8) egyenlet alapján így írhatunk:

$$p = m(n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + n_3 v_{x3}^2 + \ldots) \tag{20-10}$$

Első pillantásra lehetetlennek tűnik a (20-10) egyenlettel dolgozni, mivel ezen a szinten valójában semmit sem tudunk a zárójelben lévő kifejezésről. De – egy kis kitérőt téve – megmutatjuk, hogy a zárójelben lévő mennyiség tömör és egyszerű alakba írható.

Hogyan számítjuk ki egy sor különböző értékű mennyiség *átlagát*? Például mennyi az átlagos életkora az évfolyamra járó hallgatóknak? Ha n_1 hallgató életkora a_1, n_2 hallgatóé a_2, és így tovább, az évfolyam hallgatóinak átlagos életkora ($\bar{a}$):

$$\text{átlagos életkor,}\quad \bar{a} = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} \tag{20-11}$$

A mennyiséget jelölő szimbólum feletti vonás az adott paraméternek az átlagértékét jelöli[4].

[4] A (20-11) egyenlet példa a *súlyozott számtani középértékre*. Az életkorok egyszerű számtani középértéke helyett minden életkort megszorzunk egy n_i *súlyozó tényezővel*. (Itt a súlyozó tényező az azonos korú hallgatók száma)

A (20-11) egyenlet bármely különböző értéket felvevő mennyiségre érvényes, alkalmazzuk tehát az ideális gázmodellben megismert *négyzetes sebességösszetevőkre*:

$$\overline{v_x^2} = \frac{n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + n_3 v_{x3}^2 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} \qquad (20\text{-}12)$$

A nevező éppen az egységnyi térfogatban lévő teljes részecskeszám. Ha az $\mathcal{N}$ szimbólummal jelöljük, akkor

$$\mathcal{N}\overline{v_x^2} = n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + n_3 v_{x3}^2 + \ldots \qquad (20\text{-}13)$$

Ezt a kifejezést felhasználhatjuk arra, hogy a (20-10) egyenletet a:

$$p = m\,\mathcal{N}\overline{v_x^2} \quad \text{(csak az x-komponensből adódóan)} \qquad (20\text{-}14)$$

alakúra írjuk át.

A három dimenziós Pitagorász tételből egyetlen részecske sebessége:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \qquad (20\text{-}15)$$

Átlagolva ezt az összes részecskére, azt kapjuk,hogy:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \qquad (20\text{-}16)$$

Mivel a részecskék mozgása teljesen véletlenszerű – nincs szél, vagy más, ami kitüntetett irányba sodorná a őket, – azt is tudjuk, hogy:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \qquad (20\text{-}17)$$

Ezért a fenti két egyenletből arra következtetünk, hogy

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} \qquad (20\text{-}18)$$

Tehát a (20-14) egyenletet így írhatjuk:

$$p = \frac{1}{3}\mathcal{N}m\overline{v^2} \qquad (20\text{-}19)$$

$$\text{vagy} \quad p = \frac{2}{3}\mathcal{N}\frac{1}{2}m\overline{v^2} \qquad (20\text{-}20)$$

ahol az $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ kifejezés az *egy részecskére jutó átlagos transzlációs kinetikus energia*. Mivel $\mathcal{N}$az egységnyi térfogatra jutó részecskeszám, a V térfogatban lévő részecskék teljes száma: N

$$N = \mathcal{N}V \qquad (20\text{-}21)$$

Az utóbbi két egyenletből:

$$pV = \frac{2}{3}N(\frac{1}{2}m\overline{v^2}) \qquad (20\text{-}22)$$

Összevetve ezt az egyenletet az ideális gáz állapotegyenletével:

$$pV = nRT$$

azt kapjuk, hogy: $$nRT = \frac{2}{3}N(\frac{1}{2}m\overline{v^2}) \qquad \textbf{(20-23)}$$

Bármely anyag mólnyi mennyisége az Avogadro-számnak megfelelő számú molekulát tartalmaz, amit N_A-val jelölünk. Ha a (20-23) egyenlet mindkét oldalát osztjuk N_A-val:

$$\frac{nRT}{N_A} = \frac{2}{3}\frac{N}{N_A}(\frac{1}{2}m\overline{v^2})$$

Az R/N_A tényező *az egy molekulára vonatkozó univerzális gázállandó*, amit **Boltzmann-állandóként** ismerünk (k):

BOLTZMANN-ÁLLANDÓ $$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{molekula}} \qquad \textbf{(20-24)}$$

Az N/N_A tényező az n mólszám. Ha ezeket behelyettesítjük a (20-24) egyenletbe és azt rendezzük, azt kapjuk, hogy:

EGY MOLEKULA ÁTLAGOS KINETIKUS ENERGIÁJA $$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \qquad \textbf{(20-25)}$$

Ez a fontos összefüggés azt fejezi ki, hogy az egy gázmolekulára jutó átlagos kinetikus energia *csak* a T hőmérséklettől függ és független a nyomástól, térfogattól, ill. a molekulák tipusától.[5*]

Hasonló kifejezést kaphatunk egy mól gázra, ha felhasználjuk az $mN_A = M$ (egy mól tömege) és a $kN_A = R$ összefüggéseket. Elvégezve ezeket a helyettesítéseket azt kapjuk, hogy:

EGY MÓL ÁTLAGOS KINETIKUS ENERGIÁJA $$\frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}RT \qquad \textbf{(20-26)}$$

Egy másik fontos összefüggés a gázmolekulák **négyzetes középsebessége**: $v_{nks} = \sqrt{\overline{v^2}}$. (Jegyezzük meg, hogy a sebesség négyzetének átlaga ($\overline{v^2}$) nem ugyanaz, mint az átlagsebesség négyzete ($\overline{v}^2$).) Ha $\sqrt{\overline{v^2}}$ értékét az előző két egyenletből kifejezzük, azt kapjuk, hogy

NÉGYZETES KÖZÉPSEBESSÉG $$v_{nks} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad \textbf{(20-27)}$$

A kinetikus elmélet fontos kapocs az atomok és molekulák közvetlenül nem látható, mikroszkopikus világa és a laboratóriumi műszerekkel történő makroszkopikus mérések között. Azonosítja a molekulák véletlenszerű transzlációs kinetikus energiájának mikroszkopikus fogalmát a T hőmérséklettel, mint makroszkopikus változóval. Érdekes módon, éppen a hőmérő az, amivel meghatározhatjuk az ideális gáz molekuláinak átlagos transzlációs sebességét. Mivel a $\frac{3}{2}k$ tényező állandó, azonos hőmérsékleten a különböző

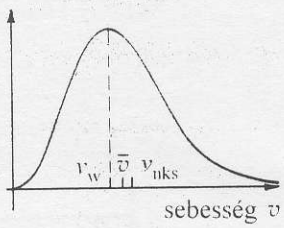
---

5 A (20-25) egyenletből azt a következtetést vonhatnánk le, hogy a $T \to 0$ határátmenet esetén minden molekuláris rezgés megszűnik. Ahogyan már korábban említettük, ez nem igaz. Nagyon alacsony hőmérsékleten a molekulák viselkedését a kvantummechanika írja le, amely kimondja, hogy a részecskék a lehető legalacsonyabb energiaszinten - az alapállapotban - sincsenek teljesen nyugalomban. Ehelyett az abszolút zérushoz közeledve, a molekulák kinetikus energiája egy véges értékhez, az ún. *zérusponti energiához* tart.

* (Itt és a továbbiakban csak transzlációs energiáról van szó - a ford.)

molekulák átlagos kinetikus energiája egyenlő. Igy a különböző gázoknak – mint a H_2 He és O_2 – azonos hőmérsékleten eltérő tömegük ellenére azonos az egy molekulára jutó átlagos transzlációs kinetikus energiája.

A kinetikus modell a fentiek szerint a következő korrekciókkal „magyarázza" az ideális gáz állapotegyenletét: (1) Az *abszolút* (kelvinben mért) *hőmérséklet* a *molekulák transzlációs kinetikus energiájával* függ össze. (2) A gáz által a tartály falára gyakorolt *nyomás* az egységnyi felületre ható átlagerő, ami a molekuláknak a falakon történő *rugalmas ütközéseiből* ered.



20-8 ábra
Termikus egyensúlyban lévő gáz molekuláinak sebességeloszlása. A görbe aszimmetrikus a nagyobb sebességek felé elnyúló hosszú „farok" miatt. A legvalószínűbb sebesség (v_w) a görbe csúcsánál van. Jegyezzük meg, hogy az átlagsebesség ($\bar{v}$) az eloszlás aszimmetriája miatt a csúcshoz tartozó sebesség értékénél nagyobb lesz, és a négyzetes középsebesség (v_{nks}) még nagyobb értéknél található, mivel a négyzetes középérték számításánál nagyobb súlyt kapnak a nagyobb sebességek. Ezt a görbét Maxwell-eloszlásként ismerjük. Nevét James Clerk Maxwell (1831–1879) skót fizikus után kapta, aki először vezette le matematikai alakját (ld. 20C-43 feladatot!). Maxwell elektromágneses hullámelméletéről is híres, amit a 35. fejezetben tárgyalunk.

20-3 PÉLDA

A 20-8 ábra a molekulák sebességeloszlását mutatja egy gázban termikus egyensúly esetén. Számoljuk ki a négyzetes középsebességet hidrogén molekulákra (H_2), 20°C-on.

MEGOLDÁS

Egyetlen H_2 molekula tömegét megkapjuk a moláris tömegből (2 g/mól) (ld. a 20-1 táblázatot!) és az Avogadro-számból:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{2\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6{,}022\cdot 10^{23}\ \frac{\text{molekula}}{\text{mol}}} \cdot \underbrace{\frac{1\,\text{kg}}{10^3\,\text{g}}}_{\text{Átszámítási arány}} = 3{,}32\cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{molekula}}$$

A hőmérséklet 20°C + 273° = 293 K

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{molekula}}\ 293\text{K}}{3{,}32\cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{molekula}}}} = 1910\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ugyanezt az eredményt kapnánk – talán még egyszerűbben, mivel nem tartalmazná egyetlen molekula tömegének kiszámítását, – a $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT/M}$ kifejezésből. Ez a sebesség körülbelül 50%-kal nagyobb, mint a hang sebessége hidrogén gázban ugyanezen a hőmérsékleten, és valamivel gyorsabb, mint egy nagy sebességű lövedék.

20-4 PÉLDA

Egy 10 részecskéből álló együttesben az egyedi sebességek (m/s egységben): 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, és 7. Határozzuk meg a) a részecskék átlagsebességét ($\bar{v}$) és b) a négyzetes középsebességet ($\sqrt{\overline{v^2}}$)!

MEGOLDÁS

a) Az átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{\Sigma n_i v_i}{\Sigma n_i} = \frac{(1+2\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 4+5+7)\,\text{m/s}}{10} = 3{,}40\,\text{m/s}$$

b) A négyzetes középsebesség:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\Sigma n_i v_i^2}{\Sigma n_i}} = \sqrt{\frac{(1^2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 4^2 + 5^2 + 7^2)}{10}} = 3{,}77\,\text{m/s}$$

vegyük észre, hogy $\sqrt{\overline{v^2}}$ nagyobb, mint $\bar{v}$.

20-5 PÉLDA

A 600 km feletti, ritkított légkörben – ahol a hőmérséklet kb. 1500 K, – a molekuláknak jó esélyük van a Föld gravitációs vonzásából való kiszabadulásra anélkül, hogy más molekulákkal ütköznének. (Feltéve, ha sebességük meghaladja a (16-24) egyenlettel adott szökési sebességet $v_{sz} = \sqrt{2\gamma M / R}$, ahol γ az univerzális gravitációs állandó ($6{,}67\ 10^{-11}$ Nm^2/kg^2), M a Föld tömege ($5{,}98\ 10^{24}$ kg), R a Föld középpontjától mért távolság ($R_{Föld}$ = $6{,}37\times10^3$ km). a) Számoljuk ki a szökési sebességet ebben a magasságban! b) Vessük össze az 1500 K hőmérsékleten lévő hidrogénmolekulák négyzetes középsebességével!

MEGOLDÁS

a) 600 km magasságban a sugár $R = R_{Föld}$ + 600 km = 6370 km + 600 km = 6970 km.

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\,5{,}98\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{6{,}97\cdot 10^{6}\,\text{m}}} = 1{,}07\cdot 10^{4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Mivel egy mól hidrogén gáz tömege M = 2 g, a (20-18) egyenletből:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3\cdot 8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{mól}\cdot\text{K}}\,1500\,\text{K}}{0{,}002\,\text{kg}}} = 4{,}32\cdot 10^{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bár a négyzetes középsebesség csak mintegy 0,4-szerese a szökési sebességnek, néhány molekula sebessége sokszorosa lesz a négyzetes középsebességnek és ezért elegendő energiája lesz a szökéshez (20-9 ábra). Abban a 4,6 milliárd évben, amióta a Föld kialakult, volt elég idő arra, hogy lényegében a Föld őslégkörében lévő összes hidrogén és hélium az alsóbb magasságokból szétterjedjen és megszökjön.

Gázkeverékek

Különböző gázok keverékében az összes nyomás azon *parciális nyomások* összege, amiket az egyes gázok hoznának létre, ha egyedül – a többi gáz jelenléte nélkül – töltenék ki a teljes térfogatot: $p = p_a + p_b + p_c + \ldots$ Ez az összefüggés, amelyet először John Dalton, brit kémikus írt fel 1801-ben, jól érthető az ideális gázmodell azon feltevése alapján hogy a molekulák között nincs kölcsönhatás.

20-1 táblázat Gyakran szereplő atomok és molekulák közelítő tömege*

Atom	Vegyjel	Atomtömeg (u)
Hidrogén	H	1
Hélium	He	4
Szén	C	12
Oxigén	O	16
Alumínium	Al	27
Vas	Fe	56
Urán	U	238

Molekula	Képlet	Molekula tömeg (u)
Hidrogén	H_2	2
Metán	CH_4	16
Víz	H_2O	18
Nitrogén	N_2	28
Oxigén	O_2	32
Metil-alkohol	CH_3OH	32
Etilalkohol	CH_3CH_2OH	46

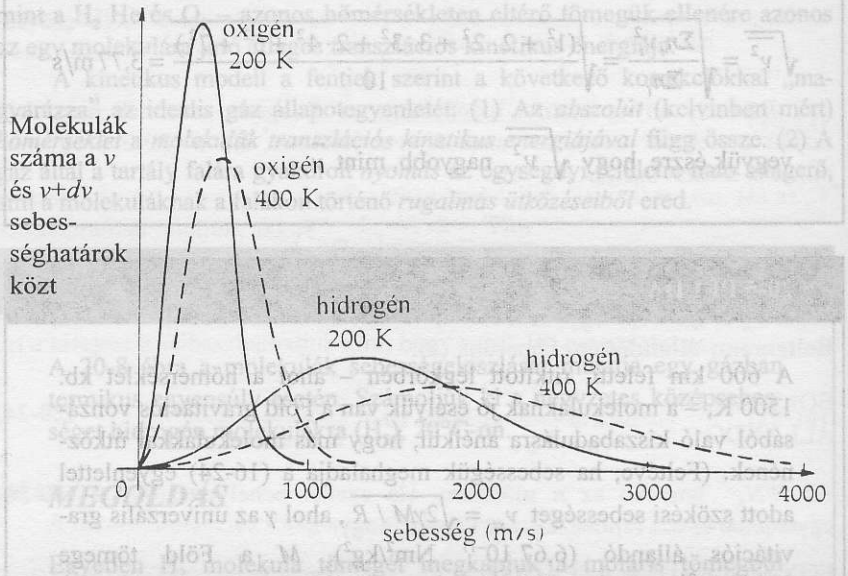
* Az itt felsorolt tömegek egész számra kerekített értékek. Ha pontosabb atomtömegekre van szükség, ld. a J függeléket.

20-2 táblázat
A száraz levegő komponensei

Alkotóelem	Térfogatszázalék
N_2	78,084
O_2	20,94
Ar	0,934
CO_2	0,033

plusz 0,003%-nál kevesebb egyéb gáz

A száraz levegő átlagos molekulatömege 28,964 u.



20-9 ábra
Maxwell-eloszlás két különböző gázra, két különböző hőmérsékleten. Adott hőmérsékleten a könnyebb molekulák gyorsabban mozognak, mint a nehezebbek.

20-6 PÉLDA

Határozzuk meg a normál állapotú levegőben az oxigén parciális nyomását.

MEGOLDÁS

A 20-2. táblázatból láthatjuk, hogy az oxigén az átlagos levegő 20,9%-át (térfogatszázalék) teszi ki. Igy, normál állapotú levegőre vonatkozóan, az oxigén az 1 atm-hoz 20,9%-kal járul hozzá:

$$p_{O_2} = 0{,}209\ (1\ \text{atm}) = 0{,}209\ \text{atm}$$

Az az oxigén mennyiség, ami a tüdőn keresztül elnyelődik a véráramban és a test más szöveteiben, arányos a belélegzett levegőben lévő oxigén parciális nyomásával. 5000 m magasságban a légköri nyomás mintegy fele a tengerszinten lévőnek, ez néha magassági betegséget okoz, ami nem más, mint a vér oxigénhiánya. A víz alá merülő búvárokat szintén érhetik káros hatások. Például 10 méteres mélységben a víz nyomása körülbelül $2 \cdot 10^5$ Pa, így a tüdőben lévő levegő nyomása a normális érték kétszerese. Mivel a nitrogén az oxigénnél jóval nagyobb mértékben oldódik a vérben, az abszorbeált nitrogén mennyisége a normál értéknek több, mint kétszerese. A túl gyors felszínre emelkedés következtében a felesleges nitrogén buborékokká alakul a vérben és a szövetekben. Ez okozza a keszonbetegségnek nevezett veszélyes és fájdalmas állapotot. Fokozatos és lassúbb felszínre emelkedéssel a probléma elkerülhető.

Összefoglalás

Az anyagmennyiség kifejezésére alkalmas egység a mól.

Bármely anyag *egy mólja* (mol) annyi részecskét tartalmaz, mint ahány atom van a 12-es szénizotóp 0,012 kg-jában. Ezt a számot *Avogadro-számnak* nevezik: $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ részecske/mól. A részecskék lehetnek atomok, molekulák, ionok, elektronok, stb., vagy egyes részecskék meghatározott csoportjai.

Valamely gáz egy mólja normál állapotban, 0°C-on és $1 \cdot 10^5$Pa nyomáson, 0,0224 m^3 (22,4 l) térfogatot foglal el. Egy anyag *gramm-molekula-tömege* a mólnyi anyag

tömege grammokban kifejezve. Ez megegyezik továbbá egy molekula *atomi tömegegységben* (u) kifejezett tömegével, ahol 1 u $\approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

A nyomás csökkenésével minden valódi gáz viselkedése ugyanazzal az *állapotegyenlettel* irható le, ez az *ideális gáztörvény*:

$$pV = n\,RT$$

ahol p = nyomás
V = térfogat
T = kelvinben mért hőmérséklet
n = mólok száma
R = egyetemes gázállandó = 8,315 J/mól K
= 0,08206 l.atm/mól.K
= 1,986 cal/mol K.

Ha az ideális gáz két különböző állapotát tárgyaljuk, sokszor kényelmes módszer a

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

arány felírása.
Ennek az az előnye, hogy az egyes arányok bármely megfelelő mértékegységgel kifejezhetők, *még akkor is, ha azok a többi arány egységeivel összeegyeztethetetlenek.* Ennek az az oka, hogy ugyanaz az átszámítási tényező szerepel mind a számlálóban, mind a nevezőben.

Kérdések

1. Adjunk kvalitatív magyarázatot a 20-5b ábra alapján arra a korcsolyázók által használt kifejezésre, hogy: „Ma sima a jég"!
2. Milyen fizikai bizonyítékok támasztják alá az atomok létezését?
3. Milyen bizonyíték támasztja alá, hogy a kinetikus gázmodell – a gázmolekulák tömegpontokként rugalmas ütközésben vesznek részt, – jobb, mint az a modell, amely a gázmolekulákat bolyhos, rugalmas golyóknak tekinti, amelyek kiterjedve kitöltik a rendelkezésükre álló teret?
4. Magyarázzuk meg, hogy miért egyszerűbb a kinetikus gázelmélet ha egy gáztartályban rendkívül nagyszámú gázmolekula van!
5. Egy tartályban lévő gázmolekulák sebességének átlagos nagysága nem zérus annak ellenére,hogy az átlagsebesség zérus. Miért?
6. Közölhetünk-e hőt egyatomos gázzal anélkül, hogy a gáz hőmérséklete megváltozna? Mi a helyzet a kétatomos gázzal? Mi történik egy folyadék esetében?
7. Kérdésünk a 20-7 ábra alapján termikus egyensúlyban lévő gázmolekulák *sebesség*eloszlására vonatkozik. A *sebességeloszlást* rendszerint egy komponensre – mondjuk az x-irányúra – ábrázolják. Ennek az előzőtől nagyon eltérő alakja van. A sebességeloszlás az origóra szimmetrikus, pozitív és negatív értékekre egyaránt kiterjed és alakja az ismert haranggörbe, vagy *Gauss-eloszlás*. Hogyan magyarázható a minőségi különbség e két eloszlás között! Miért szimmetrikus az egyik az origóra vonatkozóan és miért aszimmetrikus a másik?
8. A 20-8 ábra alapján v_w, $\bar{v}$ és $\sqrt{\overline{v^2}}$ közül melyik az a sebesség, amely a gázmolekulák átlagos kinetikus energiája?
9. Néhány száz kilométerrel a Föld felszín felett a levegő hőmérséklete több, mint 1000 K. Az űrhajósoknak ennél a magasságnál mégis olyan ruhát kell viselniük, amit külső energiaforrással fűtenek, hogy melegen tartsák. Magyarázzuk meg ezt a látszólagos paradoxont!
10. Tekintsük két különböző relatív atomtömegű gáz keverékét. Igazoljuk azt az állítást, hogy termikus egyensúlyban az egyes gázok sebességeloszlása olyan, mintha a másik gáz nem lenne jelen (ld. a 20-8 ábrát!)
11. Ha hőközlés nélkül, gyorsan összenyomunk egy gázt, akkor hőmérséklete növekszik. Értelmezzük a kinetikus elmélet alapján, hogyan tesznek szert a gázmolekulák a megnövekedett sebességre!

Az ideális gázra vonatkozó *kinetikus elmélet* amelyben a molekulákat tökéletes rugalmas ütközésekben résztvevő tömegpontoknak tekintjük, – a makroszkopikus és mikroszkopikus fogalmak közötti hasznos összefüggésekhez vezet és megadja a Kelvin-féle hőmérsékleti skálával való kapcsolatukat.

Egy molekulára: $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$

ahol k a Boltzmann-állandó ($k = R/N_A = 1{,}3805\ 10^{-23}$ J/Kmolekula)

Egy mólra: $\frac{3}{2}RT = \frac{1}{2}M\overline{v^2}$

ahol M egy mól tömege. Mint minden termodinamikai egyenletben, a T hőmérséklet itt is mindig kelvinben van megadva.

A gázmolekulák négyzetes középsebessége:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Gázkeverékekben minden alkotóelemnek parciális nyomása van, ez megegyezik azzal a nyomással, amivel az alkotóelemek akkor rendelkeznének, ha egyedül töltenék ki az egész térfogatot. Az összes nyomás az egyes parciális nyomások összege.

12. Figyelembe véve, hogy a Kelvin-féle hőmérsékleti skála összefügg a gázmolekulák átlagos kinetikus energiájával, vajon a relativitáselmélet – az elérhető legnagyobb sebességre vonatkozó feltevésével (c), – jelenti-e azt, hogy van egy maximális hőmérsékleti határ is?

13. Tegyük fel, hogy egy gáztartály szemközti falait állandóan különböző hőmérsékleten tartjuk. Írjuk le a hővezetés folyamatát a gázon keresztül.

14. Vázoljuk a 20-3a ábra vetületét a nyomás-hőmérséklet síkon! Ábrázoljuk a T_1, T_2, stb. állandó hőmérsékletű görbéket!

Feladatok

20.2 Az ideális gáz

20A-1 Határozzuk meg a tartály térfogatát, ha az eredetileg normál állapotú, 6 m^3 térfogatú hidrogént $1{,}36 \cdot 10^5$ Pa nyomásra nyomjuk össze és a hőmérséklete 27°C lesz.

20A-2 Egy autó kerekét $1{,}655 \cdot 10^5$ Pa nyomásúra fújták fel 27°C-on. Rövid ideig tartó vezetés után a nyomás 2,34 10^5 Pa-ra nőtt. Mekkora a levegő hőmérséklete az autógumi belsejében?

20A-3 a) Határozzuk meg 200 mól normál állapotú nitrogéngáz (N_2) térfogatát! b) Mekkora a tömege?

20A-4 Nagy magasságokban végzett kutatásokra használt nagy méretű léggömb térfogata 500 m^3. Ha a hélium 150.10^5 Pa nyomású, 40 literes tartályokban kapható, hány tartályra van szükség ahhoz, hogy a léggömböt 1.10^5 Pa nyomásra feltöltsük?

20A-5 Egy nitrogén-tartályban a nyomás 21°C-on $1{,}86 \cdot 10^7$ Pa. Mekkora a tartály térfogata, ha 10^5 Pa nyomáson és 21°C hőmérsékletnél a nitrogén térfogata 8,5 m^3 lenne?

20A-6 a) Hány mól az a normál állapotú oxigéngáz (O_2) amelynek térfogata 6,9 m^3? b) Határozzuk meg ennek az oxigéngáztömegét!

20A-7 Mekkora 2 mól ideális gáz térfogata $4 \cdot 10^5$ Pa nyomáson és 20 °C hőmérsékleten?

20A-8 Határozzuk meg 10 g vashidroxidban ($Fe(OH)_2$) lévő molekulák számát!

20A-9 Egy autógumi $1{,}79 \cdot 10^5$ Pa túlnyomású, 27°C-os levegőt tartalmaz. Mekkora lenne a túlnyomás 60°C-on?

20A-10 Egy ajtó területe 2,3 m^2. A légnyomás különbsége az ajtó két oldala között $0{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Határozzuk meg az ajtóra ható eredő erőt!

20A-11 Egy íróasztal felső lapjának mérete 91,5 cm × 183 cm. Határozzuk meg a levegő által kifejtett erőt az íróasztal tetejére!

20A-12 A Föld népességét 2000-re 6,3 milliárdra becsülik. Hány mólnyi ember ez?

20A-13 a) Hány elektron szükséges ahhoz, hogy tömege 1 kg legyen? b) Hány mól elektron van 1 kg-nyi elektronban?

20A-14 a) Hány mól H_2O van a 200 g vizet tartalmazó pohárban? b) Hány vízmolekula van a pohárban?

20A-15 Tegyük fel, hogy a Föld légkörének sűrűsége azonos minden magasságban a tengerszinten mért értékkel (1,29 kg/m^3). Határozzuk meg a légkör magasságát, ami a tengerszinten megfigyelt 10^5 Pa nyomást adja! (Összehasonlításként: a Mount Everest 8,85 km magas)

20B-16 A legkisebb nyomás, ami laboratóriumban elérhető: 10^{-10} Hgmm ($1{,}3 \cdot 10^{-8}$ Pa) körüli érték. Hány gázmolekulát tartalmaz ennek a „vákuumnak" 1 cm^3-e szobahőmérsékleten (27°C) ?

20B-17 a) Határozzuk meg az 500 literes tartályban tárolt 10 mól széndioxid (CO_2), 25°C hőmérsékleten felvett nyomását! b) Mekkora a tartályban levő gáz sűrűsége?

20B-18 A levegő hozzávetőlegesen 78 térfogatszázalék nitrogént (N_2), 21% oxigént (O_2) és 1% más gázt tartalmaz. Határozzuk meg 1 m^3 normál állapotú levegő tömegét ezen adatok felhasználásával, figyelmen kívül hagyva az 1% egyéb gázt!

20B-19 A kereskedelmi forgalomban árult oxigén olyan tartályban van, amely 21°C-on 0,046 m^3, és $1{,}52 \cdot 10^7$ Pa nyomású gázt tartalmaz. Mekkora lenne az ilyen mennyiségű oxigén térfogata 10^5 Pa nyomáson, 21°C hőmérsékleten?

20B-20 Egy átlagos csillagban nagyjából 10^{59} neutron és proton van, és egy tipikus galaxisban kb. 10^{11} csillag. Átlagosan kb. 10^3 galaxis alkot egy galaxis-halmazt, az Univerzum ismert részében pedig kb. 10^9 halmaz van. a) Hozzávetőlegesen hány proton és neutron van az ismert Univerzumban? b) Tegyük fel, hogy mindezen anyagot összenyomtuk egy „nukleáris-gömbbé" úgy, hogy minden részecske 10^{-45} m^3 térfogatot foglaljon el. (kb. ennyi a „térfogata" egy protonnak, illetve neutronnak) Mekkora lenne ennek a „nukleáris gömbnek" a sugara? c) Hány mól nukleáris részecske van a megfigyelhető univerzumban?

20B-21 A legkisebb objektum, amit elektronmikroszkóppal meg tudunk különböztetni, 1 nm nagyságrendű. (1 nm = 10^{-9} m) Hány arany atomot tartalmaz egy 1 nm élhosszúságú kocka? Az arany relatív atomtömege 197, sűrűsége 19,3 g/ cm^3.

20B-22 A látható fénnyel működő mikroszkóppal észrevehető legkisebb objektum 1μm nagyságrendű. Hány szénatomot tartalmaz az a kocka, amelynek élhosszúsága 1μm? A szén relatív atomtömege 12,01, sűrűsége (grafit alakjában) 2550 kg/m^3.

20B-23 A Föld felszínén körülbelül 10^{21} kg tömegű víz van. Tegyük fel, hogy egy doboznyi színes festéket, melynek térfogata 32 cm^3, sűrűsége 1 g/cm^3, molekulatömege 200 u, alaposan elkevertünk az összes óceán vízében. Hány molekula festékanyagot tartalmaz ekkor egy doboznyi tengervíz?

20B-24. Tegyük fel, hogy egy normál állapotú gázban az egyes molekulák átmérője 10^{-10} m. Képzeljük el, hogy a molekulák köbös elrendezésüek, azaz egymásra merőleges három irányban találhatók egymástól egyenlő távolságban. Egy molekula átmérőjének hányszorosa az egyes szomszédos molekulák közti távolság?

20B-25 Egy napon, amikor a légnyomás 10^5 Pa, és a hőmérséklet 20°C, egy 4 m magas, henger alakú, a felső végén zárt búvárharangot eresztenek a vízbe, hogy egy híd pillérének alapozási munkálatait segítsék. A víz a búvárharang belsejében a tetőtől mérve 1,5 m-ig emelkedik, a hőmérséklet pedig 8°C-ra csökken. a) Mekkora a levegő nyomása a harang belsejében? b) A víz felszíne alatt milyen mélyen helyezkedik el a harang? (A valóságban további levegőt szivattyúznak be, hogy kiszorítsák a vizet, így biztosítva munkateret a munkásoknak.)

20B-26 Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet 4°C, egy 0,2 cm átmérőjű légbuborék képződött. Ez 25 m-t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete 24°C. Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás 10^5 Pa.

20B-27 Igazoljuk ,hogy egy héliummal töltött léggömb emelő ereje 92,6%-a egy hasonló, hidrogén-töltésű léggömbének! Tegyük fel, hogy a levegő molekulatömege 28,9 u.

20B-28 A levegőt közelítőleg 78% nitrogén (N_2), 21% oxigén (O_2) és 1% egyéb gáz alkotja. Számítsuk ki az 1 m^3 térfogatú, hélium-töltésű léggömbre ható emelő erőt 10^5 Pa nyomásnál, ezen adatok felhasználásával, figyelmen kívül hagyva az 1% egyéb gázt!

20.3 Az ideális gázmodell

20A-29 A Nap belsejének hőmérséklete kb 2.10^7 K. a) Határozzuk meg egy proton átlagos transzlációs kinetikus energiáját a Nap belsejében! b) Határozzuk meg a proton négyzetes középsebességét!

20A-30 Határozzuk meg 1 mól egyatomos ideális gáz teljes kinetikus energiáját 0°C-on!

20A-31 A deutérium (atomtömege 2u) fúziós reakciója csak akkor megy végbe, ha a deutérium kinetikus energiája nagyobb, mint $1{,}2 \cdot 10^{-13}$ J. Határozzuk meg azt a hőmérsékletet, amelynél a deutérium atommagjainak átlagos kinetikus energiája éppen megindítaná a fúziós reakciót!

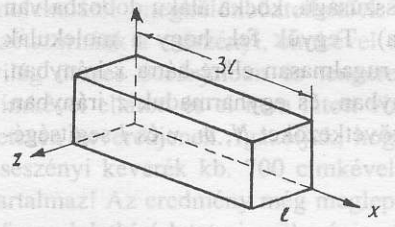
20A-32 Egy p_0 nyomású, T_0 hőmérsékletű ideális gázt tartalmazó tartályt addig fűtenek, amíg a molekulák átlagos kinetikus energiája megkétszereződik. a) Határozzuk meg az új hőmérsékletet T_0-lal kifejezve. b) Határozzuk meg az új nyomást p_0-lal kifejezve.

20B-33 Képzeljünk el egy ρ sűrűségű, p nyomású ideális gázt. a) Igazoljuk, hogy a gázmolekulák négyzetes középsebessége $\sqrt{3p/\rho}$. b) A normál állapotú levegő sűrűsége 1,29 kg/m^3. Igazoljuk, hogy – ha a levegőt hipotetikus, M molekulatömegű ideális gázként vizsgáljuk, – a levegő ekvivalens molekula-tömege 28,9 u. (Útmutatás: emlékeztetünk, hogy 1 mól ideális gáz térfogata normál állapotban 22,4 l)

20B-34 Részecskék egy csoportjának sebességértékei a következők: 3, 4, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 10, 13. a) Mekkora az átlagsebesség? b) Mekkora a négyzetes középsebesség?

20B-35 Becslések alapján, ha a levegőt alkotó molekulák négyzetes középsebessége 20%-kal nagyobb a szökési sebességnél, akkor a Föld kialakulása óta eltelt idő elegendő volt ahhoz, hogy ezek a molekulák elszökjenek a légkörből. a) Számítsuk ki a nitrogén molekulára (N_2) a négyzetes középsebességet 1500 K hőmérsékleten, vagyis a 600 km magasságban lévő hőmérsékleten, ahol a molekuláknak valószínűsíthető szökési esélyük van anélkül, hogy a levegőben lévő más molekulákkal ütköznének. b) Hasonlítsuk össze a négyzetes középsebességet az erre a magasságra jellemző minimális szökési sebességgel, ami 10,7 km/s!

20B-36 Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén molekulák (O_2) négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?



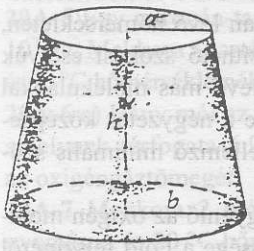
20-10 ábra
A 20B-37 feladathoz

20B-37 A 20-10 ábrán látható doboz 6.10^{12} hidrogén molekulát tartalmaz. Használjuk fel azt az egyszerűsítő feltevést, hogy a molekulák egyharmada mozog a ± x tengely mentén, egyharmada a ± y tengely mentén, és egyharmada a ± z tengely mentén. Tegyük fel azt is, hogy minden molekula a 27°C-nak megfelelő négyzetes középsebességgel mozog. Határozzuk meg a falra gyakorolt nyomást az l élhosszúsággal kifejezve.

További feladatok

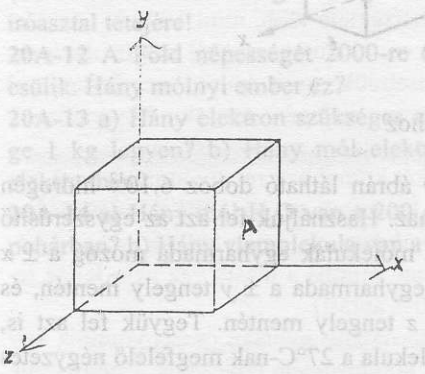
20C-38 Edmund Halley, angol csillagász, aki megjósolta a ma nevét viselő üstökös visszatérését, a búvárok merülési technikája iránt is érdeklődött. 1716-ban, a Királyi Társaság *„Philosophical Transactions"* c. kiadványában publikált egy dolgozatot, amiben leírja a fából készült, 1,7 m^3 levegőt tartalmazó csonkakúp alakú búvárharangját, amelynek átmérője felül 0,914 m, alul 1,524 m volt. A teteje üvegből készült, hogy átengedje a fényt. A harangot időnként a felszínről leengedett hordókból kellett friss levegővel feltölteni. a) Mekkora volt a harang belsejének függőleges magassága? b) Meddig emelkedett a víz a harang nyitott végű aljától, amikor leeresztették a 18 m mély vízbe? A 20-11 ábrán látható csonkakúp térfogata $\pi h(a^2 + ab + b^2)/3$.

20C-39 Egy tartály normál állapotú hidrogéngázt (H_2) tartalmaz. Tegyük fel, hogy minden molekula a négyzetes középsebességgel mozog: egyharmaduk a $\pm x$ tengely irányában, egyharmaduk a $\pm y$ tengely irányában, és egyharmaduk a $\pm z$ tengely irányában. Másodpercenként hány ütközés történik az yz síknak megfelelő fal 1 cm^2-es felületén?

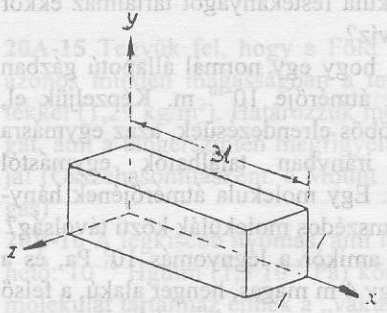


20-11 ábra
A 20C-38 feladathoz

20C-40 N darab, egyenként m tömegű, v sebességű molekula egy l élhosszúságú, kocka alakú dobozba van bezárva (20-12 ábra). Tegyük fel, hogy a molekulák egyharmada mozog rugalmasan előre-hátra x irányban, egyharmaduk y irányban, és egyharmaduk z irányban. Határozzuk meg a következőket N, m, v és l segítségével kifejezve: a) egy teljes ide-oda mozgáshoz szükséges időtartamot, b) egy molekula megfordulásakor bekövetkező impulzusváltozást, c) hányszor ütközik másodpercenként egy molekula az A oldallal, d) a teljes impulzusváltozást az A felületen, amit a dobozban lévő összes molekula okoz 1 s alatt, e) az A oldalra ható átlagerőt, f) a gáz ρ sűrűségét.



20-12 ábra
A 20A-40 feladathoz



20-13 ábra
A 20C-41 feladathoz

20C-41 A 20-13 ábrán látható, hasáb alakú dobozban egyetlen m tömegű atom van, amelynek v sebességű mozgása csak $\pm x$ tengely irányú lehet. Az atom tökéletesen rugalmasan ütközik az l^2 felületű véglapokkal. Vezessük le az alapelvekből kiindulva, hogy hogyan függ a véglapokra vonatkozó átlagos nyomás ($p_{átl}$) az m, v és l mennyiségektől!

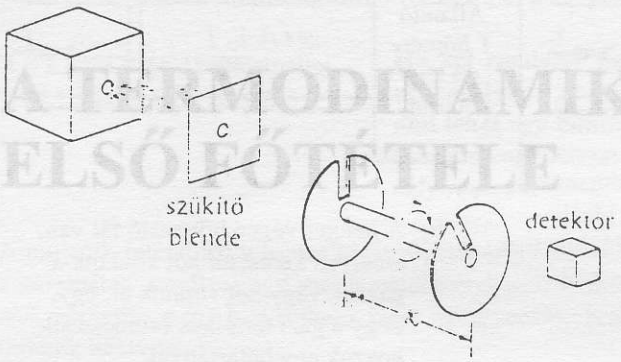
20C-42 Hogyan adható meg a joule és a literatmoszféra energiaegységek közötti átszámítási tényező (1 joule = ? l atm), ha kizárólag a mechanika alapelveit használjuk (nem a termodinamikáét).? Igazoljuk a választ az R gázállandó átszámításával egyik egységből a másikba!

20C-43 James Clerk Maxwell a következő kifejezést vezette le egy T hőmérsékleten termikus egyensúlyban lévő, N molekulát tartalmazó ideális gáz sebességeloszlására. A v és $v + dv$ tartományba eső molekulák száma $N(v)dv$, ahol

$$N(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

A 20-8 ábra ezt a függvényt ábrázolja. Igazoljuk, hogy a legvalószínűbb sebesség (v_w), (a görbe csúcsa): $v_w = \sqrt{2kT/m}$! (Útmutatás: a csúcsnál a görbe meredeksége zérus. Azaz $dN(v)/dv = 0$)

20C-44 Az első amerikai űrállomás, a *Skylab* fedélzetén a belélegezhető gázkeverék kb 75% oxigénből és 25% (térfogatszázalék) nitrogénből állt $3{,}45 \cdot 10^4$ Pa nyomáson. Így a tengerszintnek megfelelővel közel azonos oxigénnyomást lehetett fenntartani. A tengerszinten a légkör kb. 79% nitrogénből és 21% (térfogatszázalék) oxigénből áll. Literenként hányszorosa a tengerszinten levő normál állapotú oxigén mólszáma a Skylab belsejében, azonos hőmérsékleten lévőnek?



20-14 ábra
A 20C-45, 20C-46, 20C-47 feladathoz

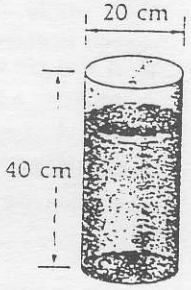
20C-45 Izzító kemencében anyag elgőzölögtetésével gázmolekula-nyalábot hozunk létre, majd egy szűkítő blendén át a gázmolekulák a 20-14 ábrán látható módon légüres térbe jutnak. A nyalábban levő molekulák sebességét két olyan, egymástól x távolságra lévő , réssel ellátott forgó tárcsa segítségével mérjük, amelyek bizonyos sebességű molekulákat mindkét résen átengednek egy detektorhoz. Határozzuk meg a tárcsák szögsebességét v sebességű molekulák észlelésekor, ha a tárcsákon kialakított rések közötti szögeltolódás θ.

20C-46 Szerepeljen az előző feladatban higany-atomokból álló nyaláb (relatív atomtömeg 200). Milyen nagy θ szögeltolódás mellett észlelhetők a 800 K hőmérsékletnek megfelelő négyzetes középsebességű higanyatomok, ha a tárcsák közti távolság 20 cm és a fordulatszám 100 fordulat/s.?

20C-47 A 20-45 feladatban szereplő tárcsák közti távolság legyen 40 cm, a fordulatszám pedig 100 1/s. Tegyük fel, hogy a rések közötti szögeltolódással 400 m/s molekulasebesség észlelhető. A nyaláb 8 cm-re van a tárcsák forgástengelyétől, és a blende, amin a nyaláb átmegy, 2 mm széles. Melyik az a legkisebb és legnagyobb molekulasebesség, amit a detektor érzékel?

20C-48 Készítsük el egy nyomás-hőmérséklet diagram vázlatát a 20-5a ábrához hasonlóan, egy olyan anyagra vonatkozóan, ami fagyáskor összehúzódik! Ne tartalmazzon numerikus értékeket, de adjuk meg a különböző fázisokat elválasztó vonalak helyes kvalitatív értelmezését.

20C-49 A 20-15 ábrán látható módon egy 15 kg-os dugattyút helyeztek egy normál állapotú, egyatomos ideális, gázt tartalmazó hengeres edény tetejére. Amint a dugattyú – elhanyagolható súrlódással – lesüllyed a henger teteje alatti egyensúlyi helyzetbe, összenyomja a gázt. a) Meddig süllyed le a dugattyú, ha a hőmérsékletet állandó értéken tartjuk a folyamat alatt? b) Milyen hőmérsékletre kell a gázt hevíteni, hogy a dugattyú visszakerüljön a henger tetejére?



20-15 ábra
A 20C-49 és 20C-50 feladathoz

20C-50 Tegyük fel, hogy az előző feladatban szereplő gázt még jobban összenyomjuk oly módon, hogy a dugattyú tetejére higanyt öntünk. Határozzuk meg a higany maximális mélységét, mielőtt a henger felső végénél túlcsordulna. A gáz hőmérséklete a folyamat alatt 27°C marad. (Tegyük fel, hogy a dugattyú vastagsága elhanyagolható.)

20C-51 Egy hőlégballon térfogata 1000 m^3 és forró gázokkal van megtöltve. A külső hőmérséklet 5°C, a nyomás pedig a ballonon belül és kívül egyaránt 10^5 Pa. Mennyinek kellene lenni a hőmérsékletnek a hőlégballon belsejében, hogy a 220 kg-os teljes tömegű ballon éppen felemelkedjék, feltételezve, hogy a ballon belsejében lévő gázok és a külső levegő ideális gázként viselkednek, és a molekulatömegük 28,9 u!

20C-52 Egy Lord Kelvin által javasolt számítás nyilvánvalóvá teszi, hogy milyen hihetetlenül kicsik az atomok és molekulák. Tegyük fel, hogy képesek lennénk egy teáscsészényi vízben (kb. 1/6 l) az összes molekulát felcímkézni úgy, hogy a többi közönséges vízmolekulától megkülönböztethetőek legyenek. Ezután szétszórnánk a csészényi, címkével ellátott molekulát a világ összes óceánjaiban és tengereiben úgy, hogy a címkével ellátott és el nem látott vízmolekulák egyenletesen keveredjenek. Igazoljuk, hogy ezután egy teáscsészényi keverék kb. 700 címkével ellátott molekulát tartalmaz! Az eredmény még meglepőbb, ha a következő gondolatkísérletet visszük végig: amennyiben a Föld domborzati viszonyai olyanok lennének, hogy a felszíne tökéletesen sima gömbfelületet képezne, akkor a felszínét 2,6 km mélységben víz borítaná.

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84{,}5$ perc

16C-53 1,41 óra

16C-55 $\frac{GMm}{2R}\left[3-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$

16C-57 $\frac{Gm}{R^2}\left(\frac{M}{4}-\frac{m}{3}\right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%

17B-3 A válasz adott.

17A-5 250 N

17A-7 20 cm

17B-9 a) 5000 kg/m^3 b) 667 kg/m^3

17B-11 a) 2704 kg/m^3 b) 59,8 N

17B-13 0,89 kg/dm^3

17B-15 4,00 mg

17B-17 $\Delta V/V = 0{,}0830$

17A-19 $1{,}77 \times 10^{-3}$ m^3/s

17A-21 40 cm/s

17B-23 $3{,}7 \times 10^4$ N/m^2

17B-25 4,49 atm

17B-27 $\rho A v^2$

17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm

17B-31 A válasz adott.

17C-33 al/g

17C-35 0,933

17C-37 $(1-1/\sqrt{2})$

17C-39 $(1-1/\sqrt{2})$

17C-41 A válasz adott.

17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$

17C-45 A válasz adott.

17C-47 27,3 cm^3/s

17C-49 $H/2$

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2{,}27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m

18A-3 A válasz adott.

18A-5 8,33 cm

18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3{,}14$ m^{-1}, $\omega = 6{,}28 \times 10^{-3}$ s^{-1}

18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m d) 340 m/s

18B-11 18,56 m

18B-13 860 m

18A-15 $2{,}94 \times 10^{-16}$ J/cm^3

18B-17 1,13 μW

18B-19 A válasz adott.

18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang

18A-23 2,07 N

18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm

18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz

18A-29 870 Hz, 2610 Hz

18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m

18B-33 800 Hz

18A-35 19,9 m/s

18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz

18A-39 28,4°

18B-41 5,64 Hz

18C-43 A válasz adott.

18C-45 3,14 m/s, $9{,}87 \times 10^3$ m/s^2

18C-47 $K = 2{,}47 \times 10^{11}$ N/m^2
$G = 1{,}25 \times 10^{11}$ N/m^2

18C-49 b) $v = R\omega$

18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24

18C-53 $\mu = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú

18C-55 12,6 m/s^2

18C-57 60,0 Hz

18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni

19A-3 3×10^{-5}/°C

19B-5 $2{,}17 \times 10^5$ N

19B-7 0,72 l

19A-9 6,44 kJ

19A-11 0,463 kJ/kg·°C

19A-13 0,431 joule/ g·°C

19A-15 0,122 kg

19B-17 0,126 kJ/kg·°C

19B-19 87,5

19B-21 A válasz adott.

19A-23 557 J/s

19A-25 $1{,}38 \times 10^8$ J

19B-27 a) 290 g b) 42,9 g

19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár

19A-31 5,00 W/m^2 °C

19B-33 2,84 J/s

19A-35 a) 61,1 kW·h b) $3,67

19C-37 A válasz adott.

19C-39 a) 13,9 cm b) $2{,}6 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$

19C-41 8,0039 cm

19C-43 a) $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$

19C-45 A válasz adott.

19C-47 $3{,}52 \times 10^4$ s = 9,78 h

19C-49 A válasz adott.

19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l

20A-3 a) 4,48 m^3 b) 5,60 kg

20A-5 0,046 m^3

20A-7 12,0 l

20A-9 $1{,}98 \times 10^5$ Pa

20A-11 $1{,}7 \times 10^5$ N
20A-13 a) $1{,}10 \times 10^{30}$ elektron b) $1{,}82 \times 10^6$ mol
20A-15 8,01 km
20B-17 a) 0,489 atm b) 0,888 kg/ m^3
20B-19 6,59 m^3
20B-21 átlagban 59,0 atom
20B-23 átlagosan 3,48 molekula
20B-25 a) 2,56 atm b) 16,1 m
20B-27 A válasz adott.
20A-29 a) $4{,}14 \times 10^{-16}$ J b) $7{,}04 \times 10^5$ m/s
20A-31 $5{,}80 \times 10^9$ K
20B-33 A válasz adott.
20B-35 b) A szökési sebesség 10,8%-a
20B-37 $(8{,}28 \times 10^{-9}/l^3)$ N/m^2 (l méterben)
20C-39 $8{,}22 \times 10^{23}$ ütközés/sec
20C-41 $mv^2/3l^3$
20C-43 A válasz adott.
20C-45 $\omega = v\theta/x$
20C-47 385 m/s, 417 m/s
20C-49 a) 1,77 cm b) 12,6C°
20C-51 63,4C°

XXI. Fejezet

21A-1 a) 209 J b) 209 J c) 0 d) 0,0896 l
21A-3 a) 0,144 atm b) 157 K
21A-5 a) 0,160 atm b) 131 K
21B-7 a) 546 K b) 4538 J
c) $1{,}13 \times 10^4$ J d) 6806 J
21B-9 A válasz adott.
21B-11 $2{,}09 \times 10^4$ J
21B-13 A válasz adott.
21A-15 $2{,}93R$
21B-17 a) 216C° b) 0,178 L
21B-19 $4{,}14 \times 10^{-21}$ J
21A-21 56,1
21C-23 A válasz adott.
21C-25 a) 70,2 J b) 36,0 J c) 208,3 J
d) –53,6 J e) –36,0 J f) 16,6 J
21C-27 a) 47,3 J b) $1{,}61 \times 10^{-4}$ m^3 c) 13,5 J
d) 33,8 J
21C-29 b) $\frac{13}{11}$

XXII. Fejezet

22A-1 150 J
22A-3 14,2%
22A-5 280 K
22A-7 5,76%
22B-9 a) 44,6% b) 25%
22B-11 –5,40C°
22B-13 A válasz adott.
22B-15 a) 414 J b) 4600 J
22B-17 a) 0,99 J b) 3,45 J
22B-19 $1{,}97 \times 10^5$ J
22B-21 a) 370 személy b) 14800,00 dollár c) 4,80 dollár
22B-23 a) $\frac{4}{3}P_oV_o$ b) 22,2%
22B-25 $\frac{2}{13}$
22C-27 a) 12,4 b) $2{,}07 \times 10^7$ J c) $6{,}00 \times 10^7$ J
d) 2,32 l e) 1,33 l
22C-29 173 W
22C-31 $\left(1-\frac{V_1}{V_3}\right)^{(\gamma-1)}$
22C-33 a) α: 4,92 ℓ; b: 1,67 atm; c: 6,69 ℓ, $T_c = 408$ K
b) 52,7 J
22C-35 A válasz adott.
22C-37 300 N, 400 N

XXIII. Fejezet

23A-1 -24,2 J/K
23A-3 123 J/K
23A-5 5,27 J/K
23B-7 12,6 J/K
23B-9 A válasz adott.
23B-11 $\sim 5 \times 10^5$ J/K
23B-13 A válasz adott.
23C-15 3807 J
23C-17 A válasz adott.
23C-19 b) $mc\left[(T_2+T_1)-2\sqrt{T_2T_1}\right]$
23C-21 A válasz adott.
23C-23 A válasz adott.
23C-25 a) 588 J b) zérus c) 1,96 J/K d) 1,96 J/K
23C-27 $8k \ln 2$
23C-29 $2{,}40 \times 10^{26}$ J/K·h

A TERMODINAMIKA ELSŐ FŐTÉTELE

(Megjegyzések egy mágneseket alkalmazó örökmozgó igénybejelentéséhez)

„Óh, hogy hoznának az Istenek szánalmas véget az ilyen kitalált, őrült, torz munkákra, amelyekkel a tanulni vágyók értelmét elhomályosítják!"

WILLIAM GILBERT
De Magnete (1600)
American Journal of Physics, 44 (1976)

21.1 Bevezetés

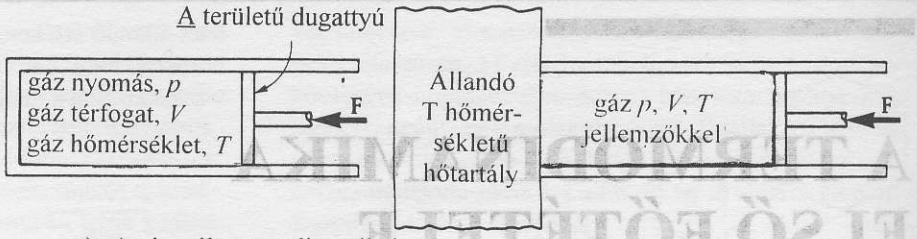
Hőtani tanulmányaink fordulópontjához érkeztünk. Bevezettük a hőmérséklet fogalmát és megtárgyaltuk azokat a változásokat, amiket a testekkel közölt, vagy azoktól elvont hő eredményez, és most közeledünk az anyag „szívéhez". A legfontosabb tény, amit korábban nem ismertek fel, hogy létezik az energiának egy olyan különleges formája – a termikus energia –, amelyre nem vonatkoznak a mechanika törvényei. A hő mechanikai ekvivalense – munka formájában – megnyitja azt a lehetőségét, hogy adott mennyiségű termikus energiát hasznos munkává alakítsunk. Ez az átalakítás az, ami lehetővé teszi mai civilizációnkat. A XVIII. század végi és a XIX. századi ipari forradalom – a motoroknak és a gépeknek a korra jellemző gyors szaporodásával, – számos tanulmány létrejöttét ösztönözte a fizikának „termodinamika" néven ismert ágában. (Maga a név összekapcsolja a két fogalmat, a hőt és a mechanikai munkát.) A tanulmányok érdekes következtetései között voltak az alábbiak:

(1) Az örökmozgó gépezet megszerkesztése lehetetlen
(2) Lehetetlen olyan, körfolyamatot végző gépet készíteni, amely 100%-os hatásfokkal alakítja át a hőt munkává

Az ilyen, *negatív* eredmények, amelyek a megvalósítás lehetetlenségét állapítják meg, a természettudomány legnagyobb erejű alapelvei közé tartoznak. Ezekről később többet kell majd mondanunk.

21.2 Alapfogalmak

A fizikát tanuló hallgatók gyakran hallják: „válasszunk egy rendszert". A választás döntő, mivel az Univerzumnak azt a részét definiálja, amit tanulmányozni akarunk, és módot nyújt arra, hogy megtanuljuk, hogyan hat a „külvilág" erre a rendszerre. A **„rendszer"** szót nagyon általános értelemben használjuk: jelenthet tetszőleges motort, vagy gépet, tartályba zárt gázt és



a) A vizsgált termodinamikai rendszer a bezárt ideális gáz. A mozgatható dugattyú súrlódás nélkül csúszik.

b) A henger végén hővezető fal van, amelyen keresztül hőt közlünk a gázzal, vagy hőt vonunk el, úgy, hogy a gázt termikus érintkezésbe hozzuk egy hőtartállyal.

21-1 ábra
Egyszerű termodinamikai rendszer.

folyadékot, vagy a Nap belsejében lévő anyag bizonyos mennyiségét. Elképzelésünk szerint a rendszert körülzárja egy pontosan körvonalazott határfelület, és a rendszer és környezete között ezen a határfelületen keresztül történik az energiaátvitel, legyen szó akár hőáramlásról, akár munkavégzésről.

A tárgyalás leegyszerűsítésére tekintsünk egy speciális rendszert, konkrét példaként: n mól ideális gázt zárunk egy olyan hengerbe, amely mozgatható, súrlódásmentes dugattyúval van ellátva, ahogyan ezt a 21-1 ábra illusztrálja. A gáz maga a rendszer. Mivel a dugattyú súrlódásmentes, mozgás közben nem fejleszt hőt a henger falában.

A hengernek jó hőszigetelőnek kell lennie, hogy a gázba (vagy a gázból) ne szivárogjon észrevétlenül hő. Mindazonáltal szándékosan létrehozhatunk hőcserét a környezettel úgy, hogy a henger egyik végét **termikus érintkezésbe** hozzuk egy forró, vagy hideg külső tárggyal, a *hőtartállyal,* ahogyan ezt a 21-1b ábra mutatja. A rendszer és a hőtartály közötti hőmérsékletkülönbség miatt a gáz hőt vesz fel, vagy ad le. Ezenfelül a gáz munkát is végezhet a „külső világ" ellenében oly módon, hogy kifelé tolja a dugattyút a légköri nyomással, vagy valamilyen más külső erővel szemben. Megfordítva, külső erő munkát végezhet a rendszeren, ha – a dugattyú befelé történő mozgatásával – összenyomja a gázt. A folyamat iránya attól függ, hogy a dugattyú befelé vagy kifelé mozog.

Egy termodinamikai rendszer fizikai „állapotát" az **állapotegyenletben** szereplő paraméterek (állapotjelzők) segítségével írhatjuk le. (Ezt az előző fejezetben tárgyaltuk.) Konkrét esetünkre, a hengerben lévő n mól ideális gázra ezek a paraméterek: a p nyomás, a V térfogat és a kelvinben mért abszolút T hőmérséklet . Az állapotegyenlet: $pV = nRT$. Más rendszereknek, – tulajdonságaiktól függően – eltérő állapotjelzői lehetnek. Például egy gumiszalagot a hőmérséklet, a hosszúság, és a rugalmas feszültség segítségével jellemezhetünk.

Egy rendszer csak akkor írható le az állapotegyenlettel, ha összes mérhető tulajdonsága – mint pl. a nyomás *(p)*, és a hőmérséklet *(T)* – a rendszerben mindenütt azonos és időben nem változik. Ezt az állapotot **termodinamikai egyensúlynak** nevezzük. A rendszer maga hővezetéssel és a gáz rendszeren belüli áramlásával éri el ezt az egyensúlyi állapotot, feltéve, hogy minden külső hatástól el van szigetelve. Ebben az esetben a gravitációs hatásokat is kizárjuk, mivel ezek a nyomás és a sűrűség magassággal történő változását okoznák, ahogyan ez a Föld légkörében történik. Vizsgálatainkat szándékosan olyan kicsi rendszerekre korlátozzuk, amelyeknél az ilyen gravitációs hatások elhanyagolhatók.

A termodinamikai egyensúly egyik esete olyan körülményekre vonatkozik, amelyek között nincs eredő hőátvitel. Ha két, különböző hőmérsékletű testet termikus érintkezésbe hozunk, addig áramlik közöttük a hő, amíg valamely közös (közbülső) hőmérsékleten **termikus egyensúlyba** nem kerül-

nek. Ezután további hőcsere nem történik. Ennek a gondolatnak a továbbvitele a **termodinamika nulladik főtételének** alapját képezi.[1]

A TERMODINAMIKA NULLADIK FŐTÉTELE

Ha két rendszer mindegyike termikus egyensúlyban van egy harmadikkal, – ami lehet egy hőmérő is, – akkor a két rendszer egymással is termikus egyensúlyban van.

A nulladik főtétel azt a fontos tényt rögzíti, hogy a rendszer *hőmérséklete* az a paraméter, amellyel egy másik rendszerrel való *termikus egyensúly feltételei* mérhetők, s így biztosítható, hogy az egyensúly beállását követően nem történik hőátvitel.

21.3 A hő, az energia, a munka és az első főtétel

A továbbiakban készen állunk a termodinamika első főtételének megtárgyalására. Úgy tűnhet, hogy ez olyan magától értedődő összefüggés, ami aligha érdemli ki az „első főtétel" megtisztelő nevet. Mégis ez a fizika építményének egyik igazán fontos alapköve.

A mechanikai energia megmaradása hasonlóan fontos alapelv, s ma ezt is talán magától értetődőnek érezzük. Ha azonban tanulmányozzuk az alapelv fejlődéstörténetét, felfedezzük, hogy évszázadokon át a természettudomány legnagyobb gondolkozói közül is többeknek kikerülte a figyelmét. Az energia nehezen megfogható fogalom, mert soha nem mérhető közvetlenül. Számos formájában van jelen: ilyen például egy tömeg mozgásának kinetikus energiája, a két, vagy több egymással kölcsönhatásban lévő test relatív helyzete miatt fellépő potenciális energia, továbbá a munkavégzés során történő energiaátvitel, és így tovább. Ezek olyan energiaformák, amelyek a testek tömegközéppontjának mozgásával, vagy helyzetével kapcsolatosak. De ismerjük az energiának más típusait is: ilyen a, telepekben, a petárdákban felhalmozódó *kémiai energia,* vagy a *termikus energia,* ami az atomok és molekulák véletlenszerű mozgásából származik. Ez utóbbi energiafajtákat a rendszer **belső energiájának** nevezik, mivel az atomok és molekulák mikroszkópikus skálán való véletlenszerű mozgásának, a következménye.

Az első főtétel egy általános megmaradási összefüggésben egyesíti ezeket a belső energiafajtákat az energia más formáival. A belső energia konkrét típusa nem fontos. Lehet termikus energia, vagy egy szorosan feltekert rugóban tárolt energia (ami természetesen az atomok és molekulák megnövekedett potenciális energiájából származik és a részecskék egymástól való távolságának megváltozása miatt keletkezik). *Mindezen formák a rendszer belső energiájának részeit képezik, amelyet a U szimbólummal jelölnek.*

Az első főtétel az összes olyan kísérlet eredményeinek általánosítása, amelyekben pontos figyelembe vették az előforduló energia-kicserélődéseket. Az első főtétel, amely közvetlenül nem bizonyítható[2], kifejezi a természetre vonatkozó megfigyeléseinket az energia különböző megjelenési alakjával kapcsolatban, vagyis kifejezi az energia megmaradását.

---

[1] A termodinamika első és második főtételét még azelőtt állapították meg, mielőtt ráébredtek arra, hogy szükség van egy velük logikailag összefüggő, de azokat megelőző megállapításra, ami a termikus egyensúlyra és a hőmérsékletre vonatkozik. Emiatt a tételek számozásában visszafelé kellett lépni, hogy ez a megállapítás kellő priorítást nyerjen.

[2] Azokat a természeti törvényeket nevezzük alaptörvényeknek, amelyek más törvényekből nem vezethetők le.

Az első főtétel tehát:

$$\begin{bmatrix}\text{A rendszerrel}\\ \text{közölt hő}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{A rendszer belső energi-}\\ \text{ájának megváltozása}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{A rendszer által a környe-}\\ \text{zeten végzett munka}\end{bmatrix}$$

Ha k és V indexet használunk a kezdeti és a végső értékekre, az egyenletet Q $U_V - U_k + W$ alakban fogalmazhatjuk meg.
Másképpen:

A TERMODINAMIKA I. FŐTÉTELE

$$\Delta U = Q - W \qquad \textbf{(21-1)}$$

ahol Q a rendszerrel *közölt* hő, $\Delta U = U_V - U_k$ a rendszer belső energiájának megváltozása és W a rendszer által a környezeten végzett munka. Az egyenletből látható, hogy a rendszerrel közölt hőnek valamilyen más energia alakjában kell megjelennie: vagy megnövekedett belső energiaként, vagy mint a rendszer által a környezeten végzett munka, vagy mind a kettő együtt. Energia nem vész el.

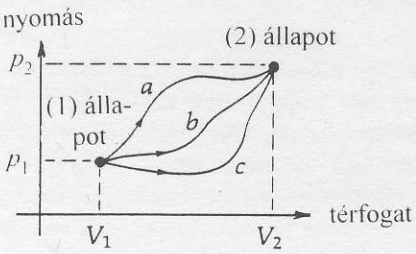
Jegyezzük meg, hogy a belső energiának csak a *változását* tudjuk meghatározni, és semmit sem tudunk mondani a rendszerben felhalmozott teljes belső energiáról. Vegyük figyelembe az energiaáramlás irányát is:

Q pozitív, ha hőt *közlünk* a rendszerrel,
W pozitív, ha a rendszer végez munkát a *környezeten*,
ΔU pozitív, ha a belső energia *növekszik* (azaz, ha $U_V > U_k$)

Ha ezek közül a változások közül bármelyik ellentétes irányban megy végbe[3], a megfelelő számérték negatív lesz. (Magában az első főtétel általános alakjában természetesen soha nem változtatjuk meg az előjelet.)

Mi az I. főtétel jelentősége? Ezt a már említett ideális gáz-rendszerrel illusztráljuk. A rendszer „állapotát" a p–V diagramon egy pont adja meg. (21-2 ábra). Adott p és V egyértelműen leír egy bizonyos állapotot, mert a $pV = nRT$ állapotegyenletből a harmadik paramétert, a T-t meghatározhatjuk, és a három *állapotváltó* már teljesen meghatározza az egyszerű rendszer fizikai állapotát. *Kísérletek igazolják, hogy az 1 állapotból a 2 állapotba történő átmenetkor ΔU minden lehetséges folyamatra azonos érték.* Ez annak ellenére is igaz, hogy egy adott kezdeti és végállapot-párt összekötő különböző útvonalakon a Q hőmennyiség és a W munka más és más lehet; a $\Delta U = Q - W$ érték azonban minden esetben azonos. Ez azt is magában foglalja, hogy az U belső energia csak a rendszer pillanatnyi állapotától függ. Tehát U is a rendszer állapotát meghatározó változó. Ahogyan a nulladik főtétel a T hőmérsékletet határozta meg az állapotfüggvény változójaként, az első főtétel az U belső energiát vezeti be állapotváltozóként.

Az U mennyiség ebből a szempontból döntően különbözik Q-tól és W-től. Q és W nem állapotváltozók. Nincs olyan $Q(p, V, T)$ függvény, amely megmondja, hogy mennyi „hővel rendelkezik" az ideális gáz, sem olyan $W(p, V, T)$ függvény, amely megmondja, hogy mennyi „munka van a rend-



21-2 ábra
Ideális gáz-rendszer p–V diagramja. Az egyes, – a, b és c – utak különböző folyamatokat írnak le, amelyekkel az 1 állapotból a 2 állapotba juthatunk. $\Delta U = Q$–W értéke minden útra azonos annak ellenére, hogy Q és W értéke minden egyes útra különböző.

[3] Ez az előjel-konvenció abból a tényből ered, hogy a termodinamika a hőerőgépek gyakorlati vizsgálatából alakult ki: a legfontosabb fogalmakat jelölték pozitívnak, nevezetesen a motorral közölt hőt és a gép által végzett munkát. Ezeket definiálhatnánk ellentétes előjelekkel is, ettől még a termodinamika logikailag következetes lenne. Mindazonáltal a definíció elfogadása után már fontos, hogy az előjeleket helyesen alkalmazzuk minden egyenletben. (A kémiában gyakran ettől eltérő előjel-konvenció használatos. A magyar egyetemi fizika tankönyvek előjel-konvenciói általában szintén eltérőek. (a fordító))

szerben". Létezik azonban az U függvény, ami meghatározza a gáz belső energiáját: a kinetikus elméletből azt kaptuk, hogy egy mól ideális gáz belső energiája:

$$U = \frac{3}{2} N_A kT = \frac{3}{2} RT$$

Tehát $U = U(T)$ állapotváltozó.[4]

Mielőtt megtárgyalnánk egy rendszerben végbemenő különféle folyamatokat, valamint az U, Q és W állapotváltozók megfelelő megváltozását, különbséget kell tennünk a *reverzibilis* és *irreverzibilis* folyamatok között.

21.4 Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok

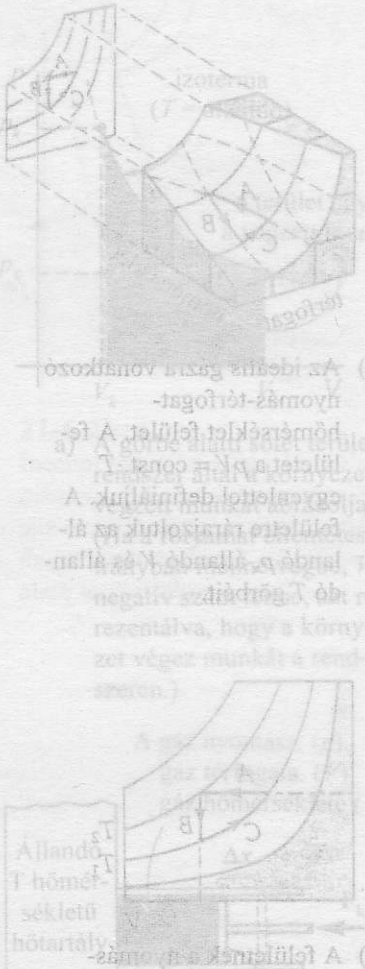
Egy rendszerben állapotváltozásokat idézünk elő, ha hőt közlünk a rendszerrel, vagy hőt vonunk el tőle, illetve ha munkát végzünk rajta, vagy a rendszert a környezeten való munkavégzésre késztetjük. Tekintsük át részletesen ezeket a folyamatokat, konkrét példaként az ideális gáz-rendszert tekintve.

Ha a rendszer és környezete között hőmérsékletkülönbség áll fenn, akkor hőáramlás jön létre, ezt például úgy valósíthatjuk meg, ha a rendszert termikus érintkezésbe hozzuk egy külső hőtartállyal. (Egy kisegítő hűtőgép vagy fűtőtest tartja fenn a hőtartályban a kívánt hőmérsékletet.) Ha a rendszer és a hőtartály közötti hőmérsékletkülönbség *nem zérus*, a hő spontán módon áramlik a melegebb területről a hidegebbre, amíg ki nem alakul a két test között a termikus egyensúly. Ettől kezdve a rendszer egyensúlyban marad a hőtartállyal. Az ilyen folyamatot **irreverzibilisnek** nevezik, mert csak egy irányban történik változás, s ez az egyensúlyi állapot felé vezet. Minden természetes folyamat irreverzibilis (megfordíthatatlan).

Ha a hőmérsékletkülönbség *infinitezimális* (nagyon kicsiny, megközelíti a zérust), a hőtartály hőmérsékletének infinitezimális magváltoztatásával megfordítható a hőáramlás iránya. Az ilyen, elképzelt, ideális folyamatot **reverzibilis** (megfordítható) folyamatnak nevezzük. A reverzibilis folyamatban a rendszer legfeljebb infinitezimális mértékben tér el az egyensúlyi állapottól, s ezt a differenciálszámítás módszereinek segítségével tárgyalhatjuk. Az ilyen típusú folyamat előnye, hogy – mivel a rendszer lényegében egyensúlyban marad – az *állapotegyenlet a reverzibilis folyamat során mindig alkalmazható.* A rendszer gyakorlatilag *egyensúlyi állapotok sorozatán megy keresztül, így ez a folyamat* **kvázisztatikusnak** is nevezhető. Így az állapotegyenletet tudjuk matematikailag is kezelni, hogy előre megmondhassuk, hogyan kellene a rendszernek viselkednie és, hogy ezáltal összevethető legyen az elmélet a kísérletekkel.

Minden olyan folyamat, amit fizikai eszközzel hajtunk végre, irreverzibilis, mivel ezek *véges* hőmérséklet- és nyomáskülönbséggel járnak. De – kellő gondossággal dolgozva – a reverzibilis folyamatok megközelíthetők kísérletileg is, ha a hőmérséklet- és nyomáskülönbséget tetszőlegesen kicsire vesszük. Ez általában azt jelenti, hogy a változások nagyon lassan mennek végbe (bár nem minden lassú folyamat reverzibilis).

A reverzibilis folyamat nem jelenti azt szükségszerűen, hogy a rendszer az 1 állapotból a 2 állapotba jut, majd ellenkező irányban visszakerül az

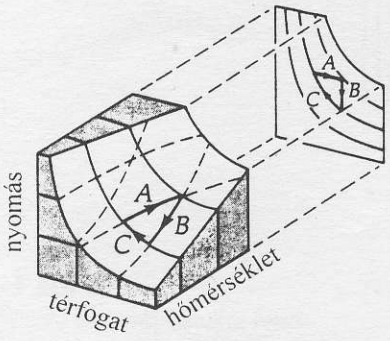


---

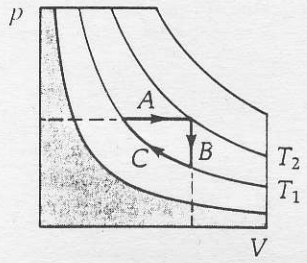
[4] Matematikailag a megkülönböztetés úgy fejezhető ki, hogy az I. főtétel

$$dU = \delta Q - \delta W$$

differenciális alakjában kiemelik: sem a kis δQ növekmény nem reprezentálja valamilyen Q függvény deriváltját, sem δW nem deriváltja semmilyen W függvénynek. A jelölés azt jelzi, hogy ezek nem teljes differenciálok. dU azonban az $U(T)$ belső energia függvény teljes differenciálja.



a) Az ideális gázra vonatkozó nyomás-térfogat-hőmérséklet felület. A felületet a $pV = \text{const.} \cdot T$ egyenlettel definiáljuk. A felületre rárajzoltuk az állandó p, állandó V és állandó T görbéit.



b) A felületnek a nyomás-térfogat síkra vett vetülete alkotja a p–V diagramot. Ugyanazt a három folyamatot *(A, B, C)* mutatjuk be, mint amit az a) ábrán vázoltunk. Az állandó hőmérséklet görbéi, az izotermák, hiperbola-családot alkotnak, amint az a $pV =$ állandó egyenletből nyílvánvaló.

21-3 ábra
Ideális gázzal végzett folyamatsor a nyomás-térfogat-hőmérséklet felületen. Az *A* folyamatban a gáz állandó nyomáson kitágul. A *B* folyamat hűtéssel csökkenti a gáz nyomását állandó térfogaton. A *C* folyamatban összenyomjuk a gázt, miközben a hőmérséklet állandó marad, úgy hogy a tartályt állandó hőmérsékletű hőtartállyal hozzuk érintkezésbe (amely a gáztól hőt von el a folyamat alatt).

1 állapotba. De véghezvihető lenne ilyen reverzibilitás és így pontosan visszaállítható lenne a rendszernek és környezetének eredeti állapota feltéve, hogy semmiféle súrlódás nem lenne. Ha ideális gázrendszerünkben a mozgó dugattyú súrlódna, ez a mozgás bizonyos mennyiségű energiát termikus energiává alakítana át. Ez a termikus energia a molekuláris mozgások véletlenszerű kinetikus és potenciális energiájaként jelenne meg a falakon és a dugattyún. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a véletlenszerű mozgásokat nem alakíthatjuk vissza *tökéletesen* a dugattyú „rendezett" mozgásává.

Ne vonjuk le azt a következtetést, hogy a termodinamika csak ideális gázokra vonatkozik, csupán azért, mert sokszor az ideális gázrendszert választjuk jellemző példaként! A termodinamika minden elképzelhető lehetséges rendszerre és folyamatra alkalmazható. Néhány példa: egy elem, ami egy ellenállást elektromos árammal felmelegít; a felületi hártya buborékon, ami összehúzódik, vagy kitágul; szabadesés után a földnek ütköző ólomhasáb; kémiai reakcióban résztvevő különböző vegyületek keveréke; mágneses anyag változó mágneses térben, stb. Habár a megfelelő állapotegyenlet paraméterei esetről-esetre változnak és sokkal több is lehet belőlük, mint az a három, ami az ideális gázra vonatkozó példánkban szerepelt, a termodinamikai megfontolások egyaránt érvényesek minden rendszerre.

21.5 Speciális folyamatok és mólhőik

A következőkben olyan speciális folyamatokat vizsgálunk, amelyek összekapcsolják az eddig tárgyalt fogalmakat. Ideális gázrendszerünket folyamatok sorozatán visszük keresztül, miközben p, V és T állapotváltozók megváltoznak hőközlés, vagy hőelvonás következtében, illetve a rendszeren végzett munka, vagy a rendszer által a környezeten végzett munka eredményeként. A legtöbb folyamat, amivel foglalkozunk, reverzibilis, így az állapotegyenlet minden időpontban érvényes. Gyakorlatilag a nyomás-térfogat-hőmérséklet felületen választott úton haladunk, amint ezt a 21-3a ábrán vázoltuk. Ezt az utat minden esetben a megfelelő nyomás-térfogat vetületen (21-3b ábra) sematikusan is ábrázoljuk.

Vezessük be néhány fontos fogalom definícióját:

Izotermikus változás	A hőmérséklet állandó. (A görög *isos* jelentése „egyenlő" vagy „azonos"és a *therma* jelentése „hő")
Izochor változás	A térfogat állandó. (A görög *choras* jelentése „hely" vagy „tér")
Izobár változás	A nyomás állandó. (A görög *baros* jelentése „súly" – a levegőé)
Adiabatikus változás	Nincs hőcsere. (A görög *adiabatos* jelentése „nem átjárható".) Minden „hirtelen" folyamat adiabatikus, mivel a hőáramláshoz rendszerint véges időre van szükség.

Természetesen végtelen nagy számú olyan lehetséges folyamat létezik, amely nem esik ezen kategóriák egyikébe sem. Mindazonáltal ezt a négyet szemelték ki vizsgálat céljára, mint gyakori – és matematikailag egyszerűen leírható – folyamatokat. Minden folyamatot *reverzibilisen* fogunk végrehajtani, így az állapotegyenlet mindig érvényes lesz. Vegyük sorra ezeket!

Izotermikus tágulás

Ebben az esetben a hőmérséklet állandó, miközben a többi paraméter a kezdeti p_k és V_k értékről a végső p_V és V_V értékre változik. Így a rendszer, amint azt a 21-4a ábra mutatja, egy izoterma mentén halad. Mivel az U belső energia az atomok és molekulák véletlenszerű mozgásával kapcsolatos, ideális gáz esetében a belső energia csak a hőmérséklettől függ. (Emlékezzünk vissza arra az eredményre, amit a kinetikus elmélet alapján egy mól gáz átlagos transzlációs kinetikus energiájára kaptunk: $\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}RT$.) Tehát izotermikus folyamat esetében $\Delta U = 0$, mert a hőmérséklet nem változik.[5]

A táguló gáz munkát végez a környezetében. Ezt a munkát valamilyen energiából kell fedeznie. Ha nem pótoljuk a gáz belső, termikus energiáját, a gáz lehűl. (Mikroszkópikus skálán ez abból adódik, hogy a molekulák csökkenő sebességgel pattannak vissza a visszahúzódó dugattyúról.) Az állandó hőmérséklet fenntartásához a folyamat során hőt közlünk a gázzal oly módon, hogy termikus érintkezésben tartjuk a hengert egy hőtartállyal. Amint a dugattyú kifelé mozog, a gáz által a dugattyúra kifejtett erő: $F = pA$. Innen a gáz munkája:

$$\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{x} = pA\Delta x = p\Delta V \qquad \textbf{(21-2)}$$

Ez integrál alakban:

$$W = \int_{V_k}^{V_V} p\,dV \qquad \textbf{(21-3)}$$

Jegyezzük meg, hogy ez a munka a p–V diagramon a görbe alatti terület. Amikor fizikai mennyiségeket reprezentáló grafikonok alatti területeket számolunk, figyelembe kell vennünk az egyes tengelyekkel kapcsolatos mértékegységeket is. Ily módon a terület [nyomás]×[térfogat] = [(erő/terület)]× [térfogat] = [munka] dimenziójú.

Az ideális gáz állapotegyenlete adja meg a kapcsolatot a p és a V változók között, azaz: $p = nRT/V$ Innen

$$W = \int_{V_k}^{V_V} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT\int_{V_k}^{V_V} \frac{dV}{V} \qquad \textbf{(21-4)}$$

$$W = nRT\ln\frac{V_V}{V_k}$$

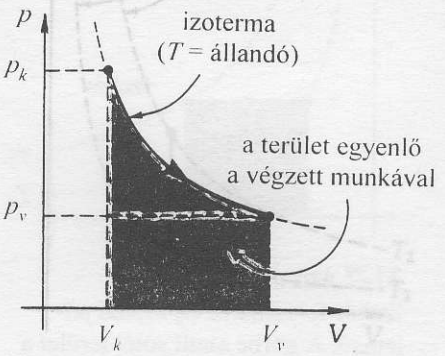
Mivel tudjuk, hogy izotermikus változás esetén $\Delta U = 0$, alkalmazzuk a termodinamika I. főtételét:

$$\Delta U = Q - W$$

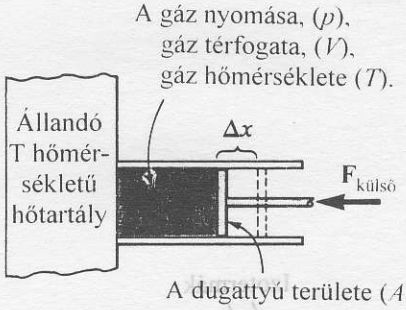
$$0 = Q - \int p\,dV$$

IZOTERMIKUS FOLYAMAT

$$Q = nRT\ln\frac{V_V}{V_k} = W \qquad \textbf{(21-5)}$$



a) A görbe alatti sötét terület a rendszer által a környezeten végzett munkát ábrázolja. (Ha a folyamat ellentétes irányban menne végbe, W negatív szám lenne, azt reprezentálva, hogy a környezet végez munkát a rendszeren.)



b) Az állandó hőmérséklet fenntartásához a henger hőtartállyal van termikus összeköttetésben. Miközben a dugattyú Δx távolságnyira mozdul el, a gáz munkát végez a külső erő ellenében: $\Delta W = F\Delta x = p\,A\,\Delta x = p\,V$.

21-4 ábra
Izotermikus tágulás.

[5] Ezek a megállapítások egyatomos gázokra igazak, melyek atomjai megközelítik a kinetikus elmélet modelljének tömegpontjait. A kétatomos gázok molekuláinak belső rezgései is lehetnek, ezért amint azt a következő fejezetben látni fogjuk, viselkedésük kissé más mint az egyatomos gázoké.

Tehát a gázzal közölt Q hő teljesen a rendszer által a környezeten végzett W munkára fordítódik.

Ha a folyamatot ellentétes irányban hajtanánk végre, a környezet végezne munkát a rendszeren (összenyomná a gázt) és a gáz hőmérsékletének állandóan tartásához hőt kellene átvinni a hőtartályba. Ebben az esetben mind a Q, mind a W számértéke negatív lenne, ami ellentétes irányú energiaátvitelt jelentene. Ez az előjel-konvenció triviálisnak tűnhet ebben a példában. De rendkívül fontos, hogy különösen a később tárgyalandó, sokkal összetettebb példákban minden esetben figyeljünk erre.

21-1 PÉLDA

Mennyi munka szükséges ahhoz, hogy 2 g kezdetben normál állapotú oxigént izotermikusan eredeti térfogatának felére nyomjunk össze? (Tegyük fel, hogy az oxigén ideális gázként viselkedik.)

MEGOLDÁS

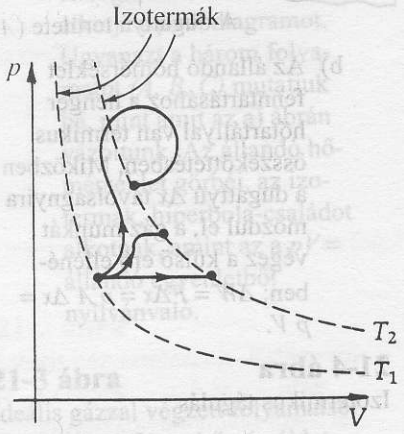
A munkát a (21-5) egyenletből kaphatjuk meg:

$$W = nRT \ln \frac{V_V}{V_k}$$

Mivel az oxigén (O_2) relatív molekulatömege 32, a mólszám $n = 2/32 = 0{,}0625$. Így

$$W = (0{,}0625 \text{ mol}) \left(8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right) (273 \text{ K}) \ln \frac{1}{2} = -98{,}3 \text{ J}$$

A negatív előjel megerősíti, hogy a munkát valamilyen külső erő végezte a gázon. Mivel a gáz hőmérséklete nem változott, belső energiája állandó maradt. Ahhoz, hogy a folyamat izotermikus maradjon, 98,3 J hőmennyiséget kell a gáznak átadni a hőtartálynak.



21-5 ábra
A hőmérséklet T_1-ről T_2-re való változtatásakor különböző utakon mehetünk. Mivel a görbe alatti terület a végzett munkát reprezentálja, az egyes utak eltérő W munkavégzést jelentenek. ΔU azonban mindegyikre azonos, így az I. főtétel ($\Delta U = Q - W$) alapján Q-nak is különbözőnek kell lenni minden útra.

Az ideális gáz fajhői

Mennyi hő szükséges ahhoz, hogy adott gázmennyiség hőmérsékletét T_k-ról T_V-re emeljük? A gáz mennyisége a mólszámmal mérhető. Foglalkozzunk most olyan reverzibilis folyamatokkal, amelyek csak infinitezimális hőmérséklet- és nyomáskülönbséggel járnak és az állapotegyenlet érvényes. Ahhoz, hogy hőmérsékletkülönbséget hozzunk létre, sokféleképpen juthatunk egyik izotermától a másikig, ahogyan ezt a 21-5 ábra mutatja. Valójában végtelen sok különböző út lehetséges. Mivel a ΔT hőmérsékletváltozás minden útra azonos, a ΔU *belső energia változása is azonos minden esetben.* De az I. főtétel, ($Q = \Delta U + W$) arra utal, hogy az egyes utakhoz szükséges Q hőmennyiség különböző, mert W (a görbe alatti terület) minden egyes útra más és más. Így az adott hőmérsékletkülönbség létrehozásához szükséges Q hőmennyiség nem adható meg egyértelműen.

E nehézség megoldására mindössze két olyan speciális útra határozzuk meg a fajhőt, ami gyakran fordul elő az egyes folyamatok során: az *állandó térfogaton* és az *állandó nyomáson* végbemenő változás alapján. A mólszám alkalmas a gázmennyiség mérésére, ezért bevezetjük a mólhőt:

C_V = moláris fajlagos hőmennyiség *állandó térfogaton*
C_p = moláris fajlagos hőmennyiség *állandó nyomáson*

A **moláris fajlagos hőmennyiséget (mólhőket)**[6] definiáló egyenletek:

MÓLHŐK, C_V ÉS C_p

$$Q = nC_V\Delta T \quad \text{(állandó térfogat)} \qquad (21\text{-}6)$$

$$Q = nC_p\Delta T \quad \text{(állandó nyomás)} \qquad (21\text{-}7)$$

ahol n a mólszám.

Izochor folyamat

A következőkben az állandó térfogaton végbemenő folyamatot tárgyaljuk, amit a 21-6 ábra mutat be. A térfogat nem változik, így $W = 0$ és az I. főtétel szerint:

$$\Delta U = Q - W$$
$$\Delta U = nC_V\Delta T - 0 \qquad (21\text{-}8)$$

Ez az egyenlet a ΔT hőmérsékletváltozáshoz tartozó belső energiaváltozást fejezi ki. Mivel az ideális gáz belső energiája *csak* a hőmérséklettől függ, azonos ΔT érték esetén ΔU értéke is azonos lesz, *tekintet nélkül a folyamatra.* Teljesen mindegy ebből a szempontból, hogy az adott hőmérsékletváltozás állandó térfogaton, állandó nyomáson, vagy bármilyen más folyamat során következik be. Ennélfogva az állandó nyomáson végbemenő térfogat- és hőmérsékletváltozásra, ahol a végzett munka $p\Delta V$, azt kapjuk, hogy

$$\Delta U = Q - W$$
$$nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - p\Delta V \qquad (21\text{-}9)$$

Az ideális gáz állapotegyenletéből (állandó nyomáson):

$$p\Delta V = nR\Delta T$$

A fenti két egyenletet összevetve a következő összefüggéshez jutunk:

A MÓLHŐK KÜLÖNBSÉGE

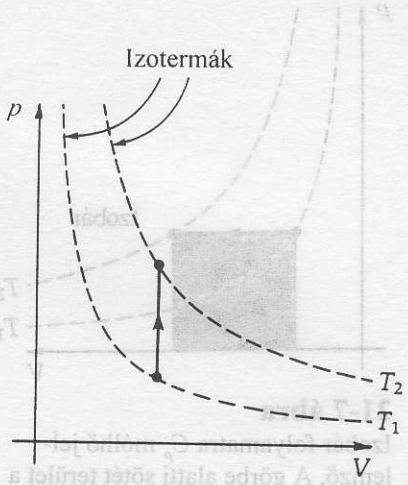
$$C_p - C_V = R \qquad (21\text{-}10)$$

Érthető, hogy C_p nagyobb, mint C_V. Amikor állandó nyomáson hőt közlünk a gázzal, akkor tágulási munkát kell végeznie, ami nagyobb energiát igényel az adott belső energiaváltozás létrehozásához. Ezzel szemben, ha állandó térfogaton közlünk hőt, a gáz nem végez munkát, így kevesebb hő szükséges az adott belső energiaváltozás eléréséhez.

Újra hangsúlyozzuk, hogy – az ideális gázzal végzett folyamat típusától függetlenül – a belső energia megváltozása $\Delta U = nC_V\Delta T$, *annak ellenére, hogy a folyamat esetleg nem állandó térfogaton megy végbe.* Így a mólhő állandó térfogaton:

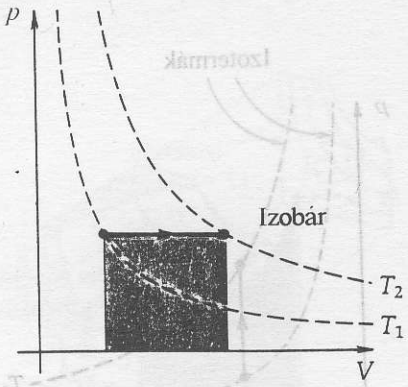
MÓLHŐ (állandó térfogaton)

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \qquad (21\text{-}11)$$



21-6 ábra
Izochor változás esetén C_V *mólhőt alkalmazunk.* A rendszer nem végez munkát a környezeten, mivel a dugattyú nem mozog. (A görbe alatti terület zérus.)

[6] Emlékeztetünk arra, hogy a szilárd és folyékony anyagok fajhőjét (c) $Q = mc\Delta T$ alapján definiáltuk. Ezekben az esetekben rendkívül nagy nyomás szükséges ahhoz, hogy megakadályozzuk a szilárd testek és folyadékok hőmérsékletnövekedés hatására bekövetkező térfogatnövekedését, így a kísérleti értékeket rendszerint állandó nyomáson (1 bar) mérik. Az egységnyi tömegre vonatkoztatott fajlagos hőtől (c) való megkülönböztetés érdekében az 1 mólra vonatkozó fajlagos hő jelölésére nagy C-t használunk.



21-7 ábra
Izobár folyamatra C_p mólhő jellemző. A görbe alatti sötét terület a rendszer által a környezeten végzett munkát reprezentálja. (Izobár kompresszió ellenkező irányban menne végbe, a görbe alatti terület ekkor a környezet által a gázon végzett munkát reprezentálná. Kompresszió esetén a W munka számértéke negatív, mivel a környezet végez munkát a rendszeren.)

Izobár tágulás

Ez egy olyan folyamat, aminél a nyomás állandó marad (ld. 21-7 ábra). Példánkban, ha fenn akarjuk tartani az állandó nyomást, miközben a dugattyú kifelé mozog, a gáz hőmérsékletét növelni kell. Ez nyilvánvaló a $pV = nRT$ állapotegyenletből. Adott gázmennyiség térfogata – állandó nyomáson – egyenesen arányos a hőmérsékletével. Mikroszkópikus skálán ez azt jelenti, hogy amennyiben a gáz nagyobb térfogatot vesz fel, a fallal történő molekuláris ütközések ritkábbak lesznek. s ez nyomáscsökkenést okoz. A hőmérséklet növelésével azonban növeljük a molekulák sebességét és így kompenzáljuk ezt a hatást.

A rendszer által a környezeten végzett W munka:

$$W = \int_{V_k}^{V_V} p\,dV = p\int_{V_k}^{V_V} dV = p(V_V - V_k) \qquad (21\text{-}12)$$

Mivel minden ΔT hőmérsékletváltozással járó folyamatra a belső energia megváltozása:

$$\Delta U = nC_V\Delta T \qquad (21\text{-}13)$$

az I. főtétel értelmében:

$$\Delta U = Q - W$$

IZOBÁR FOLYAMAT

$$nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - p(V_V - V_k) \qquad (21\text{-}14)$$

21-2 PÉLDA

Tegyük fel, hogy a 21-1 példában szereplő gázt (2 g kezdetben normál állapotú oxigént) izobár módon nyomtuk össze eredeti térfogatának felére. a) Mennyi munka szükséges az összenyomáshoz? b) Mekkora a hőmérsékletváltozás ebben a folyamatban?

MEGOLDÁS

a) A munka a 21-7 ábra vonalkázott területe. Mivel a nyomás állandó, így

$$W = \int_{V_k}^{V_V} p\,dV = p(V_V - V_k)$$

Mivel $V_V = V_k/2$

$$W = p\left(\frac{V_k}{2} - V_k\right) = -\frac{pV_k}{2}$$

Tehát meg kell határozni a 2 g normál állapotú oxigén kezdeti térfogatát. Az állapotegyenletből:

$$p_kV_k = nRT_k$$

$$V_k = \frac{nRT_k}{p_k}$$

Ezért

$$W = -\frac{pV_k}{2} = \frac{pnRT_k}{2p} = -\frac{\frac{2}{32}\,\text{mol}\cdot 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot 273K}{2} = -70{,}9\ \text{J}$$

A negatív előjel azt jelzi, hogy a munkát a környezet végezte a gázon.

b) A végső hőmérsékletet a (20-5) egyenlet felhasználásával a

$$\left(\frac{p_V}{p_k}\right)\left(\frac{V_V}{V_k}\right) = \left(\frac{n_V}{n_k}\right)\left(\frac{T_V}{T_k}\right)$$

összefüggésből kapjuk.

Mivel $p_V = p_k$ és $n_V = n_k$, a T_V hőmérséklet:

$$T_V = \frac{V_V}{V_k} T_k = \frac{1}{2} \times 273\ \text{K} = 137\ \text{K}$$

Adiabatikus folyamat

Ebben a folyamatban nincs sem hőközlés, sem hőelvonás. A már vizsgált példában tehát megszűntetjük a hőtartály és a henger érintkezését. (Gyakorlatilag valamilyen szigetelőanyaggal vesszük körül a készüléket, ilyen a parafa, az azbeszt, vagy a samott-tégla.) Mivel a hőáramlás viszonylag lassú folyamat, ha a folyamatot gyorsan hajtjuk végre, akkor az adiabatikus lesz. Például benzinmotor működésénél a sűrítési üzem a benzingőz és a levegő keverékének adiabatikus kompressziója. Hasonlóképpen a munkalöket során az égéstermékek kibocsátása a légkörbe adiabatikus tágulással történik. Adiabatikus folyamatok egyes esetei fordulnak elő természetszerüleg a földi légkörben. A meteorológiai folyamatokban sokszor olyan gyorsan megy végbe a levegő tágulása és összenyomódása, hogy nincs idő észrevehető hőáramlásra. Ráadásul a folyamatban részt vevő levegő térfogata ilyen esetben ténylegesen el van szigetelve a környezettől.

A következőkben néhány jellemző összefüggést vezetünk le az adiabatikus folyamatokra. Ha $Q = 0$, akkor az I. főtételt alkalmazva, ez adódik:

$$\Delta U = Q - W$$
$$U_V - U_k = 0 - W$$

Az egyenletet átrendezve azt látjuk, hogy a belső energia megváltozása ellentétes előjellel megegyezik a gáz által a környezeten végzett munkával:

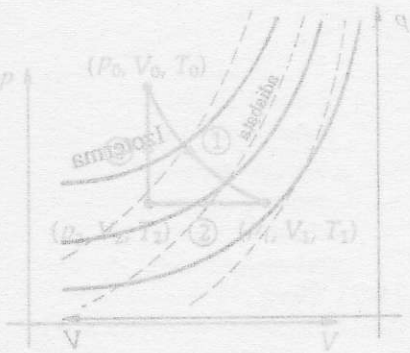
ADIABATIKUS FOLYAMAT

$$U_V - U_k = -W \qquad \textbf{(21-15)}$$

Összenyomásnál a munka számértéke *negatív*, így a belső energia növekszik ($U_V > U_k$); azaz a gáz felmelegszik. Táguláskor a W munka *pozitív* mennyiség, így a belső energia csökken, és a gáz lehűl. Mindez érthetőnek tűnik, ha átgondoljuk a folyamatokat a kinetikus gázmodell alapján is. Mikroszkópikus méretekben, amikor a gázatomok rugalmasan visszapattannak a közeledő dugattyúról, sebességük – a hőmérséklet és a belső energia növekedésének megfelelően – nő. Ha távolodó dugattyúról pattannak vissza, akkor valamit veszítenek sebességükből, és így alacsonyabb lesz a hőmérséklet és csökken a belső energia is.

További hasznos összefüggéshez jutunk, ha infinitezimális, reverzibilis adiabatikus folyamatot vizsgálunk. Az első főtétel differenciális alakja:

$$dU = \delta Q - \delta W$$
$$nC_V dT = 0 - \delta W \qquad \textbf{(21-16)}$$



Így az adiabatikus folyamat során végzett munka:

$$\delta W = -nC_V dT$$

Ezt integrálva:

ADIABATIKUS FOLYAMAT

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\kappa - 1} \qquad \textbf{(21-17)}$$

ahol $\kappa = C_p/C_V$. (ld. a 21C-23 feladatot!)

Ha a $pV = nRT$ egyenletből indulunk ki, további hasznos összefüggéseket kaphatunk:

$$p\,dV + V\,dp = nR\,dT$$

Megjegyezve, hogy $\delta W = pdV$, ezt az egyenletet egyesíthetjük a (21-16) egyenlettel dT kiküszöbölésére, majd $C_p - C_V = R$ helyettesítéssel – némi átrendezés és algebrai átalakítás után – azt kapjuk, hogy:

$$\frac{dp}{p} + \left(\frac{C_p}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = 0$$

A C_p/C_V mólhő arányt a κ szimbólummal jelölve és integrálva a fenti kifejezést, azt kapjuk hogy:

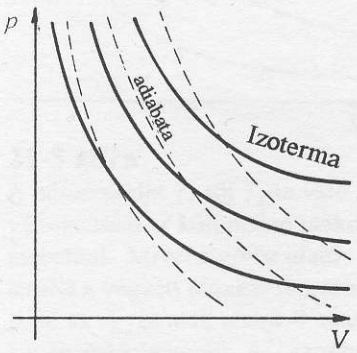
$$\ln p + \kappa \ln V = \text{konstans} \qquad \textbf{(21-18)}$$

ADIABATIKUS FOLYAMAT

$$\begin{cases} p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa} & \textbf{(21-19)} \\ \text{és} \quad T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1} & \textbf{(21-20)} \end{cases}$$

A második összefüggést úgy kapjuk, hogy – mivel pV/T = állandó, – a $p = T/V \cdot$ állandó kifejezést helyettesíthetjük a (21-19) egyenletbe, ebből adódik: $(T/V)V^{\kappa} = T \cdot V^{\kappa-1}$ = állandó (ez az állandó eltér a (21-18) egyenletben lévőtől). *Ügyeljünk arra, hogy az egyenletekben csak* V*-nek van hatványkitevője, és nem* (pV)*-nek vagy* (TV)*-nek*

Mivel $C_p > C_V$, a κ értéke mindig nagyobb, mint 1. Ez azt jelenti, hogy a p–V diagramon az adiabaták „meredekebbek", mint az izotermák (ld. 21-8 ábrát). Ez érthető, ha felidézzük, hogy az adiabatikus kompresszió során a gáz felmelegszik és így egy magasabb hőmérsékletű izotermára kerül.



21-8 ábra
Az adiabaták (szaggatott vonalak) „meredekebbek", mint az izotermák (folytonos vonalak).

21-3 PÉLDA

Vizsgáljuk meg újra a 21-1 példában szereplő (2g kezdetben normál állapotú) oxigén gázt . Ezt a gázmennyiséget adiabatikusan összenyomjuk eredeti térfogatának felére. Határozzuk meg a) a nyomás végső értékét (atm-ban) és b) a hőmérséklet végső értékét! A κ értéke 1,4 az O_2 gáz esetében.

MEGOLDÁS

a) Az adiabatikus folyamatra felírható, hogy $p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa}$. Ha a p_2 nyomást kifejezzük és a számértékeket behelyettesítjük[7], akkor

[7] Mivel a nyomás az egyenlet mindkét oldalán szerepel, mint szorzótényező, ezek mindegyikére azonos átváltási tényező érvényes. Tehát használhatunk „kevert" egységeket, - mint az atm és a m^3 - ahelyett, hogy mindenütt csak SI-egység szerepeljen.

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = 1\text{ atm}\left(\frac{2}{1}\right)^{1,4}$$

adódik: Ezt úgy számíthatjuk ki, hogy mindkét oldal logaritmusát vesszük:

$$1 \lg p_2 = 1{,}4 \lg 2 = 0{,}421$$

Innen $p_2 = 2{,}64$ atm

b) A hőmérsékletet megkaphatjuk a következő egyenletből:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Mivel $n_1 = n_2$ és $V_2/V_1 = 1/2$, azt kapjuk, hogy

$$T_2 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 V_1} = \frac{2{,}64\text{ atm}}{1\text{ atm}} \cdot \frac{1}{2} 273\text{ K} = 360\text{ K}$$

21-4 PÉLDA

Ebben a példában adott mennyiségű ideális gázzal végzünk körfolyamatot, melynek során a gázt visszavisszük kiindulási állapotába. Vizsgáljunk egy mól ideális gázt a következő szakaszokból álló reverzibilis folyamat során: ① Izotermikus expanzió p_0, V_0, T_0 értékekkel jellemzett állapotból a kétszeres térfogatig; ② állandó nyomású összenyomás az eredeti térfogatig; majd ③ állandó térfogatú melegítés az eredeti nyomásra. A 21-9 ábra vázolja a ciklust. Számoljuk ki mindhárom folyamatra a) a belső energia megváltozását, b) a gázzal közölt hőt és c) a gáz által végzett munkát! Határozzuk meg a teljes ciklusra d) az eredő belső energiaváltozást, e) a gáz munkáját és f) a gázzal közölt összes hőmennyiséget!

MEGOLDÁS

Ha figyelembe vesszük a 21-9 ábrát és alkalmazzuk az ideális gáz állapotegyenletét, akkor felírható, hogy

$$p_1 = p_2 = p_0/2;\ V_2 = V_0;\ V_1 = 2V_0 \text{ és } T_1 = T_0.$$

① **Izotermikus tágulás:**
Mivel a belső energia csak a hőmérséklettől függ és $\Delta T = 0$,

$$\Delta U_1 = 0$$

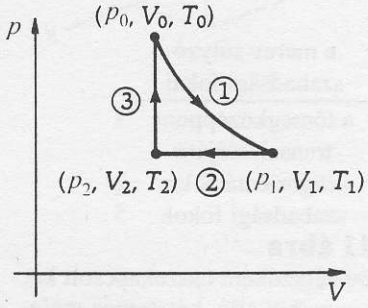
A gáz altal végzett W_1 munkát a (21-5) egyenlet adja:

$$W_1 = nRT_0 \ln\frac{V_1}{V_0}$$

$$W_1 = RT_0 \ln 2$$

Az első főtétel alapján $\Delta U = Q - W$
Mivel $\Delta U = 0$, a közölt hő (Q_1):

$$Q_1 = W_1 = RT_0 \ln 2$$



21-9 ábra
A 21-4 példához.

② **Izobár összenyomás:**

A gáz által végzett W_2 munka

$$W_2 = \int p\,dV = \int_{2V_0}^{V_0} \frac{p_0}{2} dV = \frac{p_0}{2}(V_0 - 2V_0) = \frac{p_0 V_0}{2} = -\frac{RT_0}{2}$$

A kompresszió során a gázzal közölt (Q_2) hő a (21-7) egyenletből adódik:

$$Q_2 = nC_p\Delta T = 1C_p\Delta T = C_p(T_2 - T_0)$$

ahol T_2 értékét a következő egyenletből számíthatjuk ki:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

Mivel $n_1 = n_2$,

$$T_2 = T_0 \frac{\frac{p_0}{2} V_0}{p_0 V_0} = \frac{T_0}{2}$$

Így

$$Q_2 = -\frac{C_p T_0}{2}$$

Az első főtétel alapján ΔU_2, a belső energia megváltozása:

$$\Delta U_2 = Q_2 - W_2 = -\frac{C_p T_0}{2} + \frac{RT_0}{2} = \frac{T_0}{2}(R - C_p) = -\frac{T_0}{2} C_V$$

③ **Izochor melegítés:**

Mivel a térfogat nem változik,

$$W_3 = 0$$

Ezen változás során a gázzal közölt hő (Q_3):

$$Q_3 = nC_V\Delta T = 1C_V\Delta T = C_V\left(T_0 - \frac{T_0}{2}\right) = \frac{T_0}{2} C_V$$

A ΔU_3 belső energiaváltozást az I. főtételből kapjuk:

$$\Delta U_3 = Q_3 - W_3 = \frac{T_0 C_V}{2}$$

d) Az eredő belső energia megváltozását a teljes körfolyamatra úgy kapjuk, hogy összeadjuk az egyes részfolyamatokra kapott változásokat:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3$$

$$\Delta U = 0 + \frac{T_0}{2}(R - C_p) + \frac{T_0}{2} C_V = \frac{T_0}{2}\left[R - (C_p - C_V)\right] = 0$$

Azt, hogy nincs eredő belső energiaváltozás, előre megmondhattuk volna abból a tényből, hogy a körfolyamatra vonatkozó kezdeti és végső hőmérséklet azonos, mivel a gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ.

e) A gáz munkáját a teljes körfolyamatra az egyes szakaszokon végzett munkák összegezéséből kapjuk, azaz

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W = RT_0 \ln 2 + \left(-\frac{RT_0}{2}\right) + 0 = RT_0\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$W = 0{,}193\, RT_0$

Figyeljük meg, hogy a munka pozitív mennyiség, igazolva azt, hogy a gáz végzett munkát a környezeten.

f) A teljes körfolyamat során a gázzal közölt hő:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = RT_0 \ln 2 - \frac{T_0}{2} C_p + \frac{T_0}{2} C_V = RT_0 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$Q = 0{,}193\, RT_0$$

Ez a példa megerősíti az I. főtételt ($\Delta U = Q - W$) a körfolyamatra, ahol $\Delta U = 0$.

21-1 TÁBLÁZAT Ideális gázra vonatkozó termodinamikai összefüggések összefoglalása

Ideális gáz állapotegyenlete: $pV = nRT$

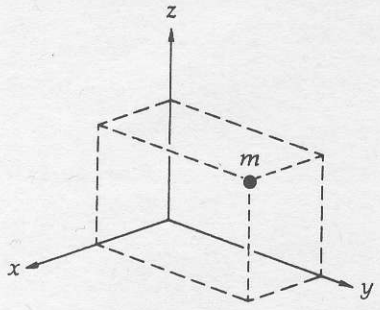
Ugyanaz, két különböző egyensúlyi állapotra: $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$

A termodinamika I. főtétele: $\Delta U = Q - W$

Folyamat	Q	ΔU	W
Izotermikus $\Delta T = 0$ $(\Delta U = 0)$	$nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$	0	(egyenlő a Q-val)
Izochor $\Delta V = 0$ $(W = 0)$	$nC_V \Delta T$	$nC_V \Delta T$	0
Izobár $\Delta p = 0$	$nC_p \Delta T$	$nC_V \Delta T$	$p \Delta V$
Adiabatikus $Q = 0$ $p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$ $T_1 V_1^{\kappa - 1} = T_2 V_2^{\kappa - 1}$	0	$nC_V \Delta T$	$\int_{V_1}^{V_2} p\, dV = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\kappa - 1}$

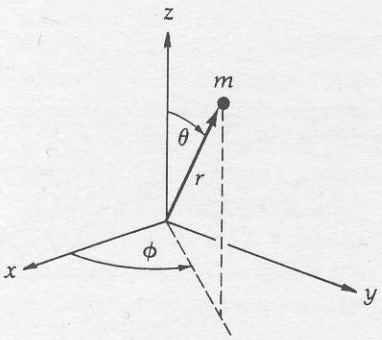
Megjegyzés: Ezekben a kifejezésekben feltételezzük, hogy a C_p és C_V mólhők állandók; $R = C_p - C_V$. A mólhők aránya: $\kappa = C_p / C_V$.

A 21-1 táblázat összefoglalja az első főtétel alkalmazását a most tárgyalt reverzibilis folyamatokra. Jegyezzük meg, hogy bármilyen folyamattal történjék is a hőmérséklet megváltozása, a belső energiaváltozás mindig $\Delta U = nC_V \Delta T$.



x, y, z } 3 paraméter

derékszögű koordináták

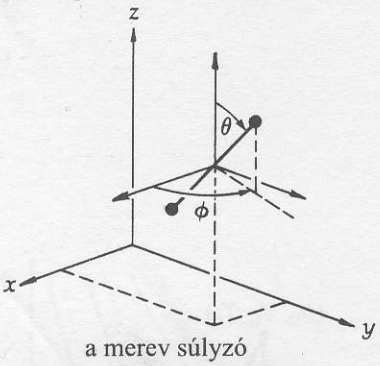


r, θ, ϕ } 3 paraméter

gömbi polárkoordináták

21-10 ábra

Az m tömegű tömegpont szabadon mozoghat három dimenzióban. Térbeli helyzetének leírásához, az alkalmazott koordinátarendszer típusától függetlenül, három paraméter szükséges.



a merev súlyzó szabadsági fokai	
a tömegközéppont transzlációjára	3
szögorientációkra	2
szabadsági fokok	5

21-11 ábra

Merev súlyzóként összekapcsolt két tömegpontból álló, kétatomos molekula. Ha a tömegek valóban elhanyagolható kiterjedésű pontok, akkor a tömegpontokat összekötő tengely körüli forgás nem definiálható.

21.6 Szabadsági fokok és az ekvipartíció tétele

A kinetikus elmélet alapján megállapítható fontos összefüggés a rendszer belső energiája és a rendszert alkotó részecskék kinetikus energiája közötti kapcsolat. A továbbiakban olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek nem tömegpontokból, hanem sokkal bonyolultabb részecskékből állnak: ezek kétatomos, illetve háromatomos molekulák. Megmutatjuk, hogy a belső energia most nemcsak a mozgás kinetikus energiáját tartalmazza, hanem a molekuláris deformációkkal kapcsolatos potenciális energiákat is. Összpontosítsuk figyelmünket először arra, hogy egyetlen részecske teljes energiájának leírásához hány változóra van szükség.

Egy tömegpont mozgása

Vizsgáljunk meg az ideális gáz kinetikus modelljében szereplő atomok közül egyet. Ez az egyetlen tömegpontnak tekinthető részecske a 21-10 ábrán látható módon háromdimenziós mozgást végez. Az egyetlen energiafélesség, amivel rendelkezhet, a transzlációs mozgás következtében fellépő kinetikus energia.[8] A teljes energia a sebességkomponensekkel kifejezve:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \qquad \textbf{(21-21)}$$

Az energia felírásához **három változó** szükséges: v_x, v_y, és v_z, a három koordinátatengelynek megfelelően. Ha a rendszer N tömegpontot tartalmaz, – amelyek mindegyike egymástól függetlenül mozog – akkor $3N$ változó szükséges a teljes energia felírásához.

A merev súlyzó

A kétatomos gáz molekuláját az ún. „súlyzó"-modellel szemléltethetjük, amelyben két tömegpontot *merev* rúd kapcsol össze (21-11 ábrán). Hány változó szükséges ahhoz, hogy leírjuk ennek a merev súlyzónak az energiáját? Először is a molekula a térben haladó mozgást végezhet, ami a transzlációs kinetikus energia meghatározására három tagot szolgáltat. Ha a molekula tömege $M = m + m$, akkor ezek a tagok a következők: $\frac{1}{2}Mv_x^2$, $\frac{1}{2}Mv_y^2$, $\frac{1}{2}Mv_z^2$ Ezen kívül azonban a molekula foroghat is a tömegközéppontja körül. Hány további tag szükséges ezen forgási energia meghatározásához? Egy egyenes térbeli irányának leírásához két paraméter szükséges: a θ és a ϕ szög. E két szöggel meghatározott irány mindegyikéhez kapcsolódik egy lehetséges forgó mozgás. Ha az ezekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok I_θ, illetve I_ϕ, a súlyzónak a θ szöggel kapcsolatos forgási energiája $\frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2$, a ϕ koordinátával kapcsolatos forgási energiája $\frac{1}{2}I_\phi\omega_\phi^2$. (Mivel tényleges pontszerű tömegeket tételezünk fel, a súlyzónak a tömegeket összekötő egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka zérus, így az e tengely körüli forgással nem kell foglalkoznunk.) A merev súlyzó teljes energiája tehát:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}Mv_y^2 + \frac{1}{2}Mv_z^2}_{\text{transzláció}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2 + \frac{1}{2}I_\phi\omega_\phi^2}_{\text{rotáció}}$$

[8] Mint általában, ezekben a példákban sem foglalkozunk a gravitációs potenciális energiával.

A teljes energia meghatározásához **öt változó** szükséges: v_x, v_y, v_z ω_θ *és* ω_ϕ. Ha egy rendszer N molekulából áll, amelyek mindegyike egymástól függetlenül mozog, $5N$ változóra van szükségünk a teljes energia felírásához.

A rezgő súlyzó

Módosítsuk a merev súlyzómodellt, hogy még inkább közeledjünk a valósághoz, figyelembe véve, hogy a valódi kétatomos molekulák a két atomot összekötő egyenes mentén rezgőmozgást is végeznek (ld. a 21-12 ábrát!). Tegyük fel, hogy ez harmonikus rezgő mozgás. Lennie kell tehát valamilyen effektív D direkciós erőnek. Az ilyen tipusú harmonikus rezgés teljes energiája:

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{x'}^2 + \frac{1}{2}Dx'^2 \qquad \text{(csak harmonikus rezgésekre)} \qquad \textbf{(21-22)}$$

ahol μ a két tömegpontból álló rendszer „*redukált tömege*"[9] és x' az atomok közötti távolság. Látható tehát, hogy az energia meghatározásához két további $v_{x'}$ és x' paraméter szükséges, amelyek a harmonikus rezgés mozgási és potenciális energiájával kapcsolatosak. Tehát a teljes energia:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}Mv_y^2 + \frac{1}{2}Mv_z^2}_{\text{transzláció}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2 + \frac{1}{2}I_\phi\omega_\phi^2}_{\text{rotáció}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_{x'}^2 + \frac{1}{2}Dx'^2}_{\text{vibráció}}$$

A teljes energia kifejezéséhez ekkor **hét változót** kell meghatározni, ezek: v_x, v_y, v_z, ω_θ, ω_ϕ, $v_{x'}$ *és* x'. Ha a rendszer N ilyen molekulából áll, akkor a változók száma $7N$.

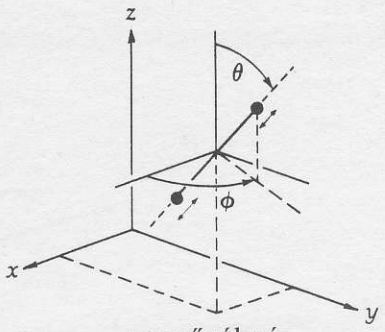
Összefoglalva, ha egy rendszer N részecskét tartalmaz, akkor az *egyatomos* gáz teljes energiájának meghatározásához $3N$ változó, a *merev kétatomos* molekulákból álló rendszernél $5N$ változó, *kétatomos, rezgő molekulákból* álló rendszernél pedig $7N$ változó szükséges.

Miért fontos ez a megállapítás? Azért, mert az energia meghatározásához szükséges változók száma nélkülözhetetlen az **energia ekvipartíciójaként** ismert elméleti tétel kimondásához. Ezt a tételt először James Clerk Maxwell javasolta, statisztikai megfontolások alapján. A tétel csak klasszikus részecskékre érvényes, vagyis azokra, amelyek a newtoni mechanika szerint viselkednek. A tétel kimondja, hogy:

EKVIPARTÍCIÓ TÉTELE **Egy részecskerendszer teljes energiájának meghatározásához szükséges változók mindegyikéhez 1/2 kT átlagenergia tartozik.**

Ez azt jelenti, hogy a rendszer összes energiája *egyenletesen* oszlik el a rendszer energiatárolási lehetőségei között. Az energiatárolás független lehetőségeinek számát **szabadsági fokoknak** is nevezzük.

Mennyire áll összhangban ez az elv a kísérleti eredményekkel? Ennek egyik közvetlen próbája a gázok mólhőinek kísérleti vizsgálata. Az elméleti értéket a következőképpen határozhatjuk meg. Láttuk, hogy 1 mól egyatomos gáz teljes energiájának meghatározásához $3N_A$ változó szükséges (N_A az Avogadro-szám). Tehát a belső energia az ekvipartíció tétel szerint $U = 3N_A\frac{1}{2}kT$. Mivel $N_Ak = R$, (ld. 20. fejezetet)



a rezgő súlyzó

szabadsági fokok száma	
a tömegközéppont transzlációjára	3
szögorientációkra	2
a harmonikus rezgésekre	2
szabadsági fokok	7

21-12 ábra
Olyan kétatomos molekula energiájának megadásához, amely a két tömegpontot összekötő egyenes mentén harmonikus rezgéseket is végezhet, hét szabadsági fok szükséges.

[9] Az ilyen típusú két tömegpontból álló rezgő rendszer „redukált tömege": $\mu = m_1 m_2 / m_1+m_2$. Ebből a jelölésből származik a kinetikus energiára vonatkozó ismert alakú kifejezés: $E_k = \frac{1}{2}\mu v^2$, ahol v az egyik tömegnek a másikhoz viszonyított sebessége.

$$U = \frac{3}{2}RT \qquad \text{(1 mól egyatomos gázra)} \qquad \textbf{(21-23)}$$

A (21-13) egyenlet differenciális alakjából

$$dU = nC_V dT$$

és a

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$$

összefüggésből a mólhőre

$$C_V = \frac{1}{1}\frac{d}{dT}\left(\frac{3}{2}RT\right) = \frac{3}{2}R$$

adódik.

A szakirodalomban megadott mólhők értékei rendszerint állandó nyomásra vonatkoznak:

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R = 20{,}8\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \qquad \text{(egyatomos gáz: tömegpontok)} \qquad \textbf{(21-24)}$$

A rezgés nélküli kétatomos molekulák esetén két további, a forgási energiára vonatkozó változó járul az eddigiekhez, és így

$$C_p = \frac{7}{2}R = 29{,}1\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \qquad \text{(kétatomos molekula: rezgés nélkül)} \qquad \textbf{(21-25)}$$

Harmonikus rezgést végző molekulák esetén további két szabadsági fokot is figyelembe kell vennünk és a mólhőre

$$C_p = \frac{9}{2}R = 37{,}4\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \qquad \text{(kétatomos molekula: rezgéssel)} \qquad \textbf{(21-26)}$$

adódik.

Többatomos – rezgés nélküli – molekula esetén a szabadsági fokok száma a kétatomos esethez képest eggyel nő, mert a korábban elhanyagolt, harmadik tengely körüli forgást is számításba kell venni. Így:

$$C_p = \frac{8}{2}R = 33{,}2\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \qquad \text{(többatomos molekula: rezgés nélkül)} \qquad \textbf{(21-27)}$$

A különféle többatomos molekulára vonatkozó rezgési módok igen bonyolultak. Mivel ezekben az esetekben nagyon gyenge az egyezés az elméleti és a kísérleti eredmények között, ezért nem adunk meg numerikus értékeket. Mindazonáltal az világos, hogy ha sok rezgési mód lehetséges, akkor C_p értéke nő.

Előre meghatározhatjuk κ értékét is. Egyatomos gáz esetében:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} = 1{,}67 \qquad \text{(egyatomos gáz)}$$

Rezgés nélküli kétatomos gáz esetében:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad \text{(kétatomos gáz: nincs rezgés)}$$

Kétatomos gázra rezgések esetén:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{9}{2}R}{\frac{7}{2}R} = \frac{9}{7} = 1{,}29 \qquad \text{(kétatomos gáz: harmonikus rezgéssel)}$$

Többatomos gáz esetében rezgés néllkül:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{8}{2}R}{\frac{6}{2}R} = \frac{8}{6} = 1{,}33 \qquad \text{(többatomos gáz: rezgés nélkül)}$$

Valamivel kisebb az érték, ha rezgéseket is figyelembe veszünk.

21-5 PÉLDA

Egy gázkeverék 1 mól oxigént (O_2) és 3 mól argont (Ar) tartalmaz. Határozzuk meg az állandó térfogathoz tartozó mólhőt, ha feltételezzük, a hőmérséklet elég alacsony ahhoz, hogy az oxigén molekulák ne végezzenek rezgéseket.

MEGOLDÁS

A kétatomos oxigénmolekulának 5 szabadsági foka van (ha nincs rezgés), így az O_2 molekulák teljes belső energiája:

$$U_{O_2} = n\frac{5}{2}RT = 1\ \text{mol} \cdot \frac{5}{2}RT = \frac{5}{2}RT$$

Az egyatomos argonmolekulákra a szabadsági fokok száma 3, így az argonmolekulák teljes belső energiája:

$$U_{Ar} = n\frac{3}{2}RT = 3\ \text{mol} \cdot \frac{3}{2}RT = \frac{9}{2}RT$$

A gázkeverék teljes belső energiája:

$$U = U_{O_2} + U_{Ar} = \frac{5}{2}RT + \frac{9}{2}RT = 7RT$$

Tehát $$C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = \frac{1}{4\ \text{mol}}\frac{d(7RT)}{dT} = \frac{7}{4}R$$

A 21-2 táblázatban a számított értékeket összevetjük néhány kísérleti adattal. Látható, hogy az egyezés egyatomos gázokra kitűnő. A kétatomos gázok viszont rejtélyesek, mivel az adatok arra utalnak, hogy a rezgési szabadsági fokokon lényegében nem tárolódik energia. Az egyezés hiánya még inkább megfigyelhető a többatomos gázoknál. Talán túlságosan leegyszerűsítettük a modellt azzal, hogy tömegpontokat és tiszta harmonikus rezgéseket

vettünk figyelembe. Vagy talán túlmentünk a klasszikus elmélet érvényességi határán? Mint azt a következőkben látni fogjuk, ezek az adatok olyan hatásokat tárnak fel, amelyek a kvantumos jelenségekben gyökereznek, és ezt a newtoni mechanika nem képes megmagyarázni.

21-2 TÁBLÁZAT Gázok mólhőinek elméleti és kísérleti értékei 10^5Pa nyomáson és ~300 K hőmérsékleten*.

		$C_p\left[\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\right]$		$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$	
Gáz fajtája	**Gáz**	**Kísérleti**	**Elméleti**	**Kísérleti**	**Elméleti**
Egyatomos	He	20,8	20,8	1,66	1,67
	Ar	20,7	20,8	1,67	1,67
Kétatomos	H_2	28,8	29,1	1,41	1,40
	O_2	29,3	nincs rezgés	1,40	nincs rezgés
	NO	29,3	37,4	1,40	1,29
	Cl_2	34,1	rezgéssel	1,36	rezgéssel
Többatomos	CO_2	36,6	33,2	1,32	1,33
	SO_2	40,7	nincs rezgés	1,29	nincs rezgés
	CCl_4	74,0	rezgéssel	1,13	rezgéssel
	C_2H_6	48,5	magasabb	1,20	alacsonyabb

* Az adatok különböző hőmérsékletekre vonatkoznak, de minden hőmérséklet 15°C és 25°C közötti érték.

21.7 Vezérfonal egy helyes elmélet megalapozásához

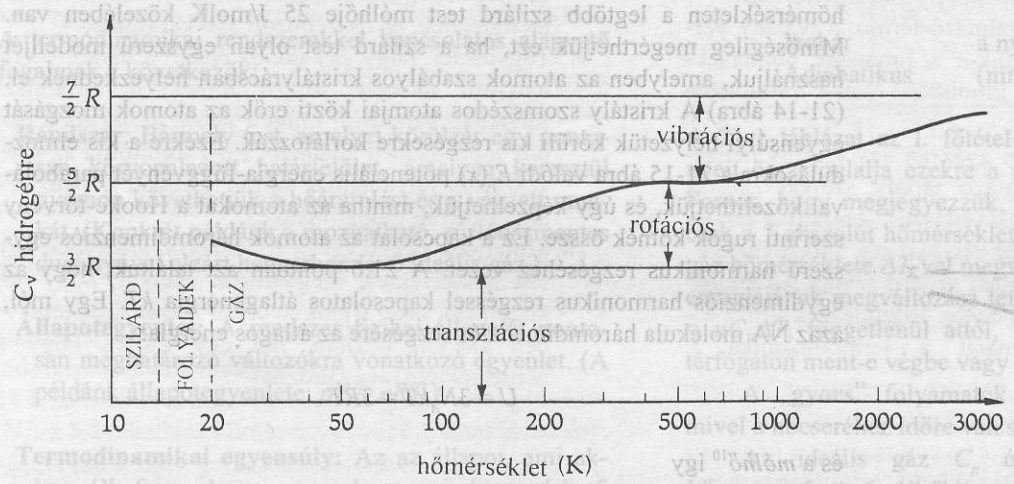
Ha a gázok mólhőit széles hőmérsékleti tartományban vizsgáljuk, érdekes irányvonalat figyelhetünk meg. A 21-13 ábra a C_V alakulását mutatja hidrogénre vonatkozóan. A görbéből kitűnik, hogy a hőmérséklet csökkenésével, bizonyos szabadsági fokok már nem vesznek részt az energiának az ekvipartíció tétele által megkövetelt egyenletes tárolásában. A klasszikus statisztikus mechanika nem tudja az okát az egyes szabadsági fokok ilyen „befagyásának". A klasszikus elmélet szerint a fajhőnek függetlennek kellene lennie a hőmérséklettől.

A klasszikustól eltérő viselkedés oka egészen az 1910-es évekig titokzatos maradt, amikor is a kvantummechanika fejlődése éppen az ilyen jelenséget tudta megmagyarázni. Bár a kvantummechanika tárgyalását későbbre kell halasztanunk, már most megadhatjuk a magyarázatát annak, hogy miért válnak bizonyos szabadsági fokok hatástalanná az energiatárolás szempontjából. Az indoklás lényege egy fontos feltevésben rejlik, amit Max Planck tett 1899-ben (ezt később Niels Bohr és mások módosították):

PLANCK KVANTUM HIPOTÉZISE **Egy oszcillátor nem rendelkezhet bármekkora energiával, csak a *hf* alapvető energiaegység egész számú többszörösével, azaz**

$$E = nhf \qquad (21\text{-}28)$$

ahol *n* egész szám, *h* a Planck-állandó és *f* a frekvencia. Az energia *kvantált*.

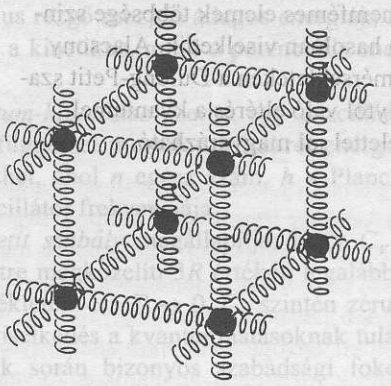


21-13 ábra

A hidrogén C_V mólhőjének változása a hőmérséklet függvényében. (Figyeljünk a logaritmikus skálára!) A hőmérséklet növekedésével az egy szabadsági fokra jutó átlagenergia is elegendően nagy lesz ahhoz, hogy a molekulákat a rotációs, ill. vibrációs módozatoknak megfelelő első gerjesztett (kvantált) energiaállapotokba emelje. Még magasabb hőmérsékleteken az atomokon belüli belső energia-szintek további szabadsági fokok figyelembevételét teszik szükségessé. Néhány ezer kelvin hőmérsékleten a molekulák általában egyatomos gázzá disszociálnak.

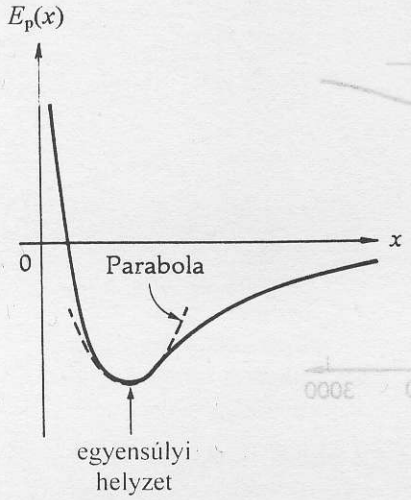
A kétatomos H_2 molekula mind a rotációs, mind a vibrációs mozgásokra meghatározott, kvantált energiaállapotokkal rendelkezik. 293 K körüli hőmérsékleten (szobahőmérséklet) az átlagos transzlációs kinetikus energia kb. $6 \cdot 10^{21}$ J. Számos rotációs energiaállapot ennél lényegesen alacsonyabb energiájú, így a véletlenszerű ütközések eredményeként a molekula ezeknek az állapotoknak egyikében vagy másikában forgásba jön, tehát az energiatárolás rotációs módozatai lényegesek. A vibrációs mozgással kapcsolatos energiában azonban az első „kvantum-ugrás" kb.10-szer nagyobb, mint az átlagos transzlációs energia. Ezért csak elhanyagolható számú molekula tehet szert a véletlenszerű ütközések során elegendő energiára ahhoz, hogy egy vibrációs energiaállapotot elérjen. Ez az oka, hogy a harmonikus rezgéssel kapcsolatos két szabadsági fok néhány ezer kelvin alatt ténylegesen „befagy". 300 K körüli érték alatt pedig már a rotációs módozatok is „befagynak". Ez bizony különös dolog. Ha klasszikusan gondolkodunk, észszerűnek tűnik, hogy egy gáz kétatomos molekulái képesek legyenek szabadon forogni, amikor keresztül haladnak az üres téren. A kvantummechanika elmélete mégis arra utal, hogy ha a hőmérséklet elég alacsony, akkor ez nem így van. A molekulák haladó mozgást végeznek, de nem forognak.

Általában, a hőmérséklet növelésével az egy szabadsági fokra jutó átlagos energia elég nagy lesz ahhoz, hogy sok molekulát magasabb rotációs és vibrációs energiaállapotra gerjesszen. Ennélfogva a teljes belső energiának csak kisebb része jut a hőmérséklettel kapcsolatos transzlációs kinetikus energiára. Ezért a legtöbb anyag mólhője a hőmérséklet emelkedésével növekszik, mivel a „befagyott" szabadsági fokok „felolvadnak". (Emlékeztetünk rá, hogy a hőmérséklet csak a transzlációs kinetikus energiával arányos.)



21-14 ábra

Köbös kristály egyszerű modellje, ahol a szomszéd atomok közötti erőhatásokat a Hooke-törvény szerinti rugókkal szemléltetjük, ami azt eredményezi, hogy az atomok háromdimenziós rezgő mozgást végeznek.



21-15 ábra
Kristályban lévő atom $E_p(x)$ potenciális energiája. Az egyensúlyi helyzet körüli kis kitérésekre a „potenciálgödör" jól közelíthető parabolával, ami harmonikus rezgéseket eredményez.

21.8 Szilárd testek fajlagos hőkapacitása

1819-ben Dulong és Petit azt észlelte, hogy, legalábbis magasabb hőmérsékleten a legtöbb szilárd test mólhője 25 J/molK közelében van. Minőségileg megérthetjük ezt, ha a szilárd test olyan egyszerű modelljét használjuk, amelyben az atomok szabályos kristályrácsban helyezkednek el. (21-14 ábra) A kristály szomszédos atomjai közti erők az atomok mozgását egyensúlyi helyzetük körüli kis rezgésekre korlátozzák. Ezekre a kis elmozdulásokra a 21-15 ábra valódi $E_p(x)$ potenciális energia-függvényét parabolával közelíthetjük, és úgy képzelhetjük, mintha az atomokat a Hooke-törvény szerinti rugók kötnék össze. Ez a kapcsolat az atomok háromdimenziós egyszerű harmonikus rezgéséhez vezet. A 21.6 pontban azt találtuk, hogy az egydimenziós harmonikus rezgéssel kapcsolatos átlagenergia kT. Egy mól, azaz NA molekula háromdimenziós rezgésére az átlagos energia:

$$U = 3N_A kT = 3RT$$

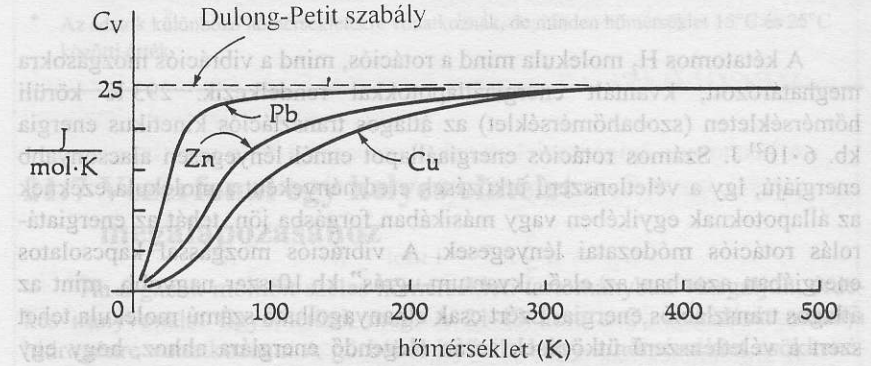
és a *mólhő*[10] így

$$C_V = dU/dT = 3R.$$

DULONG-PETIT SZABÁLY

$$C_V = 3\text{R} = 3 \cdot 8{,}314 \text{ J/mol K} = 24{,}9 \text{ J/mol K} \quad \textbf{(21-29)}$$

Ez az eredmény független az atomok tömegétől, a rugóállandótól és a kristályrács konkrét konfigurációjától. Az egyetlen lényeges feltétel az, hogy az atomok háromdimenziós harmonikus rezgést végezzenek.



21-16 ábra
Három jellegzetes fém mólhője. A nemfémes elemek többsége szintén hasolóan viselkedik. Alacsony hőmérsékleteken a Dulong-Petit szabálytól való eltérés a kvantumelmélettel jól magyarázható.

Alacsony hőmérsékleten, amint azt a 21-16 ábra illusztrálja, a tényleges fajhő jelentősen eltér az elméleti értéktől. Einstein volt az első 1917-ben, aki egy javított elméleti kifejezést vezetett le, a kvantumfizika akkor új elveinek felhasználásával. Ez pontosabban adott számot a mólhő alacsony hőmérsékleten megfigyelt viselkedéséről.[11] Amint azt az előző fejezetben tárgyaltuk, a harmonikus rezgéssel kapcsolatos szabadsági fokok „befagynak", ha a hőmérséklet csökken. Ezt figyelembe véve a kvantumelmélet a fajhőre jó közelítéssel a kísérletileg megfigyelt adatokat adja.

---

10 Mivel a szilárd testek térfogata melegítés hatására csak kis mértékben változik, szilárd test esetében a C_p és C_V közti különbség meglehetősen kicsi. Gyakorlatilag a szilárd testek térfogatát melegítés közben nehéz állandó értéken tartani, így rendszerint C_p-t mérik, és kis korrekciót végeznek C_V kiszámításához.

11 Ugyanezzel a problémával foglalkozó későbbi munkájára vonatkozóan Einstein ezt írta egy barátjának 1912-ben: „Az utóbbi napokban megfogalmaztam egy elméletet ebben a témában. Az elmélet túl merész szó – ez csak tapogatózás, korrekt alapozás nélkül. Minél sikeresebb a kvantummechanika, annál ostobábbnak látszik. Hogy gúnyolódnának a nemfizikusok, ha képesek lennének követni a fejlődés szokatlan útját."

Összefoglalás

A termodinamikai rendszerekkel kapcsolatos alapvető fogalmak a következők:

Rendszer: Bármely test, amelyet körülzár egy pontosan körvonalazott határfelület, amelyen keresztül nyomon követhetjük a hőáramlást és a végzett munkát. (Konkrét példánk a mozgatható, súrlódásmentes dugattyúval elzárt hengerben lévő ideális gáz.)

Állapotegyenlet: A rendszer fizikai állapotát pontosan meghatározó változókra vonatkozó egyenlet. (A példánk állapotegyenlete: $pV = nRT$.)

Termodinamikai egyensúly: Az az állapot, ami akkor áll fenn, ha egy rendszer minden mérhető jellemzője – mint pl. p, V és T – a rendszerben mindenütt azonos és nem változik az időben.

A termodinamika nulladik főtétele: Ha két rendszer mindegyike termikus egyensúlyban van egy harmadikkal – ami lehet pl. egy hőmérő – akkor a két rendszer egymással termikus egyensúlyban van.

Folyamat: Azok a változások, amelyek egy rendszer egyik állapotból a másikba való átmenete során bekövetkeznek. Ha az energiaáramlás iránya egy állapotjelző infinitezimális megváltoztatásával megfordítható, akkor a folyamat reverzibilis. Ha az állapotjelzők véges megváltoztatása szükséges ehhez, akkor a folyamat irreverzibilis.

A termodinamika I. főtétele: $\Delta U = Q - W$, ahol Q a rendszerrel közölt hő, $\Delta U\ (= U_v - U_k)$ a rendszer belső energiájának megváltozása és W a rendszer által a környezeten végzett munka. (Ha az energiaáramlás iránya ellentétes, a számérték negatív. Magában az I. főtétel általános felírásában az előjeleket soha nem kell megváltoztatni.)

Az I. főtételt egy **ideális gázrendszer** néhány reverzibilis folyamatára alkalmaztuk:

Izotermikus	a hőmérséklet állandó
Izochor	a térfogat állandó
Izobár	a nyomás állandó
Adiabatikus	(nincs hőcsere)

A 21-1 táblázat az I. főtétel alkalmazásának eredményeit összefoglalja ezekre a reverzibilis folyamatokra. Fontos, hogy megjegyezzük, hogy az U belső energia csak a T abszolút hőmérséklet függvénye. Ha az ideális gáz hőmérséklete ΔT-vel megváltozik, akkor a gáz belső energiájának megváltozása tetszőleges folyamatban $\Delta U = nC_V\Delta T$, függetlenül attól, hogy a folyamat állandó térfogaton ment-e végbe vagy nem.

A „**gyors**" folyamatok általában adiabatikusak, mivel a hőcseréhez időre van szükség.

Az ideális gáz C_p és C_V *moláris fajlagos hőmennyiségei* (mólhők), a következő kapcsolatban vannak az *univerzális gázállandóval:*

$$C_p - C_V = R$$

Minden folyamatra felírható: $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$

Adiabatikus folyamatokra:

$$p_k V_k^{\kappa} = p_V V_V^{\kappa} \quad (\text{ahol } \kappa = C_p/C_V)$$

és $$T_k V_k^{\kappa-1} = T_V V_V^{\kappa-1}$$

Az *ekvipartíció tétel* kimondja, hogy egy részecskerendszer teljes energiájának meghatározásához szükséges minden egyes változóra, azaz a rendszer minden szabadsági fokára 1/2 kT átlagenergia jut. Így az egydimenziós harmonikus rezgő mozgás átlagos energiája kT (azaz 1/2 kT mind a kinetikus, mind a potenciális energiára).

Planck kvantum-hipotézise szerint egy oszcillátor az $E = nhf$ összefüggéssel megadott, diszkrét energiaértékkel rendelkezhet, ahol n egész szám, h a Planck-állandó és f az oszcillátor frekvenciája.

A *Dulong-Petit szabály* megállapítja, hogy C_V a legtöbb szilárd testre megközelíti $3R$ értékét, legalábbis magasabb hőmérsékleten. Ha $T \to 0$, C_V szintén zérushoz közelít, ez a viselkedés a kvantumhatásoknak tulajdonítható, amelyek során bizonyos szabadsági fokok „befagynak" és nem vesznek részt az energiatárolásban.

Kérdések

1. Mi történik végül a taps hangjában lévő energiával? Honnan ered ez az energia?
2. Meg lehet-e mondani, hogy egy rendszer belső energiájának növekedése a rendszeren végzett munkából, vagy a közölt hőből származik?
3. Sivatagi utazók gyakran használnak vászon víztömlőket. Miért hűti ez a tömlő a vizet jobban, mint mondjuk egy fémtartály?
4. Átalakítható-e a termikus energia teljes egészében munkává? Átalakulhat-e adott mennnyiségű munka teljes egészében hővé?

5. Amikor egy gáz adiabatikusan tágul, munkát végez a környezetén, mert változik a térfogata. Mi biztosítja ehhez a munkához az energiaforrást?
6. Hideg limonádét tartalmazó termoszt néhány percig rázunk. Emelkedik-e a limonádé hőmérséklete? Felvett-e hőt a limonádé? Nőtt-e a limonádé belső energiája?
7. A laboratóriumokban gyakran egy kicsiny hengeres CO_2-gázt tartalmazó tartály szolgál „száraz jég" (szilárd CO_2) előállítására. Amikor a tartály szelepe nyitva van, az elszökő gáz „hópelyhekké" alakul, amelyek azonnal szilárd száraz jég „pogácsákká" préselődnek össze. Értelmezzük a gáz kiterjedésének folyamatát a termodinamika I. főtételének alapján.
8. Ha nagyra tátott szánkból – mintegy 10 cm-es távolságból – gyengéden csuklónkra lehelünk, a leheletet melegnek érezzük. Miért érezzük a leheletet hidegnek, ha összehúzott ajakkal fújunk?
9. Tegyük fel, hogy egy doboz éppen 8 darab, véletlenszerű mozgást végző molekulát tartalmaz. Időnként, véletlenül mind a nyolc molekula a doboz jobb felében található. Ez a fordítottja az irreverzibilis folyamatnak tartott „szabad expanzió"-nak. Hogyan indokolható ez?
10. Mondjunk példát olyan folyamatra, amelyben egy test hőmérséklete megváltozik anélkül, hogy hőt közölnénk vele! Írjunk le olyan folyamatot, amelyben anélkül közlünk hőt egy testtel, hogy a hőmérséklete megváltozna!

Feladatok

21.5 Speciális folyamatok és mólhők

21A-1 a) Mennyi munka szükséges (Joule-ban) 0,16 g normál állapotú hélium eredeti térfogatának tizedrészére történő izotermikus összenyomásához? b) Mennyi hőt kell elvonni a gáztól a folyamat alatt? c) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása? d) Határozzuk meg a hélium végső térfogatát!

21A-2 Tételezzük fel, hogy 0,2 mól $20 \cdot 10^5$ Pa nyomású és 27 °C hőmérsékletű egyatomos gáz, izotermikusan tágul eredeti térfogatának kétszeresére. a) Határozzuk meg a gáz által végzett munkát. b) Mennyi a gázzal közölt hő? c) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása? d) Határozzuk meg a gáz végső térfogatát.

21A-3 Normál állapotú, kétatomos ideális gáz ($\kappa = 1{,}4$) hirtelen eredeti térfogatának négyszeresére tágul. Mekkora a) a végső nyomás és b) a végső hőmérséklet?

21A-4 0,4 mól egyatomos ideális gázt $6 \cdot 10^5$ Pa állandó nyomáson, 27°C kezdeti hőmérsékletről addig melegítünk, amíg térfogata megkétszereződik. a) Határozzuk meg a gáz által végzett munkát! b) Mennyi hőt közlünk a gázzal? c) Mennyivel változott a gáz belső energiája?

21A-5 Egy liter normál állapotú argon (egyatomos gáz) hirtelen 3 l-re tágul. Határozzuk meg a) a végső nyomást és b) a végső hőmérsékletet!

21A-6 Normál állapotú egyatomos ideális gázt hirtelen eredeti térfogatának harmadára nyomunk össze. Határozzuk meg ezen adiabatikus folyanat esetén a) az új nyomást b) az új hőmérsékletet!

21B-7 Két mól normál állapotú egyatomos ideális gázt állandó nyomáson melegítünk, míg térfogata megkétszereződik. a) Határozzuk meg a végső hőmérsékletet! b) Mekkora a gáz által végzett munka? c) Határozzuk meg a gázzal közölt hőt! d) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása?

21B-8 3 mól egyatomos ideális gázt a $20 \cdot 10^5$Pa kezdeti nyomásról 27°C-on izotermikusan összenyomunk $60 \cdot 10^5$Pa nyomásig. a) Mekkora a gázon végzett munka? b) Mennyi hőt vontunk el a gáztól? c) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása? d) Határozzuk meg a gáz végső térfogatát.

21B-9 p_0, V_0, T_0 kezdeti állapotváltozókkal jellemezhető egyatomos ideális gázzal a következő három folyamatot végezzük: izotermikus expanzió $2V_0$-ig, izobár kompresszió V_0-ig és izochor változás a kezdeti állapotig. Igazoljuk, hogy a teljes ciklus során a gáz által végzett munka $p_0V_0(\ln 2 - 1/2)$! Vázoljuk a folyamatot a nyomás-térfogat *állapotsíkon*!

21B-10 4 mól egyatomos ideális gáz a kezdeti 1 m^3 térfogatról és 300 K hőmérsékletről adiabatikusan 10 m^3 végső térfogatra tágul. a) Mennyi munkát végez a gáz? b) Mekkora a végső hőmérséklet? c) Mekkora munkát végez a gáz, ha izotermikusan tágul 10 m^3-re? d) A c) pontban honnan származik a munkavégzéshez szükséges energia?

21B-11 Egyatomos ideális gázt 27°C-ról hirtelen kisebb térfogatra nyomunk össze. Ezután állandó térfogaton eredeti hőmérsékletére hűtjük, majd izotermikusan eredeti térfogatáig tágítjuk. a) Vázoljuk a folyamat p–V diagramját! b) Mekkora a ciklus alatt a gázon végzett összes munka, ha a folyamat alatt a hőcserék eredménye $2{,}09 \cdot 10^4$ J elvont hő?

21B-12 Mutasssuk meg, hogy egyatomos ideális gázra az izotermikus kompresszió-modulus ($K = -V \cdot dp/dV$), egyenlő a nyomással!

21B-13 Egy házban egy szoba levegője hűvös, T_1 hőmérsékletű és p_1 nyomású. Most begyújtjuk a kazánt és a szoba levegőjét magasabb T_2 hőmérsékletre melegítjük. Az ajtók és ablakok körüli repedések miatt némi levegő kiszökik a környezetbe, így a nyomás p_1 marad. a) Mutassuk meg, hogy a szoba levegőjének teljes termikus energiája ugyanakkora fűtés után, mint fűtés előtt! b) Hová tűnt a kazánból az energia? (Hanyagoljuk el a falak, a mennyezet, stb. fűtésére fordított energiát!)

21.6 Szabadsági fokok és az ekvipartíció tétele

21A-14 Vizsgáljunk egy egydimenziós „gázmodellt", amit egy egyenes drót mentén szabadon, – súrlódás nélkül – csúszó és a drót körül forgó üveggyöngyökből készítettünk. a) Hány szabadsági foka van az egyes gyöngyöknek? b) Egy kétdimenziós gáz modellje állhatna lapos, korong alakú „molekulákból", amelyek szabadon forognak, miközben súrlódás nélkül körbe csúsznak egy vízszintes felületen. Hány szabadsági foka van az egyes korongoknak?

21A-15 Két mól hélium gázt (He) összekeverünk 1,5 mól hidrogéngázzal (H_2). Határozzuk meg a keverék állandó nyomáshoz tartozó mólhőjét, ha eltekintünk a hidrogénmolekulák rezgésétől.

21A-16 Határozzuk meg a K értékét a nitrogéngázra (N_2) a lökéshullám körülményei között, ahol mind forgási, mind rezgési gerjesztés előfordul!

21B-17 1600 J hőt közlünk 8 g kezdetben 10°C-os, $60 \cdot 10^5$Pa nyomású nitrogén-oxid gázzal (NO). Tegyük fel, hogy a gáz olyan kétatomos ideális gázként viselkedik, amelynek molekulái forognak, de nem rezegnek. a) Mekkora a gáz végső hőmérséklete, ha állandó a nyomás? b) Mekkora a gáz végső térfogata?

21B-18 Vizsgáljunk egy keveréket, ami egyensúlyi állapotú, azonos hőmérsékletű egy- és kétatomos gázból áll. Határozzuk meg az egyatomos gáz következő jellemzőinek arányát a kétatomoshoz képest: a) az átlagos energiáét; b) az átlagos transzlációs energiáét! Tegyük fel, hogy a kétatomos molekulák forgó mozgást végeznek, de az atomokat összekötő egyenes mentén nincs rezgés.

21B-19 Mekkora egy O_2 molekula átlagos forgási energiája 300 K-hőmérsékleten egyensúlyi állapotban? Tegyük fel, hogy nincs rezgő mozgás!

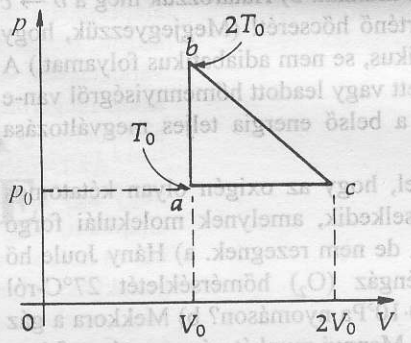
21.8 Szilárd testek fajlagos hőkapacitása

21A-20 Az arany relatív atomtömege 196,97. a) Határozzuk meg a fajhőt a Dulong-Petit szabály felhasználásával. b) A kézikönyvek szerint az arany fajhője 129,79 J/kg K. Mekkora az a) pont számításának százalékos hibája?

21A-21 Szilárd anyag fajhője 443,8 J/kg K. Mekkora a Dulong-Petit szabály alapján számított relatív atomtömeg? (A Dulong-Petit szabályt eredetileg ismeretlen anyagok molekulatömegének meghatározására használták.)

További feladatok

21C-22 Kezdeti p_1, V_1, T_1 állapotjelzőkkel jellemzett egyatomos ideális gázzal a következő, három lépésből álló körfolyamatot végezzük: izotermikus expanzió V_2 térfogatig, izobár kompresszió az eredeti térfogatig és



21-17 ábra
A 21C-26 feladathoz.

izochor melegítés a kezdeti nyomás és hőmérséklet visszaállítására. a) Ábrázoljuk a körfolyamatot a p–V síkon! b) Határozzuk meg a gáz mólszámát a megadott paraméterekkel, a gázállandóval és C_V-vel kifejezve! ($C_V = 3/2\ R$) c) Határozzuk meg a T_2 hőmérsékletet az izobár kompresszió végén a b) feladat eredményét felhasználva! d) Írjuk fel mindhárom folyamatra a hőmérséklet változását a megfelelő változók függvényében.

21C-23 a) Vezessük le a V_1 térfogatról V_2-re történő adiabatikus tágulás során az ideális gáz által végzett munka *kifejezését*:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{(\kappa - 1)}$$

b) Igazoljuk, hogy ez a kifejezés egyenlő $nC_V(T_1 - T_2)$-vel!

21C-24 Hőszigetelt tartályban 1 mól 0°C-os héliumot fal választ el 2 mól 100°C-os oxigéntől (O_2). A válaszfalat eltávolítjuk, és a gázok összekeveredés után termikus egyensúlyba kerülnek. a) Határozzuk meg a gázkeverék végső hőmérsékletét, ha feltételezzük, hogy az oxigénmolekulák forgó mozgást igen, de rezgő mozgást nem végeznek. b) Határozzuk meg a keverék állandó térfogatra vonatkozó mólhőjét.

21C-25 Egy liter normál állapotú egyatomos ideális gáz izotermikusan 2 l-re tágul. a) Határozzuk meg a gáz által végzett munkát! b) Ezután expandáltatjuk a gázt 3 l térfogatig adiabatikusan. Határozzuk meg a gáz által végzett munkát az expanzió alatt. c) Határozzuk meg a gáz végső hőmérsékletét. d) Ha ezután először izotermikusan, majd adiabatikusan összenyomjuk a gázt eredeti állapotáig, mekkora az izotermikus folyamat alatt a gázon végzett munka? e) Mekkora ez a munka az adiabatikus folyamat alatt? f) Határozzuk meg a teljes körfolyamat során a gáz által a környezeten végzett munkát! Csatoljuk a körfolyamat p-V diagramját!

21C-26 Két mól egyatomos ideális gázzal a 21-17 ábrán látható abca körfolyamatot végezzük. A p–V síkon mindhárom folyamat ábrája egyenes. Az a pontban a paraméterek: p_0, V_0, T_0. Az alábbi feladatokat oldjuk meg RT_0 függvényében. a) Határozzuk meg egy teljes

ciklus alatt végzett munkát. b) Határozzuk meg a $b \rightarrow c$ folyamat során történő hőcserét! (Megjegyezzük, hogy ez se nem izotermikus, se nem adiabatikus folyamat.) A rendszer által felvett vagy leadott hőmennyiségről van-e szó? c) Mekkora a belső energia teljes megváltozása egy ciklus során?

21C-27 Tegyük fel, hogy az oxigén olyan kétatomos ideális gázként viselkedik, amelynek molekulái forgó mozgást végeznek, de nem rezegnek. a) Hány Joule hő növeli 4 g oxigéngáz (O_2) hőmérsékletét 27°C-ról 40°C-ra állandó $20 \cdot 10^5$Pa nyomáson? b) Mekkora a gáz végső térfogata? c) Mennyi munkát végez a gáz a folyamat alatt? d) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása?

21C-28 Tegyük fel, hogy 0,4 mól kétatomos ideális gáz kezdeti térfogata 300 K hőmérsékleten 2 liter. A molekulák forgó mozgást végezhetnek, de nem rezegnek az atomokat összekötő egyenes mentén. Határozzuk meg a gáz által végzett munkát, miközben eredeti térfogatának kétszeresére tágul a következő folyamatok során: a) izobár; b) izotermikus; c) adiabatikus. Készítsünk szabadkézi vázlatot a három folyamatról a p–V állapotsíkon! d) Határozzuk meg az a) és b) folyamatok során történt hőátvitelt!

21C-29 A széndioxid molekula (CO_2) lineáris konfigurációjú molekula, amelynek közepén van a szénatom és ennek két oldalán, egyenlő távolságra helyezkednek el az oxigén atomok. a) Írjuk le a molekula rezgésének négyféle típusát (kettő longitudinális, kettő transzverzális). b) Mekkora a K értéke azon a hőmérsékleten, ahol minden rezgési tipus előfordul, ha feltételezzük, hogy mindegyik harmonikus rezgés?

21C-30 Oldjuk meg a 20. fejezet 20C-49 feladatát egy olyan adiabatikus kompresszióra, amely a dugattyút az egyensúlyi helyzetig viszi!

20A-11 $1{,}7 \times 10^5$ N
20A-13 a) $1{,}10 \times 10^{30}$ elektron b) $1{,}82 \times 10^6$ mol
20A-15 8,01 km
20B-17 a) 0,489 atm b) 0,888 kg/ m^3
20B-19 6,59 m^3
20B-21 átlagban 59,0 atom
20B-23 átlagosan 3,48 molekula
20B-25 a) 2,56 atm b) 16,1 m
20B-27 A válasz adott.
20A-29 a) $4{,}14 \times 10^{-16}$ J b) $7{,}04 \times 10^5$ m/s
20A-31 $5{,}80 \times 10^9$ K
20B-33 A válasz adott.
20B-35 b) A szökési sebesség 10,8%-a
20B-37 $(8{,}28 \times 10^{-9}/l^3)$ N/m^2 (l méterben)
20C-39 $8{,}22 \times 10^{23}$ ütközés/sec
20C-41 $mv^2/3l^3$
20C-43 A válasz adott.
20C-45 $\omega = v\theta/x$
20C-47 385 m/s, 417 m/s
20C-49 a) 1,77 cm b) 12,6C°
20C-51 63,4C°

XXI. Fejezet

21A-1 a) 209 J b) 209 J c) 0 d) 0,0896 l
21A-3 a) 0,144 atm b) 157 K
21A-5 a) 0,160 atm b) 131 K
21B-7 a) 546 K b) 4538 J
c) $1{,}13 \times 10^4$ J d) 6806 J
21B-9 A válasz adott.
21B-11 $2{,}09 \times 10^4$ J
21B-13 A válasz adott.
21A-15 $2{,}93R$
21B-17 a) 216C° b) 0,178 L
21B-19 $4{,}14 \times 10^{-21}$ J
21A-21 56,1
21C-23 A válasz adott.
21C-25 a) 70,2 J b) 36,0 J c) 208,3 J
d) –53,6 J e) –36,0 J f) 16,6 J
21C-27 a) 47,3 J b) $1{,}61 \times 10^{-4}$ m^3 c) 13,5 J
d) 33,8 J
21C-29 b) $\frac{13}{11}$

XXII. Fejezet

22A-1 150 J
22A-3 14,2%
22A-5 280 K
22A-7 5,76%
22B-9 a) 44,6% b) 25%
22B-11 –5,40C°
22B-13 A válasz adott.
22B-15 a) 414 J b) 4600 J
22B-17 a) 0,99 J b) 3,45 J
22B-19 $1{,}97 \times 10^5$ J
22B-21 a) 370 személy b) 14800,00 dollár c) 4,80 dollár
22B-23 a) $\frac{4}{3} P_o V_o$ b) 22,2%
22B-25 $\frac{2}{13}$
22C-27 a) 12,4 b) $2{,}07 \times 10^7$ J c) $6{,}00 \times 10^7$ J
d) 2,32 l e) 1,33 l
22C-29 173 W
22C-31 $\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right)^{(\gamma-1)}$
22C-33 a) α: 4,92 ℓ; b: 1,67 atm; c: 6,69 ℓ, $T_c = 408$ K
b) 52,7 J
22C-35 A válasz adott.
22C-37 300 N, 400 N

XXIII. Fejezet

23A-1 -24,2 J/K
23A-3 123 J/K
23A-5 5,27 J/K
23B-7 12,6 J/K
23B-9 A válasz adott.
23B-11 $\sim 5 \times 10^5$ J/K
23B-13 A válasz adott.
23C-15 3807 J
23C-17 A válasz adott.
23C-19 b) $mc\left[(T_2 + T_1) - 2\sqrt{T_2 T_1}\right]$
23C-21 A válasz adott.
23C-23 A válasz adott.
23C-25 a) 588 J b) zérus c) 1,96 J/K d) 1,96 J/K
23C-27 $8k \ln 2$
23C-29 $2{,}40 \times 10^{26}$ J/K·h

A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE

Az első főtétel szerződéskötés a természettel az energia megmaradására. A második főtétel korlátozásai képezik az apró betűs záradékot; ha azt hiszed, hogy azt kapod, amit akarsz, – tévedsz.

22.1. Bevezetés

Milyen energiaátalakulások történnek, ha, a kezünkben tartott könyvet a padlóra leejtjük? Kezdetben a könyv-Föld rendszernek *mgh* gravitációs potenciális energiája van. Miután az ütközés lezajlik és a könyv nyugalomba kerül a padlón, ez az energia termikus energiaként tárolódik az enyhén felmelegedő könyvben és padlóban, valamint az ütközés során létrejött hanghullámokat elnyelő falakban és levegőben. A kezdeti potenciális energia teljes egészében átalakul termikus energiává[1] és a végső eredmény az, hogy a mikroszkópikus méretű véletlenszerű mozgások erősödnek. Az összenergia azonban megmarad.

De vajon ez a folyamat reverzibilis? Vissza tudunk-e állítani mindent az eredeti állapotba? Vajon vissza tudnánk-e alakítani a termikus energiával kapcsolatos rendezetlen mozgásokat a mechanikai energia rendezett mozgásává, hogy a könyv az eredeti magasságba emelkedjen, miközben a padló és a falak kezdeti hőmérsékletükre hűlnek le? Habár az ilyen folyamat nem sértené az I. főtételt, – amely kimondja, hogy a belső energia is az energia egyik fajtája, és mint ilyen, átalakulhat más energiaféleséggé – a II. főtétel megállapítja, hogy a folyamat megfordítása valójában lehetetlen.

Vegyünk egy másik példát: átszelheti-e egy gőzhajó az óceánt úgy, hogy tengervizet szív be, abból termikus energiát von ki a hajó meghajtásához szükséges motorok működtetésére, majd a keletkezett jeget és sót visszaöntjük a hajóról a vízbe? Okos ötletnek látszik, hogy magában az óceánban lévő termikus energiát hasznosítsuk ahelyett, hogy diesel olajat, vagy valamilyen más, – a motorokhoz szükséges – energiaforrást vigyen magával a hajó. Az elképzelés biztosan nem sérti az első főtételt. A második főtétel szerint azonban valójában ismét csak lehetetlen. Mit értünk azon, hogy „valójában"? Vajon nem sejtet ez egy feltaláló számára kibúvót olyan gép tervezésére, ami megvalósítja a termikus energiának teljes mértékben munkává való átalakítását? Egyáltalán nem. Amint látni fogjuk, ennek a lehetetlensége az egyik legbiztosabb kijelentés, amit csak tehetünk. A termodinamika II. főtétele a természettudomány legszélesebb általánossággal bíró

[1] Ha a padló, vagy könyv maradandóan deformálódna az ütközés következtében, akkor bizonyos mennyiségű energia a molekulák közötti megváltozott távolságok miatt megnövekedő potenciális energiában is belső energiaként tárolódna. Ez azonban nem változtatna a teljes energiamegmaradás átfogó törvényén.

alapelve. Ez talán a „legvisszavonhatatlanabb" az összes természeti törvény között, ennek van a legkisebb esélye arra, hogy valamikor a jövőben megváltoztassák, vagy elvessék. Ha a II. főtétel tartalmát pontosan értelmezzük, akkor megérthető, hogy általános jellege és kötelező érvényessége még egyes tudósokban is félelemmel vegyes tiszteletet ébreszt.

Az I. főtétel kimondja, hogy az energia különböző alakokban létezik és hogy úgy alakítható egyikből a másikba, hogy minden esetben meg lehet állapítani, hogy mi történik az energiával. Energia nem teremthető a semmiből és nem semmisíthető meg. A II. főtétel viszont megtilt bizonyos energiaátalakítási folyamatokat, cseréket. *Néhányat éppen azok közül nem tehetünk meg, amelyet nagyon szeretnénk megvalósítani.*

22.2 A második főtétel

A termodinamika második főtételét több különböző alakban is megfogalmazhatjuk. Ezek közül néhány nagyon elüt a többitől. Tárgyalásunkat azzal kezdjük, hogy figyelmünket olyan energia-átalakítási folyamatokra összpontosítjuk, amelyek újra és újra ismétlődnek. Vagyis, a hőerőgépekkel foglalkozunk, amelyek ismétlődő működési ciklusok során alakítják a hőt munkává. Lényegében a termikus energiának munkává alakításakor a legtöbb gép ezt az alapvető sémát követi, (kivéve azokat, amelyek elektromos forrást, vagy napelemet használnak). Ez attól függetlenül is igaz, hogy az energiaforrás benzin, olaj, gáz, égő fa, vagy nukleáris reakció. Ezek a folyamatok nyilvánvalóan elsődleges fontosságúak mindennapi életünkben.

A XIX. század ipari forradalma, ahogyan azt a 22-1 táblázat mutatja, radikális változásokat hozott az energiaforrásokban. Gerald Piel drámaian írja le azokat az életvitelünkben bekövetkezett változásokat, amelyeket az energiaátalakítás továbbfejlesztett formái eredményeztek.[2] Kiemeli, hogy az átlagember kézi erővel évente kb. $1{,}7 \cdot 10^8$ J munkát tud végezni. Ezt alapul véve, az Egyesült Államok fejenkénti villamosenergia felhasználása – 1984-ben – annak felelne meg, mintha minden egyes férfinek, nőnek és gyereknek 215 szolgája lenne! A mai életnek a „régi jó világgal" való bármilyen összehasonlításának ilyen megfontolásokat is kellene tartalmaznia.

1824-ben Nicholas Léonard Sadi Carnot-nak, – egy 28 éves francia hadmérnöknek – sikerült bepillantani az energiaátalakítási folyamatok alapjaiba. Tanulmánya a gőzgépek hatásfokáról, forradalmasította a problémával kapcsolatos gondolkodást. Teljesítménye figyelemre méltó abból a szempontból is, hogy felismeréseit azelőtt tette, mielőtt ismertté vált volna a termikus energia mikroszkópikus értelmezése és mielőtt a termodinamika első főtételét megfogalmazták volna. Valóban az uralkodó hőelmélet ekkor még a

22-1 táblázat
Árucikkek és szolgáltatások becsült energiaforrásai az Amerikai Egyesült Államokban

Év	Ember	Állat	Gép
1800	14 %	80 %	6 %
1900	10 %	52 %	38 %
1989	~1 %	~0 %	99 %

Forrás: Putnam: *Energy in The Future,* Van Nostrand, 1953.

helytelen, „caloricum"-mal való magyarázat volt. Carnot mégis képes volt eljutni oda, amiből később a második főtétel kialakult. A II. főtétel három megfogalmazása a következő.[3]

A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE

A Kelvin-Planck féle megfogalmazás:

Lehetetlen olyan periodikusan működő gépet készíteni, ami 100 %-os hatásfokkal alakít át termikus energiát munkává.

vagy

A Clausius-féle[4] megfogalmazás:

Lehetetlen olyan periodikusan működő eszközt készíteni, ami termikus energiát hideg testről forró testre visz át anélkül, hogy a környezet munkát végezne az eszközön.

vagy

Termikus energia nem áramlik önként hidegebb testről a melegebbre.

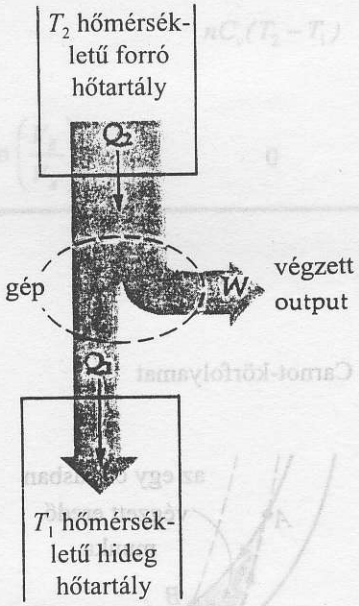
Megmutatjuk, hogy ezek a kijelentések teljesen egyenértékűek. Bármely hipotetikus gép, amely megsérti az egyik megállapítást, megsértené a többit is. Soha nem találtak kivételt. Az első megfogalmazás romba dönti azon reményeinket, hogy valaha is megvalósíthatunk 100%-os hatásfokú hőerőgépet, amelynél a végzett munka megegyezik a bevitt termikus energia mennyiségével. A másik két megfogalmazás azt a tényt ismeri fel, hogy a hő, – úgy tűnik – csak „lefelé" áramlik, magasabb hőmérsékletről alacsonyabb hőmérsékletre. Amint a következő fejezetben látni fogjuk, a termodinamika második főtétele a statisztikus fizika érveivel is alátámasztható, s ezek logikája lenyűgöző. Pillanatnyilag elfogadjuk a II. főtételt, és a következőkben érvényes alapelvként használjuk.

22.3. A Carnot körfolyamat

A hőerőgépek hatásfokának tökéletesítésére irányuló kísérletei során Carnot nagyon értékes eredményt ért el: egy olyan folyamatsort alkotott, amely két adott hőmérséklet között működő bármely hőerőgéppel a lehetséges legnagyobb hatásfokot valósítja meg. Figyelmen kívül hagyta az egyes géptípusok működésének részleteit és ehelyett arra koncentrált, hogy alapvetően minden hőerőgép a következőképpen működik:

a) Minden hőerőgép viszonylag magas hőmérsékleten vesz fel hőt.
b) Minden hőerőgép munkát végez a környezeten.
c) Minden hőerőgép lead bizonyos hőt alacsonyabb hőmérsékleten.

A 22-1 ábra ezeket a jellemzőket illusztrálja. A **hőtartály** olyan hőforrás, amelynek a hőmérséklete állandó marad, függetlenül attól, hogy mennyi hőt közöltek vele, vagy mennyit vontak el tőle. Ezért az ábrán Q_2 a magasabb, T_2 hőmérsékletű hőtartályból felvett hő, míg Q_1 az alacsonyabb, T_1 hőmérsékletű



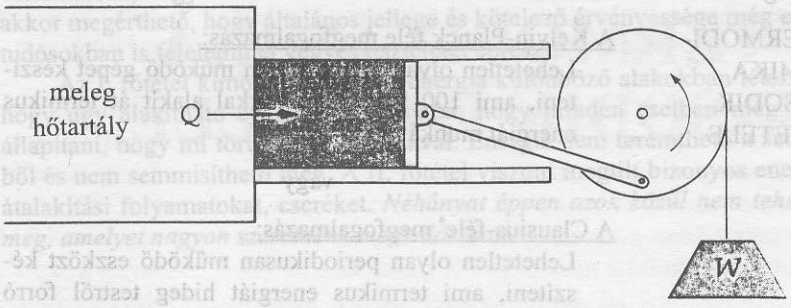
22-1 ábra
Hőerőgép vázlata. A hőerőgép Q_2 hőmennyiséget vesz fel, W munkát végez a környezeten és Q_1 hőmennyiséget ad le. A gép két állandó, T_2 és T_1 hőmérsékletű hőtartály között működik. Az I. főtétel alapján (az energiamegmaradás) a gép által végzett eredő munka $W = Q_2 - Q_1$.

---

2 Gerald Piel: *Science in the Cause of Man*, Knopf, 1962.

3 A fizika más alaptörvényeihez hasonlóan, a II. főtételt sem lehet levezetni, vagy bizonyítani. Érvényessége azon a tapasztalatunkon nyugszik, hogy még soha nem találtak olyan rendszert, amely megsértette volna a II. főtételt. A következő fejezetben ezt még más módon, az entrópia segítségével is megfogalmazzuk. Ez az eltérő megközelítés még világosabbá teszi majd, hogy miért hiszünk olyan erősen a második főtételben.

4 Rudolph J.E. Clausius (1822–1888) német matematikus és fizikus nagyban hozzájárult a termodinamika törvényeinek kimondásához.



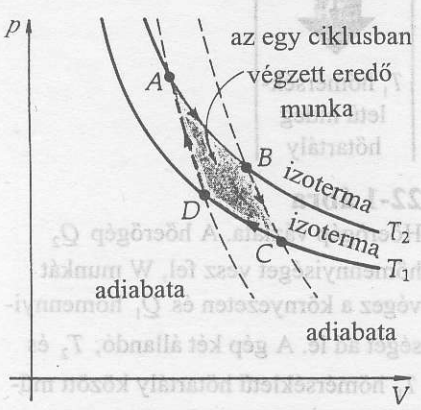
22-2 ábra
Módszer a hő mechanikai munkává alakítására. Ha a gázzal hőt közlünk, a gáz térfogata megnő, és ezáltal felemelkedik a súly.

hőtartálynak leadott hő. A hőmérsékletek indexeinek jelölésénél azt a szokást követjük, hogy magasabb hőmérsékletekre nagyobb számértékeket használunk. Így a T_1, T_2, T_3, ... sor egyre magasabb hőmérsékleteket reprezentál (mindig kelvinben).

A Carnot körfolyamat reverzibilis változások sorozata, azaz visszafelé vezethető, ha szükséges. Elvileg, a körfolyamat bármely anyaggal működtethető. A ciklus során a munkavégző közegben végül nem is történik változás, a közeg csupán a termikus energia hordozójaként szerepel. Tervezhető olyan, Carnot körfolyamattal működő hőerőgép, amely folyadékot, valódi gázt, mágneses anyagot, vagy egyéb közeget alkalmaz. Az egyszerűség kedvéért a körfolyamatot súrlódásmentes dugattyúval elzárt hengerben lévő ideális gázzal mutatjuk be. A 22-2 ábra olyan módszer bemutatása, amelyben a dugattyú egy kerékhez erősíthető úgy, hogy a forgó kerék súlyt emeljen a gravitáció ellenében, így végezve hasznos munkát a környezeten.

A **Carnot-ciklus** *izotermikus* és *adiabatikus* folyamatokból áll, ahogy azt a 22-3 ábrán vázoltuk.

A Carnot-körfolyamat



22-3 ábra
A Carnot féle körfolyamat két izotermikus és két adiabatikus görbe mentén halad a p–V síkon, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ irányban. Az izotermák és az adiabaták „meredeksége" közti különbség eltúlzott, azért, hogy az ábra világosabb legyen.

A CARNOT- FÉLE KÖRFOLYAMAT

1. lépés (A-tól B-ig):
A gáz izotermikusan tágul A-tól B-ig, miközben Q_2 hőt vesz fel a magasabb (T_2) hőmérsékletű hőtartályból.

2. lépés (B-től C-ig):
A gáz adiabatikusan tágul B-től C-ig, miközben az alacsonyabb T_1 hőmérsékletre hűl.

3. lépés (C-től D-ig):
A gázt izotermikusan összenyomjuk C-től D-ig, miközben Q_1 hőt ad le az alacsonyabb hőmérsékletű hőtartálynak.

4. lépés (D-től A-ig):
A gázt D-től A-ig tartó adiabatikus kompresszióval visszavisszük eredeti állapotába.

Emlékeztetünk rá, hogy a p–V síkon tetszőleges út mentén elmozdulva a végzett munka egyenlő a görbe alatti területtel. $A \rightarrow B \rightarrow C$ úton a gép végez munkát a környezeten, a $C \rightarrow D \rightarrow A$ úton pedig a környezet végez munkát a gépen. Ezért az egy ciklus során a hőerőgép által a környezeten végzett eredő hasznos munka, – ahogy azt az ábra mutatja, – a görbe által bezárt, vonalkázott terület. A W munka pozitív ha a körfolyamat óramutató járásával egyező irányban megy végbe. Negatív ha ellenkező irányban zajlik le.

22-2 táblázat A Carnot féle hőerőgép

Folyamat	A gáz által végzett munka (W)	A gázzal közölt hő (Q)	A gáz belső energiájának megváltozása (ΔU)
$A \rightarrow B$ Izotermikus tágulás $p_A V_A = p_B V_B$	$nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$	$Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$	0
$B \rightarrow C$ Adiabatikus tágulás $p_B V_B^{\kappa} = p_C V_C^{\kappa}$	$\frac{nR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)$	0	$nC_v(T_1 - T_2)$
$C \rightarrow D$ Izotermikus összenyomás $p_C V_C = p_D V_D$	$nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$ vagy $-nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$	$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$ vagy $-nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$	0
$D \rightarrow A$ Adiabatikus összenyomás $p_D V_D^{\kappa} = p_A V_A^{\kappa}$	$\frac{nR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2)$	0	$nC_v(T_2 - T_1)$
Eredő változás egy teljes ciklusra	$nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$	$nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$	0

A 22-2 táblázat összefoglalja a 21. fejezetben levezetett, különböző energiaváltozásokat. Jegyezzük meg, hogy a gázzal közölt eredő hő $(Q_2 - Q_1)$ egyenlő a gáz által a környezeten végzett munkával. Az eredő belső energiaváltozás zérus, így a gáz visszatér eredeti állapotába és minden készen áll a ciklus ismétlésére. A hőerőgép folyamatos működése során ismételten végbemegy ez a folyamatsor.

22-1 PÉLDA

Igazoljuk, hogy a Carnot-körfolyamat esetén, a $C \rightarrow D$ izotermikus folyamatban leadott

$$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

hő így is írható: $$Q_1 = (-)nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

MEGOLDÁS:

A Carnot-körfolyamat két izotermikus folyamatára felírható:

$$P_A V_A = P_B V_B \quad \text{és} \quad P_C V_C = P_D V_D$$

A két adiabatikus folyamatra:

$$p_B V_B^{\kappa} = p_C V_C^{\kappa} \quad \text{és} \quad p_D V_D^{\kappa} = p_A V_A^{\kappa}$$

Ha összeszorozzuk a négy egyenletet és $P_A P_B P_C P_D$ tényezővel egyszerűsítünk, – mivel ezek azonosak mindkét oldalon, – ezt kapjuk:

$$V_A V_C (V_B V_D)^{\kappa} = V_B V_D (V_A V_C)^{\kappa}$$

Ezt átrendezve, adódik, hogy

$$(V_A V_C)^{1-\kappa} = (V_B V_D)^{1-\kappa}$$

$(1-\kappa)$-dik gyököt vonva mindkét oldalból:

$$V_A V_C = V_B V_D$$

vagy

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

Ha ezt az értéket $Q_1 = nRT_1 \ln (V_D/V_C)$ kifejezésbe helyettesítjük, ez azt eredményezi, hogy

$$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

22.4 Hőerőgépek hatásfoka

Iparosodott társadalmunkban egy gép működési költsége elsődleges jelentőségű. Azért, hogy egy hőerőgéppel hasznos munkát végeztessünk, a gépbe betáplált, adott Q_2 hőmennyiséggel kell fizetnünk. (A második főtétel biztosítja, hogy a betáplált Q_2 hő mindig nagyobb, mint a nyert munka.) A hőerőgépek hatásfokának mértéke a hasznos munka és a gép működtetéséhez szükséges, betáplált termikus energia aránya.

HŐERŐGÉP HATÁSFOKA

$$\eta = \frac{\text{egy ciklus alatt végzett munka}}{\text{egy ciklus alatt betáplált hő}} \qquad (22\text{-}1)$$

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \qquad (22\text{-}2)$$

ahol Q_1 és Q_2 a hőcserében szereplő hőmennyiségek nagysága.[5] Ha a hatásfokot százalékos értékre akarjuk átalakítani, egyszerűen szorozzuk meg 100%-kal.

Q_2 értékének nagyobbnak kell lenni Q_1-nél, a különbség az eredő végzett munka. Amint azt ebben a fejezetben még megmutatjuk, minden hőerőgép hatásfoka szükségszerűen kisebb mint egy, mert *lehetetlen visszavinni a gázt eredeti állapotába anélkül, hogy valamennyi hőt leadjon egy alacsonyabb hőmérsékletű hőtartálynak.* Így Q_1 még abban az elméletileg ideális esetben sem lehet zérus, amelyben nincsenek súrlódás okozta veszteségek (ekkor 100% lenne a hatásfok).

Hangsúlyozzuk, hogy a fentiek periodikusan működő berendezésekre vonatkoznak. Az ideális gáz egyszeri izotermikus expanziójára vonatkozóan – ami anélkül megy végbe, hogy szerepelne hőt elnyelő tartály, – a hő teljesen, 100%-os hatásfokkal, átalakítható munkává. Ebben a fejezetben azonban azokat a periodikusan működő berendezéseket vizsgáljuk, amelyekben a munkaközeget minden ciklus után visszavisszük eredeti állapotába, hogy a folyamat újra ismételhető legyen.

[5] A hatásfok definíciójában nem törődünk azzal, hogy az előjel pozitív vagy negatív lehet attól függően, hogy a rendszerbe beáramló, vagy az onnan távozó hő áramlásának irányát jelzi.

Ahogyan a későbbiekben megmutatjuk, a Carnot-féle körfolyamat a leghatékonyabb hőerőgép, ami két különböző hőmérsékletű hőtartály közötti működésre tervezhető. Nincs olyan hőerőgép, ami hatásfokban felülmúlhatná a Carnot-félét. Így a Carnot-hatásfok az az elméleti felső határ, ami valaha is kitalált, vagy valamikor a jövőben tervezésre kerülő géppel elérhető. A Carnot-körfolyamat és a termodinamika II. főtétele érthetően nagy fontossággal bír technológiai civilizációnk fenntartásában.

A Carnot-hőerőgép (22-2) egyenlettel meghatározott hatásfoka más, sok esetben hasznosabb alakban is kifejezhető. A 22-2 táblázatból látjuk, hogy az izotermikus tágulás és összenyomás során elnyelt és leadott hőmennyiség a következő:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Elnyelt hőmennyiség:} & Q_2 = nRT_2 \ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right) \\ \text{Leadott hőmennyiség:} & Q_1 = (-)nRT_1 \ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right) \end{array}\right\} \text{(ideális gázra)}$$

Ezeknek a mennyiségeknek az aránya:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad \textbf{(22-3)}$$

Így a *Carnot-hatásfokot* a hőmérsékletekkel is kifejezhetjük:

CARNOT-HATÁSFOK

$$\eta_{(\text{Carnot})} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad \textbf{(22-4)}$$

Ez az egyenlet, – a munkaközegtől függetlenül, – minden Carnot-féle hőerőgépre érvényes. *A végső hatásfok csak a hőmérsékletektől függ.*

22-2 PÉLDA

Egy gőzgép hideg éghajlaton működik, ahol a fáradt gőz hőmérséklete 0 °C. (a) Számítsuk ki a hőerőgép elméletileg elérhető legnagyobb hatásfokát, ha a beszívott gőz hőmérséklete 100 °C. b) Határozzuk meg a lehetséges maximális hatásfokot, ha 200 °C -ra túlhevített gőzt használunk!

MEGOLDÁS

a) Mivel bármely hőerőgép maximális elméleti hatásfoka a Carnot-hatásfok, a 100 °C -os gőzre (373 K):

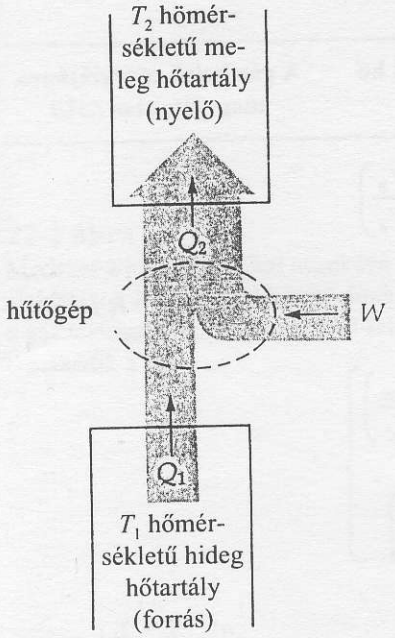
$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273\,\text{K}}{373\,\text{K}} = 26{,}8\%$$

b) Ha 200 °C-ra (473 K) túlhevített gőzt használunk, az elméleti maximális hatásfok:

$$\eta = 1 - \frac{273\,\text{K}}{473\,\text{K}} = 42{,}3\%$$

A hatásfok magasabb hőmérsékleten való növekedése miatt a legtöbb gőzgép túlhevített gőzt használ.

A valódi gőzgépek összhatásfoka 15% és 20% közé esik. A benzinmotorok hatásfoka nagyjából 20–25%, míg a Diesel-motoroké elérheti a 40%-ot.



22-4 ábra
Carnot-féle hűtőgép. Q_1 hőt vonunk el a hideg hőtartálytól, W a motor működtetéséhez szükséges munka és Q_2 a forró hőtartálynak leadott hő. Az energiamegmaradásból: $W + Q_1 = Q_2$.

A hűtőgép

Mivel a Carnot-féle körfolyamat reverzibilis, ellentétes irányban is működtethető. Az ilyen berendezés, – amit Carnot-hűtőgépnek neveznek, – hőt von el egy alacsony hőmérsékletű hőtartályból (vagy hőforrásból) és hőt ad le egy magasabb hőmérsékletű hőtartálynak (vagy nyelőnek). 22-4 ábra. Az ily módon történő hőelvonás hatékonyságának mértéke a **teljesítménytényező**, (vagy jósági tényező) (ε), amit így definiálunk:

TELJESÍTMÉNY TÉNYEZŐ (HŰTŐGÉP)
$$\varepsilon = \frac{\text{a hideg hőtartálytól elvont hő}}{\text{felhasznált munka}} = \frac{Q_1}{W} \qquad \textbf{(22-5)}$$

Carnot-féle hűtőgépre
$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \qquad \textbf{(22-6)}$$

22-3 PÉLDA

Határozzuk meg a 0°C és 30°C között működő Carnot-féle hűtőgép teljesítménytényezőjét!

MEGOLDÁS

Ha $T_1 = 0°C = 273\ K$ és $T_2 = 30°C = 303\ K$ értéket behelyettesítünk a (22-6) egyenletbe, akkor:

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{273\,K}{303\,K - 273\,K} = 9{,}1$$

adódik. Ez az elméleti maximum a Carnot-féle hűtőgépre. A háztartási hűtőberendezések esetén ε ritkán haladja meg a 7 körüli értéket. Gyakorlati példaként megemlítjük, hogy egy kis légkondicionáló kiábrándítóan kicsi, de tipikus teljesítménytényezője: 1,83.

Hőszivattyú

A hűtőgép elvének másik érdekes alkalmazása a hőszivattyú, amely úgy fűti télen a házat, hogy hűtőgép segítségével termikus energiát von el a külső levegőtől, vagy a talajtól. Az ilyen módszer gyakorlatilag ott hatásos, ahol föld alatti vízmennyiség biztosítja a viszonylag állandó hőmérsékletű hőforrást. Mivel a hőszivattyú több energiát szállít a házba, mint amennyi a működtetéséhez szükséges, a mérsékelt éghajlaton ez a házak fűtésének népszerű módszerévé vált.[6] További jellemző, hogy néhány hőszivattyú meg tudja fordítani a hőáramlás irányát, így nyáron ezek a ház hűtésére is használhatók.

A hőszivattyú teljesítménytényezőjét a következőképpen definiáljuk:

[6] A hőszivattyúk akkor működnek a legjobban, ha az alacsony hőmérsékletű hőtartály nem túl hideg. Ez nyilvánvaló a (22-8) egyenletből:
$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \quad \text{vagy} \quad Q_2 = \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1}\right) W$$
Ezért – adott munkavégzés esetén – minél kisebb a hőmérsékletkülönbség, annál nagyobb a bevitt Q_2 hőmennyiség.

TELJESÍTMÉNY-TÉNYEZŐ (hőszivattyú)

$$\varepsilon = \frac{\text{a meleg hőtartálynak szállított hő}}{\text{felhasznált munka}} = \frac{Q_2}{W} \qquad (22\text{-}7)$$

Carnot-féle hőszivattyúra

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \qquad (22\text{-}8)$$

22-4 PÉLDA

Egy hőszivattyú teljesítménytényezője 6. Hasonlítsuk össze a ház fűtésére fordított hőmennyiséget a hőszivattyú működtetésére felhasznált munka mennyiségével.

MEGOLDÁS

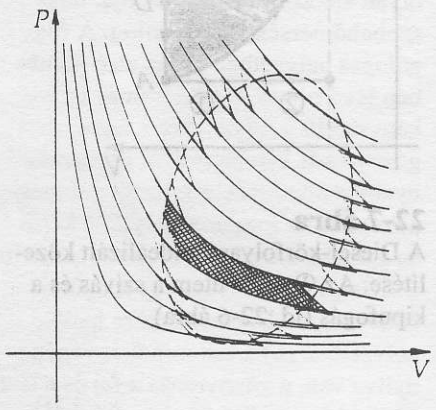
A hőszivattyú teljesítménytényezője (ld. a (22-7) egyenletet!):

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = 6 \qquad \text{vagy} \qquad Q_2 = 6W$$

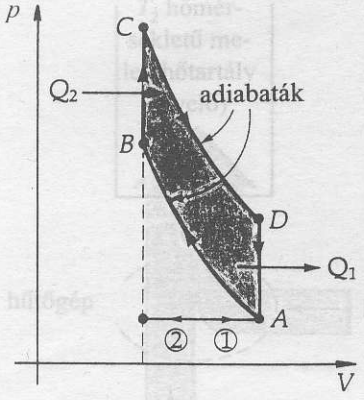
Az előny nyilvánvaló. A hőszivattyú működtetésére használt W energia minden egységére 6 egységnyi olyan (Q_2) hőt kellene kapnunk, ami a házba áramlik. Gyakorlatilag, – mivel a mechanikai hatásfok kisebb, mint 100% és a munkaközeg nem ideális, – a tényleges összhatásfok lehet, hogy 50%-ra csökken. Mindazonáltal mégis mindössze 1 egységnyi energiát kellene a berendezés működtetéséért fizetni és 3 egységnyi hőt kapnánk érte. Ez ellentétes avval a fűtéssel, amikor közvetlenül elektromosságot használunk, midőn a villamos energia hővé alakulása lényegében 100%-os hatásfokú. Ebben az esetben csak 1 egységnyi hőt kapunk 1 egységnyi, fizetett villamos energiáért.

22.5 Néhány hőerőgép típus

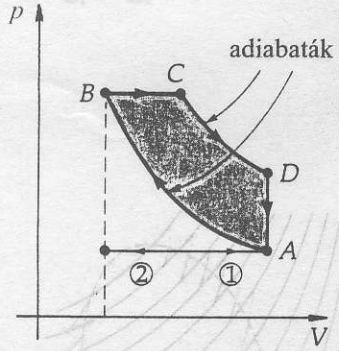
A használatban lévő hőerőgépek természetesen számos más, a Carnot-ciklustól eltérő körfolyamatot hasznosítanak. Bár nincs olyan hőerőgép, amely teljesen kiküszöböli a súrlódást és így reverzibilis gépként kezelhető, mégis tanulságos úgy elemezni a különféle körfolyamatokat, mintha reverzibilisek lennének. Ezáltal meghatározhatjuk a maximális elméleti hatásfokot, ami az adott hőerőgéppel elérhető. Elvileg bármely tetszőleges reverzibilis körfolyamat elképzelhető nagyszámú Carnot-féle hőerőgép összekapcsolásának eredményeként, ahol az egyik hőerőgép által leadott hő biztosítja a hőbevitelt a következő hőerőgép számára (ld. a 22-5 ábrát!). Ha sorban körbemegyünk mindegyik Carnot-cikluson, az egyenértékű azzal, hogy egyszer körbemegyünk a külső cikkcakkos kerületen. A kis körfolyamatokon végigmenve ugyanis a szomszédos ciklusok közötti közös izotermákon kétszer megyünk végig – ellentétes irányban, – ezért ezek járulékát a hőcseréhez és a munkához el kell hagynunk. Minél közelebb vannak egymáshoz a kiválasztott izotermák, annál jobban közelítjük a szaggatott vonallal jelzett utat. Határesetként így eljutunk a tetszőleges körfolyamatra vonatkozó Carnot-hatásfokhoz. Minden irreverzibilis körfolyamatnak – és minden valóságos hőerőgépnek – kisebb a hatásfoka, mint a Carnot-körfolyamaté. A Carnot-hatásfok tulajdonképpen annak a hatásfoknak a felső határát jelenti, amivel termikus energiát munkává tudunk alakítani.



22-5 ábra
Bármely reverzibilis körfolyamat (szaggatott vonal) megközelíthető egymáshoz tetszőlegesen közeli izotermák mentén működő Carnot-ciklusok együttesével. (Az egyik Carnot-ciklust bevonalkáztuk, hogy könnyebb legyen elképzelni.) Minél közelebb vannak egymáshoz a választott izotermák, annál pontosabb a közelítés.



22-6 ábra
Az *Otto-körfolyamat* –belső égésű motorban lejátszódó folyamatsor idealizált közelítése. Az ① és ② út megfelel a beszívás, ill. a kipufogás ütemének. A szívó ütemben lényegében légköri nyomáson benzingőzzel kevert levegőt visznek a hengerbe; később a kipufogó ütemben, a forró égéstermékek távoznak a légköri nyomáson. (A szívás és a kipufogás nem része a hatásfokot meghatározó termodinamikai folyamatoknak.)



22-7 ábra
A Diesel-körfolyamat idealizált közelítése. Az ① és ② ütem a szívás és a kipufogás (ld. 22-6 ábra)

A belső égésű motor

A Carnot-körfolyamattól eltérő körfolyamattal működő hőerőgépre példa a belső égésű motor (az autók benzinmotorja). Az ilyen hőerőgépben lejátszódó körfolyamat egyszerűsített közelítése látható a 22-6 ábrán. Ezt az Otto-cikluskénti ismert körfolyamatot – amely megalkotójáról, egy német mérnökről nyerte nevét, – súrlódásmentesnek és reverzibilisnek tekintjük. Az egy ciklusban végzett eredő munkát a vonalkázott terület adja. A munkaközeg levegő, amiről feltételezzük, hogy ideális gázként viselkedik a következő folyamatokban:

(1) Légköri nyomáson adiabatikusan összenyomjuk a levegőt *A*-tól *B*-ig. (Ez megfelel a sűrítő ütemnek a valódi motorban, amelyben levegő és benzingőz keverékét komprimáljuk. A kompresszióviszonynak nevezett V_A/V_B arány általában 10 körül van.)
(2) Ezután *B*-től *C*-ig a levegőt állandó térfogaton felmelegítjük. Ez közel megfelel a benzingőz gyors robbanásának, amit a maximális kompresszió körüli időpontban történő szikragyújtással indítunk.[7])
(3) A levegő adiabatikusan tágul *C*-től *D*-ig, miközben munkát végez, ahogy csökken a hőmérséklete. (Ez közelítőleg megfelel a motor munkaütemének.)
(4) A levegő *D*-től *A*-ig állandó térfogaton lehűl, s így lehetővé válik, hogy a ciklus újra induljon.

Csak a két izochor folyamatban történik hőcsere. Ha feltételezzük, hogy a levegő ideális gázként viselkedik, kiszámíthatjuk a motor elméleti hatásfokát, azaz a végzett munka és a befektetett hő arányát (ld. 22C-31 feladat):

OTTO-FÉLE KÖRFOLYAMAT HATÁSFOKA

$$\frac{\text{hasznos munka}}{\text{befektetett hő}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\kappa-1}} \qquad (22\text{-}9)$$

Ha például a kompresszióviszony 8 és K = 1,4, az elméleti hatásfok 56%. A valóságos hatásfokok 20% körüli értékek. Jegyezzük meg, hogy a hatásfok a kompresszióviszony növekedésével javul. Mivel a diesel-motorok kompresszióviszonya nagyobb, – 15–20 körül van, – hatásfokuk is nagyobb, mint a benzinmotoroké.

Diesel motor

A nem Carnot-körfolyamatot hasznosító hőerőgépek másik típusa a Diesel motor. A 22-7 ábra idealizált Diesel-körfolyamatot ábrázol. A kezdetben légköri nyomáson lévő levegőt (*A* pont) adiabatikusan összenyomjuk, amíg a hőmérsékletét eléggé megnöveljük ahhoz, hogy a kompressziós ütem végén (*B* pont) befecskendezett Diesel-olaj magától meggyulladjon. (Nem szükséges gyújtógyertya.) A gőz robbanása lassúbb, mint egy benzinmotorban és ez a folyamat – ebben a nagyon leegyszerűsített közelítésben – először állandó nyomáson, majd adiabatikusan végbemenő expanzióként történik, a $B \rightarrow C \rightarrow D$ görbe mentén. Végül, a kipufogóütem visszaviszi a motort az eredeti állapotba. Mivel a kompresszió során nincs jelen olajgőz, nem fordulhat elő előgyújtás; ezért a kompresszióviszony magasabb lehet, mint egy belső égésű motorban. A jellemző ideális hatásfokok 50% és 60% között vannak.

[7] Ha a kompresszió túl nagy, akkor a hőmérséklet idő előtt annyira megnövekedhet, hogy a benzingőz spontán meggyullad. Ezt a nem kívánt állapotot előgyújtásnak nevezzük.

22-5 PÉLDA

A 22-8 ábrán látható Stirling-motor a T_1 és T_2 hőmérsékletű izotermák között működik, ahol $T_2 > T_1$. Számítsuk ki egy olyan motor hatásfokát, amelynél az izochor folyamatok V_1 és V_2 térfogaton mennek végbe, ha a munkaközeg egyatomos ideális gáz!

MEGOLDÁS

A hatásfok:

$$\eta = \frac{\text{hasznos munka}}{\text{befektetett energia}} = \frac{\text{felvett hő} - \text{leadott hő}}{\text{felvett hő}}$$

Felvett hő a T_2 izoterma mentén: $Q_2 = nRT_2 \ln(V_2/V_1)$

Leadott hő az állandó, V_2 térfogaton: $Q_3 = nC_V (T_2 - T_1)$

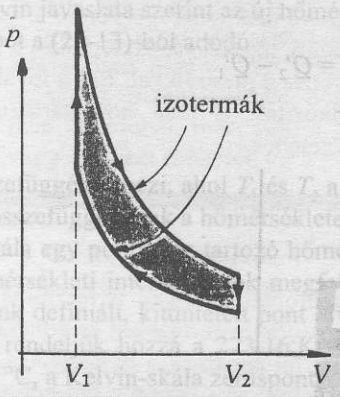
Leadott hő a T_1 izoterma mentén: $Q_1 = nRT_1 \ln(V_2/V_1)$

Felvett hő az állandó, V_1 térfogaton: $Q_4 = nC_V (T_2 - T_1)$

Vegyük észre, hogy $Q_3 = Q_4$, ekkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{(Q_2 + Q_4) - (Q_1 + Q_3)}{(Q_2 + Q_4)}$$

$$\eta = \frac{nR(T_2 - T_1)\ln\left(V_2/V_1\right)}{nRT_2 \ln\left(V_2/V_1\right) + n\underbrace{C_V}_{\left(\frac{3}{2}R\right)}(T_2 - T_1)} = \frac{2(T_2 - T_1)\ln\left(V_2/V_1\right)}{3(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln\left(V_2/V_1\right)}$$



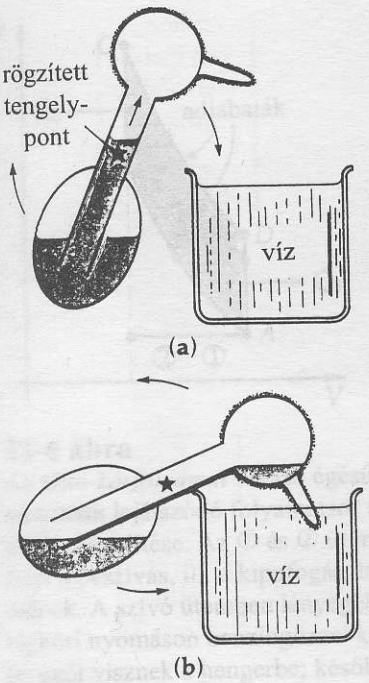
a) Az 1827-ben szabadalmaztatott Stirling-féle hőerőgép idealizált körfolyamata.



b) Az erszényes patkány

22-8 ábra

A Stirling-féle hőerőgép pontosan úgy hasznosítja a hőcserét, ahogyan az erszényes patkánynak nevezett, Arizona-sivatagbeli rágcsáló. (Ld. Knut Schmidt-Nielsen: How Animals Work, Cambridge University Press, 1972.) A kis sivatagi rágcsálók vízháztartásában a hőcsere-folyamatok a legfontosabb tényezők. Az idealizált Stirling-motor két izotermikus és két izochor folyamattal működik. A Stirling-motor újabb keletű alkalmazása módszert kínál a nagyon alacsony – a hélium csepp-folyósodása alatti, – az abszolút zérus fokot megközelítő hőmérsékletek elérésére. A gépkocsikat tervező mérnökök a Stirling-körfolyamatot a jól ismert Otto-körfolyamat lehetséges alternatívájaként vizsgálják.



22-9 ábra
A szomjas madár. Ez a játék bizonyos értelemben olyan hőerőgép, amely két eltérő hőmérsékletű hőtartály között működik. Az alsó üveggömb szobahőmérsékleten van, míg a felső rész kicsit alacsonyabb hőmérsékletre hűl a fejet beborító nedves, bolyhos anyag víztartalmának párologtatásával. A madár belsejében folyékony éter, vagy más hasonló folyadék van, amelynek olyan alacsony a forráspontja, hogy szobahőmérsékleten párolog. A függőleges helyzetben (a) az alsó gömbben lévő növekvő gőznyomás felfelé kényszeríti a folyadékot a fejbe, ahol a gőznyomás kisebb (mivel itt alacsonyabb a hőmérséklet). Ezzel a tömegközéppont a forgástengely fölé kerül és a madár előrelendül, csőrét bemeríti a vízbe, s a fej anyaga így megőrzi nedvességét. Ebben az előre hajló helyzetben (b) a cső mindkét végén nyitva van, a gőznyomás a fej és a test között kiegyenlítődik, és a folyadék vissza tud folyni az alsó üveggömbbe. Ezután a madár függőleges helyzetbe lendül vissza és a ciklus újra kezdődik.

22.6 Az elérhető legnagyobb hatásfok – a Carnot körfolyamat hatásfoka

A termodinamika II. főtételének felhasználásával Carnot számos érdekes következtetést tudott levonni. Gondolatmenete máig érvényes, annak ellenére, hogy abban az időben sem az első főtételt nem ismerték, sem a hőmennyiséget megalapozó molekuláris mozgást nem értették. Az első következtetés, amit tárgyalunk, az ún. Carnot-tétel:

CARNOT-TÉTEL — A Carnot körfolyamat a legjobb hatásfokot biztosítja minden olyan lehetséges hőerőgép közül, amely két megadott hőmérséklet között működik.

Ezt a tételt nem azon a bonyolult – de korrekt – módon fogjuk bizonyítani, ahogy Carnot tette, az I. főtétel nélkül, hanem egy egyszerűbb változatot közlünk, amely felhasználja az első főtételt. Az eljárás a következő. Tegyük fel, hogy egy feltaláló azt állítja, hogy kigondolt egy irreverzibilis hőerőgépet, amely a Carnot-gépnél nagyobb hatásfokú. Annak bizonyítására, hogy állítása hamis, kössük eszközét a 22-10 ábrán látható módon Carnot-féle hőerőgéphez. A Carnot-gép reverzibilis, ami azt jelenti, hogy ellenkező irányban is működtethetjük. A Carnot-gép méretét úgy választottuk meg, hogy a működéséhez szükséges, befektetett W munka pontosan megegyezzen a javasolt gép által végzett W' munkával.

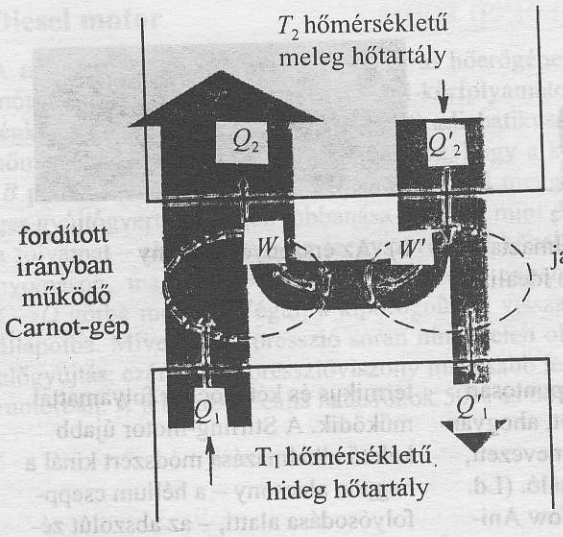
A feltaláló állítása, miszerint gépének hatásfoka felülmúlja a Carnot-gép hatásfokát, így fordítható a matematika nyelvére:

$$\left(\frac{W'}{Q_2'}\right)_{\substack{\text{javasolt}\\ \text{gép}}} > \left(\frac{W}{Q_2}\right)_{\substack{\text{Carnot-}\\ \text{gép}}} \quad \text{(feltételezett igazság)} \qquad \textbf{(22-10)}$$

Mivel $W' = W$, ez azt jelenti, hogy $Q_2 > Q'_2$ **(22-11)**

Az I. főtételből

$$W = Q_2 - Q_1 \quad \text{és} \quad W' = Q'_2 - Q'_1$$



22-10 ábra
Módszer annak bizonyítására, hogy a Carnot-gép a legjobb hatásfokú minden lehetséges hőerőgép közül. A javasolt gép által végzett munka hajtja visszafelé a Carnot-gépet (mint egy hűtőgépet). A vesszős jelölések a javasolt gépre vonatkozó értékeket jelentik.

És mivel $W' = W$, a (22-11) egyenlőtlenséget felhasználva

$$Q_1 > Q'_1 \qquad (22\text{-}12)$$

Így – ahogy megmutattuk, – az együtt működő két gép végeredményben termikus energiát visz át a hideg hőtartályból a meleg hőtartályba anélkül, hogy a környezet bármilyen eredő munkát végezne az együttes rendszeren. Ez sérti a termodinamika második főtételét, miszerint nem készíthető olyan periodikusan működő eszköz, amely termikus energiát visz át hidegebb hőtartályból melegebbe anélkül, hogy a környezet munkát végezne rajta. Ezért a javasolt gép feltételezett hatásfoka nem lehet nagyobb, mint a Carnot-hatásfok.

Hasonlóképpen, ha a javasolt gép reverzibilis, hatásfoka szintén nem múlhatja felül a Carnot körfolyamatét. Erre az esetre vonatkozóan bármelyik gép fordított irányban is működhet. Így hát ismét az iménti gondolatmenet vezet arra a következtetésre, hogy minden reverzibilis hőerőgépnek, amely csupán két adott hőmérsékletű hőtartály között cserél hőt, azonos a hatásfoka: – ez a Carnot-hatásfok.[8] Továbbá a bizonyítás során, mivel nem történt említés a munkaközeg anyagáról, ebből következik, hogy a Carnot-gép hatásfoka független a munkaközegtől.

22.7 A Kelvin-féle abszolút hőmérsékleti skála

Most már ismertethetjük a Kelvin által 1848-ban javasolt abszolút hőmérsékleti skálát. A skála bármely speciális anyag fizikai tulajdonságaitól függetlenül definiálható, mivel ez a Carnot-gép hatásfokán alapul:

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad (22\text{-}13)$$

Kelvin javaslata szerint az új hőmérsékleti skála meghatározásához szükséges alapot a (22-13)-ból adódó

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \qquad (22\text{-}14)$$

összefüggés képezi, ahol T_1 és T_2 a Kelvin-skála két különböző pontja. Mivel az összefüggés csak a hőmérsékletek arányát határozza meg, ki kell jelölnünk a skála egy pontjához tartozó hőmérséklet numerikus értékét. Ahhoz, hogy a hőmérsékleti intervallumok megfeleljenek a Celsius-skálának, legyen az általunk definiált, kitüntetett pont a víz hármaspontja (ld. 19.10 fejezet), s ehhez rendeljük hozzá a 273,16 K értéket. Mivel a hármaspont hőmérséklete 0,01°C, a Kelvin-skála zéruspontja – 273,15°C-nak felel meg.

Jegyezzük meg, hogy a Kelvin-féle skálát energiaaránnyal és nem egy speciális anyag fizikai tulajdonságaihoz kötve határozzuk meg. A víz hármaspontja mindössze úgy kerül a definícióba, mint a Celsius-skálának megfelelő hőmérséklet-intervallumok létrehozásának eszköze.

A Kelvin-hőmérsékletet definiáló egyenlet felírható azzal a hőátvitellel kifejezve, ami akkor megy végbe, amikor egy Carnot-gép úgy működik, hogy az egyik hőtartály a víz hármaspontjának megfelelő hőmérsékletű. Így,

[8] Azt azonban jegyezzük meg, hogy nem szükségszerű, hogy minden reverzibilis hőerőgépnek Carnot-hatásfoka legyen, mivel két adott hőmérsékletű hőtartály között az átmenet nem-adiabatikus módon is létrejöhet. Ezek a nem adiabatikus folyamatok más, közbülső hőmérsékletű hőtartályokkal kapcsolatos további hőcserét foglalnak magukban. Így a hatásfok-számításban nemcsak a Q_1 és Q_2 hő (vagy T_1 és T_2 hőmérséklet) szerepel.

ha Q hőátvitel történik T hőmérsékleten és $Q_{h.p.}$ a $T_{h.p.} = 273{,}16$ K hőmérsékleten, akkor

A KELVIN-FÉLE ABSZOLÚT HŐMÉRSÉKLETI SKÁLA

$$T \equiv (273{,}16\,\mathrm{K})\left(\frac{Q}{Q_{h.p.}}\right) \qquad \textbf{(22-15)}$$

Mivel ezt a hőmérsékleti skálát úgy definiáltuk, hogy nem történt hivatkozás semmilyen speciális anyagra, ténylegesen abszolút skálát kaptunk. A skála hőmérséklet-közeit pontosan annak az állandó térfogatú ideális gáz-skálának megfelelően készítjük el, (ld. 19. fejezet), amely a víz hármaspontját 273,16 K hőmérsékletűnek határozza meg.

22.8 A termodinamika harmadik főtétele

Ha létezne olyan eset, amikor az alacsony hőmérsékletű hőtartály hőmérséklete $T_1 = 0$ K, a Carnot hatásfok $1 - (T_1/T_2) = 1 - 0 = 100\%$ lenne. Az sajnos kísérleti tény, hogy amint egyre alacsonyabb hőmérsékleteket próbálunk elérni, minden egyes következő lépést egyre nehezebb megvalósítani. Valójában azonban elvi okai is vannak annak, hogy elfogadtuk a termodinamika harmadik főtételeként ismert megállapítást:

A TERMODINAMIKA HARMADIK FŐTÉTELE: Lehetetlen egy test hőmérsékletét véges számú lépésben abszolút zérusra csökkenteni.

Ha egy Carnot-körfolyamat abszolút zérus hőmérsékletű hőtartállyal működne ($T_1 = 0$), a (22-3) egyenletből az következne, hogy nem lenne leadott hőmennyiség ($Q_1 = 0$). Mivel a W munka $Q_2 - Q_1$, az ilyen hőerőgép a Q_2 termikus energiát teljes egészében munkává alakítaná, megsértve a második főtételt. Így a harmadik főtétel összefüggő, logikai rendszert alkot a másik három főtétellel: a nulladikkal, az elsővel és a másodikkal. Bár a továbbiakban a harmadik főtétellel nem foglalkozunk, a tétel hozzátartozik a termodinamika megalapozásának teljessé tételéhez.

Összefoglalás

A termodinamika második főtételét különböző – egymással egyenértékű – alakban fejezhetjük ki. Három ilyen megfogalmazás a következő:

A Kelvin-Planck féle megállapítás:
Nem lehetséges olyan, periodikusan működő gépet szerkeszteni, amely termikus energiát 100%-os hatásfokkal alakít át munkává.

A Clausius-féle megállapítás.
Nem lehetséges olyan, periodikusan működő eszközt szerkeszteni, ami termikus energiát visz hidegebb hőtartályból melegebbe anélkül, hogy a környezet munkát végezzen az eszközön.

Termikus energia nem áramlik önként hidegebb testről a melegebbre.

A Carnot-féle körfolyamat olyan reverzibilis folyamatok sorozata, amelyek izotermákból és adiabatákból állnak. Ennek a körfolyamatnak a hatásfoka a maximális lehetséges hatásfok, ami bármely két adott hőmérsékletű hőtartály között működő hőerőgéppel elérhető (Carnot-tétel). A hőerőgépek hatásfoka a következőképpen definiálható:

$$\text{hatásfok} \quad \eta = \frac{\text{hasznos munka}}{\text{befektetett hő}} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad \text{(Carnot)}$$

A hőerőgépek különböző más típusainak körfolyamatai idealizált reverzibilis folyamatokkal közelíthetők; ezek mindegyike lehetővé teszi az maximális elméleti hatásfok kiszámítását.

A Kelvin-féle abszolút hőmérsékleti skála a Carnot körfolyamatban szereplő hőcseréken alapul. A skála bármely speciális anyagtól függetlenül definiálható. Zéruspontja –273,15 °C-nak felel meg és a hőmérsékleti skála közei megegyeznek a Celsius-skálán lévőkkel.

A Carnot körfolyamat, – tekintve, hogy reverzibilis – fordított irányban hűtőgépként működhet, amely hőt visz hidegebb testről melegebb testre és amelynek üzemeltetéséhez munka szükséges. E folyamat hatásosságának mértéke a teljesítménytényező (jósági tényező) (ε):

$$\varepsilon = \frac{\text{a hideg hőtartálytól elvont hő}}{\text{felhasznált munka}} = \frac{Q_1}{W}$$

Carnot-hűtőgépre:

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\varepsilon = \frac{\text{a meleg hőtartálynak szállított hő}}{\text{felhasznált munka}} = \frac{Q_2}{W}$$

Carnot-hőszivattyúra:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

A TERMODINAMIKA HARMADIK FŐTÉTELE *Lehetetlen egy test hőmérsékletét véges számú lépéssel abszolút zérusra csökkenteni.*

Kérdések

1. Le lehet-e egy konyhát hűteni úgy, hogy a hűtőszekrény-ajtót tárva-nyitva hagyjuk?
2. Magyarázzuk meg azt az ellentmondást, ami egy, – az első főtételt megsértő – jellegzetes „örökmozgó" gépben rejlik.
3. Elemezzünk egy olyan jellegzetes „örökmozgót", ami a második főtételt sérti és magyarázzuk meg, hol az ellentmondás.
4. Egy feltaláló azt az igényét jelenti be, hogy olyan eszközt tervezett, amely levegőt vesz fel, a levegő termikus energiájának egy részét munkává alakítja és a lehűlt levegőt egy kipufogó csövön át eltávolítja. Azt állítja, hogy ez az eszköz nem sérti az első főtételt, mivel az energia megmarad. Azt is kijelenti, hogy eszköze nem sérti a második főtételt, mivel a levegőnek nem a teljes termikus energiája alakult munkává. Bizonyítsuk be, hogy a feltaláló eszköze nem működhet, mert sérti a termodinamika egyik, vagy mindkét főtételét.
5. Magyarázzuk meg – a II. főtételt használva központi érvként, – hogy miért nem lehetséges, hogy egy hűtőgép egy testet abszolút zérus hőmérsékletre hűtsön le.
6. Egy amerikai újság 1977-ben beszámolt arról, hogy három üzletember 17.000 dollárt fektetett be egy angol feltalálónál, aki azt állította, hogy olyan autót fejlesztett ki, aminek hajtása kizárólag vízzel történik. A folyamat egy telep áramát hasznosítja arra, hogy a vizet hidrogénre és oxigénre bontsa. A motor ezzel a hidrogéngázzal működik, ez hajtja az autót és közben újratölti a telepet. A feltaláló szerint „mindössze az a teendő, hogy kb. 100 mérföldenként megálljon egy vízcsapnál". Elemezzük ezt a találmányt!
7. Milyen energiaforrás működteti a 22-9 ábrán látható „szomjas madarat"-t?

Feladatok

22.3 A Carnot körfolyamat
22.4 Hőerőgépek hatásfoka

22A-1 Egy Carnot-gép a 400 K és 300 K hőmérséklet között működik. Mekkora a hőerőgép által végzett munka, ha 600 J hőt vesz fel a magasabb hőmérsékletű hőtartályból?

22A-2 Egy gőzgép olyan hideg éghajlaton működik, ahol a kipufogó fáradt gőz hőmérséklete 0 °C. a) Számítsuk ki annak a gőzgépnek a maximális elméleti hatásfokát, amelynél a bemenő gőz hőmérséklete 100 °C. b) Mekkora lesz a lehetséges maximális hatásfok, ha ehelyett 200 °C-os, túlhevített gőzt használunk?

22A-3 Hőerőgép 1000 J munkát végez, miközben 6000 J hőt ad le a hidegebb hőtartálynak. Határozzuk meg a hőerőgép hatásfokát.

22A-4 Ideális hőerőgép teljesítménye 1000 kW. Mennyi hőt ad le másodpercenként a 300 K hőmérsékletű hidegebb hőtartálynak, ha a szükséges hőt egy 800 K hőmérsékletű hőtartályból veszi fel?

22A-5 Egy hőerőgép, amelynek a Carnot-hatásfoka 30%, 400 K hőmérsékletű hőtartályból vesz fel hőt. Határozzuk meg a hidegebb hőtartály hőmérsékletét!

22A-6 Határozzuk meg annak a hőerőgépnek a maximális hatásfokát, amely egy 100 °C-os szénsavas melegvízű forrás és az 5 °C-os levegő között működik.

22A-7 Egy energiatakarékos hőerőgépre tett javaslat a trópusokon az óceán felszíni vizét magasabb hőmérsékletű (22 °C -os) hőtartályként, a 700 m mélységben lévő, 5 °C -os víznek pedig alacsonyabb hőmérsékletű hőtartályként való felhasználását ajánlja. Határozzuk meg az ilyen hőerőgép maximális termikus hatásfokát.

22A-8 Egy 15% hatásfokú hőerőgép 1000 J munkát végez. Határozzuk meg a magasabb hőmérsékletű hőtartályból felvett hőmennyiséget.

22B-9 Egy bizonyos termodinamikai gép 100°C és 400°C között működik. a) Határozzuk meg, az elméletileg elérhető maximális hatásfokot! b) Mekkora a tényleges hatásfok, ha a hőerőgép háromszor annyi hőt ad le, mint amekkora a végzett munka nagysága?

22B-10 Ábrázoljuk a Carnot-körfolyamatot hőmérséklet-térfogat diagramon.

22B-11 Egy hűtőgép, amelynek tejlesítménytényezője 5, egy – 50°C-os hőtartályból von el hőt. Határozzuk meg a melegebb hőtartály hőmérsékletét.

22B-12 Egy bizonyos hőerőgép, amely 300 °C és 9°C között működik, 25 % maximális elméleti hatásfokot ér el. Mekkora befektetett hőmennyiség szükséges 10^4 J munkavégzéshez?

22B-13 Igazoljuk, hogy egy hűtőgép teljesítménytényezője $\varepsilon = Q_1/W$ egyenlő a Carnot-féle hűtőgépre vonatkozó értékkel: $T_1/(T_2-T_1)$

22B-14 Egy feltaláló azt állítja, hogy tervezett egy hőerőgépet, amely 10°C és 25°C között, 53% termodinamikai hatásfokkal működik. Ez egy bonyolult gép sok hengerrel, felszereléssel és más mechanizmusokkal. Hogyan vitathatnánk a feltaláló kijelentését az eszköz vizsgálata nélkül?

22B-15 a) Mennyi munka szükséges ahhoz, hogy 4187 J termikus energiát a 0°C-os fagyott talajból egy 27°C-os házba szivattyúzzunk egy Carnot-féle hűtőgéppel? b) Összesen mennyi a házban leadott hőmennyiség?

22B-16 Egy Carnot-féle hőerőgép visszafelé működik, mint hűtőgép. Hőt von el egy 250 K hőmérsékletű hőtartályból és hőt ad le 350 K hőmérsékleten. Mennyi hő jut a magas hőmérsékletű hőtartályba a hideg hőtartályból elvont 1 J hő árán?

22B-17 Carnot-féle hűtőgép 27°C-os szobahőmérséklet és egy fridzsider mélyhűtőjének hőmérséklete között működik. Mekkora munkára van szükség ahhoz, hogy 10 J hőt vonjunk el a) egy 0°C-os mélyhűtőből és b) egy – 50°C-os mélyhűtőből?

22B-18 Egy amerikai házat hőszivattyúval fűtenek, amelynek teljesítménytényezője 3. Mekkora lenne a költség a szokásos elektromos fűtést alkalmazva a hőszivattyú helyett, ha a hőszivattyú üzemeltetéshez a havi villanyszámla 45 dollár?

22B-19 Egy 200°C és 80°C között működő hőerőgép 20% maximális hatásfokot ér el. Mekkora befektetett energia teszi lehetővé, hogy a hőerőgép 10^4 J munkát végezzen?

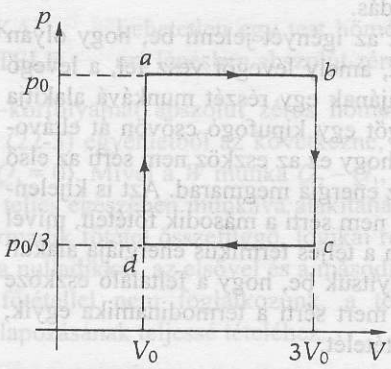
22B-20 0,4 kW-os motor működtet egy Carnot-féle hűtőgépet, amely – 10°C és 27°C között üzemel. Határozzuk meg, mekkora a) az alacsony hőmérsékletű hőtartályból másodpercenként elvont hőmennyiség és b) a magas hőmérsékletű hőtartálynak másodpercenként leadott hőmennyiség!

22B-21 Egy átlagos felnőtt, aki keményen dolgozik, 8 órás munkanap alatt kézi erővel 0,13 kWh fizikai munkát tud végezni. a) Becsüljük meg, hogy hány embernek kellene villamos generátorokat kézi forgattyúval hajtani – 100 %-os hatásfokot feltételezve, – egy 6000 W-ot igénylő előadóterem megvilágításához (ez jellemző egy 100 fős, jól megvilágított tanteremre). b) Határozzuk meg egy 8 órás munkanap teljes költségét, ha ezeknek az embereknek a munkabére óránként 5 dollár. c) Mennyi a napi teljes költség az 1 kWh-ra 10 centet számoló energiaszolgáltató vállalatnál? (Megjegyzés: a fenti becslés fénycsővel történő világításra vonatkozik. Izzólámpák háromszor-négyszer annyi energiát igényelnek ugyanilyen megvilágításhoz. A fűtéshez és a légkondicionáláshoz szükséges energiát nem vettük figyelembe.)

22B-22 Oldjuk meg az előző feladatot a saját osztálytermünk világítására vonatkozó energiafogyasztás felmérésével.

22.5 Néhány más hőerőgép-típus

22B-23 Egyatomos ideális gázzal a 22-11. ábrán látható, $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ „derékszögű" körfolyamatot végezzük. a) Határozzuk meg a gáz által végzett eredő munkát p_0 és V_0 segítségével! b) Határozzuk meg a körfolyamat hatásfokát!



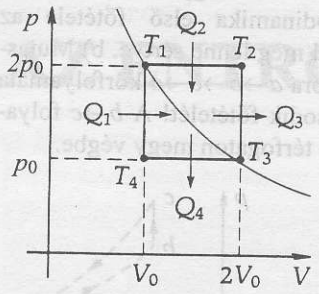
22-11 ábra
A 22B-23 és a 22B-24 feladathoz

22B-24 Tegyük fel, hogy az előző feladatban, miután a gázt végigvittük az $a \rightarrow b \rightarrow c$ folyamatokon, c-ből egy egyenes mentén visszavisszük az a pontba. a) Határozzuk meg a gáz által egy ciklus alatt végzett eredő munkát! b) Határozzuk meg a $c \rightarrow a$ folyamat során átvitt hő mennyiségét! c) Határozzuk meg a körfolyamat hatásfokát!

22B-25 Egy hőerőgép egyatomos ideális gázt alkalmaz a 22-12 ábrán látható, „négyzet" alakú körfolyamatban, amely két izobár és két izochor változást tartalmaz. A T_1 és T_3 hőmérséklet azonos izotermán helyezkedik el. Számítsuk ki a hőerőgép hatásfokát!

22.6 Az elérhető legnagyobb hatásfok, – a Carnot körfolyamat hatásfoka

22B-26 Vezessük le a (22-12) egyenlettel kifejezett egyenlőtlenséget a (22-10) egyenletből kiindulva!



22-12 ábra
A 22B-25 feladathoz

További feladatok

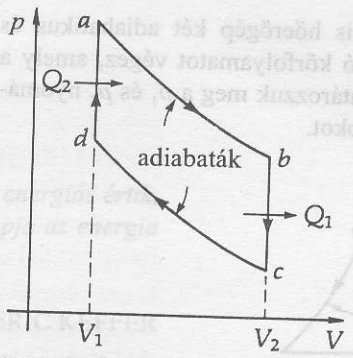
22C-27 Egy épület 24°C-ra történő fűtéséhez – 0°C-os külső hőmérséklet mellett – óránként $6 \cdot 10^7$J energia szükséges, amit hőszivattyú biztosít. a) Mekkora az ezen két hőmérséklet között működő, Carnot-körfolyamatot végző hőszivattyú maximális elméleti teljesítménytényezője? b) Mennyi villamos energia szükséges óránként a valóságos hőszivattyú működtetéséhez, ha teljesítménytényezője 2,9? c) Tegyük fel, hogy a szivattyú az épületet közvetlenül villanykályhával fűti. Mennyi villamos energiát használnak ebben az esetben egy óra alatt? d) Az épület fűtésének másik alternatívája a hagyományos olajtüzelésű kazán lenne. Hány liter olajat használ fel óránként a 70%-os hatásfokú kazán, ha 1 liter olaj elégetésekor $3{,}7 \cdot 10^7$J energia termelődik? e) Tegyük fel, hogy egy olajtüzelésű villamos generátor villamos energia termelése 42% hatásfokú és ezt az energiát használják a hőszivattyú működtetésére. Hány liter olajat kell óránként elégetni?

22C-28 Két Carnot-gép működik két adott hőmérséklet között. Az egyik egyatomos ideális gázt használ, a másik kétatomosat. Mindkettőre azonos a legkisebb és legnagyobb nyomás, ill. a legkisebb és a legnagyobb térfogat. Azonos-e vajon az egy ciklusban végzett munka? Ha nem, melyik a nagyobb és miért? (Megjegyzés: nem szükséges matematikai számításokat végezni; kizárólag termodinamikai megfontolás is elegendő.)

22C-29 Egy hűtőgép hőt von el a – 15°C-os mélyhűtőjéből és hőt ad le a 27°C-os szobába. Ha a maximális teljesítménytényező 30%-át éri el, mekkora motorteljesítmény szükséges ahhoz, hogy a fridzsider percenként 40 g, 27°C-os vizet fagyasszon – 15°C-os jéggé?

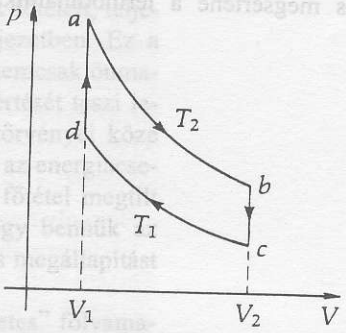
22C-30 Két Carnot-gép ugyanazon két, – állandó hőmérsékletű – hőtartály között üzemel. Az egyik egyatomos ideális gázt használ, a másik kétatomosat (forgással, de rezgés nélkül). Mindkettő ugyanarról a kezdeti p_0 és V_0 értékről indul és ugyanazon az izotermikus expanzión keresztül éri el a p_1 és V_1 értéket. a) Azonos-e a két hőerőgép hatásfoka? b) Azonos-e az izotermikus expanzió során felvett hő? (Ha nem, melyik a nagyobb?) c) Azonos-e az egy ciklus során végzett munka? (Ha nem, melyik a nagyobb?) Indokolja minden esetben a választ!

22C-31 Egy reverzibilis hőerőgép a 22-13 ábrán látható módon Ottó-körfolyamatot végez, amely két adiabatikus és két izochor folyamatból áll. Határozzuk meg a V_1 és V_2 térfogatokkal kifejezett hatásfokot.

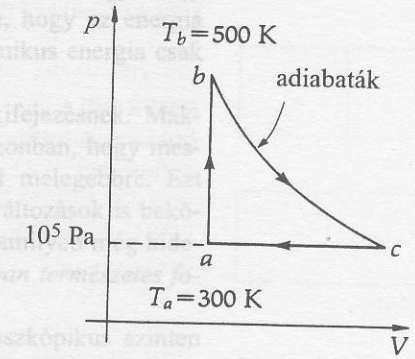


22-13 ábra
A 22C-31 feladathoz

22C-32 Reverzibilis hőerőgép a 22-14 ábrán látható körfolyamattal működik, amely két izotermikus és két izochor változásból áll. Határozzuk meg a hőerőgép hatásfokát és mutassuk meg, hogy az kisebb, mint a két azonos hőmérséklet között működő Carnot-körfolyamat hatásfoka. Tegyük fel, hogy a munkaközeg egyatomos ideális gáz.



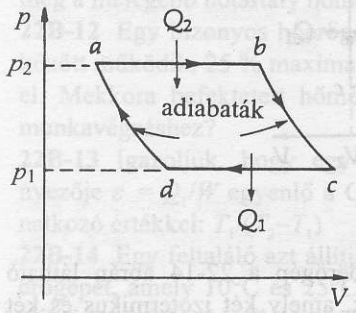
22-14 ábra
A 22C-32 feladathoz



22-15 ábra
A 22C-33 feladathoz

22C-33 Ideális hőerőgép 0,2 mól ideális gázzal (K = 5/3) a 22-15 ábrán látható körfolyamatot végzi. Az $a \rightarrow b$ folyamat izochor, a $b \rightarrow c$ adiabatikus és a $c \rightarrow a$ izobár. Az ábra mutatja az a és b pont hőmérsékletét. a) Határozzuk meg p, V és T ismeretlenek értékét az a, b és c pontokban! b) Határozzuk meg az egy ciklus alatt végzett eredő munkát.

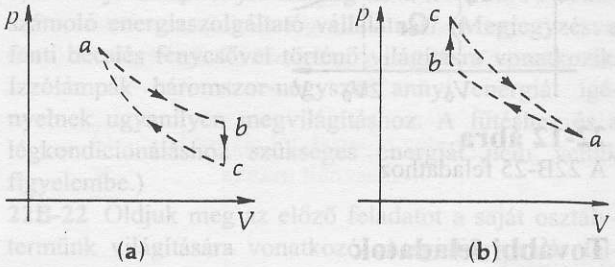
22C-34 Egy reverzibilis hőerőgép két adiabatikus és két izobár görbéből álló körfolyamatot végez, amely a 22-16 ábrán látható. Határozzuk meg a p_1 és p_2 nyomásokkal kifejezett hatásfokot.



22-16 ábra
A 22C-34 feladathoz

22C-35 Tegyük fel, hogy a p-V diagramon két adiabata metszi egymást. Mutassuk meg, hogy az ezekből a görbékből és egy izotermikus tágulásnak megfelelő görbéből alkotott zárt ciklus megsértené a termodinamika második főtételét!

22C-36 a) Mutassuk meg, hogy ha két adiabata a 22-17a ábrán látható módon metszené egymást (szaggatott görbék), akkor a termodinamika első főtétele az $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ körfolyamattal meg lenne sértve. b) Mutassuk meg, hogy a 22-17b ábra $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ körfolyamata sérti a termodinamika második főtételét! A $b \rightarrow c$ folyamat mindkét ábrán állandó térfogaton megy végbe.



22-17 ábra
A 22C-36 feladathoz

22C-37 Egy új abszolút hőmérsékleti skála, amelyet az „új T"-re vonatkozóan „újté fokok"-nak neveznek, egy speciális vegyület fagyás- és forráspontján alapul. E két hőmérséklet között működő Carnot-hőerőgép 800 J hőt vesz fel a magasabb hőmérsékleten és 600 J hőt ad le az alacsonyabb hőmérsékleten. Határozzuk meg azt a hőmérsékletet – „újté" fokokban, – amelyen ez a vegyület megolvad, ill. amelyen forr, ha ezt a két hőmérsékletet 100 „újté" fok választja el egymástól.

20A-11 $1{,}7 \times 10^5$ N
20A-13 a) $1{,}10 \times 10^{30}$ elektron b) $1{,}82 \times 10^6$ mol
20A-15 8,01 km
20B-17 a) 0,489 atm b) 0,888 kg/ m^3
20B-19 6,59 m^3
20B-21 átlagban 59,0 atom
20B-23 átlagosan 3,48 molekula
20B-25 a) 2,56 atm b) 16,1 m
20B-27 A válasz adott.
20A-29 a) $4{,}14 \times 10^{-16}$ J b) $7{,}04 \times 10^5$ m/s
20A-31 $5{,}80 \times 10^9$ K
20B-33 A válasz adott.
20B-35 b) A szökési sebesség 10,8%-a
20B-37 $(8{,}28 \times 10^{-9}/l^3)$ N/m^2 (l méterben)
20C-39 $8{,}22 \times 10^{23}$ ütközés/sec
20C-41 $mv^2/3l^3$
20C-43 A válasz adott.
20C-45 $\omega = v\theta/x$
20C-47 385 m/s, 417 m/s
20C-49 a) 1,77 cm b) 12,6C°
20C-51 63,4C°

XXI. Fejezet

21A-1 a) 209 J b) 209 J c) 0 d) 0,0896 l
21A-3 a) 0,144 atm b) 157 K
21A-5 a) 0,160 atm b) 131 K
21B-7 a) 546 K b) 4538 J
c) $1{,}13 \times 10^4$ J d) 6806 J
21B-9 A válasz adott.
21B-11 $2{,}09 \times 10^4$ J
21B-13 A válasz adott.
21A-15 $2{,}93R$
21B-17 a) 216C° b) 0,178 L
21B-19 $4{,}14 \times 10^{-21}$ J
21A-21 56,1
21C-23 A válasz adott.
21C-25 a) 70,2 J b) 36,0 J c) 208,3 J
d) –53,6 J e) –36,0 J f) 16,6 J
21C-27 a) 47,3 J b) $1{,}61 \times 10^{-4}$ m^3 c) 13,5 J
d) 33,8 J
21C-29 b) $\frac{13}{11}$

XXII. Fejezet

22A-1 150 J
22A-3 14,2%
22A-5 280 K
22A-7 5,76%
22B-9 a) 44,6% b) 25%
22B-11 –5,40C°
22B-13 A válasz adott.
22B-15 a) 414 J b) 4600 J
22B-17 a) 0,99 J b) 3,45 J
22B-19 $1{,}97 \times 10^5$ J
22B-21 a) 370 személy b) 14800,00 dollár c) 4,80 dollár
22B-23 a) $\frac{4}{3}P_oV_o$ b) 22,2%
22B-25 $\frac{2}{13}$
22C-27 a) 12,4 b) $2{,}07 \times 10^7$ J c) $6{,}00 \times 10^7$ J
d) 2,32 l e) 1,33 l
22C-29 173 W
22C-31 $\left(1-\frac{V_1}{V_3}\right)^{(\gamma-1)}$
22C-33 a) α: 4,92 ℓ; b: 1,67 atm; c: 6,69 ℓ, $T_c = 408$ K
b) 52,7 J
22C-35 A válasz adott.
22C-37 300 N, 400 N

XXIII. Fejezet

23A-1 -24,2 J/K
23A-3 123 J/K
23A-5 5,27 J/K
23B-7 12,6 J/K
23B-9 A válasz adott.
23B-11 $\sim 5 \times 10^5$ J/K
23B-13 A válasz adott.
23C-15 3807 J
23C-17 A válasz adott.
23C-19 b) $mc\left[(T_2+T_1)-2\sqrt{T_2T_1}\right]$
23C-21 A válasz adott.
23C-23 A válasz adott.
23C-25 a) 588 J b) zérus c) 1,96 J/K d) 1,96 J/K
23C-27 $8k \ln 2$
23C-29 $2{,}40 \times 10^{26}$ J/K·h

AZ ENTRÓPIA

A jövő azoké, akik kezelni tudják az entrópiát; akik csak az energiát értik, azok csupán könyvelők lesznek... A korai ipari forradalom alapja az energia volt, a jövő önműködő gyára azonban az entrópia forradalma!

FREDERIC KEFFER

A termodinamika törvényei:

1. *Nem nyerhetsz.*
2. *Nem tarthatod egyensúlyban a nyereséget és a veszteséget.*
3. *Nem hagyhatod abba a játékot.*

23.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben egy más szempontból vizsgáljuk a második főtételt, teljesen más perspektívából közelítünk hozzá, mint az előző fejezetben. Ez a megközelítés új fogalmat foglal magába: *az entrópiát*, amely nemcsak önmagában érdekes, de a második főtételnek sokkal mélyebb megértését teszi lehetővé. A termodinamika főtételei a fizika legáltalánosabb törvényei közé tartoznak. Az első főtétel azt mondja ki számunkra, hogy a hő az energiacsere egyik formája és, hogy az energia megmarad. A második főtétel megtílt bizonyos energiaátalakítási folyamatokat, annak ellenére, hogy bennük az energia végső soron megmaradna. Így a második főtétel fontos megállapítást tesz arról, hogy mi nem tehető meg.

A természetben lejátszódó folyamatok – az un. „természetes" folyamatok – gyakran járnak hőáramlással meleg testektől a hidegebbek felé. Valójában nincs tökéletes hőszigetelés, így hőveszteségek mindig előfordulnak. Másrészt, a fordított folyamat, – hőáramlás hidegebbről melegebb testre – sohasem fordul elő természetes módon. Nem melegedhetünk fel úgy, hogy magunkhoz szorítunk egy jégcsapot, annak ellenére sem, hogy az energia megmaradna a hőátadási folyamat során. Úgy tűnik a termikus energia csak „lefelé megy", magasabb hőmérsékletről alacsonyabbra.

Ez az egyik jelentése az „irreverzibilis folyamat" kifejezésnek. Makroszkópikus szinten hő sohasem áramlik „felfelé". Igaz azonban, hogy mesterségesen átvihetünk termikus energiát hidegebb testről melegebbre. Ezt teszi minden hűtőgép. De ennek az az ára, hogy további változások is bekövetkeznek: a környezet munkát végez a rendszeren, és valamilyen még hidegebb test még több termikus energiát vesz fel. *Minden olyan természetes folyamat, amely hőáramlással jár, irreverzibilis.*

Az ilyen folyamatok közös vonása az, hogy mikroszkópikus szinten egyre növekvő rendezetlenséggel járnak. Ez a kettős megközelítés – a makroszkópikus hőáramlás és a mikroszkópikus rendezetlenség – ugyanannak az alapjelenségnek kétféle megközelítési módja. Tárgyalásunkat a makroszkópikus szemponttal kezdjük.

23.2 Entrópia makroszkópikus szempontból

Idézzünk fel az előző fejezetben tárgyalt termodinamikai folyamatokra vonatkozó néhány eredményt! A (22-12) egyenletből a Carnot-körfolyamatra a következő összefüggés adódik:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \qquad \textbf{(23-1)}$$

Tekintsük most a Q hőátvitelt algebrai mennyiségnek és legyen Q *pozitív*, ha hő *kerül a* rendszerbe és *negatív*, ha hő *távozik* a rendszerből. (Bár ez az előjelhasználat eltér a Carnot-körfolyamat tárgyalásakor használttól, megegyezik az I. főtételben alkalmazott előjellel és ez az elfogadott az entrópia tárgyalásánál is.) Elfogadva ezt az előjelkonvenciót, a (23-1) egyenletből arra a következtetésre jutunk, hogy ha a Q/T un. redukált hőmennyiségeket teljes (reverzibilis) Carnot-ciklus mentén összegezzük, az eredmény zérus:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

Még tömörebb jelöléssel

Egy Carnot-ciklusra: $$\sum_{\substack{\text{(a teljes}\\ \text{ciklus}\\ \text{mentén)}}} \left(\frac{Q}{T}\right) = 0 \qquad \textbf{(23-2)}$$

Emlékeztetünk arra, hogy a Carnot-körfolyamat definíció szerint reverzibilis körfolyamat. Mi a helyzet vajon más reverzibilis körfolyamatokkal, amelyek nem követik a Carnot-ciklus görbéjét? Mennyi a Q/T redukált hők összege ezekben az esetekben? Amint azt a legutóbbi fejezetben megmutattuk, tetszőleges reverzibilis körfolyamat Carnot-ciklusokat alkotó izotermikus és adiabatikus lépések sorozatával közelíthető (ld. 22-5. ábra). Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy bármely reverzibilis körfolyamat mentén a redukált hők $\Sigma(Q/T)$ összege szintén zérus.

Bármely reverzibilis körfolyamatra: $$\sum_{\substack{\text{(a teljes}\\ \text{ciklus}\\ \text{mentén)}}} \left(\frac{Q}{T}\right) = 0 \qquad \textbf{(23-3)}$$

Rudolf Clausius, német fizikus,1865-ben a Q/T mennyiséget „az **entrópiá**-nak (S)" nevezte el a görög trope szó után, aminek jelentése „változás", vagy „átalakítás". (Clausius ezt a fogalmat a rendszer átalakító képességének mértékeként kezelte.) Az entrópia infinitezimális (reverzibilis) változását (dS) a következő összefüggéssel definiáljuk:[1]

		Integrálalakban:
ENTRÓPIA S (makroszkópikus definíció)	$dS = \frac{\delta Q}{T}$	$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ **(23-4)**
Zárt reverzibilis folyamatra:	$\Delta S = 0$	$\oint dS = 0$

[1] Hivatkozunk a 21. fejezet (4) lábjegyzetére. A δQ jelölés azt fejezi ki, hogy a hő nem teljes differenciál. Ezzel szemben $\delta Q/T$ teljes differenciál, így S (Q-val és W-vel ellentétben) a p, V, T és U mennyiségekkel együtt állapotváltozó.

Az entrópiát – SI egységekkel – joule/kelvin-ben mérjük. A δQ hőátvitel pozitív, amikor hőt vesz fel a rendszer és negatív, amikor hőt vonunk el a rendszertől. Két állapot között *bármely reverzibilis úton* haladhatunk, mivel – a (23-3) egyenlet alapján – a két állapot mindegyike rajta van valamelyik, reverzibilis körfolyamatot leíró, zárt görbén.

Jegyezzük meg, hogy a definíció csak az entrópia *megváltozását* rögzíti, az egyes állapotokhoz tartozó abszolút entrópia skálát azonban nem jelöli ki. Ebből a szempontból az entrópia és a gravitációs potenciális energia hasonló egymáshoz, mindkét mennyiségnek *csak a megváltozása fontos*. (Az entrópia esetén is – éppúgy, mint a gravitációs energiánál – egy adott rendszer meghatározott állapotához, mint referenciaponthoz hozzárendelhetnénk egy számértéket. Ezután az egymást követő változásokat kiszámítva már minden esetben meghatározhatnánk az entrópia abszolút értékét is.)

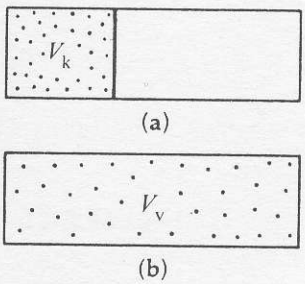
Az entrópia állapotfüggvény

A termodinamikában bizonyos változók speciális fontossággal bírnak, mivel ezek ún. *állapotfüggvények*: a rendszer adott állapotában mindig ugyanazt az értéket veszik fel. Ilyen állapotfüggvény az abszolút hőmérséklet (T) és a belső energia (U) is (*állapotváltozóknak* is nevezik őket). Az entrópia azért is fontos, mert szintén állapotfüggvény. Értékének megváltozása, miközben a rendszer egyik állapotból a másikba jut, *csak magától a két állapottól, nem pedig az állapotokat összekötő úttól függ*. Ugyanúgy viselkedik minden más állapotfüggvény is, mint például a belső energia (U), a nyomás (P) és a hőmérséklet (T). (Emlékeztetünk arra, hogy – amint azt a 21.3 fejezetben tárgyaltuk, Q és W nem állapotfüggvény.) A rendszer állapotváltozói közötti egyensúlyi állapotban mindig fennálló kapcsolatot *állapotegyenletnek* nevezzük.

A *hőmérsékletet* (T) és a *belső energiát* (U) rendre a nulladik, ill. az első főtétel segítségével definiáltuk. Az *entrópia* (S) a második főtételhez kapcsolódik. Az entrópia fontos fogalom, mivel – amint azt a későbbiekben megmutatjuk – egy rendszerben rendelkezésre álló energia „minőségének" a mértékeként, nevezetesen az energia „munkára foghatóságának" mértékeként értelmezhető! Pusztán egy rendszer teljes energiájának ismerete nem elegendő annak meghatározására, hogy mennyi munkát képes végezni a rendszer. Erről csak a rendszer entrópiája ad információt.

Eddig csak teljes reverzibilis körfolyamatokat vizsgáltunk. Mi a helyzet azonban egy olyan folyamattal, amelynek során egy rendszer csupán az egyik állapotból a másik állapotba jut? Bár nem biztos, hogy az ilyen folyamat reverzibilis, az entrópiaváltozást a kezdeti és végállapot között mindig ki tudjuk számítani úgy, hogy *tetszőleges*, a két állapotot összekötő reverzibilis folyamatot veszünk figyelembe. *Ez lehetséges, mivel az entrópia állapotfüggvény*. Nem számít, hogy milyen úton jutunk az 1 állapotból a 2 állapotba, az entrópiaváltozás azonos.

Példaként vegyük azt az entrópiaváltozást, ami akkor következik be, amikor egy ideális gáz kezdetben egy edény kis térfogatrészére van összenyomva egy válaszfallal, amit később eltávolítunk. Ekkor *a gáz szabadon kitágul* V_k-ról V_v térfogatra (ld. 23-1 ábra). A folyamat irreverzibilis. A nyomás, sűrűség és hőmérséklet ugyanis nem azonos a folyamat során a gáz egészében. Eltérésük mértéke nagyobb, mint a reverzibilis változások során megengedett kicsiny különbségek. Például a gyorsabb, „melegebb" molekulák gyorsabban hatolnak be az üres térbe, mint a lassúbb molekulák. Így, – mivel a gáz nincs termikus egyensúlyban a tágulás során, – nem alkalmazhatjuk az állapotegyenletet az entrópiaváltozás számításakor. Bizonyos értelemben elveszítjük a folyamat matematikai kontrollját. Mivel a rendszer entrópiája csak a rendszer állapotától függ, az irreverzibilis tágulás alatt bekövetkező entrópiaváltozásnak egyenlőnek kell lennie az ugyanazon két



23-1 ábra
Szabad expanzió során a gázt nagyobb térfogatra hagyjuk tágulni, és így betölti a vákuum helyét.

állapotot összekötő, bármely reverzibilis úton bekövetkező entrópiaváltozással. Ez az a módszer, amit az irreverzibilis folyamatokra vonatkozó entrópiaváltozás meghatározásakor használunk: az entrópiaváltozást az azonos kezdeti és végállapotot összekötő valamilyen más, megfelelő reverzibilis út felhasználásával számítjuk ki.

Szabad tágulás során a gáz összenergiája nem változik, fontos azonban tudnunk: az entrópia növekszik. Tovább követve ezt a megállapítást, tekintsük át a következő gondolatmenetet. Mivel a gáz vákuumba tágul, nem végez munkát, ezért $W = 0$. Továbbá a tartály hőszigetelt, így a gázzal nem közlünk hőt sem, ezért $Q = 0$. Az I. főtétel szerint:

$$\Delta U = Q - W,$$

innen $$\Delta U = 0.$$

Mivel $\Delta U = 0$, a hőmérséklet állandó marad. Tehát a két állapotot összekötő reverzibilis folyamat egyik típusa az izotermikus tágulás. Jegyezzük meg, hogy annak ellenére, hogy szabad tágulást vizsgálunk, – *mivel az entrópia csak a rendszer állapotától függ*, – az entrópiaváltozást számíthatjuk egy *másik* folyamatra, amellyel könnyebben dolgozhatunk (izotermikus tágulás). Az így kapott eredmény egyben megegyezik az éppen vizsgált szabad tágulás során bekövetkező entrópiaváltozással is.

A 21. fejezet (21-5) egyenlete szerint V_k -tól V_v -ig történő izotermikus táguláshoz Q hőmennyiség szükséges:

$$Q = nRT \ln \left(\frac{V_v}{V_k} \right) \qquad \textbf{(23-5)}$$

Így a reverzibilis tágulás során bekövetkező (Q/T) entrópiaváltozás, ami egyben a kérdéses szabad expanzióra is ugyanannyi:

ENTRÓPIAVÁLTOZÁS SZABAD TÁGULÁS SORÁN

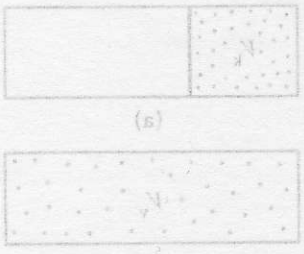
$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_v}{V_k} \right) \qquad \textbf{(23-6)}$$

A szabad tágulás mellett az entrópia akkor is nő, amikor kipukkasztunk egy léggömböt, amikor lehelünk, vagy amikor egy autó kipufogócsöve gázokat bocsát ki, stb.

A makroszkópikus folyamatok mindig úgy mennek végbe, hogy az entrópia növekedjék. Az entrópiának ezt az egyirányú változását a „természet nyilá"-nak nevezik, mivel azt az irányt jelzi, amerre minden természetes folyamat halad. Ezt matematikailag így fejezzük ki:

$$\Delta S_{\text{Univerzum}} > 0 \qquad \textbf{(23-7)}$$

A természetes (irreverzibilis)folyamatokra



23-1 PÉLDA

Mekkora az entrópiaváltozás, amidőn 2 kg, 0°C-os jég 0°C-os vízzé olvad?

MEGOLDÁS

A hőmérséklet állandó marad az egész folyamat során: $T = 0°C = 273$ K. A hőátvitel a jég-víz fázisátmenetnek köszönhető. Feltételezzük, hogy hőátvitel csak differenciálisan kicsiny hőmérsékletkülönbség eredményeképpen jön létre. Így a folyamat reverzibilis és alkalmazhatjuk a (23-4) egyenletet. A jég olvadáshője: $L = 3{,}34 \times 10^5$ J/kg. Így

$$Q = mL = 2\ \text{kg}\ 3{,}34 \times 10^5\ \text{J/kg} = 6{,}68 \times 10^5\ \text{J}$$

és az entrópiaváltozás:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{6{,}68 \times 10^5\ \text{J}}{273\ \text{K}} = 2{,}45 \times 10^3\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

23-2 PÉLDA

Egy m_2 tömegű, c_2 fajhőjű, T_2 hőmérsékletű, forró követ m_1 tömegű, c_1 fajhőjű, T_1 hőmérsékletű, hideg vízet tartalmazó tartályba dobunk. ($T_1 < T_2$). A végső hőmérséklet T_v. (A tartállyal kapcsolatos hatásokat elhanyagoljuk.) Mekkora az entrópiaváltozás a folyamat során?

MEGOLDÁS

A folyamat irreverzibilis, mivel véges hőmérsékletkülönbséggel jár. Ha azonban elképzelünk egy, a kezdeti és végállapotot összekötő reverzibilis folyamatot, az entrópiaváltozás az általunk keresett érték lesz (mivel az entrópiaváltozás nem függ az úttól). Így elképzeljük, hogy a kő fokozatosan – azaz reverzibilisen – hűl T_v-re, csupán elemien kicsiny (differenciális) hőmérsékletkülönbségek és differenciális hőcserék során. Hasonló korlátozásokat alkalmazunk a víz melegedésére. Ezen az alapon az entrópiaváltozás:

$$\Delta S = \int_{\text{víz}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\text{kő}} \frac{\delta Q}{T}$$

A differenciális hőmennyiség: $\delta Q = mc\,dT$. Így

$$\Delta S = m_1 c_1 \int_{T_1}^{T_v} \frac{dT}{T} + m_2 c_2 \int_{T_1}^{T_v} \frac{dT}{T}$$

$$= m_1 c_1 (\ln T_v - \ln T_1) + m_2 c_2 (\ln T_v - \ln T_2)$$

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \left(\frac{T_v}{T_1} \right) + m_2 c_2 \ln \left(\frac{T_v}{T_2} \right)$$

Az első kifejezés pozitív, mert $T_v > T_1$, a második pedig negatív, mert $T_v < T_2$. Azonfelül kimutatható, hogy mivel $T_1 < T_v < T_2$, a pozitív tag nagysága mindig nagyobb, ami minden esetben entrópia-*növekedést* eredményez.

23-3 PÉLDA

Vörösréz rúd végei termikus kapcsolatban vannak a $T_2 = 500$ K hőmérsékletű hőtartállyal, ill. a $T_1 = 300$ K hőmérsékletű hőtartállyal. Határozzuk meg a) az egyes hőtartályok entrópiaváltozását, b) a rúd entrópiaváltozását és c) a Világegyetem entrópiaváltozását, ha a rúd egyik végétől a másikig átvezetett hő 8000 J, miközben a rúd mentén a hőmérsékleteloszlás nem változik!

MEGOLDÁS

a) Emlékezzünk arra, hogy egy rendszertől elvont hő negatív. A meleg hőtartály entrópiaváltozása

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2} = \frac{-8000\,\mathrm{J}}{500\,\mathrm{K}} = -16{,}0\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

A hideg hőtartály entrópiaváltozása

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} = \frac{+8000\,\mathrm{J}}{300\,\mathrm{K}} = +26{,}7\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

b) A rúd termikus energiájában, ill. hőmérsékletében nem történt változás. Ezért

$$\Delta S_{\text{rúd}} = 0$$

c) A Világegyetem eredő entrópiaváltozása:

$$\Delta S_{\text{univerzum}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{\text{rúd}} = 26{,}7\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + \left(-16{,}0\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right) + 0$$

$$= 10{,}7\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

23.3 Entrópia vizsgálata mikroszkópikus szempontból

A termodinamika más témáihoz hasonlóan, az entrópia fogalom mikroszkópikus megfontolásokkal – azaz a molekuláris mozgások statisztikus elemzésével – éppúgy megközelíthető, mint makroszkópikus fogalmakból kiindulva (nyomás, hőmérséklet, vagy más, laboratóriumi eszközökkel mérhető paraméterek). Tekintsük az éppen most vizsgált folyamatot, az ideális gáz szabad tágulását, mikroszkópikus szempontból.

A kinetikus elmélet szerint a gázmolekulákat véletlenszerű mozgásban lévő tömegpontoknak képzeljük. Kezdetben az egész gáz a V_k térfogatra van összenyomva (23-1a ábra). Amikor eltávolítjuk a válaszfalat, a molekulák – végül is, – többé-kevésbé egyenletesen oszlanak el mindenütt a nagyobb V_v térfogatban. A pontos eloszlás valószínűségi kérdés.

Az eloszlásra vonatkozó valószínűség meghatározását a szabad tágulás során előforduló részecske-elrendeződések valószínűségének meghatározásával kezdjük. A válaszfal eltávolítása utáni pillanatban – mielőtt a molekuláknak esélyük lenne arra, hogy elmozduljanak a tartály másik felébe, – az összes molekulát a kezdeti, V_k térfogatban találjuk. Ennek a speciális elrendezésnek a valószínűségét könnyen megbecsülhetjük, ha „természetes módon" lép fel a molekuláknak a nagyobb V térfogatban végzett mozgása során. Ebben az esetben, mivel minden egyes molekula szabadon mozog a teljes térfogatban, egy adott molekula megtalálásának valószínűsége (W_k) a V_k térfogatban – ami a teljes térfogat (V_k / V) törtrésze – éppen a térfogatok aránya:

$$\text{Valószínűség} \qquad W_k = \frac{V_k}{V} \qquad \text{(egy molekulára)} \qquad \textbf{(23-8)}$$

További molekulákat adva a rendszerhez, ha a részecskék egymástól függetlenül mozognak, a valószínűségek összeszorzódnak. Ezért annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg N molekula található V_k térfogatban:

$$W_k = \left(\frac{V_k}{V}\right)^N \quad (N \text{ molekulára}) \qquad \textbf{(23-9)}$$

Hasonlóképpen, annak valószínűsége, hogy N molekulát valamilyen nagyobb V_v térfogatban találunk:

$$W_v = \left(\frac{V_v}{V}\right)^N \quad (N \text{ molekulára}) \qquad \textbf{(23-10)}$$

E két valószínűség aránya:

$$\frac{W_v}{W_k} = \frac{\left(\frac{V_v}{V}\right)^N}{\left(\frac{V_k}{V}\right)^N} = \left(\frac{V_v}{V_k}\right)^N \qquad \textbf{(23-11)}$$

Ha ennek az egyenletnek a természetes logaritmusát vesszük és megszorozzuk a Boltzmann-állandóval, nagyon érdekes következtetést vonhatunk le:

$$k \ln\left(\frac{W_v}{W_k}\right) = nN_A k \ln\left(\frac{V_v}{V_k}\right) \qquad \textbf{(23-12)}$$

ahol az N molekulaszámot nN_A-nak írjuk, vagyis a mólszám szorozva az Avogadro-számmal. A 20.2 fejezetből tudjuk, hogy $N_A k$ az univerzális gázállandó (R), tehát ezt az egyenletet így írhatjuk:

$$k \ln W_v - k \ln W_k = nR \ln\left(\frac{V_v}{V_k}\right) \qquad \textbf{(23-13)}$$

De termodinamikai megfontolásból (speciálisan a (23-6) egyenletből) azt találtuk, hogy amikor n mólnyi gáz V_k -tól V_v -ig szabad expanziót végez, a ΔS entrópiaváltozás:

$$S_v - S_k = nR \ln\left(\frac{V_v}{V_k}\right) \qquad \textbf{(23-14)}$$

Vegyük észre, hogy a (23-13) és a (23-14) egyenlet jobb oldala azonos. Tehát az entrópia és a valószínűség között a következő összefüggés írható fel:

ENTRÓPIA S
(mikroszkópikus definíció) $$S = k \ln W \qquad \textbf{(23-15)}$$

Bár tárgyalásunk során az ideális gáz szabad tágulásának speciális esetét vizsgáltuk, az entrópia statisztikus elméletének szigorú interpretációja ugyanerre a következtetésre vezet:

ENTRÓPIA (mikroszkópikus nézőpont) — Az entrópia a mikroszkópikus rendezetlenség mértéke..[2]

[2] Az entrópia és a rendezetlenség közti kapcsolat sokkal bonyolultabb, mint azt itt jeleztük. Néhány megfontolandó megjegyzés található P.G.Wright: Entropy and Disorder. Contemporary Physics 11 (Nov. 1970) pp.581–588. c. könyvében.

23-4 PÉLDA

Ismét a szabad expanziót tekintve, igazoljuk, hogy a makroszkópikus és a mikroszkópikus megközelítés ugyanarra a következtetésre vezet. Tegyük fel, hogy 1 mól ideális gázzal szabad expanziót hajtunk végre a kezdeti térfogattól annak négyszereséig. A kezdeti és a végső hőmérséklet természetesen ugyanaz. a) Számoljuk ki az entrópiaváltozást a makroszkópikus megközelítés segítségével! b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a véletlenszerű mozgások során minden molekula egyidejüleg az eredeti V_k térfogatban található! c) A b) rész valószínűségi megfontolásait felhasználva számoljuk ki a ΔS entrópiaváltozást a szabad tágulásra és mutassuk meg, hogy az megegyezik az a) részben kapott értékkel:

$$\Delta S = S_v - S_k = k \ln W_v - k \ln W_k = k \ln \left(\frac{W_v}{W_k} \right)$$

MEGOLDÁS

a) A (23-6) egyenletből ezt kapjuk:

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_v}{V_k} \right) = (1) \cdot R \ln \left(\frac{4V_k}{V_k} \right) = R \ln 4$$

b) Annak a valószínűsége, hogy egyetlen molekula a V_k térfogatban található, éppen a térfogatok arányával egyenlő: $W_k = V_k/4V_k = 1/4$. Egy mólnyi molekulára vonatkozóan (N_A) – amelyek egymástól függetlenül mozognak, – rendkívül kicsi szám annak a valószínűsége, hogy mindegyik a V_k térfogatban található:

$$W_k = \left(\frac{1}{4} \right)^{N_A} \qquad (N_A \text{ molekulára})$$

c) Annak a valószínűsége (W_v), hogy az összes molekula $4V_k$ térfogatban található: 1 (mivel nem lehetnek sehol másutt).

$$\Delta S = k \ln \left(\frac{W_v}{W_k} \right) = k \ln \left[\frac{1}{(1/4)^{N_A}} \right] = N_A k \ln 4 = R \ln 4$$

Ez ugyanaz az eredmény, mint amit az a) pontban a makroszkópikus paraméterek felhasználásával kaptunk.

23.4 Az entrópia és a második főtétel

Az entrópia és a valószínűség közötti kapcsolat újszerű bepillantást nyújt a második főtételbe. Annak, hogy az entrópia növekszik, nagyon nyilvánvaló oka van: minden természetes folyamat a maximális valószínűségű állapot irányába tart. Vagyis a rendszerek mindig a legvalószínűbb konfiguráció, a maximális rendezetlenség irányában változnak. Ezek a maximális entrópiájú állapotok egyensúlyi állapotok. A magukra hagyott rendszerek az egyensúlyi állapotok felé haladnak, amelyek a legnagyobb valószínűségű, – vagy maxi-

mális entrópiájú – állapotok. Ez a növekedés nem „bizonyítható" jobban, mint ahogyan a „lefelé történő" hőáramlás iránya „bizonyítható". Az állítás pusztán statisztikus tendenciát fejez ki. De miután a makroszkópikus rendszerek hihetetlenül nagy számú molekulát tartalmaznak, ez a tendencia döntően meghatározza, hogy mi fog történni.

A fenti megfontolások alapján a második főtételt az entrópia segítségével is megfogalmazhatjuk. A következő megállapítás teljesen egyenértékű a második főtétel egyéb alakjaival:

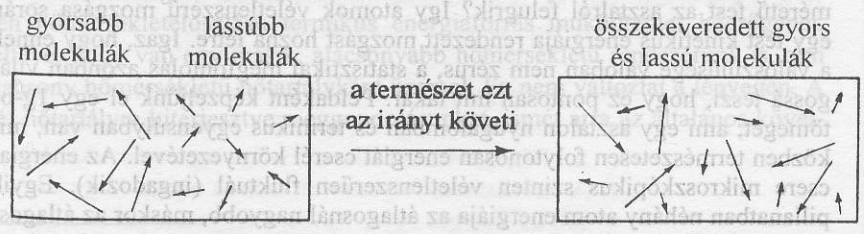
A TERMODINAMIKA II. FŐTÉTELE (entrópiával kifejezve)	$\Delta S_{\text{univerzum}} > 0$	Minden természetes, – (azaz irreverzibilis) folyamatra
	$\Delta S_{\text{univerzum}} = 0$	Csak reverzibilis folyamatokra.

Egy speciális példa sokat segíthet a megértésben. Tekintsünk egy tartályban lévő gázt, amelyben az átlagosnál nagyobb sebességgel rendelkező molekulák a bal oldalon gyűltek össze, a lassúbb molekulák pedig a másikon, amint azt a 23-2a ábra mutatja. Ez a speciális elrendezés persze nagyon valószínűtlen, mivel a véletlenszerű molekuláris mozgások a gyors és lassú csoportok többé-kevésbé egyenletes keveredését idézik elő, ahogyan az a 23-2b ábrán látható. Az első esetet a *„rendezettség"* és a *„kicsiny valószínűség"* kifejezések írják le. A második esetben inkább alkalmazhatók a *„rendezetlenség"* és a *„nagy valószínűség"* kifejezések. Ha csak tíz molekula lenne a tartályban, véletlenül, bizonyos pillanatban, találhatnánk öt gyorsabb molekulát a tartály egyik felében és öt lassúbbat a másikban. De a molekulaszám növekedésével ezeknek a véletlenszerű fluktuációknak az esélye, amelyek „gyors-lassú" szétválasztást eredményeznek, gyakorlatilag elhanyagolhatóvá válik: ha nem is zérussá, de a zérushoz rendkívül közeli értékké.

Becsüljük meg ezt a valószínűséget. Annak a valószínűsége, hogy bármely molekula véletlenszerű mozgás eredményeként a tartály neki *„megfelelő"* oldalán van 1/2. További molekulákat adva a rendszerhez – feltéve, hogy egymástól függetlenül mozognak, – a valószínűségek összeszorzódnak. Így – ha mondjuk 100 molekulánk van, – a véletlenszerű mozgás eredményeként a gyors-lassú szétválasztás elérésének valószínűsége:

$$W = \begin{bmatrix}\text{az 50 gyorsabb molekula}\\ \text{bal oldali előfordulásának}\\ \text{valószínűsége}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{az 50 lassúbb molekula jobb}\\ \text{oldali előfordulásának való-}\\ \text{színűsége}\end{bmatrix}$$

$$W = \left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{1{,}27\times 10^{30}}$$



a) Rendezettség: a molekulák nagyon valószínűtlen sebesség-eloszlása.

b) Rendezetlenség: a molekulák valószínű sebesség-eloszlása.

23-2 ábra
Egy tartályban lévő gáz molekuláris mozgásának két lehetséges állapota. Jegyezzük meg, hogy az összenergia mindkét állapotban azonos.

vagy másképpen: 10^{30} esetből 1 körüli az esély. A rendszer molekulaszámának növekedésével a valószínűség gyorsan válik még kisebbé. Így a 23-2a ábra rendezettségének az előfordulási valószínűsége rendkívül kicsi, ha 100 molekuláról 1 mólnyi gázra($\sim 10^{23}$ molekula) extrapolálunk.

A második főtételt valójában mindenki „ismeri". Következményei mindenütt felismerhetőek körülöttünk. Minden esetben, amikor olyat látunk, ami ha a róla készült filmet visszafelé játszanánk, butaságnak tünne, akkor a második főtételt láttuk működés közben. A kézírás nem „szívódik fel" a golyóstollba; az autók kipufogói a szmogos levegőt nem szívják vissza és nem alakítják benzinné és tiszta levegővé; egy atléta sohasem lesz friss, ha visszafelé fut a pálya mentén és nem abszorbeálja az izzadságát; hajtincsek sohasem ugranak fel a fodrászat padlójáról és ragadnak vissza a vendég fejére; a műugró nem repül vissza az úszómedencéből az ugródeszkára, miközben a hullámok és a loccsanások hirtelen sima vízfelületté válnak; egy lábos víz nem fagy meg a tűzhely lángján (hő nem áramlik hideg testről melegre) stb. Valójában szinte *minden makroszkópikus esemény, amit megfigyelünk rendkívül világosan illusztrálja a második főtételt.*

Amikor egy jégkocka megolvad, nő az entrópiája. A második főtétel természetesen nem jelenti azt, hogy a megolvadt jégkockát nem lehet visszafagyasztani. De ehhez a mélyhűtőnek – a saját működésével – még nagyobb entrópianövekedést kell létrehoznia. Ha egyszer egy jégkocka megolvadt, lehetetlen mindent pontosan ugyanúgy visszaállítani mint az elolvadás előtt volt.

Természetesen teremtünk is rendet, például minden alkalommal, amikor összeillesztünk egy kirakós játékot, vagy összeállítunk egy autót. Maguk az élő szervezetek növekedésük során egyre rendezettebbé válnak és mialatt folytatják a molekuláknak egy magasan szervezett rendszerré való alakítását, helyi entrópiacsökkenést produkálnak. Az emberi agy a kis entrópiakoncentráció mintája. De minden ilyen rendezett állapotú rendszer létrehozása végül is mindig entrópianövekedést eredményez, ha a rendszernek és környezetének együttes entrópiaváltozását vizsgáljuk. Egy izolált rendszer nem képes csökkenteni saját entrópiáját. Az entrópia csak változatlan maradhat, vagy nőhet.

Nehéz elképzelni az ettől folytonosan eltérően működő világegyetemet, azt, hogy minden természetes folyamat a növekvő rend felé irányul. Például, ha 100 fehér golyót egy dobozban lévő 100 hasonló, de fekete golyó tetejére helyezünk és összerázzuk őket, akkor elkerülhetetlenül összekeverednek. Az ellentétes folyamat, az, hogy véletlenszerű keverékükből kiindulva összerázás után majdnem mindig fekete és fehér csoportra szétválasztva találjuk őket, egyaránt szokatlan és elképzelhetetlen. Ezért a második főtétel talán a legvisszavonhatatlanabbul érvényes az összes fizikai törvény között.

Időnként felvetődik a kérdés: „Ha a „lefelé" irányuló hőáramlás csak valószínűség kérdése, vajon nincs-e esély arra, hogy egy lábosnyi víz a tűzön megfagy, ahelyett, hogy felmelegedne?" Vagy talán ez: „Nem lehetséges-e, hogy a molekulák bolyongása véletlenül úgy erősíti egymást, hogy egy kisméretű test az asztalról felugrik? Így atomok véletlenszerű mozgása során egy test kinetikus energiája rendezett mozgást hozna létre. Igaz, hogy ennek a valószínűsége valóban nem zérus, a statisztikai megfontolás azonban világossá teszi, hogy ez pontosan mit takar. Példaként képzeljünk el egy 1g-os tömeget, ami egy asztalon nyugalomban és termikus egyensúlyban van, miközben természetesen folytonosan energiát cserél környezetével. Az energiacsere mikroszkópikus szinten véletlenszerűen fluktuál (ingadozik). Egyik pillanatban néhány atom energiája az átlagosnál nagyobb, máskor az átlagosnál kisebb. Ezek a statisztikus ingadozások – elvileg – eredményezhetnének kis mértékű impulzustöbbletet valamelyik irányban. A többlet elég lehetne ahhoz, hogy előidézze a tömeg spontán kis magasságú felugrását az asztalról. Eközben a véletlenszerű molekuláris mozgás kinetikus energiája gravitációs potenciális energiává alakulna. Annak esélye azonban, hogy ez az esemény bekövetkezzék, olyan kicsiny, hogy szinte elképzelhetetlen. Kimutatható,

hogy az időnek az a töredéke, amíg ez a tömeg – statisztikus fluktuációk következtében – elegendő energiát nyer ahhoz, hogy legalább 1 mm-re a gravitáció ellenében függőlegesen felugorjon, csupán annyi, ahogyan

1 aránylik a $10^{1\,000\,000\,000\,000\,000}$-hoz (vagyis $10^{10^{15}}$-höz)

Hogy valamilyen képet adjunk erről a számról: az ismert világegyetem összes galaxisában az elektronok, protonok és neutronok teljes száma talán „mindössze" 10^{82} nagyságrendbe esik.

Természetesen fontos tényező a vizsgált rendszer mérete. Az elrendezésben bekövetkező statisztikus fluktuáció ténylegesen is megfigyelhető akkor, amikor folyadékban lebegő (szuszpendált) nagyon kicsiny részecskéket vizsgálunk mikroszkóppal. A részecskét különböző irányból érő, egyenlőtlen molekuláris ütközések azt okozzák, hogy a részecske véletlenszerű cikcakkos pályán halad. A mozgást *Brown-mozgásnak* nevezzük. A statisztikus fluktuációknak azonban a nagyobb tömegek esetén is figyelemreméltó következményei vannak. Az emberi dobhártya – termikus mozgás során – átlagosan 10^{-10} m amplitúdóval rezeg. Ha egy bejövő hang olyan gyenge, hogy nem vált ki ennél a küszöbértéknél nagyobb amplitúdójú rezgést, dobhártyánk termikus „zaját" halljuk a bejövő hang helyett.

Egy fizikakönyv[3] igen színesen tette még szemléletesebbé a nagy méretű rendszerekre vonatkozó entrópiaváltozás egyirányú viselkedését. Ezt írja: „Az, hogy szobahőmérsékleten egyetlen kalória termikus energiát teljes egészében potenciális energiává alakítsunk, kevésbé valószínű esemény, mint az, hogy egy vad majomcsapat leírja Shakespeare összes művét 15 kvadrilliószor *egymás után, hiba nélkül*, úgy hogy véletlenszerűen ütögetnek egy sor írógépet." (Kiemelés a szerzőktől.) Mivel a második főtétel végül is statisztikus megfontolásokon alapul, érvényessége megdönthetetlen. Úgy tűnik, nincs mód a megkerülésére.

23.5. Az entrópia és a nem felhasználható energia

A 23-2. ábra két elrendezése között van még egy fontos különbség azonkívül, hogy nyilvánvaló az eltérés a rendezettség és a rendezetlenség között. Az a) ábra rendezettsége alkalmas munkavégzésre, mert – bizonyos értelemben – a molekulák két csoportja magas és alacsony hőmérsékletű hőtartályt alkot, amelyek között hőerőgépet működtethetnénk. De a b) ábra rendezetlensége ezt nem teszi lehetővé, mivel a teljes rendszer ugyanazon a hőmérsékleten van. Jegyezzük meg, hogy mindkét konfiguráció pontosan azonos mennyiségű termikus energiával rendelkezik. A 23-2b ábra szerint nem hasznosítható ez az energia munkaként[4]. Csupán az, hogy energiával rendelkezünk, még nem jelent semmit. Az is lényeges, hogy vajon olyan alakban van-e ez az energia, ami munkává alakítható. Természetesen, bármely homogén hőmérsékleteloszlású termikus energiaforrás működtethet hőerőgépet, feltéve, hogy van egy másik, alacsonyabb hőmérsékletű rendszerünk is, ami alacsony hőmérsékletű hőtartályként üzemel. Ez nem változtat a lényegen. A két hőtartályra kiterjesztve meggondolásunkat, ismét arra az általános követ-

[3] H.A.Bent: The Second Law, Oxford University Press, 1965. A termodinamikának különlegesen világos és élvezhető tárgyalását találhatjuk a következő rövid könyvben: H.C.Van Ness: Understanding Thermodynamics, McGraw-Hill Paperbacks, 1969.

[4] Egyes humoristák azzal tréfálkoztak, hogy a II. főtétel bizonyítja, hogy a Pokolnak annak a helynek kell lennie, ahol mindenütt azonos a hőmérséklet. Különben az ott tartózkodó termodinamikusok a hőmérsékletkülönbségeket felhasználnák egy lokális régió hűtésére szolgáló hűtőberendezés működtetésére.

keztetésre jutunk, hogy valahányszor hő áramlik melegebb testről hidegebbre, csökken a munkavégzés további lehetősége és nő az entrópia. Habár az energia megmaradt, felhasználhatósága romlott. Ebben az értelemben

Az entrópia az energia munkára való fel nem használhatóságának a mértéke.

23-5 PÉLDA

Tegyük fel, hogy Q hőmennyiség jut hővezetéssel a meleg, T_2 hőmérsékletű hőtartályból a hideg, T_1 hőmérsékletű hőtartályba. a) Határozzuk meg a világegyetem entrópiaváltozását. b) Mekkora maximális munkát végezhettünk volna ennek a hőnek a felhasználásával?

MEGOLDÁS

a) A meleg hőtartályból történő hőelvonás következtében fellépő entrópiaváltozás: $-Q/T_2$. A Q hőleadás a hideg hőtartály Q/T_1 entrópianövekedésével jár. Az Univerzum teljes entrópiaváltozása ezen változások összege:

$$\Delta S_{\text{univerzum}} = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2}$$

amely pozitív mennyiség, mivel $T_2 > T_1$.

b) A munka, amit végezhetnénk, nem egyenlő az átvitt hővel. A maximálisan elvégezhető munkát a két hőmérséklet között működő Carnot-körfolyamat hatásfoka $\eta = 1 - T_1/T_2$ korlátozza.

$$W = \eta Q = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q = T_1 \left(\frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2}\right) = T_1 \Delta S_{\text{univerzum}}$$

Tehát a maximális munka, amit végezhetnénk: az alacsony hőmérséklet (T_1) szorozva a világegyetem entrópiaváltozásával ($\Delta S_{\text{univerzum}}$).

Most tekintsünk el az entrópia és a második főtétel tárgyalásának részleteitől és összegezzünk néhány következtetést. A második főtételt különböző alakban fejezhetjük ki. A következő megállapítások nem teljesen egyenértékűek, de mindegyik tartalmazza a második főtétel lényegét.

A MÁSODIK FŐTÉTEL

(a) A világegyetem entrópiája a növekedésre törekszik.*
(b) A hőáramlás a meleg testről a hideg felé irányul.
(c) A világegyetem rendezetlensége egyre növekszik.*
(d) A természetes folyamatok iránya olyan, hogy a termikus energia egyre kevésbé legyen munkává alakítható.
(e) Nem létezhet olyan periodikus folyamat, amelynek hatására hő hidegebb testről melegebbre áramlik.

Az információ bitjei

*E*gy amerikai egyetem tudósai számítógépet használnak képek változó mennyiségű információtartalommal történő reprodukálására egy olyan kísérlet részeként, amely arra irányul, hogy felfedezzék a vizuális információnak azt a legkisebb mennyiségét, amely ahhoz szükséges, hogy még felismerhető legyen. A 23-3 ábrán a kép több, mint 700 hatszögre van bontva és minden egyes hatszöget a szürke 16 árnyalata egyikének egyenletes tónusában nyomtatták. Minden hatszög négy bit információt tartalmaz, mivel négy igen-nem kérdésfeltevéssel meghatározhatjuk, hogy a szürkeség 16 lehetséges árnyalata közül melyik az, amelyikkel az egyes hatszögek rendelkeznek. A módszer az, hogy fokozatosan szűkítjük a lehetőségeket, a megmaradt választeknak két egyenlő csoportba való osztásával, és azzal a kérdésfeltevéssel, vajon a kettő közül az egyik csoport tartalmazza-e a helyes választ. Így a következő példában minden egyes válasz 1 bit információt reprezentál.

Kérdés	Felelet
1. Az 1 és 8 árnyalat között van a hatszög?	nem
2. A 9 és 12 árnyalat között van?	igen
3. Ez a 9, vagy a 10 árnyalat?	igen
4. A 9 árnyalat?	nem
összesen:	4 bit

Ezzel a 4 bit információval a színárnyalatot pontosan a 10-esnek azonosíthatjuk.

Az eredeti kép – természetesen – a különböző variációkat folytonosan tartalmazta. A különálló hatszögekre bontás folyamata az éles szélek miatt bizonyos zajt is visz a reprodukcióba. Agyunk képértelmezési rendszere különösen érzékeny az egyenes vonalakra és a geometriai formákra, így a válogató technikával bevitt zaj homályossá teszi és összekeveri a bevitt információ szerint alkotott képet. Ha hunyorítunk, vagy defókuszáljuk a szemünket, lóbáljuk a képet, vagy olyan távolságból nézzük, hogy a zajt minimalizáljuk, a felismerés meglehetősen javul és a portré könnyen azonosítható.



23-3 ábra
Ennek a képnek az információtartalmát számítógépes program segítségével szándékosan olyan minimális számú bitre csökkentették, hogy éppencsak felismerhető legyen.

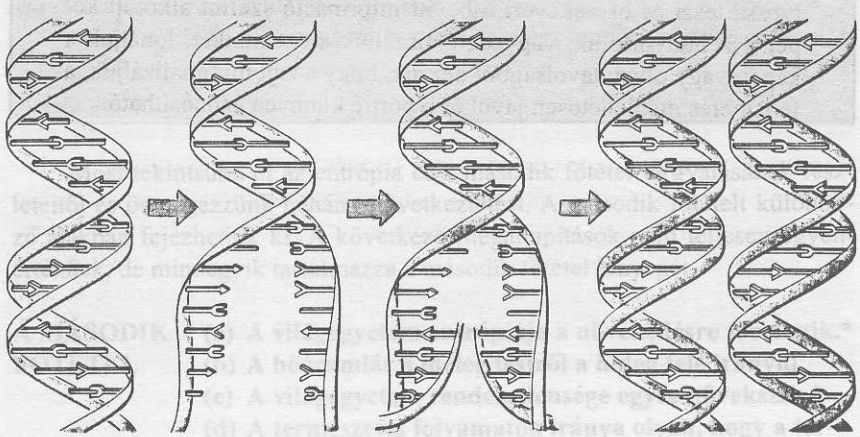
A természet figyelemreméltó hatásfokkal képes információtárolásra. Például a 23-4 ábrán látható dezoxiribonukleinsav (DNS) – olyan molekula, amely minden élő szervezet minden egyes élő sejtjében benne van, – az olyan fejlett szervezetben, mint az emberé, talán 10 milliárd atomot is tartalmaz. Ha egy átlagos felnőtt emberben lévő összes DNS molekulát szétcsavarnánk és kifektetnénk egy vonalban, több, mint 10 milliárd km hosszúságot érne el, ez pedig akkora, mint a Naprendszerünk átmérője. A DNS molekula a sejt reprodukálására vonatkozó alaptervet hordozza, amely minden információt tartalmaz arról, hogy hogyan fog fejlődni és funkcionálni a szervezet. Becslések szerint a természet kb. 50–100 atomot használ a DNS-ben 1 bit információ kódolására.

Richard Feynman professzornak érdekes ötlete volt annak hangsúlyozására, hogy milyen figyelemreméltóan nagy információtárolási teljesítmény ez a folyamat.* Azon a problémán gondolkodott, hogy lehet tárolni az összes információt, amit a világ három nagy könyvtára – a washingtoni Kongresszusi Könyvtár, a párizsi Nemzeti Könyvtár és a British Múzeum könyvtára – tartalmaz. Néhány duplikációt megengedve kb. 24 millió kötet volt (1959-ben) ebben a három könyvtárban. Tekintsük úgy a 24 millió kötet információtartalmát, hogy mindegyik kötet megfelel egy átlagos Encyclopaedia Brittanica kötet méretének. Belevesszük az összes fotót és illusztrációt, úgy, hogy az autotípiák** sűrűségét egyenként kódoljuk. Ha 100 atom tárol 1 bit információt, ennek a 24 millió kötetnek a teljes információtartalma olyan kockát foglalna el, amelynek élhossza mindössze 1/8 mm! Természetesen a kiolvasása bizonyára kissé fáradságos lenne... De úgy tűnik, hogy a természet ezzel egyenértékű kiolvasási feladatot valósít meg az élő sejtben.

---

* Ezek a megjegyzések Caltechben, 1959 decemberében, az Amerikai Fizikai Társulat bankettje után, Feynman esti előadásának részeként hangzottak el. A DNS szerkezetének felfedezésére vonatkozó érdekes történeteket lásd James D. Watson: A kettős spirál (magyarul: Gondolat Kiadó, 1972) és Anne Sayre: Rosalind Franklin and DNA, Norton, 1975.

** Az autotípia a képeket pontokra bontó és az árnyalatokat a pontok sűrűségével megadó nyomdatechnikai eljárás. (A fordító)



23-4 ábra
A DNS molekula vázlatos ábrázolása. A DNS molekula spirál szerkezete, megcsavart létrához, vagy kettős csavarvonalhoz hasonlít és egy élő sejt reprodukciójához szükséges összes genetikai információt tartalmazza. Minden létrafok az un. nukleotidek négy fajtájából kiválasztott molekulák egy-egy összekapcsolt párja. A sejtosztódás során a létra szétcsavarodik és szétválik, mint a zipzár, úgy, hogy minden létrafok közepén széttörik. Mindegyik nukleotid csak más típusú nukleotidhez tud illeszkedni. Így minden egyes széttört kapocs automatikusan kiválasztja a speciálisan vele összeillő molekulát a környező sejtfolyadékból, hogy újra felépítse a létrafokot, rekonstruálva a hélix hiányzó felét és így két másolatot készítve az eredeti DNS-ről.

(f) Nem létezhet olyan periodikus folyamat, amelynek hatására termikus energiából vele azonos mennyiségű munkát nyerünk.
(g) A dolgok általában összekeverednek.

A termodinamika két főtételének megfelelő megfogalmazása lehet például a következő:

(1) A világegyetem energiája állandó marad.*
(2) A világegyetem entrópiája növekszik.*

* Ezek a megállapítások csak egy változatlan méretű és zártnak tekinthető világegyetem esetén igazak. (A fordító)

23.6 Entrópia és információ

Az entrópiával kapcsolatos fogalmak az *információelméletben* is – egy olyan tudományban, amely alapvetőleg az utóbbi néhány évtizedben fejlődött ki – alkalmazást nyertek. Az információelmélet a valószínűségszámításnak olyan ága, amely üzenetek meghatározott pontosságú átvitelének kérdésével foglalkozik figyelembe véve, hogy az üzenetet alkotó információ bitjei az átvitel során torzulhatnak. Az információelméletben az I **információ** alapvető definíciója:

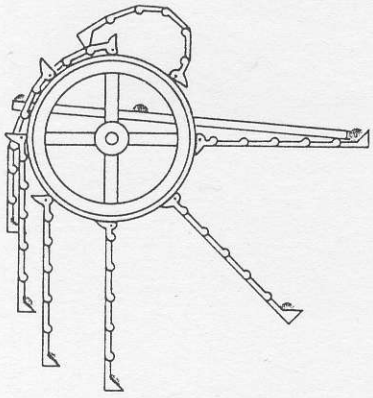
$$I = -\ln W \qquad \textbf{(23-16)}$$

ahol W annak a valószínűsége, hogy bizonyos üzenetet kitalálunk, mielőtt megkapjuk (vagy bizonyos szövegösszefüggésben egy speciális üzenet elküldésének valószínűsége). A W valószínűség utalhat egy egyszerű „igen, vagy nem" információegységre – amit az információ egy bit-jeként ismerünk, – vagy egy komplexebb üzenetre. Az $S = k \ln W$ és az $I = -\ln W$ összefüggések közötti hasonlóság rámutat az információelmélet és az entrópia egyenletei közötti szoros *matematikai* analógiára. Nevezetesen, az információ megfelel a negatív entrópiának. Egy szerző[5] kiemeli, hogy ez az analógia „segít a tudósoknak, hogy új és ügyes módszereket gondoljanak ki információk kódolására, arra, hogy hatásosan hozzanak össze különféle telefonbeszélgetéseket egyetlen csatornán, erősítők tervezésére, a gramafonlemezek zajának csökkentésére és automata gépek szerkesztésére. Ez az analógia segít idegrendszerünknek, szókincsünknek, memóriánknak, az emberi agy gondolkodásmintáinak és lehet, hogy magának az agynak a tanulmányozásában is. Talán még a társadalomtudományok problémáira is alkalmazható." Ezek az elképzelések nyilvánvalóan fontos szerepet játszottak a számítógépek és kommunikációs rendszerek robbanásszerű növekedésében és fejlődésében.

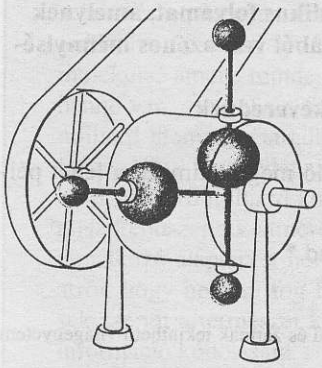
23.7 Örökmozgók

Időnként egy-egy feltaláló azt a szabadalmi bejelentést teszi, hogy kifejlesztette az örökmozgót (23-5 ábra). Ezek a találmányok változatlanul két csoportba sorolhatók: *azok, amelyek az I. főtételt sértik* („elsőfajú perpetuum mobile"-k, amelyek megteremtik a saját energiaforrásukat) és *azok, amelyek a II. főtételt sértik* („másodfajú perpetuum mobile"-k, amelyek zérus, vagy negatív entrópiaváltozással működnek). A legtöbb fizikus olyan mélyen és biztosan hisz a ter-

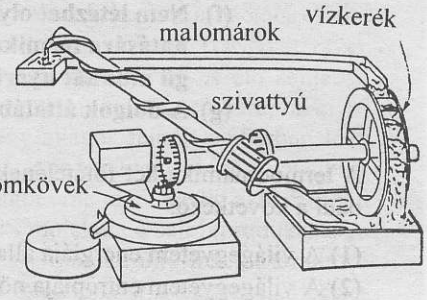
[5] E.M.Rogers „Physics for the Inquiring Mind" c. könyvéből. (Princeton University Press, 1960, p.395)



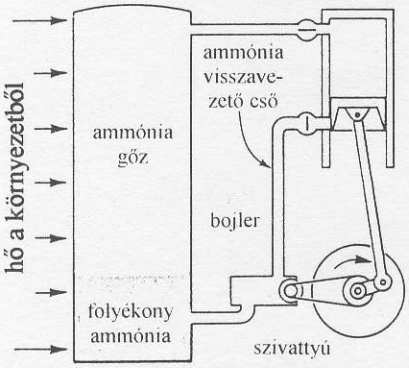
a) Csuklós karok nyúlnak ki az egyik oldal felé, ahol súlyokat szednek fel, amelyek a kerék tengelyéhez közeli pontból gurulnak ki.

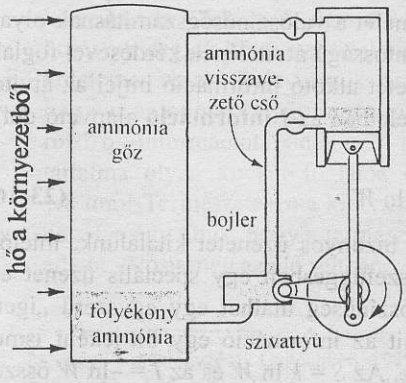


b) Egy vízzel töltött dob belsejében lévő üres úszógömb-pár súlyokat mozgat úgy, hogy – állítólag – a gravitációs erő eredő forgatónyomatékot hoz létre a tengely körül.

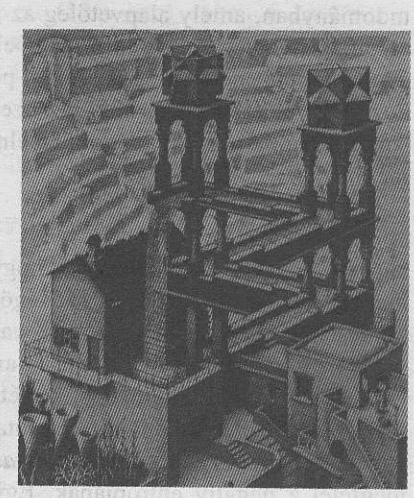


c) Ezt a zárt ciklusú malmot 1618-ban javasolták energia „örök forrása"-ként, olyan területeken, ahol nincs folyó. Először Archimédesz találta ki az üreges, csigavonalas csavart víz emelésére.





d) Ez az ammónia-hőerőgép a környezetből vett hőt hasznosítja. A gőznyomás mozgatja a dugattyút. A dugattyú mozgásával a táguló gőz lehül és ezáltal kondenzálódik az ammónia, a folyadék pedig visszatér a tartályba. Ez az örökmozgó sérti a második főtételt: nincs alacsony hőmérsékletű hőtartály a körfolyamat alatt történő hőleadásra.



e) Ezt az örökmozgó vízesést a holland művész, M.C.Escher alkotta.

23-5 ábra

Meg tudjuk magyarázni a téves következtetéseket ezekben az örökmozgókra tett javaslatokban?

modinamika alapelveiben, hogy pusztán az a tény, hogy a találmány sérti az egyik vagy a másik főtételt, sokszor elegendő ok ahhoz, hogy – minden további analízis nélkül – elutasítsák a bejelentést. Az ilyen fennhéjázó bánásmód rendszerint nem elégíti ki a feltalálót, aki szeretné tudni, melyik az a speciális pont, ahol az általa javasolt mechanizmusban hiba van.

A XIX. század során örökmozgó masinák működő modelljeit kiállították vásárokon és egyéb nyilvános helyeken. Amint az várható volt, mindegyikben lehetett találni valamilyen mértékű csalást, ami sok bosszúságot okozott azoknak, akik pénzt fektettek a feltaláló által eladásra kínált eszközbe. (Volt néhány, amely a légköri nyomás változásain vagy hasonló „homályos" energiaforrásokon alapult, ezért ezek nem voltak igazi örökmozgó eszközök.) A tény mégis az, hogy eddig még soha nem készült olyan működőképes gép, amely megsértette volna a termodinamika főtételeit. A francia Tudományos Akadémia 1775-ben elhatározta, hogy többé nem foglalkozik örökmozgó eszközökre vonatkozó semmiféle szabadalmi bejelentéssel. Az angol Szabadalmi Hivatal nem fogad el bejelentést örökmozgó semmilyen formájára sem. Az Amerikai Szabadalmi Hivatal csak akkor fogad el ilyen bejelentést, ha mellékelik az eszköz működő modelljét, s ez érthetően olyan megszorítás, ami miatt ilyen szabadalommal még nem találkoztak.

Összefoglalás

Makroszkópikus szempontból, az „S" entrópia (egysége J/K), az 1 és 2 állapotot összekötő bármely reverzibilis útra vonatkozóan a következőképpen definiálható:

Integrálalakban

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \qquad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

ahol δQ pozitív a rendszerrel közölt hő esetén és negatív a rendszertől elvont hő esetén. Az entrópia állapotváltozó, így az egyik állapotból a másikba jutva, az entrópiaváltozás csak maguktól az állapotoktól függ és nem függ az összekötő úttól.

A második főtétel megfogalmazható az entrópia segítségével (ami egyenértékű a második főtétel egyéb megfogalmazásaival):

A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE (entrópiával kifejezve)

A világegyetem entrópiája egyre növekszik.

Zárt rendszer *reverzibilis* folyamata esetén az entrópia megváltozása zérus.

$$\Delta S_{\text{rendszer}} = 0$$

Minden valóságos, *irreverzibilis* folyamat során az entrópia nő

$$\Delta S_{\text{rendszer}} > 0$$

Kérdések

1. Elemezzünk néhányat a temészetben előforduló, különböző folyamatok közül és magyarázzuk meg, miért *irreverzibilisek* ezek a változások!
2. Elképzelhető olyan folyamat a természetben, ami *reverzibilisen* megy végbe.
3. Dörzsöljük össze a kezünket erősen mindaddig, amíg a tenyerünk fel nem melegszik! Miért növeli ez a folyamat az entrópiát?
4. Adjuk meg az entrópia *makroszkópikus* és *mikroszkópikus* definícióját anélkül, hogy visszalapoznánk a könyvben és felfrissítenénk memóriánkat.
5. Ideális gázt eredeti térfogatának felére nyomtunk össze két különböző folyamatban: adiabatikus és izotermikus módon. Melyik esetben nagyobb a végső hőmérséklet (ha nőtt egyáltalán)? Van entrópiaváltozás valamelyik folyamatban?
6. Ősszel egy levél lehullik a fáról. Hol következik be az entrópia növekedése?
7. Szerkeszthető-e olyan hőerőgép, amely nem hoz létre „termikus környezetszennyezést"?
8. Melyik állapot rendezetlenebb: a jég, vagy a folyékony víz? Növekszik, vagy csökken az olvadó jég entrópiája? Miért nem sérül a második főtétel, amikor télen befagy egy tó?
9. Ha zárt ablakokkal napon hagyjuk az autót, a kocsi belsejében sokkal melegebb lesz, mint a külső környezetben. Miért nem sérti ez a második főtételt?
10. Miért nem sérül a második főtétel, amikor egy névsort betűrend szerint újrarendezünk

Feladatok

23.2 Entrópia makroszkópikus szempontból

23A-1 Számítsuk ki a 4g 100°C-os gőz azonos hőmérsékletű vízzé való kondenzálásakor bekövetkező entrópiaváltozást.

Az entrópia a munkavégzésre nem felhasználható energiának a mértéke.

Az entrópia az energia munkavégzésre való felhasználhatatlanságának mértéke.

Mikroszkópikus szempontból az *entrópiát* így definiáljuk:

ENTRÓPIA S $\qquad S = k \ln W,$

ahol k a Boltzmann-állandó és W a rendszer egy adott állapotban való tartózkodásának (mikroszkópikus) statisztikus valószínűsége. A rendszerek azon statisztikus viselkedési hajlama miatt, hogy a nagyobb valószínűségű és nagyobb rendezetlenségű állapotok felé haladnak, minden természeti folyamat irreverzibilis és növeli az entrópiát. Így az entrópia a mikroszkópikus rendezetlenség mértéke.

Az entrópia $S = k \ln W$ statisztikus definíciója és az információ (I)

$$I = -\ln W$$

definíciója matematikailag hasonló képlettel adható meg!

A képletben W egy bizonyos üzenet kitalálásának valószínűsége, mielőtt megkapják. Ez a hasonlóság egyéb matematikai analógiákhoz is vezet az entrópiát tartalmazó egyenletek és az információelmélet egyenletei között.

23A-2 Határozzuk meg az entrópiaváltozást, amikor 1g 100°C-os víz 100°C-os gőzzé változik. A folyamat állandó nyomáson megy végbe.

23A-3 Egy pohár jeges víz 100g jeget és 100g vizet tartalmaz, mindkettő 0°C-os. Határozzuk meg az entrópiaváltozást, ami akkor következik be, amikor az összes jég 0°C-on vízzé olvad! (Útmutatás: honnan származik a jeget megolvasztó hő?)

23A-4 2g 0°C-os jég – reverzibilis módon – megolvad, 0°C-os vízzé. Mekkora az entrópia változása a) a jégnek? b) a külső környezetnek? c) a világegyetemnek, mint egésznek? (A víz fagyáshője $3{,}34 \times 10^5$ J/kg)

23A-5 Egy 200g-os 100°C-os alumínium hasábot (fajhője 900,21 J/kg °C) hőszigetelt tartályban lévő, 400g tömegű, 20°C-os vízbe teszünk. Számoljuk ki a termikus egyensúly kialakulása után bekövetkező entrópiaváltozást!

23A-6 200g 90°C-os vörösrezet teszünk hőszigetelt tartályban lévő 10g 0°C-os vízbe. Határozzuk meg a termikus egyensúly kialakulása során fellépő teljes entrópiaváltozást!

23B-7 Mekkora a teljes entrópiaváltozás termikus egyensúly kialakulása után, ha 40g 0°C-os jeget hőszigetelt edényben lévő, 100g 90°C-os vízbe teszünk?

23B-8 Egy hideg napon 12560 J hő szivárog ki az ablaküvegen keresztül a 27 °C-os állandó hőmérsékletű szobából a 4°C-os állandó hőmérsékletű környezetbe. Mekkora a világegyetem entrópiaváltozása?

23B-9 Ha n mól ideális gázzal, amelynek kezdeti állapotjelzői p_0, V_0 és T_0, izobár expanziót végzünk térfogatának megkétszereződéséig, akkor próbáljuk igazolni, hogy a gáz entrópiaváltozása: $n\,R\,[\kappa/(\kappa - 1)]\ln 2$.

23B-10 Egy hőerőgép $T_2 = 600$ K és $T_1 = 350$ K hőmérsékletű hőtartályok között működik. Felvesz 1000 J hőt a magasabb hőmérsékletű hőtartályból s 250 J munkát végez. a) Határozzuk meg erre a folyamatra a világegyetem entrópiaváltozását! b) Mekkora munkát végezhetne egy ideális Carnot-hőerőgép? c) Igazoljuk, hogy az a) és b) pontban végzett munka között a különbség $T_1 \Delta S_{\text{Univerzum}}$!

23B-11 Egy meteorit úgy fúródik bele egy ember nélküli űrhajóba, hogy a belsejében lévő levegő szabad expanziós folyamattal kiszökik a kb. 10^{61} m^3 térfogatú galaxisba. Mekkora az entrópiaváltozás, ha az űrhajó eredetileg 10 m^3 normál állapotú levegőt tartalmazott?

23.3 Entrópia mikroszkópikus szempontból
23.4 Az entrópia és a második főtétel

23B-12 Egy dobozban lévő pénzérmék 10 fejet és 10 írást mutatnak. A dobozt összerázzuk. Most 7 fej és 13 írás van. Sérült-e a második főtétel? Értelmezzük a választ!

23B-13 Egy hallgató takarít az íróasztalán, s rendkívül rendezett (kicsiny valószínűségű) állapotban helyezi el a papírokat és könyveket. Miért nem sérti ez a termodinamika II. főtételét?

További feladatok

23C-14 Vázoljuk a Carnot-körfolyamatot a *T-S* diagramon és azonosítsuk a 22-3. ábra *A, B, C* és *D* pontjait!

23C-15 Egy szoba hőmérsékletét állandóan 300 K-en tartjuk. Tegyük fel, hogy 100 g szobahőmérsékletű vizet egy olyan Carnot-géppel alakítunk át 273 *K* hőmérsékletű jéggé, amely a szobahőmérséklet és a hűlő víz változó hőmérséklete között működik. Mekkora az a teljes munka, ami a víz megfagyásához szükséges? (Útmutatás: mivel ez reverzibilisen történt, a víz és a szoba együttes entrópiaváltozása zérus. Számoljuk ki az entrópiaváltozásokat egyenként és igazoljuk, hogy az összegük zérus. Ld. a 23-2 példát!)

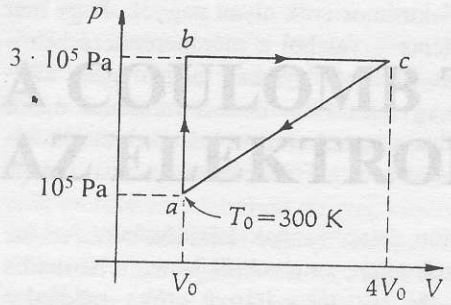
23C-16 Egy kutató 1g vizet 0°C-ról 100°C-ra melegít úgy, hogy azt egy 100°C-os hőtartállyal hozza érintkezésbe. a) Mekkora a víz entrópiaváltozása és b) a hőtartály entrópiaváltozása? c) Mekkora a világegyetem eredő entrópiaváltozása? Tegyük fel, hogy az előbbi megoldás helyett úgy melegíti a vizet, hogy először 50°C-os hőtartállyal hozza termikus egyensúlyba, majd egy 100°C-os hőtartállyal. Ebben a kétlépcsős folyamatban mekkora d) a víz, e) a két hőtartály és f) a világegyetem teljes entrópiaváltozása? g) Írjunk le olyan módszert, amellyel a vizet úgy lehetne melegíteni, (elméletileg) hogy a világegyetem entrópiája ne változzék!

23C-17 Igazoljuk, hogy amikor egy egyatomos ideális gáz izochor változáson meg át p_k kezdeti nyomástól p_v végső nyomásig, az entrópiaváltozás $3/2\,nR \ln (p_v/p_k)$!

23C-18 Tekintsük a 23C-19 feladatban szereplő szituációt! Ha a Carnot-gép helyett csupán termikus érintkezésbe hoznánk a két testet, a végső közös hőmérséklet $(T_2 + T_1)/2$ lenne. (Vagyis a $\sqrt{T_1 T_2}$ geometriai közép helyett a számtani közép.) Magyarázzuk meg – termodinamikai megfontolásokat alkalmazva, – hogy ebben az esetben miért magasabb a végső hőmérséklet, mint amikor a Carnot-körfolyamatot használjuk!

23C-19 Két azonos test – mindegyik *m* tömegű és *c* fajhőjű, – T_2, ill. T_1 hőmérsékletű. Egy Carnot-gép ezeket változó hőmérsékletű hőtartályokként használja, míg közös végső hőmérsékletre kerülnek, s ezalatt a gép *W* munkát végez. a) Mutassuk meg, hogy a gép leállásakor a két test végső közös hőmérséklete $T_v = \sqrt{T_1 T_2}$. (Útmutatás: a folyamat reverzibilis lévén, mekkora a rendszer teljes entrópiaváltozása?) b) Mekkora a gép által végzett munka?

23C-20 Tegyük fel, hogy 2 mól egyatomos ideális gázt – amelynek jellemzői kezdetben $p_0 = 10^5$ Pa és $T_0 = 300$ K – reverzibilisen végig viszünk a 23-6 ábrán látható $a \to b \to c \to a$ úton. Az $a \to b$ folyamat izochor, a $b \to c$ izobár és a $c \to a$ egy egyenes vonal. a) Mekkora az entrópiaváltozás a teljes ciklusra? b) Számítsuk ki a gáz entrópiaváltozását az $a \to b \to c \to a$ ciklus egyes lépéseire! c) Határozzuk meg az egy ciklus alatt végzett eredő munkát!

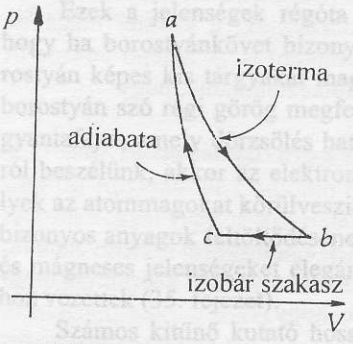


23-6 ábra
A 23C-20 feladathoz

23C-21 Igazoljuk, hogy amikor egy ideális gáz p_1 és V_1 állapotjelzőkkel jellemzett állapotból izotermikus folyamattal p_2-vel és V_2-vel jellemzett állapotba jut, az entrópiaváltozás: $nR \ln (V_2/V_1) = nR \ln (p_1/p_2)$.

23C-22 Egészítsük ki az alábbi táblázatot +, 0 vagy – jelekkel, a 23-7 ábrán bemutatott körfolyamattal kapcsolatos termodinamikai mennyiségekben bekövetkező változások előjelét jelezve (vagy azt a tényt, hogy nem történik változás)!

Út	Q	ΔU	W	ΔP	ΔT	ΔV	ΔS
a → b							
b → c			–	0			
c → a				+			



23-7 ábra
A 23C-22 feladathoz

23C-23 Igazoljuk, hogy amikor egy egyatomos ideális gáz izobár folyamattal jut T_k kezdeti hőmérsékletről T_v végső hőmérsékletre, az entrópiaváltozás $5/2\ nR \ln (T_v/T_k)$!

23C-24 Egy gázt állandó nyomáson melegítünk T_1 hőmérsékletről T_2-re. Az állandó nyomáshoz tartozó mólhő ebben a tatományban a $C_p = a + bT$ egyenlettel adott. Számítsuk ki az entrópiaváltozást n mól gázra.

23C-25 Egy lapátkerék 800g vízbe merül, ami hőszigetelt tartályban van. Egy 20kg-os tömeg forgatja a lapátkereket úgy, hogy a tömeg állandó sebességgel függőlegesen 3 m-t süllyed, miközben a víz hőmérséklete a kezdeti 300 K-ről emelkedik. a) Határozzuk meg a víz belső energiájának változását! b) Mekkora a vízzel közölt hő? c) Mekkora a víz entrópiaváltozása? d) Mekkora a világegyetem entrópiaváltozása?

23C-26 a) Igazolja, hogy ha sérülne a II. főtétel Kelvin-Planck féle megfogalmazása, akkor csökkenne a világegyetem entrópiája. (Útmutatás: gondoljunk egy „tökéletes" hőerőgépre, ami minden ciklusban bizonyos hőmennyiséget teljes egészében munkává alakít.) b) Igazoljuk, hogy ha a II. főtétel Clausius-féle definícióját megsértenénk, a világegyetem entrópiája csökkenne. (Útmutatás: gondoljunk egy „tökéletes" hűtőgépre, amely Q hőt von el egy hidegebb hőtartályból és ugyanezt a Q hőmennyiséget szállítja a melegebb hőtartálynak anélkül, hogy bármilyen munkavégzés történne.) Vegyük észre, hogy ez a feladat azt mutatja, hogy a II. főtétel entrópiával megfogalmazott alakja egyenértékű a főtétel egyéb alakjaival.

23C-27 Egy légüres dobozban válaszfal van, amely a térfogatot két egyenlő részre osztja. Kezdetben 8 molekula van az egyik részben, ahol véletlenszerű mozgást végeznek. Mekkora az entrópiaváltozás, amikor eltávolítjuk a válaszfalat és a molekulák a teljes V térfogatban mozognak?

23C-28 Egy V térfogatú tartály n_1 molekulát tartalmaz egy M_1 relatív molekula tömegű ideális gázból. Egy másik, $2V$ térfogatú tartály n_2 molekulát tartalmaz egy M_2 relatív melekulatömegű ideális gázból. Mindkét tartályban azonos a nyomás. A két tartályt érintkezésbe hozzuk és a köztük lévő falon egy lyukat vágunk. Ekkor mindegyik gáz a másik térfogatba expandál – anélkül, hogy kölcsönhatásba kerülne a másik fajtájú molekulákkal, – tehát lényegében mindegyik szabad tágulást végez. Számítsuk ki az entrópiaváltozást, ami a gázok $3V$ térfogatban történő összekeveredésekor lép fel!

23C-29 Számítsuk ki a Nap 1 óra alatti entrópiatermelését az L függelék felhasználásával, ha feltételezzük, hogy a Stefan-Boltzmann törvény szerint sugároz és emisszióképessége egy.

20A-11 $1{,}7 \times 10^5$ N
20A-13 a) $1{,}10 \times 10^{30}$ elektron b) $1{,}82 \times 10^6$ mol
20A-15 8,01 km
20B-17 a) 0,489 atm b) 0,888 kg/ m^3
20B-19 6,59 m^3
20B-21 átlagban 59,0 atom
20B-23 átlagosan 3,48 molekula
20B-25 a) 2,56 atm b) 16,1 m
20B-27 A válasz adott.
20A-29 a) $4{,}14 \times 10^{-16}$ J b) $7{,}04 \times 10^5$ m/s
20A-31 $5{,}80 \times 10^9$ K
20B-33 A válasz adott.
20B-35 b) A szökési sebesség 10,8%-a
20B-37 $(8{,}28 \times 10^{-9}/l^3)$ N/m^2 (l méterben)
20C-39 $8{,}22 \times 10^{23}$ ütközés/sec
20C-41 $mv^2/3l^3$
20C-43 A válasz adott.
20C-45 $\omega = v\theta/x$
20C-47 385 m/s, 417 m/s
20C-49 a) 1,77 cm b) 12,6C°
20C-51 63,4C°

XXI. Fejezet

21A-1 a) 209 J b) 209 J c) 0 d) 0,0896 l
21A-3 a) 0,144 atm b) 157 K
21A-5 a) 0,160 atm b) 131 K
21B-7 a) 546 K b) 4538 J
c) $1{,}13 \times 10^4$ J d) 6806 J
21B-9 A válasz adott.
21B-11 $2{,}09 \times 10^4$ J
21B-13 A válasz adott.
21A-15 $2{,}93R$
21B-17 a) 216C° b) 0,178 L
21B-19 $4{,}14 \times 10^{-21}$ J
21A-21 56,1
21C-23 A válasz adott.
21C-25 a) 70,2 J b) 36,0 J c) 208,3 J
d) –53,6 J e) –36,0 J f) 16,6 J
21C-27 a) 47,3 J b) $1{,}61 \times 10^{-4}$ m^3 c) 13,5 J
d) 33,8 J
21C-29 b) $\frac{13}{11}$

XXII. Fejezet

22A-1 150 J
22A-3 14,2%
22A-5 280 K
22A-7 5,76%
22B-9 a) 44,6% b) 25%
22B-11 –5,40C°
22B-13 A válasz adott.
22B-15 a) 414 J b) 4600 J
22B-17 a) 0,99 J b) 3,45 J
22B-19 $1{,}97 \times 10^5$ J
22B-21 a) 370 személy b) 14800,00 dollár c) 4,80 dollár
22B-23 a) $\frac{4}{3}P_oV_o$ b) 22,2%
22B-25 $\frac{2}{13}$
22C-27 a) 12,4 b) $2{,}07 \times 10^7$ J c) $6{,}00 \times 10^7$ J
d) 2,32 l e) 1,33 l
22C-29 173 W
22C-31 $\left(1-\frac{V_1}{V_3}\right)^{(\gamma-1)}$
22C-33 a) α: 4,92 ℓ; b: 1,67 atm; c: 6,69 ℓ, T_c = 408 K
b) 52,7 J
22C-35 A válasz adott.
22C-37 300 N, 400 N

XXIII. Fejezet

23A-1 -24,2 J/K
23A-3 123 J/K
23A-5 5,27 J/K
23B-7 12,6 J/K
23B-9 A válasz adott.
23B-11 $\sim 5 \times 10^5$ J/K
23B-13 A válasz adott.
23C-15 3807 J
23C-17 A válasz adott.
23C-19 b) $mc\left[(T_2+T_1)-2\sqrt{T_2T_1}\right]$
23C-21 A válasz adott.
23C-23 A válasz adott.
23C-25 a) 588 J b) zérus c) 1,96 J/K d) 1,96 J/K
23C-27 $8k \ln 2$
23C-29 $2{,}40 \times 10^{26}$ J/K·h

A COULOMB TÖRVÉNY ÉS AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR

Kétféle elektromosság van, pozitív és negatív. A különbség, úgy sejtem az, hogy az egyik kicsit drágább és tartósabb, a másik olcsóbb, de belemegy a moly.

STEPHEN LEACOCK, kanadai humorista
(*Irodalmi Botlások* 1910)

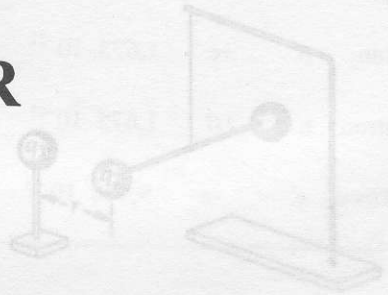
24.1 Bevezetés

Közismert az, hogy ha megfésüljük száraz hajunkat, a fésű feltöltődik, és papírdarabokat képes magához vonzani. A jelenség zavarba ejtő: a papírdarabok valahogyan megérzik a feltöltött fésű jelenlétét anélkül, hogy érintkeznének vele. Mágneseknek van hasonló vonzó hatásuk vas- és acéltárgyakra.

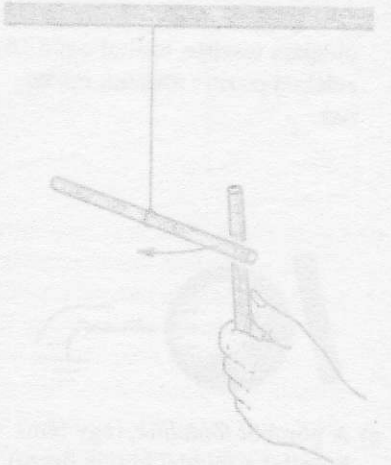
Ezek a jelenségek régóta ismertek. Már a régi görögök felismerték, hogy ha borostyánkövet bizonyos anyagokkal megdörzsölnek, akkor a borostyán képes kis tárgyakat magához vonzani. Az *elektromosság* szavunk a borostyán szó régi görög megfelelőjéből ered. *Elektron*: egy fosszilizálódott gyantafajta, amely dörzsölés hatására feltöltődik. Manapság amikor atomokról beszélünk, akkor az elektron szó azokat a negatív töltéseket jelöli, amelyek az atommagokat körülveszik. Az elektromosságra vonatkozó ismeretünk bizonyos anyagok feltöltődésének felismerésével kezdődtek és az elektromos és mágneses jelenségeket elegánsan leíró Maxwell egyenletek megalkotásához vezettek (35. fejezet).

Számos kitűnő kutató hosszas erőfeszítésének köszönhető ennek a jelenségkörnek a feldolgozása. Csaknem 200 év telt el Newton *Principiá*jának kiadása (1687) és James Clark Maxwell hasonlóan úttörő „*Treatise on Electricity and Magnetism*" című könyvének megjelenése között (1873). Noha ez a majdnem két évszázad hosszú időszaknak tűnik a fizika fejlődésében, ezalatt számos tudós küszködött az elektromágneses jelenségek értelmezésével, és számos nagyszerű megfigyelés történt, amellyel e kirakós játék egyes darabjait össze lehetett illeszteni. Maxwell zsenialitása kellett végül ahhoz, hogy az összes jelenséget egységes elmélet keretén belül lehessen értelmezni.

A fejlődés lassúságának talán az is oka lehetett, hogy a mechanikai és az elektromos jelenségek alapvetően különbözőek. A mechanikai jelenségek tanulmányozását nagyban elősegítették a köznapi tapasztalatok, amelyeket az emberek tárgyak mozgatásával és mozgásuk megfigyelésével szereztek. Az elektromágnesességgel kapcsolatban egyáltalán nem volt hasonló érzékszervi tapasztalat (kivéve ami a statikus elektromosságra és a mágnesekre vonatkozott). Az elektromágnesesség sokkal elvontabb és megfoghatatlanabb, mint a mindennapos megfigyeléseinkkel érzékelhető jelenségek. Továbbá, az elekt-

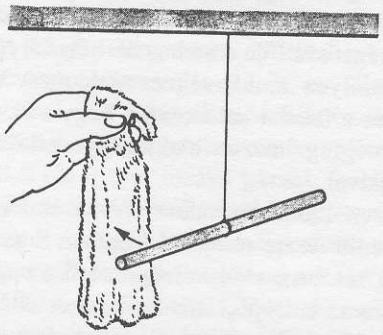




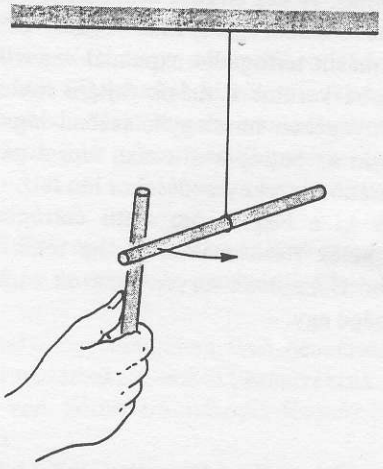


romos és mágneses kvalitatív kísérletek kivitelezése sokkal bonyolultabb, mint a mechanikai kísérleteké. Az elektromos erők olyan nagyok, hogy már kicsiny elektromos többlettöltés fellépte – valahol a mérőberendezésben – könnyen meghamisíthatja a kísérletet. Richard Feynman magyarázatát idézve, ha ketten karnyújtásnyira állnak egymástól és mindkét embernek mindössze 1%-nyival több elektronból állna a teste, mint protonból, kettejük között olyan taszítóerő lépne fel, amekkorával a Földünkével azonos tömegű testet lehetne felemelni.

Az elektromos erők mindenütt jelen vannak körülöttünk. Az ún. „közelre ható erők" mindegyike, azok tehát, amelyekről Newton harmadik törvénye szól, (egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú erők), például a láncszemek közötti erő, a ceruzahegy és a papír közötti erő, az út és az autógumi közötti erő, végső soron elektromos eredetű. Minden ilyen természetű erő elektromos töltések közötti vonzáson, illetve taszításon alapul. Az elektromosság és mágnesesség tárgyalását olyan erők tanulmányozásával kezdjük, amelyek elektromos töltéssel rendelkező, *egymáshoz képest nyugalomban levő* testek között lépnek fel. Az elektromos jelenségek e csoportját az **elektrosztatika** tárgyalja.



a) Amikor szőrmével dörzsölünk meg egy keménygumi rudat, a szőrmedarab magához vonzza a rúd megdörzsölt végét.



b) Két ilyen megdörzsölt rúd taszítja egymást.

24-1 ábra
Az elektromos erők vonzóerők és taszítóerők lehetnek.

24.2 Elektrosztatikus erők

Ha egy keménygumi (ebonit) rudat szőrmedarabbal dörzsölünk meg, a rúd új tulajdonságokat mutat. Például, könnyen magához vonz papírdarabokat, elhajlít egy vízsugarat, anélkül, hogy hozzá érne. Mialatt dörzsöljük, a rúd megváltozik: azt mondjuk, hogy a rúd *elektromossá* válik, *feltöltődik,* noha igazából nem értjük, mit is jelentenek ezek a kifejezések.

Néhány egyszerű kísérlet elvégzésével pontosítsuk fogalmainkat. Először is, függesszünk fel ebonitrudat cérnaszállal (24-1 ábra). Ha szőrmedarabot közelítünk a rúdhoz, lényeges kölcsönhatást nem észlelhetünk. Ha azonban a szőrmedarabot és a rudat összedörzsöljük, a szőrme magához vonzza a rudat még viszonylag nagyobb távolságból is. A fellépő vonzóerőt **elektrosztatikus erőnek** nevezzük és arra következtethetünk, hogy

Az elektrosztatikus erők (éppúgy, *mint* a gravitációs erők) vonzóerők lehetnek.

Most dörzsöljünk meg egy másik ebonitrudat a szőrmével. Észrevehetjük, hogy ez a második rúd a felfüggesztett, és korábban szintén szőrmével megdörzsölt rudat taszítja. Arra következtethetünk, hogy

Az elektrosztatikus erők (a gravitációs erőkkel *ellentétben*) taszítóerők is lehetnek.

Minthogy a feltöltött tárgyak egymás érintése nélkül hatnak egymásra, arra is következtethetünk, hogy

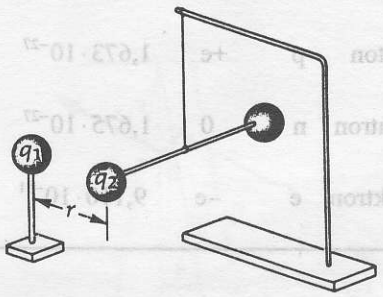
Az elektrosztatikus erők (éppúgy, *mint* a gravitációs erők) az üres téren keresztül is hatnak.

Ugyanezt az eredményt kapnánk, ha a kísérleteket vákuumban végeztük volna el.

Newton gravitációs törvényének ismeretében meg tudjuk becsülni a rúd és a szőrme között ható erőket és abból kvalitative arra következtethetünk, hogy

Az elektrosztatikus erők sokkal nagyobbak, mint a gravitációs erők.

Hogy a két feltöltött tárgy közötti kölcsönhatás természetét jobban megérthessük, célszerű a kísérleti berendezést továbbfejleszteni olyanná, mint amilyen a 24-2 ábrán látható. Az eszköz ahhoz a torziós ingához hasonló, mint amilyent Henry Cavendish (1731–1810) használt a gravitációs erők mérésére. A feltöltött tárgyak kicsiny gömbök, amelyeken q_1 és q_2 nagyságú elektromos töltés van. (Ebben az esetben a gömbök között ható gravitációs erők elhanyagolhatóan kicsinyek az elektromos erőkhöz képest.) q_1 és q_2 numerikus értéke (amelyet később definiálunk) a tárgyak töltésére jellemző. Minthogy a gömbök kicsinyek, *pontszerű töltésnek* tekinthetők.



24-2 ábra
Torziós mérleg. A q_1 és q_2 töltések közötti kölcsönhatás miatt a vízszintes rúdról lelógó szál elcsavarodik. (Hasonlítsuk össze a 16-10 ábra gravitációs torziós ingájával.)

A töltések közötti erő úgy határozható meg, hogy megmérjük a forgatónyomatékot, amely a felfüggesztő szál adott mértékű elcsavarásához szükséges. A gömbök közötti r távolság közvetlenül mérhető. Olyan méréssorozatot végezve, melyben mind a gömbök távolságát, mind pedig a gömbök töltését változtatjuk, arra a következtetésre jutunk, hogy pontszerű töltések esetében:

Az elektrosztatikus erők (éppúgy, *mint* a gravitációs erők) a távolság négyzetével fordítottan arányosak, azaz nagyságuk az $1/r^2$ függvény szerint változik. Röviden az ilyen törvényeket „reciprok négyzetes" törvénynek is nevezzük.

Az elektrosztatikus erők kölcsönösek, olyan értelemben, hogy Newton harmadik (hatás-ellenhatás) törvénye érvényes rájuk.

Az elektrosztatikus erő a kölcsönhatásban résztvevő pontszerű töltések szorzatával arányos.

Ezen megállapításaink tömör képletbe sűríthetők össze: két, egymástól r távolságra lévő q_1 és q_2 pontszerű töltés között ható erőt az alábbi egyenlettel adhatjuk meg:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \textbf{(24-1)}$$

ahol k egy arányossági tényező. Ezt az eredményt először 1785-ben közölte Charles Augustin de Coulomb francia fizikus, aki a fent leírthoz hasonló torziós mérleggel végezte kísérleteit.

Itt anélkül beszéltünk feltöltött tárgyakról és töltésről, hogy valóban tudnánk, hogy a töltés micsoda. Az 1740-es években Benjamin Franklin úgy vélekedett, hogy a töltés olyan, mint egy folyadék, és minden objektum valamennyit tartalmaz belőle. Amikor üvegrudat dörzsölt meg selyemszövettel, úgy találta, hogy az üveg elektromossá vált és papírdarabokat vonzott magához. Franklin feltételezte, hogy a dörzsölés nem teremtett új töltéseket, hanem csak az „elektromos folyadékból" valamennyit átvitt a szövetről az üvegre, és így ezután az üvegnek a folyadékból többlete, a selyemnek azzal egyenlő hiánya lett. Franklin javasolta a pozitív és negatív előjelek használatát ezen különbség jellemzésére; ennek értelmében az üvegnek *pozitív töltése*, a selyemnek pedig azzal egyenlő nagyságú *negatív töltése* lett. Hasonlóképpen, a szőrmével dörzsölt keménygumi vagy műanyag rúd negatív töltésűvé válik, mialatt a szőrme pozitív töltésű lesz. Igazából minden anyag többékevésbé feltöltődik, amikor más anyaggal dörzsölik. Franklin éppúgy választhatta volna a pozitív és negatív előjeleket ellenkező értelemben is: ma ugyanis már tudjuk, hogy a selyemkendővel megdörzsölt üvegrúd azért pozitív töltésű, mert valamennyi negatív töltésű elektron az üvegről átmegy a selyemre (és nem a pozitív töltések mozognak a selyemről az üvegre), tehát a tényleges töltésátvitel éppen ellenkezője annak, mint amit Franklin elmélete

24-1 táblázat

Részecske neve	jelölése	töltése	tömege(kg)
Proton	p	+e	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$
Neutron	n	0	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$
Elektron	e	–e	$9{,}110 \cdot 10^{-31}$

állít. Franklin úgy gondolta, hogy az elektromos folyadék *megmaradó mennyiség*, vagyis a folyadék teljes mennyisége zárt rendszerben állandó. Noha a későbbiekben az ún. egyfolyadékos elméletről kiderült, hogy hibás, a *töltésmegmaradás* a fizika egyik alapvető elvévé vált: nem ismerünk olyan kísérleti eredményt, amely nincs összhangban vele.

Modern szemléletünk szerint, az elektromos töltés az anyag egyik alapvető tulajdonsága. A semleges neutronokon kívül, az atomok pozitív töltésű protonokat és negatív töltésű elektronokat tartalmaznak. A negatív elektron töltésének nagysága pontosan egyenlő a pozitív protonéval (legalábbis a 10^{-22} relatív hibahatárú kísérletek szerint), noha a proton és az elektron tömege jelentősen különbözik egymástól (24-1 táblázat).

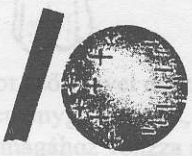
24.3 Vezetők és szigetelők

Célszerű az anyagokat aszerint osztályozni, hogy mennyire képesek az elektromos töltéseket vezetni. *Vezető* anyagban, az elektromos töltések szabadon mozoghatnak. A legtöbb fém elektromosan jó vezető, mert az atomok külső elektronjai, „a vezetési elektronok" könnyen mozoghatnak az anyagon keresztül, míg a pozitívan töltött atommagok helyhez kötöttek. Bizonyos folyadékokban és ionizált gázokban mind a pozitív, mind a negatív töltéshordozók képesek mozogni. Másfelől, az olyan anyagokat, mint az üveg, a fa, és a műanyagok, a *szigetelők* csoportjába soroljuk, ugyanis az elektromos töltések ezekben sokkal kevésbé mozgékonyak. Ha valamilyen módon töltést juttatunk egy szigetelő felületének bizonyos tartományára, az ott is marad. Tökéletes szigetelő nincs[1]; a legjobb szigetelő vezetőképessége kb. 10^{-25}-ödrésze a rézének, tehát az anyagok vezetőképességének tartománya viszonylag széles. A *félvezetők* (például szilícium és germánium) vezetőképessége e két szélső érték közötti: ezen anyagok vezetőképessége lényegesen megváltoztatható azáltal, hogy minimális mennyiségű (néhány milliomodrésznyi) más anyaggal szennyezzük őket.

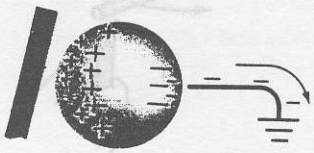
Ha ebonitrudat vagy üvegrudat megdörzsölünk egy darab szőrmével, illetve selyemmel, akkor a töltések azon a helyen maradnak, ahol képződtek. A feltöltött rudak papírdarabokat vonzanak magukhoz, ezzel bizonyítva, hogy össztöltésük nem zérus. Ellenkező a helyzet vezető anyagoknál: ha egy réz darabra vagy más vezető anyagra töltést juttatunk, a vezető anyag egyáltalán nem vonzza magához a papírdarabokat: a vezetőre juttatott elektronok kezünkön és testünkön keresztül azonnal a földbe távoznak. (Ha a vezetőre pozitív töltéseket juttatnánk, azok a földben lévő negatív elektronokat testünkön keresztül azonnal magukhoz vonzanák és így történne meg a töltések semlegesítődése.) A föld ebből a szempontból úgy viselkedik, mint elektronok korlátlan kapacitású tára, amely gyakorlatilag korlátlan számú elektront tud elnyelni vagy kiadni magából. Ahhoz, hogy egy vezetőn töltéseket tudjunk tartani, a vezetőt el kell szigetelnünk a környezetétől. A 24-3 ábrán azt illusztráltuk, hogyan lehet egy tárgyat úgy feltölteni, hogy a „töltőeszköz" (a feltöltött rúd) nem is érinti a feltöltendőt. Ezt az eljárást *megosztásos* feltöltésnek nevezzük.



a) Semleges, elszigetelt fémgömb



b) Ha a negatívan töltött rudat a gömbhöz közelítjük, a rúd a fémben szabadon mozgó elektronok egy részét a gömb másik oldalára taszítja, ezáltal a rúd közelében pozitív töltések maradnak.



c) A gömböt *földeljük*, (egy fémhuzallal a földdel kötjük össze), jelölése: ⏚. Az elektronokat a rúd elektronjai taszítják, és ezért a földbe folynak.

24-3 ábra
Fémgömb feltöltése megosztással

[1] Bizonyos anyagokat szupravezetőknek nevezünk, ezek tökéletes vezetőkké válnak abban az értelemben, hogy bennük az elektronok mozgását akadályozó hatások megszűnnek. Szupravezetést először 4 K-re lehűtött fémeken figyeltek meg, de újabb kutatások szerint egyes fémötvözetek és keramikus anyagok ennél sokkal magasabb hőmérsékleten is szupravezetővé válnak. E szokatlan tulajdonság magyarázatát a kvantummechanika adja meg (28-10 ábra).

24.4 A Coulomb törvény

A (24-1) képlet a két pontszerű töltés között ható erő reciprok négyzetes törvényét adja meg. Ahhoz, hogy a képlet alkalmas legyen kvantitatív alkalmazásra, definiálnunk kell a töltések egységét, és kísérletileg meg kell határoznunk a k arányossági tényezőt. Az SI mértékrendszerben a töltés egysége 1 coulomb (C). A töltésegységet definiálni lehetne ugyan a (24-1) képlet alapján is, ám kísérletileg egyszerűbb, és sokkal pontosabb, ha az 1 coulomb töltést úgy definiáljuk, hogy ez az a töltésmennyiség, amely egy áramvezető teljes keresztmetszetén 1 másodperc alatt áthalad, ha az áramerősség 1 amper. Viszont, az ampert (A) két párhuzamos áramvezető között ható elektromágneses eredetű erő nagyságával definiáljuk. Erre a későbbiekben még visszatérünk (30. fejezet).

Egyetlen elektron töltését e elemi töltésnek nevezzük:

AZ ELEKTRON TÖLTÉSÉNEK NAGYSÁGA

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \qquad (24\text{-}2)$$

Ez a legkisebb töltés, amit valaha is észleltek: azonos nagyságú pozitív töltése van a protonnak.

A (24-1) képlet k együtthatójának értékét kísérletileg $8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ nagyságúnak találták: jó közelítéssel

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \qquad (24\text{-}3)$$

Célszerű az arányossági tényezőt oly módon megadni, hogy tartalmazza a 4π tényezőt. Ennek az az előnye, hogy más, a Coulomb törvénynél gyakrabban alkalmazott egyenletekben a 4π tényező nem jelenik meg. Tehát, a k arányossági tényező a következő alakban fejezhető ki:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ahol ε_0 a *vákuum áteresztő képessége*, melynek numerikus értéke:

VÁKUUM ÁTERESZTŐ KÉPESSÉGE

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}} \qquad (24\text{-}4)$$

A Coulomb törvényt tehát (24-1) alapján a következő alakban adjuk meg:

A COULOMB TÖRVÉNY

$$F = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (24\text{-}5)$$

vagy, SI egységekben

$$F = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (24\text{-}6)$$

ahol q coulombban, r méterben adandó meg és F newtonban adódik.

Két pontszerű töltés között ható Coulomb erő Newton harmadik törvényének megfelelő (erő-ellenerő) kölcsönhatási erő: az egyik töltésre éppen ugyanakkora, de ellentétes irányú erő hat, mint a másikra. A Coulomb törvény vektoriális alakja a következő:

A COULOMB TÖRVÉNY VEKTORIÁLIS ALAKJA

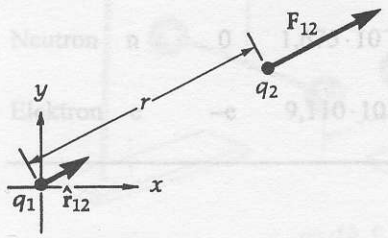
$$\mathbf{F}_{12} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad (24\text{-}7)$$

ahol $\mathbf{F}_{12}$ az az erő, amellyel a q_1 töltés hat a q_2 -re, és $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ a q_1 -től a q_2 felé mutató egységvektor (24-4 ábra). A továbbiakban mindig így használjuk az egységvektorokat és az indexeket: az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektort *mindig az erő forrásából kiindulva rajzoljuk, a felé az objektum felé, amelyre az erő hat.* (Az indexek sorrendje könnyen megjegyezhető: helyes sorrend esetén az olvasó a $\rightarrow$ nyilat képzelheti közéjük. Így $\hat{\mathbf{r}}_{1\rightarrow 2}$ az 1. pontból mutat a 2. pont felé, és $\mathbf{F}_{1\rightarrow 2}$ az az erő, amelyet az 1. töltés gyakorol a 2.-re.) A Coulomb törvény kölcsönhatási erőt ír le, tehát ha az indexek sorrendjét felcseréljük, akkor azt az azonos nagyságú, de ellentétes irányú $\mathbf{F}_{2\rightarrow 1}$ erőt kapjuk, amelyet a q_2 töltés gyakorol q_1 -re. A (24-7) egyenlettel akkor kapunk helyes **F** irányt, ha a következő előjel-konvenciót fogadjuk el:

***Pozitív* töltésekhez + előjel *negatívtöltésekhez* – előjel tartozik**

Azonos előjelű töltések között taszítóerők, különböző előjelűek között vonzóerők lépnek fel.

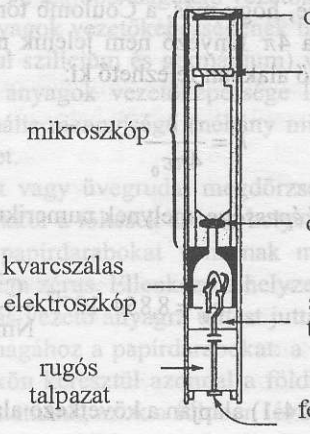
A Coulomb törvény a két pontszerű töltés között fellépő elektrosztatikus kölcsönhatást írja le. A továbbiakban felhasználjuk Coulomb törvényét néhány pontszerű töltés közötti erő, valamint egy pontszerű töltés és egy



24-4 ábra
A q_2 töltésre ható erő $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ irányú, ha a $q_2 q_1$ szorzat pozitív. Az ábrán illusztrált helyzet akkor áll elő, ha mindkét töltés pozitív vagy mindkettő negatív. A q_1 és q_2 közötti távolságvektor (amely nem szerepel az ábrán) $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}_{12}$. Newton harmadik törvénye értelmében az az erő, amit a q_2 töltés gyakorol q_1-re, az **F** erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányú.



a) Egyszerű elektroszkóp, amit még a XVIII. században szerkesztettek, és még manapság is használatos töltések jelenlétének kimutatására. Két vékony fémfólia fémrúd által csatlakozik egy fémgömbhöz. Ezt a szerkezetet szigetelő anyagból készített dugóval egy üvegbúra alá tesszük. Ha a fémgömbre töltést juttatunk, a töltés eloszlik a fémgömb és a fóliák között; ez utóbbiak, azonos előjelű töltéseik miatt, egymást taszítják.



b) Modern, precíziós elektroszkóp, amelyet masszív felépítése miatt zsebben hordható dozimeterként is használnak, mert kimutatja és méri az ionizáló sugárzásokat. Az elektroszkóp elektródái közül az egyik stabil fémelektród, a másik pedig mozgó, U alakúra hajlított, bearanyozott kvarcszál. Használat előtt az elektroszkópot feltöltik, és emiatt a kvarcszál elhajlik. A szál helyzete egy skála előtt a beépített mikroszkóppal megfigyelhető. Ha a dozimétert ionizáló sugárzás éri, a kamrában lévő gáz kismértékben vezetővé válik; némi töltés az elnyelt sugárzással arányos mértékben „elszivárog", és a szál a skála előtt elmozdul. A szál helyzetének leolvasását az teszi lehetővé, hogy az átlátszó talpazaton át fény jut a szálhoz és a lencsékhez. (Az ábra közlését a Dosimeter Corporation of America cég tette lehetővé.)

24-5 ábra
Az elektroszkóp

vonal mentén vagy térfogat mentén vett töléseloszlás között fellépő erő kiszámítására.

Éppúgy, mint a tömegpontok közötti $F = Gm_1m_2/r^2$ gravitációs erő esetében, kísérletileg úgy találjuk, hogy a pontszerű töltésre ható elektrosztatikus erők összegezhetők, vektoriálisan összeadhatók. Ezt nevezzük a **szuperpozíció elvének.** Minthogy Newton gravitációs törvénye és a Coulomb törvény matematikai alakja azonos, a két törvényből hasonló következtetések vonhatók le. Például megmutattuk, hogy két egyenletes tömegeloszlású szilárd gömb közötti gravitációs erő ugyanakkora, mintha az egyes gömbök tömegei a középpontjukban lennének koncentrálva. Hasonlóan, két homogén töltéssűrűségű gömb között ható elektrosztatikus erő éppen akkora, mintha a gömbök teljes töltése a középpontjukban lenne. Abban az esetben, ha a gömb elektromos töltése csak a sugár mentén változik, vagyis a töltéseloszlás gömbszimmetrikus, az elektrosztatikus erő ugyanakkora, mintha a teljes töltés a középpontban lenne: ez is teljesen analóg a gravitáció esetével.

24-1 PÉLDA

Két elhanyagolható méretű, 2 g-os tömegű gömb azonos pontban van 1 m hosszú fonalra felfüggesztve. Töltést juttatunk a gömbökre, amelyek ennek következtében egymástól 15 cm-nyire eltávolodnak. a) Feltételezve, hogy a két töltés ugyanakkora, számítsuk ki a töltés nagyságát. b) Csak egy megoldás van?

MEGOLDÁS

Rajzoljuk meg a jobb oldali gömb vektorábráját (24-6b ábra). (Szimmetria okok miatt tulajdonképpen mindegy, hogy a *jobb* vagy a *bal* gömböt választjuk ki, ugyanis a gömböknek azonos tömegük, töltésük van, azonos hosszúságú fonalakkal vannak felfüggesztve. Ennélfogva mind a Coulomb- , mind a gravitációs erők azonosak a két gömbön. Az egyedüli különbség a Coulomb-erő iránya.)

a) A gömbre ható erők eredője zérus, tehát a három erővektor zárt vektor háromszöget alkot (24-6c ábra), melynek alapján:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F}{mg} = \frac{0{,}075\ \text{m}}{1\ \text{m}} = 0{,}075$$

F nagyságát a Coulomb-törvény szabja meg, ezt behelyettesítve:

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q^2}{r^2 mg}$$

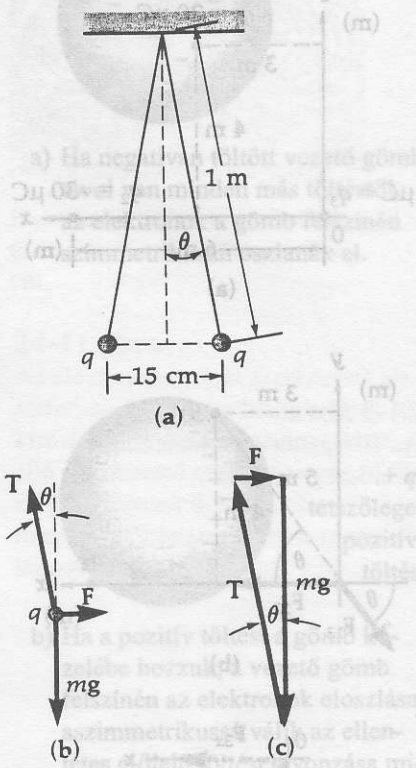
Ezt az egyenletet q^2 -re megoldva az kapjuk, hogy:

$$q^2 = (4\pi\varepsilon_0) r^2 mg \operatorname{tg}\theta$$

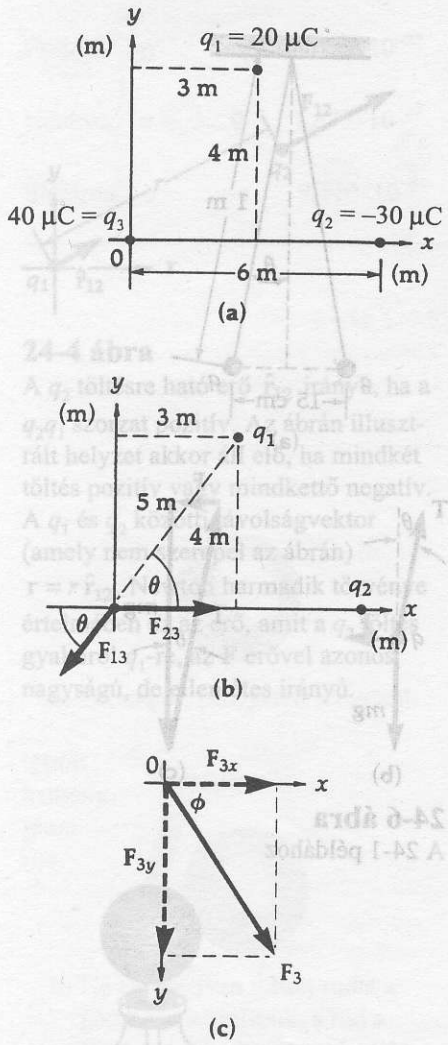
SI egységek értékeit behelyettesítve:

$$q^2 = \left(\frac{1}{9\times10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}\right)(0{,}075)(15\times10^{-2}\ \text{m})^2 \cdot$$

$$\cdot(2\times10^{-3}\ \text{kg})\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3{,}68\times10^{-15}\ \text{C}^2$$



24-6 ábra
A 24-1 példához



24-7 ábra
A 24-2 példához

Minthogy a töltések egymással egyenlőek,

$$q = \sqrt{3{,}68\times10^{-15}\,C^2} = \pm 6{,}07\times10^{-8}\,C$$

b) Két lehetőség van: vagy mindkét töltés pozitív, vagy mindkettő negatív. Minthogy a töltések (elektronok) tömege elhanyagolhatóan kicsiny, ezek mennyisége nem befolyásolja a gömbök tömegét, és így a két gömb töltése akár különböző nagyságú (de azonos előjelű) is lehet. Mindaddig, amíg a két töltés szorzata $3{,}68\times10^{-15}\ C^2$, a két gömb a feladatban megadott mértékben távolodik el egymástól.

24-2 PÉLDA

Három pontszerű töltés a 24-7a ábrán látható módon helyezkedik el. Az egyes töltések nagysága $q_1 = 20\ \mu C$, $q_2 = -30\ \mu C$ és $q_3 = 40\ \mu C$. Számítsuk ki a q_3 töltésre ható eredő erőt.

MEGOLDÁS

Először kiszámítjuk azon erők x és y komponensét, amelyeket az egyes töltések gyakorolnak q_3-ra (24-7b ábra). A kettős-index jelölésmódot használjuk: F_{13} azt az erőt jelenti, amellyel q_1 hat q_3 -ra.

q_1 hatása q_3-ra

Minthogy ezek azonos előjelű töltések, a közöttük ható erő taszító. Elemi trigonometriával azt kapjuk, hogy $r_{13} = 5$ m és $\theta = 53{,}1°$. Ezt felhasználva:

$$F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = \left(9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\cdot\frac{(20\,\mu C)(40\,\mu C)}{(5\ m)^2}$$

$$F_{13} = 0{,}288\ N$$

Az x és y komponensek nagysága:

$$F_{13x} = F_{13}\cos(180° + 53{,}13°) = -0{,}173\ N$$

$$F_{13y} = F_{13}\sin(180° + 53{,}13°) = -0{,}230\ N$$

q_2 hatása q_3-ra

Minthogy ezek különböző előjelű töltések, közöttük vonzó erő hat.

$$F_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} = \left(9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)\cdot\frac{(-30\,\mu C)(40\,\mu C)}{(6\ m)^2}$$

$$F_{23} = 0{,}300\ N$$

A q_3 töltésre ható F_3 eredő erő x komponense $F_{3x} = (-0{,}173\ N + 0{,}300\ N) = 0{,}127$ N. Az y komponens nagysága $-0{,}230$ N. Így a q_3 töltésre ható F eredő erő:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x} + F_{3y}} = \sqrt{(0{,}127\ N)^2 + (-0{,}230\ N)^2} = 0{,}263\ N$$

F_3 irányát a 24-7c ábrán definiált ϕ szög adja meg, amelyet az alábbi módon számíthatunk ki:

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{F_{3y}}{F_{3x}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{-0{,}230\ \text{N}}{0{,}127\ \text{N}}\right) = \ 61{,}1^\circ$$

24.5 Az elektromos erőtér

Gondoljunk vissza egy pillanatra a gravitációs erőtér fogalmára (16.6 fejezet). Az erőtér fogalmának bevezetése nagyon hasznos, mert így elkerülhetők a gravitációs törvényből következő távolba ható erő feltételezésének fogalmi nehézségei. Például, e törvény szerint a Föld erőt gyakorol egy műholdra, noha közöttük csak az űr van. Newton és számos későbbi tudós számára egyáltalán nem volt ellenszenves az üres téren át ható erő gondolata; a távolba hatás eszméjének ellentmondásosságát nem érzékelték. Az erőtér fogalma modern gondolat. A gravitációs kölcsönhatások leírásának ezen változata szerint a Föld **g** gravitációs térerősséget hoz létre a műhold helyén: így ez már nem távolba hatás.

A **g** gravitációs térerősség adott pontban az oda képzelt, m_0 egységnyi tömegű testre ható erővel definiálható: $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m_0 = -(GM/r^2)\hat{\mathbf{r}}$. Az **E** elektromos térerősséget analóg módon definiáljuk: Az erőteret létrehozó q töltés és egy tetszőleges q_0 pozitív töltés között $\mathbf{F} = 1/(4\pi\varepsilon_0)(qq_0/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ erő hat. A térerősség ennek az erőnek és a q_0 töltésnek a hányadosa:

E ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{q}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(24-8)}$$

tehát az **E** elektromos térerősség az egységnyi töltésre ható erő. Az **E** térerősség SI egysége 1 *newton/coulomb* (N/C).

Meg kell említsünk néhány gyakorlati problémát: Feltételezzük, hogy a q_0 töltés jelenléte nem változtatja meg az erőteret létrehozó többi töltés eloszlását. Például, ha a töltések vezető felületén helyezkednek el, és ezek közelébe töltést viszünk, az előbbiek elmozdulnak a felületen, és így az erőtér megváltozik[2] (24-8 ábra). Ezt a problémát elkerülendő, pontosítsuk a térerősség definícióját oly módon, hogy **E** legyen $\mathbf{F}/q_0$ arány határértéke ha q_0 töltés tart a zérushoz:

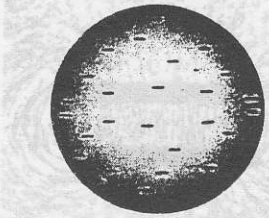
E ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad \textbf{(24-9)}$$

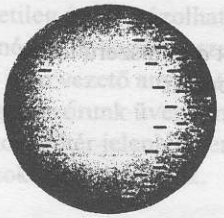
E logikailag pontos „méréstechnikai" definíció szerint **E** meghatározását kicsi és még kisebb q_0 töltésekkel kell elvégezni, és **E** a mért $\mathbf{F}/q_0$ értékek $q_0 \to 0$ határértéke. Ily módon a töltés hatása az eredeti töltéseloszlásra elhanyagolhatóan kicsinnyé válik[3].

[2] Mérések elvégzése során gyakran találkozunk ilyen problémákkal. Például, ha folyadék hőmérsékletét mérjük, a hőmérő belemerítésekor megváltozik a folyadék hőmérséklete.

[3] Gyakorlatban, még ez a sokkal pontosabb definíció sem alkalmazható a kísérleti nehézségek miatt. Például, az e elemi töltésnél kisebb q_0 töltés nem létezik. Az **E** térerősség az itt leírtnál sokkal könnyebben meghatározható az elektromos potenciál (26. fejezet) megmérésével, és az azon alapuló számítással.



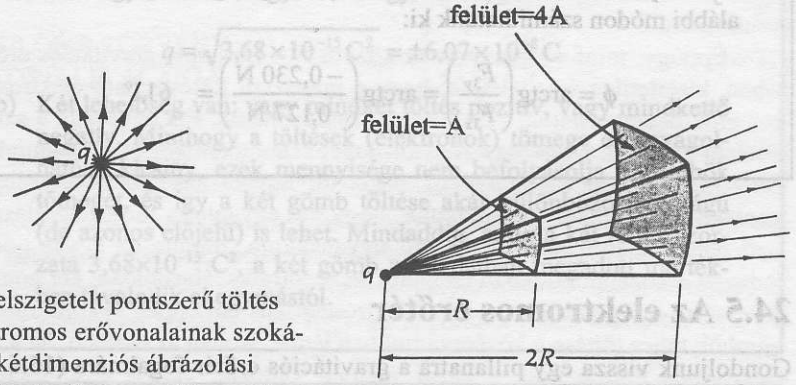
a) Ha negatívan töltött vezető gömb távol van minden más töltéstől, az elektronok a gömb felszínén szimmetrikusan oszlanak el.



$+q_0$ tetszőleges pozitív-töltés.

b) Ha a pozitív töltést a gömb közelébe hozzuk, a vezető gömb felszínén az elektronok eloszlása aszimmetrikussá válik az ellentétes előjelű töltések vonzása miatt.

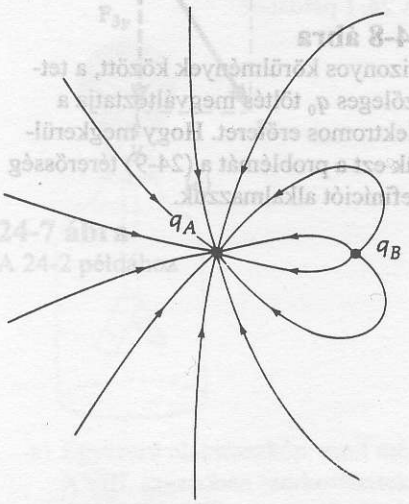
24-8 ábra
Bizonyos körülmények között, a tetszőleges q_0 töltés megváltoztatja a elektromos erőteret. Hogy megkerüljük ezt a problémát a (24-9) térerősség definíciót alkalmazzuk.



a) A q elszigetelt pontszerű töltés elektromos erővonalainak szokásos, kétdimenziós ábrázolási módja. Az ábra az erőtér szerkezetének hozzávetőleges keresztmetszete.

b) A q pontszerű töltésből kiinduló erővonalak vázlatos, három dimenziós perspektivikus képe. A vonalak R és $2R$ sugarú koncentrikus gömbfelületen haladnak át.

24-9 ábra
Az elszigetelt q pontszerű töltés térerősség-vonalai



24-10 ábra
Az elektromos erőtér szerkezete két elszigetelt, nem egyenlő nagyságú pontszerű töltés környezetében. Az erőtér szerkezete jobban megérthető, ha elképzeljük azt, hogy hogyan néz ki az erővonal-struktúra három dimenzióban. Az egyes töltéseken végződő erővonalak számából azt állapíthatjuk meg, hogy $|q_A| = 3|q_B|$ és hogy q_A pozitív és q_B negatív.

Az elektromos erővonalak

Az elektromos erőteret **térerősség-vonalak** (vagy ahogy Faraday nevezte, **erővonalak**) segítségével szemléltethetjük. Tekintsünk egy izolált q pontszerű töltést és annak erőterét, valamint egy tetszőleges q_0 töltést. Coulomb törvénye vektoralakban a következő:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{q\,q_0}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(24-10)}$$

Az $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$ térerősség:

A q PONTSZERŰ TÖLTÉS TÉRERŐSSÉGE

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{q}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(24-11)}$$

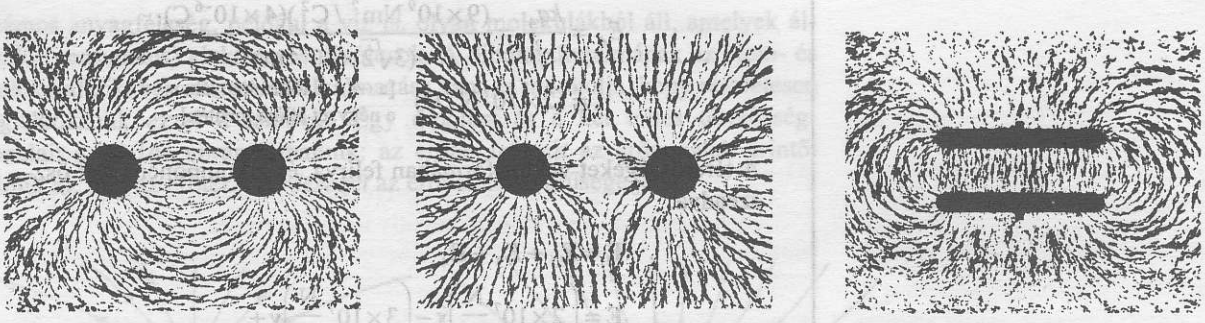
ahol az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor sugárirányban, az *erőteret létrehozó q töltéstől kifelé mutat.* Ha q pozitív, **E** sugárirányban kifelé, ha q negatív, **E** befelé mutat. A térerősség nagysága kifelé a távolság négyzetével fordított arányban csökken. Az erőtér eme tulajdonságai a q töltésből induló, és egyenletesen minden irányban kifelé tartó térerősség-vonalakkal szemléltethetők (24-9 ábra).

ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG-VONALAK

1. **A vonalak iránya mindenütt megegyezik a térerősség irányával.**
2. **A térerősség-vonalakra merőleges, egységnyi felületen áthaladó erővonalak száma az elektromos erőtér *térerősségével* arányos.**

A második állítás a térerősség-vonalak nagyon hasznos tulajdonságára mutat rá. Ahol sűrűn vannak, ott az erőtér „erős", ahol ritkán, ott „gyenge". Elszigetelt pontszerű töltés esetében, a reciprok négyzetes távolságfüggés geometriai meggondolások alapján nyilvánvaló. Képzeljünk el egy ponttöltést, és vele koncentrikusan gömbfelület-sorozatot (24-9b ábra). Minthogy a térerősség-vonalak sugárirányúak, (és szimmetrikusak) az egyes gömbfelületeket metsző erővonalak száma azonos. Az egyes gömbfelületek területe a sugár négyzetével arányos; minthogy **E** térerősség arányos az *egységnyi felületen* áthaladó erővonalak számával, **E** térerősség a távolság négyzetével fordítottan arányos.

A háromdimenziós erőterek ábrázolása bonyolult. Talán a legjobb, ha az erőterek (kétdimenziós) keresztmetszetét ábrázoljuk, mint a 24-9a ábrán. A két-



a) Elektromos erőtér két, ellentétes töltésű rúd körül

b) Elektromos erőtér két, azonos töltésű rúd körül

c) Elektromos erőtér két, ellentétes töltésű lemez között és rajtuk kívül.

24-11 ábra
Az elektromos erőtér szerkezetét kísérletileg úgy ábrázolhatjuk, hogy kisméretű, hosszúkás szemcsékből álló nem vezető anyagot (a képen fűmagot) szórunk üveglemezre. Elektromos erőtér jelenlétében a szemcsék láncokba rendeződnek.

dimenziós ábrák alapján azonban mindig célszerű elképzelni, gondolati úton rekonstruálni az erőtér valódi szerkezetét megértendő, a teljes, háromdimenziós teret.

Az egyes töltésekből kiinduló erővonalak *száma* tulajdonképpen önkényes. Például, 1 μC töltéshez akár 100, akár 1 millió erővonal is hozzárendelhető. Bármely, kényelmesen használható „skálafaktort" választhatunk. Azonban bármelyiket választjuk is, 3 μC töltésből pontosan háromszor annyi erővonalnak kell kiindulnia, mint egy 1 μC töltésből (24-10 ábra). Vegyük észre, hogy a töltések közelében az erővonalak szimmetrikusan veszik körül az egyes töltéseket. Nagyon nagy távolságból a töltésegyüttes egyszerű pontszerű töltésnek tűnik (amelynek töltése a töltések összege), így az erővonalak a töltésegyüttestől távol szimmetrikusak, olyanok, mintha egyetlen pontszerű töltésből erednének.

Az elektromos térerősség-vonalak mindig a pozitív töltésekről indulnak és a negatív töltésen végződnek. Ha csak az egyik töltésfajta van jelen (vagy a rendszer össztöltése nem zérus) az erővonalak a „végtelenben végződnek". Egyik esetben sem szabad az erővonalakat szó szerint venni: jegyezzük meg, hogy erővonalak a valóságban nem léteznek, pusztán elméleti segédeszközök, amelyekkel az elektromos erőtér fogalmát jobban megérthetjük. Erőterek viszont valóban léteznek abban az értelemben, hogy műveletekkel definiálhatók és kísérletileg meghatározhatók.

24-3 PÉLDA

Három pontszerű töltés van egy 3 cm élhosszúságú négyzet három csúcsán (24-12 ábra). Számítsuk ki a negyedik csúcson az **E** elektromos térerősséget.

MEGOLDÁS

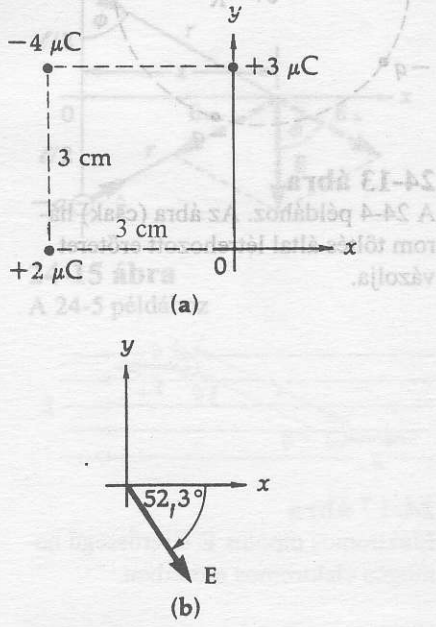
A szuperpozíció elvét használjuk fel: kiszámítjuk az egyes töltések által keltett térerősség irányát és nagyságát a negyedik csúcson. Az eredő **E** térerősség az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$ vektorösszeggel számítható:

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{(9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})(2\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}$$

$$= (2\times10^7\,\mathrm{N/C}) \quad [+x \text{ irányú}]$$

$$E_3 = \frac{kq_3}{r_3^2} = \frac{(9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})(3\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}$$

$$= (3\times10^7\,\mathrm{N/C}) \quad [-y \text{ irányú}]$$



24-12 ábra
A 24-3 példához

$$E_4 = \frac{kq_4}{r_4^2} = \frac{(9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})(4\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(3\sqrt{2}\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}$$
$$= (2\times10^7\,\mathrm{N/C}) \quad \text{[a } -4\,\mu\text{C töltés irányában a négyzet átlója mentén]}$$

A térerősségeket vektor formában felírva, és a komponenseket összeadva:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4$$
$$\mathbf{E} = \left(2\times10^7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right)\hat{\mathbf{x}} - \left(3\times10^7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left[\left(\frac{2\times10^7}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right)\hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{2\times10^7}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right)\hat{\mathbf{y}}\right]$$
$$\mathbf{E} = \left(3{,}414\times10^7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right)\hat{\mathbf{x}} - \left(4{,}414\times10^7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right)\hat{\mathbf{y}}$$
$$\mathbf{E} = \left(5{,}58\times10^7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right) \quad [52{,}3°\text{-kal a } +x \text{ tengely alatt}]$$

24-4 PÉLDA

Öt azonos nagyságú, negatív pontszerű töltés helyezkedik el szimmetrikusan egy kör kerülete mentén. Számítsuk ki a térerősséget a kör középpontjában.

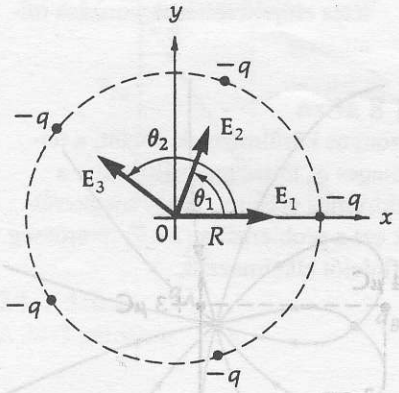
MEGOLDÁS

A töltések elhelyezkedését a 24-13 ábrán vázoltuk fel. A koordinátatengelyeket úgy választottuk meg, hogy az illeszkedjék a töltésrendszer szimmetriájához. Látható, hogy $\theta_1 = 360°/5$ és $\theta_2 = (2)(360°/5)$. A térerősség x és y komponenseit az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$E_x = \frac{kq}{R^2}(1 + 2\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2)$$
$$= \frac{kq}{R^2}(1 + 0{,}6180 - 1{,}6180) = 0$$

Hasonlóképpen, $E_y = \frac{kq}{R^2}(0 - \sin\theta_1 - \sin\theta_2 + \sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0$

Megmutatható, hogy a térerősség a kör középpontjában zérus, függetlenül attól, hogy hány, szimmetrikusan elrendezett, azonos nagyságú töltés helyezkedik el a kör kerülete mentén, és attól is, hogy a töltések száma páros vagy páratlan.

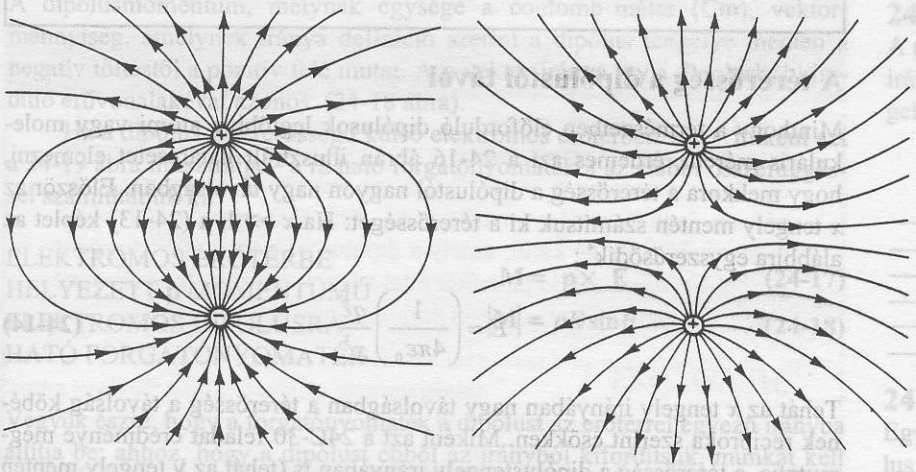


24-13 ábra
A 24-4 példához. Az ábra (csak) három töltés által létrehozott erőteret vázolja.

24.6 Az elektromos dipólus

Az **elektromos dipólus** olyan töltéskonfiguráció, amelyet számos gyakorlati szempontból fontos esetben alkalmazunk modellként. *Két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű, egymástól a térben elválasztott pontszerű töltés* alkotja.

Számos anyagféleség, például a víz is, olyan molekulákból áll, amelyek állandó (permanens) elektromos dipólusok. A dipólus fogalmának az atom- és molekulafizikában számtalan alkalmazása van, ez indokolja, hogy részletesen foglalkozzunk ezzel a témával. Egy dipólust és a két töltés térerősségvonalait a 24-14a ábrán láthatunk: az erőtér *irányát* az erővonalak érintői jelölik ki, míg az erőtér *térerősségét* az erővonalak sűrűsége jelzi.



a) Elektromos dipólus erőtere: a pontszerű töltések azonos nagyságúak, de ellen-kező előjelűek.

b) Azonos nagyságú, és azonos előjelű pontszerű töltések elektromos erőtere (pozitív töltések).

24-14 ábra
Két pontszerű töltés által létrehozott elektromos erőtér. Mint mindig, amikor három dimenziós erőtér két dimenziós metszetét ábrázoljuk, képzeljük el a három dimenziós struktúrát is. Ebben a két esetben az erővonalstruktúra a két töltést összekötő vonalra, mint tengelyre hengerszimmetrikus.

24-5 PÉLDA

Tekintsünk egy, az y tengely mentén fekvő elektromos dipólust (24-15 ábra). Számítsuk ki az elektromos térerősség irányát és nagyságát x távolságban, az x tengely mentén.

MEGOLDÁS

Legyen a töltések távolsága ℓ (24-15 ábra). Kiszámítjuk a pozitív töltéstől származó $\mathbf{E}_+$ térerősséget, a negatív töltéstől származó $\mathbf{E}_-$ térerősséget, és vektoriálisan összegezzük őket. Azzal kezdjük, hogy a pontszerű töltés elektromos tere $\mathbf{E} = (kq/r^2)\hat{\mathbf{r}}$. Az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor a q töltéstől a kérdéses pont irányába mutat, és r a pont és a q töltés távolsága. Így $r^2 = (\ell/2)^2 + x^2$, továbbá $\mathbf{E}_+$ és $\mathbf{E}_-$ azonos nagyságúak.

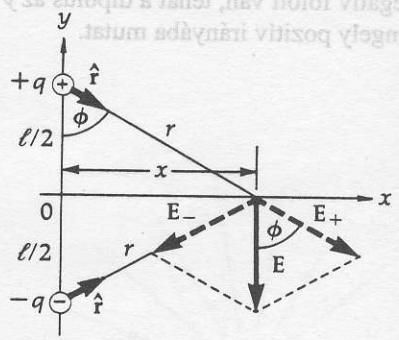
$$E_+ = E_- = \frac{kq}{(\ell/2)^2 + x^2} \qquad \textbf{(24-12)}$$

Ha $\mathbf{E}_+$ és $\mathbf{E}_-$ vektorokat összeadjuk, az x komponensek összege szimmetriaokokból zérus, az y komponensek összege:

$$E = \left(\frac{kq}{(\ell/2)^2 + x^2}\right)\cos\phi$$

ahol $\cos\phi$ az alábbi alakban adható meg:

$$\cos\phi = \frac{(\ell/2)}{\sqrt{(\ell/2)^2 + x^2}}$$



24-15 ábra
A 24-5 példához

Elvégezve a $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ behelyettesítést:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q\ell}{[(\ell/2)^2 + x^2]^{3/2}}\hat{\mathbf{y}} \qquad \textbf{(24-13)}$$

Az **E** térerősség ebben az x tengelyen lévő pontban az y tengellyel párhuzamosan, az y tengely negatív irányába mutat.

A térerősség a dipólustól távol

Minthogy a természetben előforduló dipólusok legtöbbje atomi vagy molekuláris méretű, érdemes azt a 24-16 ábrán illusztrált határesetet elemezni, hogy mekkora a térerősség a dipólustól nagyon nagy távolságban. Először az x tengely mentén számítsuk ki a térerősséget: Ha $x >> l$, a (24-13) képlet az alábbira egyszerűsödik[4]:

$$E \approx \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q\ell}{x^3} \qquad \textbf{(24-14)}$$

Tehát az x tengely irányában nagy távolságban a térerősség a távolság köbének reciproka szerint csökken. Miként azt a 24C-30 feladat eredménye megmutatja, a térerősség a dipólustengely irányában is (tehát az y tengely mentén is) a távolság köbének reciproka szerint csökken. Általánosságban is megmutatható, hogy a dipólus körül *bármely irányban*, nagy távolságban a térerősség a távolság köbének reciprokával változik. Ha a koordinátarendszer középpontja a dipólus középpontjába esik, és az attól számított távolságot jelöljük r-rel; az előző képletet az alábbi általános alakban írhatjuk fel:

AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG A DIPÓLUSTÓL TÁVOL ($r >> \ell$)

$$E \propto \frac{q\ell}{r^3} \qquad \textbf{(24-15)}$$

A (24-15) egyenlet szerint, ha q nagyságát megkétszerezzük, mialatt ℓ-et felére csökkentjük, a térerősség ugyanakkora marad. Tulajdonképpen q és ℓ *bármilyen* kombinációja (feltéve hogy $q \cdot \ell$ = konstans) nagy távolságban ugyanakkora térerősséget eredményez. Más szóval nagy távolságokban, a térerősséget a $q \cdot \ell$ szorzat szabja meg. Kitüntetett szerepe miatt e szorzatnak külön neve van: ez az *elektromos dipólusmomentum*.

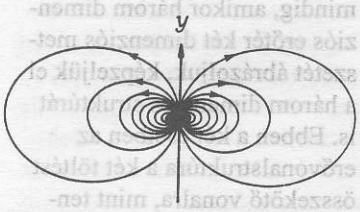
Az elektromos dipólusmomentum

Az elektromos dipólus viselkedése különösen érdekes, ha **E** térerősségű homogén elektromos erőtérbe kerül (24-17 ábra). Minthogy az erőtér homogén, a pozitív q töltésre ható $\mathbf{F}_+$ erő ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú, mint a negatív q töltésre ható $\mathbf{F}_-$ erő. A dipólusra ható eredő erő zérus, így a dipólusra ható forgatónyomaték bármely tengelyre azonos. A 10. fejezetben levezetett összefüggés alapján az **M** forgatónyomaték:

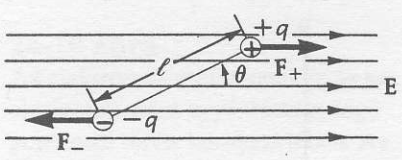
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

melynek nagysága $M = F_+ \ell \sin\theta = (q\ell)E\sin\theta$

Az **M** forgatónyomaték csökkenő q szögek irányában forgatja el a dipólust. Az összefüggés vektoralakban is felírható az alábbi módon:



24-16 ábra
Dipólus elektromos erőtere. Képzeljük el a teljes három dimenziós térerősségstruktúrát amely az y tengely körül hengerszimmetrikus. A dipólus az ábra méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsi; a két pontszerű töltés az y tengely mentén helyezkedik el, mégpedig úgy, hogy a pozitív töltés a negatív fölött van, tehát a dipólus az y tengely pozitív irányába mutat.



24-17 ábra
Elektromos dipólus **E** térerősségű homogén elektromos erőtérben.

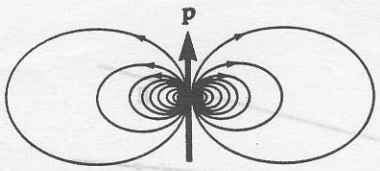
[4] Az $x >> \ell$ egyenlőtlenség nem jelenti azt, hogy x végtelen nagy lenne. A (24-13) nevezőjében lévő két tagot összehasonlítjuk, megállapíthatjuk, hogy ha $x >> \ell$, az $(\ell/2)^2$ tag sokkal kisebb x-nél, és így $(\ell/2)^2$ elhanyagolható a dipólustól távol.

$$\mathbf{M} = (q\ell) \times \mathbf{E}$$

ahol $q\,\ell = \mathbf{p}$ az elektromos dipólusmomentum vektora, amely a negatív töltéstől a pozitív töltés felé mutat. Az **M** irányát a vektorszorzat határozza meg.

A **p** ELEKTROMOS DIPÓLUSMOMENTUM $\mathbf{p} = q\ell$ (ahol ℓ a pozitív töltés felé mutat) **(24-16)**

A dipólusmomentum, melynek egysége a coulomb·méter (Cm), vektormennyiség, amelynek iránya definíció szerint a dipólus tengelye mentén a negatív töltéstől a pozitív felé mutat. A **p** vektor iránya így a dipólusból kiinduló erővonalakéval azonos (24-18 ábra).



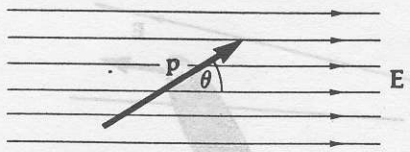
24-18 ábra
A **p** dipólusmomentum-vektor abba az irányba mutat, amerre a dipólus tengelyén az elektromos tér.

Ha a dipólus **E** térerősségű külső elektromos erőtérben van – miként azt a 24-19 ábra illusztrálja – a rá ható forgatónyomatékot az alábbi összefüggéssel számíthatjuk ki:

ELEKTROMOS ERŐTÉRBE HELYEZETT **p** MOMENTUMÚ ELEKTROMOS DIPÓLUSRA HATÓ FORGATÓNYOMATÉK

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad \textbf{(24-17)}$$

$$|\mathbf{M}| = pE\sin\theta \quad \textbf{(24-18)}$$



24-19 ábra
Egy **p** momentumú elektromos dipólus **E** térerősségű homogén külső elektromos erőtérben. A **p** és **E** közötti szög θ.

Vegyük észre, hogy a forgatónyomaték a dipólust az erőtérrel egyező irányba állítja be; ahhoz, hogy a dipólust ebből az irányból kifordítsuk, munkát kell végeznünk. Vagyis, külső elektromos erőtér jelenlétében a nem pontosan az erőtér irányába álló dipólusoknak elektromos potenciális energiájuk van. Az elektromos erőtér *konzervatív*, így az általa végzett munka a rendszer potenciális energiáját csökkenti, azaz ΔU negatív. Egyenes vonalú mozgásnál, a potenciális energia változása:

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

Ha egy **M** forgatónyomaték $d\theta$ szögelfordulást eredményez, a potenciális energia változása:

$$U_\theta - U_{\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}$$

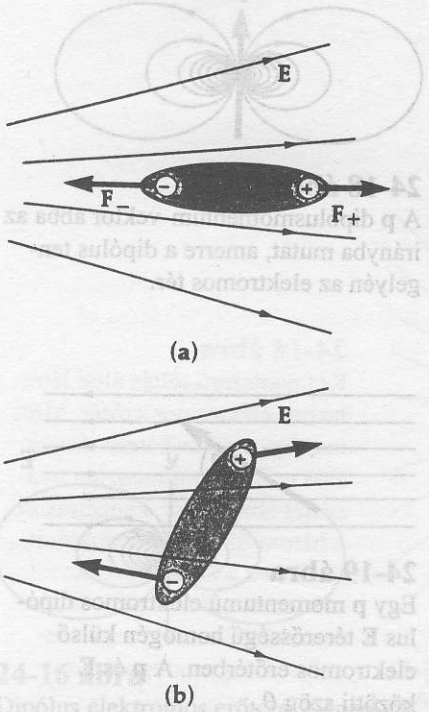
A 24-19 ábrán, a jobbkéz-szabály értelmében a $d\boldsymbol{\theta}$ vektor (amely θ megváltozását jelenti) az ábra síkjára merőlegesen, fölfelé mutat, míg a **M** forgatónyomaték vektor lefelé. Ennélfogva a $\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}$ szorzat negatív. $|\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}| = M\cos 180^\circ\, d\theta = -(Md\theta) = -(pE\sin\theta\, d\theta)$ (Megjegyzendő, hogy itt θ az **M** és **E** közötti szöget, és nem az **M** és $d\boldsymbol{\theta}$ közötti 180°-os szöget jelenti!)

$$U_\theta - U_{\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} (-pE\sin\theta)d\theta = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

A potenciális energiaskála zéruspontját úgy megválasztva, hogy $U_{\theta_0} \equiv 0$, ha $\theta_0 = 90^\circ$,

$$U - 0 = -pE(\cos\theta - 0) = -pE\cos\theta$$

amelyet a következő skalárszorzattal írhatunk fel:



24-20 ábra
Ha a dipólus inhomogén elektromos erőtérbe kerül, akkor a nagyobb térerősségű hely felé mutató erő hat rá.

ELEKTROMOS ERŐTÉRBE HELYEZETT DIPÓLUS U POTENCIÁLIS ENERGIÁJA ($U = 0$, HA $\mathbf{p}$ ÉS $\mathbf{E}$ EGYMÁSRA MERŐLEGESEK)

$$U = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \qquad (24\text{-}19)$$

A dipólus potenciális energiája tehát akkor maximális, ha $\mathbf{p}$ és $\mathbf{E}$ ellentétes irányúak, és akkor minimális, ha azonos irányúak. (Célszerű a potenciális energiaskála zéruspontjának azt tekinteni, amikor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{E}$ egymásra merőlegesek.)

24-6 PÉLDA

Egy, a környezetétől elszigetelt vízmolekula permanens elektromos dipólusmomentuma $6{,}24\times10^{-30}$ Cm. a) Számítsuk ki az erre a dipólusra ható forgatónyomatékot, ha 300 N/C térerősségű külső elektromos erőtérbe kerül, amely a dipólus irányával 60°-os szöget zár be; b) Számítsuk ki az erőtér által végzett munkát, ha a dipólust ebből a helyzetéből az erőtérrel párhuzamos irányba forgatja.

MEGOLDÁS

a) A (24-17) egyenlet szerint

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$M = pE\sin\theta = (6{,}24\times10^{-30}\,\text{Cm})(300\,\text{N/C})(\sin 60°)$$

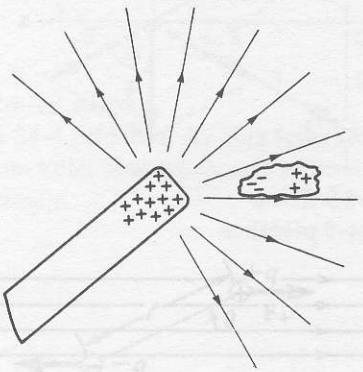
$$M = 1{,}62\times10^{-27}\,\text{Nm}$$

b) Az erőtér által végzett munka az elektromos potenciális energia megváltozása ellenkező előjellel:

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta} = -\Delta U = -\left[U_\theta - U_{\theta_0}\right] = -\left[-pE(\cos\theta - \cos\theta_0)\right]$$

$$W = \left[(6{,}24\times10^{-30}\,\text{Cm})(300\,\text{N/C})(\cos 0° - \cos 60°)\right]$$

$$W = 9{,}36\times10^{-28}\,\text{J}$$



24-21 ábra
Egy töltött rúd elektromos erőtere dipólusokat indukál töltetlen papírdarabokban (vagy más anyagban). A széttartó erővonalak inhomogén erőteret jelentenek; a papírdarabok a nagyobb térerősség felé mozdulnak el.

Dipólus inhomogén erőtérben

Ha egy dipólus inhomogén elektromos erőtérbe kerül, akkor a töltéseire ható erő nem egyenlő, mert az egyes q töltések helyén a térerősség nem azonos. Ennek következtében a dipólusra nemcsak forgatónyomaték, hanem olyan eredő erő is hat, amely a *nagyobb térerősségű helyek irányában mozgatja* (24-20 ábra). Számos molekulának van permanens elektromos dipólusmomentuma, mert a pozitív töltések súlypontja nem esik egybe a negatívakéval. Ha ilyen, ún. *poláros molekulák* szabadon mozoghatnak, akkor az erőtér nagyobb térerősségű tartománya felé mozdulnak el.

Elektromos erőterek *indukált dipólusmomentumot* hozhatnak létre anyagokban, ha az erőtér a töltéseloszlás kismértékű átrendeződését okozza. Az anyag pozitív töltései kis mértékben az elektromos erőtér irányában, a negatív töltések azzal ellentétes irányban mozdulnak el[5]. A 24-21 ábrán töltött rúd vége környékén kialakult inhomogén (széttartó) elektromos erőtérbe került *töltés nélküli* papírdarab (vagy más hasonló anyag) látható. A papírdarabra, indukált dipólusmomentuma miatt a nagyobb térerősségű tartomány irányába mutató erő hat, ugyanis az ábrán jelölt negatív töltések nagyobb térerősségű helyen vannak, mint a pozitívak. Ez az effektus független a rúd töltésének előjelétől.

[5] Ennek mikroszkopikus részleteit a 27-4 fejezetben tárgyaljuk.

24.7 Folytonos töltéseloszlások által létrehozott elektromos erőterek

A gyakorlatban ritkán találkozunk olyan esettel, amikor izolált töltések szerepelnek: a töltések rendszerint egy tartományban egymáshoz közel helyezkednek el, és így *folytonos töltéseloszlással* közelíthetjük őket. A folytonos töltéseloszlás elhelyezkedhet vonal vagy felület mentén, ill. térfogatban. Mindegyik esetben, az **E** térerősség kiszámítását úgy végezzük, hogy az egyes dq töltéselemek által a P pontban létrehozott $d\mathbf{E}$ térerősségvektorokat összegezzük.

Egy dq töltéselem által létrehozott $d\mathbf{E}$ térerősség	**Az összes töltéselem által létrehozott E teljes térerősség**
$d\mathbf{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	$\mathbf{E} = k\int\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

Az integrálásnál figyelembe kell venni, hogy az integrál alatt vektorok szerepelnek. Az általunk vizsgált példákban leegyszerűsíti a számítást, ha figyelembe vesszük a töltéseloszlás szimmetriáját.

Az egyes töltés eloszlástípusokat a 24-2 táblázat szerint λ, σ, ill. ρ jelöli.

24-2 TÁBLÁZAT

Töltéseloszlás	Jellemző paraméter	SI egység
Vonalmenti	λ, egységnyi hosszra jutó töltés	C/m
Felületmenti	σ, egységnyi felületre jutó töltés	C/m^2
Térfogati	ρ, egységnyi térfogatra jutó töltés	C/m^3

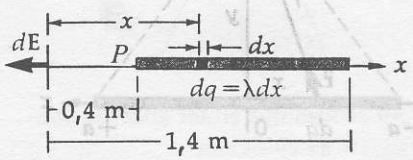
Vegyük észre, hogy az egyes töltéssűrűség-féleségek egységei különbözőek, ugyanis az, hogy hogyan választjuk meg a dq töltéselemet, függ a töltéseloszlás konkrét tipusától:

Töltések vonal mentén	**Töltések felület mentén**	**Töltések térfogatban**
$dq = \lambda\, dx$	$dq = \sigma\, dA$	$dq = \rho\, dV$

A következő példákban figyeljük meg, hogy hogyan kell megválasztani a dx, dA és dV elemi mennyiségeket, hogy megfeleljenek a töltéseloszlás szimmetriájának. A probléma megoldásának legkritikusabb pontja dq megválasztása: ehhez mindig tanácsos olyan ábrát készíteni amelyik a dq elemi töltést és az általa létrehozott $d\mathbf{E}$ térerősséget ábrázolja.

24-7 PÉLDA

Vékony, egyenes, 1 m hosszú szigetelő rúd töltése 5 μC töltés, ami az x tengely mentén elhelyezkedő rúdon hosszában egyenletesen oszlik el. Számítsuk ki az **E** elektromos térerősséget az x tengelyen a rúd egyik végétől 0,4 m-nyire lévő P pontban (24-22 ábra).



24-22 ábra
A 24-7 példához.

MEGOLDÁS

A λ lineáris töltéssűrűség a rúdon $\lambda = 5\ \mu$C/m. Legyen a P pont a koordinátarendszer középpontja, és a rúd helyezkedjen el az x ten-

gely mentén. Válasszuk meg az elemi töltést[6] úgy, hogy $dq = \lambda\, dx$; ez az elemi töltés $d\mathbf{E}$ térerősséget hoz létre P-ben. Összegezve az egyes $d\mathbf{E}$ vektorokat, észrevehetjük, hogy mindegyikük azonos irányú, és ezért skalárként adhatjuk össze őket. Az integrálás tulajdonképpen egydimenziós skalár mennyiség összegzése az $x = 0{,}4$ és $x = 1{,}4$ m határok között.

$$E = k\int \frac{dq}{r^2} = k\int_{0{,}4\text{m}}^{1{,}4\text{m}} \frac{\lambda\, dx}{x^2} = -k\lambda\left[\frac{1}{x}\right]_{0{,}4\text{m}}^{1{,}4\text{m}}$$

$$= \left(9\times10^9\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)\left(5\times10^{-6}\ \frac{\text{C}}{\text{m}}\right)\left(\frac{1}{1{,}4\ \text{m}} - \frac{1}{0{,}4\ \text{m}}\right)$$

$$= -8{,}04\times10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \qquad \text{(az } x \text{ tengely negatív irányában)}$$

24-8 PÉLDA

Legyen az $x = -a$ és az $x = +a$ pontok közötti szakaszon egyenletes λ vonalmenti töltéssűrűség (24-23 ábra). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a felezősíkon y távolságban lévő P pontban.

MEGOLDÁS

Miként minden példában, amelyben töltéseloszlások szerepelnek, választanunk kell egy dq elemi töltést; kiszámítjuk a vizsgált pontban a dq-tól származó $d\mathbf{E}$ térerősséget; majd az összes töltéstől származó $d\mathbf{E}$ komponensek összegezésével meghatározzuk a teljes $\mathbf{E}$ térerősséget.

Vegyük észre a töltéseloszlás szimmetriáját[7]. Minden egyes, $+x$ helyen lévő dq elemi töltéshez találhatunk egy ugyanakkora dq töltést a $-x$ helyen. Az egyik dq-tól származó dE_x komponenst éppen semlegesíti a másik dq éppen ellentétesen egyenlő dE_x komponense. Tehát, ha az összes dq-tól származó dE_x komponenst összegezzük, zérus eredőt kapunk. Így hát csak a dE_y komponenseket kell összegeznünk, ami viszont skalárok összegzése, hiszen mindegyik dE_y komponens azonos irányba mutat. Az elemi töltés $dq = \lambda\, dx$. A Coulomb törvényt felhasználva:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{r^2}$$

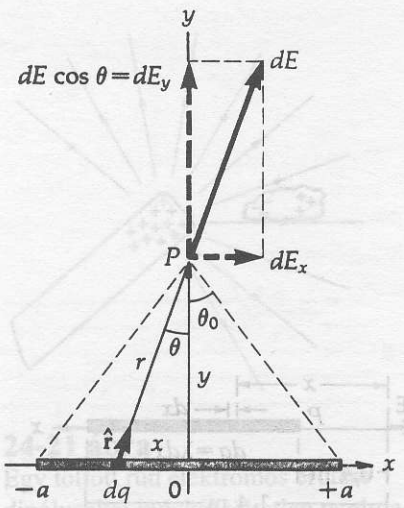
és

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{k\lambda\cos\theta\, dx}{r^2} \qquad \textbf{(24-20)}$$

Három változónk van: x, r és θ. Fejezzük ki x-et és r-et θ függvényében:

$$r = \frac{y}{\cos\theta} \qquad x = y\,\text{tg}\,\theta \qquad dx = y\sec^2\theta\, d\theta = y\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

Ezeket a (24-12) képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy



24-23 ábra
A 24-8 példához. λ egyenletes vonalmenti töltéssűrűség az $x = -a$ és $x = +a$ hely között.

[6] Figyeljük meg, hogyan eredményez λ és dx szorzata töltés dimenziójú mennyiséget: [töltés / hosszúság] · [hosszúság] = [töltés]

[7] A szimmetria-megfontolások nagyon fontosak a fizikában. Mindig figyeljünk arra, hogy valamilyen szimmetria nem teszi-e sokkal könnyebbé a probléma megoldását. A következő néhány fejezetben gyakran alkalmazunk szimmetria-megfontolásokat.

$$dE_y = \frac{k\lambda\cos\theta\, y}{\left(\frac{y}{\cos\theta}\right)^2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta = \frac{k\lambda}{y}\cos\theta\, d\theta$$

A θ szög a $-\theta_0$ és $+\theta_0$ határok között változik. A szimmetria miatt, a $-\theta_0$ és $+\theta_0$ közötti integrál kétszerese a 0 és $+\theta_0$ közöttinek, és így, a G–II függelék integráltáblázatát használva, a P pontban a teljes E_y térerősséget az alábbi formula fejezi ki:

$$E_y = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} dE_y = \frac{2k\lambda}{y}\int_0^{\theta_0}\cos\theta\, d\theta = \frac{2k\lambda}{y}\sin\theta\Big|_0^{\theta_0} = \frac{2k\lambda}{y}\sin\theta_0$$

Minthogy $\sin\theta_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$ és $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$,

$$E_y = \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\lambda a}{y\sqrt{a^2+y^2}} \qquad \textbf{(24-21)}$$

Vizsgáljunk meg egy határesetet: Úgy gondoljuk, hogy a töltésektől nagyon nagy távolságból, vagyis ha $y >> a$, a töltésekből alkotott vonaldarab pontszerű töltésnek látszik és $Q = \lambda(2a)$, továbbá inverz négyzetes távolságfüggést várunk. Valóban, a (24-21) egyenlet az $y >> a$ esetben az

$$E_y = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{y^2} \qquad [\text{ha } y >> a]$$

alakúra egyszerűsödik. A feladatok megoldásainak ellenőrzésére a határesetek vizsgálata sok esetben egyszerű és hasznos módszer lehet.

24-9 PÉLDA

Számítsuk ki az **E** térerősséget a végtelen hosszú, egyenletes λ töltéssűrűségű egyenestől r távolságban.

MEGOLDÁS

A szimmetria miatt a térerősség mindenütt merőleges az egyenletes töltéssűrűségű egyenesre. (Indoklás: a töltéseloszlásnak nincs aszimmetriája, ami miatt az erővonalak akár $+x$, akár $-x$ irányban görbülnének. Arra sincs semmi ok, hogy az erővonalak az egyenes köré hajoljanak. Következésképpen az erővonalak csak sugárirányúak lehetnek.) A számítás ugyanazt a gondolatmenetet követi, mint az előző példában; azonban, az y paramétert itt r helyettesíti; továbbá, az integrálást $q = -90°$ és $q = +90°$ határok között végezzük el (vagy $\theta = 0°$ és $\theta = +90°$ határok között, és a kapott érték kétszeresét vesszük). Így, a térerősség:

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r}\sin\theta\Big|_0^{90°} = \frac{2k\lambda}{r}$$

VÉGTELEN HOSSZÚ EGYENES MENTÉN EGYENLETESEN ELHELYEZKEDŐ TÖLTÉSEK ELEKTROMOS ERŐTERÉNEK A TÉRERŐSSÉGE

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$ [sugárirányú erőtér] **(24-22)**

24-10 PÉLDA

Számítsuk ki az **E** térerősséget egy vékony, egyenletes töltéseloszlású, Q töltésű, r sugarú szigetelő körgyűrű tengelyén, a gyűrű középpontjától x távolságra lévő P pontban (24-24 ábra).

MEGOLDÁS

Olyan problémák megoldásakor, amelyek töltéseloszlásokat tartalmaznak, először ki kell választani azokat a dq töltéselemeket, amelyektől származó $d\mathbf{E}$ térerősségelemeket kiszámítjuk a vizsgált pontban; a teljes **E** térerősséget az utóbbiak összegzésével kapjuk meg.

Vegyük észre a töltéseloszlás szimmetriáját. Minden egyes dq töltéselemhez találhatunk egy ugyanakkora dq elemet, a gyűrű másik oldalán. Az egyik dq-tól származó, az x tengelyre merőleges $dE_\perp$ komponenst éppen semlegesíti a másik dq éppen ellentétesen egyenlő $dE_\perp$ komponense. Tehát, ha az összes $dE_\perp$ komponenst összegezzük, zérus eredőt kapunk. Így hát csak az x tengely irányába eső dE_x komponenseket kell összegeznünk, ami viszont skaláris integrálást jelent. Coulomb törvényét vektor alakban felírva:

$$d\mathbf{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

A $d\mathbf{E}$ vektorok abszolút értékére az alábbi egyenlet írható fel:

$$dE = \frac{kdq}{(a^2+x^2)}$$

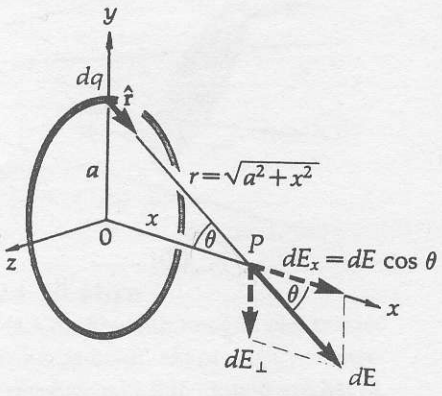
Az x komponens: $dE_x = \frac{kdq}{(a^2+x^2)}\cos\theta = \frac{kdq}{(a^2+x^2)}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

Így $$E_x = \int dE_x = \int \frac{kxdq}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

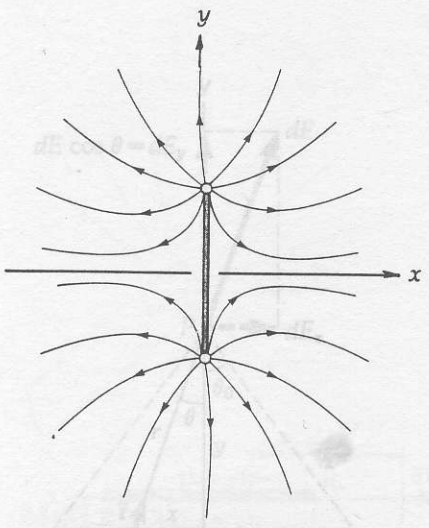
A körgyűrű mentén történő integrálás során mindegyik tényező konstans, és minthogy $\int dq = Q$, valamint $k = 1/4\pi\varepsilon_0$:

$$E_x = \frac{kx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\int dq = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{xQ}{(a^2+x^2)^{3/2}} \quad \textbf{(24-23)}$$

Az eredmény ellenőrzésére, vizsgáljunk meg két határesetet: Ha $x \to 0$, azaz, ahogy a gyűrű középpontja felé tartunk, $E \to 0$. Ez várható is, a középpontban ugyanis valamely töltéselem létrehozta $d\mathbf{E}$-hez mindig találunk egy ellentétes irányú $-d\mathbf{E}$ komponenst, amely a körgyűrű átellenes részének töltéselemétől származik. Szimmetriaokokból tehát, ha az összes ilyen térerősség- vektorpárost összegezzük, azt találjuk, hogy a középpontban $E = 0$. A másik határeset az, ha $x >> a$. A tengelyen lévő, a gyűrűtől nagyon nagy



a) Egyenletes töltéseloszlású gyűrű. A dq elemi töltés a P pontban $d\mathbf{E}$ térerősséget hoz létre.



b) Az elektromos erőtér közelítő szerkezete az xy síkban.

24-24 ábra
A 24-10 példához.

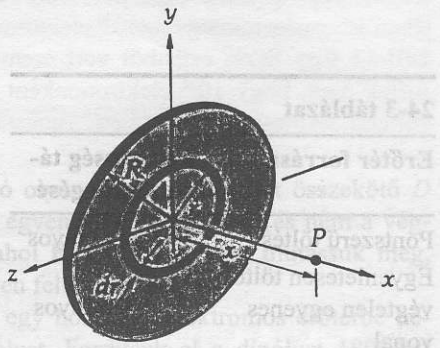
távolságban lévő pontból a gyűrű töltése pontszerű töltésnek látszik. A 24-13 egyenlet ezzel összhangban az alábbi alakúra egyszerűsödik, ha $x >> a$:

$$E \Rightarrow \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{x^2}$$

Az elektromos erőtér szerkezetét a 24-24b ábra illusztrálja.

24-11 PÉLDA

Sima, nem vezető, R sugarú korong egyik körlapján σ homogén felületmenti töltéssűrűség van. Számítsuk ki az **E** elektromos térerősséget a korong tengelye mentén, attól x távolságban lévő P pontban.(24-25 ábra).



24-25 ábra
A 24-11 példához.

MEGOLDÁS

Felhasználva az előző példa megoldásának módszerét és eredményét, a korongot tekintsük r sugarú és dr szélességű gyűrűkből összeállítottnak. Szimmetriaokok miatt, az x pontban minden egyes gyűrű $d\mathbf{E}$ térerőssége az x tengely pozitív irányába mutat, így az egyes gyűrűk által létrehozott $d\mathbf{E}$ térerősségek összegezése egyszerű skalár integrálás, melynek eredményeként kapjuk meg az eredő E_x térerősséget.

Írjuk fel az r sugarú és dr szélességű gyűrűk töltésétől eredő $d\mathbf{E}$ térerősséget. A gyűrűk dA területe $dA = 2\pi r dr$, és az egyes gyűrűk dq töltése $dq = \sigma dA = 2\sigma\pi r dr$. A (24-23) egyenlet szerint a dq töltésű gyűrű által létrehozott dE_x térerősséget az alábbi egyenlet adja meg (a helyett r-et, Q helyett dq-t írva):

$$dE_x = \frac{kx\,dq}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{kx2\pi\sigma\, r dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

A teljes E_x térerősséget az összes gyűrűtől származó térerősség-tagok összegzésével kaphatjuk meg (vegyük észre, hogy x konstans):

$$E_x = kx2\pi\sigma\int_0^R \frac{r dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

A II–G Függelékben leírtak szerint az integrál értéke

$$E_x = kx2\pi\sigma\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)\Bigg|_0^R$$

A határok konkrét értékét behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) \qquad \textbf{(24-24)}$$

Tekintsünk két határesetet. Elsőként vizsgáljuk meg, hogy milyen a térerősség a korongtól nagy távolságban (azaz ha $x >> R$), annak tengelye mentén. Evégett a (24-24) utolsó tagjának számlálóját is, nevezőjét is osszuk el x-szel:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{x}\right)^2 + 1}}\right)$$

Az $(1 + b^2)^{-1/2} \cong 1 - b^2/2$ (ha $b^2 << 1$) közelítést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$E_x \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2x^2}\right) = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{x^2}$$

(Nagyon messze a korongtól)

ami a $Q = \sigma \pi R^2$ pontszerű töltésre vonatkozó Coulomb törvény. (Tulajdonképpen éppen ezt vártuk.)

A másik határesetben legyen $x \to 0$, (vagy analóg módon, $R \to \infty$); vagyis, a térerősség legyen olyan, mint egy végtelen nagy töltött sík közelében. Az $x \to 0$ határesetben a (24-24) az alábbi alakúra egyszerűsíthető:

$$E_x \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

[Nagyon közel a tárcsához]

Az eredmény érdekes, ugyanis azt mutatja, hogy az elektromos erőtér homogén, és nem függ a töltött síktól való távolságtól. A következő fejezetben Gauss törvényének alkalmazásával ezt az eredményt egyszerűbben is levezetjük.

24-3 táblázat

Erőtér forrása	Térerősség távolságfüggése
Pontszerű töltés	$1/r^2$-tel arányos
Egyenletesen töltött végtelen egyenes vonal	$1/r$-rel arányos
Egyenletesen töltött végtelen sík	konstans

A 24-3 táblázatban néhány egyszerű geometriájú töltéseloszlás által létrehozott elektromos térerősség távolságfüggését foglaltuk össze.

Összefoglalás

A q **elektromos töltés,** (melynek nagyságát *coulomb* (C) egységben adjuk meg) pozitív és negatív lehet. A természetben előforduló töltések nagysága mindig az elektron töltésének, az $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C elemi töltésnek, egész számú többszöröse. Mivel töltés nem vész el, ezért zárt rendszer töltése mindig állandó.

A Coulomb törvény két pontszerű töltés közötti erő-hatás nagyságát fogalmazza meg:

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \text{ahol} \quad k = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right) \cong 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}.$$

$\mathbf{F}_{12}$ az az erő, amelyet az 1. töltés gyakorol a 2. töltésre; $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ az 1. töltésből a 2. irányába mutató egységvektor. Azonos előjelű töltések taszítják, ellentétes előjelűek vonzzák egymást.

Az **E eletromos térerősséget** az

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad \left[\text{vagy, még pontosabban: } \mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0}\frac{\mathbf{F}}{q_0}\right]$$

képlet definiálja, ahol q_0 tetszőleges kicsiny pozitív töltés. Az **E** térerősségű helyen a q pontszerű töltésre $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ erő hat. Különböző töltésektől eredő elektromos erők és térerősségek vektorként adódnak össze – ezt nevezzük a **szuperpozíció elvének.** Az üres téren át távolba ható elektromos erők értelmezésére bevezetett **E** elektromos térerősség a fizika egyik legfontosabb fogalmává vált.

Az elektromos térerősségvonalak (vagy erővonalak) olyan képzeletbeli vonalak, amelyeket az elektromos erőtér szerkezetének és tulajdonságainak szemléltetésére szerkesztünk meg. A térerősség vonalak mindig a pozitív töltésen kezdődnek és a negatív töltésen végződnek. Az elektromos térerősség az erőtér bármely tartományában arányos az erővonalakra merőlegesen elhelyezkedő egységnyi nagyságú felületen áthaladó erővonalak számával.

Az **elektromos dipólus**: Két azonos nagyságú, ellentétes előjelű, egymástól ℓ távolságra lévő pontszerű töltés.

Az elektromos dipólusmomentum $\mathbf{p} = q\ell$ (ahol ℓ a $-q$-ból $+q$-ba mutató vektor)

Az **E** térerősségű elektromos erőtérbe helyezett dipólusra ható *forgatónyomaték*: $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$

Az **E** térerősségű elektromos erőtérbe helyezett dipólus *potenciális energiája*: $U = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ (ahol $U \equiv 0$, ha **p** és **E** merőlegesek egymásra)

A folytonos töltéseloszlásokat a λ, σ, ill. ρ görög betűkkel jelöljük.

Töltéseloszlás	Jellemző paraméter	SI egység	Töltéselem
Vonal mentén	λ, egységnyi hosszra jutó töltés	C/m	$dq = \lambda dx$
Felület mentén	σ, egységnyi felületre jutó töltés	C/m^2	$dq = \sigma dA$
Térfogatban	ρ, egységnyi térfogatra jutó töltés	C/m^3	$dq = \rho dV$

Kérdések

1. Ha felfújt léggömbre töltéseket juttatunk, a gömb mérete kissé megnő. Miért?
2. Az elektromos erővonalak miért nem keresztezhetik egymást? Miért nem alkothatnak zárt hurkokat?
3. Tekintsünk egy inhomogén elektromos erőteret (melyben az erővonalak görbültek). Engedjünk el egy eredetileg nyugalomban lévő elektront valahol ebben a térben. Magyarázzuk meg, hogy az elektron miért nem az erővonalak irányában fog mozogni.
4. Egy elektron az elektromos térerősségvonalakra merőlegesen mozog. Hat-e erő az elektronra? Milyen az erővonalakkal párhuzamosan mozgó elektronok mozgása?
5. Két, tetszőleges előjelű és (nem zérus) nagyságú töltés egymástól D távolságra helyezkedik el. Van-e olyan pont a töltéseket összekötő D hosszúságú egyenes vonalon kívül (és nem a végtelenben), ahol $\mathbf{E} = 0$? Ha igen, mutassuk meg, hol, és milyen feltételek esetén?
6. Tekintsünk egy homogén elektromos erőtérbe helyezett dipólust. Fordítsuk el a dipólust 180°-kal (azaz a dipólusmomentumvektor az eredetihez képest legyen ellentétes irányú). Függ-e az elfordításhoz szükséges munkavégzés nagysága a dipólusvektornak a térerősséghez viszonyított eredeti orientációjától és az elfordítás síkjától?
7. A 24A-1 feladatban vajon számít-e az, ha az elektronokat a Föld és a Hold között egyenlően vagy egyenlőtlenül osztjuk el? Mi a helyzet akkor, ha csak egy elektront juttatunk a Holdra, a többit pedig a Földre? És ha az összes elektront a Földre juttatjuk?

Ha töltéseloszlásoktól származó térerősséget számítunk, kiválasztjuk a *dq elemi töltést*, majd kiszámítjuk az attól származó $d\mathbf{E}$ elemi térerősséget a vizsgált pontban. A teljes térerősség kiszámítására az összes elemi vektort összegezzük:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Szimmetriamegfontolásokkal gyakran nagymértékben leegyszerűsíthetjük a számításokat.

Feladatok

24.4 A Coulomb törvény

24A-1 Számítsuk ki, mennyi elektront kellene a Földre és a Holdra juttatni, hogy az ezek által létrehozott taszítóerő éppen egyenlő legyen a Föld és a Hold közötti vonzóerővel?

24A-2 Képzeljünk el két tárgyat; legyen mindkettőn 1 C pozitív töltés; távolságuk legyen egyenlő New York és San Francisco közötti távolsággal (kb. 4140 km). Mekkora a két tárgy közötti taszítóerő?

24A-3 Számítsuk ki a hidrogénatomban lévő proton és elektron között ható elektrosztatikus és gravitációs erők arányát.

24A-4 Két hélium atommag (melyek két protonból és két neutronból épülnek fel) egymástól 5×10^{-14} m távolságra helyezkednek el. a) Számítsuk ki a Coulomb-taszítóerőt közöttük. b) Számítsuk ki a közöttük ható gravitációs vonzóerőt. c) Ha az atommagok szabadon mozoghatnak, mekkora mindegyiknek a kezdeti gyorsulása?

24A-5 Tekintsünk egy +3 μC töltést, amely az $x = 4$ cm, $y = 0$ pontban valamint egy -2 μC töltést, amely az $x = 0$, $y = 5$ cm koordinátájú pontban helyezkedik el. Számítsuk ki, mekkora erő hat az origóban lévő +6 μC nagyságú töltésre.

24A-6 Számítsuk ki, hogy az előző feladatban leírtak esetében mekkora az origóban a térerősség, ha a +6 μC töltés nincs ott. Ellenőrizzük a választ a 24A-5 feladatra adott válasz felhasználásával.

24B-7 Két kicsiny, 100 g-os ezüst gömb egymástól 1 m-es távolságra helyezkedik el. Az ezüstgömb elektronjainak hanyadrészét kell az egyik gömbről a másikra átvinni, hogy közöttük 10^4 N vonzóerő hasson? (Az ezüstben atomonként 47 elektron van, és az egy gramm ezüstben lévő atomok száma az Avogadro szám és az ezüst atomsúlyának (107,9) hányadosa.)

24B-8 Richard Feynman egyszer azt a kijelentést tette, ha két ember karnyújtásnyira állna egymástól és mindkettőnek 1%-kal több elektronja lenne, mint protonja, a köztük ható taszítóerő akkora lenne, amivel egy Földnyi súlyt fel lehetne emelni. Igazolandó ezt az állítást, végezzünk el nagyságrendi becslést.

24B-9 Két pontszerű töltés a következőképpen helyezkedik el: egy $-3\ \mu C$ töltés az origóban, és egy $+2\ \mu C$ töltés attól $x = 0{,}15$ m távolságban. Keressük meg azt a helyet, ahol egy pozitív q' ponttöltésre ható erő zérus.

24B-10 Ha az anyag protonjainak és elektronjainak száma nem lenne pontosan azonos, akkor a csillagászati objektumok között elektrosztatikus taszítóerő lépne fel, amely esetleg nagyobb is lehetne, mint a közöttük ható gravitációs vonzóerő. Számítsuk ki, hogy kb. mennyivel kellene az egyik töltésfajtából többnek lennie mint a másiknak, hogy ez bekövetkezzen. Az anyag 1 kilogrammjában átlagosan mintegy 3×10^{26} elektron-proton pár van.

24B-11 Egy tiszta ezüstből vert érem tömege 2,49 g. Adjuk meg, hogy 10^{12} elektrononként hányat kell eltávolítani, hogy az éremnek 1 μC töltése legyen? Az ezüst atomsúlya 107,870, rendszáma 47.

24.5 Az elektromos tér

24A-12 Fejezzük ki az elektromos térerősség egységét az SI mértékrendszer alapegységeivel (tömeg: kg; hosszúság: m; idő: s; elektromos áramerősség: A).

24A-13 Normális légköri viszonyok között, tiszta időben a föld felszíne felett az elektromos térerősség kb. 100 N/C, és a felszín felé irányul. Ha egy héliummal töltött játéklégömb éppen 50 g terhet képes felemelni, vajon mekkora töltést kell a léggömbre juttatni, hogy az még teher nélkül se tudjon felemelkedni? (Az ehhez szükséges töltés egyébként akkora, hogy a léggömbben ébredő taszítóerők elégségesek a léggömb szétrepesztéséhez).

24B-14 Két, $+q$ és $-2q$ nagyságú pontszerű töltés helyezkedik el egymás közelében. Vázoljuk fel a két töltés környezetében az erővonalstruktúrát, figyelembe véve, hogy az egyik töltéshez kétszer annyi erővonal tartozik, mint a másikhoz.

24B-15 Egy homogén elektromos erőtér térerőssége (derékszögű koordinátarendszerben) $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}}$, ahol E_0 konstans. Egy m tömegű és $+q$ töltésű részecskét juttatunk a koordinátarendszer origójába, $\mathbf{v} = v_0\,\hat{\mathbf{x}}$ sebességgel. Számítsuk ki a részecske pályájának az egyenletét.

24.6 Az elektromos dipólus

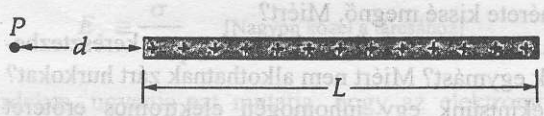
24A-16 Számos molekulának van elektromos dipólusmomentuma, mert a pozitív töltések (protonok) tömegközéppontja nem esik egybe a negatív töltésekével (elektronokéval). A vízmolekula dipólusmomentuma gázfázisban $6{,}24\ 10^{-30}$ Cm. a) Számítsuk ki a vízmolekulára ható maximális forgatónyomatékot 10 N/C térerősségű elektromos erőtérben. b) Számítsuk ki, hogy milyen nagyságrendű a vízmolekula dipólusának potenciális energiája ebben az erőtérben.

24A-17 A nátrium-fluorid molekula elektromos dipólusmomentuma $2{,}72\times10^{-29}$ Cm. Feltételezve egy túlegyszerűsített modellt, hogy ebben a molekulában az atomok mint egymástól független Na^+ és F^- ionok vannak jelen, mekkora a két ion középpontjának a távolsága? (A pontos érték $1{,}93\times10^{-10}$ m.)

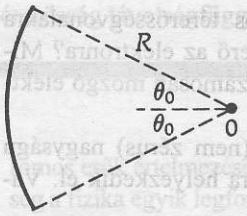
24B-18 A 24-11 ábra azt illusztrálja, hogyan lehet fűmagok segítségével az elektromos erőteret láthatóvá tenni, szemléltetni. Magyarázzuk meg, miért és hogyan állnak be a kicsiny, hosszúkás, szigetelő részecskék az elektromos erőtér irányába.

24.7 Töltéseloszlások elektromos erőtere

24B-19 A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen. Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal irányában lévő, annak végpontjától d távolságra lévő P pontban (24-26 ábra).



24-26 ábra
A 24B-19 feladathoz



24-27 ábra
A 24B-20 feladathoz

24B-20 Egy vékony, nem vezető rudat a 24-27 ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából 2θ szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az $\mathbf{E}$ elektromos térerősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $d\ell = Rd\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó $d\mathbf{E}$ térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)

24B-21 Tekintsünk egy vékony, nem vezető, R sugarú korongot, amelynek egyik oldalán a felületi töltéssűrűség egyenletes eloszlásban σ. A 24-11 példában kiszámítottuk, hogy mekkora a térerősség a korong tengelye mentén, attól x távolságban. Mutassuk meg, hogy ha R végtelenhez tart (vagyis egyenletesen feltöltött végtelen lemezhez közelít), akkor a térerősséget az $E = \sigma/2\varepsilon_0$ egyenlet írja le. (Vegyük észre, hogy az egyenletesen feltöltött végtelen lemez térerőssége ugyanekkora, függetlenül a síktól vett x távolságtól.)

További feladatok

24C-22 Két protont egymástól 2×10^{-13} m távolságra helyezünk el, majd elengedjük őket. a) Számítsuk ki a két proton végsebességét. b) Ha az egyik protont rögzítve tartanánk, akkor mekkora lenne a másik proton sebessége?

24C-23 Mutassuk meg, hogy két egymástól meghatározott távolságban lévő kis tárgy, amelyek között adott töltésmennyiség oszlik meg, akkor taszítja egymást a legnagyobb erővel, ha a töltés egyenlően oszlik meg közöttük.

24C-24 A –e elektrontöltés első pontos meghatározását 1909 és 1917 között R. A. Millikan végezte el olymódon, hogy kicsiny feltöltött olajcseppecskék levegőben való mozgását vizsgálta. Vízszintes fémlemezek között függőleges elektromos erőteret létesített, akkorát, hogy a töltött cseppre ható elektromos erőtér éppen kiegyenlítse a gravitációs erőt. Ebből (és más mérésekből) Millikan meg tudta határozni a különböző cseppek (–e, –2e, –3e...) töltésének legnagyobb közös osztóját, azaz azt a legkisebb töltésmennyiséget (az elektron töltését), amellyel a cseppek töltése növekedhetett vagy csökkenhetett. Egy tipikus kísérletben, az $1{,}9\times10^{-13}$ N súlyú csepp akkor lebegett éppen, ha az egymástól 3 mm-re lévő fémlemezek közé 1200 V feszültségkülönbséget kapcsolt. a) Hány többlet-elektron van ilyenkor a cseppen? b) Ha az olaj sűrűsége 920 kg/m^3, mekkora a csepp sugara?

24C-25 Millikan előző feladatban leírt olajcseppes kísérletében az olajcseppek olyan kicsinyek, hogy a megfigyelésre használt mikroszkóp látóterében csak mint fénylő pontok jelennek meg. Azért, hogy a cseppek sugarát (és innen a tömegüket) meghatározhassuk, a cseppek szabadesését vizsgáljuk. A (viszkózus) levegő az r sugarú, egyenletes v sebességgel eső olajcseppekre F fékezőerőt gyakorol, melynek nagyságát Stokes törvényével határozhatjuk meg: $F = 6\pi\eta rv$, ahol η a viszkozitási együttható. a) Mi η SI mértékrendszerbeli egysége? b) Mutassuk meg, hogy amikor a beeső csepp eléri konstans végsebességét (amikor a viszkozitásból eredő fékezőerő éppen ellentétesen egyenlő a gravitációs erővel), akkor érvényes az alábbi egyenlet, amiből a szabadon eső csepp sugara meghatározható.

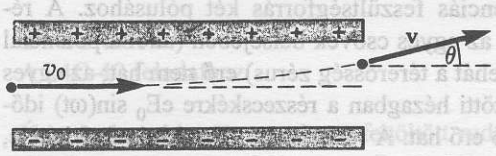
$$v = \frac{2gr^2}{9\eta}(\rho_o - \rho_l)$$

Itt ρ_o és ρ_l az olaj, illetve a levegő sűrűsége.

24C-26 Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk. a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyira, $x << d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót".

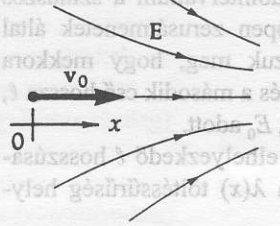
24C-27 Számítsuk ki azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy R sugarú gömb felszínére Q töltést juttassunk. A feltöltést végezzük úgy, hogy infinitezimális dq elemi töltést viszünk a végtelenből a gömb felszínére mindaddig, amíg a gömb töltése a Q-t el nem éri.

24C-28 Vízszintes irányban mozgó és $v = 8\times10^6$ m/s sebességű elektron a 24-28 ábrán vázolt két vízszintes eltérítő lemez közé repül. A lemezek 3 cm hosszúak, és a közöttük lévő távolság 1,5 cm; közöttük 40 V potenciálkülönbség van. Számítsuk ki azt a θ szöget, amelyet a lemezek közül éppen kilépő elektron sebességvektorának iránya a vízszintessel bezár. Hanyagoljuk el azt, hogy a lemezek szélénél az erőtér inhomogén.



24-28 ábra
A 24C-28 feladathoz

24C-29 Miként az a 24-29 ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_0 = 0$ helyen $v_0 = 10^6$ m/s a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4\text{ V/m})\times(1 + 10^3 x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



24-29 ábra
A 24C-29 feladathoz

24C-30 Az $x = +\ell/2$ pontban és az $x = -\ell/2$ pontban elhelyezkedő $+q$ és $-q$ töltés dipólust alkot. a) Vezessük le a térerősség $E(x)$ kifejezését x pozitív értékeire. b) Mutassuk meg, hogy ha $x >> \ell$, akkor az elektromos térerősség $1/x^3$ -nal arányos.

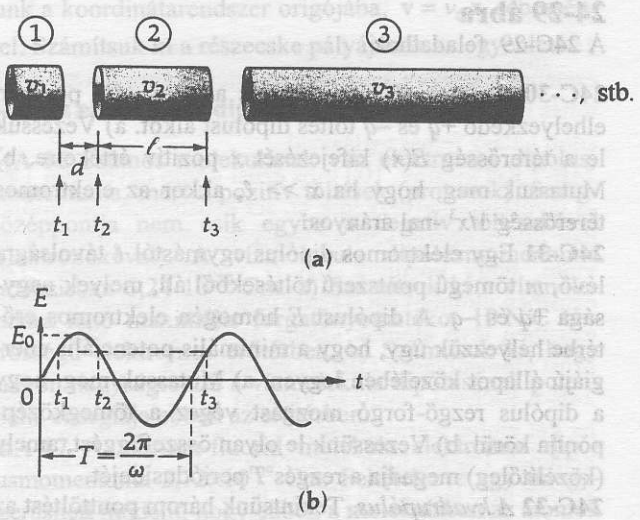
24C-31 Egy elektromos dipólus egymástól ℓ távolságra lévő, m tömegű pontszerű töltésekből áll, melyek nagysága $+q$ és $-q$. A dipólust E homogén elektromos erőtérbe helyezzük úgy, hogy a minimális potenciális energiájú állapot közelében legyen. a) Mutassuk meg, hogy a dipólus rezgő-forgó mozgást végez a tömegközéppontja körül. b) Vezessünk le olyan összefüggést, amely (közelítőleg) megadja a rezgés T periódusidejét.

24C-32 *A kvadrupólus.* Tekintsünk három ponttöltést az xy síkban: legyen egy $-2q$ töltés az origóban, egy $+q$

töltés az $y = +\ell/2$ pontban és egy másik $+q$ töltés az $y = -\ell/2$ pontban. Az ilyen töltésrendszer neve *elektromos kvadrupól*. Vezessünk le olyan összefüggéseket, amelyek megadják, hogy az elektromos térerősség hogyan függ a) x-től az x tengely mentén; b) y-tól, az y tengely mentén. c) Határozzuk meg **E** irányát mindkét esetben. d) Mutassuk meg, hogy a fenti két esetben, ha x vagy y sokkal nagyobb ℓ-nél, $E \sim 1/r^4$.

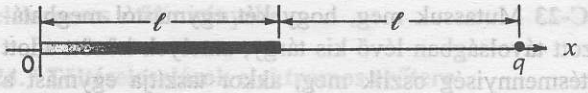
24C-33 Az e töltésű, m tömegű pozitív töltésű részecskék felgyorsíthatók a 24-30 ábrán illusztrált lineáris gyorsítóban, amely vákuumrendszerben lévő, egyre növekvő hosszúságú koaxiális hengeres fémcsövek sorozatából áll. A hengerek felváltva csatlakoznak egy nagyfrekvenciás feszültségforrás két pólusához. A részecskékre az egyes csövek belsejében (ahol a potenciál konstans, tehát a térerősség zérus) erő nem hat; az egyes csövek közötti hézagban a részecskékre $eE_0 \sin(\omega t)$ időben változó erő hat. A részecskék gyorsításának feltétele, hogy a 24-30 ábrán t_1-gyel jelölt időpontban érjenek a csövek közötti hézagba, amikor (t_1 és t_2 időpontok között) a gyorsító tér maximális. A részecske t_1 időpontban v_1 sebességgel kilép az 1. csőből, a hengerek közötti térrészben felgyorsul, majd a t_2 időpontban belép a következő csőbe, ahol egy újabb állandó sebességgel halad, mialatt a cső (szinuszos) potenciálja előjelet vált. A részecske t_3 időpontban érkezik a második cső végéhez, ahol is megint maximális gyorsítótér hat rá. A csövek és a közöttük lévő hézagok úgy vannak méretezve, hogy a részecskék az egymásutáni hézagokhoz mindig a (szinuszos) gyorsítófeszültséggel azonos fázisban érkezzenek. Tételezzük fel, hogy a $t_2 - t_1$ időintervallum a szinuszos feszültség periódusidejének éppen zérusátmenetek által határolt egynegyede. Határozzuk meg, hogy mekkora legyen d, az első hézag hossza, és a második cső hossza ℓ, ha a többi paraméter v_1, e, m, ω, E_0 adott.

24C-34 Az x tengely mentén elhelyezkedő ℓ hosszúságú, vékony, szigetelő rúdon a $\lambda(x)$ töltéssűrűség hely-



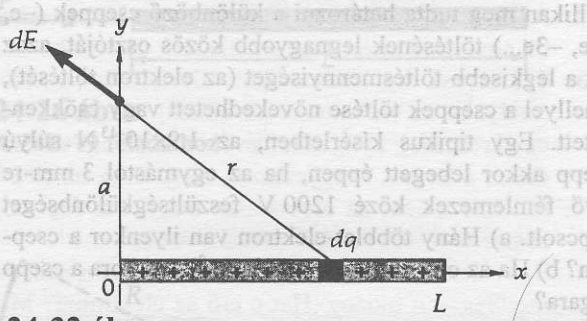
24-30 ábra
A 24C-33 feladathoz

függését a $\lambda(x) = Ax$ összefüggés írja le. A rúd végétől ℓ távolságra egy q pontszerű töltés helyezkedik el az x tengelyen (24-31 ábra). a) Mi az A állandó SI mértékrendszerbeli egysége? b) Mekkora a töltés helyén az elektromos térerősség x komponense?



24-31 ábra
A 24C-34 feladathoz

24C-35 Tekintsünk az $x = 0$ és $x = L$ pontok között, az x tengely mentén egy λ pozitív lineáris töltéssűrűséget (24-32 ábra). a) Számítsuk ki az E elektromos térerősség y komponensét az $x = 0$, $y = a$ pontban; b) Számítsuk ki az elektromos térerősség x komponensének értékét ugyanebben a pontban.



24-32 ábra
A 24C-35 feladathoz

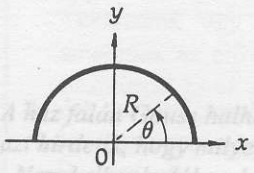
24C-36 Egy R sugarú körgyűrűn $+Q$ teljes töltés, a gyűrű középpontjában pontszerű $-q$ negatív töltés van. Ha a $-q$ töltést a gyűrű tengelye mentén kissé kimozdítjuk, majd elengedjük, akkor a gyűrű tengelye mentén rezgőmozgást végez (feltéve, hogy a tengelyvonalból való kimozdulást valamilyen módon megakadályozzuk). Adjuk meg a rezgés f (közelítő) frekvenciáját. (Felhasználhatjuk a 24-10 feladat eredményét is.)

24C-37 Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: azaz $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$, ahol a θ szög a 24-33 ábra szerint értelmezendő. a) Vázoljuk a gyűrű töltéseloszlását. b) Milyen az **E** elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában? c) Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\lambda_0 / (4\varepsilon_0 R)$.



24-33 ábra
A 24C-37 feladathoz

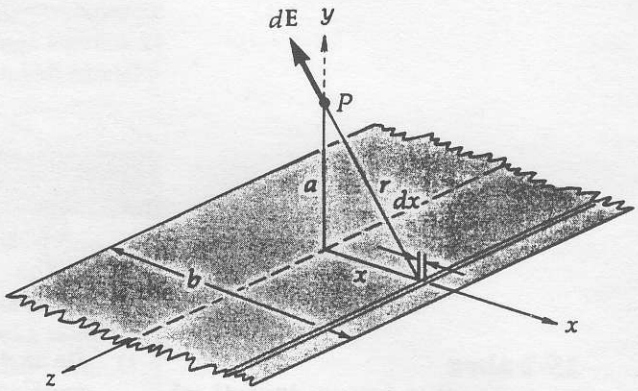
24C-38 Tekintsünk egy vékony, nem vezető, R sugarú félkör alakúra hajlított rudat, melyen a λ lineáris töltéssűrűség nem egyenletes: $\lambda = \lambda_0 \sin 2\theta$, ahol a θ szög a 24-34 ábra szerint értelmezendő. a) Vázoljuk a meghajlított rúdon a töltéseloszlást. b) Milyen az **E** elektromos térerősség iránya az O pontban, a félkör középpontjában? c) Számítsuk ki az elektromos térerősség nagyságát az O pontban.



24-34 ábra
A 24C-38 feladathoz

24C-39 Tekintsünk egy egyenletesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $(E_x)_{max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = R/\sqrt{2}$ távolságban van. Vázoljuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre).(Felhasználhatjuk a 24-10 feladat eredményét is.)

24C-40 Egy b szélességű, hosszú, vékony, nem vezető feltöltött szalag mindkét oldalán a felületmenti töltéssűrűség σ. Számítsuk ki az **E** elektromos térerősséget a szalag középvonala feletti a távolságban (24-35 ábra).



24-35 ábra
A 24C-40 feladathoz

Útmutatás: tekintsük a szalagot feltöltött rudak együttesének. Mutassuk meg, hogy egy dx vastag rúd mentén a lineáris töltéssűrűség $2\sigma dx$. Minden egyes rúd a P pontban d**E** térerősséget hoz létre (vö. a 24-8 példában leírtakkal).

24C-41 Egy nemvezető anyagból készült, homogén töltéseloszlású karika középpontjában a térerősség zérus. Miért? Tekintsünk egy R sugarú karikát, amelynek teljes töltése $+Q$. A karikából egy ℓ hosszúságú darabot kivágunk. Határozzuk meg, hogy mekkora a térerősség a megmaradt körív középpontjában.

AZ 24–45 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

XXIV. Fejezet

24A-1 649 kg

24A-3 $2{,}27 \times 10^{39}$

24A-5 110 N 157°-ra a +x tengelytől

24B-7 $2{,}51 \times 10^{-10}$

24B-9 $x = 0{,}817$ m

24B-11 9,55 elektront

24A-13 $4{,}90 \times 10^{-3}$ C

24B-15 $y = (qE_o/2mv_o^2)x^2$

24A-17 $1{,}70 \times 10^{-10}$ m

24B-19 $Q/4\pi\varepsilon_o d(d + L)$

24B-21 A válasz adott.

24C-23 A válasz adott.

24C-25 A válasz adott.

24C-27 $W = Q2/8\pi\varepsilon_o R$

24C-29 3,67 cm

24C-31 $2\pi\sqrt{ml/2qE}$

24C-33 $d = \dfrac{\pi}{2\omega}\left[v_1 + \dfrac{eE_o}{m\omega\sqrt{2}}\right] l = \dfrac{3\pi}{2\omega}\left[v_1 + \dfrac{eE_o\sqrt{2}}{m\omega}\right]$

24C-35 a) $E_y = \lambda L / 4\pi\varepsilon_o a\sqrt{L^2 + a^2}$

b) $E_x = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o)\left[(1/a) - (1/\sqrt{L^2 + a^2})\right]$

24C-37 A válasz adott.

24C-39 A válasz adott.

24C-41 $E = (Q/4\pi^2\varepsilon_o R_2)\sin(l/2R)$, a megmaradó körívtől kifelé irányítva

XXV. Fejezet

25A-1 a) zérus b) $3q/\varepsilon_o$ c) $-2q/\varepsilon_o$

25A-3 $7{,}50 \times 10^{-2}$ N·m²/C

25A-5 a) zérus b) σ/ε_o

25B-7 a) px/ε_o b) $pd/2\varepsilon_o$

25A-9 a) σ/ε_o b) $\sigma/2\varepsilon_o$

25A-11 $-1{,}15 \times 10^{-9}$ C/m²

25B-13 b) $1{,}38 \times 10^7$ elektron/m³ hiány

25C-15 a) C/m² b) $Q = k2\pi L(b - a)$
c) $E = (k/\varepsilon_o)(1 - a/r)$

25C-17 A válasz adott.

25C-19 $E(\pi R^2)$

XXVI. Fejezet

26A-1 a) $2{,}05 \times 10^6$ m/s
b) 12 eV, $1{,}92 \times 10^{-18}$ J c) 3,89 ns

26A-3 a) $2{,}19 \times 10^6$ m/s c) –13,6 eV

26B-5 0,0415 kq/a; a középpontban

26B-7 A válasz adott.

26B-9 1,01 × 10-19 N, 18,4° az x tengelyhez képest

26B-11 $Q_o/2$, $3Q_o/2$

26B-13 A gömb belsejében $E = 0$, $V = -(140/3\pi\varepsilon_o)$ μV
a gömbök közt
$E = (80/4\pi\varepsilon_o r^2)$ $\mu N/C$ befelé,
$V = -(1/4\pi\varepsilon_o)(80/r - 40/0{,}5)$ μV
a gömbökön kívül $E = (40/4\pi\varepsilon_o r^2)$ $\mu N/C$,
befelé,
$V = -(40/4\pi\varepsilon_o r)$ μV

26C-15 $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o l}\ln\dfrac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}$

26C-17 a) C/m⁴ b) $Q = A\pi R^4$
c) $E = Ar^2/4\varepsilon_o$ d) r ≥ R esetén $V = AR^4/4\varepsilon_o r$
r ≤ R esetén $V = (A/12\varepsilon_o)(4R^3 - r^3)$

26C-19 2000 V

26C-21 A válasz adott.

26C-23 a) $2{,}72 \times 10^{-5}$ m
b) $2{,}65 \times 10^7$ m/s és $6{,}19 \times 10^5$ m/s
c) 2000 eV, $3{,}20 \times 10^{-16}$ J

26C-25 a) $(q / 2\pi\varepsilon_o)\left\{\left[x^2 + (l/2)^2\right]^{-1/2} - 1/x\right\}$

b) $(q / 4\pi\varepsilon_o)\left[(y + l/2)^{-1} + (y - l/2)^{-1} - 2/y\right]$

GAUSS TÖRVÉNYE

A ház falán Gauss halhatatlan szavai
azt hirdetik, hogy milyenek a lakói:
„Nem kell számlálnunk bévül a töltéseket,
ha ismerjük a teret."

ISMERETLEN BÖLCS

25.1 Bevezetés

Az előző fejezetben az elektromos erőteret úgy szemléltettük, mint a térerősségvonalak által alkotott térbeli struktúrát, amely a tér minden egyes pontjában érzékelteti az **E** térerősség nagyságát és irányát. Ahol a vonalak egymáshoz közelebb helyezkednek el, ott a térerősség erősebb; ahol távolabb, ott pedig gyengébb. Az erővonalakat úgy képzeljük el, hogy a pozitív töltésekből indulnak és a negatívokhoz tartanak, így tehát az erővonalak iránya megegyezik a térerősség irányával. A térerősségvonalak voltaképpen fiktívek; a valóságban nem léteznek, viszont kitűnő segédeszközök az elektromos erőtérrel kapcsolatos fogalmaink kialakításakor. Szemben a térerősség-vonalakkal, az elektromos térerősség létezik: a térerősség minden egyes pontjában a térerősségnek meghatározott nagysága és iránya van, amit (legalábbis elvileg) kísérleti úton megmérhetünk egy kis q_0 töltés odahelyezésével.

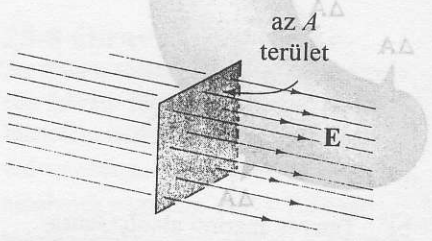
A következőkben az erővonalak értelmezését még kvantitatívabbá tesszük, és eljutunk egy nagyon hasznos törvényhez, a *Gauss törvényhez*, amely újabb módszert kínál az elektromos erőterek meghatározására. Ezt, elsősorban szimmetrikus töltéseloszlások esetében, sokkal könnyebb alkalmazni, mint a 24. fejezetben leírt Coulomb törvényt.

25.2 Az elektromos fluxus

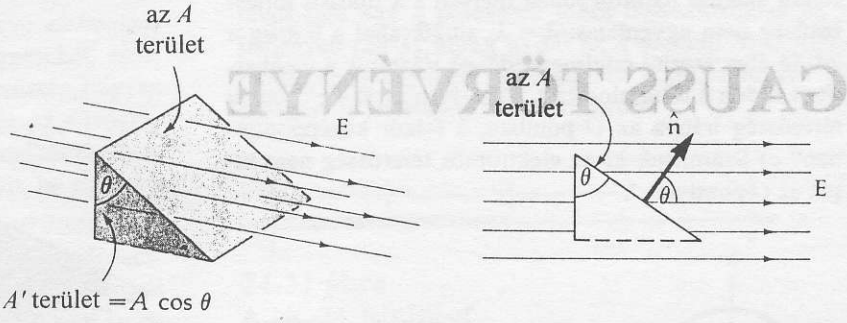
A továbbiakban az erővonalak értelmezését oly módon terjesztjük ki, hogy ne csak szemléletes, hanem kvantitatív is legyen. Definiáljuk az *elektromos fluxus* fogalmát, ami lényegében az *adott felületet metsző erővonalak száma*. Tekintsünk egy **E** térerősségű homogén erőteret, és egy képzeletbeli, a térre merőleges A felületet (25-1 ábra). Ezen felület Φ_E elektromos fluxusát az alábbi formulával definiáljuk:

$$\Phi_E = EA \qquad (25\text{-}1)$$

Alkalmanként olyan felületek is szerepelni fognak egyenleteinkben, amelyek nem merőlegesek az erővonalakra. Ha a sík felület nem merőleges az erővonalakra, mint az a 25-2 ábrán látható, viszonylag kevesebb erővonal metszi a



25-1 ábra
Az A területű síklap merőleges az **E** térerősségű homogén elektromos erőtérre. Ezen a felületen az elektromos fluxus $\Phi_E = EA$.



25-2 ábra
Olyan A területű felületen áthaladó erővonalak, amelyek $\hat{\mathbf{n}}$ normálvektora a térerősség $\mathbf{E}$ vektorával θ szöget zár be. a) Ha az A felületű síklap nem merőleges az $\mathbf{E}$ erővonalakra, akkor a vetülete $A' = A\cos\theta$. b) Vegyük észre, hogy az A és A' közötti szög éppen egyenlő a felület $\hat{\mathbf{n}}$ normálvektora és a térerősség $\mathbf{E}$ vektora által bezárt szöggel.

felületet. Legyen A' az A felületnek az erővonalakra merőleges síkon lévő vetülete. A két felület közötti viszonyt az $A' = A\cos q$ összefüggés írja le. Minthogy mindkét felületet azonos számú erővonal metszi, így a 25-1 egyenletből következően a Φ_E elektromos fluxus,:

$$\Phi_E = EA' = EA\cos\theta \qquad (25\text{-}2)$$

Látható, hogy a Φ_E elektromos fluxus akkor maximális, ha a felület éppen merőleges az erővonalakra.

Ebben a fejezetben görbült felületekkel is találkozunk, amelyek mentén a térerősségnek mind nagysága, mind pedig iránya változik. Ennélfogva általánosítsuk az elektromos fluxus definícióját oly módon, hogy vezessük be a felületre merőleges $\Delta\mathbf{A}$ felületelem-vektort. Továbbá, foglalkozzunk zárt felületekkel. Az egyértelműség kedvéért a $\Delta\mathbf{A}$ vektor irányát mindig úgy választjuk meg, hogy kifelé mutasson (25-3 ábra). Felhasználva két vektor skaláris szorzatának definícióját, ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos\theta$), $\Delta\Phi_E$ az alábbi módon írható:

$$\Delta\Phi_E = E\Delta A\cos\theta = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A} \qquad (25\text{-}3)$$

Végezetül, ha az egyes ΔA elemi felületek nagysága zérushoz tart (és az elemek száma a végtelenhez), akkor a felület dA differenciálja és az elektromos fluxus $d\Phi_E$ differenciálja között az alábbi összefüggéshez jutunk:

ELEKTROMOS FLUXUS DIFFERENCIÁLJA: $d\Phi_E$

$$d\Phi_E = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \qquad (25\text{-}4)$$

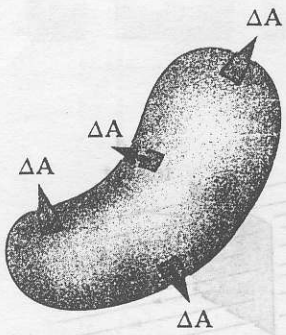
ahol $d\mathbf{A}$ a zárt felületből kifelé mutató normálvektorú felület differenciálja. Véges tartományban valamennyi elemi felületre elvégezve az összegzést azt kapjuk[1], hogy

AZ ELEKTROMOS FLUXUS Φ_E általános definíciója

$$\Phi_E = \int_{\text{Felületre}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \qquad (25\text{-}5)$$

Az elektromos fluxus egysége Nm^2/C.

Szerencsére az integrál értékét sohasem kell olyan bonyolult alakú felületre közvetlenül kiszámítanunk, mint amilyen a 25-3 ábrán látható. Mint



25-3 ábra
Zárt felület, néhány $\Delta\mathbf{A}$ felületvektorral, melyek merőlegesek a felszínre és kifelé mutatnak.

[1] Az integrálást tetszés szerinti felületre elvégezhetjük. Zárt felület esetében az $\oint$ jelölést használjuk. (Vegyük észre a jelölésbeli hasonlóságot azzal az esettel, amikor zárt görbe mentén integrálunk: $\oint dl$.)

azt a következő részben megmutatjuk, az elektromos töltés inverz négyzetes távolságfüggésű terének egy érdekes tulajdonsága miatt az ilyen bonyolult integrálás egyszerű meggondolásokkal helyettesíthető, s így nem veszünk el az integrálás részleteiben. Előbb azonban megmutatjuk, hogyan kell az elektromos fluxust egyszerű esetekben kiszámítani.

25-1 PÉLDA

Tekintsünk egy **E** térerősségű homogén elektromos erőteret, amelynek az erővonalai az x tengely pozitív irányában haladunk. Számítsuk ki az eredő fluxust olyan ℓ élhosszúságú kocka teljes felületére, amelynek élei párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel (25-4 ábra).

MEGOLDÁS

Mindegy **E** és d**A** vektorok merőlegesek egymásra a kocka négy lapján, a fluxus ezeken a lapokon zérus. Mindegyiken ugyanis

$$\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int \underbrace{E(\cos 90^0)}_{=0}\, dA = 0$$

A másik két lap esetében először vegyük tekintetbe, hogy az erővonalak a bal oldali lapon lépnek be a kockába, így az **E** és $d\mathbf{A}$ közötti θ szög azon a lapon 180°. Tehát

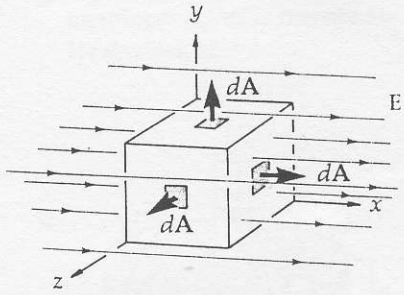
$$\Phi_E = \int_{\substack{\text{bal}\\ \text{oldallap}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\substack{\text{bal}\\ \text{oldallap}}} \underbrace{E(\cos 180^0)}_{=-1}\, dA = -E \int_{\substack{\text{bal}\\ \text{oldallap}}} dA = -E\ell^2$$

Az erővonalak a jobb oldali lapon lépnek ki a kockából, ahol $\theta = 0$:

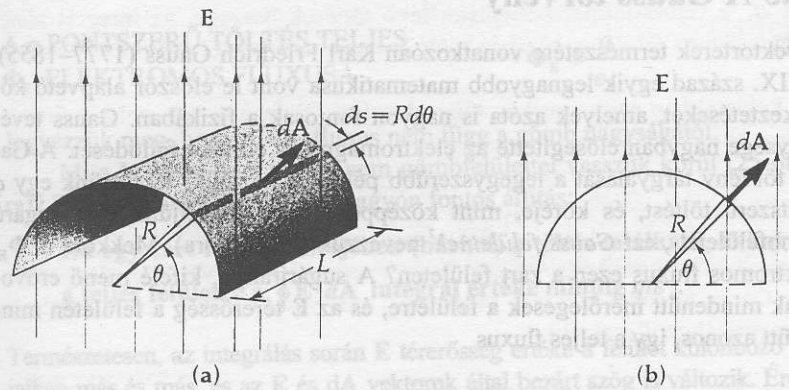
$$\Phi_E = \int_{\substack{\text{jobb}\\ \text{oldallap}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\substack{\text{jobb}\\ \text{oldallap}}} \underbrace{E(\cos 0^0)}_{=1}\, dA = E \int_{\substack{\text{jobb}\\ \text{oldallap}}} dA = E\ell^2$$

A teljes fluxus, a kocka összes lapját számítva így

$$\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 = 0$$



25-4 ábra
A 25-1 példához: Az ℓ élhosszúságú kockát egyik élével az **E** térerősségű homogén elektromos erőtérrel párhuzamosan helyeztük el.



25-5 ábra
A 25-2 példához.

25-2 PÉLDA

Miként az a 25-5 ábrán látható, egy félhenger alakú felületet **E** térerősségű homogén elektromos erőtérbe helyezünk. Az erővonalak merőlegesek a téglalapra, melynek hossza L, szélessége $2R$. A görbült felületre alkalmazott integrálással számítsuk ki ezen a felületen az elektromos fluxust.

MEGOLDÁS

Ki kell számítanunk az $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ integrált a hengeres felületre. Avégett, hogy egyszerűsítsük az integrálást, keressünk olyan $d\mathbf{A}$ elemi felületet, amelynek normálisa mindenütt azonos szöget zár be az **E** térerősséggel. A szimmetriából következően legyen $d\mathbf{A}$ egy L hosszúságú és $ds = Rd\theta$ szélességű vékony csík. Így $dA = LRd\theta$, és az összegzés során θ zérus és π között változik. Az **E** és $d\mathbf{A}$ közötti szög $[(\pi/2) - \theta]$. Így tehát:

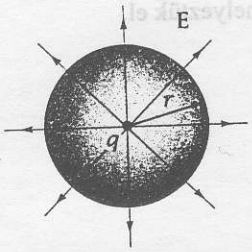
$$\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^{\pi} E\cos\left[(\pi/2)-\theta\right]LR\,d\theta = ELR\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$\Phi_E = ELR(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = ELR\left[-(-1-1)\right] = 2ELR$$

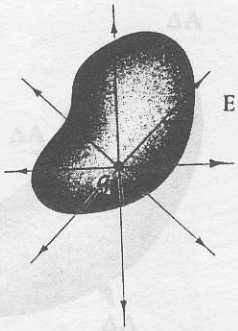
Képezzünk most egy zárt Gauss-felületet, úgy, hogy a hengerfelületet lezárjuk egy síklappal (amely a félhenger éleit összeköti), valamint két félkör alakú véglappal. Vegyük észre, hogy a fenti eredmény (ellentétes előjellel) azonos nagyságú, mint a síklapon számítható fluxus:

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E(\cos 180^\circ)(2RL) = -2ELR\,.$$

Így, a homogén **E** erőtérben zárt felületet képezve, a teljes felületre összegzett fluxus zérus.($\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$ a félhenger véglapjain, minthogy ezeken **E** és d**A** 90°-os szöget zárnak be egymással.) A következő részben ezt az eredményt általánosítjuk tetszés szerinti alakú zárt felületek és tetszőleges (akár inhomogén) terek esetére.



a) A Gauss-felület r sugarú gömb, melynek középpontjában helyezkedik el a q pontszerű töltés.



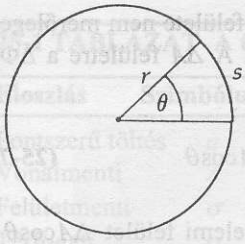
b) Tetszés szerinti alakú Gauss-felület belsejében a q pontszerű töltéssel.

25-6 ábra
A q töltést körülvevő Gauss-felület.

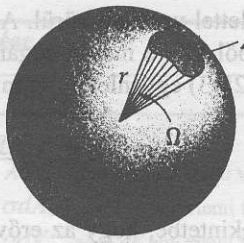
25.3 A Gauss törvény

A vektorterek természetére vonatkozóan Karl Friedrich Gauss (1777–1855), a XIX. század egyik legnagyobb matematikusa vont le először alapvető következtetéseket, amelyek azóta is nagyon fontosak a fizikában. Gauss tevékenysége nagyban elősegítette az elektromágneses elmélet fejlődését. A Gauss törvény tárgyalását a legegyszerűbb példával kezdjük: tekintsünk egy q pontszerű töltést, és köréje, mint középpont köré képzeljünk el r sugarú gömbfelületet , ezt *Gauss-felületnek*[2] nevezzük (25-6a ábra). Mekkora a Φ_E elektromos fluxus ezen a zárt felületen? A sugárirányú, kifelé menő erővonalak mindenütt merőlegesek a felületre, és az **E** térerősség a felületen mindenütt azonos, így a teljes fluxus

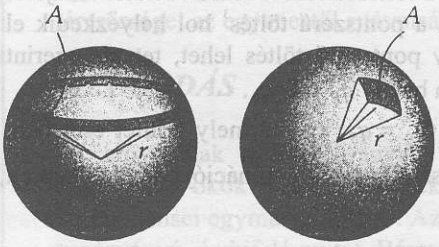
[2] A Gauss-felületek a számításokat segítő fizikai realitás nélküli, hipotetikus felületek, melyeknek tetszés szerinti alakjuk lehet.



a) A síkszög definíciója: $\theta \equiv s/r$ (radián egységekben), ahol s annak az ívnek a hossza, amelyet az r sugarú kör középpontjából θ szög alatt látunk. A teljes körív 2π síkszögnek felel meg.



b) A térszög definíciója: $\Omega \equiv A/r^2$ (szteradián egységekben), ahol A annak a felületnek a nagysága, amelyet az r sugarú gömb középpontjából Ω térszög alatt látunk. Egy térszögelemre: $\Delta\Omega \equiv \Delta A/r^2$ (szteradián egységekben). Az A felület bármilyen alakú lehet, de minden pontban merőleges kell hogy legyen a sugárra. Minthogy a gömb felülete $4r^2\pi$, a teljes gömbfelület $\Omega = 4r^2\pi / r^2 = 4\pi$ szteradián térszögnek felel meg. Az Ω térszög a középpontból kiinduló és a ΔA felülettel meghatározott kúp alakú tartománnyal szemléltethető.



c) Adott térszöget meghatározó felületnek sokféle alakja lehet (tetszőleges).

25-7 ábra
Az Ω térszög definíciója a síkszögével analóg. Éppúgy, mint ahogyan az s hosszúságú ív mindenütt merőleges a sugárra (r), az A felületnek mindenütt merőlegesnek kell lennie a sugárra. Minthogy Ω hosszúságok négyzetének a hányadosa, egysége, ezért a *szteradián* is, dimenziómentes szám.

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E(\cos 0^\circ)\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2)$$

A Coulomb törvény szerint a térerősség $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, így

$$\Phi_E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

A q PONTSZERŰ TÖLTÉS TELJES Φ_E ELEKTROMOS FLUXUSA

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(25-6)}$$

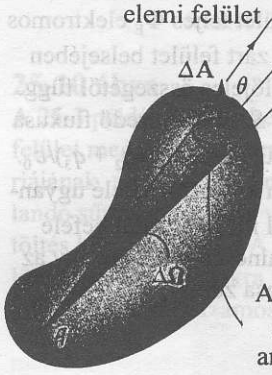
Jegyezzük meg, hogy a Φ_E fluxus nem függ a gömb nagyságától.

Mi a helyzet, ha a töltést nem gömbfelülettel vesszük körül (25-6b ábra)? Bizonyítható a következő, nagyon fontos állítás:

Ha egy zárt felület belsejében (bárhol) q töltés található, akkor a teljes felületre a $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ integrál értéke mindig q/ε_0.

Természetesen, az integrálás során **E** térerősség értéke a felület különböző pontjaiban más és más, és az **E** és d**A** vektorok által bezárt szög is változik. Érdekes módon mégis, függetlenül a felület alakjától, az integrál értéke mindig q/ε_0.

A bizonyítást a 25-7 ábrán definiált Ω térszög fogalmának felhasználásával kezdjük. Tekintsünk egy q pontszerű töltést, amelyet tetszés szerinti



A ΔA felületelem olyan vetülete, amely merőleges az erővonalakra

25-8 ábra
Az ábra q töltést körülvevő önkényesen felvett felületet mutat. A ΔA felületelem nem merőleges a q-ból induló erővonalakra. A $\Delta A'$-vel jelölt vetület, amelynek nagysága $\Delta A' = \Delta A\cos\theta$, merőleges az erővonalakra, és így meghatározza a $\Delta\Omega = (\Delta A\cos\theta)/r^2$ térszögelemet. A ΔA elemi felület a q töltés helyéről $\Delta\Omega$ térszög alatt látszik.

alakú felülettel veszünk körül. A 25-8 ábra ΔA elemi felülete nem merőleges a q töltésből kifelé induló sugárirányú erővonalakra. A ΔA felületre a $\Delta\Phi_E$ fluxust a (25-3) egyenlettel számíthatjuk ki:

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\Delta A = E\Delta A\cos\theta = \left(\frac{kq}{r^2}\right)\Delta A\cos\theta \qquad (25\text{-}7)$$

Vegyük tekintetbe, hogy az erővonalakra merőleges elemi felület $\Delta A\cos\theta$, így $(\Delta A\cos\theta)/r^2$ éppen a $\Delta\Omega$ térszöggel egyenlő. Tehát a teljes zárt felületen a fluxus

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = kq\oint\frac{dA\cos\theta}{r^2} = kq\oint d\Omega = kq(4\pi)$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (25\text{-}8)$$

Ez az eredmény független a pontszerű töltést körülvevő zárt felület alakjától, és attól, hogy ezen a felületen belül a pontszerű töltés[3] hol helyezkedik el. Továbbá, a felületen belül akárhány pontszerű töltés lehet, tetszés szerinti eloszlásban. A teljes töltés a felületen belül: $q_b = \Sigma_i q_i$.

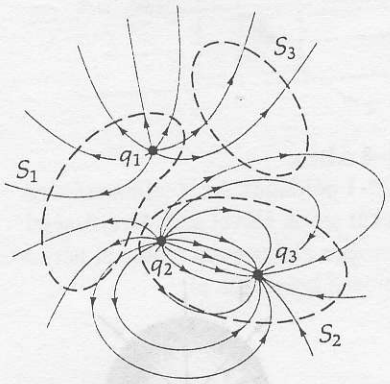
Eddig megmutattuk azt, hogy $\Phi_E = q_b/\varepsilon_0$, bármely felület esetében.. Minthogy $\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$, e két összefüggés kombinációjával azt kapjuk, hogy

A GAUSS TÖRVÉNY — [Bármely zárt felület esetében, amelyen belül bárhol q_b töltés van]

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0} \qquad (25\text{-}9)$$

Ebből az következik, hogy nincs szükségünk a Φ_E elektromos fluxus használatára. (Hiszen, az erővonalak csupán hasznos, ámde fiktív segédeszközök!) Helyette Gauss törvényét használjuk, ami közvetlen kapcsolatot teremt a töltések és a térerősségek között, mégpedig másképpen mint a Coulomb törvény. Szimmetrikus töltés-eloszlás esetében sokkal egyszerűbb a Gauss törvényt használni, mert a Gauss-felületet a tér szimmetriájának a figyelembevételével úgy választhatjuk meg, hogy az integrál értékét könnyű legyen kiszámítani. A Coulomb törvénnyel ellentétben – amely a töltések ismeretében megadja a térerősséget – a Gauss törvény arra is felhasználható, hogy megadjuk, mennyi töltés van az erőtér adott tartományában, ha ismerjük a térerősség-eloszlást, így Gauss törvényét „mindkét irányban" használhatjuk. A 25-9 ábra a Gauss törvénynek egy másik fontos tulajdonságát illusztrálja. Noha q_b a Gauss-felület *belsejében* lévő töltések összege, az integrál alatt álló $\mathbf{E}$ viszont a *felületen kívül és belül lévő összes* töltéstől származó térerősség.

Példáinkban szimmetrikus töltéseloszlást tételezünk fel: noha a Gauss törvény bármely töltéseloszlásra érvényes, csak a szimmetrikus esetekben könnyű ilyen módon a számításokat elvégezni. Azonban vegyük észre, hogy a Gauss törvény segítségével, pusztán szimmetria megfontolásokkal megmutathatjuk, hogy milyen az elektromos erőtér szerkezete, anélkül, hogy konkrétan kiszámítanánk. Avégett hogy a számítások egyszerűek legyenek, olyan Gauss-felületet célszerű választani, amelyik az erőtér struktúrájához, szimmetriájához illeszkedik.



25-9 ábra
Egy Gauss felület teljes Φ_E elektromos fluxusa csak a zárt felület belsejében lévő töltések előjeles összegétől függ. Ennélfogva az S_1 felület eredő fluxusa q_1/ε_0, az S_2 felületé pedig $(q_2+q_3)/\varepsilon_0$. Az S_3 felületen keresztül kifelé ugyanannyi erővonal megy át mint befelé (hiszen belül nincsen töltés) és így az S_3 felület fluxusa zérus.

[3] Ez az egyszerű tétel a Coulomb-tér $1/r^2$-es távolságfüggésének következménye.

25-1 TÁBLÁZAT A töltéseloszlások jelölése

Eloszlás	Szimbólum	Egység	Elemi töltés	
Pontszerű töltés	q	C	q	
Vonalmenti	λ	C/m	$dq = \lambda dx$,	ahol dx egy elemi vonalszakasz
Felületmenti	σ	C/m^2	$dq = \sigma dA$,	ahol dA egy elemi felület*
Térfogati	ρ	C/m^3	$dq = \rho dV$,	ahol dV egy elemi térfogat*

* A felületet és a térfogatot úgy kell megválasztani, hogy bennük a töltés sűrűsége állandó legyen.

25-3 PÉLDA

Pozitív töltések helyezkednek el egyenletesen egy végtelen hosszú egyenes mentén. A vonalmenti töltéssűrűség λ. Számítsuk ki az **E** térerősséget az egyenestől r távolságban.

MEGOLDÁS

Az erővonalak minden irányban indulnak ki a vonaltöltésből. Szimmetria okok miatt, a töltésekből származó tér tengelyirányú komponensei egymást kioltják[4]. Az eredmény az, hogy a térerősség sugárirányú, és kifelé mutat. Bármely pontban a tengelytől r távolságban (minden irányban) a térerősség azonos.

Ennélfogva, a Gauss-felület akkor illik a töltéseloszlás szimmetriájához, ha r sugarú, L hosszúságú, a vonaltöltéssel koaxiális hengert választunk Gauss felület gyanánt (25-10 ábra). A hengerfelület minden egyes pontjában **E** térerősség azonos nagyságú és mindenütt párhuzamos a $d\mathbf{A}$ elemi felülettel. A henger véglapjain **E** mindenütt merőleges $d\mathbf{A}$-ra. A hengeren belül $q_b = \lambda L$ töltés van. Gauss törvényét alkalmazva

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$\underbrace{\int_{\text{A henger-felületre}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^\circ = 1}}_{\text{A vég-lapokra}} + \underbrace{\int \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^\circ = 0}}_{\text{A vég-lapokra}} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

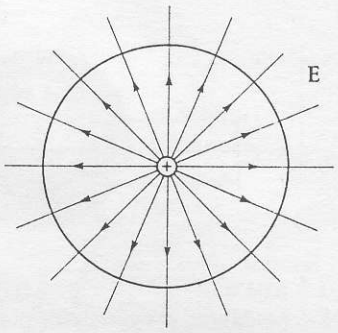
$$E(2\pi rL) + 0 = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Innen

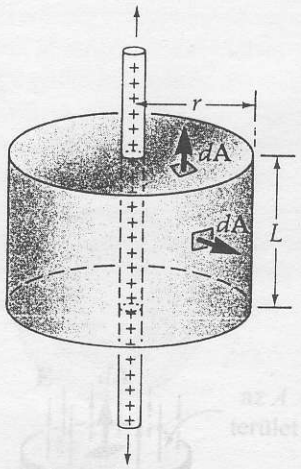
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \begin{pmatrix}\text{sugárirányban}\\ \text{kifelé}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(25-10)}$$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás mennyivel egyszerűbb, mint a 24-4 és 24-5 példákban alkalmazott, a Coulomb-törvényen alapuló módszer. A Gauss törvényen alapuló megoldás végezetül csak azért egyszerű, mert a Gauss-felületet alkalmasan, az elektromos tér szimmetriájának megfelelően választottuk meg, és így az $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ konkrét kiszámítása már egyszerű. Noha a

[4] A szimmetria megfontolások másik formája az, ha megmutatjuk, hogy a töltéssűrűség-eloszlásnak nincs aszimmetriája, ami tengelyirányú térerősségkomponenst okozna. Minthogy a töltéseloszlás a vonal mentén szimmetrikus, az egyedüli lehetőség, hogy a tér kövesse ezt a szimmetriát, az, ha sugárirányú elektromos tér alakul ki.

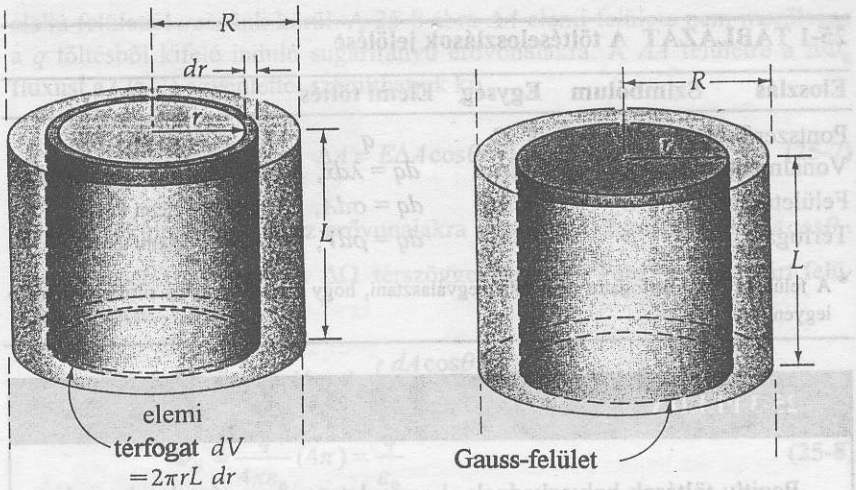


a) A pozitív töltések az ábra síkjára merőleges egyenes mentén helyezkednek el.



b) A vonalmenti töltés és a Gauss-felület.

25-10 ábra
A 25-3 példához. Egy hengeres Gauss-felület megfelel olyan erőtér szimmetriájának, amely végtelen hosszú, állandó sűrűségű pozitív vonalmenti töltés körül alakul ki. A $d\mathbf{A}$ elemi felületek az erővonalakra vagy merőlegesek, vagy párhuzamosak velük.



a) A dV elemi térfogat r sugarú, dr falvastagságú, L hosszúságú hengerpalást (cső).

b) A Gauss-felület r sugarú, L hosszúságú henger.

25-11 ábra
A 25-4 példához. Állandó, ρ töltéssűrűségű, végtelen hosszúságú R sugarú henger.

Gauss törvény elvileg bármilyen esetre alkalmazható, igazából csak olyan terek számítását lehet könnyen elvégezni, amelyeknek valamilyen nyilvánvaló szimmetriája van.

25-4 PÉLDA

Egy R sugarú, végtelen hosszúságú hengerben (25-11. ábra) a homogén töltéssűrűség ρ (töltés/térfogat egységekben megadva). Számítsuk ki a) a henger L hosszúságú szakaszának Q_L töltését; b) az E elektromos térerősséget a tengelytől $r < R$ távolságban.

MEGOLDÁS:

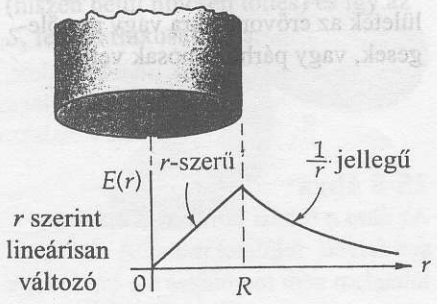
a) Térfogatmenti töltéseloszlásokra érvényes, hogy $Q = \int \rho\, dV$. Ebben az esetben a dV elemi térfogatokat tekintsük vékony dr falvastagságú, r sugarú, L hosszúságú hengerpalástoknak (csöveknek):

$$Q = \int \rho\, dV = \int_0^R \rho\, 2\pi\, r\, L dr = 2\pi\rho\, L \int_0^R r dr = \pi\rho\, LR^2$$

b) A rendszer szimmetriája alapján arra következtethetünk, hogy a térerősség sugárirányú, kifelé mutat és adott r-nél $\mathbf{E}$ térerősség mindenütt azonos. Olyan Gauss-felületet választunk amely illik ehhez a szimmetriához: Legyen ez r sugarú, L hosszúságú, amely az R sugarú hengerrel koaxiális és a belsejében (lásd feljebb) $q_b = \pi\rho Lr^2$ töltés van.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^R \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^0 = 0} + \int_0^R \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^0 = 1} = \frac{\pi\rho Lr^2}{\varepsilon_0}$$



25-12 ábra
A 25-3 és 25-4 példákhoz. Az E térerősség r függvényében egy R sugarú, végtelen hosszúságú, homogén töltéseloszlású henger belsejében, illetve azon kívül. Az ábrán $E(r)$ pozitív, ha $\mathbf{E}(r)$ kifelé mutat.

$$0 \quad + E(2prL) = \frac{pr\,Lr^2}{e_0}$$

E értékét kifejezve: $E = \left(\frac{\rho}{2e_0}\right) r$

Tehát a henger belsejében a térerősség egyenesen arányos a tengelytől mért távolsággal. A hengeren kívül a térerősség ugyanaz, mint a 25-1 példa esetében. E, mint r függvénye van ábrázolva a 25-12 ábrán.

25-5 PÉLDA

Számítsuk ki egy σ homogén pozitív felületmenti töltéssűrűségű, nagyon nagy (lényegileg végtelen) lemez térerősségét.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokok miatt (hacsak nem vagyunk a lemez széle közelében) az elektromos erőtérnek mindkét oldalon csak a síkra merőleges komponense lehet. (Nincs ugyanis olyan aszimmetria, ami azt eredményezné, hogy az erővonalak a síktól messze valamilyen irányban elhajolnának.) Az erőtér szimmetriájához olyan Gauss-felület illik, amely egy A keresztmetszetű henger és amelynek tengelye a síkra merőleges, véglapjai pedig a síktól, annak két oldalán azonos távolságban vannak[5] (25-13 ábra). A felületen belül σA töltés van. Szimmetriaokok miatt a térerősség állandó, a henger két véglapjára merőleges és a palásttal párhuzamos. Gauss törvényét alkalmazva

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

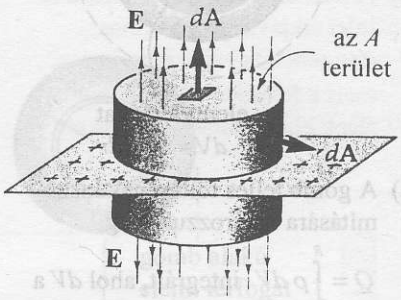
$$\int_{\substack{\text{Mindkét} \\ \text{véglapra}}} \underbrace{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^\circ = 1} + \int_{\substack{\text{A} \\ \text{palástra}}} \underbrace{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^\circ = 0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

Az első integrál argumentumában **E** térerősség homogén és azonos nagyságú mindkét véglapnál, így kiemelhető az integráljel elé: $E\int dA = E(2A)$ (figyelembe véve, hogy két véglap van). A második integrál értéke zérus, minthogy cos 90° = 0.

$$E(2A) + 0 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

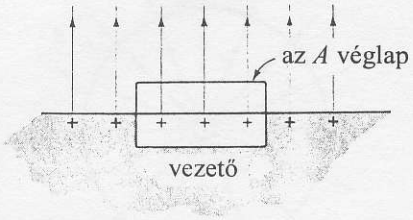
Innen $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (a lemez síkjától kifelé mutató irányú a sík mindkét oldalán) **(25-11)**

Minthogy a síktól való távolság nem jelenik meg a kifejezésben, arra következtethetünk, hogy a térerősség a sík mindkét oldalán, a távolságtól függetlenül azonos.



25-13 ábra
A 25-5 példához. Egyenletes töltéseloszlású, σ pozitív töltéssűrűségű végtelen síklap által létrehozott elektromos erőtér. A Gauss-felület henger, melynek palástja, követve az erőtér szimmetriáját, a síklapra merőleges, a henger véglapjai pedig, szimmetrikusan a síklap alatt, illetve felett szerkesztett, azzal párhuzamos síklapok. A henger palástját egyetlen erővonal sem metszi, ezek ugyanis merőlegesek a véglapokra. (Henger helyett éppúgy választhattunk volna az erővonalakkal párhuzamos élű téglatestet is, vagy bármely más olyan testet, melynek oldalai párhuzamosak az erővonalakkal, és fedőlapjai pedig merőlegesek rájuk.)

[5] Nem lehetünk előre biztosak abban, hogy a térerősség nem változik-e a síktól való távolsággal. Viszont, a szimmetria miatt biztos az, hogy amennyiben ilyen távolságfüggés létezik, akkor annak a sík mindkét oldalán azonosnak kell lennie. Ezért kötjük ki, hogy a véglapok a sík két oldalán attól egyenlő távol legyenek.



25-14 ábra
A 25-6 példához. σ egyenletes pozitív felületmenti töltéssűrűség végtelen nagy vezető síkon.

25-6 PÉLDA

Nagyon nagy méretű vezető síklap felületén a töltések statikus egyensúlyban vannak. Számítsuk ki a felszín felett a térerősséget. A felületmenti töltéssűrűség σ.

MEGOLDÁS

Statikus esetben a vezető belsejében a térerősségnek zérusnak kell lennie, mert máskülönben a töltések elmozdulnának. Így az erővonalak a vezetőből indulnak és arra merőlegesek (25-14. ábra). Szimmetria-megfontolásokból célszerű ugyanolyan Gauss-felületet választani, mint az előző esetben; vegyük viszont figyelembe, hogy ebben az esetben az erővonalak csak az egyik véglapon haladnak át.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

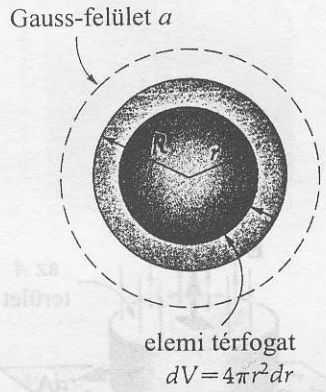
$$\underbrace{\int_{\text{felső lap}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^0 = 1} + \underbrace{\int_{\text{alsó lap}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{(E=0)} + \underbrace{\int_{\text{palást}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^0 = 0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$EA + 0 + 0 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

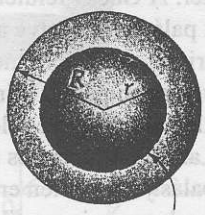
AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG KÖZVETLENÜL A VEZETŐ FELETT

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \left[\text{a vezető felületére merőlegesen}\right] \qquad \textbf{(25-12)}$$

Ez a térerősség éppen kétszerese annak, amit az előző példánál kiszámítottunk, és értéke független a végtelen síklaptól való távolságtól.



a) A gömb teljes töltésének kiszámítására határozzuk meg $Q = \int_0^R \rho\, dV$ integrált, ahol dV a dr vastagságú, r sugarú gömbhéj térfogata.



b) A Gauss törvény szerint csak a Gauss felületen belül lévő töltéseket kell figyelembe vennünk.

25-15 ábra
A 25-7 példához.

A (25-12) egyenlet görbült vezető felületekre is érvényes, amelyeken σ helyről helyre változik. *A felület bármely pontjának közvetlen közelében az* **E** *térerősség nagysága* σ / ε_0 *és iránya merőleges a felületre.* Az egyenletet szemlélve paradoxonnak tűnik, hogy a felület közvetlen közelében a térerősség kizárólag a helyi töltéssűrűségtől függ, noha a térerősséget a teljes felület összes töltése (közeli és távoli egyaránt) hozza létre.

25-7 PÉLDA

Egy R sugarú gömbnek ρ (töltés/térfogat egységben megadott) egyenletes térfogatmenti töltéssűrűsége van (25-15 ábra). Számítsuk ki az elektromos térerősséget a) a gömbön kívül; és b) a gömb belsejében.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokokból arra következtethetünk, hogy az elektromos térerősségnek csak sugárirányú, kifelé mutató komponense lehet, a gömbön kívül és belül is. Továbbá, adott r értéknél, **E** nagysága mindenütt azonos. Válasszunk egy ilyen szimmetriájú Gauss-felületet: legyen az egy r sugarú gömb, melynek középpontja azonos a gömbével.

a) Ha $r > R$: a) eset A teljes q_b töltés, ami a gömbfelület belsejében van, $Q = \int \rho\, dV = \rho \int_0^R 4\pi\, r^2 dr = \rho(4/3\pi R^3)$. Gauss törvényét alkalmazva és figyelembe véve, hogy

$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint dA = E(4\pi r^2)$, azt kapjuk, hogy

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Az egyenletet megoldva: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Ez pontosan ugyanolyan inverz négyzetes távolságfüggés, mintha a Q töltést a gömb középpontjában, pontszerű töltésként helyeztük volna el[6]. .Avégett, hogy a végeredményt a megadott mennyiségek függvényeként kapjuk meg, végezzük el a következő helyettesítést: $Q = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)$, aminek eredménye:

$$Ha\ r > R: \quad E = \frac{(\rho\frac{4}{3}\pi R^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2} \qquad \left[\begin{matrix}\text{sugárirányú,}\\ \text{kifelé mutat}\end{matrix}\right] \quad \textbf{(25-13)}$$

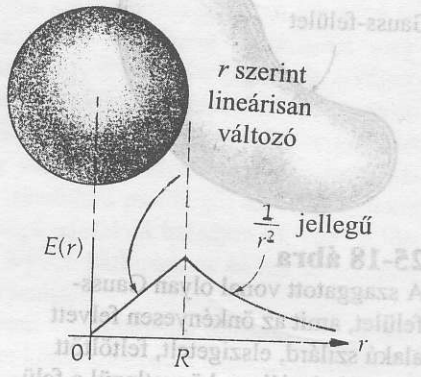
b) Ha $r < R$: Hogy kövessük az **E** térerősség szimmetriáját, válasszunk $r < R$ sugarú gömböt Gauss-felületnek (a *b* jelű felület a 25-15b ábrán). Gauss törvényének alkalmazásakor csak a felületen belüli q_b töltéseket kell figyelembe venni. A példa a) pontja szerint, a $q' = \int_0^r \rho\, dV$ integrált kell kiszámítani, ahol most a felső integrációs határ nem R, hanem r. Így, $q_b = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)$.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

$$Ha\ r < R: \quad E = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)r \qquad \left[\begin{matrix}\text{sugárirányú,}\\ \text{kifelé mutat}\end{matrix}\right] \quad \textbf{(25-14)}$$

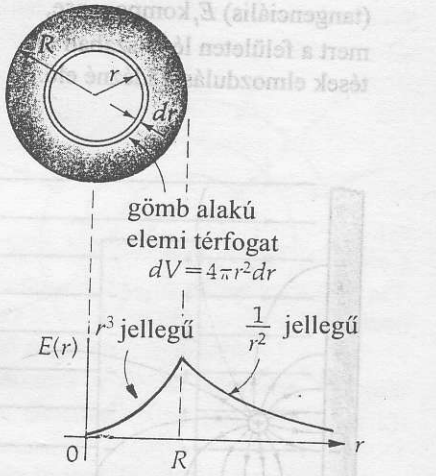
Tehát az egyenletes töltéseloszlású gömb belsejében *a térerősség egyenesen arányos a középponttól számított r távolsággal*. A 25-16 ábra az *E* térerősséget *r* függvényeként mutatja.



25-16 ábra
Az *E* térerősség *r* függvényében, egy *R* sugarú, homogén pozitív töltéssűrűségű gömb belsejében illetve azon kívül. A gömbön kívül a térerősségeloszlás éppen olyan, mintha a teljes *Q* töltés pontszerű töltésként a gömb középpontjában lenne. (Ez a megállapítás csak gömbszimmetrikus töltéseloszlásokra igaz!) Az ábrán *E(r)* pozitív, ha *E(r)* kifelé mutat.

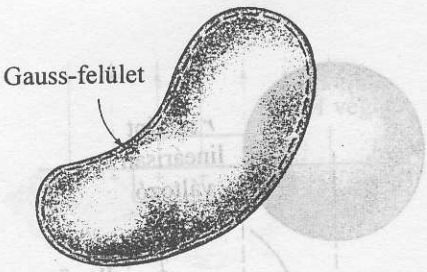
25-8 PÉLDA

Egy *R* sugarú gömbben a ρ pozitív töltéssűrűség nem konstans, hanem sugárirányban $\rho = Br^2$ függvény szerint változik, ahol *B* konstans (25-17 ábra). a) Mi *B* SI mértékegysége? b) Számítsuk ki a gömb teljes *Q* töltését; c) Mekkora az elektromos térerősség, ha $r < R$?



25-17 ábra
A 25-8 példához. Az *E* térerősség *r* függvényében ábrázolva, olyan gömbszimmetrikus töltéseloszlás esetén, amikor a töltéssűrűség $\rho = Br^2$ szerint függ a középponttól vett távolságtól. A gömbön kívül a térerősségeloszlás éppen olyan, mintha a teljes *Q* töltés pontszerű töltésként a gömb középpontjában lenne. (Ez a megállapítás csak gömbszimmetrikus töltéseloszlásokra igaz!) Az ábrán *E(r)* pozitív, ha **E**(*r*) kifelé mutat.

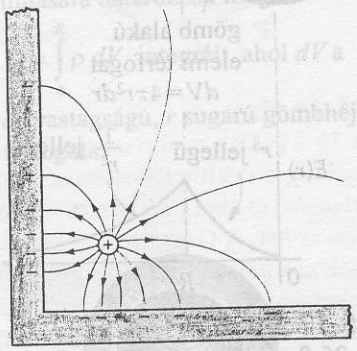
[6] A 16.5 fejezetben analóg eredményhez jutottunk: homogén tömegeloszlású gömb gravitációs tere a gömbön kívül ugyanolyan, mintha a teljes tömeg a középpontban koncentrálódna. Kár, hogy Newton még nem használhatta Gauss törvényét. Annak, hogy Newton *Principiájának* a kiadása majdnem 20 évig elhúzódott, részben az is volt az oka, hogy Newtonnak nehézséget okozott a Holdra gyakorolt gravitációs erők összegzése, minthogy a Föld nem pontszerű. Newtonnak ki kellett dolgoznia a differenciálszámítás elemeit, hogy ezt a problémát megoldja; bár az általa használt formalizmus manapság meglehetősen különösnek tűnik.



25-18 ábra
A szaggatott vonal olyan Gauss-felület, amit az önkényesen felvett alakú szilárd, elszigetelt, feltöltött vezető belsejében, közvetlenül a felület alatt képzelünk el. Gauss törvénye alapján, a vezető belsejében a töltések nem lehetnek nyugalomban. Nyugalomban lévő töltések csak a felületen lehetnek.



a) A térerősségnek nem lehet a felület síkjával párhuzamos, (tangenciális) E_t komponense, mert a felületen lévő szabad töltések elmozdulását idézné elő.



b) Földelt, derékszögű vezetőkből álló „sarok" közelébe helyezett pontszerű töltés és erőtere. Statikus esetben az erővonalak a vezető felületéhez mindig derékszögben érkeznek.

25-19 ábra
Elektromos erőtér vezető felület környezetében, az *elektrosztatikus egyensúly* fennállása esetén.

MEGOLDÁS

a) Minthogy ρ dimenziója töltés/térfogat, B-t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$B = \frac{\rho}{r^2} = \frac{(\mathrm{C/m^3})}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^5}}$$

b) Minthogy a ρ töltéssűrűség sugárirányban változik, összegeznünk kell a dV elemi térfogatokban lévő dq töltéseket, *ahol az egyes dV elemi térfogatok a középponttól azonos távolságban vannak.* Ezt azért tehetjük, mert a ρ töltéssűrűség értéke a dV elemi térfogatban állandó. Válasszunk r sugarú, dr vastagságú gömbhéjakat (25-17 ábra), melyek térfogata $dV = 4\pi r^2 dr$; ezen gömbhéjak töltése $dq = \rho 4\pi r^2 dr$. Behelyettesítve a $\rho = Br^2$ kifejezést és az összes gömbhéjra $r = 0$-tól $r = R$-ig az összegzést elvégezve, azt kapjuk hogy

$$Q = \int dq = \int \rho\, dV = \int_0^R Br^2 (4\pi r^2) dr = 4\pi B \int_0^R r^4 dr$$

$$Q = 4\pi B \left(\frac{r^5}{5} \right) \Bigg|_0^R = \frac{4}{5} \pi B R^5$$

c) Válasszunk $r < R$ sugarú, gömb alakú Gauss-felületet. A gömb belsejében lévő q_b töltés

$$q_b = \int_0^r \rho\, dV = \int_0^r Br^2 (4\pi r^2) dr = \frac{4}{5} \pi B r^5$$

A Gauss törvényt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi B r^5}{5\varepsilon_0}$$

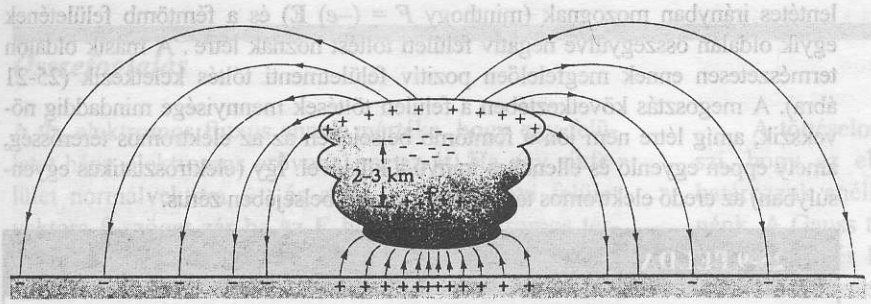
Innen

$$E = \frac{Br^3}{5\varepsilon_0}$$

25.4 A Gauss törvény és az elektromos vezetők

Amikor elektromos töltéseket juttatunk szigetelt fémes vezetőre, akkor azok elektromos erőteret hoznak létre. Az erőtér viszont a töltéseket mindaddig mozgatja, amíg az elektrosztatikus egyensúly be nem áll, azaz mindaddig, amíg az összes töltés nyugalmi helyzetbe nem kerül.[7] Ez a töltésátrendeződés

[7] A leírtak mind pozitív, mind negatív töltések esetén igazak. Noha csak a negatív töltésű elektron képes a fémekben szabadon mozogni, pozitívan töltött vezetőben (amelynek elektronokból hiánya van) vannak olyan atomok, amelyekről elektron hiányzik: ezek a pozitív töltések. Minthogy az elektronok a fémekben szabadon mozoghatnak, az elektronhiányos atomok magukhoz vonzzák a szomszédos atomok valamelyik elektronját, és így a szomszédos atom válik pozitív töltésűvé. Ennek hatása olyan, mintha a pozitív töltés „ugrott" volna át a szomszéd atomra, az elektronokéval megegyező mozgékonysággal. Ennélfogva mind a pozitív, mind a negatív töltések „szabad" töltéseknek tekinthetők: mindaddig szabadon mozognak, amíg a statikus egyensúly be nem áll.

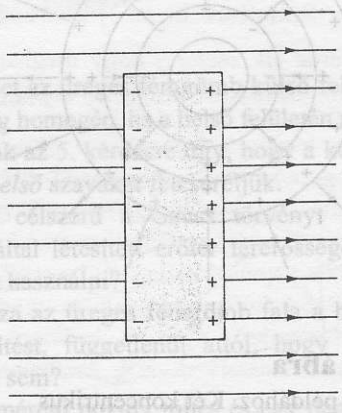


25-20 ábra
Légkörfizikusok sokáig kutatták a légköri elektromosság, a villámok okait. Minthogy pontos méréseket nagyon nehéz végezni, a töltésszétválás mechanizmusát még nem teljesen értjük. Azt tudjuk, hogy mechanikai, termodinamikai és talán kémiai eredetű energiák játszanak szerepet a töltés-szétválasztásban. Ezen az ábrán a zivatarfelhők leggyakrabban előforduló töltéseloszlása látható; bár néha a töltések fordított polaritással helyezkednek el. (A felhőn belül az erővonalakat nem ábrázoltuk.) A földfelszín feletti elektromos térerősség iránya tehát felhős, illetve napos időben ellentétes. Viharfelhő alatt az elektromos térerősség 10^4 N/C vagy még nagyobb is lehet. Ha az elektromos térerősség eléri a 10^5–10^6 N/C nagyságrendű értéket, villámok képződhetnek a felhők és a föld, de felhők között is. Egy villámcsapás során általában néhányszor tíz C töltés semlegesítődik. A villámban a csúcsáram 10–20 kA. A Föld teljes felszínét egyidejűleg mintegy 100 villám éri, amelyek 10 és 2 *s* közötti időtartamúak, villámlásonként 1–20 kisüléssel. Kontinensek felett mintegy tízszer gyakoribbak a villámok mint az óceánok felett. (J. V. Iribarne és H. R. Cho: *Atmospheric Physics*, (Reidel Publishing Co., 1980) című könyvéből átvéve.) Lásd még a 28-12 ábrát is.

nagyon gyorsan végbemegy: a legtöbb esetben az ehhez szükséges idő elhanyagolhatóan kicsi. Gauss törvényéből következik, hogy a *vezetőre juttatott többlettöltés statikus egyensúlyban a vezető külső felületén helyezkedik el.* Ezt demonstrálandó, tekintsünk egy elszigetelt, tetszés szerinti alakú fémes vezetőt (25-18 ábra). Vegyünk fel egy Gauss-felületet a vezető belsejében közvetlenül a vezető felülete alatt (szaggatott vonal). Elektrosztatikus egyensúlyban a vezető belsejében az elektromos térerősségnek zérusnak kell lennie, így a Gauss-felület egyetlen pontját sem metszheti elektromos erővonal, továbbá $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Ugyanezeknek a feltételeknek teljesülniök kell bármely, a felület alatt mélyebben rajzolt Gauss felület esetére is. A Gauss törvényből tehát arra következtethetünk, hogy a vezetőben sehol sem lehet többlettöltés, vagyis a többlettöltésnek a felületen kell lennie.[8]

Elektrosztatikus egyensúlyban az elektromos erővonalak mindig a vezetők felületére merőlegesen futnak be, és ott a megfelelő előjelű töltésekben végződnek (25-19 ábra). Ha lenne ugyanis az elektromos térerősségnek a felülettel párhuzamos komponense, akkor a felületen lévő töltéseket elmozdítaná, azaz nem lenne statikus egyensúly.

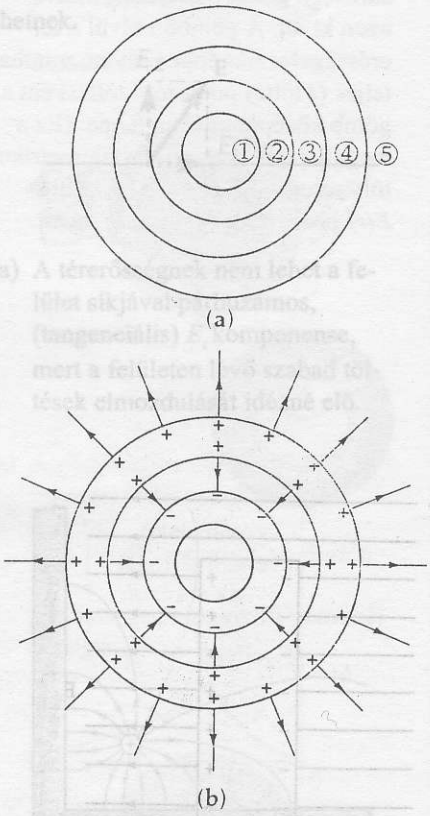
Mi történik, ha feltöltetlen fémdarabot elektromos erőtérbe helyezünk? Kezdetben a vezető elektronjai egyenletesen oszlanak el az anyagban, és a fémdarab mindenütt elektromosan semleges. Azonban, a külső elektromos erőtérre válaszul, a szabad elektronok gyorsan az **E** térerősség irányával el-



25-21 ábra
Egy külső elektromos erőtérbe helyezett töltetlen fémhasáb felületén töltések jelennek meg: a vezető belsejében, a megosztással keletkező felületi töltések által létrehozott belső erőtér kioltja az eredeti erőtér hatását, így a hasábon belül zérus nagyságú térerősség alakul ki.

[8] Vajon a töltések a felületen, vagy közvetlenül azalatt helyezkednek el? E kérdésre válaszolandó, az atomi mérettartományban kellene a „felület" fogalmát definiálnunk. Ezt a problémát pillanatnyilag megkerüljük; a „felületen" és a „felületnél" kifejezések egyaránt jól fedik a lényeget.

lentétes irányban mozognak (minthogy $F = (-e)\,\mathbf{E}$) és a fémtömb felületének egyik oldalán összegyűlve negatív felületi töltést hoznak létre[9]. A másik oldalon természetesen ennek megfelelően pozitív felületmenti töltés keletkezik (25-21 ábra). A megosztás következtében a felületi töltések mennyisége mindaddig növekszik, amíg létre nem jön a fémtömb belsejében az az elektromos térerősség, amely éppen egyenlő és ellentétes irányú a külsővel. Így (elektrosztatikus egyensúlyban) az eredő elektromos térerősség a vezető belsejében zérus.



25-22 ábra
A 25-9 példához. Két koncentrikus vezető gömbhéj. A belső gömbhéjon $-Q$, a külsőn $+3Q$ töltés van.

25-9 PÉLDA

Üreges vezető gömb üregében kisebb, vele koncentrikus, szintén üreges vezető gömb van (25-22a ábra). A belső gömb $-Q$ negatív, a külső gömb pedig $+3Q$ pozitív töltésű. A töltések elektrosztatikus egyensúlyban vannak. Gauss törvényét alkalmazva, számítsuk ki, hol mekkora a töltés és a térerősség.

MEGOLDÁS

A vezetők gömbszimmetriája miatt az elektromos térerősség mindenütt sugárirányú, akár kifelé, akár befelé mutat.

1. tartomány: A belső gömb belsejében lévő Gauss gömb felületén belül nincsenek töltések. Szimmetriaokokból ezen a felületen (ha létezne) az $\mathbf{E}$ térerősségnek mindenütt azonos értékünek kellene lennie. Minthogy $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$, az $\mathbf{E}$ térerősség mindenütt zérus ebben a tartományban.

2. tartomány: Minthogy statikus esetben vezetők belsejében nincsenek erővonalak, ha a Gauss törvényt alkalmazzuk olyan gömb alakú Gauss felületre, amelyik éppen a belső gömb külső felülete alatt van, azt kapjuk, hogy $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$, tehát a $-Q$ töltésnek a belső gömb külső felületén kell lennie.

3. tartomány: Minthogy a 3. tartományban megszerkesztett Gauss-felületre $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -Q/\varepsilon_0$, az erővonalaknak szimmetriaokokból sugárirányban befelé kell mutatniuk, mintha a $-Q$ pontszerű töltés a gömbök közös középpontjában lenne. Ennélfogva

$$\mathbf{E}_3 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

4. tartomány: Minthogy vezető belsejében $\mathbf{E} = 0$, és $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$, következésképpen a gömb alakú Gauss-felület belsejében az eredő töltés zérus, vagyis a külső gömb belső falán $+Q$ töltésnek kell lennie, hogy a belső gömb $-Q$ töltését kompenzálja.

5. tartomány: A külső gömbhéjon $+3Q$ töltés van. Minthogy $-Q$ a belső felületen van, $+2Q$ töltés lehet a külső felületen. Az 5. Gauss-felületen belül $-Q + 3Q = +2Q$ össztöltés van, aminek következtében a (szimmetriaokokból) sugárirányú, kifelé irányuló térerősség olyan, mint amilyet a középpontban elhelyezett $+2Q$ ponttöltés hozna létre:

$$\mathbf{E}_5 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

A töltés- és térerősségeloszlást a 25-22b ábrán vázoltuk.

[9] Az elektronok általában a felülethez kötött állapotban vannak, noha megfelelően erős külső tér hatására a téremissziónak nevezett folyamatban ki is léphetnek onnan. Feltételezzük, hogy ez a példánkban nem történik meg

Összefoglalás

A Φ_E elektromos fluxus annak mértéke, hogy egy felületet hány elektromos erővonal metsz át. Ha egy síkfelület normálvektora $\hat{\mathbf{n}}$, és a $d\mathbf{A} = nd\mathbf{A}$ elemi felület vektora θ szöget zár be az $\mathbf{E}$ homogén elektromos térerősséggel, akkor a fluxus az alábbi egyenlettel számítható:

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$

Általánosabban: $\Phi_E = \int_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$

Zárt felület esetében, a $d\mathbf{A}$ elemi felületvektor a kifelé mutató normálvektor irányába mutat.

A Gauss *törvény*:

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

[ahol A tetszőleges zárt felület amelyen belül, tetszőleges térbeli eloszlásban, összesen q_b töltés van]

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

[ahol a ρ töltéssűrűség az A felület által bezárt V térrészben van]

A töltéseloszlások elnevezései, jelölései:

Eloszlás	Szimbólum	Egység	Elemi töltés
Pontszerű töltés	q	C	q
Vonalmenti töltés	λ	C/m	$dq = \lambda dx$ (ahol dx egy elemi vonalszakasz)
Felületmenti töltés	σ	C/m^2	$dq = \sigma dA$ (ahol dA egy elemi felület*)
Térfogatmeni töltés	ρ	C/m^3	$dq = \rho dV$ (ahol dV egy elemi térfogat*)

* A felületet és a térfogatot úgy kell kiválasztani, hogy bennük a töltés sűrűsége állandó legyen.

Kérdések

1. Belül üres nagy gömb középpontjában egy kis tömegű test van. Ha a gömbön kívül elhelyezünk egy másik testet, vajon az üregben lévő test érzékeli-e a külső test gravitációs hatását?
2. Üreges, feltöltetlen fémgömb középpontjában egy töltés van. Ha a gömbön kívül elhelyezünk egy másik töltést, vajon az üregben lévő test érzékeli-e a külső töltés elektromos erőterét?
3. Üreges vezető gömb belsejében lévő töltés elmozdulásakor megváltozik-e a gömbön kívüli elektromos erőtér?
4. Olajon úszó üreges fémgömbre töltést juttatunk. Feltöltött állapotban a gömb jobban vagy kevésbé merül az olajba, netán ugyanolyan mélyen marad? Miért?

A töltéseloszlás szimmetriája gyakran lehetővé teszi, hogy az elektromos térerősség szerkezetét meghatározzuk anélkül, hogy a konkrét számítást elvégeznénk. A Gauss törvény akkor alkalmazható könnyen az elektromos tér kiszámítására, ha olyan Gauss-felületet választunk, amely megfelel a térerősség szimmetriájának: vagy legyen mindenütt merőleges az erővonalakra és azonos térerősségű pontokon haladjon át, vagy a térerősség irányával legyen párhuzamos és így az integrál értékét nem befolyásolja.

Ha egy felületen a felületmenti töltéssűrűség σ, akkor annak közvetlen környezetében a térerősség értéke

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

A feltöltött vezető anyagok *elektrosztatikus egyensúlyban* a következőkkel jellemezhetők:

1) Statikus egyensúlyban a többlettöltések mindig a vezető külső felületén helyezkednek el.
2) Az elektromos erőtér a vezető belsejében mindenütt zérus.
3) Elektrosztatikus egyensúlyban az elektromos erővonalak a vezetők felületére mindig merőlegesen futnak be. Az elektromos térerősség nagysága a vezető felületén σ / ε_0, ahol σ a lokális felületmenti töltéssűrűség.

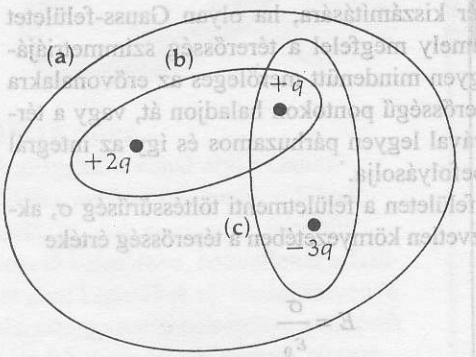
5. Hogyan lehet az üreges fémgömb külső felületén a töltéssűrűség homogén, ha a belső felületén nem az?
6. Válaszoljunk az 5. kérdésre úgy, hogy a kérdésben a *külső* és *belső* szavakat felcseréljük.
7. Miért nem célszerű a Gauss törvényt feltöltött fémkocka által létesített erőtér térerősségének kiszámítására használni?
8. Miért vonzza az üreges fémgömb fala a belsejébe juttatott töltést, függetlenül attól, hogy a gömb töltött vagy sem?
9. Ha egy kisméretű pozitív töltés és egy nagyméretű fémgömb vonzza egymást, akkor az azt jelenti vajon, hogy a fémgömbnek negatív töltése van?

Feladatok

25.2 Az elektromos fluxus

25.3 Gauss törvénye

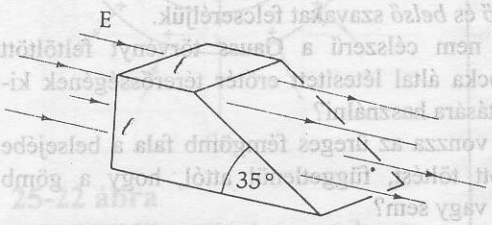
25A-1 Számítsuk ki a Φ_E fluxust a 25-23 ábrán illusztrált töltéseloszlás esetére, az *a*, *b* és *c* zárt felületekre.



25-23 ábra
A 25A-1 feladathoz.

25A-2 Egy inhomogén elektromos térerősség az $x > 0$ térrészben pozitív x irányú és nagysága $20x$ N/C, az $x < 0$ térrészben negatív x irányú és nagysága $20x$ N/C. Helyezzünk el egy 1 m élhosszúságú (szigetelő) kockát úgy, hogy középpontja a koordinátarendszer origójába essen, és élei legyenek párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel. a) Vázoljuk fel a térerősségeloszlást. b) Számítsuk ki a kocka egyes lapjain a fluxust. c) Számítsuk ki, mekkora töltés van a dobozban.

25A-3 A 25-24 ábrán vázolt, $\ell = 5$ cm oldalhosszúságú négyzetes keresztmetszetű csövet helyezzük az $E = 30$ N/C térerősségű homogén elektromos erőtérbe úgy, hogy az erővonalak a cső tengelyével párhuzamosak legyenek. Számítsuk ki az $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ értékét az ábrán látható ferde sík esetére, hogy meghatározzuk a teljes Φ_E elektromos fluxust, ami kilép ebből az oldallapból.



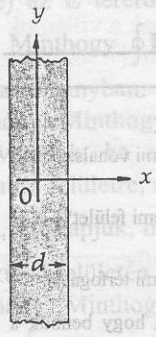
25-24 ábra
A 25A-3 feladathoz.

25A-4 Egy L élhosszúságú kocka alakú Gauss felület középpontjában $+Q$ ponttöltés helyezkedik el. Tételezzük fel, hogy a töltésből 1200 erővonal indul ki szimmetrikusan. a) Szimmetria meggondolásokkal számítsuk ki a kocka egyes lapjain a kilépő erővonalak számát (tételezzük fel hogy egy erővonal sem esik éppen élre vagy csúcsra); b) Hány erővonal halad át a kocka teljes felszínén? c) Tételezzük fel, hogy a pontszerű töltés a kocka belsejében, de nem a közepén helyezkedik el. Melyik kérdésre kellene más választ adni, és miért?

25A-5 Két végtelen, szigetelő sík mindegyikén egyenletes σ töltéssűrűség van. A síkok egymással párhuzamosak. A szuperpozíciós elv használatával határozzuk meg a két sík közötti, illetve az azokon kívül lévő elektromos térerősséget.

25A-6 Oldjuk meg az előző példát úgy is, hogy az egyik síkon a töltéssűrűség $-\sigma$.

25B-7 Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (25-25 ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számítsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



25-25 ábra
A 25B-7 feladathoz.

25B-8 Legyen a Föld felszíne felett kis távolságban, az üres térben egy proton. a.) Számítsuk ki azt a Q töltést, amit (egyenletesen elosztva) a Föld felszínére kellene juttatnunk, hogy akkora elektromos taszítóerőt okozzon, mint ami éppen kiegyenlíti a Föld gravitációs vonzóerejét. b.) Ez a Q töltés a nagyobb távolságban lévő szabad protonokra ható gravitációs erőt is kiegyenlítené vajon? Magyarázzuk meg.

25.4 Gauss törvénye és az elektromos vezetők

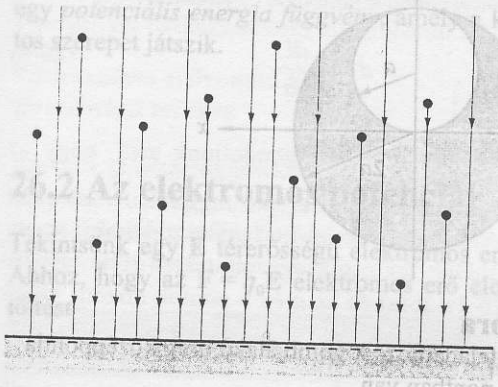
25A-9 Tekintsünk egy nagyon nagy sugarú, elszigetelt vezető gömböt, amelyen a (C/m^2 egységekben kifejezett) homogén felületmenti töltéssűrűség σ. a) Vezessük le, hogy mekkora az elektromos térerősség a gömb közvetlen környezetében. b) Határozzuk meg, hogy mekkora az elektromos térerősség egy olyan, nagyméretű sík vezető környezetében, amely a gömbbel azonos felületű és töltésű. Tételezzük fel, hogy a síkon a töltés egyenletesen oszlik el, vagyis a szélek hatását elhanyagolhatjuk.

25A-10 Tekintsünk egy 10 cm sugarú üreges fémgömböt, amelyen +10 μC töltés van. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer origójában. A gömb belsejében, az $x = 5$ cm pontban legyen egy –3 μC nagyságú pontszerű töltés. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömbön kívül, az x tengely mentén. Vázoljuk fel az erővonalakat a gömbön kívül és azon belül.

25A-11 Tiszta, napos időben sík terepen vagy vízfelszín felett az elektromos térerősség kb. 130 V/m nagyságú és iránya lefelé mutat. (Felhők alatt a térerősség nagysága lényegesen változhat, az iránya akár ellentétes is lehet.) Mekkora a felületmenti töltéssűrűség ilyenkor?

25B-12 Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van. a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az **E** térerősséget a henger felszínétől R távolságban. b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozogna.

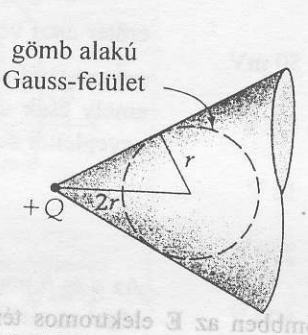
25B-13 A Föld felszíne fölötti elektromos térerősség a felszín felületi töltésének következménye. Az elektromos térerősség a felszín feletti magassággal változhat, mert a levegőben is lehetnek szabad töltések, amelyeken az erővonalak végződhetnek, miként azt a 25-26 ábra illusztrálja. Tételezzük fel, hogy 300 méter magasságban a térerősség 100 N/C és lefelé irányul, és 100 m magasságban 150 N/C és ott is lefelé irányul. a) Gauss törvényének felhasználásával számítsuk ki az átlagos ρ töltéssűrűséget a fenti két magasság közötti tartományban; b) Fejezzük ki a töltéssűrűséget úgy is, hogy megadjuk a többlet- vagy hiányzó elektronok köbméterenkénti számát.



25-26 ábra
A 25B-13. feladathoz.

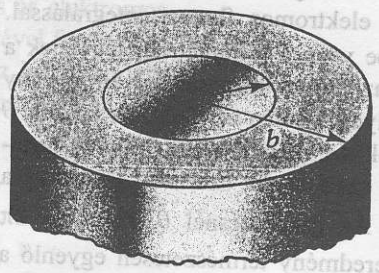
További feladatok

25C-14 Egy $+Q$ töltésből 1200 erővonal indul ki, szimmetrikusan minden irányban. A Gauss-felület egy r sugarú gömb, melynek középpontja a pontszerű töltéstől $2r$ távolságban van (25-27 ábra). a) Hány erővonal halad át ezen a Gauss felületen? (Útmutatás: A D függelékben megtalálható az Ω térszög és egysége, a szteradián definíciója. Egy pont körüli teljes tér 4π szteradián térszögű; egy kúp, melynek nyílásszöge 2θ, $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$ szteradián térszögű.) b) Számítsuk ki a Gauss-felület $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ eredő elektromos fluxusát, figyelembe véve, hogy a belépő erővonalak negatív, a kilépők pedig pozitív fluxust adnak.



25-27 ábra
25C-14. feladathoz.

25C-15 A 25-28 ábrán illusztrált a belső és b külső sugarú, végtelen hosszú cső fala pozitív töltésű. A ρ töltéssűrűség nem egyenletes: a és b között a tengelytől vett távolsággal fordított arányban változik, azaz ha $a \le r \le b$, $\rho = k / r$, ahol k egy SI egységekben megadott konstans. a) Mi a k egysége? b) Számítsuk ki az L hosszúságú csődarab Q töltését. c) Gauss törvényét felhasználva, határozzuk meg az E elektromos térerősséget az r pontban ($a < r < b$).

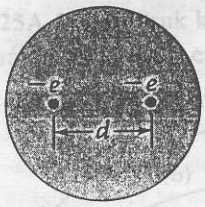


25-28 ábra
A 25C-15. feladathoz.

25C-16 Egy korai (és helytelen) hidrogénatom-modell szerint, amelyet J. J. Thomson javasolt, az atomban a $+e$ pozitív töltés egy R sugarú gömbben egyenletesen van elosztva. Ennek közepén foglal helyet a pontszerű $-e$ töltésű negatív elektron. a) Gauss törvényét alkalmazva, mutassuk meg, hogy az elektron a gömb közepén nyugalmi helyzetet foglal el, és ha a középpontból $r < R$ távolságra kimozdítanánk, $F = -kr$ visszatérítő erő hatna rá. b) Mutassuk meg, hogy $k = e^2 / 4\pi\varepsilon_0 R^3$. c) Határozzuk meg az elektron középpont körüli kis amplitúdójú ($< R$) harmonikus rezgésének f frekvenciáját. d) Számítsuk ki, hogy R milyen értéke esetén kapunk a rezgés frekvenciájára 2,47 10^{15} Hz értéket (ez a hidrogénszínkép legintenzívebb vonalának frekvenciája).

25C-17 A héliumatom Thomson-modellje (lásd az előző feladatot) szerint a $+2e$ pozitív töltés egyenletesen eloszolva egy R sugarú gömböt alkot, melyben a két $-e$

töltésű, pontszerű elektron szimmetrikusan helyezkedik el (25-29 ábra). Mutassuk meg, hogy az elektronok d egyensúlyi távolsága R.



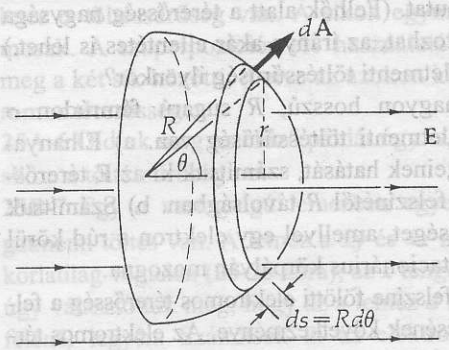
25-29 ábra
A 25C-17. feladathoz.

25C-18 Egy R sugarú gömbben az **E** elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_0. Így, $E = E_0\,\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárirányú egységvektor. a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltéssűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint ha $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, akkor $dg/dx = f(x)$. b) A gömb középpontjával kapcsolatban milyen nehézség adódik?

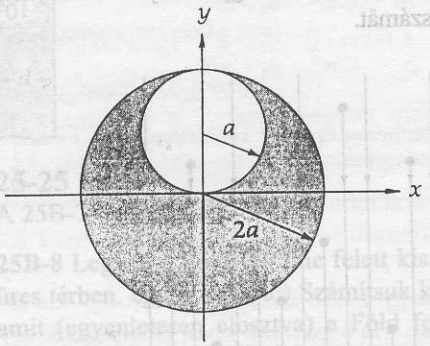
25C-19 Ahogyan a 25-30 ábrán látható, az **E** térerősségű homogén elektromos térbe úgy helyezünk egy R sugarú, sík lappal zárt félgömböt, hogy az erővonalak e sík lapon merőlegesen haladjanak. Számítsuk ki a görbült felületen a Φ_E elektromos fluxust integrálással. Útmutatás: figyelembe véve a szimmetriát, legyenek a $d\mathbf{A}$ elemi felületek az ábrán illusztrált olyan vékony gyűrűk (sávok), amelyek mentén az **E** és $d\mathbf{A}$ közötti θ szög állandó. A sávok dA területe a $2\pi(R \sin\theta)$ hosszuk, és a $ds = Rd\theta$ szélességük szorzata. Ennélfogva $dA = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$. Az összegzésnél θ, zérus és 2π között változik. Az eredmény természetesen egyenlő a sík-lapon átmenő fluxussal, de ellentétes előjelű, azaz $-E(\pi r^2)$. A teljes zárt felületen a fluxus zérus.

25C-20 Szigetelő anyagból készült $2a$ sugarú gömbben az egyenletes térfogatmenti töltéssűrűség ρ. (Tételezzük fel, hogy a gömb anyagának nincs hatása a térerősség nagyságára.) A 25-31 ábrán látható helyen a gömbben a sugarú gömb alakú üreget képezünk. Mutassuk meg, hogy az üregben az elektromos térerősség homogén és nagysága $E_x = 0$ és $E_y = \rho a/3\varepsilon_0$.

(Útmutatás: Az üregben lévő erőtér az eredeti gömb erőterének és az üreg helyén elképzelt $-\rho$ negatív töltéssűrűség erőterének szuperpozíciója. Hasznos lehet az $r\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ vektorösszefüggés is.)



25-30 ábra
A 25C-19. feladathoz.



25-31 ábra
A 25A-1. feladathoz. A gömb alakú üreg középpontja az $y = a/2$ pontban van.

AZ 24–45 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

XXIV. Fejezet

24A-1 649 kg

24A-3 $2{,}27 \times 10^{39}$

24A-5 110 N 157°-ra a +x tengelytől

24B-7 $2{,}51 \times 10^{-10}$

24B-9 $x = 0{,}817$ m

24B-11 9,55 elektront

24A-13 $4{,}90 \times 10^{-3}$ C

24B-15 $y = (qE_o/2mv_o^2)x^2$

24A-17 $1{,}70 \times 10^{-10}$ m

24B-19 $Q/4\pi\varepsilon_o d(d + L)$

24B-21 A válasz adott.

24C-23 A válasz adott.

24C-25 A válasz adott.

24C-27 $W = Q2/8\pi\varepsilon_o R$

24C-29 3,67 cm

24C-31 $2\pi\sqrt{ml/2qE}$

24C-33 $d = \frac{\pi}{2\omega}\left[v_1 + \frac{eE_o}{m\omega\sqrt{2}}\right]l = \frac{3\pi}{2\omega}\left[v_1 + \frac{eE_o\sqrt{2}}{m\omega}\right]$

24C-35 a) $E_y = \lambda L / 4\pi\varepsilon_o a\sqrt{L^2 + a^2}$

b) $E_x = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o)\left[(1/a) - (1/\sqrt{L^2 + a^2})\right]$

24C-37 A válasz adott.

24C-39 A válasz adott.

24C-41 $E = (Q/4\pi^2\varepsilon_o R_2)\sin(l/2R)$, a megmaradó körívtől kifelé irányítva

XXV. Fejezet

25A-1 a) zérus b) $3q/\varepsilon_o$ c) $-2q/\varepsilon_o$

25A-3 $7{,}50 \times 10^{-2}$ N·m²/C

25A-5 a) zérus b) σ/ε_o

25B-7 a) px/ε_o b) $pd/2\varepsilon_o$

25A-9 a) σ/ε_o b) $\sigma/2\varepsilon_o$

25A-11 $-1{,}15 \times 10^{-9}$ C/m²

25B-13 b) $1{,}38 \times 10^7$ elektron/m³ hiány

25C-15 a) C/m² b) $Q = k2\pi L(b - a)$

c) $E = (k/\varepsilon_o)(1 - a/r)$

25C-17 A válasz adott.

25C-19 $E(\pi R^2)$

XXVI. Fejezet

26A-1 a) $2{,}05 \times 10^6$ m/s

b) 12 eV, $1{,}92 \times 10^{-18}$ J c) 3,89 ns

26A-3 a) $2{,}19 \times 10^6$ m/s c) –13,6 eV

26B-5 0,0415 kq/a; a középpontban

26B-7 A válasz adott.

26B-9 1,01 × 10-19 N, 18,4° az x tengelyhez képest

26B-11 $Q_o/2$, $3Q_o/2$

26B-13 A gömb belsejében $E = 0$, $V = -(140/3\pi\varepsilon_o)$ μV

a gömbök közt

$E = (80/4\pi\varepsilon_o r^2)$ $\mu N/C$ befelé,

$V = -(1/4\pi\varepsilon_o)(80/r - 40/0{,}5)$ μV

a gömbökön kívül $E = (40/4\pi\varepsilon_o r^2)$ $\mu N/C$, befelé,

$V = -(40/4\pi\varepsilon_o r)$ μV

26C-15 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o l}\ln\frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}$

26C-17 a) C/m⁴ b) $Q = A\pi R^4$

c) $E = Ar^2/4\varepsilon_o$ d) r ≥ R esetén $V = AR^4/4\varepsilon_o r$

r ≤ R esetén $V = (A/12\varepsilon_o)(4R^3 - r^3)$

26C-19 2000 V

26C-21 A válasz adott.

26C-23 a) $2{,}72 \times 10^{-5}$ m

b) $2{,}65 \times 10^7$ m/s és $6{,}19 \times 10^5$ m/s

c) 2000 eV, $3{,}20 \times 10^{-16}$ J

26C-25 a) $(q / 2\pi\varepsilon_o)\left\{\left[x^2 + (l/2)^2\right]^{-1/2} - 1/x\right\}$

b) $(q / 4\pi\varepsilon_o)\left[(y + l/2)^{-1} + (y - l/2)^{-1} - 2/y\right]$

AZ ELEKTROMOS POTENCIÁL

Egyik elektron azt mondja a másiknak:
Most, hogy együtt vagyunk, elértük legmagasabb potenciálunkat.

26.1 Bevezetés

Az energia fogalma annyira fontos a fizikában, hogy célszerű megvizsgálnunk az elektromos erőterek és töltések közötti kölcsönhatások energiaviszonyait. A mechanikai problémák tárgyalásánál az energiamegmaradás és a munkatétel kínált új lehetőségeket a problémák megoldására: Ahelyett, hogy erőkkel (tehát vektormennyiségekkel) számolnánk, skaláris mennyiségeket: mechanikai energiákat használhatunk. Skalár mennyiségekkel rendszerint sokkal egyszerűbb számolni, mint vektorokkal. A gravitációs és elektromos erők között közeli analógia van: mindkettő a távolság négyzetével fordítottan arányos konzervatív erő, és mindegyik konzervatív erőtérhez hozzátartozik egy *potenciális energia függvény*, amely a kölcsönhatások elemzésekor fontos szerepet játszik.

26.2 Az elektromos potenciál

Tekintsünk egy **E** térerősségű elektromos erőtérbe helyezett q elemi töltést. Ahhoz, hogy az $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ elektromos erő elemi $d\ell$ távolságra mozdítsa el a töltést

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\ell = q_0\mathbf{E} \cdot d\ell \qquad \textbf{(26-1)}$$

munkavégzés szükséges. Definíció szerint, a konzervatív erő által végzett munka ellentétes előjellel egyenlő az elektromos potenciális energia, dU, megváltozásával, vagyis

$$dU = -q_0\mathbf{E} \cdot d\ell \qquad \textbf{(26-2)}$$

Az *a* pontból a véges távolságban lévő *b* pontba történő elmozdításkor tehát az

ELEKTROMOS POTENCIÁLIS ENERGIA, U:

$$U_b - U_a = -\int_a^b q_0\mathbf{E} \cdot d\ell \qquad \textbf{(26-3)}$$

Az energia SI egysége 1 joule (J). Vegyük tekintetbe, hogy a (26-3) egyenlet jobb oldala szintén energia egységekben van megadva, minthogy q_0Edl egysége szintén 1(C)(N/C)(m) = Nm = J. Hasonlóan, mint ahogyan a gravitációs potenciális energia tárgyalásakor tettük, bármely alkalmas pontot választhat-

26-1 TÁBLÁZAT
Elektromos potenciálkülönbségek tipikus értékei

Idegpályán végigfutó impulzusok	50 mV
Ceruzaelem feszültsége	1,5 V
Autoakkumulátor feszültsége	12 V
Háztartási elektromos hálózat feszültsége	220 V
Angolna feszültség-impulzusa	600 V
Országos elektromos hálózat feszültsége	
városokon belül	11 kV
városok között	220 kV
országok között	5×10^5 V
Villámlás során, felhő és föld között	10^8–10^9 V

juk a potenciális energia zéruspontjául, és minden más pont potenciális energiáját ehhez a ponthoz viszonyítva adhatjuk meg.

Erőterek és töltések energiaviszonyainak leírására még alkalmasabb rokon fogalom: a *V elektromos potenciál*. Vegyük észre, hogy az elektromos erőtér által végzett munka, $\int q_0\mathbf{E}\cdot d\ell$ arányos q_0 nagyságával. Hogy a töltés nagyságától való függést megszüntessük, és így olyan mennyiséghez jussunk, amely csak az erőtérre jellemző, a *V* **elektromos potenciált** az alábbi két egyenlettel definiáljuk:

$$dV = \lim_{q_0\to 0}\frac{dU}{q_0} = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad \textbf{(26-4)}$$

Az *a* és *b* pontok közötti véges távolságon a *V* potenciál változását, a feszültséget az alábbi egyenlettel számíthatjuk:

ELEKTROMOS POTENCIÁL *V*

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell \qquad \textbf{(26-5)}$$

Az elektromos potenciál (vagy ahogyan gyakran használják, a potenciál) SI egysége az 1 joule/coulomb = 1 J/C = 1 Volt (V).[1] A $\Delta V = -\int \mathbf{E}\cdot d\ell$ egyenletben szereplő negatív előjel miatt az elektromos erővonalak mindig a *csökkenő* potenciál irányába mutatnak. Fizikai fontossága csak a ΔV potenciálkülönbségnek (feszültségnek) van és így a potenciálskála zéruspontjául bármely alkalmas pont potenciálját választhatjuk. Olyan erőterek esetében, amelyek véges kiterjedésű töltés-eloszlásokból erednek, a potenciálskála zéruspontjául a töltésektől[2] nagyon messze (azaz a végtelenben) lévő pont potenciálját célszerű választani: ha $r\to\infty, V\equiv 0$.

Az elektromos erőterek vizsgálatában, a skaláris potenciál sokkal kényelmesebben használható, mint az elektromos potenciális energia. (Mechanikai rendszereknél éppen fordított a helyezet: a potenciális energia hasznosabb fogalom, mint a potenciál.) A két mennyiség a *q* tényezőben különbözik egymástól:

V és *U* KAPCSOLATA

$$dV = \frac{dU}{q} \qquad \textbf{(26-6)}$$

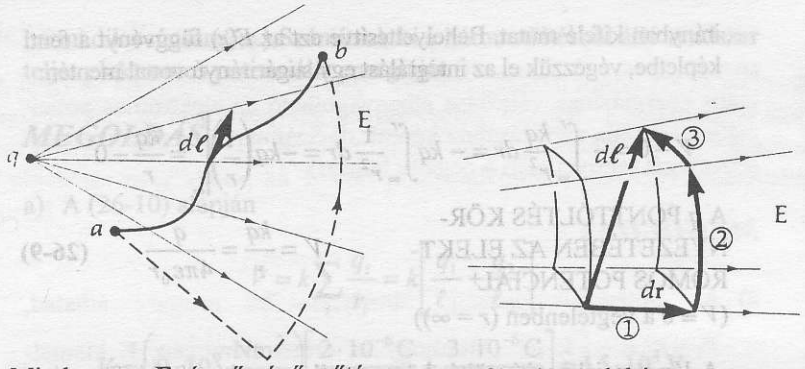
Amikor kiszámítjuk a $-\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell$ integrált, gondoljunk arra, hogy az elektromos erőtér konzervatív, azaz az integrál értéke *független a két pont közötti konkrét úttól*. Emiatt olyan integrációs utat választhatunk, amely mentén a számítás egyszerű. Például, tekintsük egy pontszerű töltés **E** térerősségű sugárirányú erőterét (26-1a ábra) és az *a* és *b* pontok közötti vonal mentén való integrálást. A 26-1b ábrán egy $d\ell$ vonalszakaszt láthatunk, amely az **E** térerősséggel valamilyen szöget zár be. A $d\ell$ vektornak a radiális, a tér irányával megegyező *dr* komponense a tér irányába mutat (① irányú,) míg a két másik komponense[3] a ② és ③ irányban derékszöget zár be az ① iránnyal. Minthogy **E**-nek csak sugárirányú komponense van, az $\mathbf{E}\cdot d\ell$ skalárszorzatban az **r**-re merőleges komponenseket tartalmazó tagok zérusok.

---

[1] Ezt az egységet Alessandro Volta gróf (1745–1827) olasz fizikus emlékére nevezték el. Volta alkotta meg az első galvánelemet, ami az első gyakorlatban alkalmazható eszköz volt egyenáramok keltésére. Korábban a fizikusok az elektromosság jelenségeit csak szikrákon vagy villámokon tanulmányozhatták.

[2] Amikor egy későbbi fejezetben az elektromos áramköröket tárgyaljuk, az áramkör bizonyos pontját zérus potenciálúnak tekintjük, és ezt a pontot gyakran „földeljük", tehát olyan fémvezetékhez csatlakoztatjuk, ami a földdel jó elektromos kontaktusban van. Műszerek, háztartási berendezések esetében a háromeres csatlakozó kábel egyik ere biztosítja a berendezés fémházának földelését.

[3] Gömbi polárkoordinátarendszerben ezek lennének a $\hat{\theta}$ illetve $\hat{\phi}$ irányok.



a) Minthogy az **E** térerősségű erőtér konzervatív erőtér, a $\Delta V = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell$ potenciálkülönbség azonos, akár a folytonos, akár a szaggatott vonal mentén végezzük el az integrálást.

b) A $d\ell$ vektornak három, egymásra kölcsönösen merőleges komponense van: ①, ② és ③

26-1 ábra
Potenciálkülönbség számítása q pontszerű töltés elektromos erőterében

Ezért a számítás akkor a legegyszerűbb, ha a 26-1a ábrán szaggatott vonallal jelölt út mentén integrálunk. Az $\int \mathbf{E}\cdot d\ell$ integrál az **E** térerősségre merőleges szakaszon zérus (mert cos 90° = 0); így csak a sugárirányú szakasz marad, amelyre

E térerősségű sugárirányú erőterekre

$$\int \mathbf{E}\cdot d\ell \Rightarrow \int E_r\, dr \quad \left[\begin{array}{c}\text{ahol } E_r \text{ pozitív, ha E}\\ \text{sugárirányban kifelé mutat}\end{array}\right] \qquad (26\text{-}7)$$

A továbbiakban mindig azokat az utakat keressük meg, amelyek mentén könnyű az integrálást elvégezni: vagy az erővonalak mentén, vagy azokra merőlegesen. Olyan erőterek esetében, amelyeknek az erővonalai például az x tengellyel párhuzamosak, integrálással a következőt kapjuk:

Párhuzamos erővonalú E térerősségű terekre

$$\int \mathbf{E}\cdot d\ell \Rightarrow \int E_x\, dx \qquad (26\text{-}8)$$

Ezekből az összefüggésekből látszik, hogy az elektromos térerősség dimenziója megadható, mint potenciálkülönbség/távolság. Egysége Volt/méter, melyet gyakrabban használnak, mint a 24. fejezetben bevezetett (de ezzel ekvivalens) newton/coulomb egységet.

26-1 PÉLDA

a) Számítsuk ki a V elektromos potenciált egy q pontszerű töltés környezetében, ha $r \to \infty$ távolságban $V \equiv 0$. b) Számítsuk ki egymástól r távolságra lévő két pontszerű töltésből (q_1 és q_2) álló rendszer U elektromos potenciális energiáját.

MEGOLDÁS

a) A (26-5) egyenlet szerint

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell$$

A $V \equiv 0$ potenciálú a pont a végtelenben van, a b pont pedig a pontszerű töltéstől valamilyen távolságban helyezkedik el. A pontszerű töltés elektromos térerőssége $E = kq/r^2$ nagyságú és sugár-

irányban kifelé mutat. Behelyettesítve ezt az $E(r)$ függvényt a fenti képletbe, végezzük el az integrálást egy sugárirányú vonal mentén:

$$V - 0 = -\int_{\infty}^{r} \frac{kq}{r^2}\,dr = -kq\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}\,dr = -kq\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{kq}{r} - 0$$

A q PONTTÖLTÉS KÖRNYEZETÉBEN AZ ELEKTROMOS POTENCIÁL ($V \equiv 0$ a végtelenben ($r = \infty$))

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \textbf{(26-9)}$$

A V potenciál pozitív töltés környezetében pozitív, és $1/r$ függvény szerint tart zérushoz a végtelenben. A szuperpozíció elvét felhasználva, ezt az eredményt általánosíthatjuk több töltés esetére is:

AZ ELEKTROMOS POTENCIÁL TÖBB PONTSZERŰ TÖLTÉS KÖRNYEZETÉBEN LÉVŐ PONTBAN

$$V = k\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \textbf{(26-10)}$$

Minthogy a potenciál skaláris mennyiség, a képlet szerint egyszerű algebrai összegezést kell elvégezni. Így, a V potenciált egyszerűbb kiszámítani, mint az **E** térerősséget.

b) Az egymástól r távolságra lévő két pontszerű töltés potenciális energiájának kiszámításához felhasználjuk azt, hogy egy q töltést a végtelenből (ahol $V = 0$) qV munkavégzés befektetésével vihetünk a V potenciálú helyre. Ennélfogva a q_2 töltést a végtelenből a q_1 töltéstől r távolságra lévő V potenciálú pontba U munkavégzés árán vihetjük:

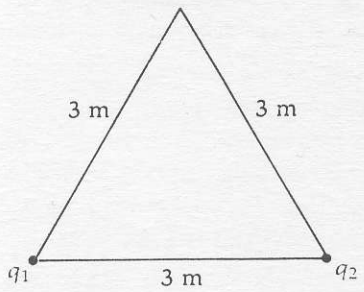
KÉT, EGYMÁSTÓL r TÁVOLSÁGRA LÉVŐ TÖLTÉS U ELEKTROMOS POTENCIÁLIS ENERGIÁJA

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \textbf{(26-11)}$$

Ezt a képletet pontszerű töltésekből álló töltésrendszerek esetére úgy általánosíthatjuk, hogy a rendszert töltésenként építjük fel: a rendszer teljes U potenciális energiája egyes töltéspárok potenciális energiájának összege. Például, három töltésből álló rendszer teljes potenciális energiája

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} \qquad \textbf{(26-12)}$$

Ponttöltésekből álló rendszer teljes U elektromos potenciális energiája azzal a munkával egyenlő, ami ahhoz szükséges, hogy az egyes töltéseket a végtelenből a rendszerben elfoglalt helyükre vigye.



26-2 ábra
A 26-2 példához.

26-2 PÉLDA

Két pontszerű töltés, ($q_1 = 2\,\mu\text{C}$ és $q_2 = 3\,\mu\text{C}$) 3 méter oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög két csúcsán helyezkedik el (26-2 ábra). a) Számítsuk ki a V potenciált a háromszög harmadik csúcsában ($V \equiv 0$ a végtelenben). b) Mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy a végtelenből $q_3 = 4\mu\text{C}$ töltést vigyünk a háromszög

harmadik csúcsára? c.) Számítsuk ki a három töltésből álló rendszer teljes elektromos potenciális energiáját.

MEGOLDÁS

a) A (26-10) alapján

$$V = k\sum_i \frac{q_i}{r_i} = k\left[\frac{q_1}{\ell_1} + \frac{q_2}{\ell_2}\right]$$

$$V = \left(9\cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\right)\left[\frac{2\cdot 10^{-6}\,\text{C}}{3\,\text{m}} + \frac{3\cdot 10^{-6}\,\text{C}}{3\,\text{m}}\right] = 1{,}5\cdot 10^4\,\text{V}$$

b) A munka, ami ahhoz szükséges, hogy a q_3 töltést a végtelenből a V potenciálú helyre vigyük:

$$W = q_3 V = (4\cdot 10^{-6}\,\text{C})(1{,}5\cdot 10^4\,\text{V}) = 6{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{J}$$

c) A három töltésből álló rendszer U teljes potenciális energiája az alábbi módon számítható:

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}}$$

$$U = \left(9\cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\right)\left[\frac{(2\cdot 10^{-6}\,\text{C})(3\cdot 10^{-6}\,\text{C})}{3\,\text{m}} + \right.$$

$$+ \frac{(3\cdot 10^{-6}\,\text{C})(4\cdot 10^{-6}\,\text{C})}{3\,\text{m}}$$

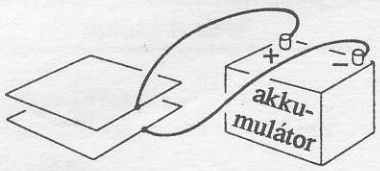
$$\left. + \frac{(2\cdot 10^{-6}\,\text{C})(4\cdot 10^{-6}\,\text{C})}{3\,\text{m}}\right]$$

$$U = \left(\frac{9\cdot 10^9}{3}\right)(6+12+8)\cdot 10^{-12} = 7{,}8\cdot 10^{-2}\,\text{J}$$

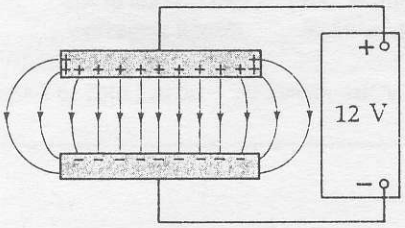
Az elem és az akkumulátor olyan feszültségforrás, melynek elektromos potenciálkülönbségét a belsejében lezajló kémiai reakció hozza létre. Vegyünk egy 12 voltos autóakkumulátort. Egy pozitív és egy negatív pólusa van. A „12 V" azt jelenti, hogy ekkora a pólusok közötti potenciálkülönbség (a pozitív pólus potenciálja a nagyobb). Ha a pólusokat egymással párhuzamos, egymástól d távolságra lévő fémlemezekhez csatlakoztatjuk, az akkumulátorból mindaddig töltések áramlanak a lemezekre, amíg a lemezek közötti potenciálkülönbség is 12 V nem lesz. Ezek a töltések a lemezek belső felületén helyezkednek el és így a lemezek között elektromos erőtér alakul ki (26-3 ábra). Ha a lemezek közötti d távolság kicsiny a lemezek méreteihez képest, az erőtér a lemezek közepe táján homogén. (Első közelítésben elhanyagoljuk a lemezek széle táján az erőtér inhomogenitását.) A következő példában ezt az elrendezést vizsgáljuk, hogy jobban megértsük E és V kapcsolatát.

26-3 PÉLDA

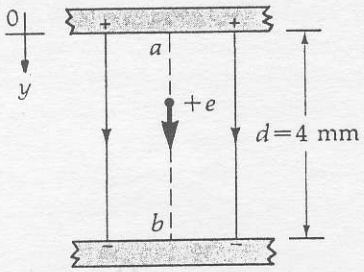
A 26-3c ábrán egy 12 V-os akkumulátor két, egymástól 4 mm-re lévő nagy, párhuzamos fémlemezhez csatlakozik. a) Számítsuk ki a lemezek közötti elektromos térerősséget. b) A felső lemeznél elengedünk egy addig nyugalomban lévő protont, amelyik a tér hatására a szaggatott vonal mentén gyorsul a negatív lemez felé. Számít-



a) A két párhuzamos fémlemezhez csatlakoztatott akkumulátor, az egyik lemezről töltéseket visz át a másikra, mindaddig, amíg a lemezek közötti potenciálkülönbség el nem éri az akkumulátor pólusai közötti feszültséget.



b) A fenti áramkör sémája. A legtöbb töltés a lemezek belső felületén helyezkedik el, és olyan elektromos erőteret hoz létre, amely a lemezek közepe táján homogénnek tekinthető, a szélek környezetében inhomogén. Ha a lemezek sokkal nagyobbak, mint a közöttük lévő távolság, a széleknél lévő inhomogenitást figyelmen kívül hagyhatjuk.



c) A homogén elektromos erőtér $F = eE$ erőt gyakorol a protonra, és lefelé gyorsítja. (Ez az erő sokkal nagyobb, mint a gravitációs erő, amit elhanyagolhatunk.)

26-3 ábra
A 26-3 példához. Párhuzamos fémlemezekhez csatlakoztatott akkumulátor elektromos erőteret hoz létre a lemezek között.

suk ki a proton elektromos potenciális energiájának változását a mozgás során. c) Mutassuk meg, hogy a proton gravitációs potenciális energiájának változása elhanyagolható az elektromos potenciális energiája változásához képest. d) Számítsuk ki a proton végsebességét (amivel eléri a negatív lemezt).

MEGOLDÁS

a) A potenciálkülönbség, amelyen a proton áthalad, $V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\ell$. Minthogy az erőtér homogén, **E** kiemelhető az integráljel elé, és így a

$$V_b - V_a = -E\int_a^b dx = -Ed$$

egyenlethez jutunk.
Az **E** térerősség nagyságára adódik, hogy:

$$|E| = \frac{|V_b - V_a|}{d} = \frac{12\,\text{V}}{4\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 3000\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) A proton potenciális energiájának ΔU változása a (26-4) szerint:

$$\Delta U = q\Delta V = (1{,}67\cdot 10^{-19}\,\text{C})(-12\,\text{V}) = -1{,}92\cdot 10^{-18}\,\text{J}$$

c) A proton gravitációs potenciális energiájának megváltozása, mialatt 4 mm-rel lejjebb kerül:

$$\Delta U_g = mgh = (1{,}67\cdot 10^{-27}\,\text{kg})(9{,}8\text{m}/\text{s}^2)(-4\cdot 10^{-3}\,\text{m})$$

$$\Delta U_g = -6{,}55\cdot 10^{-29}\,\text{J}$$

Ez kb. 30 milliárdszor kisebb változás, mint ami az elektromos potenciális energiában történt. Amikor töltött elemi részecskék elektromos térben történő mozgását vizsgáljuk, majdnem mindig elhanyagolhatjuk a gravitáció hatását.

d) A munkatétel szerint, az elektromos tér által végzett $q\Delta V$ munka megegyezik a kinetikus energia változásával:

$$q\Delta V = \Delta K$$

$$e\Delta V = 1/2(mv^2) - 0$$

Innen

$$v = \sqrt{\frac{2e(\Delta V)}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}60\cdot 10^{-19}\,\text{C})(12\,\text{V})}{1{,}67\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}}$$

$$v = 4{,}8\cdot 10^4\ \text{m/s}$$

Másik módszer: Newton második törvénye szerint $\Sigma F = ma$, tehát a proton gyorsulása $a = F/m = eE/m$. Ezt az értéket a mozgásegyenletbe helyettesítve:

$$v^2 = v_0^2 + 2ay$$

$$v^2 = 0 + 2\left(\frac{eE}{m}\right)d$$

Ezt az egyenletet megoldva:

$$v = \sqrt{\frac{2eEd}{m}} = \sqrt{\frac{2e(\Delta V)}{m}} = 4{,}80\cdot 10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Elektronvolt

Az, hogy az elektron töltése (mint paraméter) gyakran fordul elő az atom- és magfizikában, új energiaegység bevezetéséhez vezetett. 1 elektronvolt (eV) az az energia, amelyet egy, az elektronéval megegyező töltéssel (e) rendelkező objektum nyer akkor, ha 1 Volt potenciálkülönbségen keresztülhaladva gyorsul.

$$\Delta W = e\Delta V$$

$$1eV = (1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C})(1\,\text{J/C})$$

ELEKTRONVOLT (energiaegység)

$$1\ \text{eV} = 1{,}602\ 10^{-19}\ \text{J} \qquad \textbf{(26-13)}$$

Az előző (26-3) példát oldjuk meg úgy is, hogy a proton helyett alfarészecske (hélium atommag) gyorsul a negatív lemez felé. Minthogy az alfarészecske töltése +2e, 12 V potenciálkülönbségen keresztül való gyorsulás után energiája (2e)(12 V) = 24 eV lenne, pontosan duplája az egy pozitív töltésű protonénak. SI egységre való átszámításkor az alábbi átszámítási tényezőt használjuk:

$$24\ \text{eV}\underbrace{\left(\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1\,\text{eV}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 3{,}84 \cdot 10^{-18}\,\text{J} \qquad \textbf{(26-14)}$$

Az *elektronvolt* olyan energiaegység, amit gyakran használunk, nem elektromos eredetű energiák nagyságának jellemzésére is. Például, szokás úgy megadni a levegő molekuláinak energiáját, hogy szobahőmérsékleten kb. 1/40 eV átlagos energiája van egy molekulának.

26-4 PÉLDA

Számítsuk ki a V potenciált egy homogén pozitív ρ töltéssűrűségű R sugarú gömbön belül és kívül, felhasználva a 25-5 példa megoldásánál az E térerősségre kapott képletet. Fejezzük ki az eredményt, a gömb teljes töltése, Q függvényében, ahol $Q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$. (Legyen $V \equiv 0$ a végtelenben.)

MEGOLDÁS

A 25-5 példában az **E** térerősségre az alábbi kifejezéseket vezettük le:

A gömb belsejében (r < R)

$$E_{bent} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r$$

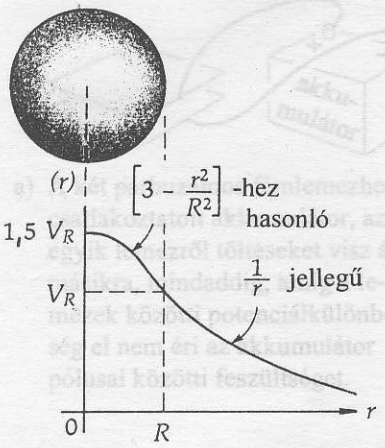
A gömbön kívül (r > R)

$$E_{kint} = \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$$

A GÖMBÖN KÍVÜL:($r > R$) A potenciál értékét a végtelenben zérusnak választottuk. Így végtelen és r között integrálunk. Erre a radiális térre a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$V_{kint} - 0 = -\int_\infty^r \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}dr = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_\infty^r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



26-4 ábra
A 26-4 példához. A V potenciál r-függése, ha egy R sugarú gömbben a térfogati töltéssűrűség egyenletes, V maximuma a gömb középpontjában van (noha ott $E = 0$). A gömbön kívül a potenciál ugyanakkora, mint ha a teljes Q töltés a középpontban pontszerű töltésként lenne jelen.

A gömbön kívül a potenciál akkora, mintha Q pontszerű töltés lenne a gömb középpontjában.

A GÖMB BELSEJÉBEN ($r < R$): A fenti eredmény szerint, a gömb felszínén ($r = R$) a potenciál $V = Q/4\pi\varepsilon_0 R$. A gömb belsejében, az r helyen a potenciált integrálással kaphatjuk meg:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

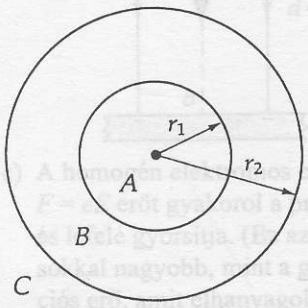
$$V_{bent} - V_r = -\int_R^r \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r\,dr = -\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_R^r$$

$$V_{bent} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_R^r + V_r$$

$$V_{bent} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r^2 - R^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

Ezt a $V(r)$ potenciálfüggést a 26-4 ábrán szemléltetjük.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az $r = R$ helyen a két görbe simán megy át egymásba. Ha $r > R$, V $1/r$ szerint változik; ha $r < R$, $V(r)$ parabola alakú, azaz $V(r)$ = konstans $-r^2$. Noha az elektromos térerősség a középpontban zérus, a V potenciálnak éppen ott van maximuma. Ez ésszerűen hangzik, figyelembe véve hogy a potenciál változása azzal a munkával arányos, amit akkor végeznénk, ha a q_0 tetszőleges pozitív töltést a végtelenből (ahol $V \equiv 0$) hoznánk a gömb felszínére. Ekkor ugyanis mindig pozitív munkát végeznénk a taszító Coulomb erő ellenében. Még a gömb belsejében is taszítóerő ellenében kell munkát végeznünk (noha ennek nagysága a középpont felé egyenletesen közelít zérushoz), tehát, ahogy a q_0 töltést a középponthoz közelítjük, további pozitív munkát kell végezni, vagyis V értéke pozitív irányban tovább nő. Érdemes összehasonlítani ezt az eredményt a 16-14 ábrán illusztrált analóg eset eredményével (az m tömegpont gravitációs potenciális energiája homogén tömegeloszlású Föld közelében).



26-5 ábra
A 26-5 példához. Két különböző töltésű vékony koncentrikusan elhelyezkedő vezető gömbhéj. A belső gömbhéjon +10 nC, a külsőn –15 nC töltés van.

26-5 példa

Tekintsünk két koncentrikus vékony, vezető gömbhéjat (26-5 ábra). Legyen a belső gömb sugara r_1 = 15 cm, töltése +10 nC (nC a nanocoulomb rövidítése, 1 nC = 10^{-9} C). A külső gömb sugara r_2 = 30 cm, töltése –15 nC. Feltételezve hogy $V \equiv 0$ ha $r \to \infty$, számítsuk ki a) az E elektromos térerősséget; és b) a V elektromos potenciált az alábbi tartományokban:

A tartomány: a belső gömbhéjon belül ($r < r_1$)

B tartomány: a két gömbhéj között ($r_1 < r < r_2$)

C tartomány: a külső gömbhéjon kívül ($r > r_2$)

MEGOLDÁS

A rendszer geometriai szimmetriája miatt a töltések a gömbökön egyenletesen oszlanak el. A szimmetria miatt célszerű először

Gauss törvényének alkalmazásával a térerősséget, majd a V és E közötti összefüggést kifejező (26-5) formula segítségével a potenciált kiszámítani. Az egyes tartományokban ezeket a mennyiségeket külön külön határozzuk meg. A térerősséggel kezdjük.

a) *Az E elektromos térerősség kiszámítása:*

A. tartomány: a belső gömbhéjon belül: Felhasználva a rendszer szimmetriáját, Gauss-felület gyanánt koncentrikus gömböket választunk, majd alkalmazzuk a Gauss törvényt: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$. Akármekkora is **E** nagysága a Gauss felület valamely pontján, szimmetriaokokból ugyanakkorának kell lennie a felület többi pontján is. Minthogy a Gauss-felület belsejében nincs töltés, arra következtethetünk, hogy a térerősség a felület minden pontján zérus. Továbbá, minthogy ilyen Gauss-felületet tetszőleges sugárral szerkeszthetünk (feltéve hogy $0<r<r_1$), az *E térerősség a belső gömbhéj belsejében mindenütt zérus.*

$$E_A = 0 \qquad \text{(a belső gömbhéj belsejében)}$$

B. tartomány: a két gömbhéj között. Szimmetriaokokból ismét célszerű olyan Gauss-felületet választanunk amely r sugarú ($r_1 < r < r_2$) koncentrikus gömb. Ismerjük fel, hogy a probléma nagyon hasonlít a 25-7 példában leírthoz, melynek eredménye

$$E_B = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q}{r^2} \qquad \text{(sugárirányban kifelé mutat, ha } r_1 < r < r_2\text{)}$$

Figyelembe véve, hogy $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$, kiszámíthatjuk a térerősséget az r_1 sugarú belső gömbhéj külső felszínének közvetlen környezetében.

$$E_{r1} = \left(9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\frac{10\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}15\ \mathrm{m})^2} = 4000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(a belső gömbhéj külső felszínének közvetlen közelében)

Ez a térerősség $1/r^2$ szerint csökken, egészen a külső gömbhéj belső felszínéig, ahol a nagysága

$$E_{r2} = \left(9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\frac{10\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}30\ \mathrm{m})^2} = 1000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(a külső gömbhéj belső felszínének közvetlen közelében)

C. tartomány: a külső gömbhéjon kívül. Gauss felület gyanánt ismét r sugarú ($r > r_2$) koncentrikus gömböt választunk, és a Gauss törvényt ($\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$) alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy a felületen belül lévő eredő töltés q. Az eredő töltés $q = q_1 + q_2$, vagyis (10 nC) + (–15 nC)= (–5 nC). A térerősség tehát

$$E_C = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q}{r^2}$$

(sugárirányban befelé mutat, ha $r > r_2$, mert q negatív)

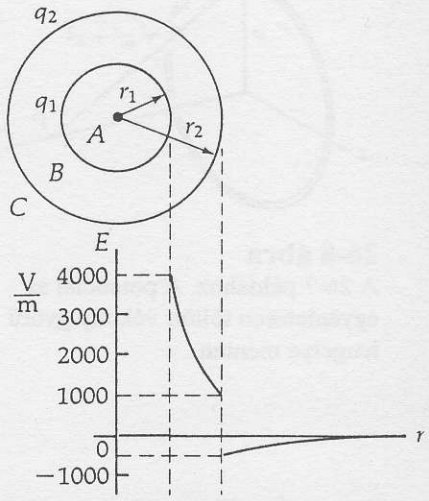
A térerősség nagysága a külső gömbhéj külső felülete közvetlen környezetében ($r = r_2$)

$$E_{r2} = \left(9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\frac{-5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}30\ \mathrm{m})^2} = -500\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

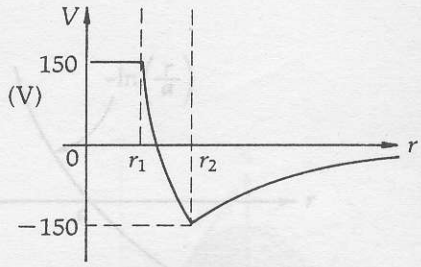
(a külső gömbhéj külső felszínének közvetlen közelében)

A negatív előjel jelzi, hogy a térerősség befelé mutat (a $-r$ irányban). Nagysága $1/r^2$ -tel változik, és zérushoz tart, ahogy $r \to \infty$.

Figyeljük meg, hogy a térerősség a távolságnak nem folytonos függvénye. Amint az egyre nagyobbnak választott Gauss-felületet túllépi a következő gömbhéjat, és magába zárja

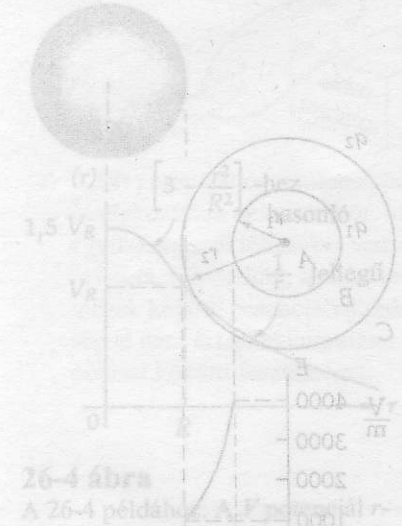


a) Az **E** elektromos térerősség pozitív, ha sugárirányban kifelé mutat; negatívak a sugárirányban befelé mutató térerősségek. Az ábrán a görbült szakaszok $1/r^2$ függvények. A térerősség nem folytonos függvény, ugyanis amikor a Gauss-felület folyamatos növelése közben az a gömbhéjakat átlépi és magába zárja a gömbhéjak töltését, akkor **E** hirtelen új értéket vesz fel.



b) A V elektromos potenciál $1/r$ szerint változik. V folytonos, ugyanis az $\int \mathbf{E} \cdot d\ell$ úgy is felfogható, mint az $E(r)$ függvénygörbe alatti terület. A szakadásos függvény integrálásakor a diszkontinuitásnál az összeg nem ugrásszerűen változik.

26-6 ábra
A 26-5 példához. Két különböző töltésű, koncentrikus, vezető gömbhéj.



a gömbhéj töltését, akkor **E** hirtelen megváltozik, tehát nem folytonos (legalábbis ebben az idealizált esetben, amikor feltételeztük, hogy a pontszerű töltésekből álló rétegnek zérus a vastagsága). A diszkontinuitásokat mindkét oldalról megközelítve megtudhatjuk, hogy mekkora ott a térerősségugrás. A 26-6 ábrán vázoltuk a térerősséget és a potenciált r függvényében.

b) *A V elektromos potenciál kiszámítása.*

Mivel az **E** térerősséget mindenütt ismerjük, a

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

összefüggést fogjuk alkalmazni a potenciál változásának kiszámítására. A zérus referencia pont $V \equiv 0$ ha $r = \infty$. Így $r = \infty$ értéktől kezdve haladunk befelé a gömb középpontjáig kiszámítva a potenciál változását.

C. tartomány: a külső gömbhéjon kívül. A töltéseloszlás gömbszimmetriája miatt mind a térerősség, mind a potenciál olyan, mintha a q eredő töltés ($q = q_1 + q_2$) a középpontban lenne koncentrálva. Befelé integrálva ∞-től r-ig (azaz a gömbökön kívül) azt kapjuk, hogy

$$V_r - 0 = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_\infty^r = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q}{r} \qquad \text{(C tartományban } r \geq r_2\text{)}$$

Minthogy az eredő töltés $q = -5$ nC, a potenciál számértéke $r = r_2$-nél:

$$V_{r_2} = \left(9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right)\frac{-5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = -150\ \mathrm{V} \qquad (\text{ha } r = r_2)$$

B. tartomány: a két gömbhéj között. A potenciál változása r_2 és r között (ha $r_1 \leq r \leq r_2$):

$$V_r - V_{r_2} = -\int_{r_2}^r \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

E nagyságát, a Gauss törvény szerint, kizárólag a belső gömbön lévő q_1 töltés szabja meg. A térerősséget r_2-től r-ig integrálva azt kapjuk, hogy

$$V_r - V_{r_2} = -\int_{r_2}^r \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Minthogy $V_{r_2} = -150$ V, a potenciált a B tartományban az alábbi képlet adja meg:

$$V_B = (-150\ \mathrm{V}) + \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right] \qquad \text{(B tartományban } r_1 \leq r \leq r_2\text{)}$$

A potenciál számértéke a belső gömbhéjnál:

$$V_{r_1} = (-150\ \mathrm{V}) + \left(9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right)(10\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C})\left[\frac{1}{0{,}15\ \mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}30\ \mathrm{m}}\right]$$

$$V_{r_1} = -150\ \mathrm{V} + 300\ \mathrm{V} = 150\ \mathrm{V}$$

Noha az **E** térerősség nem folytonos a gömbhéjakon (ahol a töltések vannak), a V potenciál mindenütt folytonos függvény. Ez az állítás kézenfekvő, ha figyelembe vesszük, hogy az $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ integrálást úgy is értelmezhetjük, mint az $E(r)$ függ-

vény görbe alatti területének összegzéssel történt kiszámítását (26-6a ábra). A szakadásos függvény integrálásakor a diszkontinuitásnál csak az összeg növekedésének *üteme* változik ugrásszerűen, s nem maga az összeg.

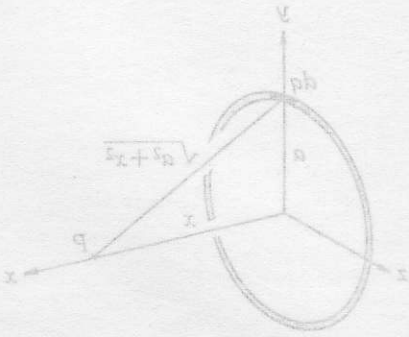
A. tartomány: a belső gömbhéjon belül. Ismét ugyanazzal az általános képlettel indulunk el:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\ell$$

Azonban ebben a tartományban **E** mindenütt zérus, tehát befelé haladva a potenciál nem változik. Vagyis, a potenciál mindenütt, ahol $r \le r_1$, azonos, és numerikus értéke

$$V_A = 150\ \text{V} \qquad (\text{A tartományban } 0 \le r \le r_2)$$

A 26-6b ábrán a $V(r)$ elektromos potenciál látható r függvényében ábrázolva mindhárom tartományban. Figyeljük meg, hogy noha a belső gömb belsejében az **E** térerősség mindenütt zérus, a V potenciál értéke véges pozitív és állandó.



26-6 PÉLDA

Tekintsünk egy végtelen hosszúságú egyenes mentén elhelyezkedő töltést, melynek (töltés/hosszúság egységben megadott) töltéssűrűsége λ. Számítsuk ki az ettől a vonaltöltéstől származó V potenciált.

MEGOLDÁS

A potenciáleloszlást az 25-1 példában kiszámított **E** térerősségeloszlás felhasználásával adjuk meg:

λ egyenletes vonalmenti töltéssűrűség esetén

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(sugárirányban kifelé mutat)} \qquad \textbf{(26-15)}$$

A potenciálkülönbségeket az alábbi módon számítjuk:

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

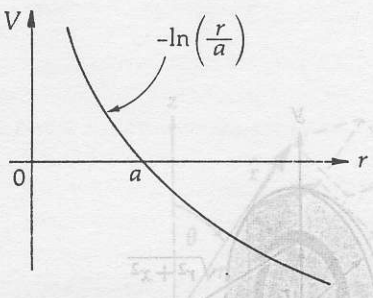
Az **E** térerősség fenti kifejezését behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_2 - \ln r_1) \qquad \textbf{(26-16)}$$

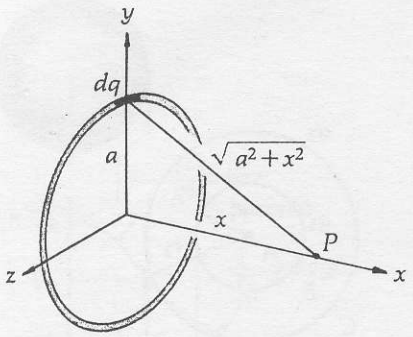
Itt most váratlan, előre nem látott problémával kerülünk szembe: a potenciál nem lehet zérus sem a végtelenben, sem az $r = 0$ helyen, ugyanis ha a logaritmus argumentumában végtelen, vagy 0 állna, a függvényérték + vagy – végtelen lenne. Így hát referenciapontul olyan, $r = a$ véges távolságban lévő pontot választunk, ahol $V \equiv 0$, ha $r = a$. Ilyen választás esetén a V potenciál a vonaltöltéstől r távolságban:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r - \ln a) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right) \qquad \text{(ahol } V \equiv 0 \text{ ha } r = a\text{)} \qquad \textbf{(26-17)}$$

Ezt az eredményt a 26-7 ábrán szemléltetjük.



26-7 ábra
A 26-6 példához. Végtelen hosszú egyenes mentén egyenletesen elhelyezkedő vonalmenti töltés V elektromos potenciálja. $V \equiv 0$, ha $r = a$.



26-8 ábra
A 26-7 példához. A potenciál az egyenletesen töltött vékony gyűrű tengelye mentén.

26-7 PÉLDA

Az *yz* síkban lévő, vékony, *a* sugarú gyűrű mentén $+Q$ töltés oszlik el egyenletesen. Számítsuk ki a potenciált a gyűrű tengelye mentén, a középponttól *x* távolságra lévő *P* pontban (26-8 ábra). Legyen $V \equiv 0$ az $x = \infty$ helyen.

MEGOLDÁS

Ahelyett, hogy a $\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot d\ell$ vektorintegrált határoznánk meg, gyakorta sokkal célszerűbb a $dV = kdq/r$ összefüggés alapján a skalárintegrált kiszámítani. Ezzel a példával ezt a megoldási módszert illusztráljuk. A fennálló szimmetria miatt a gyűrű mentén minden egyes $dq = \lambda\, ds$ töltéselem azonos $\sqrt{a^2+x^2}$ távolságra van a *P* ponttól. Felhasználva a (26-10) összefüggés integrálalakját, azt kapjuk, hogy

$$V = k\int \frac{dq}{r} = k \underbrace{\oint}_{\text{A teljes gyűrűre}} \frac{\lambda\, ds}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2+x^2}} \underbrace{\oint \lambda ds}_{Q} = \frac{kQ}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}$$

26-8 PÉLDA

Számítsuk ki a *V* elektromos potenciált egy *a* sugarú korong tengelye mentén, amelynek egyik körlapján a (töltés/felület egységben megadott) egyenletes felületmenti töltéssűrűség σ.

MEGOLDÁS

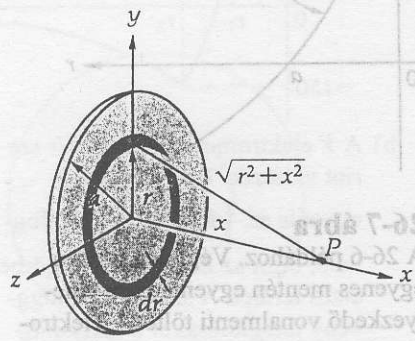
A 26-9 ábrán illusztráltak szerint, legyen *x* a körlap középpontja és a tengelyen lévő *P* pont közötti távolság. Osszuk a körlapot *r* sugarú és *dr* szélességű töltött körgyűrűk sorozatára; használjuk fel az előző példa eredményét a körgyűrű töltése által létrehozott *dV* potenciál kiszámítására; összegezzük ezeket a potenciálokat, hogy a teljes körlap töltése által létrehozott potenciált megkapjuk. Egy *r* sugarú, *dr* szélességű gyűrű területe $dA = 2\pi r dr$ és ezen $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ töltés van. Így, a *P* pontban ez a gyűrű *dV* potenciált hoz létre, melynek nagysága:

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

Most az összes gyűrű potenciálját összegeznünk kell $r = 0$ és $r = a$ határok között. Felhasználva a G–II. függelék 19. képletét, azt kapjuk, hogy

$$V = \int_0^a \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = k\sigma 2\pi \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = k\sigma 2\pi \left[\sqrt{r^2+x^2}\right]_0^a$$

$$V = k\sigma 2\pi\left[\sqrt{a^2+x^2} - x\right].$$



26-9 ábra
A 26-8 példához. Egyenletes töltéseloszlású körlap.

26.3 A V potenciál gradiense

Még akkor is, ha az elektromos erőtér nem homogén – vagyis ha a térerősség mindhárom koordináta szerint változik – kapcsolatot találhatunk V és $\mathbf{E}$ között. Ha a térerősségnek csak egy komponense van, E_x, akkor

$$dV = -\mathbf{E}_x \cdot d\mathbf{x} \tag{26-18}$$

ahonnan

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \tag{26-19}$$

Azonban, ha V és $\mathbf{E}$ három változó: x, y és z függvénye, három deriváltat kell kiszámítanunk: az x szerinti deriváltat (amelynek kiszámítása során az y és z változókat nem változtatjuk); az y szerinti deriváltat (amelynek kiszámítása során az x és z változókat nem változtatjuk); és végezetül a z szerinti deriváltat (amelynek kiszámítása során az x és y változókat nem változtatjuk). Ennek az eljárásnak rövid matematikai jelölése: az x szerinti parciális deriválást jelentő a $\partial V/\partial x$ szimbólum. Ez azt jelenti, hogy „Számítsuk ki V x szerinti deriváltját, mialatt az összes többi változót állandó értéken tartjuk". Így a (26-19) egyenletet három dimenziós esetben az alábbi módon kell alkalmazni:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{26-20}$$

Az eljárást a következő példával illusztráljuk. Tekintsünk egy olyan potenciálteret, ahol $V = ax^2y$; a = konstans. A parciális deriváltak a következők:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2axy \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ax^2 \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

A teljes $\mathbf{E}$ térerősség:

$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}} = -2axy\hat{\mathbf{x}} - ax^2\hat{\mathbf{y}}$$

Az általános jelölésmódot alkalmazva $\mathbf{E}$ és V kapcsolatát az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \tag{26-21}$$

A zárójelben lévő kifejezést V **gradiensének** nevezzük. A gradiens olyan vektor, amely abba az irányba mutat, amerre a potenciál változása a legnagyobb, azaz az ekvipotenciális felületre merőleges és az $\mathbf{E}$ térerősség irányába esik. Az elektromos térerősség tehát a potenciáltér negatív gradiense. A gradienst ∇ szimbólummal (nabla vagy grad) jelöljük.

V GRADIENSE (derékszögű koordinátarendszerben)

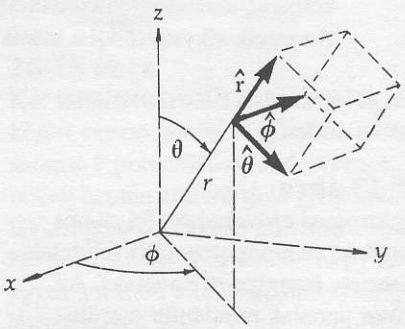
$$\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \tag{26-22}$$

Gömbi koordinátarendszerben (26-10 ábra) három, egymásra kölcsönösen merőleges $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ és $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ egységvektorokat definiálunk. Bizonyítás nélkül közöljük a gömbi koordinátarendszerben alkalmazandó gradiens-kifejezést:

V GRADIENSE (gömbi koordinátarendszerben)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{26-23}$$

Ezt a jelölésmódot alkalmazva, a képlet általános alakja:



26-10 ábra
Gömbi koordináták. Az egységvektorok $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ és $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ egymásra páronként merőlegesek. Ezek mindegyike olyan irányba mutat, amelyek mentén a r, θ és ϕ változók értéke növekszik.

V ÉS **E** KÖZÖTTI KAPCSOLAT

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (26\text{-}24)$$

Vegyük észre, hogy milyen kényelmes a vektorok használata: rövid, tömör, és bármely koordinátarendszerben alkalmazható[4].

26-9 PÉLDA

a) Mekkora a V potenciál egy dipólustól nagy távolságban (a dipólust alkotó két töltés távolságánál sokkal nagyobb távolságban)? b) A (26-4) összefüggést felhasználva határozzuk meg az **E** elektromos térerősséget a dipólustól nagy távolságban.

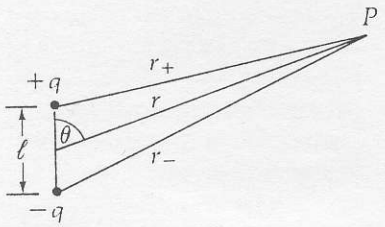
MEGOLDÁS

a) A dipólus potenciálja az őt alkotó két töltés potenciáljának összege. Pontszerű töltés potenciálja $V = kq/r$. Mindkét töltést figyelembevéve, a potenciál a P pontban:

$$V = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kq\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \qquad (26\text{-}25)$$

ahol az r_+ és r_- távolságokat a 26-11 ábrán vázolt módon definiáljuk. Ha $r >> l$, a következő közelítéseket alkalmazzuk: $r_+ r_- \approx r^2$ és $(r_- - r_+) \approx \ell\cos\theta$. Ezeket a (26-25) egyenletbe behelyettesítve, továbbá figyelembe véve, hogy a dipólusmomentum: $p = ql$, azt kapjuk, hogy

$$V = kq\frac{\ell\cos\theta}{r^2} = k\frac{p\cos\theta}{r^2} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad (26\text{-}26)$$



26-11 ábra
A 26-9 példához.

b) Avégett, hogy kiszámítsuk az **E** elektromos térerősség r, θ és ϕ irányú komponenseit, az alábbi parciális deriváltakat kell kiszámítsuk:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\left(\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) \quad \text{és} \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Ezeket a kifejezéseket a (26-24) egyenletbe helyettesítve a gömbi koordinátáktól való függésre azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right] \qquad (26\text{-}27)$$

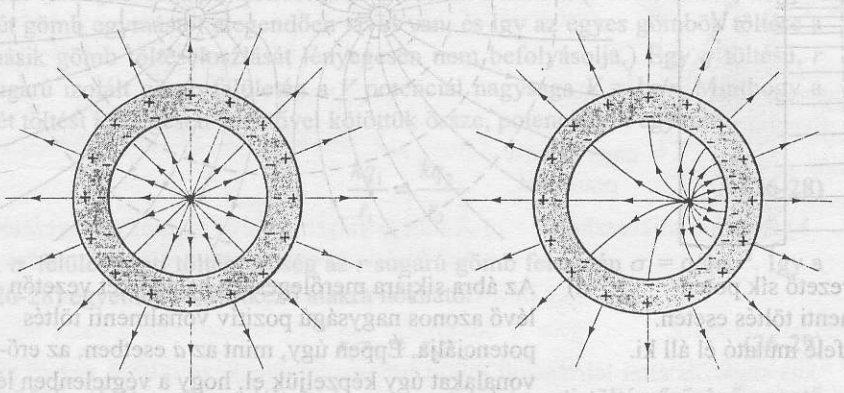
$$\mathbf{E} = -\left(\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 \pi^3}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \text{(távol a dipólustól)}$$

[4] A ∇ operátor nagyon hasznos segédeszköz, amelyet a fizikában sokszor használunk. Tulajdonképpen a „meredekség" fogalmának általánosítása három dimenzióra. Nagyon érdekes a szintvonalas térképekkel való analógia: a gravitációs potenciál gradiense egy felületen mindig „felfelé", abba az irányba mutat, amerre a potenciál változása a legnagyobb. Egy elszabadult kődarab abban az irányban gördül le, amerre a felület a legmeredekebb, vagyis $\boldsymbol{g} = -\nabla U_g$ irányában. Hasonlóképpen, az elektromos potenciál gradiense „felfelé" mutat, míg az **E** elektromos térerősség „lefelé" – azaz abba az irányba, amerre egy szabad pozitív töltés elmozdulna. További analóg eset az, amikor egy tartomány pontjaiban a hőmérséklet különböző. A tartomány bármely pontján a (skalár) hőmérséklet gradiense olyan vektor, ami a hőárammal éppen ellentétes irányba mutat.

Figyeljük meg, hogy a dipólus tengelyére merőleges irányban ($\theta = \pi/2$) ez a kifejezés megegyezik a (24-16)-tal. Az, hogy nincs ϕ irányú komponens, összhangban van a rendszer szimmetriájával, és azzal, hogy a térerősségvonalaknak a töltéseken kell végződniük. Az erőtér érdekes tulajdonsága tükröződik a (26-27) összefüggésben: A dipólustól nagy távolságban, a dipólus tengelye mentén ($\theta = 0$) az elektromos térerősség éppen kétszerese annak, ami ugyanakkora távolságban, de a dipólus tengelyére merőleges irányban ($\theta = 90°$) van. Nagy távolságban, akármelyik irányban, a térerősség $1/r^3$ szerint változik.

26.4 Ekvipotenciális felületek

Láttuk, hogy az elektromos erővonalak hasznosak, ha az elektromos töltések természetét és kölcsönhatásaikat akarjuk megérteni. Hasonlóképpen, nagyon hasznosak, ha az elektromos potenciálokat kívánjuk szemléltetni. Képzeljünk el egy felületet, amelyik mindenütt merőleges az erővonalakra. Egy kicsiny tetszőleges q_0 töltést minden munkavégzés nélkül mozgathatunk ezen a felületen, ugyanis a rá ható $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ erő mindenütt merőleges a mozgás irányára. A potenciál a felületen mindenütt ugyanakkora, ezért a felületet **ekvipotenciális felületnek** nevezzük. Az azonos ΔV potenciállépésenként megszerkesztett ekvipotenciális felületek sorozata nagyon jól érzékelteti az erőteret. A 26-13 ábrán néhány példát láthatunk. Pontszerű töltések esetében, az ekvipotenciális felületek a töltést körülvevő koncentrikus gömbfelületek.



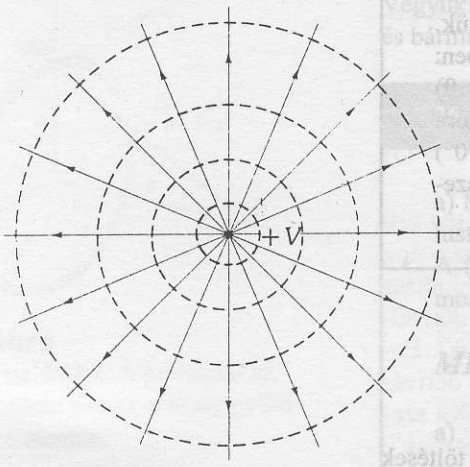
a) A pontszerű töltés az üreges vezető belső és külső felületén töltéseket gyűjt össze.

b) Az elektromos erőtér a gömbön kívül mindig gömbszimmetrikus marad, akárhova is helyezzük az üreg belsejében a pontszerű töltést.

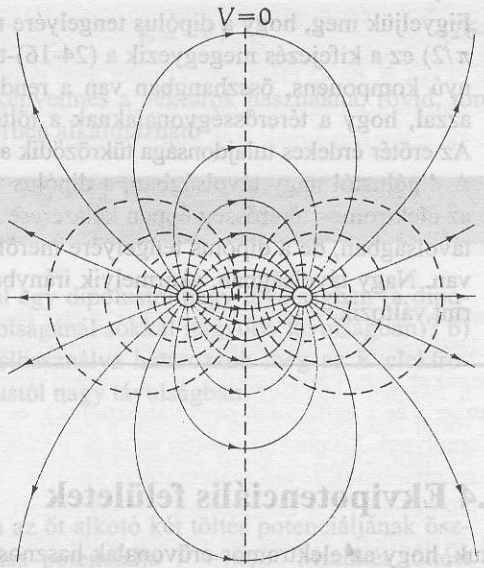
26-12 ábra
Üreges, feltöltetlen, vezető gömb, amelynek belsejébe pontszerű töltést juttattunk.

Az ekvipotenciális felületeket sokkal könnyebb kísérletileg meghatározni, mint az erővonalakat. Bonyolult kétdimenziós elektromos erőterek esetében, a térerősség-szerkezetet kísérleti úton célszerű úgy meghatározni, hogy először megkeressük az ekvipotenciális felületeket, majd ezekre merőleges vonalakat szerkesztve kapjuk meg a térerősség-vonalakat.

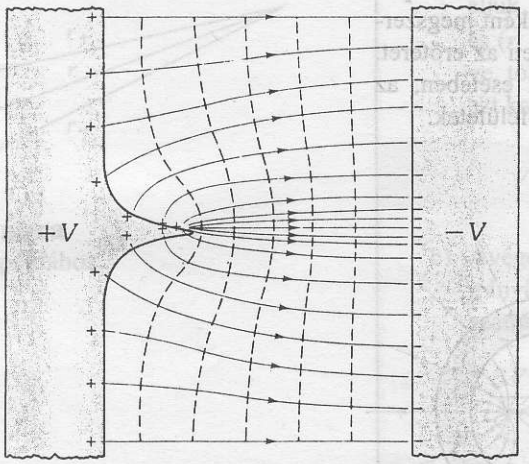
Az ideális vezető felszíne ekvipotenciális felület. Ennélfogva, az *elektromos erővonalaknak a vezetők felületére mindenütt merőlegeseknek kell*



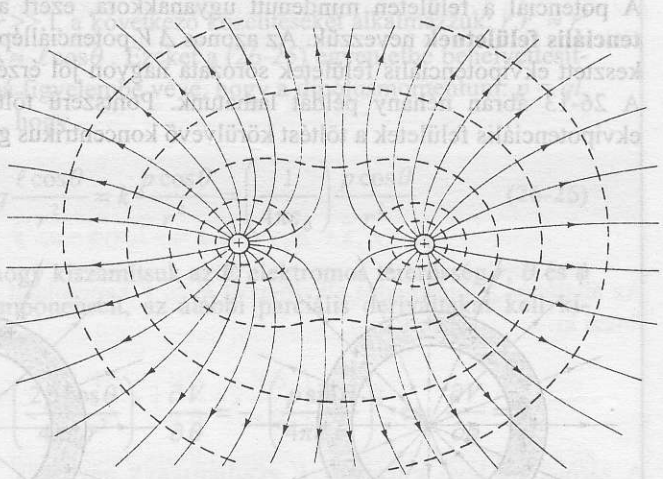
a) Az ábra síkjára merőleges vezetőn lévő pozitív vonalmenti töltés potenciálja. A vezetőről kiinduló erővonalak a végtelenben lévő negatív töltéseken végződnek.



b) Az ábra síkjára merőlegesen haladó két vezetőn lévő azonos nagyságú, de ellentétes előjelű vonalmenti töltés potenciálja. A bal oldali vezetőről kiinduló erővonalak a jobb oldali vezetőn végződnek.



c) Az ábra síkjára merőleges két vezető sík potenciálja ellentétes előjelű felületmenti töltés esetén. Az egyik síkvezetőből a másik felé mutató él áll ki.

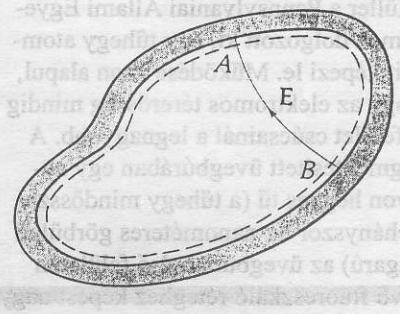


d) Az ábra síkjára merőlegessen haladó két vezetőn lévő azonos nagyságú pozitív vonalmenti töltés potenciálja. Éppen úgy, mint az *a* esetben, az erővonalakat úgy képzeljük el, hogy a végtelenben lévő negatív töltéseken végződnek.

26-13 ábra
Elektromos erővonalak (folytonos vonalak) és ekvipotenciális felületek metszete (szaggatott vonalak). Az erőtér vonalak mindenütt merőlegesek az ekvipotenciális felületekre: ezt a tulajdonságot ortogonalitásnak nevezzük.

lenniük. (Ha nem így lenne, akkor **E**-nek lenne egy, a felülettel párhuzamos komponense, aminek következtében a töltés mozgatásához munkavégzésre lenne szükség.) Továbbá, minthogy az erővonalaknak töltéseken kell végződniük, ahol egy erővonal a vezető felületét éri, ott töltésnek kell lennie. Ezen tulajdonságok alapján néhány érdekes állítást tehetünk. Például, ha egy pontszerű töltést szimmetrikusan körbeveszünk egy üreges, vezető gömbhéjjal, akkor az elektromos erőtér a gömbhéjon kívül változatlan marad. Továbbá, ha a gömbhéjat már elhelyeztük a pontszerű töltés körül, ez utóbbit belül bárhogy mozgathatjuk, a gömbhéjon kívül az elektromos erőtér nem változik (26-12 ábra).

Ezek alapján arra következtethetünk, hogy *egy vezető belsejében lévő, töltést nem tartalmazó zárt üregben a térerősség zérus, függetlenül attól, hogy a vezető felületén vannak-e töltések vagy sem.* A 26-5 példában már megmutattuk, hogy ez az állítás igaz az üreges vezető gömb esetére. Most tekintsünk egy szabálytalan alakú üreges vezetőt, olyat, mint amit a 26-14 ábrán ábrázolunk. Szerkesszünk Gauss-felületet az üreg belsejében, és alkalmazzuk Gauss törvényét: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q' / \varepsilon_0$. Minthogy a Gauss-felületen belül nincs töltés, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Vegyük azonban tekintetbe, hogy ebben az esetben az állítás igazolására szimmetria-érveket nem használhatunk fel. (Elképzelhető lenne ugyanis, hogy vannak olyan erővonalak, amelyek metszik a felületet, egyesek belépnek, mások kilépnek, ám az integrál zérus.) Tételezzük fel, hogy egy erővonal belép, (majd kilép) a 26-14 ábrán vázolt, Gauss-felülettel határolt térrészbe. Ekkor egy elektron az *A* pontnál kiléphetne a vezetőből, az *A* és *B* pontok között az erőtér munkát végezhetne rajta, majd ezt követően az elektron ismét beléphetne a vezetőbe *B*-nél. Az elektront ezután a vezetőben munkavégzés nélkül visszavezethetnénk az A ponthoz (minthogy a vezető ekvipotenciális felület). Ezt a ciklust megismételve az elektron energiája tovább nőne; a rendszer energiája korlátlanul megnövelhető lenne, vagyis elsőfajú perpetuum mobile-t (örökmozgót) készíthetnénk. Ez azonban a termodinamika első főtétele értelmében nem lehetséges. Így kimondhatjuk, hogy egy vezető belsejében lévő, töltést nem tartalmazó zárt üregben a térerősség mindig zérus. Másképpen megfogalmazva, zárt vezető tökéletes elektrosztatikus árnyékoló hatással bír.



26-14 ábra
Az ábrán feltüntetettel ellentétben, egy vezetőben lévő zárt üreg belsejében a térerősség zérus függetlenül attól, hogy a vezető töltött, vagy sem.

Egy másik következtetés, amelyet az erővonalak és ekvipotenciális felületek tanulmányozásából levonhatunk, az, hogy a *töltések a vezetők élein, csúcsain gyűlnek össze.* Ezt illusztrálandó, tekintsünk két töltött vezető gömböt; legyen az egyik nagyobb a másiknál. Kössük össze őket vezető huzallal. Ekkor a töltések addig vándorolnak, amíg a két gömb potenciálja azonossá nem válik (26-15 ábra). Távolítsuk el ezután a huzalt. (Feltételezzük, hogy a két gömb egymástól elegendően távol van, és így az egyes gömbök töltése a másik gömb töltéseloszlását lényegesen nem befolyásolja.) Egy q töltésű, r sugarú izolált gömb felületén a V potenciál nagysága $V = kq/r$. Minthogy a két töltést időlegesen vezetővel kötöttük össze, potenciáljuk egyenlő:

$$\frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2} \qquad \textbf{(26-28)}$$

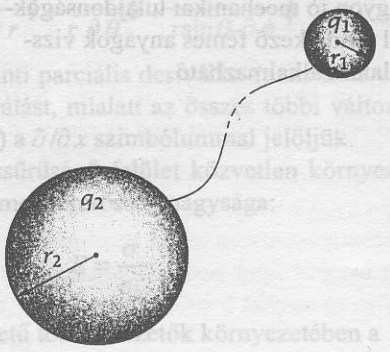
A σ felületmenti töltéssűrűség az r sugarú gömb felszínén $\sigma = q/4\pi r^2$. Így a (26-28) egyenlet a következő alakra hozható:

$$r_1\sigma_1 = r_2\sigma_2 \qquad \textbf{(26-29)}$$

A 25-4 példában úgy találtuk, hogy a σ felületmenti töltéssűrűségű vezető felületének közvetlen környezetében a térerősség $E = \sigma / \varepsilon_0$. Ezt a (26-29) összefüggésbe behelyettesítve azt találjuk, hogy

$$E_1 r_1 = E_2 r_2 \qquad \textbf{(26-30)}$$

Ez az eredmény általánosítható szabálytalan alakú végtelen hosszú vezetőkre is: az ilyen vezetők felületének közvetlen környezetében *ott a legnagyobb a térerősség, ahol a vezető keresztmetszetének a görbületi sugara a legkisebb.*[5] Ennélfogva, **E** is, σ is nagyon nagy lehet egy nagyfeszültségű berendezés csúcspontjain. Ez problémát okoz, ha a levegőben mindig jelenlevő, kozmi-

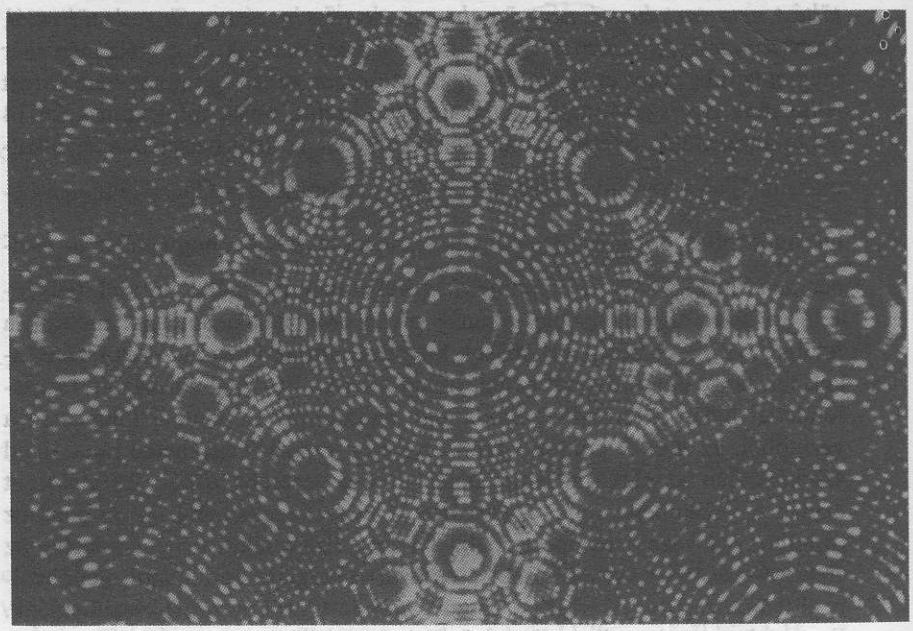


26-15 ábra
Két feltöltött, izolált és huzallal összekötött vezető gömb. A gömbök tehát azonos V potenciállal rendelkeznek. A huzalt ezután eltávolítjuk. (A gömbök távolságának az ábrán láthatónál sokkal nagyobbnak kell lennie, hogy az egyes gömbök töltése ne befolyásolja lényegesen a másik gömb szimmetrikus töltéseloszlását.) Ezen eljárás során a töltések úgy oszlanak meg a két gömb között, hogy a *kisebbik* gömbön a σ felületi töltéssűrűség *nagyobb*, ennélfogva e felület közvetlen környezetében az elektromos térerősség is nagyobb.

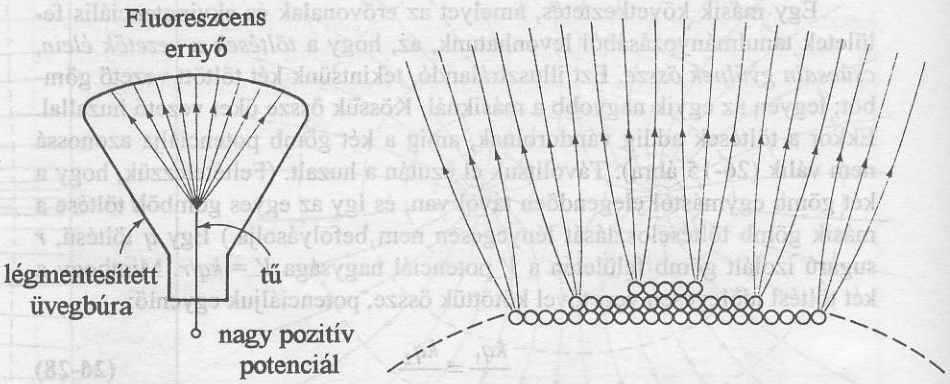
[5] Bizonyos geometriájú vezetők ezen általános szabály alól kivételt képeznek. Bővebben lásd Richard H. Price és Ronald J. Crowley, „The Lightning-rod Fallacy" című cikkében (American Journal of Physics **53**, 843 (1985))

26-16 ábra

A térion-mikroszkóp, amelyet Erwin Müller a Pennsylvaniai Állami Egyetemen dolgozott ki, egy tűhegy atomjait képezi le. Működése azon alapul, hogy az elektromos térerősség mindig a felület csúcsainál a legnagyobb. A légmentesített üvegbúrában egy nagyon hegyes tű (a tűhegy mindössze néhányszor tíz nanométeres görbületi sugarú) az üvegbúra belső felületén lévő fluoreszkáló réteghez képest nagy pozitív potenciálon van. A tűhegyen, az egyes kristálylapok éleinél lévő atomok alkotta „sarkok" felett különösen erős elektromos térerősség alakul ki. A légüres térbe héliumot vezetnek, melynek atomjai a „sarkoknál" lévő atomok feletti különösen nagy térerősségű erőtérbe jutnak. A tűnek elektront átadó atomok pozitív töltésű hélium ionná válnak, és az erővonalak mentén a fluoreszkáló ernyő felé gyorsulnak, és ott becsapódva az ernyőn fényes foltot keltenek. Minden egyes folt tehát a tűhegy egy atomjának felel meg. Sajnos, a tű felülete környékén lévő nagy elektromos térerősség nagy mechanikai feszültségeket kelt a tűben, emiatt a módszer csak nagyon jó mechanikai tulajdonságokkal rendelkező fémes anyagok vizsgálatára alkalmazható.



a) Iridiumkristály-tűhegy térion-mikroszkópos képe. Minden egyes fényes folt egy atomnak felel meg.



b) A térion-mikroszkóp.

c) A tűhegy felszínén lévő atomok környezetében kialakuló elektromos erőtér egyszerűsített vázlata.

kus sugárzás által létrehozott töltött ionokat az ellenkező töltésű vezető magához vonzza. A csúcsokon, ahol az elektromos térerősség nagyon nagy, ezek az ionok akkora sebességre gyorsulnak fel, hogy a levegőt alkotó más molekulákkal ütközve, további ionokat keltenek, és így a (viszonylag) jó szigetelő levegőben elektromos kisülés indul meg. A jelenséget *koronakisülésnek* nevezzük és azzal jár, hogy a levegő a csúcsok környékén látható fénnyel világít az ionok és elektronok újraegyesülése következtében. Száraz levegőben az elektromos kisülés akkor következik be, ha a térerősség kb. 3×10^6 V/m értéknél nagyobb, bár kisebb nyomás esetén (néhány száz pascal nyomáson) a kisülés sokkal kisebb térerősség hatására is megindul. Mindaddig, amíg erre a nyomásfüggésre a mérnökök rá nem jöttek, addig az űrhajókban alkalmazott elektromos áramkörök tervezésénél problémát okozott az, hogy egyes a Földön, kipróbálás során kitűnően működő áramkörök, ívkisülés miatt meghibásodtak, amint az űrhajó a Föld atmoszféráján kívülre került. A nedvesség és a por szintén nagymértékben lecsökkenti a kisülés megindulásához szükséges térerősség nagyságát.

Zivatarok idején, a zivatarfelhők és a föld között nagy potenciálkülönbségek alakulnak ki. A magas épületekre szerelt tűhegyű villámhárítók szerepe nem az, hogy a villámokat „vonzzák", hanem éppen ellenkezőleg: a földön összegyűlt töltések „folynak ki" a tű hegyén. Ezáltal a kialakult nagy potenciálkülönbségek fokozatosan lecsökkenhetnek (mellesleg, időnként, a „töltéskifolyás" következtében éppen a villámhárítóba csapnak a nagy villámok). A repülőgépeken szintén vannak speciális élek és csúcsok a többlettöltés csökkentésére. A tengeri viharok kitörése előtt előfordul, hogy az árbocok hegyeinél koronakisülés alakul ki. Ez a tengerészek védőszentjéről elnevezett *Szent Elmo tüze*.

Összefoglalás

Az U elektromos *potenciális energia*:

$$U_b - U_a = -\int_a^b q_0 \mathbf{E}\cdot d\ell$$

A V elektromos *potenciál*:

$$V_a - V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell$$

Fizikai szempontból csak a ΔV potenciálkülönbség (feszültség) lényeges. Minthogy az erőtér konzervatív, ΔV értéke tetszőleges a és b közötti út esetében azonos. Véges méretű töltésrendszerek esetében a potenciál zéruspontját a végtelen távoli ponthoz rendeljük.

Az 1 *elektronvolt* (eV) az az energia, amelyet egy, az elektron töltésével megegyező nagyságú töltésű részecske nyer akkor, ha 1 volt potenciálkülönbségű két pont között szabadon gyorsul.

$$1\ \text{eV} = 1{,}602\ 10^{-19}\ \text{J}$$

Pontszerű töltések esetében ($V \equiv 0$ ha $r \to \infty$):

$$U = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{qq'}{r} \qquad V = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q}{r}$$

Szimmetrikus töltéseloszlás esetén a V és $\mathbf{E}$ közötti kapcsolat miatt a térerősséget gyakran célszerűbb V meghatározása alapján kiszámítani, mint a Coulomb törvényből.

Integrálalakban	**Differenciálalakban (egydimenziós esetben)**
$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell$	$E_x = -\dfrac{dV}{dx}$

A gradiensvektor abba az irányba mutat, amerre a skalár függvény változása a legnagyobb. Ezért az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség a V potenciál negatív gradiense. Háromdimenziós esetben a gradienst a ∇ („nabla" vagy „grad") szimbólummal jelöljük.

Derékszögű koordinátarendszerben

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Gömbi koordinátarendszerben

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Az x változó szerinti parciális deriválást (azaz az x változó szerinti deriválást, mialatt az összes többi változót állandónak tartjuk) a $\partial/\partial x$ szimbólummal jelöljük.

Egy σ töltéssűrűségű felület közvetlen környezetében az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség nagysága:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Szabálytalan felületű töltött vezetők környezetében a térerősség ott a legnagyobb, ahol a felület görbületi sugara a legkisebb.

Kérdések

1. Mi a megkülönböztetés az elektromos potenciális energia különbsége és az elektromos potenciálkülönbség között?
2. A pozitív töltések a pozitív vagy a negatív potenciálú helyek felé mozognak? És az elektronok?
3. Tekintsük át a pontszerű töltésekből álló rendszerben az elektromos erőkre, erőterekre és potenciálokra vonatkozó törvényeket és összefüggéseket. A tömegpontokból álló rendszerek esetében a gravitációs erők, erőterek, potenciálok és térerősségek között analóg törvényeket és összefüggéseket találtunk. Vizsgáljuk meg, hogy milyen hasonlóságok és különbségek vannak a két eset között.
4. Miért nem keresztezhetik egymást az ekvipotenciális felületek ?
5. Lehet az elektromos potenciál zérus olyan pontban, ahol a térerősség nem zérus? Ha igen, mutassunk erre egy példát.
6. Az elektromos térerősség vákuumban, egy bizonyos pontban zérus. A V potenciálnak is zérusnak kell-e lennie ebben a pontban? A választ illusztrálandó, mutassunk példákat.

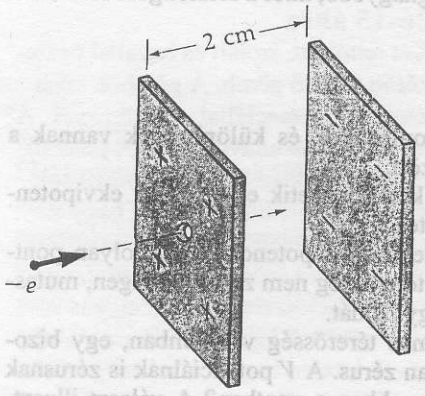
7. Lehet-e az elektromos térerősség zérus olyan pontban, ahol az elektromos potenciál nem zérus? Ha igen, mutassunk erre példát.
8. Miként azt a 16.4 fejezetben megmutattuk, egy egyenletes vastagságú gömbhéj üregében a gravitációs térerősség zérus. Hasonlóképpen, vezető, üreges gömbhéj belsejében az elektromos térerősség zérus. Továbbá, az elektromos térerősség zérus tetszőleges (nem csak gömb) alakú vezető belsejében lévő zárt üregben is. Vajon zérus-e a gravitációs térerősség tetszés szerinti üreges test (például egy üreges kocka) belsejében? Lehet-e olyan pont az ilyen üreg belsejében, ahol a gravitációs térerősség zérus? Vajon mindig, bármely, bármilyen alakú üreges test belsejében található ilyen pont?
9. Az izolált, feltöltött vezetők felülete ekvipotenciális felület. Azt jelenti-e ez, hogy a felületi töltéssűrűség mindenütt azonos?
10. Tételezzük fel, hogy egy vezető felületén az elektromos térerősség mindenütt azonos. Mit jelent ez a felületmenti töltéssűrűség és a vezető geometriájának vonatkozásában?
11. A „Faraday-kalitka" olyan doboz, amelynek falai fém dróthálóból vannak. Érzékeny voltmérőt csatlakoztatunk a kalitkán belül lévő szonda és a fémháló közé. Hogyan detektálható ezzel a készülékkel a kalitkán belüli többlettöltés?
12. Miért nem lehet szakadása egy töltéseloszlást jellemző potenciálfüggvénynek?

Feladatok

26.2 Az elektromos potenciál

26A-1 Két, egymással párhuzamos fémlemezt 12 voltos elem pólusaihoz csatlakoztatunk. a) Egy nyugalmi helyzetű elektront a negatív lemez mellett elengedünk. Mekkora sebessége lesz a pozitív lemezbe történő becsapódásakor? b) Számítsuk ki az elektron maximális kinetikus energiáját, és adjuk meg eV és joule egységekben is. c) Ha a lemezek távolsága 4 mm, mennyi ideig repül az elektron a lemezek között? d) Ha a lemezek távolsága ettől különböző lenne, változna-e az a) és b) kérdésekre adandó válasz?

26A-2 Két, egymástól 2 cm távolságra elhelyezett, egymással párhuzamos fémlemez között 90 V potenciálkülönbség van (26-17 ábra). A pozitív lemezen lévő kis lyukon keresztül 5×10^6 cm/s sebességű elektron hatol be a lemezek közötti térbe. Számítsuk ki, milyen távolságra közelítheti meg az elektron a negatív lemezt.



26-17 ábra
A 26A-2 feladathoz.

26A-3 A hidrogénatom Bohr-modellje szerint az elektron a proton körül a közöttük ható Coulomb erő hatására 52,9 pm sugarú körpályán kering. (A proton lényegében nyugalomban van, minthogy tömege sokkal nagyobb az elektronénál.) a) Newton második törvényének alkalmazásával számítsuk ki az elektron sebességét. b) Mutassuk ki, hogy az elektromos potenciális energia nagysága kétszerese az elektron kinetikus energiájának. c) Mekkora a rendszer teljes energiája elektronvolt egységekben kifejezve?

26A-4 A hidrogénatom Bohr-modellje szerint az elektron a (nyugvó) proton körül körpályán kering. A körpálya sugara $0{,}529\ 10^{-10}$ m. Számítsuk ki abban a térrészben, ahol az elektron mozog, a) az E térerősség nagyságát, és b) a V elektromos potenciált (legyen $V \equiv 0$ ha $r = \infty$). c) Összehasonlításul közöljük, hogy a levegőben akkor üt át szikra , ha a térerősség a 10^6 V/m értéknél nagyobb. Miért nem kellett ezt figyelembe venni a Bohr-modell megalkotásakor? d) Hasonlítsuk össze az elektron potenciálját egy autóakkumulátor feszültségével.

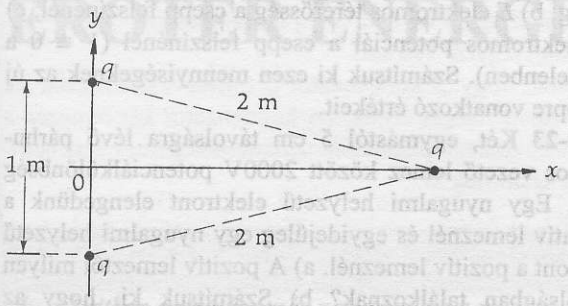
26B-5 Egy a oldalhosszúságú, egyenlőoldalú háromszög minden egyes csúcsán $+q$ töltés van. Számítsuk ki a háromszög középpontja és az oldalak felezőpontja közötti ΔV feszültséget. A középpontban, vagy az oldalak közepén nagyobb a potenciál?

26B-6 Egy a oldalhosszúságú négyzet minden egyes csúcsán q pozitív töltés van. Számítsuk ki a négyzet középpontja és az oldalak felezőpontja közötti potenciálkülönbséget. Vajon a középpontban, vagy az oldalak felezőpontjában nagyobb-e a potenciál?

26B-7 Mutassuk meg, hogy két pozitív töltésű koncentrikus vezető gömbhéj közül mindig a belső a nagyobb potenciálú, függetlenül az egyes gömbhéjakon lévő (pozitív) töltés nagyságától.

26B-8 A 26-18 ábrán látható egyenlőszárú háromszög mindhárom csúcsán $q = 2\mu$C töltés van. a) Számítsuk ki ezen töltéselrendezés elektromos potenciális energiáját. (Útmutatás: A töltéseket egyesével, a végtelenből indul-

va, vigyük a háromszög csúcsaihoz. A potenciális energia változása az első töltés elhelyezésekor zérus.) b) Mekkora az **E** elektromos térerősség az *O* origóban, amikor mindhárom töltés a helyére került?



26-18 ábra
A 26B-8 feladathoz

26.3 *V* gradiense
26.4 Ekvipotenciális felületek

26B-9 A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett *V* potenciált a $V = (3\ \text{V/m}^2)x^2 + (0{,}2\ \text{V/m})y$ függvény adja meg, ahol *x* és *y* méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordinátájú helyen lévő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

26B-10 Töltött vezető gömb felszínén az elektromos potenciál 200 V; a gömb középpontjától számított 10 cm távolságban 150 V. Számítsuk ki a) a gömb sugarát és b) a gömb töltését.

26B-11 Két izolált vezető gömbön egyenlő Q_0 töltés van. Az egyik gömb sugara *R*, a másiké $3R$. A két gömböt összeérintjük, majd elválasztjuk egymástól. Számítsuk ki, hogy ezután mekkora az egyes gömbök töltése.

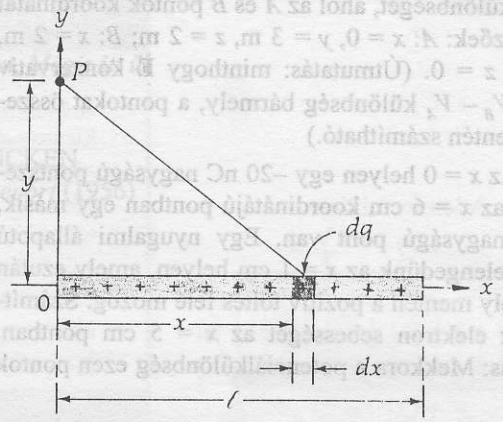
26B-12 Két egyforma kicsiny fémgömb töltése q_1, illetve q_2. Egymást 1 m távolságból 9×10^{-3} N erővel vonzzák. A gömböket összeérintjük, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezzük el. Ekkor úgy találjuk, hogy 2×10^{-3} N erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

26B-13 Képzeljünk el két üreges, koncentrikus (egymásba helyezett) fémgömböt. A belső gömb sugara 30 cm, töltése $-80\ \mu$C. A külső gömb sugara 50 cm, töltése $40\ \mu$C. Számítsuk ki a) az elektromos térerősséget és b) a potenciált mindhárom tartományban: a külső gömbön kívül, a gömbök között, és a belső gömb belsejében. c) Ábrázoljuk az $E(r)$ és a $V(r)$ függvényeket.

26B-14 Két $+q$ töltés az *x* tengely mentén, az $x = \pm a$ helyeken helyezkedik el. a) Vázoljuk az *xy* síkban a térerősségeloszlást. b) Anélkül, hogy pontosan meghatároznánk, vázoljuk a $V(x)$ potenciáleloszlást az *x* tengely mentén (legyen $V \equiv 0$ ha $x = \pm\infty$). c) A $V(x)$ függvény grafikonja felhasználásával magyarázzuk el, hogy hogyan lehet megszerkeszteni az *x* tengely mentén az $E(x)$ térerősségeloszlást. Készítsük el vázlatosan az $E(x)$ térerősségeloszlás-ábrát is. d) Ismételjük meg a fentieket, de ellentétes előjelű, $+q$ és $-q$ töltésekkel.

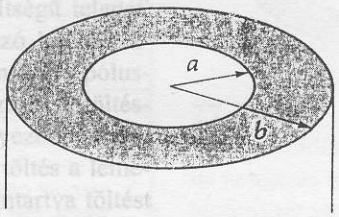
További feladatok

26C-15 Egy ℓ hosszúságú, vékony szigetelő rúdon egyenletesen elosztva *Q* töltés van. Számítsuk ki a *V* elektromos potenciált a rúd végétől *y* távolságban, a 26-19 ábrán vázolt helyen lévő *P* pontban.



26-19 ábra
A 26C-15 feladathoz.

26C-16 A 26-20 ábrán vázoltak szerint, végtelen hosszúságú, *a* belső és *b* külső sugarú hengerpalástban (a cső belsejében) pozitív töltéseloszlás van. A ρ töltéseloszlás nem egyenletes, az *r* sugárral fordítottan arányos, vagyis az $a < r < b$ tartományban $\rho = k/r$, ahol *k* egy SI mértékegységgel kifejezett állandó. Számítsuk ki az elektromos térerősséget az a) $r \le a$, b) $a \le r \le b$, c) $r \ge b$ tartományokban. d) Számítsuk ki az elektromos potenciált ugyanezekben a tartományokban úgy, hogy a potenciál zéruspontja, $V = 0$ az $r = d >> b$ helyen (a csőtől nagy távolságra) legyen.



26-20 ábra
A 26C-16 feladathoz.

26C-17 Egy *R* sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való *r* távolsággal arányos, azaz $\rho = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol *A* egy állandó. a) Mi *A* SI egysége?

b) Mekkora a gömb teljes Q töltése A-val és R-rel kifejezve? (Útmutatás: követve a 26-4 példa megoldását, összegezzük a dr vastagságú gömbhéjak dq töltését.) c) Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében, a középponttól r távolságra az E térerősséget. d) Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is (legyen $V = 0$ a végtelenben).

26C-18 Végezzük el az előző feladatot $\rho = Ar^2$ töltéseloszlást feltételezve.

26C-19 Elektromos térerősséget az $\mathbf{E} = 2000\hat{\mathbf{x}} + 3000\hat{\mathbf{y}}$ képlet ad meg, ahol a mennyiségek SI mértékegységben adottak. Számítsuk ki az A és B pontok közötti $(V_B - V_A)$ potenciálkülönbséget, ahol az A és B pontok koordinátái a következőek: A: $x = 0$, $y = 3$ m, $z = 2$ m; B: $x = 2$ m, $y = 1$ m, $z = 0$. (Útmutatás: minthogy $\mathbf{E}$ konzervatív erőtér, a $V_B - V_A$ különbség bármely, a pontokat összekötő út mentén számítható.)

26C-20 Az $x = 0$ helyen egy –20 nC nagyságú pontszerű töltés, az $x = 6$ cm koordinátájú pontban egy másik, +10 nC nagyságú pont van. Egy nyugalmi állapotú elektront elengedünk az $x = 1$ cm helyen, amely ezután az x tengely mentén a pozitív töltés felé mozog. Számítsuk ki az elektron sebességét az $x = 5$ cm pontban. (Útmutatás: Mekkora a potenciálkülönbség ezen pontok között?)

26C-21 Az atommag cseppmodellje szerint egyes atommagok nagy energiájú oszcillációi az atommagot két, különböző nagyságú részre és további néhány neutronra törhetik szét. A magtöredékek a Coulomb-taszítás eredményeként kinetikus energiához jutnak. Számítsuk ki az urán atommagjából képződő két gömb alakú darab elektromos potenciális energiáját (MeV egységekben), melyek töltése +38e illetve +54e, sugara pedig $5{,}5\times10^{-15}$ m, illetve $6{,}2\times10^{-15}$ m. Tételezzük fel, hogy az egyes részek töltése egyenletesen oszlik el a gömbökben, és a két gömb kezdetben egymást érinti. (Az eredmény közelítőleg megegyezik az uránhasadás során észlelt kinetikus energiával.)

26C-22 Két egyforma, $-q$ töltésű esőcsepp összeütközve egy nagyobb cseppet alkot. Az ütközés előtt a cseppek jellemzői a következők: a) σ felületmenti töltéssűrűség; b) E elektromos térerősség a csepp felszínénél; c) V elektromos potenciál a csepp felszínénél ($V \equiv 0$ a végtelenben). Számítsuk ki ezen mennyiségeknek az új cseppre vonatkozó értékeit.

26C-23 Két, egymástól 5 cm távolságra lévő párhuzamos vezető lemez között 2000V potenciálkülönbség van. Egy nyugalmi helyzetű elektront elengedünk a negatív lemeznél és egyidejűleg egy nyugalmi helyzetű protont a pozitív lemeznél. a) A pozitív lemeztől milyen távolságban találkoznak? b) Számítsuk ki, hogy az egyes részecskék mekkora sebességgel csapódnak a szemközti lemezbe. c) Számítsuk ki, hogy mekkora a mozgási energiájuk (eV és J egységekben) a lemezbe történő becsapódáskor.

26C-24 Egy a sugarú vékony korong egyik oldalán egyenletes felületmenti töltéssűrűség van. A korongba $a/2$ sugarú lyukat fúrunk. a) Felhasználva a szuperpozíció elvét és a 26-8 példa eredményét, számítsuk ki a V elektromos potenciált a korong tengelye mentén, x távolságra a töltések síkjától (legyen $V \equiv 0$ a végtelenben). b) Mekkora a lyuk középpontjában a potenciál? c) Mekkora a térerősség a lyuk középpontjában?

26C-25 Tekintsünk egy elektromos kvadrupólust, azaz három töltés alábbi konfigurációját: legyen $-2q$ töltés az origóban, $+q$ töltés $y = +\ell/2$ helyen, és még egy $+q$ töltés $y = -\ell/2$ helyen. Számítsuk ki a potenciált a) az x tengely mentén, és b) az y tengely mentén. c) Mutassuk meg, hogy a kvadrupólustól nagy távolságban (azaz ha x is, y is sokkal nagyobb mint ℓ) a potenciál a távolság köbének reciprokával változik. (Útmutatás: alkalmazzuk a $1/\sqrt{1+a^2} \approx 1 - a^2/2$ közelítést.)

AZ 24–45 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

XXIV. Fejezet

24A-1 649 kg

24A-3 $2{,}27 \times 10^{39}$

24A-5 110 N 157°-ra a +x tengelytől

24B-7 $2{,}51 \times 10^{-10}$

24B-9 $x = 0{,}817$ m

24B-11 9,55 elektront

24A-13 $4{,}90 \times 10^{-3}$ C

24B-15 $y = (qE_o/2mv_o^2)x^2$

24A-17 $1{,}70 \times 10^{-10}$ m

24B-19 $Q/4\pi\varepsilon_o d(d + L)$

24B-21 A válasz adott.

24C-23 A válasz adott.

24C-25 A válasz adott.

24C-27 $W = Q2/8\pi\varepsilon_o R$

24C-29 3,67 cm

24C-31 $2\pi\sqrt{ml/2qE}$

24C-33 $d = \dfrac{\pi}{2\omega}\left[v_1 + \dfrac{eE_o}{m\omega\sqrt{2}}\right] l = \dfrac{3\pi}{2\omega}\left[v_1 + \dfrac{eE_o\sqrt{2}}{m\omega}\right]$

24C-35 a) $E_y = \lambda L / 4\pi\varepsilon_o a\sqrt{L^2 + a^2}$

b) $E_x = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o)\left[(1/a) - (1/\sqrt{L^2 + a^2})\right]$

24C-37 A válasz adott.

24C-39 A válasz adott.

24C-41 $E = (Q/4\pi^2\varepsilon_o R_2)\sin(l/2R)$, a megmaradó körívtől kifelé irányítva

XXV. Fejezet

25A-1 a) zérus b) $3q/\varepsilon_o$ c) $-2q/\varepsilon_o$

25A-3 $7{,}50 \times 10^{-2}$ N·m²/C

25A-5 a) zérus b) σ/ε_o

25B-7 a) px/ε_o b) $pd/2\varepsilon_o$

25A-9 a) σ/ε_o b) $\sigma/2\varepsilon_o$

25A-11 $-1{,}15 \times 10^{-9}$ C/m²

25B-13 b) $1{,}38 \times 10^7$ elektron/m³ hiány

25C-15 a) C/m² b) $Q = k2\pi L(b - a)$
c) $E = (k/\varepsilon_o)(1 - a/r)$

25C-17 A válasz adott.

25C-19 $E(\pi R^2)$

XXVI. Fejezet

26A-1 a) $2{,}05 \times 10^6$ m/s
b) 12 eV, $1{,}92 \times 10^{-18}$ J c) 3,89 ns

26A-3 a) $2{,}19 \times 10^6$ m/s c) –13,6 eV

26B-5 0,0415 kq/a; a középpontban

26B-7 A válasz adott.

26B-9 1,01 × 10-19 N, 18,4° az x tengelyhez képest

26B-11 $Q_o/2$, $3Q_o/2$

26B-13 A gömb belsejében $E = 0$, $V = -(140/3\pi\varepsilon_o)$ μV
a gömbök közt
$E = (80/4\pi\varepsilon_o r^2)$ μN/C befelé,
$V = -(1/4\pi\varepsilon_o)(80/r - 40/0{,}5)$ μV
a gömbökön kívül $E = (40/4\pi\varepsilon_o r^2)$ μN/C, befelé,
$V = -(40/4\pi\varepsilon_o r)$ μV

26C-15 $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o l}\ln\dfrac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}$

26C-17 a) C/m⁴ b) $Q = A\pi R^4$
c) $E = Ar^2/4\varepsilon_o$ d) r ≥ R esetén $V = AR^4/4\varepsilon_o r$
r ≤ R esetén $V = (A/12\varepsilon_o)(4R^3 - r^3)$

26C-19 2000 V

26C-21 A válasz adott.

26C-23 a) $2{,}72 \times 10^{-5}$ m
b) $2{,}65 \times 10^7$ m/s és $6{,}19 \times 10^5$ m/s
c) 2000 eV, $3{,}20 \times 10^{-16}$ J

26C-25 a) $(q / 2\pi\varepsilon_o)\left\{\left[x^2 + (l/2)^2\right]^{-1/2} - 1/x\right\}$

b) $(q / 4\pi\varepsilon_o)\left[(y + l/2)^{-1} + (y - l/2)^{-1} - 2/y\right]$

KONDENZÁTOR ÉS AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR ENERGIÁJA

Oly sok titkon áthatolva már nem hiszünk a megismerhetetlenben. Mégis itt ül közöttünk, száját éhesen nyalogatva les ránk.

H. L. MENCKEN
Minority Report (1956)

27.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben válik világossá, miért fordítottunk annyi figyelmet az elektromos erőtér fogalmára. Vezető anyagokból olyan, viszonylag kisméretű szerkezeteket lehet létrehozni, amelyekben nagyon intenzív elektromos erőtér van. Az ilyen szerkezeteket *kondenzátoroknak* vagy (a villamosmérnöki zsargonban) kapacitásoknak nevezzük. Megmutatjuk, hogy a külső munka, amit a kondenzátor lemezein a töltések szétválasztásakor be kell fektetnünk, a lemezek (régies szóhasználattal fegyverzetek) között kialakuló elektromos erőtér energiájaként tárolódik. Az ebben a fejezetben leírtak ahhoz a fontos következtetéshez vezetnek, hogy az elektromos erőterek energiát tartalmaznak. Kondenzátorokat széles körben alkalmaznak elektromos áramkörökben; néhány alkalmazási lehetőséget a későbbi fejezetekben mutatunk be.

27.2 A kapacitás fogalma

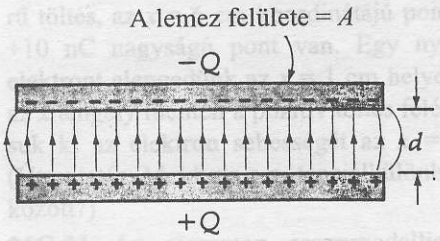
Bármely két, szigetelővel elválasztott vezető kondenzátort alkot, a két vezetőt a kondenzátor lemezeinek nevezzük. Ha a lemezekre V feszültségű telepet[1] csatlakoztatunk, akkor a telep pozitív pólusa a hozzácsatlakozó kondenzátorlemezről negatív töltésű elektronokat vonz magához, míg a negatív pólusról ugyanannyi elektron áramlik át a kondenzátor másik lemezére. A töltésvándorlás addig tart, amíg a lemezek között a telepével megegyező V potenciálkülönbség ki nem alakul. Ekkor a telepet eltávolíthatjuk; a töltés a lemezeken marad. A kondenzátor tehát képes adott feszültséget fenntartva töltést tárolni. Ez a képesség a **kapacitás**, aminek a jele C:

[1] A kondenzátorok tárgyalásánál kizárólag a potenciálkülönbségek játszanak szerepet, ezért az egyszerűség kedvéért az általános gyakorlatnak megfelelően a ΔV helyett a V szimbólumot használjuk.

A KAPACITÁS $$C = \frac{Q}{V} \qquad (27\text{-}1)$$

A kapacitás SI egysége 1 *coulomb/volt* (C/V), amelynek a farad (F)[2] nevet adták. A kondenzátor áramköri jele ⊣⊢. Megjegyezzük, hogy bár a kondenzátor kapacitását és a töltés egységét, a coulombot ugyanaz a C jelöli, ez nem okozhat félreértést, mivel egyik esetben a kapacitás *mennyiségéről*, másik esetben a töltés *mértékegységéről* van szó.

Amikor arról beszélünk, hogy „a kondenzátor Q töltése", akkor ezen az egyik vezetőn lévő töltés mennyiségét értjük. (A kondenzátor két lemezén a töltések összege zérus.) A következő példákban néhány jellegzetes geometriájú elrendezés kapacitását számítjuk ki.



27-1 ábra
A 27-1 példához. Két párhuzamos, A felületű, egymástól d távolságra lévő lemezen egyenlő nagyságú, ellentétes előjelű töltés van. Ha d sokkal kisebb, mint a lemezek szélessége, akkor a lemezek pereménél lévő inhomogén elektromos erőteret elhanyagolhatjuk.

27-1 PÉLDA

A síkkondenzátor. Két párhuzamos, egyenlő A felületű, egymástól kicsiny d távolságra lévő fémlemez alkotja a legegyszerűbb, legközönségesebb kondenzátortípust. Az egyik lemez töltése $+Q$, a másiké $-Q$, mint azt a 27-1 ábrán illusztráltuk. Ha a lemezek egymástól való távolsága sokkal kisebb, mint a lemezek szélessége, akkor a lemezek pereménél kitüremkedő, inhomogén elektromos erőtér elhanyagolható, ezért feltételezhetjük, hogy a lemezek közötti elektromos erőtér mindenütt homogén. A (25-10) képlet szerint, a lemezek[3] közötti elektromos térerősség:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \qquad (27\text{-}2)$$

Fejezzük ki a (26-5) egyenletből a lemezek közötti potenciálkülönbség nagyságát

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\ell = Ed \qquad (27\text{-}3)$$

Ezeknek az egyenleteknek alapján, a kapacitás nagysága:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 AE}{Ed} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Figyeljük meg, hogy a kapacitás független a kondenzátor töltésétől. A C *kapacitás kizárólag a kondenzátor méreteitől* (és az ε_0 dielektromos állandótól) függ. Itt, a kondenzátor kapacitása egyenesen arányos a lemezek A felületével és fordítva arányos a lemezek közötti d távolsággal.

SÍKKONDENZÁTOR KAPACITÁSA $$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (27\text{-}4)$$

[2] A *farad* nevet Michael Faraday (1791–1867) angol fizikus és vegyész tiszteletére adták, aki számos elektromos, mágneses, optikai és kémiai jelenséget vizsgált. Legismertebb felfedezése a 32. fejezetben tárgyalt elektromágneses indukció jelensége. Faraday nagyon szegény családban nőtt fel, szülei nem tudták iskoláztatni, ezért állhatatosan képezte önmagát. Már gyerekkorában kitűnő kísérleti érzéke volt. 13 éves korában könyvkötő-tanonc volt. Ebben az időben tett rá lebilincselő hatást egy javításra hozott harmadik kiadású *Encyclopaedia Britannica*. Ebben számos cikk foglalkozott az elektromossággal, ami Faradayt különösen érdekelte, és tovább fokozta kísérletező kedvét. Később Sir Humphry Davy, a híres brit vegyész segédje lett, aki helyet és állást biztosított neki a Royal Institutionban. Davy halála után Faraday lett utóda; fontos kutatásai és népszerű tudományos előadásai is híressé váltak. Életének utolsó kilenc évében Faraday és felesége egy Hampton Court-i házban élt, amit Viktória királynő adományozott nekik.

[3] Feltételezzük, hogy a lemezek között vákuum van. A dielektrikumok hatásával a 27.4 pontban foglalkozunk.

27-2 PÉLDA

Számítsuk ki két, egymástól 1 mm-es távolságban lévő, 2 m^2 felületű fémlemezből álló kondenzátor kapacitását, elhanyagolva az erőtér inhomogenitását a lemezek peremén.

MEGOLDÁS

Párhuzamos lemezek esetén

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8{,}85\times10^{-12}\ \text{F/m})(2\ \text{m}^2)}{1\times10^{-3}\ \text{m}} = 17{,}7\times10^{-9}\ \text{F} = 17{,}7\ \text{nF}$$

Nagy mérete ellenére ez viszonylag kis kapacitású kondenzátor. 1 F kapacitása 10,6 km-es oldalhosszúságú, egymástól 1 mm-es távolságban lévő párhuzamos négyzetes fémlemezekből álló kondenzátornak lenne! (A 27.3 szakaszban tárgyaljuk azt, hogy hogyan lehet, viszonylag nagy kapacitású kis térfogatú kondenzátorokat létrehozni.) Minthogy a farad meglehetősen nagy egység, a gyakorlatban a kapacitásokat legtöbbször mikrofarad (1 μF = 10^{-6} F); nanofarad (1 nF = 10^{-9} F), és pikofarad (1 pF = 10^{-12} F) egységekben adjuk meg.

27-3 PÉLDA

A hengereskondenzátor. A hengereskondenzátor két koaxiális vezető hengerből áll (27-2 ábra). A belső hengeres vezető külső sugara a, a külső vezető belső sugara b. Tételezzük fel, hogy a vezetők hossza nagyon nagy, így az erőtérnek az inhomogenitását elhanyagolhatjuk. Tekintsünk egy L hosszúságú szakaszt; melyen a belső hengeren $+Q$, a külső hengeren $-Q$ töltés van; ezek a töltések hengerszimmetrikus, kifelé mutató radiális irányú elektromos erőteret hoznak létre. A Gauss törvényt alkalmazva egy r sugarú ($a < r < b$), L hosszúságú hengeres Gauss felületre, az E elektromos térerősség (lásd még a 25-1 példát is):

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi rL) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

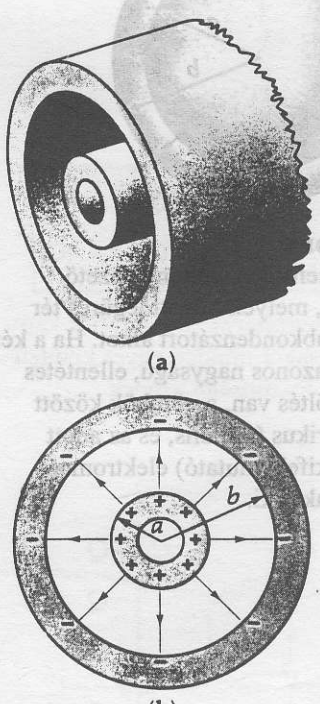
$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL} \qquad (27\text{-}5)$$

A $V = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell$ potenciálkülönbség az alábbi alakú:

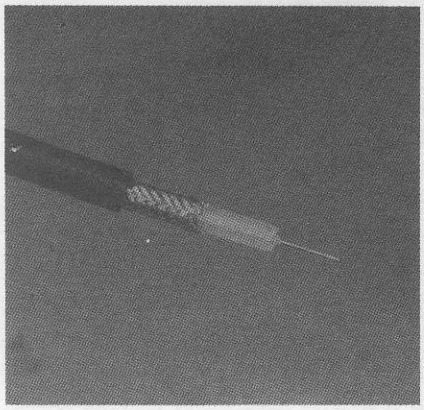
$$V = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\right)\ln r\Big|_a^b = -\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\right)(\ln b - \ln a)$$

A V potenciálkülönbség nagysága tehát

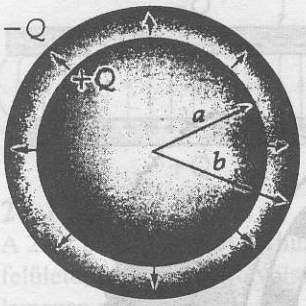
$$V = -\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



27-2 ábra
A 27-3 példához. Két hosszú, koaxiális hengeres vezető, melyek között légüres tér van, hengereskondenzátort alkot. Az azonos nagyságú, ellentétes előjelű $\pm Q/L$ töltéssűrűség hatására a hengerek között sugárirányú elektromos erőtér alakul ki.



27-3 ábra
Elektromos berendezések és áramkörök közötti jelátvitelre használt koaxiális kábel felépítése.



27-4 ábra
Két koncentrikus vékony vezető gömbhéj, melyek között légüres tér van, gömbkondenzátort alkot. Ha a két vezetőn azonos nagyságú, ellentétes előjelű töltés van, a gömbök között szimmetrikus (radiális, és az adott esetben kifelé mutató) elektromos erőtér alakul ki.

és a C kapacitás $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

A HENGERES KONDENZÁTOR KAPACITÁSA $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad (27\text{-}6)$$

Figyeljük meg, hogy a kapacitás nagyságát ebben az esetben is kizárólag a kondenzátor geometriája szabja meg.

Elektronikus készülékek közötti elektromos jelek átvitelére gyakran használjuk a flexibilis *koaxiális kábelt* (27-3 ábra). Ez gyakorlatilag két koaxiális, hengeres vezető érpár. A kábel elektromos tulajdonságait nagymértékben megszabja az érpár hosszegységenkénti kapacitása. A koaxiális kábel fő előnye az, hogy a külső ér földelésével a belső ér a külső elektromos erőterekkel szemben árnyékolható; s ekkor a jellel interferáló, nem kívánatos zajfeszültségek nem lépnek fel.

27-4 PÉLDA

A gömbkondenzátor. Tekintsünk két koncentrikus, vékony falú vezető, gömbhéjat, amelyek között légüres tér van (27-4 ábra). A belső gömb sugara a, a külső gömbé b. Számítsuk ki ennek a gömbkondenzátornak a kapacitását.

MEGOLDÁS

Legyen a belső gömbhéj töltése $+Q$, a külsőé pedig ezzel azonos nagyságú, de ellentétes előjelű, $-Q$. Így a gömbhéjak között sugárirányú, kifelé mutató E elektromos térerősség alakul ki. A (26-5) képletet alkalmazva, a gömbhéjak közötti V potenciálkülönbség

$$V = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

Minthogy a térerősség éppen olyan, mintha a középpontban egy pontszerű töltés lenne,

$$V = -\int_a^b \frac{kQ}{r^2}\,dr = -kQ\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b = kQ\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

Figyelembe véve, hogy $b > a$, a következő alakú kifejezéshez jutunk:

$$V = kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

A C kapacitás értéke: $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{b-a}{ab}\right)}$$

A GÖMBKONDENZÁTOR KAPACITÁSA $$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right) \qquad (27\text{-}7)$$

Mint minden, a kondenzátorok kapacitására vonatkozó esetben, C kizárólag a gömbkondenzátor geometriájától függ (és az ε_0 állandótól).

27-5 PÉLDA

Számítsuk ki egy R sugarú, izolált gömb kapacitását. (A másik vezetőnek tekintsünk egy a végtelenben lévő fémgömböt, amelyen $V \equiv 0$.)

MEGOLDÁS

Ha az előző példában a külső gömbhéj b sugara a végtelenhez közelít, akkor a (27-7) összefüggésben a nevezőben lévő a tag elhanyagolható; b-vel egyszerűsíthetünk, és így határesetben $C = 4\pi\varepsilon_0 a$. Az izolált, R sugarú gömb kapacitása tehát

IZOLÁLT, R SUGARÚ GÖMB KAPACITÁSA $$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (27\text{-}8)$$

Megjegyezzük, hogy az egyetlen lényeges tényező a geometriára jellemző R sugár.

27-6 PÉLDA

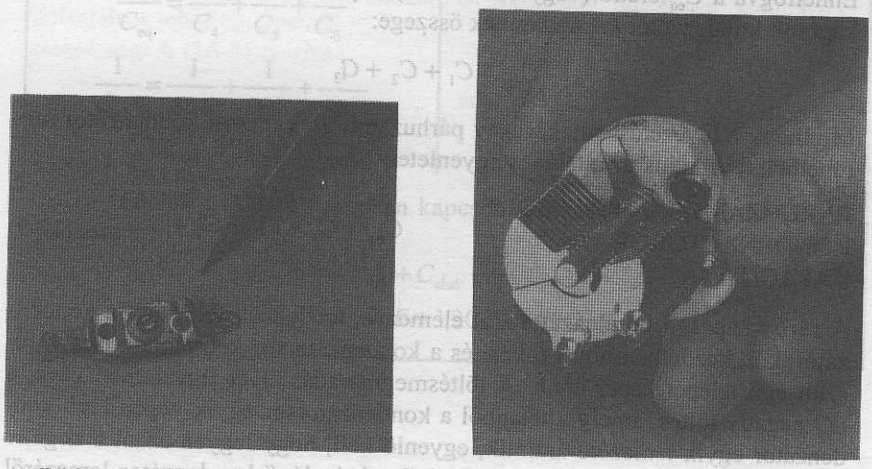
Számítsuk ki a Föld elektromos kapacitását.

MEGOLDÁS

A Föld sugara $R = 6{,}34\times10^6$ m. A (27-8) képletet alkalmazva,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{6{,}34\times10^6\,\text{m}}{9\times10^9\,\text{Nm/C}^2} = 7{,}04\times10^{-4}\,\text{F}$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy a *farad* egység (F) nagyon nagy. Az 1 F kapacitású izolált gömb sugara mintegy 1400-szorosa lenne a Földének, vagy kb. 13-szorosa a Napénak!



a) E kisméretű kondenzátornak (trimmerkondenzátornak) a kapacitása azáltal változtatható, hogy a lemezek távolsága változtatható. Más típusoknál egy rögzített lemez felett egy másik forgatható el, ami által a lemezek átfedése, azaz hatásos felülete változtatható.

b) Ebben a forgókondenzátorban két lemezcsoport van: az egyik rögzített, a másik elforgatható. Az elforgatással a két lemezcsoport átfedése változik meg.

27-5 ábra
Változtatható kapacítású kondenzátorok két alaptípusa.

Számos elektronikus áramkörben alkalmaznak olyan kondenzátorokat, melyek kapacitása bizonyos tartományban változtatható. A 27-5 ábrán két elterjedt típus látható. A gyakorlatban tetszés szerinti geometriájú vezetők kapacitásának általános meghatározása meglehetősen bonyolult feladat. A kapacitás konkrét kiszámítását három esetben mutattuk meg, melyeknél a számítás a geometriai szimmetria miatt volt egyszerű. Nem szimmetrikus geometriájú rendszerek kapacitását kísérleti úton lehet meghatározni, például úgy, hogy a vezetőkre bizonyos töltésmennyiséget juttatunk, és ezután megmérjük a vezetők közötti potenciálkülönbséget. Elektronikus áramkörök esetében még ez a módszer sem alkalmazható, ugyanis az áramkör egyes részeit nem lehet egymástól elszigetelni. Bár az áramkörök egyes részei közötti *szórt kapacitás* rendszerint elhanyagolhatóan kicsiny, váltakozó áramú áramköröknél azonban még kicsiny szórt kapacitás is problémákat okozhat (lásd bővebben a 34. fejezetben).

27.3 Kondenzátorok kapcsolása

Elektronikus áramkörök szerkesztése, építése közben gyakran szükséges lehet két vagy több kondenzátor összekapcsolása. Az összekapcsolt kondenzátorok általában sorba kapcsolt, illetve párhuzamosan kapcsolt csoportokból állnak (27-6 ábra). Az ábrákon a kondenzátorokat a ⊣⊢ szimbólummal jelöljük (bár ez a jel párhuzamos fémlemezekből álló kondenzátort sejtet, mégis ezt a jelölést használjuk, mindenféle más típusú kondenzátor esetében is).

Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokon a *V potenciálkülönbség az összes kondenzátoron azonos*, noha a töltés különböző lehet rajtuk. A kondenzátorok összes töltése

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$Q = VC_1 + VC_2 + VC_3$$
$$Q = V(C_1 + C_2 + C_3)$$

Ennélfogva a C_{eq} eredő (vagy ekvivalens) kapacitás a három párhuzamosan kapcsolt kondenzátor kapacitásának összege:

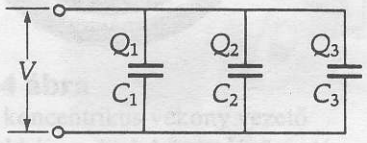
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Minthogy a levezetésben akárhány párhuzamosan kapcsolt kondenzátor szerepelhet, felírhatjuk az általános egyenletet:

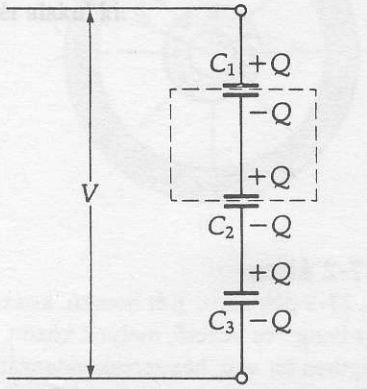
PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT KONDENZÁTOROK KAPACITÁSA

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \qquad (27\text{-}9)$$

A *sorba* kapcsolt kondenzátorokat elemezve, tételezzük fel, hogy a kondenzátorokon kezdetben nincs töltés, és a kondenzátorsor két végpontjára V feszültségű telepet kapcsolunk. A töltésmegmaradás elvét figyelembe véve, a $-Q$ negatív töltés, amely a telepből a kondenzátorsor egyik végén lévő kondenzátor egyik lemezére áramlik, egyenlő kell, hogy legyen azzal a negatív töltésmennyiséggel, amelyik a sor másik végén lévő kondenzátor lemezéről áramlik a telepbe. Ez utóbbi lemezen ennélfogva $+Q$ töltésnek kell maradnia. A kondenzátorsor azon része, amely az ábrán a szaggatott vonalon belül van, az áramkör többi részétől szigetelve van, tehát rajta a töltésmennyiségek összege zérus (azaz a kezdeti érték) marad. Mivel azonban a felső szaggatott vonal felett lévő kondenzátorlemez töltötté válik, a szaggatott vonalon belüli részen is szétválnak a töltések, vagyis a kondenzátorok mindkét lemezén töltések gyűlnek össze; a két lemez töltése ellentétes előjelű, de azonos nagy-



a) Kondenzátorok párhuzamos kapcsolásakor minden egyes kondenzátor feszültsége azonos.



b) Kondenzátorok soros kapcsolásakor minden egyes kondenzátor töltése azonos.

27-6 ábra
Kondenzátorok kapcsolási módjai

ságú. Ennélfogva *a sorba kapcsolt kondenzátorok mindegyikén azonos nagyságú Q töltés van.* A kondenzátorsoron a teljes V potenciálkülönbség az egyes kondenzátorok potenciálkülönbségének összege:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]$$

Minthogy $V = Q/C$, a kondenzátorsor kapacitásával azonos értékű U_{eq} eredő kapacitás nagyságát a következő képlet fejezi ki:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Minthogy a levezetésben akárhány sorba kapcsolt kondenzátor szerepelhet, felírhatjuk az általános képletet:

SORBA KAPCSOLT KONDENZÁTOROK KAPACITÁSA

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \qquad \textbf{(27-10)}$$

27-7 PÉLDA

Öt kondenzátort a 27-7a ábrán látható módon kapcsoltunk össze. Számítsuk ki az áramkör eredő kapacitását.

MEGOLDÁS

A feladatot fokozatosan oldjuk meg, először a felső, illetve az alsó ágak eredő kapacitását számítjuk ki:

Felső ág

Sorba kapcsolt kondenzátorok

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4\mu F} + \frac{1}{5\mu F} + \frac{1}{6\mu F}$$

$$C_{felső} = 1{,}62\mu F$$

Alsó ág

Sorba kapcsolt kondenzátorok

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

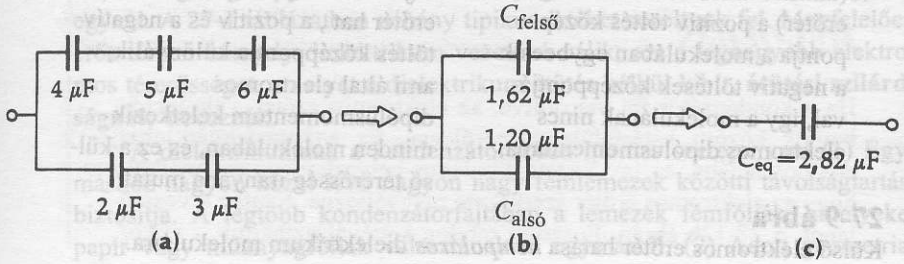
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{2\mu F} + \frac{1}{3\mu F}$$

$$C_{alsó} = 1{,}20\mu F$$

A (b) áramkör két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor. Ennek eredő kapacitása:

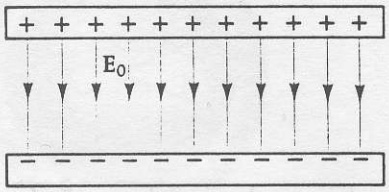
$$C_{eq} = C_{felső} + C_{alsó}$$

$$C_{eq} = 1{,}62\mu F + 1{,}20\mu F = 2{,}82\mu F$$

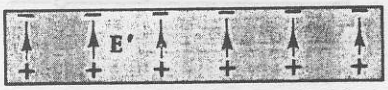


27-7 ábra
A 27-7 példához. A kondenzátorhálózatot lépésenként egyszerűsítjük; az utolsó lépésben a C_{eq} eredő kapacitáshoz jutunk.

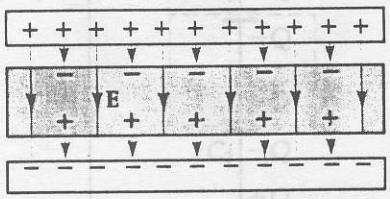
27-8 ábra
Külső elektromos erőtér hatása poláros dielektrikum molekuláira.



a) A szigetelt lemezek töltéseitől származó $\mathbf{E}_0$ eredeti elektromos térerősség



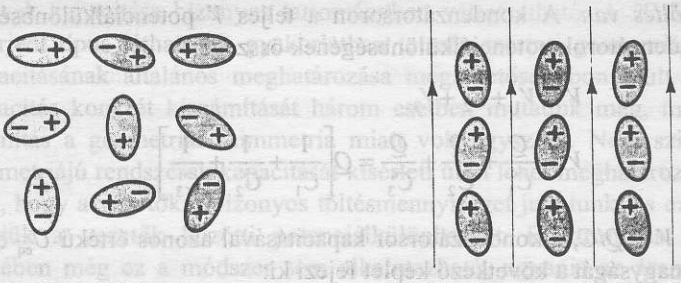
b) A lemezek közé helyezett dielektrikum felszínén indukált töltésektől származó $\mathbf{E}'$ indukált elektromos térerősség. (A lemezeket nem jelöltük.) Figyeljünk $\mathbf{E}'$ irányára.



c) Az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ eredő térerősség a dielektrikum belsejében kisebb, mint az eredeti $\mathbf{E}_0$ térerősség.

27-10 ábra
A töltött síkkondenzátor lemezei közé helyezett dielektrikum lecsökkenti a lemezek közötti elektromos térerősséget. Ennek eredményeként a kondenzátor kapacitása megnő.

POLÁROS DIELEKTRIKUM



a) Poláros dielektrikumban (ha nincs külső elektromos erőtér) a molekulák elektromos dipólusmomentumai rendezetlenek, véletlenszerűen helyezkednek el.

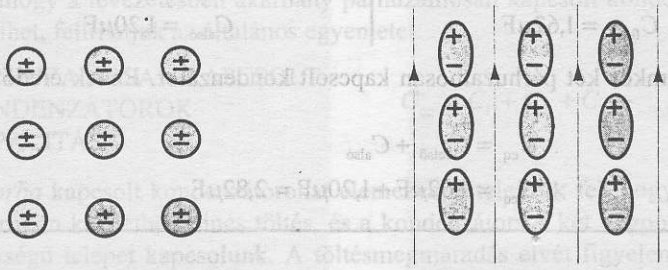
b) $\mathbf{E}_0$ térerősségű külső elektromos erőtér jelenlétében a poláros dielektrikum molekuláris elektromos dipólusai az erőtér irányába rendeződnek.

27.4 Dielektrikumok

A kondenzátorokat tárgyalva mindeddig feltételeztük, hogy a kondenzátorok lemezei között légüres tér van. Ezt azonban meglehetősen nehézkesen lehet megvalósítani, sőt, az sem biztos, hogy az ilyen kondenzátor tulajdonságai a legelőnyösebbek. Ha ugyanis, a lemezek közötti teret valamilyen szigetelő anyaggal töltjük ki, akkor a kondenzátor kapacitása és az alkalmazható feszültség is megnő – és ez mindenképpen előnyösebb tulajdonság. A következőkben tárgyalásunk homogén elektromos erőtérben elhelyezkedő homogén szigetelőkre vonatkozik.

Helyezzünk szigetelő anyagból, ún. **dielektrikumból** készült réteget egy feltöltött, egymástól szigetelt párhuzamos lemezekből álló kondenzátor lemezei közé. Azt vesszük észre, hogy a lemezek közötti feszültség *lecsökken*. Ennek okát, vagyis azt, hogy a dielektrikum hogyan viselkedik, ha elektromos erőtérbe kerül, molekuláris szinten kell keresnünk. A dielektrikumokat két; *poláros és nempoláros (apoláros) csoportba* oszthatjuk: a poláros dielektrikumok molekulái polárosak, a másikéi nempolárosak. A 27-8 ábrán

NEMPOLÁROS DIELEKTRIKUM



a) Nempoláros dielektrikumban (amikor nincs külső elektromos erőtér) a pozitív töltés középpontja a molekulában egybeesik a negatív töltések középpontjával, így a molekulának nincs elektromos dipólusmomentuma.

b) Ha a nempoláros dielektrikumra $\mathbf{E}_0$ térerősségű külső elektromos erőtér hat , a pozitív és a negatív töltés középpontja különválik, ami által elektromos dipólusmomentum keletkezik minden molekulában, és ez a külső térerősség irányába mutat.

27-9 ábra
Külső elektromos erőtér hatása *nempoláros* dielektrikum molekuláira.

27-1 TÁBLÁZAT Dielektromos állandók és dielektromos (átütési) szilárdságok közelítő* értékei

Anyag	Dielektromos állandó κ	Dielektromos szilárdság (10^6 V/cm)
Vákuum	1	–
Száraz levegő	1,00059	3
Víz	80	–
Üveg	4–6	13
Ricinusolaj	4,6	10
Polisztirol	2,5	15
Keménygumi	3	500
Csillám	5	3000
Titándioxid	100	150

* Ezek az értékek időben állandó elektromos erőtérre vonatkoznak. Periodikusan változó elektromos erőtér esetén ezek a mennyiségek frekvenciafüggők; továbbá a hőmérséklettől is függnek.

poláros dielektrikumot láthatunk, amelyet azért neveznek így, mert molekuláinak *permanens* elektromos dipólusmomentuma van. Az $\mathbf{E}_0$ térerősség jelenlétében (amit a kondenzátor lemezein lévő töltések hoznak létre) ezek a dipólusok igyekeznek a térerősség irányába beállni. Ezzel ellentétben, mint azt a 27-9 ábrán illusztráltuk, az apoláros dielektrikum molekuláinak nincs permanens dipólusmomentumuk, ugyanis a molekulákon belüli pozitív töltések súlypontja egybeesik a negatív töltésekével. Külső $\mathbf{E}_0$ térerősség hatására azonban a töltésközéppontok kissé széthúzódnak, és így a térerősség irányával megegyező irányú *indukált* dipólusmomentum jön létre. A dipólusoknak az erőtér irányába való rendeződése miatt az anyagok mindkét típusánál a térerősségre merőleges felületeken *indukált felületi töltéssűrűség* jön létre (27-10 ábra). Ezt a jelenséget **polarizációnak** nevezzük. Az indukált felületi töltésektől származó $\mathbf{E}'$ térerősség a dielektrikum belsejében az alkalmazott külső $\mathbf{E}_0$ elektromos térerősséggel éppen ellentétes irányú. A dielektrikum belsejében tehát az eredő $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ térerősség kisebb, mint az eredeti $\mathbf{E}_0$ térerősség. A (26-5) szerint

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\ell$$

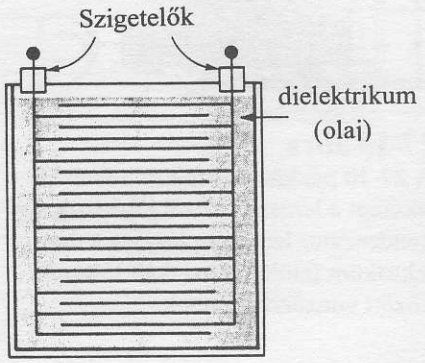
A kondenzátor lemezei közötti lecsökkent térerősségnek (adott töltésmennyiség esetén) kisebb potenciálkülönbség felel meg. Ennélfogva, a $C = Q/V$ definíció szerint, a kondenzátor eredeti C_0 kapacitása C értékre nő. C és C_0 hányadosát a dielektrikum **relatív permittivitásának vagy dielektromos állandójának** nevezzük, és κ-val jelöljük:

A κ DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ

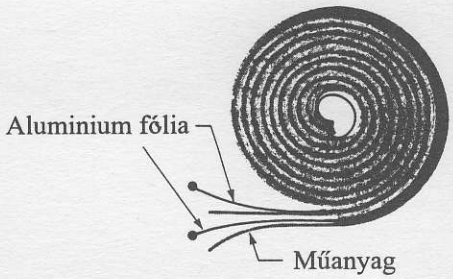
$$\kappa = \frac{C}{C_0} \quad \text{vagy} \quad C = \kappa C_0 \qquad \textbf{(27-11)}$$

ahol κ a görög *kappa* betű. Minden anyag dielektromos állandója nagyobb egynél. A 27-1 táblázatban néhány tipikus értéket soroltunk fel. Megfelelően erős térben bármely dielektrikum vezetővé válik; azt a legnagyobb elektromos térerősséget, amelyet a dielektrikum átütés nélkül kibír, **átütési szilárdságnak** nevezzük.

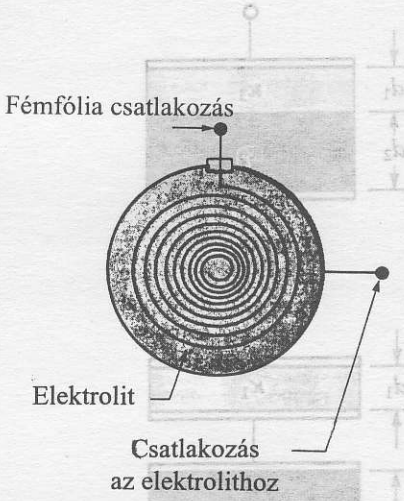
A dielektrikumnak a kondenzátorokban hármas szerepe van: (1) Egymáshoz nagyon közel lévő nagyon nagy fémlemezek közötti távolságtartást biztosítja. A legtöbb kondenzátorfajtában a lemezek fémfóliák, amelyeket papír vagy műanyagfóliák választanak el egymástól. (2) Adott geometriai



a) Nagyfeszültségű olajkondenzátor



b) Tekercselt kondenzátor



c) Elektrolitkondenzátor. A fémfólián lévő oxidréteg a szigetelő anyag a fólia és az elektrolit között.

27-11 ábra
Néhány, a kereskedelemben kapható kondenzátortípus

elrendezés esetében a dielektrikum κ-szorosra növeli a kapacitás nagyságát. (3) A dielektrikumok nagyobb térerősséget bírnak ki átütés nélkül, mint a levegő, így dielektrikummal a kondenzátor maximális feszültsége is nagyobb, mint anélkül.

Az *elektrolitkondenzátorok* méretükhöz viszonyítva nagy kapacitásúak. Az egyik vezető fémfólia, rendszerint alumínium vagy tantál; a másik vezető az elektrolit: olyan oldat, mely ionjainak mozgása által vezeti az elektromos áramot. A fémfólia felületén kémiai reakció eredményeként igen vékony, esetleg csak néhány atomrétegnyi szigetelő oxidréteg képződik. Minthogy a vezetők közötti távolság nagyon kicsiny, a kondenzátor kapacitása nagyon nagy. Az elektrolitkondenzátort széles körben használják, bár vannak korlátozó tényezők; ügyelni kell a polaritásra: a fémelektródnak mindig pozitívnak kell lennie, fordított polaritás esetén ugyanis az oxidréteget tönkretevő kémiai reakció zajlik le.

27-8 PÉLDA

Síkkondenzátor 40 cm^2-es lemezeit 0,5 mm vastag csillámlemez választja el egymástól. a) Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását. Számítsuk ki b) a kondenzátorra adható maximális feszültséget és c) az átütés nélkül tárolható maximális töltést.

MEGOLDÁS

a) A (27-4) és (27-11) összefüggések alkalmazásával

$$C = C_0 = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(5)(8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2})(40\times10^{-4}\,\mathrm{m^2})}{5\times10^{-4}\,\mathrm{m}}$$

$$C = 3{,}54\cdot10^{-10}\,\mathrm{F} = 0{,}354\,\mathrm{nF}$$

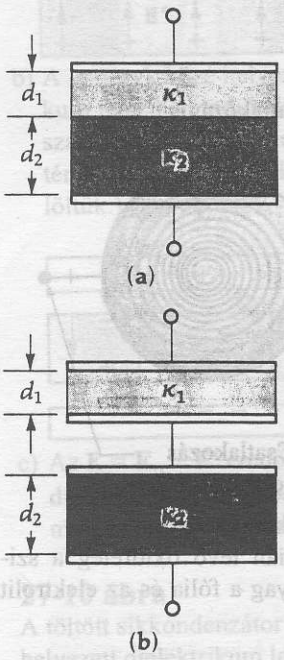
b) A kondenzátorra adható maximális feszültséget a csillám dielektromos szilárdsága szabja meg, melynek értéke 3×10^9 V/m. Ha a dielektrikum vastagsága $d = 5 \times 10^{-4}$ m, akkor

$$V_{\max} = Ed = (3\times10^9\,\mathrm{V/m})(5\times10^{-4}\,\mathrm{m}) = 1{,}5\times10^6\,\mathrm{V}$$

(A csillám esetleges egyenetlenségei miatt, a biztonságosan alkalmazható feszültséget ennél kisebbre kell választani.)

c) A maximális töltés

$$Q_{\max} = CV = (0{,}3543\times10^{-9}\,\mathrm{F})(1{,}5\times10^6\,\mathrm{V}) = 531\,\mu\mathrm{C}$$



27-12 ábra
A 27-9 példához. Síkkondenzátor két különböző dielektrikummal.

27-9 PÉLDA

Tekintsünk egy, a 27-12 ábrán illusztrált, A felületű síkkondenzátort, melyben a lemezek közötti erőteret két, különböző vastagságú dielektrikum tölti ki. Elhanyagolva a szélek hatását, számítsuk ki a kondenzátor kapacitását.

MEGOLDÁS

Ha a kondenzátor fel van töltve, az elektromos erőtér a dielektrikumok közötti határfelületre merőleges. Ez a határfelület tehát ekvipotenciális, és így vezető fémlapot helyezhetünk rá, anélkül, hogy az elektromos erőtér szerkezete megváltozna. Ezután a vezető lapot a 27-12b ábrán illusztrált módon kettéválaszthatjuk, s ekkor

két, egymással sorba kapcsolt kondenzátor keletkezik. A felső kondenzátor kapacitása $C_1 = \kappa_1 \varepsilon_0 A / d_1$, az alsóé pedig, $C_2 = \kappa_2 \varepsilon_0 A / d_2$. A sorba kapcsolt C_1 és C_2 kapacitású kondenzátorok eredője pedig

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right]$$

Innen C: $$C = \varepsilon_0 A\left[\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 d_2 + \kappa_2 d_1}\right]$$

27.5 A kondenzátor energiája

Miként azt már láttuk, adott töltéseloszlásnak U potenciális energiája van. Ennek következtében a rendszer munkát képes végezni. Feltöltött síkkondenzátor esetén ez több módon is történhet. Például, ha a lemezek szabadon elmozdulhatnának egymás felé, a lemezek között ható vonzóerő munkát végezhetne. Vagy, ha a töltések tudnának szabadon mozogni, akkor az egyes töltések végeznének munkát a lemezek közötti potenciálkülönbség következtében.

A potenciális energiát úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámítjuk azt a munkát, amelyet külső energiaforrással fektetünk be akkor, amikor a kondenzátort feltöltjük. A dW munkavégzés, amely ahhoz szükséges, hogy a dq töltést az alacsonyabb potenciálú lemezről a magasabb potenciálúra vigyük, az alábbi képlettel adható meg:

$$dW = V dq \qquad \textbf{(27-12)}$$

ahol V a lemezek közötti potenciálkülönbség. Ez utóbbi azonban függ attól, hogy eredetileg mennyi töltés volt a lemezeken, tehát $V = q/C$. Ezt a (27-12) képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

A W munkát, ami ahhoz szükséges, hogy a kondenzátorra Q töltést juttassunk, integrálással kaphatjuk meg:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\left(\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^Q = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right)$$

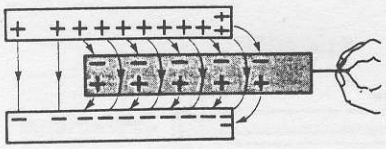
Minthogy a külső energiaforrás által végzett munka egyenlő a kondenzátor U potenciális energiájának a változásával, ezért

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right) \qquad \textbf{(27-13)}$$

Rendszerint sokkal könnyebb meghatározni a V potenciálkülönbséget, mint a Q töltést. Minthogy $Q = CV$, a (27-13) összefüggést átírhatjuk úgy, hogy csak a V és C változókat tartalmazza:

FELTÖLTÖTT KONDENZÁTORBAN TÁROLT U ENERGIA:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \qquad \textbf{(27-14)}$$



27-13 ábra
A 27-10 példához. Amikor a dielektrikumot a lemezek közül kihúzzuk, a kondenzátor lemezein lévő és a dielektrikum felületén indukált töltések között vonzóerők hatnak.

27-10 PÉLDA

Egy 2 nF kapacitású síkkondenzátort 100 V feszültségre töltünk fel, majd a töltő áramkörtől szigeteljük. A lemezek közötti dielektrikum csillám (κ = 5). a) Mekkora munkával tudjuk a lemezek közül a csillámlemezt kihúzni? b) Mekkora a kondenzátor feszültsége a csillámlemez eltávolítása után?

MEGOLDÁS

a) A csillámlap kihúzásakor munkát kell végeznünk, ugyanis a kondenzátor lemezein lévő töltések a csillám felületén indukált töltésekre vonzóerőt gyakorolnak (27-13 ábra). A szükséges munka a csillámmal kitöltött, illetve az üres kondenzátorok potenciális energiájának különbsége. Minthogy a lemezek Q töltése nem változik amikor a csillámlemezt eltávolítjuk, a potenciális energia kiszámítására a (27-13) összefüggés alkalmazható. Amint látni fogjuk, a V feszültség a dielektrikum eltávolításakor megváltozik. A kezdeti és végállapotban a potenciális energia:

$$U_k = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C_k}\right) \quad \text{és} \quad U_v = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C_v}\right)$$

Mivel a C_k kezdeti kapacitás (a dielektrikum jelenlétében) $C_k = \kappa\, C_v$

$$U_v = \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{Q^2}{C_k}\right)$$

A dielektrikum eltávolításakor a külső erő által végzett munka egyenlő a potenciális energia megváltozásával,

$$W = U_v - U_k = \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{Q^2}{C_k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C_k}\right)(\kappa - 1)$$

Hogy a munkavégzés nagyságát V_k függvényében kapjuk meg, elvégezzük a $Q = C_k V_k$ behelyettesítést :

$$W = 1/2(C_k V_k^2)(\kappa - 1) = 1/2(2\times10^{-9}\,\text{F})(100\,\text{V})^2(5-1) = 4{,}00\times10^{-5}\,\text{J}$$

A végeredmény pozitív előjele azt tanúsítja, hogy a kondenzátor energiája nagyobb, mint kezdeti állapotban. A többlet a dielektrikum kihúzásakor a külső erő által a rendszeren végzett munkából származik.

b) A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a dielektrikum kihúzása után:

$$V_v = \frac{Q}{C_v}$$

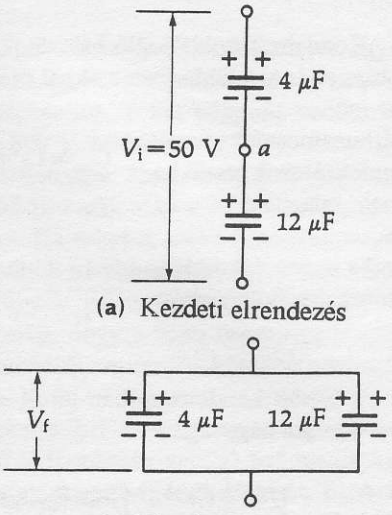
A $C_v = C_k/\kappa$ és a $Q = C_k V_k$ behelyettesítéseket elvégezve:

$$V_v = \kappa V_k = (5)(100\,\text{V}) = 500\,\text{V}$$

Noha a kondenzátor szigetelt volt és a rajta lévő töltés mennyisége nem változott meg, a lemezek közötti feszültség megnőtt.

27-11 PÉLDA

Tekintsük a 27-14a ábrán látható kapcsolást. A 4 μF-os és a 12 μF-os kondenzátort sorba kapcsoltuk, a végpontok közötti teljes potenciálkülönbség 50 V. Ezután a feltöltött kondenzátorokat egymástól és a feszültségforrástól elválasztjuk, és a 27-14b ábrán látható módon, azonos polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. a) Számítsuk ki a két különböző kapcsolásban a kondenzátorok potenciális energiáját. b) Számítsuk ki a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok feszültségét.



(a) Kezdeti elrendezés

(b) Végső elrendezés

27-14 ábra
A 27-11 példához.

MEGOLDÁS

a) A sorosan kötött kondenzátorok eredő kapacitását a (27-10) képlettel számíthatjuk ki:

$$\frac{1}{C_k} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\,\mu\text{F}} + \frac{1}{12\,\mu\text{F}}$$

ahonnan $C_k = 3\,\mu\text{F}$.

A sorba kapcsolt kondenzátorok potenciális energiája a (27-14) képlettel számítható ki,

ahonnan $U_k = 1/2(3\times10^{-6}\,\text{F})(50\,\text{V})^2 = 3{,}75\times10^{-3}\,\text{J}$.

Mint azt korábban láttuk, ha sorba kapcsolt kondenzátorokat töltünk fel, akkor minden egyes kondenzátoron ugyanakkora Q töltés lesz, melynek nagysága az adott esetben:

$$Q = C_k V_k = (3\times10^{-6}\,\text{F})(50\,\text{V}) = 1{,}5\times10^{-4}\,\text{C}$$

Amikor a kondenzátorokat szétválasztjuk, majd párhuzamosan kapcsoljuk őket, a töltés a *két* kondenzátoron $2Q = 3\times10^{-4}$ C lesz. A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitását a (27-13) képlettel számíthatjuk ki:

$$C = C_1 + C_2$$

ahonnan $C_v = 4\mu\text{F} + 12\mu\text{F} = 16\mu\text{F}$.

A potenciális energiát a végállapotban (27-13) adja meg:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right) = \frac{1}{2}\frac{(3\times10^{-4}\,\text{C})^2}{16\times10^{-6}\,\text{F}} = 2{,}81\times10^{-3}\,\text{J}$$

Figyeljük meg, hogy a potenciális energia csökkenése következett be.

$$\Delta U = U_v - U_k = 2{,}81\times10^{-3}\,\text{J} - 3{,}75\times10^{-3}\,\text{J} = -9{,}4\times10^{-4}\,\text{J}$$

b) A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokon lévő V_v potenciálkülönbséget a $Q = CV$ összefüggés alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$V_v = \frac{Q_v}{C_v} = \frac{3\times10^{-4}\,\text{C}}{16\times10^{-6}\,\text{F}} = 18{,}8\,\text{V}$$

27.6 Az elektromos erőtér energiája

Az előbbi példa néhány kérdést vet fel. Minthogy a végállapotban kisebb a rendszer energiája, mint a kezdeti állapotban, felvetődhet, hogy hová tűnik a „hiányzó" energia? A feltöltött kondenzátorban (avagy töltött részecske környezetében) „hol van", (annak mely pontjához rendelhető) a potenciális energia? Az első kérdésre úgy válaszolhatunk, hogy a töltésátrendeződés a kondenzátorokat összekötő huzalokon keresztül történik; a töltések áramlása, az áram melegíti a huzalokat. Megmutatható, hogy akármilyen kicsiny is a huzalok ellenállása, a bennük fejlődő hő pontosan egyenlő az energiahiánynyal. (Az ellenállás fogalmát a következő fejezetben tárgyaljuk.)

A másik, arra vonatkozó kérdés, hogy fizikailag *hol* van a potenciális energia, fontos új fogalom megalkotásához vezet. Tekintsünk egy feltöltött kondenzátort. Ha gondolatban egy kicsiny dq töltést a pozitív lemezből kiemelünk, és magára hagyunk, akkor az a lemezek közötti elektromos erőtér hatására, a negatív lemez felé gyorsul. A dq töltés által nyert mozgási energia az elektromos térerősség csökkenésével jár együtt (hiszen a lemezek töltése kisebb lett). Jogosan feltételezhetjük tehát, hogy a *feltöltött kondenzátor potenciális energiája az elektromos erőtérhez köthető.*

A síkkondenzátorok speciális esetét vizsgálva – a kondenzátorban létrejövő erőtér homogenitása miatt – egyszerűen meghatározhatjuk az elektromos erőtérben tárolt energiát. Mint már láttuk, a síkkondenzátor esetében $C = \varepsilon_0 A/d$ és $V = Ed$. Ezeket felhasználva, a feltöltött kondenzátor U potenciális energiája:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad) \qquad \textbf{(27-15)}$$

Vegyük észre, hogy (Ad) az a térfogat, amelyet az elektromos erőtér betölt a lemezek között. Definiáljuk az elektromos erőtér (joule/m^3 egységekben megadott) u_E **energiasűrűségét,** mint az *egységnyi térfogatra jutó energiát*:

$$u_E = \frac{U}{Ad} = \frac{1/2\varepsilon_0 E^2 Ad}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR u_E ENERGIASŰRŰSÉGE (vákuumban)

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \textbf{(27-16)}$$

Dielektrikum jelenlétében a C kapacitás κ-szorosa lenne. A fenti levezetés azt eredményezné[4], hogy

AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR u_E ENERGIASŰRŰSÉGE (dielektrikumban)

$$u_E = \frac{1}{2}\kappa\,\varepsilon_0 E^2 \qquad \textbf{(27-17)}$$

Noha a (27-16) és (27-17) képleteket a síkkondenzátor lemezei közötti homogén elektromos erőtér esetére vezettük le, az összefüggések általános érvényűek, azaz tetszőleges térerősségeloszlásra is érvényesek.

[4] Bizonyos dielektrikumok elektromos dipólusmomentuma permanenssé válik, ha megolvasztás után elektromos tér jelenlétében hűlnek le. Az így kapott *elektréteknek* permanens elektromos erőterük van (hasonlóan, mint ahogy a mágneseknek permanens mágneses terük van).

27-12 PÉLDA

Szigetelt R sugarú vezető gömb felületén Q töltés van. Mutassuk meg, hogy a gömböt környező elektromos erőtérben tárolt energia egyenlő a C kapacitású, Q töltésű feltöltött kondenzátorban tárolttal, $U = 1/2\ (Q^2/C)$ ahol C az izolált gömb kapacitása.

MEGOLDÁS

Az izolált gömb kapacitása, (27-6) szerint, $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. A kondenzátorban tárolt energia tehát

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \qquad \textbf{(27-18)}$$

A feltöltött gömbön kívüli Coulomb-tér térerőssége $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Ennek bármely pontján az erőtér u_E energiasűrűsége:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

A teljes környező erőtérben tárolt energia kiszámításához vegyük figyelembe a rendszer gömbszimmetriáját (E csak az r sugárirányú távolságtól függ), és fejezzük ki a dr vastagságú r sugarú gömbhéj dU energiáját. A vékony gömbhéj térfogata $dV = 4\pi r^2 dr$, energiája:

$$dU = u_E dV = \left(\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\right)(4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

Az $r = R$ és $r = \infty$ határok között integrálva megkapjuk az erőtér teljes energiáját.

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Ez valóban megegyezik a (27-18) eredménnyel.

Összefoglalás

A kondenzátor két, egymástól szigetelővel elválasztott vezetőből áll, és töltést képes tárolni. A kondenzátor a C *kapacitással* jellemezhető:

Általános definíció: $$C = \frac{Q}{V}$$

ahol Q a töltés abszolút értéke a kondenzátor egyik lemezén (fegyverzetén), és V a potenciálkülönbség. A kapacitás SI egysége az 1 farad (F) vagy 1 C/V. A kapacitás nagysága kizárólag a vezetők geometriai elrendezésétől függ. A legegyszerűbb kondenzátor két egymással párhuzamos, egymástól d távolságra lévő, A felületű fémlemezből áll, melyek között vákuum van. Ennek kapacitása párhuzamos lemezek esetén:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d},$$

ahol ε_0 a vákuum permittivitása (dielektromos állandója). A fejezetben más geometriájú kondenzátorokkal is foglalkoztunk.

Kondenzátorokból álló hálózatok esetében, az eredő *kapacitás* az alábbi formulákkal számítható:

Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása: $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$

Sorba kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$

A töltött kondenzátorban tárolt elektromos potenciális energia nagysága:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{[joule egységekben]}$$

Az E térerősségű elektromos erőtér u_E energiasűrűsége:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad \text{[joule / m}^3 \text{ egységekben]}$$

Ha κ dielektromos állandójú dielektrikumot feltöltött kondenzátor lemezei közé helyezünk, a kondenzátor kapacitása κ-szorosára növekszik:

$$C = \kappa C_0$$

a potenciálkülönbség pedig κ-val arányosan csökken:

$$V = \frac{V_o}{\kappa}$$

A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség csökken, mert a lemezek töltéseinek elektromos erőtere a dielektrikum elektromos dipólusait az erőtér irányába rendezi; ezek a dielektrikumban a külső erőtérrel ellentétes irányú erőteret hoznak létre, és így csökkentik az eredő térerősséget (illetve a potenciálkülönbséget).

Kérdések

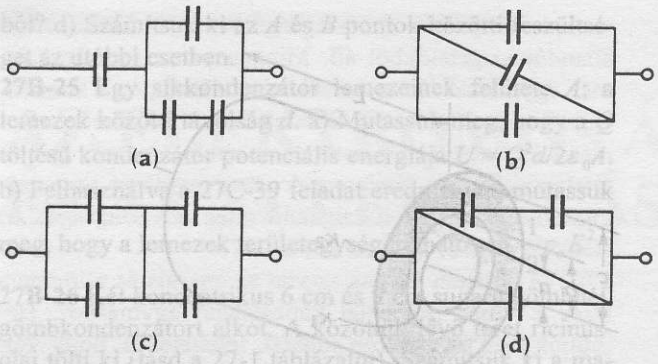
1. A feltöltött síkkondenzátor lemezei közötti elektromos erőtér szerkezete változatlan marad, ha a lemezek közé, velük párhuzamosan vékony fémfóliát helyezünk. Miért?
2. Miért arányos egy izolált gömb kapacitása a sugarával? Magyarázzuk ezt meg, minél elemibb fogalmakat használva.
3. Ha a kondenzátor széleinek hatását is figyelembe vennénk, nagyobb vagy kisebb értéket kapnánk a kapacitás nagyságára? Miért?
4. Lehetséges-e az, hogy a kondenzátor lemezein különböző nagyságú töltések legyenek?
5. Miért nem szabad, hogy levegőbuborékok legyenek az olajtöltésű kondenzátorok töltőolajában?
6. Telephez nem csatlakoztatott, feltöltött síkkondenzátor lemezei közé szigetelő réteget helyezünk. Megváltozik-e, és ha igen, hogyan, a kondenzátorban tárolt energia és a lemezek közötti potenciálkülönbség.
7. Három különböző kapacitású kondenzátor különböző kombinációival hány különböző nagyságú kapacitás állítható elő?
8. Noha a víznek nagy a dielektromos állandója, mégsem alkalmazzák a kondenzátorokban dielektrikumként. Miért?
9. A kondenzátorokat gyakran úgy tárolják, hogy a lemezeket huzallal rövidrezárják. Miért?
10. Hogyan függ össze egy adott típusú kondenzátor mérete és a benne tárolható maximális energia?
11. Szigetelt, feltöltött olajtöltésű kondenzátor kilyukad, az olaj elcsurog. Hogyan változik meg a kondenzátor lemezei közötti feszültség?
12. Síkkondenzátor lemezeinek szélét olajfürdőbe merítjük. Az olaj a kapilláris erők következtében egy bizonyos magasságig beszívódik a lemezek közé,. Vajon ez a magasság függ-e a lemezek közötti potenciálkülönbségtől, vagy nem? Ha igen, miként függ, és miért?
13. Fejtsük ki, hogy milyen nehézségek lépnének fel, ha a légköri elektromosságot, a Föld légkörében mindig jelen lévő elektromos erőteret, mint energiaforrást kívánnánk gyakorlati célokra kiaknázni.
14. Tekintsünk a 26. fejezet 26-15 ábráján vázolt két, egymástól izolált fémgömböt. Ezek külön-külön, a (27-8) képlettel jellemzett kapacitásúak. Mekkora lesz az eredő kapacitás, ha vékony vezető huzallal összekötjük a két gömböt? (Sorba vagy párhuzamosan vannak kapcsolva?)

Feladatok

27.2 A kapacitás fogalma
27.3 Kondenzátorok kapcsolása

27A-1 Két, egymástól 1 mm-re lévő, 1 cm^2 felületű, egymással párhuzamos lemez által alkotott kondenzátor kapacitása kb. 1 pF. Számítsuk ki a kapacitás pontos értékét.

27A-2 Az *ionoszféra* a Föld atmoszférájának felső részében, kb. az 50 és 1000 km magasságok között található. A Napból jövő ibolyántúli sugárzás hatására annyira ionizálódik, olyan nagy benne a szabad elektronok koncentrációja ($\approx 10^{11}$ m^3), hogy az a rádióhullámok terjedését befolyásolja. Az ionizált réteg vastagsága és az ionizáció mértéke napszaktól, évszaktól, napfolttevékenységtől és sok más tényezőtől függ. Tekintsük a Föld felszínét és az ionoszféra 80 km magasan lévő alsó szélét egy gömbkondenzátornak. Számítsuk ki ennek kapacitását.

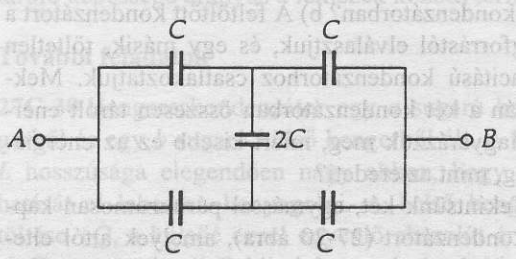


27-15 ábra
A 27A-3 feladathoz

27A-3 Határozzuk meg a 27-15 ábra áramköreinek eredő kapacitását. Minden kondenzátor C kapacitású.

27B-4 n darab azonos kapacitású kondenzátort párhuzamosan és sorosan kapcsolhatunk. Ha párhuzamosan kapcsoljuk, az eredő kapacitás N-szerese annak, mint ha sorba kapcsolnánk. Fejezzük ki N-et n függvényeként.

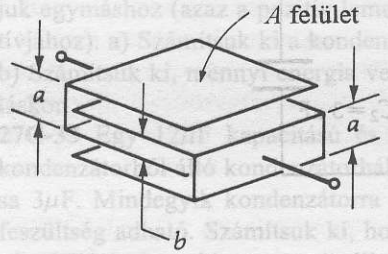
27B-5 Számítsuk ki a 27-16 ábrán látható kapacitásokból álló hálózat A és B pontja között az eredő kapacitást. (Útmutatás: Tekintsük az A és B közötti potenciálkülönbséget és számítsuk ki, hogy a töltések hogyan oszlanak el a kondenzátorok között.)



27-16 ábra
A 27B-5 feladathoz

27B-6 Ismeretlen kapacitású kondenzátort 100 V feszültségre töltünk fel, majd feltöltetlen, 10 μF-os kondenzátorral párhuzamosan kapcsoljuk. A kondenzátorok lemezein mérhető feszültség ekkor 30 V-ra csökken. Számítsuk ki az ismeretlen kapacitást.

27B-7 Számítsuk ki a 27-17 ábrán látható kondenzátor kapacitását. Hanyagoljuk el a lemezek széleinél az erőtér inhomogenitásának a hatását. Indokoljuk meg a számítás egyes lépéseit.



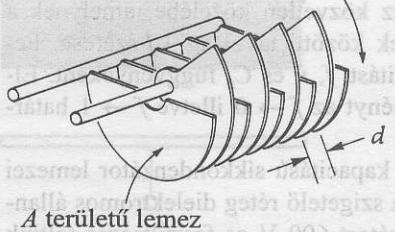
27-17 ábra
A 27B-7 feladathoz

27B-8 A 2μF és 3μF kapacitású kondenzátorra egyenként V_{max} maximális feszültség adható. Ha e két kondenzátort sorba kapcsoljuk, a két végpont közötti maximális feszültség 800 V. Mekkora V_{max}?

27B-9 A gömbkondenzátor kapacitása a (27-7) képlet szerint $C = 4\pi\varepsilon_0[ab/(b - a)]$, ahol a és b a belső, illetve külső gömb sugara. Ha mind a, mind b nagyon naggyá válik, (de különbségük továbbra is kicsiny) egy kis tartományban a felületek párhuzamos síkokkal közelíthetők. Mutassuk meg, hogy a fenti összefüggés a síkkondenzátor kapacitását megadó képletté egyszerűsödik.

27B-10 Sorba kapcsolt 2μF és 6μF kondenzátorok végpontjai között 200 V feszültség van. a) Számítsuk ki az egyes kondenzátorok feszültségét és töltését. b) A feltöltött kondenzátorokat egymástól és a feszültségforrástól elválasztjuk, majd azonos polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. Számítsuk ki ezután az egyes kondenzátorok feszültséget és töltését. c) Ha a b) pontban leírt eljárást úgy hajtjuk végre, hogy a kondenzátorokat ellentétes polaritással kapcsoljuk párhuzamosan, mekkora lesz az egyes kondenzátorokon a feszültség és a töltés?

27B-11 A 27-18 ábrán olyan változtatható kapacitású kondenzátort láthatunk, amelyet a rádiók hangolóegységében általánosan használnak. Minden második lemez egymáshoz van erősítve,; az egyik lemezcsoport áll, a másik elforgatható, így a két csoport lemezeinek átfedése változtatható. Minden egyes lemez területe A, az egyes csoportok lemezei a másik csoport szomszédos lemezétől d távolságra vannak. Az összes lemez száma n. Elhanyagolva a lemezek széleinél az erőtér inhomogenitásának a hatását, mutassuk meg, hogy a maximális kapacitás $C = (\varepsilon_0 A/d)(n - 1)$.



27-18 ábra
A 27B-11 feladathoz

27.4 Dielektrikumok

27A-12 Becsüljük meg azt a legnagyobb potenciált, amelyre egy 10 cm átmérőjű fémgömböt fel lehet tölteni, anélkül, hogy a térerősség értéke meghaladná a környező száraz levegő dielektromos átütési szilárd-ságát.

27B-13 Szigetelt síkkondenzátor töltése kezdetben Q. A kondenzátort κ dielektromos állandójú szigetelő réteg-

gel töltjük ki. Mutassuk meg, hogy a szigetelő réteg felszínén megjelenő indukált töltés $Q' = (1 - 1/\kappa)Q$.

27B-14 Izolált, feltöltött síkkondenzátor lemezei közötti távolság 1 mm, a feszültség V_0. A lemezeket 4 mm-re távolítjuk el egymástól (a töltés a lemezeken ezalatt változatlan) és közéjük szigetelő réteget helyezünk, amely teljesen kitölti a lemezek közti teret. A kondenzátor feszültsége ezután $V_0/2$. Számítsuk ki a szigetelő réteg dielektromos állandóját.

27B-15 Síkkondenzátort (C = 5 pF) egy 20 V-os feszültségforráshoz kapcsolunk, majd: 1) Egy szigetelő réteget illesztünk a lemezek közé, (x = 4) amely a lemezek közötti teret teljesen kitölti;. 2) A kondenzátort elválasztjuk a feszültségforrástól.; 3) A szigetelő réteget kihúzzuk. Számítsuk ki a) a kondenzátor Q töltését és b) a V feszültségét az eljárás végén.

27B-16 A Geiger-cső, amelyet sugárzások detektálására használunk, zárt, üreges, vezető hengerből és tengelye mentén kifeszített vékony huzalból áll. A henger belső átmérője 2,5 cm, a huzalé pedig 0,2 mm. Ha a henger és a huzal közötti térben lévő gáz dielektromos szilárdsága $1{,}2 \times 10^6$ V/m, akkor mekkora V_{max} maximális feszültséget lehet a henger és a huzal közé kapcsolni az átütés veszélye nélkül?

27B-17 Síkkondenzátort terveznek olyan szigetelő anyag felhasználásával, melynek dielektromos állandója 3 és dielektromos átütési szilárdsága 2×10^8 V/m. A kondenzátor névleges kapacitása 0,25 μF, a ráadható maximális feszültség 4000 V. Számítsuk ki a lemezek minimális területét.

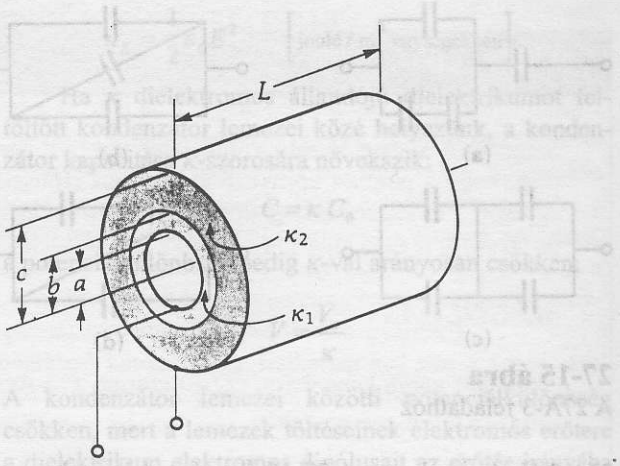
27B-18 Egy 1μF-os síkkondenzátorban polisztirolt használnak dielektrikumként. A maximális alkalmazható feszültség 1 kV. Feltéve, hogy a két vezető lemez mindegyike a kondenzátor térfogatának egynyolcadát tölti ki, számítsuk ki a kondenzátor össztérfogatát.

27B-19 Egy C_0 kapacitású síkkondenzátor lemezei között levegő van. A kondenzátor lemezei közé κ dielektromos állandójú olyan szigetelő réteget helyezünk az egyik lemez közvetlen közelébe, amelynek a vastagsága a lemezek közötti távolság $1/f$-szerese. Fejezzük ki a C kapacitást, f, κ és C_0 függvényeként. Ellenőrizzük az eredményt az $f \to 0$ illetve $f \to 1$ határesetek elemzésével.

27B-20 Egy 0,1 μF kapacitású síkkondenzátor lemezei 0,75 m^2 területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója 2,5. A kondenzátort 600 V-os feszültségre töltjük fel. a) Számítsuk ki a lemezek töltését. b) Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltést. c) Számítsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

27B-21 Tekintsünk egy hengereskondenzátort, melyben a belső és külső hengerek között két réteg szigetelő anyag van (27-19 ábra). Elhanyagolva a szélek hatását, határozzuk meg, hogy C kapacitása miként függ az ábrán megadott paraméterektől.

27B-22 A síkkondenzátor lemezei közötti V térfogatú térrészt κ dielektromos állandójú, E_{max} dielektromos szilárdságú szigetelő anyag tölti ki. Adjuk meg, hogy



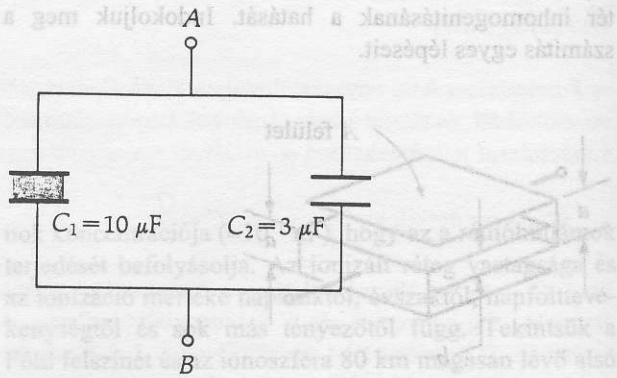
27-19 ábra
A 27B-21 feladathoz

hogyan függ az alkalmazható maximális feszültség V_{max} a megadott mennyiségektől.

27.5 A kondenzátor energiája
27.6 Az elektromos erőtér energiája

27A-23 Egy 8μF kapacitású kondenzátort 20 V-os feszültség-forráshoz kapcsolunk. a) Mekkora energia tárolódik a kondenzátorban? b) A feltöltött kondenzátort a feszültségforrástól elválasztjuk, és egy másik, töltetlen 8μF kapacitású kondenzátorhoz csatlakoztatjuk. Mekkora ezután a két kondenzátorban összesen tárolt energia? c) Magyarázzuk meg, miért kisebb ez az energiamennyiség, mint az eredeti?

27B-24 Tekintsünk két, egymással párhuzamosan kapcsolt síkkondenzátort (27-20 ábra), amelyek attól eltekintve, hogy a C_1 kondenzátorban szigetelő réteg is van, azonosak. Az A és B pontok közé 150 V feszültséget kapcsolunk, majd a feszültségforrást eltávolítjuk. a) Számítsuk ki a töltést az egyes kondenzátorokon; b) Számítsuk ki az egyes kondenzátorokban tárolt energiát; c) Mekkora lesz az egyes kondenzátorokban tárolt energia, ha a szigetelő réteget eltávolítjuk a C_1 kondenzátor-



27-20 ábra
A 27B-24 feladathoz

ból? d) Számítsuk ki az A és B pontok közötti feszültséget az utóbbi esetben.

27B-25 Egy síkkondenzátor lemezeinek felülete A; a lemezek közötti távolság d. a) Mutassuk meg, hogy a Q töltésű kondenzátor potenciális energiája $U = Q^2d/2\varepsilon_0A$. b) Felhasználva a 27C-39 feladat eredményét, mutassuk meg, hogy a lemezek területegységére ható erő $\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$.

27B-26 Két koncentrikus 6 cm és 9 cm sugarú gömbhéj, gömbkondenzátort alkot. A közöttük lévő teret ricinusolaj tölti ki (lásd a 27-1 táblázatot). Számítsuk ki a maximális energiát, amit e kondenzátor az átütés veszélye nélkül tárolhat.

27B-27 A lemezei között polisztirol réteget tartalmazó síkkondenzátor kapacitása 10 nF (10×10^{-9} F). A kondenzátort egy 100 V-os feszültségű telephez kapcsoljuk, és a szigetelő réteget eltávolítjuk a lemezek közül. Számítsuk ki a) valamelyik lemezen a töltésváltozást; b) a tárolt energia változását; c) a szigetelő réteg eltávolításához szükséges munkát.

27A-28 Egy 50 cm átmérőjű fémgömböt 10 kV potenciálra töltünk fel. Számítsuk ki a gömb felszínének közvetlen környezetében az energiasűrűséget.

28B-29 Mutassuk meg, hogy a síkkondenzátor energiatároló képessége arányos a lemezek közötti térfogattal.

További feladatok

27C-30 Hengereskondenzátor egy a sugarú belső hengerből és egy b sugarú külső hengerből áll. A hengerek L hosszúsága elegendően nagy ahhoz, hogy a szélek hatását el lehessen hanyagolni. A belső henger teljes töltése $+Q$, a külsőé ezzel egyenlő abszolút értékű $-Q$. a) Gauss törvényéből kiindulva, számítsuk ki a hengerek közötti E elektromos térerősséget. b) Számítsuk ki a hengerek közötti potenciálkülönbséget a megadott paraméterek függvényében. c) Számítsuk ki a C kapacitást.

27C-31 Mutassuk meg, hogy az L hosszúságú hengerkondenzátor kapacitását megadó képlet, $C = 2\pi\varepsilon_0L/\ln(b/a)$ a síkkondenzátor kapacitását kifejező egyenletté egyszerűsödik, ha $(b - a) << b$.

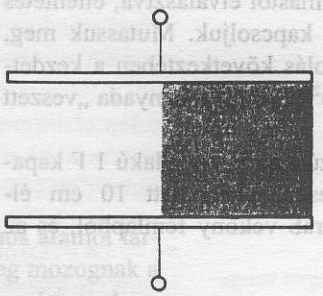
27C-32 Egy 4μF kapacitású és egy 12μF kapacitású kondenzátort párhuzamosan kapcsolunk és 600 V feszültségforráshoz kötünk. Egy idő után a feszültségforrást és a kondenzátorokat szétválasztjuk és a két kondenzátort fordított polaritással párhuzamosan kapcsoljuk egymáshoz (azaz a pozitív lemezeket a másik negatívjához). a) Számítsuk ki a kondenzátorok feszültségét; b) Számítsuk ki, mennyi energia veszett el az átkapcsoláskor.

27C-33 Egy 12μF kapacitású és két 2μF kapacitású kondenzátorból álló kondenzátorhálózat eredő kapacitása 3μF. Mindegyik kondenzátorra maximálisan 200 V feszültség adható. Számítsuk ki, hogy az adott kondenzátorhálózatra mekkora maximális feszültség kapcsolható.

27C-34 Síkkondenzátor lemezeinek felülete A, a lemezek távolsága d. A lemezek közé egy ugyanekkora felületű, t ($t < d$) vastagságú rézlemezt csúsztatunk be a két lemeztől egyenlő távolságban. a) Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását ebben az esetben; b) Mozdítsuk el a rézlemezt az egyik lemez felé, annyira, hogy a rézlemeznek az egyik lemeztől való távolsága legyen éppen kétszerese a másiktól vett távolságnak. Mekkora ebben az esetben a kapacitás?

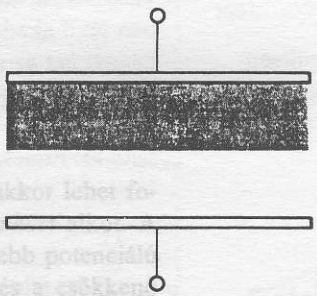
27C-35 A koaxiális kábel szigetelt huzalból, és azt körbevevő, fémszálakból szőtt hengeres vezetőből áll. A szigetelés dielektromos állandója κ, a belső huzal sugara a, a külső vezető sugara b. Fejezzük ki az egységnyi hosszúságú kábel C kapacitását a megadott paraméterek függvényeként.

27C-36 Egy κ dielektromos állandójú szigetelő réteg egy síkkondenzátor lemezei közötti teret az 27-21 ábrán vázolt módon csak félig tölt ki. Adjuk meg, hogy a teljes energia hányadrésze tárolódik a szigetelő rétegben.



27-21 ábra
A 27C-36 feladathoz

27C-37 Oldjuk meg az előző feladatot a 27-22 ábrán vázolt kondenzátor esetére.



27-22 ábra
A 27C-37 feladathoz

27C-38 Egy C_1 =2μF kapacitású és egy C_2 =6μF kapacitású feltöltetlen kondenzátort sorba kapcsolva egy 200 V-os feszültség-forráshoz csatlakoztatunk. Ezután először a feszültség-forrástól, majd egymástól is szétválasztjuk, végezetül azonos polaritással párhuzamosan kapcsoljuk őket. a) Számítsuk ki a kondenzátorok feszültségét és töltését; b) Számítsuk ki a kondenzátorokban tárolt energiát a kezdeti és a végállapotban (ha az energia netán megváltozott volna, magyarázzuk meg, mi történt az

„elveszett" energiával); c) Tételezzük fel, hogy az utolsó lépésben nem azonos, hanem ellentétes polaritással kapcsoljuk párhuzamosan a kondenzátorokat. Adjunk választ az a) és b) kérdésekre ebben az esetben is.

27C-39 Határozzuk meg, hogy mekkora erővel vonzzák egymást a síkkondenzátor lemezei. A kondenzátor kapacitása C, a lemezek közötti potenciálkülönbség V, távolságuk d. (Útmutatás: Számítsuk ki, hogy mennyivel változik a tárolt energia a lemezek távolságának kicsiny dx megváltozása miatt. Ez éppen a $dW = Fdx$ munkával egyenlő.)

27C-40 Tekintsünk két koncentrikus vezető gömbhéjat, melyeken ellentétes előjelű, egyenlő nagyságú töltés van. a) Felhasználva az $u_E = \varepsilon_0 E^2$ képletet, számítsuk ki a gömbhéjak közötti térben tárolt energiát. b) Mutassuk meg, hogy ez egyenlő a kondenzátorban tárolt $1/2CV^2$ energiával.

27C-41 Töltsük fel a sorba kapcsolt a C_1 és C_2 kondenzátort. Ezután a két kondenzátort először a feltöltő feszültségforrástól, majd egymástól elválasztva, ellentétes polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. Mutassuk meg, hogy a párhuzamos kapcsolás következtében a kezdetben tárolt energia $(C_1 - C_2)^2/(C_1 + C_2)^2$ hányada „veszett el".

27C-42 Egy 10 cm élhosszúságú kocka alakú 1 F kapacitású kondenzátor rétegesen elhelyezett 10 cm élhosszúságú, összesen n darab vékony fémlapból, és az ezek között lévő d vastagságú $\kappa = 3$ dielektromos állandójúszigetelőkből áll. Minden páros sorszámú lemez egymással fémes összekötése alkotja; ez a kondenzátor egyik kivezetése; hasonlóképpen a kondenzátor másik kivezetését a páratlan sorszámú lemezek. a) Feltételezve, hogy a fémlemezek elhanyagolható vastagságúak, számítsuk ki a szigetelő réteg d vastagságát. b) Hány fémlapból áll a kondenzátor?

27C-43 Einstein állítása szerint az energia és a tömeg a híres $E = mc^2$ képlettel kapcsolható egymáshoz. Becsüljük meg az elektron sugarát, feltételezve, hogy töltése egy R sugarú gömb felszínén egyenletesen oszlik el, és az mc^2 energia egyenlő az elektromos erőtér energiájával. (Megjegyzés: noha a kapott érték hasznos lehet egyes elméleti meggondolásokban, ezt a klasszikus modellt nem kell túl komolyan venni. Az elektron sugarára adódó érték alapvetően függ a választott modelltől; illetve ha kísérletileg kívánjuk meghatározni, akkor a mérési módszertől. Nagyenergiájú részecskék szóródására vonatkozó kísérletek eredményei arra utalnak, hogy az elektron töltése az így becsült sugárnál legalább két nagyságrenddel kisebb tartományban koncentrálódik.)

27C-44 Töltött gömbkondenzátor szigetelő réteggel elválasztott két vezető gömbhéjból áll. A belső gömbhéj sugara a, a külsőé b. Határozzuk meg, hogy a teljes tárolt energia fele mekkora r sugarú ($a < r < b$) gömbhéjon belül koncentrálódik.

XXVII. Fejezet

27A-1 0,885 pF

27A-3 a) $\frac{3}{5}C$ b) $3C$ c) C d) A kondenzátorok rövidre vannak zárva

27B-5 C

27B-7 $C = \varepsilon_o A(a + b)/[b(a - b)]$

27B-9 A válasz adott.

27B-11 A válasz adott.

27B-13 A válasz adott.

27B-15 a) 400 pC b) 80 V

27B-17 0,188 m^2

27B-19 $C = C_o/(1 - f)$k

27B-21 $2\pi\varepsilon_o L\kappa_1\kappa_2\left[\kappa_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \kappa_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$

27A-23 a) 1,60 mJ b) 0,800 mJ

27B-25 A válasz adott.

27B-27 a) 600 nC, csökken b) 30 μJ, csökken c) 30 μJ

27B-29 A válasz adott.

27C-31 A válasz adott.

27C-33 267 V

27C-35 $C/L = \kappa 2\pi\varepsilon_o/[\ln(b/a)]$

27C-37 $1/(1 + \kappa)$

27C-39 $CV^2/2d$

27C-41 A válasz adott.

27C-43 $1{,}41 \times 10^{-15}$ m

XXVIII. Fejezet

28A-1 $3{,}12 \times 10^{19}$ elektron/s

28B-3 a) $5{,}86 \times 10^{28}$ elektron/m^3 b) 51,9 mA c) $1{,}76 \times 10^{-6}$ m/s

28A-5 0,667 Ω

28A-7 418C°

28A-9 276C°

28B-11 1,56 R

28B-13 1,66 V

28A-15 5,25 W

28A-17 a) 11,1 Ω b) 1,08 A

28A-19 a) 66,7%-kal nagyobb teljesítmény b) Nem

28A-21 $\rho L/\pi(b^2 - a^2)$

28B-25 a) 2,16 kW b) 1,34 hp c) 46,3%

28B-27 a) $9{,}36 \times 10^{11}$ részecske b) 6,00 W

28A-29 $6{,}00 \times 10^{-15}$ s

28B-31 $4{,}17 \times 10^{6}$ A/m^2

28B-33 A válasz adott.

28C-35 A válasz adott.

28C-37 A válasz adott.

28C-39 SI egységekben: a) $4000V^{2/3}$; $(2{,}50 \times 10^{-4})V^{5/2}$

28C-41 A válasz adott.

28C-43 8,32 h

28C-45 $(b - a)/4\pi ab\sigma$

28C-47 A válasz adott.

28C-49 A válasz adott.

XXIX. Fejezet

29A-1 220 Ω

29B-3 a) A b) B c) 4,50

29B-5 A válasz adott.

29B-7 $R_{AB} = \frac{7}{5}R$

29B-9 wattban: $10, 16, 24, 30, 40, 53\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}, 100, 160$

29A-11 9,20 V

29A-13 A válasz adott.

29A-15 A válasz adott.

29B-17 a) 5,00 Ω b) 6,00 A c) 2,00 A

29B-19 0,0860 Ω

29B-21 2,67 mA R_1-en;2,50 mA R_2-n;0,167 mA R_3-on

29B-23 A válasz adott.

29B-25 A válasz adott.

29B-27 a) 2,41 kΩ b) 2,46 kΩ

29B-29 a) 0,517% b) 0,103%

29B-31 $R_1 = 5{,}025 \times 10^{-3}$ Ω; $R_2 = 4{,}523 \times 10^{-2}$ Ω; $R_3 = 4{,}523 \times 10^{-1}$ Ω; $R_4 = 4{,}523$ Ω

29B-33 A válasz adott.

29A-35 A válasz adott.

29B-37 0,587 MΩ

29B-39 A válasz adott.

29B-41 1,44 μF

29C-43 $R_1 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_C$;
$R_2 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_A$;
$R_3 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_B$;

29C-45 $R_A = R_1 R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_B = R_1 R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_C = R_2 R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;

29C-47 $R(1 + \sqrt{3})$

29C-49 A válasz adott.

29C-51 A válasz adott.

29C-53 A válasz adott.

29C-55 201 Ω

29C-57 $R/2$

29C-59 163 V; 1.43 MΩ

29C-61 0,050 J R_1-en; 0,0167 J R_2-n

29C-63 6,90 Hz

XXX. Fejezet

30A-1 $1{,}86 \times 10^{-6}$ m/s

30B-3 $F = 1{,}44 \times 10^{-13}\,\hat{y} - 3{,}36 \times 10^{-13}\,\hat{z}$ (newtonban)

30A-5 1,20 keV

30A-7 0,357 T

30B-9 $R_\alpha = R_p = 42{,}8R$

30B-11 $R = \sqrt{2mV / qB^2}$

30A-13 $7{,}78 \times 10^{5}$ m/s

30B-15 $2{,}44 \times 10^{5}$ V/m

30B-17 b) 0,708 T

AZ ELEKTROMOS ÁRAM ÉS AZ ELLENÁLLÁS

Ne aggódj,
a villám sohasem
csap kétszer
ugyanoda

BILLY BEE

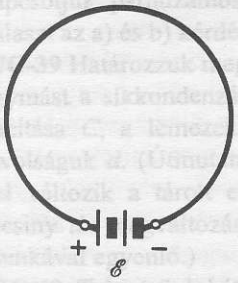
28.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben elektromos töltések áramlását, az elektromos áramot tárgyaljuk. Minthogy a vezető minden egyes pontjában egyidejűleg mozognak a töltések, töltésfelhalmozódás sehol sem jön létre. Az elektromos áram olyan folytonos vezetőhurokban jön létre, amely az áramot fenntartó energiaforrást tartalmaz. A vezetőket és energiaforrásokat tartalmazó hálózatokat *áramköröknek* nevezzük. Megmutatjuk, hogy az áramkörben folyó áramokat két megmaradási törvény határozza meg: az egyik a *töltésmegmaradás* elve, vagyis hogy a töltéshordozók nem keletkeznek és nem is semmisülnek meg az áramkörben, a másik pedig a már ismert *energiamegmaradás* elve.

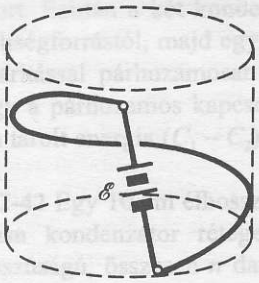
28.2 Az $\mathcal{E}$ elektromotoros erő

A töltésáramlás (vagy elektromos áram) vezető anyagokban akkor lehet folyamatos, ha a vezető zárt hurkot (vagy hurkokat), azaz *áramkört* alkot. A pozitív töltések mindig a nagyobb potenciálú hely felől a kisebb potenciálú hely irányába mozognak. Természetesen, ha egy pozitív töltés a csökkenő potenciál irányát követve egy teljes hurok megtétele után visszaérkezik a kiindulópontra, akkor ugyanolyan potenciálon lesz, mint elindulásakor. Ennélfogva az áramkör valamely pontján lennie kell egy olyan eszköznek, ami a töltésen munkát végez és átemeli egy bizonyos potenciálkülönbségen. Ezt a lokális energiaforrást, amely a töltéseken munkát végezve, potenciáljukat megnöveli, **feszültségforrásnak vagy az elektromotoros erő (e.m.e.) forrásának** nevezzük. Az e.m.e. által létrehozott potenciálváltozást az $\mathcal{E}$ írott nagybetűvel jelöljük.

FESZÜLTSÉG -FORRÁS ($\mathcal{E}$): **Az elektromotoros erő forrása vagy feszültségforrás bármely olyan eszköz, szerkezet, fizikai struktúra, amely valamilyen energiafajtát átalakítva elektromos energia forrásaként működik.**

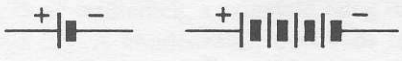


a) A feszültségforrást tartalmazó zárt vezető hurok sematikus áramköri rajza



b) A *V potenciál* (a függőleges tengelyen) a *távolság* függvényében (azaz a hurok mentén). A feszültségforrás negatív kapcsán belépő pozitív töltések potenciálja a telepen való áthaladás során $\mathcal{E}$-val megnő.

28-1 ábra
Zárt áramkörben lévő $\mathcal{E}$ feszültségforrás a rajta áthaladó töltések potenciálját megnöveli.



(a) (b)

28-2 ábra
A telep jelénél a hosszabb vonal jelöli a nagyobb potenciálú pozitív kapcsot. A + és – jeleket néha elhagyják.

Feszültségforrás például

a) az elem, az akkumulátor (zseblámpaelem, autóakkumulátor stb); A telep rendszerint több elemet tartalmaz sorba kapcsolva. Ebben a feszültségforrásban kémiai energia alakul át elektromos energiává.
b) a generátor; A villamos erőművek generátorait víz- vagy gőzturbinák hajtják, az autók generátorát pedig az autómotor. Ebben a feszültségforrásban mozgási energia alakul át elektromos energiává.
c) a napelem; Ezek biztosítják pl. az űrhajók energiaellátását. Ebben a feszültségforrásban sugárzási energia (fényenergia) alakul át elektromos energiává.
d) bizonyos sejtek, amelyek kémiai energiát használnak fel, hogy az élő szervezetekben az idegpályák mentén és izomsejtekben meghatározott potenciál-különbséget tartsanak fenn.

Akármilyen is legyen a módja – kémiai, mechanikai, sugárzási stb. energia hasznosítása által – az elektromotoros erő forrása a feszültségforrás két kapcsa között meghatározott potenciálkülönbséget tart fenn. Ha a feszültségforrás kapcsaira külső áramkört csatlakoztatunk, akkor az áramkörön keresztül[1] elektromos töltés áramlik. Amikor a magasabb potenciálú telepsarokról a töltés a feszültségforrás alacsonyabb potenciálú kapcsához jut, akkor a telep elektromotoros ereje munkát végez rajta, és visszajuttatja a magasabb potenciálú kontaktushoz. Innen a töltés ismét képes a külső áramkörön áthaladni (28-1 ábra). A kapcsok közötti potenciálkülönbség még akkor is megmarad, ha külső áramkört nem csatlakoztatunk a feszültségforráshoz.

Az áramkörök tulajdonságainak elemzése, során feszültségforráson mindig telepeket értünk (noha a leírtak bármely típusú feszültségforrás esetére is igazak). Bár a telep 28-2 ábrán látható jele némileg hasonlít a kondenzátoréhoz, az áramkörök elemzésekor csak ritkán okoz zavart. A hosszabb vonallal a telep pozitív kapcsát jelöljük.

Az e.m.e. fogalma némileg analóg egy vizet keringető csőrendszerben lévő szivattyúhoz, mely függőlegesen megemeli a vizet, megnövelve annak gravitációs potenciális energiáját. Ha a csövek zárt hurkot alkotnak, a szivattyú körbeáramoltatja a vizet a rendszerben (28-3 ábra). Az áramlás útjában lévő akadály (pl. az ábrán szűrőt vagy hordalékot tartalmazó csőszakasz képezi ezt az akadályt) az áramlás számára mechanikai ellenállásként jelentkezik, némileg lecsökkentve a víz áramlási sebességét. Ha a cső teljesen el lenne zárva, a víz nem áramolhatna, bár a szivattyú továbbra is nyomást fejtene ki. Ennek hatására kezdene a víz az akadály eltávolításakor ismét cirkulálni. Az elektromos áramkör esetében, a töltések áramlásának útjába helyezett akadályt nevezzük *elektromos ellenállásnak* (melynek áramköri jelölése vagy). Ha elektromos áramkörben nyitott kapcsoló (melynek áramköri jele) van, (vagyis nincs olyan útvonal az elektromos töltések számára a telep két kapcsa között, amelyen a töltések szabadon áramolhatnának) akkor a feszültségforrás elektromotoros ereje a kapcsoló két kapcsa között V feszültséget hoz létre (ez utóbbi hatására indul meg a töltésáramlás a kapcsoló zárásakor).

[1] Az elektromosság biológiai hatására vonatkozó első kísérletet talán Alessandro Volta gróf (1745–1827) olasz fizikus végezte el. Ő találta fel a galvánelemet. Leírása szerint ötven sorba kötött cellából álló telepet készített és a telepre kapcsolt drótok végét a fülébe dugta. Ezután úgy érezte, mintha fejbecsapták volna, majd leves rotyogását hallotta.

28.3 Az elektromos áram

Az elektromos áram nem más, mint töltések áramlása. A töltésáram létrejöhet szilárd vezetőkben, mint például az íróasztal-lámpa és a dugaszolóalj (mint elektromos energiaforrás) közötti huzalokban. Keletkezhet áram folyadékokban és gázokban, melyekben mind a pozitív, mind a negatív ionok mozognak; sőt áram még vákuumon keresztül is folyhat. Ugyanis a nagyenergiájú részecskegyorsítók légüres terében például elektronok, protonok vagy más töltött részecskék nyalábjai haladnak. Jelen céljainknak tökéletesen megfelel a fémekben történő vezetés klasszikus elméletének alkalmazása: eszerint a fémekben helyhez kötött pozitív töltésű ionok és azonos számú mozgékony elektron van, melyek az ionrácsban szabadon mozoghatnak. Gondolatban csatlakoztassuk hosszú, egyenletes keresztmetszetű fémhuzal két végét egy telep kapcsaihoz. A kapcsok közötti potenciálkülönbség miatt szinte azonnal (majdnem fénysebességgel) felépülő **E** elektromos erőtér jön létre. A huzal belsejében, annak teljes hosszára: $V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\ell$. Minthogy a huzal egyenletes keresztmetszetű, a huzal két vége között a térerősség mindenütt azonos[2].

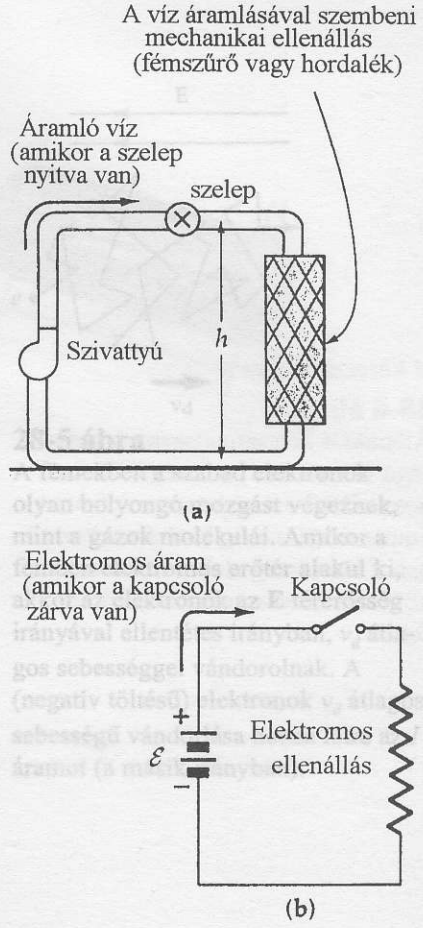
A vezető belsejében az elektromos erőtér a töltésekre $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ erőt gyakorol. A rugalmas erőkkel helyhez kötött pozitív töltések a rácsban nem mozdulnak el, a negatív töltésű elektronok viszont szabadon mozoghatnak a huzal teljes hosszában. Egy nagyon leegyszerűsített leírás szerint az elektronokat az erőtér (az **E** térerősség irányával ellentétes irányban) gyorsítja, mindaddig, amíg egy helyhez kötött pozitív ionnal össze nem ütköznek; az ütközés során sebességük valamelyest lecsökken. Ezután újra gyorsulnak a következő ütközésig, és így tovább. Sok elektront egyszerre szemlélve, az elektronok a huzal hossza mentén v_d *átlagos sebességgel* vándorolnak, a helyhez kötött pozitív ionok között ide-oda pattogva. Az ütközések során az elektronok mozgási energiájuk egy részét a rácsrezgéseknek adják át, ami által a fém melegszik. (Ez hasonlít arra, ahogyan a víz a sebes hegyi patakokon lezúdul: *átlagát tekintve*, a víz nem gyorsul a gravitációs tér hatására, hanem többé-kevésbé egyenletes sebességgel folyik le a sziklás mederben.) Az ütközések közötti átlagos távolság – az ún. *átlagos szabad úthossz* – réz esetében kb. 220 ionátmérőnyi. Az elektronok közötti ütközések ritkák, és hatásuk az elektromos ellenállásra elhanyagolható.

Az I elektromos **áramerősséget** *a vezető teljes keresztmetszetén* 1 s *alatt áthaladó töltés mennyiségével definiáljuk.*

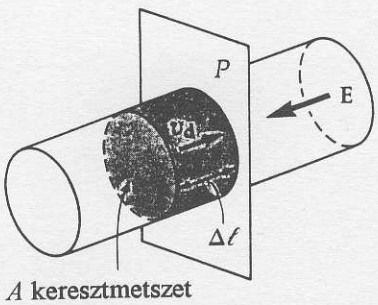
AZ I ELEKTROMOS ÁRAMERŐSSÉG

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \textbf{(28-1)}$$

Az áramerősség SI egysége az 1 *coulomb/másodperc* (C/s), melyet ampernek[3] (A) nevezünk. A milliamper (1 mA=10^{-3} A) és mikroamper (1 μA = 10^{-6} A) egységeket is gyakran használjuk. Az *áram irányának*[4] megállapodás szerint azt az irányt tekintjük, amerre a pozitív töltések mozognak vagy mozognának az elektromos erőtér hatására. Ha az elektromos áram a negatív



28-3 ábra
A folyadékot áramoltató rendszerben lévő szivattyú analóg az elektromos áramkörök feszültségforrásával; a vízfolyás pedig az elektromos árammal.



28-4 ábra
Az árnyékolással jelzett térrész elektronjai $\Delta t = \Delta\ell / v_d$ idő alatt a P sík túloldalára vándorolnak.

[2] Megjegyzendő, hogy ez az állítás nem mond ellent az előző fejezetekben leírtaknak, miszerint tökéletes vezetőkben az elektromos tér zérus. Ott *statikus* eseteket tárgyaltunk, melyekben a töltések nyugalomban voltak és nem volt jelen telep, hogy a vezető két pontja között valamekkora potenciálkülönbséget hozzon létre. Itt *dinamikus* eseteket tárgyalunk, amelyeknél a töltések mozgásban vannak, minthogy a telep a vezető két pontja között potenciálkülönbséget tart fenn, azaz elektromos teret hoz létre a vezető belsejében.

[3] Az amper egységet André Ampère (1775–1836) francia fizikus, az elektromos áram mágneses hatásának kutatója tiszteletére nevezték el így.

[4] Noha kijelöltük irányát, I ettől még nem vektormennyiség A huzalban folyó áram akkor is ugyanakkora, ha a huzalt meghajlítjuk, vagy csomót kötünk rá. I nyíllal jelzett iránya nem konkrét térbeli, hanem az áramkör topológiájához rendelhető irány, mely a pozitív töltések lehetséges mozgásának irányát jelöli ki.

töltésű elektronok vándorlásának következménye, miként fémek esetében, akkor az elektronok tényleges mozgása éppen ellentétes az I áramerősség imént definiált irányával. Bizonyos esetekben, például félvezetőkben vagy elektrolitokban, mind a pozitív, mind a negatív töltések egyidejűleg, egymással ellentétes irányban vándorolnak.

Vizsgáljuk meg kicsit közelebbről hogyan vándorolnak az elektronok egy huzalban. Tekintsünk egy huzaldarabot (28-4 ábra) Az árnyékolással jelzett térfogat összes elektronja, a huzalra merőleges P síkot Δt idő alatt lépi át. A jelzett térfogat $\Delta \ell$ hossza:

$$\Delta \ell = v_d \Delta t \qquad \textbf{(28-2)}$$

ahol v_d az elektronok átlagos vándorlási sebessége. Az $A\Delta\ell$ térfogatban lévő összes töltés mennyisége:

$$\Delta Q = neA\Delta\ell\,, \qquad \textbf{(28-3)}$$

ahol n az egységnyi térfogatban lévő vezetési elektronok száma, e az elektronok töltése, és A a huzal keresztmetszete. A (28-2) és (28-3) egyenletek segítségével az egységnyi idő alatt a huzal keresztmetszetén áthaladó ΔQ töltésre

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nev_d A \qquad \textbf{(28-4)}$$

adódik. (Vigyázzunk: ne keverjük össze az A területet az amper egység rövidítésével (A).)

28-1 PÉLDA

Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét az 1 mm^2 keresztmetszetű huzalban, melyben az áramerősség 1 A (ezek az adatok nagyjából egy erős fényű lámpára jellemzők). A rézben atomonként egy elektron vesz részt az áramvezetésben; a réz atomsúlya 63,54, sűrűsége 8,92 g/cm^3.

MEGOLDÁS

Először kiszámítjuk n értékét, azaz a réz egységnyi térfogatában lévő vezetési elektronok számát. Egy vezetési elektront feltételezve atomonként, $n = N_A\rho / M$ ahol N_A az Avogadro szám, ρ és M a réz sűrűsége, illetve atomsúlya.

$$n = \left(1\frac{\text{elektron}}{\text{atom}}\right)\frac{N_A\rho}{M}$$

$$n = \left(1\frac{\text{elektron}}{\text{atom}}\right)\left(6{,}02\times10^{23}\frac{\text{atom}}{\text{mól}}\right)\frac{1}{\left(63{,}54\dfrac{\text{g}}{\text{mól}}\right)}\left(8{,}92\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)\underbrace{\left(\frac{10^6\,\text{cm}^3}{1\,\text{m}^3}\right)}_{\substack{\text{átváltási}\\ \text{tényező}}}$$

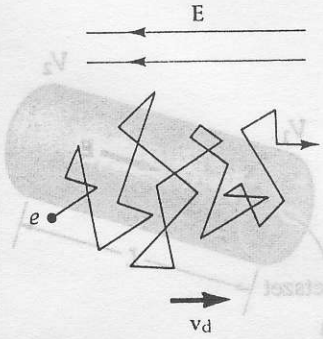
$$n = 8{,}45\times10^{28}\,\frac{\text{elektron}}{\text{m}^3}$$

A (28-4) képletből a v_d vándorlási sebességre azt kapjuk, hogy

$$v_d = \frac{I}{neA} = \frac{1\,\text{A}}{\left(8{,}45\times10^{28}\,\frac{\text{elektron}}{\text{m}^3}\right)\left(1{,}602\times10^{-19}\,\frac{\text{C}}{\text{elektron}}\right)(10^{-6}\,\text{m}^2)}$$

$$v_d = 7{,}39\times10^{-5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ez kisebb sebesség, mint 0,1 mm/s. Ilyen sebességgel egy elektron 3,76 óra alatt tesz meg 1 métert!

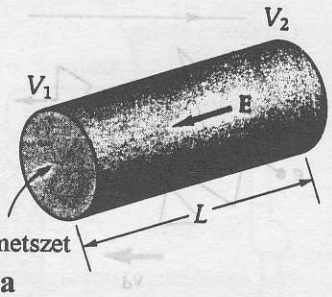


28-5 ábra
A fémekben a szabad elektronok olyan bolyongó mozgást végeznek, mint a gázok molekulái. Amikor a fémben elektromos erőtér alakul ki, akkor az elektronok az **E** térerősség irányával ellentétes irányban, v_d átlagos sebességgel vándorolnak. A (negatív töltésű) elektronok v_d átlagos sebességű vándorlása hozza létre az I áramot (a másik irányban).

Meglepőnek tűnik a példa eredményeként kapott meglehetősen kicsi vándorlási sebesség. Ha az elektronok ilyen lassan vándorolnak egy huzalban, hogyan lehetséges az, hogy egy lámpa bekapcsolásakor az izzó szinte azonnal kigyullad? Az ok abban rejlik, hogy amikor az áramkört a feszültségforráshoz csatlakoztatjuk, az elektromos térerősség kialakulása majdnem fénysebességgel terjed végig az áramkörben. Így hát amikor a kapcsoló felkattintásával kialakul a feszültségforrást is tartalmazó teljes zárt hurok, akkor, abban a pillanatban, a hurok összes vezetési elektronja gyakorlatilag egyidejűleg kezd el mozogni. Noha az egyes elektronok vándorlási sebessége kicsi, az áram hatása az áramkör minden pontjában szinte azonnal észlelhető. Továbbá, noha a huzal keresztmetszete az áramkör egyes részein más és más lehet (ami miatt a vándorlási sebesség nem szükségszerűen azonos mindenütt), az *I áramerősség számértéke az áramkör minden pontjában ugyanakkora.*

A vezetési elektronok más típusú mozgást is végeznek. Ezek az elektronok úgy viselkednek, mint olyan gázmolekulák, melyeknek az ütközések közötti átlagos termikus sebessége kb. $1{,}6\times10^6$ m/s (az adat rézre és 20°C-ra vonatkozik). Így hát a huzalban folyó áram a vezetési elektronok másodpercenként több, mint egymillió méteres sebességű bolyongó mozgásából, és a lassú (sokkal kisebb, mint 1 mm/s sebességű) vándorlásból tevődik össze (28-5 ábra).

Az elektronok mozgásának ez a szemléletes leírása – vagyis a vezetés „klasszikus" modellje, amely szerint az elektronok a gázmolekulákhoz hasonlóan bolyongó mozgást végeznek, mert a helyhez kötött ionokból álló rácson keresztül vándorolva ütköznek azokkal, olyan kvantitatív elmélethez vezet, amellyel értelmezhető Ohm törvénye (ezzel a következő fejezetben foglalkozunk). Számos más jelenség azonban ellentmond ennek a meglehetősen naiv képnek. A kvantummechanikán alapuló modern elmélet következtetései sokkal jobban egyeznek a kísérleti eredményekkel. Mai pontosabb ismereteink szerint a mozgó elektronoknak hullámtulajdonságai vannak (43. fejezet). Az elektronhullámok kölcsönhatásba lépnek az atomokból, illetve ionokból álló ráccsal. Ha a rács azonos ionokból áll és geometriailag tökéletes, akkor az elektronok mozgását alig gátolja. De ha a rácsban hibák vannak, pl. egy-egy atom hiányzik, vagy „szennyező" atomok vannak jelen, az elektronhullámok ezeken a hibákon szóródnak, megszakítva az elektronok addigi mozgását. A „szennyező" atomok kicsiny, akár mindössze pár milliomodrésznyi koncentrációja elegendő az elektromos ellenállás nagyságának lényeges megváltoztatásához. Magasabb hőmérsékleten az ionok rezgő mozgása szintén elrontja a rács tökéletes szimmetriáját, miáltal az anyag fajlagos ellenállása megnő.



28-6 ábra
Állandó A keresztmetszetű, L hosszúságú vezető, melynek végei között V potenciálkülönbséget tartunk fent. A potenciálkülönbség hatására a vezetőben E térerősség alakul ki, aminek következtében a vezetőben I áram folyik.

28.4 Az elektromos ellenállás

A továbbiakban megvizsgáljuk az $I = nev_dA$ képletet, hogy megállapítsuk, mely tényezők függnek a vezető anyagi tulajdonságaitól, és melyeket szab meg a vezetőben uralkodó térerősség. A térfogategységre jutó vezetési elektronok száma, n, nyilvánvalóan a vezető anyagi minőségétől függ. A v_d tényező részben a vezető anyagi minőségétől függ a pozitív ionok alkotta rácsban ide-oda pattogó elektronok mozgékonysága következtében. Az elektronok sebessége azonban függvénye a töltéseket a vezetőn végighajtó $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ erőnek is. Az elektromos erőtér az ütközések között gyorsítja az elektronokat, ám ennek az ide-oda mozgásnak az eredője végezetül egy átlagos sebességgel jellemezhető vándorlás – hasonlóan ahhoz, ahogyan a viszkózus közegen át eső tárgy is meghatározott végsebességet ér el. A vándorlási sebesség úgy alakul ki, hogy az adott sebességnél az elektromos erőtér által végzett munka éppen egyenlő az ütközések során „elvesztett" mozgási energiával.

Tanulságos a (28-4) összefüggést egy másik alakba átírni: Tekintsünk egy állandó A keresztmetszetű, L hosszúságú vezető anyagot, melynek végpontjai között V potenciálkülönbséget tartunk fenn (28-6 ábra). Minthogy $V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\ell$, a térerősség $E = V/L$. A vándorlási sebesség arányos az eE hajtóerővel, így két képletünk van $E = V/L$ és $v_d \approx E$, melyekből azt kapjuk, hogy:

$$v_d \approx \frac{V}{L} \tag{28-5}$$

Az $I = nev_dA$ behelyettesítésével ebből adódik, hogy

$$I \approx \frac{VA}{L} \tag{28-6}$$

Az arányossági tényező a vezető anyagának tulajdonságaitól függ. Az arányossági tényezőt $1/\rho$-val jelölve:

$$I = \left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{A}{L}\right)V \tag{28-7}$$

ahol ρ a vezető **fajlagos ellenállása**. Ennek SI egysége (volt/amper)·(méter) = (Vm/A). A V/A egységet ohm-nak nevezzük, rövidítése Ω[5]. A fajlagos ellenállást rendszerint az *ohm méter* (Ωm) SI egységben adják meg. Alkalmanként a „hibrid" Ωcm egységgel is találkozhatunk. A 28-1 táblázatban különböző anyagok 20 °C-on mérhető fajlagos ellenállását foglaltuk össze. Bizonyos esetekben (lásd a 28.7 fejezetet) kényelmesebb a fajlagos ellenállás reciprokát, a **fajlagos vezetőképességet** használni, amelyet a $\sigma = 1/\rho$ képlettel definiálunk. A σ fajlagos vezetőképesség SI egysége siemens/méter (S/m).

A fajlagos ellenállást egy arányossági tényező reciprokaként vezettük be. Az anyagok fajlagos ellenállása számos tényezőtől függ, például nedvességtartalomtól, nyomástól, kristályszerkezettől és hőmérséklettől. Képlettel a hőmérsékletfüggést a legkönnyebb megadni. Kísérleti eredményekből ismeretes, hogy az ellenállás relatív változása közelítőleg arányos a hőmérséklet megváltozásával, azaz

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha(T - T_0) \tag{28-8}$$

[5] Az ohm egységet Georg Ohm német fizikus tiszteletére nevezték el, aki 1827-ben felfedezte az áramerősség és potenciálkülönbség közötti arányosságot. Lásd még a (28-11) összefüggést (Ohm törvényét).

28-1 TÁBLÁZAT Fajlagos ellenállások és hőmérsékleti együtthatóik

Anyag	ρ fajlagos ellenállás 20° C -on (Ωm)	α fajlagos ellenállás hőmérsékleti együtthatója (1/°C)
Szigetelők		
Csillám	2×10^{15}	-50×10^{-3}
Kén	1×10^{15}	-80×10^{-3}
Üveglemez	2×10^{11}	-70×10^{-3}
Félvezetők		
Szilícium	640	-75×10^{-3}
Germánium	0,46	-48×10^{-3}
Szén (grafit)	$1,4 \times 10^{-5}$	$-0,5 \times 10^{-3}$
Vezetők		
Alumínium	$2,8 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Bronz	18×10^{-8}	$0,5 \times 10^{-3}$
Réz	$1,7 \times 10^{-8}$	$6,8 \times 10^{-3}$
Arany	$2,4 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{-3}$
Vas	10×10^{-8}	5×10^{-3}
Manganin (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni)	44×10^{-8}	$<0,0005 \times 10^{-3}$
Higany	96×10^{-8}	$0,8 \times 10^{-3}$
Nichrome*	100×10^{-8}	$0,4 \times 10^{-3}$
Platina	10×10^{-8}	$3,92 \times 10^{-3}$
Ezüst	$1,6 \times 10^{-8}$	$4,1 \times 10^{-3}$
Volfrám	$5,7 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Cink	$5,9 \times 10^{-8}$	$4,2 \times 10^{-3}$

* Fűtőspirálokban használatos nikkel-króm ötvözet.

ahol az α arányossági tényezőt a fajlagos ellenállás hőmérsékleti együtthatójának nevezzük. A T_0 referencia-hőmérsékleten az anyag fajlagos ellenállása ρ_0.

A (28-8) képletet gyakran az alábbi, áttekinthetőbb alakban írjuk fel:

A FAJLAGOS ELLENÁLLÁS VÁLTOZÁSA A HŐMÉRSÉKLETTEL

$$\rho = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)] \qquad \textbf{(28-9)}$$

Néhány jól ismert anyag ρ és α értékét a 28-1 táblázatban adtuk meg[6].

Minthogy R arányos ρ-val, azt is írhatjuk, hogy

$$R = R_0[1+\alpha(T-T_0)] \qquad \textbf{(28-10)}$$

Az ellenállás hőmérsékletfüggésére alapozva hőmérőt lehet készíteni (lásd a 28A-7 feladatot).

[6] A 28-1 táblázatban nem szerepelnek olyan anyagok (néhány elem és számos ilyen szupravezetőnek nevezett ötvözet létezik.) amelyek fajlagos ellenállása zérushoz közeli abszolút hőmérsékleteken zérus. Lásd még „Szupravezetés" címszó alatt.

28.5 Az Ohm törvény

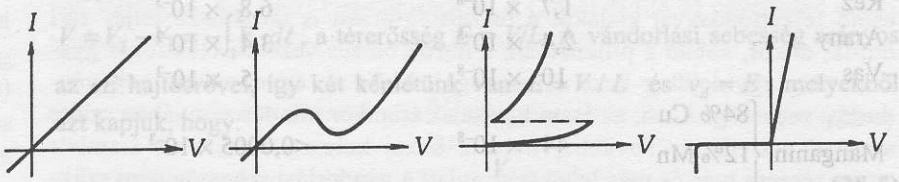
A (28-7) összefüggés szerint, ha a nem zérus fajlagos ellenállású rúd két végpontja közötti potenciálkülönbség V és a rúdon áthaladó áram áramerőssége I, akkor az áramerősség a végpontok közötti potenciálkülönbséggel lenne arányos. Meglepő, de az arányosság valóban fennáll számos különböző anyag esetében. Ha az arányosság pontos, az anyag kielégíti az **Ohm-törvényt**. A (28-7) képletből azt kapjuk, hogy

AZ OHM TÖRVÉNY $$V = IR\,, \qquad \textbf{(28-11)}$$

ahol R az ellenállásnak nevezett állandó, amely független az anyagon átfolyó I áramerősségtől. Egy ρ fajlagos ellenállású anyagból készült ℓ hosszúságú, A egyenletes keresztmetszetű rúd ellenállását a (28-7) és (28-11) képletek alapján a következő alakban írhatjuk fel:

$$R = \frac{\rho \ell}{A} \qquad \textbf{(28-12)}$$

Az ellenállás egysége 1 Ohm (Ω).



a) Ideális ellenállás. b) Alagútdióda. c) Vezérelt szilícium egyenirányító. d) Zener-dióda.

28-7 ábra
Néhány elektromos eszköz I–V karakterisztikája. Csak az ideális ellenállás (a) elégíti ki az Ohm törvényt. Szerencsére, számos anyag viszonylag széles hőmérséklettartományban többé-kevésbé jól követi az Ohm törvényt.

Egy ellenállást képező eszközön áthaladó áram erőssége és az azt létrehozó feszültség közötti kapcsolat nem mindig lineáris. Néhány eszköz I–V karakterisztikáját (az I és V közötti kapcsolatot) a 28-7 ábra mutatja. Látható, hogy csak az a) ábrán vázolt karakterisztikájú (ideális) ellenállás követi az Ohm törvényt, minthogy csak ott nem függ R értéke az áramerősségtől. A többi esetben az R ellenállást ugyan szintén V/I hányadosként definiáljuk, de az ellenállás függ az áramerősségtől. A továbbiakban csak az olyan ellenállásokkal foglalkozunk, amelyek eleget tesznek az Ohm-törvénynek.

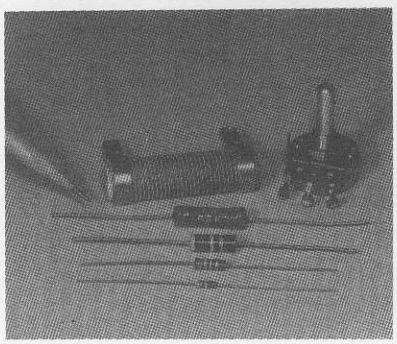
28-2 PÉLDA

Egy 5 mm²-es, egyenletes keresztmetszetű szénrúdból ellenállást készítünk. A szénrúd két vége közé kapcsolt 15 V-os feszültség hatására 4×10^{-3} A erősségű áramnak kellene átfolyni rajta. Számítsuk ki a) a rúd ellenállását és b) a rúd hosszúságát.

MEGOLDÁS

a) A rúd ellenállását az Ohm-törvény (28-11) alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{15\ \text{V}}{4\times10^{-3}\ \text{A}} = 3750\ \Omega = 3{,}75\ \text{k}\Omega$$



28-8 ábra
Jellegzetes ellenállások.

ahol kΩ a *kiloohm* (1 kΩ = 10^3 Ω) rövidítése. Hasonlóképpen MΩ jelet a megohm (1 MΩ = 10^6 Ω) rövidítésére használjuk. Megjegyzendő, hogy ha az ellenállásokat kΩ, a feszültséget V egységekben adjuk meg, akkor az áramerősséget milliamper (1mA =10^{-3} A) egységekben kapjuk meg (ami a modern elektronikában sokkal praktikusabb egység, mint az A).

b) A rúd hosszát a (28-12) összefüggés segítségével határozhatjuk meg: $R = \rho\ell/A$, ahonnan ℓ értékét kifejezve:

$$\ell = \frac{RA}{\rho}$$

R és A számértékét, és ρ-nak a 28-1 táblázatban található értékét behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\ell = \frac{(3{,}75\times10^{3}\,\Omega)(5\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2)}{(1{,}4\times10^{-5}\,\Omega\mathrm{m})} = 1{,}34\times10^{3}\,\mathrm{m}$$

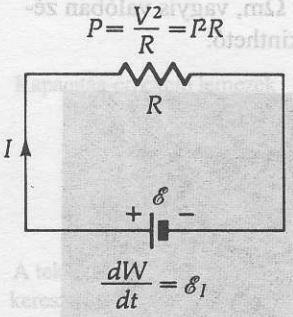
Nyilvánvaló, hogy egy 3,75 kΩ értékű (vagyis tipikus nagyságú) ellenállást nem lehet tiszta szénből elkészíteni úgy, hogy egy miniatűr elektronikus készülékbe beépíthető legyen. Az ellenállásokat különböző anyagok keverékéből készítik úgy, hogy a kívánt ellenállás és méret mellett kellő szilárdságú legyen és az ellenállás ne függjön a környezet paramétereitől (pl. a hőmérséklettől).

28.6 A Joule törvény

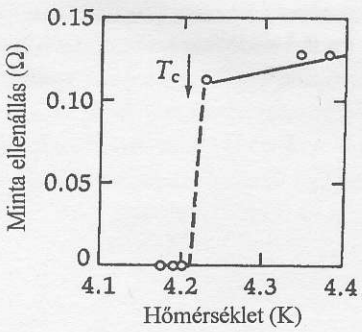
Mint láttuk, az ellenállás végpontjaira kapcsolt feszültségkülönbség elektronokat késztet az ellenálláson való áthaladásra, és az elektronok ugyanakkora vándorlási sebességgel lépnek be az egyik végponton, mint amekkorával kilépnek a másikon. Emlékezzünk arra is, hogy az elektronok által „elvesztett" potenciális energia az ellenállásokban, mint hő (belső energia) jelenik meg. (Ez analóg azzal, amikor egy csónakot a motorja állandó sebességgel hajt: a vízben energia nyelődik el, miközben a víz kissé felmelegszik.) Ellenállások esetében ezt a jelenséget Joule hőnek nevezzük.

Az ellenállásban fejlődő Joulehő mennyiségének kiszámítására tekintsük a 28-9 ábrán látható, feszültségforrást és ellenállást tartalmazó egyszerű áramkört. A —WV— jellel az Ohm törvényt kielégítő (ohmikus) ellenállást jelöljük, az egyenes vonalakkal pedig a zérus ellenállású vezetőket (huzalokat). Ma is a még Benjamin Franklin által bevezetett konvenciót követjük, amely szerint *a feszültségforráson kívül az I áram a magasabb potenciálú hely felől az alacsonyabb potenciálú felé folyik.* Ezt **technikai áramiránynak** nevezzük. Természetszerűleg, a fémekben a vezetési elektronok negatív töltésük miatt, ezzel ellenkező irányban mozognak. Másfelől, számos anyagban (folyadékokban, gázokban és bizonyos félvezető eszközökben) a pozitív töltések is résztvesznek az áramvezetésben. Így a technikai áramirány az az irány, amelyben a pozitív töltések vándorolnak (vagy vándorolnának, ha éppen nincs jelen ilyen töltéshordozó).

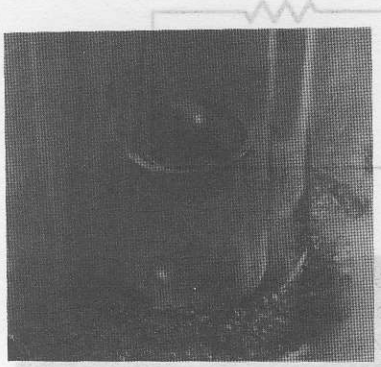
Éppen úgy, mint korábban tettük, a feszültségforrást és az ellenállást tartalmazó rendszert a környezetétől elszigeteljük, így energia ebbe a rendszerbe nem lép be, és nem távozik onnan. Minthogy a rendszerben az energia megmarad, annak az energiának, amit a töltések nyernek a feszültségforráson



28-9 ábra
A feszültségforrás által végzett munka az ellenállásban hővé alakul.



a) Higanyminta ellenállása a hőmérséklet függvényében. A T_c kritikus hőmérsékletnél az ellenállás hirtelen változik. Modern mérések szerint a szupravezető állapotban lévő anyagok fajlagos ellenállása kisebb mint 10^{-25} Ωm, vagyis valóban zérusnak tekinthető.



b) Szupravezető gyűrűben és golyóban keltett elektromos áramnak olyan a mágneses tere, hogy a golyó lebeg. Az áramok évekig mérhető változás nélkül keringenek.

28-10 ábra
Szupravezetés.

áthaladva, egyenlőnek kell lennie az ellenállásban fejlődő hővel. Az $\mathcal{E}$ e.m.e. a dq töltésen dW munkát végez:

$$dW = \mathcal{E}\,dq$$

A feszültségforrás által végzett munkavégzés sebessége:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}\frac{dq}{dt}$$

avagy, az áramerősség (28-1) definíciója következtében

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I$$

Vegyük észre, hogy mialatt a feszültségforrás az egységnyi töltésen $\mathcal{E}$ munkát végez, a töltések potenciális energiája a feszültségforráson való áthaladásakor ugyanennyivel (az egységnyi töltés V potenciális energiájával) nő. A feszültségforrás kapcsai közötti V potenciálkülönbség tehát ugyanakkora, mint az ellenállás két végpontja között. Az energia-megmaradás elve miatt a feszültségforrás munkavégzésének (dW/dt) sebessége egyenlő az ellenálláson történő hőfejlődés sebességével. (Minthogy ez a hő rendszerint kisugárzódik, elvezetődik a környezetbe és így „eltűnik" az áramkörből, gyakran használjuk a „disszipálódik" kifejezést.) Az ellenálláson disszipált P teljesítmény tehát:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I \qquad \textbf{(28-13)}$$

vagy, minthogy az ellenállás két végpontja közti feszültség: $\mathcal{E} = V$,

$$P = VI \qquad \textbf{(28-14)}$$

Ez az egyenlet más alakban is felírható. Ohm törvényét ($V = IR$) felhasználva a (28-14) összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$P = I^2R \qquad \textbf{(28-15)}$$

Az ellenállásokon disszipált I^2R teljesítményt gyakran nevezik hőveszteségnek, a fejlődő hőt *Joulehőnek*. Ohm törvényét másként alkalmazva a $P = V^2/R$ képlethez is juthatunk, így

DISSZIPÁLT P TELJESÍTMÉNY ELLENÁLLÁST TARTALMAZÓ ÁRAMKÖRBEN

$$P \begin{cases} = I^2R \\ = VI \\ = V^2/R \end{cases} \qquad \textbf{(28-16)}$$

28-3 PÉLDA

Ha a 28-9 ábrán ábrázolt áramkörben $\mathcal{E} = 6$ V és $R = 12\ \Omega$, mekkora a) az időegység alatt a feszültségforrás által végzett munka és b) az ellenálláson disszipált teljesítmény?

MEGOLDÁS

a) Az energiamegmaradás elve miatt az a) kérdésre válaszként megadott számértéknek egyenlőnek kell lennie a b) kérdésre adott értékkel. Felismerve, hogy az $\mathcal{E}$ e.m.e. egyenlő az ellenállás végpontjai közötti V potenciálkülönbséggel, Ohm törvénye $I = \mathcal{E}R$. Az adott számértékeket behelyettesítve,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{6\ \text{V}}{12\ \Omega} = 0{,}5\ \text{A}$$

A feszültségforrás munkavégzésének sebességét a (28-13) egyenlet adja meg:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I = (6\ \text{V})(0{,}5\ \text{A}) = 3{,}00\frac{\text{J}}{\text{s}} = 3{,}00\ \text{W}$$

b) Az ellenálláson disszipált energiát, noha egyenlő dW/dt-vel, a (28-16) formula alkalmazásával is kiszámíthatjuk:

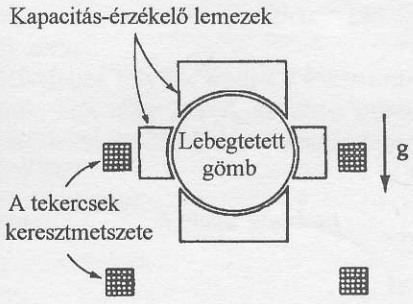
$$P = I^2R = (0{,}5\ \text{A})^2(12\ \Omega) = 3{,}00\ \text{W}$$

Szupravezetés

H. Kammerlingh Onnes holland fizikusnak 1908-ban sikerült a héliumot cseppfolyósítania 4,2 K hőfokon és ezután tanulmányozni kezdte a fémek alacsony hőmérsékleti tulajdonságait. Három év múlva felfedezte a *szupravezetés* jelenségét. Megállapította, hogy bizonyos anyagok elektromos ellenállása meghatározott, rendszerint az abszolut zérust néhány fokkal meghaladó T_c kritikus hőmérséklet alatt, meghökkentő módon hirtelen zérusra csökken. A zérus ellenállásnak meglepő következményei vannak. Például, ha szupravezető gyűrűben valamilyen módon áramot keltünk, akkor az áram a továbbiakban – feszültségforrás nélkül – végtelen ideig kering a körben, eközben hő nem fejlődik (nincs I^2R veszteség). Ilyen áramok ténylegesen évekig, mérhető veszteség nélkül keringtek.

A szupravezetés alkalmazásának érdekes példája a szupravezető graviméter (28-11 ábra), amelyet a Föld gravitációs terének nagyon pontos mérésére használnak. Egy kb. 2 cm átmérőjű alumínium gömbhéj felülete ólommal van bevonva. Az ólom a folyékony hélium hőmérsékletén ($\leq 4{,}2$ K) szupravezető. A gömböt két, vízszintes szupravezető tekercs mágneses tere lebegteti. A tekercsek áramának bekapcsolásakor a növekvő mágneses tér a gömbben elektromos áramot kelt, s ennek hatására a gömb mágneses dipóllá válik. A tekercsek mágneses tere a gömböt (a mágneses dipólust) lebegteti anélkül, hogy az bármivel is érintkezne. A gömböt szimmetrikusan hat fémlemez veszi körül. Ha g értéke változik, a gömb kismértékben lesüllyed vagy felemelkedik. A megváltozott helyzet miatt a lemezek közötti kapacitás is megváltozik, amelyet a külső elektromos áramkörök érzékelnek, s ezzel jelzik g változását. A 16-9 ábra a Föld gravitációs terének változásait mutatja; ezt ilyen szupravezetős műszerrel mérték.

Napjainkban számos tudományos laboratóriumban alkalmaznak folyékony héliummal hűtött szupravezető elektromágneseket; némelyik tekercsében 10^5 A nagyságrendű az áramerősség. Intenzív kutatás folyik olyan anyagok kifejlesztésére, amelyek magasabb hőmérsékleten is szupravezetők, mert így a meglehetősen drága folyékony hélium (ára kb. 3 US$/liter) helyett a kb. ötvenszer olcsóbb, 77 K forráspontú folyékony nitrogén lenne alkalmazható. A szobahőmérsékleten is szupravezető anyagok felfedezésének komoly gazdasági következményei lennének: használatukkal az elektromos energia átvitele olcsóbb lehetne, nagy részecskegyorsítókban alkalmazott hatékony elektromágnesek, nagyteljesítményű, de kisméretű motorok készülhetnének; továbbá nagysebességű, mágnesesen lebegtetett vonatok lennének kifejleszthetők. A számítógépek áramköreiben alkalmazva a szupravezetők nagymértékben megnövelnék a számítások sebességét és egyúttal lecsökkentenék a számítógépek méreteit.



28-11 ábra
A szupravezető graviméterekben két vízszintes helyzetű (szupravezető) tekercs egy gömböt lebegtet. A gömb helyzetét a feltüntetett négy, és az ábrán nem feltüntetett, az ábra síkja felett és alatt elhelyezett további két lemez közötti kapacitások mérésével határozzák meg.

A szupravezetés nem egyszerűen az anyagok vezetőképességének valamilyen különös határesete, hanem teljesen új kvantummechanikai effektus. Néhány vezető fém nem is válik szupravezetővé, míg bizonyos kerámiák (amelyek normál körülmények között szigetelők) szupravezetővé válnak a nitrogén forráspontja (77 K) felett is. 1972-ben John Bardeen, Leon Cooper és Robert Schrieffer kapott Nobel díjat a szupravezetést értelmező elméletükért, melynek lényege az, hogy *elektronpárok* energiaveszteség nélkül, állandó sebességgel haladhatnak keresztül a szupravezetőkön*.

28.7 Az áramsűrűség és a vezetőképesség

Számos esetben az elektromos áramok nem huzalokon vagy egyéb jól definiált vezetőkben folynak, hanem kiterjedt közegekben, például a légkörben, az óceánokban, a földben, elektrolitoldatokban, a csillagok ionizált gázokból álló atmoszférájában, plazmákban stb.. Ilyenkor célszerű az **áramsűrűség** fogalmát használni, melyet *az adott pontban az egységnyi felületen átfolyó áramerősséggel* határozzuk meg:

J ÁRAMSŰRŰSÉG (skalár alakban)
$$J = \frac{I}{A} \qquad \textbf{(28-17)}$$

A (28-4) képlet szerint $I = nqv_dA$, így vektoralakban a **J** áramsűrűséget az alábbi módon írhatjuk fel:

J ÁRAMSŰRŰSÉG (vektor alakban)
$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d \qquad \textbf{(28-18)}$$

Itt n az egységnyi térfogatban lévő szabad töltéshordozók mennyisége és $\mathbf{v}_d$ az átlagos vándorlási sebesség. Szokás szerint $\mathbf{v}_d$ úgy határozható meg, hogy iránya megegyezzék a pozitív töltéshordozók mozgásának irányával. (Ha a negatív elektronok a töltéshordozók, az elektronok mozgásiránya éppen ellentétes $\mathbf{v}_d$-vel.)

Az Ohm törvényt az eddigiektől kissé eltérő formában is felírhatjuk egy ℓ hosszúságú és A egyenletes keresztmetszetű vezetőben folyó áram figyelembevételével: Ilyen vezető esetében, (feltéve hogy ohmikus ellenállású) $I = V/R$ és $E = V/\ell$. Így

$$I = \frac{V}{R} = \frac{E\ell}{R} = \frac{E\ell}{\left(\rho\frac{\ell}{A}\right)} = \frac{EA}{\rho}$$

Az összefüggés mindkét oldalát az A területtel elosztva azt kapjuk, hogy

$$J = \frac{I}{A} = \left(\frac{1}{\rho}\right)E = \sigma E \qquad \textbf{(28-19)}$$

Az OHM TÖRVÉNY AZ ÁRAMSŰRŰSÉGGEL KIFEJEZVE (differenciális Ohm törvény)
$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} \qquad \textbf{(28-20)}$$

---

* 1987-ben Bednorz és Müller a magashőmérsékletű szupravezetés (T_c= 35K) felfedezéséért nyerték el a Nobel díjat (a fordító megj.)

Az anyagok σ **fajlagos vezetőképességét** a fajlagos ellenállás reciprokaként definiáljuk, $\sigma \equiv (1/\rho)$, SI egysége $(\Omega\,\mathrm{m})^{-1} \equiv$ siemens (S).

Immár két lehetőségünk van az anyagokban folyó elektromos áramok jellemzésére:

Makroszkopikus leírás (véges méretű vezető esetén)	Mikroszkopikus leírás (anyag belsejében, egy adott pontban)
$I = \dfrac{V}{R}$	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ **(28-21)**

A makroszkopikus leírás akkor hasznos, ha véges méretű áramköri elemeink vannak, és az *egész* egységre vonatkozó V és R elektromos jellemzőket ki tudjuk fejezni. Ezzel szemben a mikroszkopikus leírás során az anyag belsejében *adott pontra jellemző* lokális paraméterek: az elektromos térerősség és áramsűrűség között teremtünk kapcsolatot; e leírásnál az anyag mérete, kiterjedése teljesen közömbös. (Ezért nevezik az utóbbit differenciális Ohm törvénynek.)

Néha a töltéssűrűség a vezető belsejében helyről-helyre változik. Ennek következményeként a **J** áramsűrűség is pontról pontra változik. Adott A felületen áthaladó teljes I áramerősséget úgy számíthatjuk ki, hogy az áramsűrűséget a teljes A felületre integráljuk:

$$I_{\text{teljes}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \qquad \textbf{(28-22)}$$

Itt $d\mathbf{A}$ a felületelem-vektor, amelynek iránya az adott felületre mindenütt merőleges. Megjegyzendő, hogy míg az I áramerősség skalár, addig a **J** áramsűrűség vektormennyiség.

28-4 PÉLDA

Nagyenergiájú elektrongyorsítóból kilépő kör keresztmetszetű elektron-nyaláb sugara 1 mm. a) Ha a nyaláb állandó keresztmetszetű és áramerőssége 8μA, mekkora a nyalábban az áramsűrűség? b) Az elektronok sebessége majdnem akkora, mint a fénysebesség, így sebességüket elhanyagolható hibával c-nek lehet tekinteni. Számítsuk ki a nyalábban az elektronok sűrűségét. c) Mennyi idő alatt távozik Avogadro számnyi elektron a gyorsítóból?

MEGOLDÁS

a) $$J = \frac{I}{A} = \frac{8\times10^{-6}\,\mathrm{A}}{\pi(1\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 2{,}55\,\mathrm{A/m^2}$$

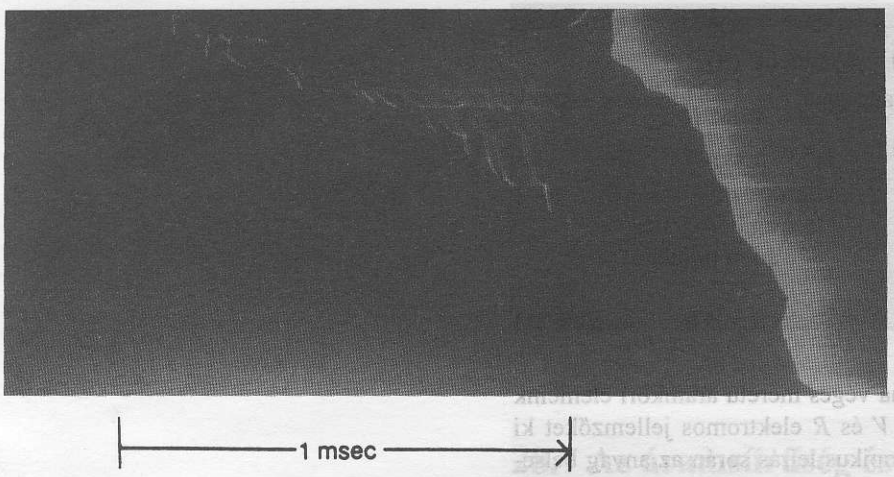
b) Az $I = nev_d$ képlet alapján:

$$n = \frac{I}{ev_d} = \frac{2{,}55\,\mathrm{A/m^2}}{(1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C})(3\times10^{8}\,\mathrm{m/s})} = 3{,}31\times10^{10}\,\mathrm{m^{-3}}$$

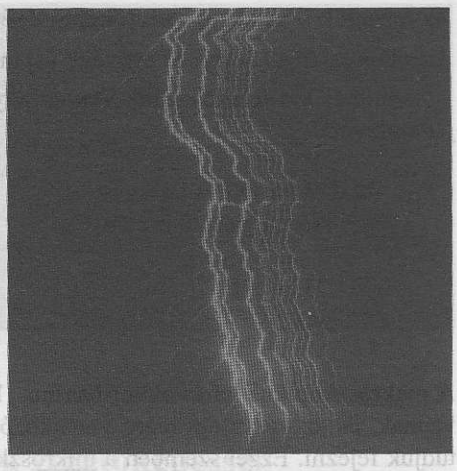
c) Az $I = \Delta Q/\Delta t$ képlet alapján

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{I} = \frac{N_A e}{I} = \frac{(6{,}02\times10^{23})(1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C})}{(8\times10^{-6}\,\mathrm{A})}$$

$$= 1{,}20\times10^{10}\,\mathrm{s} \qquad \text{(kb. 381 év!)}$$



a) Ez a fénykép olyan speciális filmfelvevőgéppel készült, amelyben az expozíció alatt a film 27 m/s sebességgel mozgott. (Az idő a képen balról jobbra telik.) A képen látható egy halvány lépcsőzetes kép, ezek az *elővillámok*, melyek a felhő aljától lefelé indulnak és egyre hosszabbak; ezután látható a felfelé haladó nagyon fényes *fővillám* ami a földről a felhő felé irányul és olyan gyors, hogy egyetlen képnek tűnik és a fényessége fokozatosan csökken.



b) A fényképész ezt a sok kisülésből álló villámot úgy örökítette meg, hogy az expozíció alatt gépét ingaszerűen mozgatta. Elágazások rendszerint csak az első kisüléseken láthatók; a további kisülések ugyanazon a kis ellenállású, ionizált levegőben kialakult vezető csatornában futnak végig, amely mintegy 10^4 K hőmérsékletűre hevül fel (és amely elég forró ahhoz, hogy akár kőzeteket párologtasson el). Az áramvezető csatorna átmérője néhány mm és néhány cm közötti. A mennydörgést a forró ionizált levegő robbanásszerű kitágulása okozza.

28-12 ábra

A villámlás anatómiája. A legtöbb, felhő és föld közötti *villám 3–5 kisülésből* áll, melyek együttes időtartama néhány tizedmásodperc, így a szem képes a villámok villogását érzékelni. Néha az egy-egy kisülés hosszabb ideig tart, mint a többi, és a töltések áramlása a kis ellenállású vezető villámcsatornában néhány tizedmásodpercig folyamatos fényjelenséget idéz elő.

A villámoknak számos típusa van. Ezek részletei olyan filmfelvevőgéppel tanulmányozhatók, amelyben az expozíció alatt a film 27 m/s sebességgel mozog, így az események időbeli sorrendjét a filmen vízszintesen „szétteríti". A 28-12a ábrán ilyen felvételt láthatunk: a tipikus villám úgy kezdődik, hogy halványan világító elővillámok sorozatában a felhő alsó részéből a föld felé egyre hosszabb kisülések indulnak meg. Ezek mindegyike után az ionizált vezető csatorna mintegy 50 méterrel meghosszabbodik; az elővillámok között mintegy 50 μs-os szünet van. Végül, ha az elővillám megközelíti a földfelszínt, a csúcsa és a föld közötti nagyon erős elektromos erőtér hatására ott egy erős kisülés indul meg, ami után a földtől a felhő felé beindul a fővillámnak nevezett kisülés. A fővillám nagyon gyorsan, a fénysebesség tizede vagy fele sebességgel terjed felfelé a már kialakult vezető csatornában (ezért a fővillám a filmen egyszerű csíkként jelenik meg). Míg az elővillámok kialakulása a néhány km magasságban lévő felhők aljától a földig mintegy 0,02 s ideig tart, a fővillám visszafelé (felfelé) ezt a távolságot már mindössze 70 μs alatt befutja. A villámban az áramerősség csúcsértékének tipikus értéke néhányszor tízezer amper, a szállított töltés néhányszor tíz coulomb.

A 28-12b ábrán látható fényképet úgy készítették, hogy a fényképezőgépet nyitott zárral inga szerűen; így egy kb. 0,6 s-ig tartó villámban 12 kisülést lehetett elkülöníteni. (Ezek a fényképek Leon E. Salvane könyvéből („Lightning and Its Spectrum", University of Arizona Press, 1980) származnak. Ebben a könyvben számos lenyűgöző fénykép található, továbbá sok tanács, hogy hogyan készítsünk nappal villámokról fényképeket egyszerű kisfilmes fényképezőgéppel.)

28-5 PÉLDA

Részecskegyorsítóból kilépő kör keresztmetszetű protonnyaláb sugara 0,6 mm. A 28-13a ábra az áramsűrűséget a tengelytől mért távolság függvényében mutatja. Mekkora a teljes nyaláb áramerőssége?

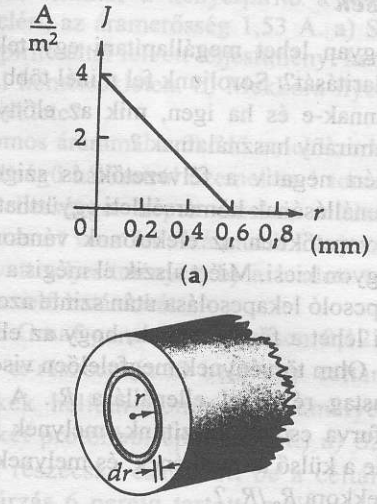
MEGOLDÁS

Az áramsűrűség hengerszimmetriája miatt válasszunk ki egy r sugarú és dr szélességű elemi körgyűrűt (28-13b ábra). Így $dA = 2\pi r dr$. A 28-13a ábra szerint a J áramsűrűséget (SI egységben) $0 \le r \le 0{,}6$ mm tartományban a $J(r) = (4 - 4r/0{,}6\times10^{-3})$ A/m^2 képlettel adhatjuk meg. Így a teljes áramerősség:

$$I = \int_0^R J dA = \int_0^{0{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{m}} (4 - 4r/0{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{m})(2\pi r)dr$$

$$I = \left(4r - \frac{4r^2}{1{,}2\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\right)\Bigg|_0^{0{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= (2{,}4 - 0{,}30)\times10^{-3}\,\mathrm{A} = 2{,}10\ \mathrm{mA}$$



b) $dA = 2\pi r dr$ területű körgyűrű

28-13 ábra
A 28-5 példához.

Összefoglalás

Egy $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű feszültségforrás a dq töltésen dW munkát végez, mialatt a töltések potenciálját $\mathcal{E}$-vel megnöveli.

$$dW = \mathcal{E}dq$$

Az I *elektromos áramerősség* a vezető tetszőleges helyén a teljes keresztmetszeten időegység alatt áthaladó töltések mennyisége:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Az áramerősség irányát a pozitív töltések haladási irányával definiáljuk. (Noha I-nek iránya van, mégse vektormennyiség.) A fémek elektromos vezetésének klasszikus modellje szerint a vezetési elektronok a gázok molekuláihoz hasonlóan viselkednek; minden irányban véletlenszerűen mozognak. Amikor a vezetőben elektromos erőtér alakul ki, az elektronokra olyan erő hat, amely a véletlenszerű mozgás mellett az elektronokat v_d *átlagos vándorlási sebességgel* **E** irányával ellentétes irányban mozgatja. A vándorlás során az elektronok a helyhez kötött (rácsba rendezett) ionokkal, ill. atomokkal állandóan ütköznek. Az áramerősség egy olyan, állandó A keresztmetszetű vezetőben, melynek térfogategységében n darab, v_d átlagos vándorlási sebességgel mozgó vezetési elektron van:

$$I = nev_dA$$

AZ OHM TÖRVÉNY: $V = IR$

Egy ℓ hosszúságú, állandó A keresztmetszetű rúd R ellenállása:

$$R = \frac{\rho\ell}{A}$$

ahol ρ az anyag *fajlagos ellenállása*. A *fajlagos ellenállás* α *hőmérsékleti együtthatója* a T hőmérsékleten mérhető ρ fajlagos ellenállás és a T_0 referenciahőmérsékleten mérhető ρ_0 fajlagos ellenállás közötti kapcsolatra jellemző, az alábbi összefüggés szerint:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Bizonyos elemek és anyagok megfelelően alacsony hőmérsékleten szupravezetővé válnak. Ekkor fajlagos ellenállásuk zérus.

Az anyagok belsejében folyó áramot a J áramsűrűséggel jellemezhetjük, ami megegyezik az adott pontban az egységnyi felületen áthaladó áram áramerősségével:

Skalár alakban	**Vektor alakban**
$J = \frac{I}{A}$	$\mathbf{J} = nev_d$

ahol n a q töltésű töltéshordozók száma térfogategységenként, és v_d a töltéshordozók átlagos vándorlási sebessége. Egy adott A felületen áthaladó áram I áramerőssége:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

A DIFFERENCIÁLIS OHM TÖRVÉNY $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$

ahol $\sigma = 1/\rho$, az adott anyag fajlagos vezetőképessége.

Kérdések

1. Hogyan lehet megállapítani egy telep kapcsainak polaritását? Soroljunk fel minél több módszert.
2. Vannak-e és ha igen, mik az előnyei a technikai áramirány használatnak ?
3. Miért negatív a félvezetők és szigetelők fajlagos ellenállásának hőmérsékleti együtthatója?
4. A vezetőkben az elektronok vándorlási sebessége nagyon kicsi. Miért alszik el mégis a csillár rögtön a kapcsoló lekapcsolása után szinte azonnal?
5. Mi lehet a fő oka annak, hogy az ellenállások nem az Ohm törvénynek megfelelően viselkednek?
6. Vastag rézhuzal ellenállása R_1. A huzal közepét kifurva csövet készítünk, melynek belső átmérője fele a külső átmérőjének; és melynek ellenállása R_2. Mekkora R_2/R_1 ?
7. Edison első izzólámpái lényegében szén izzószállal működtek. Vajon miért kellett ezekkel a lámpákkal egy ellenállást is sorba kötni?
8. A 22. fejezetben gondosan kimutattuk, hogy a vezetők belsejében $\mathbf{E} = 0$ akkor is, ha kívül $\mathbf{E}$ zérustól különbözik. Ebben a fejezetben miért állíthatjuk ennek éppen az ellenkezőjét?
9. Egy telep kapocsfeszültsége miként lehet nagyobb, mint az elektromotoros ereje?
10. Régebben az autók elektromos rendszere 6 V-os volt. Vajon miért használnak ma 12 V-os rendszert?
11. Két izzólámpa közül: az egyik 220 V, 25 W-os, a másik pedig 220 V, 100 W-os. Melyiknek az izzószála a nagyobb ellenállású?

Feladatok

28.3 Az elektromos áram

28A-1 Egy vezetőn 5A erősségű áram halad át. Hány elektron halad át a vezető egy adott keresztmetszetén másodpercenként?

28A-2 Gázkisülési cső mindkét végén egy-egy fémlemez (elektród) van és közöttük nagy a potenciálkülönbség. Egy elektronforrás a negatív elektródnál elektronokat injektál a gázba. Az elegendően nagy sebességű elektronok néhány gázatomot ionizálnak, emiatt további elektronok és pozitív ionok képződnek. Ennek eredményeként 4×10^{17} elektron és 1×10^{17} ellentétes irányú egyszeresen töltött pozitív ion halad át a cső egy adott keresztmetszetén másodpercenként. Számítsuk ki az áram nagyságát és irányát.

28B-3 Egy 2 mm-es átmérőjű ezüst huzalon 2 óra 15 perc alatt 420 C töltés halad át. a) Atomonként egy vezetési elektront feltételezve, számítsuk ki a szabad töltések számát az ezüstben ($1/m^3$ egységekben); b) Mekkora a huzalban folyó áram erőssége? c) Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét.

28B-4 Van de Graaf generátor mozgó szíja 30 cm széles és 20 m/s sebességgel halad. A szállított töltések a szíj egyik oldalán egyenletesen oszlanak el, a nagy potenciálú gömbre szállított töltések áramerőssége 0,15 μA. Számítsuk ki a szíj felületi töltéssűrűségét.

28.4 Az elektromos ellenállás
28.5 Az Ohm törvény

28A-5 Rézhuzal átmérője 2,60 mm. A réz fajlagos ellenállása 1,77 $\mu\Omega$cm. Számítsuk ki a huzal 200 m hosszú darabjának ellenállását.

28A-6 Az A és B betűkkel jelölt két kocka azonos ellenállású anyagból készült. Élhosszúságuk ℓ illetve 10ℓ. Számítsuk ki az R_A/R_B hányadost, azaz a szemközti lapok között mért ellenállások arányát.

28A-7 A platina ellenálláshőmérő a platina ellenállásának hőmérsékletfüggésén alapul. Egy platina huzal tekercs ellenállása 20°C-on 100 Ω. Ha ugyanezt a tekercset éppen megszilárduló cinkolvadékba merítjük, ellenállása 256 Ω. Számítsuk ki a cink olvadáspontját.

28A-8 Számítsuk ki a 1 m hosszú és 0,1 mm^2 keresztmetszetű nichrome huzal ellenállását a) 20°C-on és b) 100°C-on.

28A-9 Számítsuk ki, hogy milyen hőmérsékleten lesz egy rézhuzal ellenállása éppen kétszer akkora, mint 20°C-on.

28B-11 Egy R ellenállású huzalt eredeti hosszának 1,25-szeresére nyújtjuk meg. Számítsuk ki a megnyújtott huzal ellenállását.

28B-12 Ezüstből készült kocka tömege 90 g (az ezüst relatív sűrűsége 10,50). a) Mekkora az átellenes lapok közötti ellenállás? b) Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét azt feltételezve, hogy az ezüstben atomonként egy vezetési elektron van, és a kocka átellenes lapjai közötti potenciálkülönbség 10^{-5} V.

28B-13 Egyik végüknél összeerősítünk egy réz- és egy vele azonos átmérőjű és hosszúságú vashuzalt. Mekkora lesz a rézhuzal végpontjai közötti potenciálkülönbség, ha a másik (szabad) végük közé 12 V feszültséget kapcsolunk?

28.6 A Joule hő

28A-14 Egy 1000 Ω-os ellenállás maximálisan 2 W teljesítményt képes disszipálni. Mekkora lehet a maximális potenciálkülönbség az ellenállás két végpontja között ?

28A-15 Televíziók képcsövében az elektronágyúból származó elektronok 25 kV-os potenciálkülönbség hatá-

sára a képernyő felé gyorsulnak. Hány watt teljesítmény disszipálódik a képernyőn, ha az elektronnyaláb átlagos áramerőssége 0,21 mA?

28A-16 Egy 12 V-os autóakkumulátor kapacitása 120 Ah (itt a kapacitás azt jelenti, hogy az akkumulátor kezdeti töltése 120 amper·óra). Parkolás során két 80 W-os fényszóróizzó bekapcsolva marad. Számítsuk ki, hogy hány óra alatt csökken az akkumulátor töltése az eredetinek a felére azt feltételezve, hogy a kapocsfeszültség ezalatt nem változik.(Lásd még a 28C-43 feladatot is.)

28A-17 Egy 1300 W-os elektromos fűtőtest 120 V-os hálózatról üzemeltethető. Számítsuk ki a) a fűtőtest ellenállását és b) a felvett áramot.

28A-18 Számítsuk ki 100 liter víz 20°C-ról 90°C-ra való melegítésének költségét, ha 1 kWh energia ára 5 Ft.

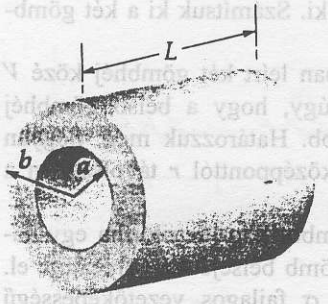
28A-19 Erőmű 60 kV-os feszültségen szolgáltat elektromos energiát távoli fogyasztó számára. a) Ha a feszültség a távvezeték károsodása nélkül 100 kV-ra növelhető, akkor azonos áramerősség mellett mennyivel több energia továbbítható? b) Megnő-e vajon a szállítási veszteség? Miért?

28A-20 Amikor egy izzólámpát (20°C-on) bekacsolunk, a kezdeti áramerősség a stacionáriusnak mintegy tízszerese. Becsüljük meg az izzó volframszál hőmérsékletét.

28A-21 A 28-14 ábrán egy L hosszúságú hengeres csődarab látható, melynek belső és külső átmérője a, illetve b. A cső anyagának fajlagos ellenállása ρ. A cső két vége között meghatározott feszültség van, aminek hatására a cső tengelyével párhuzamos irányban áram folyik. Határozzuk meg az R ellenállást ρ, L, a és b függvényeként.

28B-22 Egy 110 V feszültséggel üzemelő 500 W teljesítményű fűtőtest fűtőszálja 0,5 mm átmérőjű nichrome huzal. Becsüljük meg a fűtőszál hosszát a) azzal a közelítéssel élve, hogy a fajlagos ellenállás változása a hőmérséklettel elhanyagolható és b) úgy, hogy a fajlagos ellenállás hőmérsékletfüggését is figyelembe vesszük. A szál hőmérséklete 1200°C. Mekkora teljesítményű lenne az a) kérdés válaszaként kapott hosszúságú fűtőszál ezen a hőmérsékleten?

28B-24 Kenyérpiritó fűtőszála nichrome huzalból készült. A 120 V-os hálózathoz való csatlakoztatásakor (amikor a szál hőmérséklete 20°C) az átfolyó áramerősség 1,8 A, ám ahogy a fűtőszál melegszik, az áramerősség csökken. Amikor a kenyérpirító a működési hőmérsékletét eléri, az áramerősség 1,53 A. a) Számítsuk ki a kenyérpirító által felvett teljesítményt kenyérpirító a működési hőmérsékleten. b) Mekkora ilyenkor a fűtőszál hőmérséklete?



28-14 ábra
A 28A-21, 28C-36 és a 28C-44 feladatokhoz.

28B-25 Elektromos árammal működő emelőszerkezet a 220 V-os feszültségű hálózatról üzemel és 1 tonnás terhet 9 m/perc sebességgel képes emelni, mialatt 9 A áramerősségű áramot vesz fel. Számítsuk ki a) az emelőszerkezet felvett teljesítményét; b) a leadott teljesítményt és c) az emelő hatásfokát.

28B-26 Van de Graaf-generátor összesen 0,127 mC-nyi 4 MeV-os α-részecskét lő bele egy céltárgyba. (Az α-részecskék hélium-atommagok, amelyek két neutronból és két protonból épülnek fel.) a) Számítsuk ki, hány α részecske csapódott be a céltárgyba. b) Ha a besugárzás 6 percig tartott, mekkora volt a részecskenyaláb átlagos áramerőssége? c) Számítsuk ki a céltárgynak átadott teljes energiát (joule egységekben).

28B-27 Nagyenergiájú α-részecskék nyalábja ér egy céltárgyat. (Az α-részecske egy hélium atommag.) A nyaláb átlagos áramerőssége 0,3 μA, a részecskék kinetikus energiája 20 MeV. Számítsuk ki az egy másodperc alatt a céltárgyat érő részecskék számát és b) a céltárgy által abszorbeált (elnyelt) teljesítményt.

28.7 Az áramsűrűség és a vezetőképesség

28A-28 A $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ egyenletből kiindulva és egyenletes keresztmetszetű hengeres vezetőt feltételezve vezessük le az Ohm törvényt ($V = IR$).

28A-29 Zivatarfelhők környezetében az elektromos térerősség 100 V/m, ugyanitt $6 \cdot 10^{-13}$ A/m^2 az áramsűrűség. Mekkora az légkör vezetőképessége ebben a tartományban?

28B-30 Mennyi hő fejlődik egy egyenletes, 2,6 mm átmérőjű rézhuzal egységnyi térfogatában egységnyi idő alatt, ha a huzalon 0,37 A áramerősségű áram folyik?

28B-31 Egy 1,2 m hosszú, 0,5 mm átmérőjű nichrome huzal két vége közé 5V feszültséget kapcsolunk. Számítsuk ki a huzalban a J áramsűrűséget (a huzal hőmérsékletét 20°C -on tartjuk).

28B-32 Az amerikai szabvány szerinti épületek belsejében 4,00 mm átmérőjű gumiszigetelésű réz-vezetékeken maximálisan 50 A áramerősségű áram folyhat. Egy huzalban, amelyben ekkora áram folyik, vajon mekkora a) a J áramsűrűség, és b) az elektromos térerősség és c) a hőfejlődés egy 3 m-es szakaszon?

28B-33 Ha egyenletes keresztmetszetű vezető két végpontja közé feszültséget kapcsolunk, a vezető teljes térfogatában E elektromos térerősség alakul ki (a végeknél az elektromos tér inhomogenitását elhanyagoljuk). Mutassuk meg, hogy a σ vezetőképességű vezető egységnyi térfogatában disszipált teljesítmény σE^2.

28B-34 Egy ρ fajlagos ellenállású anyagon keresztül áram halad át, az áramsűrűség mindenütt J. Mutassuk meg, hogy a vezető egységnyi térfogatában disszipált teljesítmény ρJ^2.

További feladatok

28C-35 A fajlagos vezetőképesség hőmérsékleti együtthatójának definíciója szerint $\alpha = (1/\rho)(d\rho/dT)$, ahol ρ az anyag fajlagos ellenállása T hőmérsékleten. a) Tegyük fel, hogy α állandó (azaz a hőmérséklettől nem függ). Mutassuk meg, hogy $\rho = \rho_0 e^{(\alpha(T-T_0))}$, ahol ρ_0 a fajlagos ellenállás a T_0 referenciahőmérsékleten. b) Az exponenciális függvény sorba fejtésével mutassuk meg, hogy ha $\alpha\,(T - T_0) << 1$, akkor a fenti egyenlet a (28-9) egyenletté egyszerűsödik.

28C-36 A 28A-21 feladat módosítása: Tételezzük fel, hogy az áram a 28-14 ábrán vázolt cső belső és külső fala között, radiális irányban folyik. Határozzuk meg, hogy hogyan függ ekkor az R ellenállás az a, b, ρ és L paraméterektől. (Útmutatás: Tekintsük az r sugarú és dr vastagságú vékonyfalú hengeres héj belső és külső fala közötti dR ellenállást; a teljes ellenállást ezen elemi ellenállások segítségével, integrálással kaphatjuk meg.)

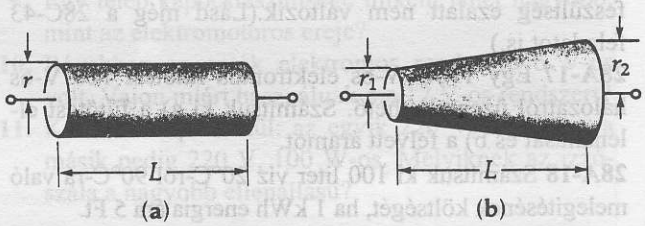
28C-37 Egy ℓ hosszúságú huzal fajlagos ellenállásának hőmérsékleti együtthatója α. A huzal ellenállását úgy is megnövelhetjük, hogy megnyújtjuk, de úgy is, hogy melegítjük. Mutassuk meg, hogy egy $\Delta\ell/\ell$ relatív megnyúlás ebből a szempontból egyenértékű egy ΔT hőmérsékletnöveléssel, feltéve hogy $\Delta\ell/\ell = \alpha\Delta T/2$.

28C-38 Egy ℓ hosszúságú, egyenletes A keresztmetszetű vezető olyan anyagból készült, melynek fajlagos ellenállása a vezető mentén a $\rho = \rho_0(1 + bx)$ egyenlet szerint, lineárisan változik . a) Mi b SI egysége? b) Határozzuk meg, hogyan függ az R ellenállás a megadott paraméterektől.

28C-39 Vákuumdióda I árama a ráadott V feszültségtől az $I = (2{,}5\times10^{-4})V^{3/2}$ egyenlet szerint függ (I és V SI egységekben értendők). a) Vezessük le, hogy hogyan függ az R ellenállás a V feszültségtől.b) Vezessük le, hogyan függ a P disszipált teljesítmény a V feszültségtől. c) Ábrázoljuk a fenti mennyiségeket V függvényében és hasonlítsuk össze az ohmikus ellenállásokra jellemző függvények alakjával.

28C-40 Grafitrudat és vele azonos átmérőjű nichrome rudat végeinél fogva összeerősítünk. Számítsuk ki a rudak hosszúságának arányát, abból a feltételből, hogy a (szabad végek közötti) teljes ellenállás kis hőmérséklettartományban független legyen a hőmérséklettől.

28C-41 A 28-15 ábrán két, azonos anyagból gyártott ellenállás látható. A véglapokat vezető réteggel vonták be. Tételezzük fel, hogy az ellenállások belsejében az áramsűrűség bármely, a tengelyre merőleges síkmetszet mentén állandó nagyságú. Mutassuk meg, hogy a két ellenállás azonos nagyságú, ha a henger r sugara egyenlő a csonkakúp r_1 és r_2 sugarának mértani közepével, azaz $r = \sqrt{r_1 r_2}$. (Útmutatás: a (b) ellenállás nagyságának kiszámításakor számítsuk ki a tengelyszimmetrikus, dx vastagságú, $y = r_1 + (r_2 - r_1)x/L$ sugarú vékony körlemezek átellenes lapjai közötti dR ellenállást. A teljes ellenállás van elemi ellenállások segítségével, integrálással kaphatjuk meg.)



28-15 ábra
A 28C-41 feladathoz.

28C-42 Egy elektronikus eszközre kapcsolt feszültség 5 V és 25 V között változik, az áthaladó áram áramerőssége pedig, 50 mA. Ábrázoljuk az eszköz R effektív ellenállását a V feszültség függvényében ebben a feszültségtartományban.

28C-43 A 28A-16 feladat esetében sokkal reálisabb közelítés az, hogy az akkumulátor V feszültsége a $V = 12\text{V}\cdot e^{(-t/4)}$ egyenlet szerint exponenciálisan csökken, ahol t az órákban megadott időt jelenti. Számítsuk ki ezt a közelítést alkalmazva, hogy hány óra alatt fogy el az akkumulátor kezdeti töltésének a fele. (Megjegyzendő, hogy a tényleges idő ennél a becsült értéknél rövidebb, ugyanis az izzólámpák ellenállása csökken az áramerősség csökkenésével.)

28C-44 Tételezzük fel, hogy a 28-14 ábrán látható cső külső és belső felületét valamilyen jó vezető anyaggal vonták be, így a két koaxiális hengeres vezető közötti teret σ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. A két vezető közé V feszültséget kapcsolunk úgy, hogy a belső vezető legyen a nagyobb potenciálon. Ennek következtében sugárirányú áram indul meg a külső vezető felé. Mutassuk meg, hogy hogyan függ a J áramsűrűség a tengelytől r távolságban a megadott a, b, L, σ, V paraméterektől.

28C-45 Két vékony, koncentrikus, gömbhéj vezető sugara a, ill. b (a < b). A köztük levő teret σ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. Számítsuk ki a két gömbhéj közti R ellenállást.

28C-46 Az előző feladatban leírt két gömbhéj közé V feszültséget kapcsolunk, úgy, hogy a belső gömbhéj potenciálja legyen nagyobb. Határozzuk meg, hogyan függ a J áramsűrűség a középponttól r távolságban a megadott paraméterektől.

28C-47 Egy a sugarú gömböt szimmetrikusan egy nagyobb, b sugarú üreges gömb belsejében helyezünk el. A gömbök közötti teret σ fajlagos vezetőképességű anyaggal töltjük ki. A két gömb közé V feszültséget

kapcsolunk. Mutassuk meg, hogy a gömbök között $I = 4\pi\sigma Vab/(b - a)$ áramerősségű áram folyik.

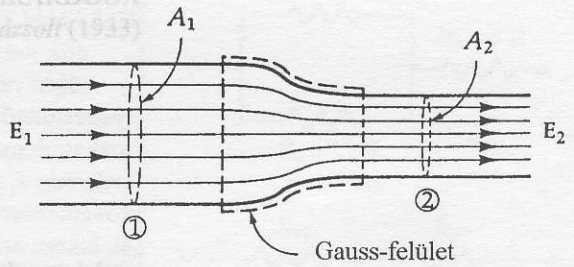
28C-48 Egy $\ell = 80$ cm hosszúságú, $r = 2$ mm sugarú vasrudat és egy vele azonos méretű ezüstrudat végénél fogva összeerősítünk. A szabad végek közé $V = 5$V feszültséget kapcsolunk. a) Mekkora a feszültségesés az egyes rudakon Mekkora bennük b) a J áramsűrűség és c) az E elektromos térerősség?

28C-49 A hőmérsékletkülönbség hatására létrejövő hőáram (19.6 fejezet) és a feszültség következtében keletkező elektromos áram tulajdonságai szoros analógiára utalnak. Vezető anyagokban mind a dQ hőenergiát, mind pedig a dq töltést szabad elektronok közvetítik, illetve szállítják; következésképpen a jó elektromos vezetők egyúttal jó hővezetők is. Tekintsünk egy dx vastagságú, A felületű, σ fajlagos vezetőképességű lemezt, melynek lapjai között a potenciálkülönbség dV. Mutassuk meg, hogy az áramerősség $I = dq/dt$ kifejezése és a hőáram (19-19) egyenlet szerinti kifejezése egymással analóg:

Elektromos vezetés	**Hővezetés (19-19)**
$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx}$	$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}$

A hővezetés egyenletének megfelelően a k hővezetési együtthatójú anyagban dQ/dt hőáram (melynek SI egysége J/s) dT/dx hőmérsékleti gradiens hatására jön létre. Indokoljuk meg, miért jelenik meg a negatív előjel az egyenletekben.

28C-50 A 28-16 ábrán illusztrált σ fajlagos vezetőképességű hengeres vezető keresztmetszete a szűkület két oldalán A_1 illetve A_2. A vezető két vége közötti feszültség miatt a vezetőben az elektromos térerősség nem zérus, ennek megfelelően áram folyik. a) Tekintsük a szűkületet teljesen körbevevő zárt Gauss felületet. Mekkora a bal oldali keresztmetszeten a Φ_E elektromos fluxus az ábrán feltüntetett mennyiségekkel kifejezve? b) Mekkora a J_1 és J_2 áramsűrűség a szűkülettől balra, illetve jobbra? c) Számítsuk ki az E_2 térerősséget mint E_1, A_1 és A_2 függvényét. d) Számítsuk ki a v_2 átlagos vándorlási sebességet, mint v_1 és a keresztmetszeti területek függvényét.



28-16 ábra
A 28C-50 feladathoz.

XXVII. Fejezet

27A-1 0,885 pF

27A-3 a) $\frac{3}{5}C$ b) $3C$ c) C d) A kondenzátorok rövidre vannak zárva

27B-5 C

27B-7 $C = \varepsilon_0 A(a + b)/[b(a - b)]$

27B-9 A válasz adott.

27B-11 A válasz adott.

27B-13 A válasz adott.

27B-15 a) 400 pC b) 80 V

27B-17 0,188 m^2

27B-19 $C = C_0/(1 - f)k$

27B-21 $2\pi\varepsilon_0 L\kappa_1\kappa_2\left[\kappa_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \kappa_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$

27A-23 a) 1,60 mJ b) 0,800 mJ

27B-25 A válasz adott.

27B-27 a) 600 nC, csökken b) 30 μJ, csökken c) 30 μJ

27B-29 A válasz adott.

27C-31 A válasz adott.

27C-33 267 V

27C-35 $C/L = \kappa 2\pi\varepsilon_0/[\ln(b/a)]$

27C-37 $1/(1 + \kappa)$

27C-39 $CV^2/2d$

27C-41 A válasz adott.

27C-43 $1{,}41 \times 10^{-15}$ m

XXVIII. Fejezet

28A-1 $3{,}12 \times 10^{19}$ elektron/s

28B-3 a) $5{,}86 \times 10^{28}$ elektron/m^3 b) 51,9 mA c) $1{,}76 \times 10^{-6}$ m/s

28A-5 0,667 Ω

28A-7 418C°

28A-9 276C°

28B-11 1,56 R

28B-13 1,66 V

28A-15 5,25 W

28A-17 a) 11,1 Ω b) 1,08 A

28A-19 a) 66,7%-kal nagyobb teljesítmény b) Nem

28A-21 $\rho L/\pi(b^2 - a^2)$

28B-25 a) 2,16 kW b) 1,34 hp c) 46,3%

28B-27 a) $9{,}36 \times 10^{11}$ részecske b) 6,00 W

28A-29 $6{,}00 \times 10^{-15}$ s

28B-31 $4{,}17 \times 10^6$ A/m^2

28B-33 A válasz adott.

28C-35 A válasz adott.

28C-37 A válasz adott.

28C-39 SI egységekben: a) $4000V^{2/3}$; $(2{,}50 \times 10^{-4})V^{5/2}$

28C-41 A válasz adott.

28C-43 8,32 h

28C-45 $(b - a)/4\pi ab\sigma$

28C-47 A válasz adott.

28C-49 A válasz adott.

XXIX. Fejezet

29A-1 220 Ω

29B-3 a) A b) B c) 4,50

29B-5 A válasz adott.

29B-7 $R_{AB} = \frac{7}{5}R$

29B-9 wattban: $10, 16, 24, 30, 40, 53\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}, 100, 160$

29A-11 9,20 V

29A-13 A válasz adott.

29A-15 A válasz adott.

29B-17 a) 5,00 Ω b) 6,00 A c) 2,00 A

29B-19 0,0860 Ω

29B-21 2,67 mA R_1-en;2,50 mA R_2-n;0,167 mA R_3-on

29B-23 A válasz adott.

29B-25 A válasz adott.

29B-27 a) 2,41 kΩ b) 2,46 kΩ

29B-29 a) 0,517% b) 0,103%

29B-31 $R_1 = 5{,}025 \times 10^{-3}$ Ω; $R_2 = 4{,}523 \times 10^{-2}$ Ω; $R_3 = 4{,}523 \times 10^{-1}$ Ω; $R_4 = 4{,}523$ Ω

29B-33 A válasz adott.

29A-35 A válasz adott.

29B-37 0,587 MΩ

29B-39 A válasz adott.

29B-41 1,44 μF

29C-43 $R_1 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_C$;
$R_2 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_A$;
$R_3 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_B$;

29C-45 $R_A = R_1 R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_B = R_1 R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_C = R_2 R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;

29C-47 $R(1 + \sqrt{3})$

29C-49 A válasz adott.

29C-51 A válasz adott.

29C-53 A válasz adott.

29C-55 201 Ω

29C-57 $R/2$

29C-59 163 V; 1.43 MΩ

29C-61 0,050 J R_1-en; 0,0167 J R_2-n

29C-63 6,90 Hz

XXX. Fejezet

30A-1 $1{,}86 \times 10^{-6}$ m/s

30B-3 $F = 1{,}44 \times 10^{-13}\,\hat{y} - 3{,}36 \times 10^{-13}\,\hat{z}$ (newtonban)

30A-5 1,20 keV

30A-7 0,357 T

30B-9 $R_\alpha = R_p = 42{,}8R$

30B-11 $R = \sqrt{2mV/qB^2}$

30A-13 $7{,}78 \times 10^5$ m/s

30B-15 $2{,}44 \times 10^5$ V/m

30B-17 b) 0,708 T

EGYENÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖK

Abban a pillanatban, amint az emberek feladták a mágiába vetett évszázados hitüket, a tudomány nekik ajándékozta helyette az elektromos áram áldásait.

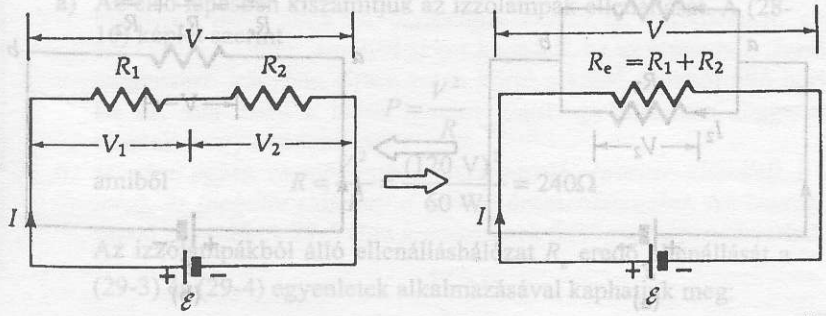
JEAN GIRARDOUX
Az elvarázsolt (1933)

29.1 Bevezetés

Az egyenáramú (DC) áramkörre az jellemző, hogy a töltések csak egy irányban áramlanak. Ebben a fejezetben azokat a módszereket ismertetjük, amelyekkel a feszültségforrásokból, ellenállásokból és kondenzátorokból álló, egyenáramú áramkörök tulajdonságait elemezhetjük. Az energia- és töltésmegmaradásból kiindulva megkapjuk a *Kirchhoff törvényeket*, melyek nagyban leegyszerűsítik az áramkörök tulajdonságainak elemzését. Ezután bemutatjuk azokat az áramköröket, amelyekből alapvető elektromos készülékek épülnek fel és amelyeket széleskörűen használnak a laboratóriumokban áramerősség, feszültség, és elektromotoros erő mérésére. Végezetül egy speciális RC áramkört elemzünk, melynél az áram az idő függvényében változik.

29.2 Sorosan és párhuzamosan kapcsolt ellenállások

Bármely áramkör elemzésének első lépése annak megállapítása, hogy vajon az áramkört egyszerűsíthetjük-e az áramkör elemeinek átcsoportosításával. Ellenállásláncokat könnyen leegyszerűsíthetünk oly módon, hogy alkalmasan



a) Két sorba kapcsolt ellenállás b) Az R eredő ellenállás

29-1 ábra
Két sorba kapcsolt ellenállás eredője a két ellenállás összege.

megválasztott ellenállással helyettesítjük a láncot. Két vagy több *sorba* kapcsolt ellenállás (29-1a ábra) olyan R_e ellenállással egyenértékű, amelyen az áramkörön lévő V feszültség (ami az egyes ellenállásokon eső feszültségek összege)

$$V = V_1 + V_2$$

ugyanakkora I áramot hoz létre, mint ami az eredeti körben folyik. Az Ohm törvény szerint:

$$IR_e = IR_1 + IR_2,$$

amiből

$$R_e = R_1 + R_2.$$

Ha kettőnél több ellenállást kapcsolunk sorba, akkor hasonló levezetés eredményeként azt kapjuk, hogy az eredő ellenállás:

SORBA KAPCSOLT ELLENÁLLÁSOK

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \qquad (29\text{-}1)$$

Két vagy több, párhuzamosan kapcsolt ellenállás (29-2a ábra) is helyettesíthető egyetlen R_e ellenállással. Ezt arra a felismerésre alapozva határozhatjuk meg, hogy az áram az a pontnál kettéoszlik: I_1 áram az R_1 ellenálláson, míg I_2 áram az R_2 ellenálláson halad át. A **töltésmegmaradás elvéből** következően egységnyi idő alatt az a és b pontoknál ugyanannyi töltés halad át, hiszen az a pontnál töltés nem halmozódhat fel. Így:

$$I = I_1 + I_2 \qquad (29\text{-}2)$$

Az Ohm törvényből következik, hogy

$$\frac{V}{R_e} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \qquad (29\text{-}3)$$

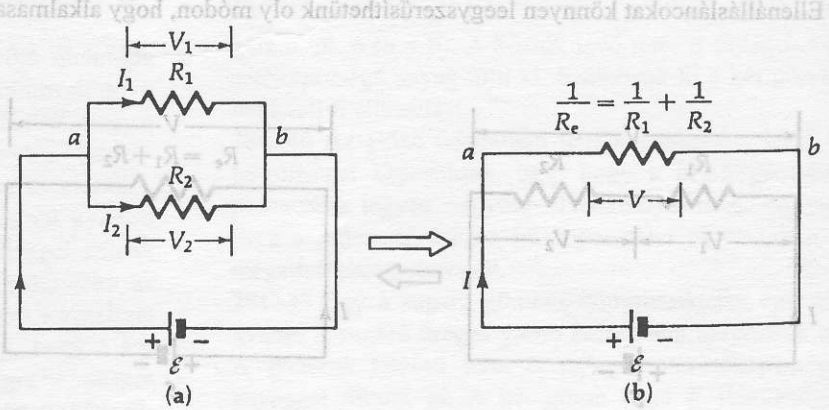
Minthogy mindkét ellenállást ugyanazon a és b pontok közé kapcsoltuk, a végpontjaik közötti feszültségesés azonos: $V = V_1 = V_2$. Ennélfogva a (29-3) összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\frac{V}{R_e} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}.$$

V-vel elosztva:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ha kettőnél több ellenállást kapcsolunk párhuzamosan, hasonló levezetés eredményeként azt kapjuk, hogy



29-2 ábra
Két párhuzamosan kapcsolt R_e ellenállás eredője kisebb, mint bármelyik a kettő közül.

PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT ELLENÁLLÁSOK

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad (29\text{-}4)$$

Ismerjük fel, hogy párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője mindig kisebb, mint az ellenállások bármelyike. Megjegyzendő továbbá, hogy párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredő ellenállását úgy kell kiszámítani, ahogyan a sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitását, és megfordítva.

29-1 PÉLDA

Számítsuk ki a 29-3a ábrán látható ellenálláshálózat eredő ellenállását.

MEGOLDÁS

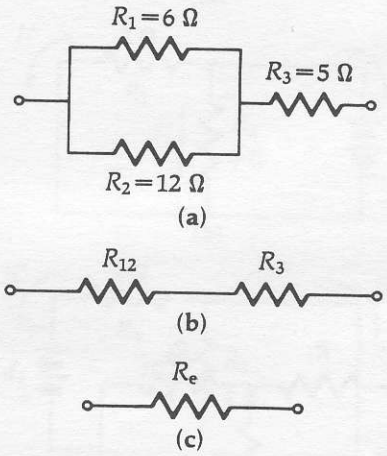
Rendszerint a legcélravezetőbb eljárás az, hogy kiszámítjuk a párhuzamos tagokból álló ellenálláscsoportok és a soros tagokból álló ellenálláscsoportok eredőjét. Ezeket tovább egyszerűsítve végül egyetlen eredő ellenállás marad. Ebben a példában, az R_1 és R_2 ellenállások eredőjét, R_{12} értékét számítjuk ki. Minthogy ezek párhuzamosan vannak kapcsolva, a (29-4) képletet használjuk fel:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{12\Omega},$$

ahonnan $$R_{12} = 4\Omega.$$

A következő lépésben R_{12} és R_3 eredőjét számítjuk ki. Minthogy ezek sorba vannak kapcsolva:

$$R_e = R_{12} + R_3 = 4\Omega + 5\Omega = 9\Omega$$



29-3 ábra
A 29-1 példához

29-2 PÉLDA

Három 60 W-os, 120 V-os izzólámpát csatlakoztatunk 120 V-os feszültségforráshoz, a 29-4 ábrán látható módon. Számítsuk ki a) a három izzólámpa fogyasztását (a rajtuk disszipált teljesítményt) és b) az egyes izzólámpákon eső feszültséget. Tételezzük fel, hogy a lámpák ellenállása ohmikus (noha a valóságban az izzólámpák ellenállása nagymértékben függ az áramerősségtől).

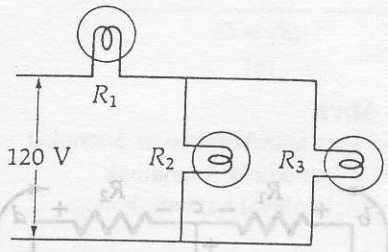
MEGOLDÁS

a) Az első lépésben kiszámítjuk az izzólámpák ellenállását. A (28-16) képlet szerint

$$P = \frac{V^2}{R}$$

amiből $$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\ \text{V})^2}{60\ \text{W}} = 240\Omega$$

Az izzólámpákból álló ellenálláshálózat R_e eredő ellenállását a (29-3) és (29-4) egyenletek alkalmazásával kaphatjuk meg:



29-4 ábra
A 29-2 példához

$$R_e = R_1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = 240\ \Omega + 120\ \Omega = 360\ \Omega$$

A 360 W ellenálláson disszipált teljesítmény:

$$P = \frac{V^2}{R_e} = \frac{(120\ \text{V})^2}{360\ \Omega} = 40\ \text{W}$$

b.) A hálózaton áthaladó áram I áramerőssége (28-16) összefüggés szerint:

$$P = I^2 R_e$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $I = \sqrt{\frac{P}{R_e}} = \sqrt{\frac{40\ \text{W}}{360\ \Omega}} = \frac{1}{3}\ \text{A}$

Az R_1 ellenálláson eső feszültség

$$V_1 = IR_1 = (\tfrac{1}{3}\ \text{A})(240\ \Omega) = 80{,}0\ \text{V}$$

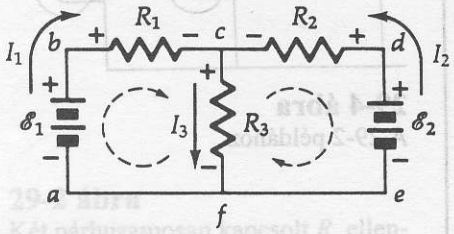
A párhuzamosan kapcsolt R_2 és R_3 ellenállásokon eső V_{23} feszültség:

$$V_{23} = IR_{23} = \left(\frac{1}{3}\ \text{A}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{240\ \Omega} + \frac{1}{240\ \Omega}}\right) = 40{,}0\ \text{V}$$

29.3 Sokhurkú áramkörök és a Kirchhoff törvények

Több elemet tartalmazó hálózatok tulajdonságainak tanulmányozására mindenekelőtt egyszerűsítsük le a hálózatot oly módon, hogy a párhuzamosan, illetve sorba kapcsolt ellenállásokat helyettesítsük az eredőjükkel. Gyakran előfordul azonban, hogy a hálózatot ilyen módon nem lehet egyetlen egyszerű hurokká alakítani, különösen akkor nem, ha a hálózat több feszültségforrást is tartalmaz. Ilyenkor a hálózat több hurokból áll (29-5 ábra). A *Kirchhoff törvények* segítségével nagy mértékben leegyszerűsíthetjük azt az eljárást, amellyel az áramkör egyes pontjaiban a feszültség- és áramerősség értékét meghatározhatjuk. A Kirchhoff törvények nem alapvető természettörvények, hanem az energia- és töltésmegmaradás tételeinek olyan következményei, amelyek a hálózatanalízist leegyszerűsítik.

Definiáljunk először néhány fogalmat. A *csomópont* a hálózat olyan pontja, ahol három vagy több áramvezető csatlakozik egymáshoz. A 29-5 ábrán a c és f pontok csomópontok. Az *ág* két csomópont közötti összeköttetés. A *hurok* ágakból álló zárt sorozat, pl. *abcfa* vagy *abcdefa*. A töltések a



29-5 ábra
Két hurkot és két feszültségforrást tartalmazó hálózat.

hurok mentén növekvő és csökkenő potenciálú szakaszokon haladnak át. Az energiamegmaradás törvénye szerint egy hurok mentén a potenciálváltozások algebrai összegének zérusnak kell lennie, azaz a huroktörvény szerint $\Sigma V = 0$. A töltésmegmaradás törvénye következtében a csomópontokon töltés nem halmozódhat fel, így a csomópontokhoz tartó összes áram algebrai összegének zérusnak kell lennie, azaz a csomóponti törvény szerint $\Sigma I = 0$.

A KIRCHHOFF TÖRVÉNYEK:

1. **A huroktörvény: $\Sigma V = 0$. Bármely zárt hurok mentén a feszültségek összege zérus.**
2. **A csomóponti törvény: $\Sigma I = 0$. Bármely csomópontba befolyó összes áram előjeles összege zérus. (Megállapodás szerint a befolyó áramok pozitív, a kifolyó áramok negatív előjelűek.)**

Ezeket a szabályokat legkönnyebben az alábbi, meglehetősen formális eljárással alkalmazhatjuk a hálózatanalízisben. Tekintsük a 29-5 ábrán látható hálózatot, melyet az alábbiak szerint elemezhetünk:

1. *Jelöljük meg a feszültségforrások pólusait + és – előjelekkel.* Figyeljük meg, hogy az adott áramkörben a feszültségforrások úgy vannak kapcsolva, hogy az egyik feszültségforrás a másikon keresztül áramot tud áthajtani.
2. *Nyíllal jelöljük meg az áramirányt minden egyes ágban.* A helyes áramirányt gyakran megsejthetjük, de nem követünk el hibát, ha nem találjuk el előre, mert a megoldásban adódó negatív érték figyelmeztet arra, hogy a valódi áramirány a megjelölttel ellentétes.
3. *A feltételezett áramirányoknak megfelelően jelöljük meg minden egyes ellenállás végeit + és – előjellel úgy, hogy a nagyobb potenciálú végpont kapja a + jelölést.* Megjegyzendő, hogy az ellenálláson keresztül az áram a nagyobb potenciálú pont felől a kisebb potenciálú hely felé folyik, így az áram az ellenállás + jelű végén lép be.
4. *Jelöljünk ki minden egyes hurok mentén egy irányt, amelynek megfelelően a hurkot körüljárjuk.* Példánkban minden egyes hurkot az óramutató járása szerinti irányban járjuk körül, amint azt a szaggatott köralakú nyilak mutatják. (Az irányválasztás tetszés szerinti: választhatnánk ellentétes irányt is az egyik vagy akár mindkét hurokra. Tulajdonképpen van egy harmadik hurok is, amelyik a „külső" ágakból áll. Mint később látni fogjuk, a harmadik hurkot nem kell figyelembe venni, mert nem ad többlet információt, azaz redundáns. Minden ágat legalább egy hurok körüljárása során érinteni kell.)
5. *Tetszés szerinti pontból kiindulva járjunk körül minden egyes kiválasztott hurkot és jegyezzük fel a potenciálnövekedéseket (+ előjellel) és a csökkenéseket (– előjellel); az összegük zérus.* Ha az adott példában a bal oldali hurok *a* pontjából illetve a jobb oldali hurok *f* pontjából indulunk, a következő egyenletekhez jutunk:

$$\Sigma V = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \qquad (29\text{-}5)$$

$$I_3 R_3 + I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0 \qquad (29\text{-}6)$$

Figyeljük meg, hogy ha összeadjuk ezeket az egyenleteket, olyan egyenlethez jutunk, amelyet akkor kapnánk, ha az óramutató járásával megegyező irányban jártuk volna körül a külső ágakból álló hurkot. Ez az, ami miatt a külső hurokra felírt egyenlet nem független a többitől, vagyis redundáns.

6. *Minden egyes csomópontban összegezzük, (pozitív előjellel) a befolyó, és (negatív előjellel) a kifolyó áramerősségeket.* Az összeg zérussal egyenlő. A 29-5 ábra áramkörének felső csomópontján tehát

$$\Sigma I = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (29\text{-}7)$$

Az alsó csomópontra felírt egyenlet ugyanilyen alakú, ám az előjelek ellentétesek; vagyis a két csomópont *nem független* egymástól.

A viszonyokat tehát a *három* ismeretlent (I_1, I_2 és I_3) tartalmazó három egyenlet (29-5) (29-6) (29-7) írja le. Az ismeretlenek kifejezésére célszerű az egyenleteket olyan formában megadni, ahol az azonos ismeretlen mennyiségeket tartalmazó tagok (esetleg zérus együtthatóval) azonos oszlopba kerülnek:

$$-R_1I_1 + 0 - R_3I_3 = -\mathcal{E}_1 \qquad (29\text{-}8)$$

$$0 + R_2I_2 + R_3I_3 = \mathcal{E}_2 \qquad (29\text{-}9)$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (29\text{-}10)$$

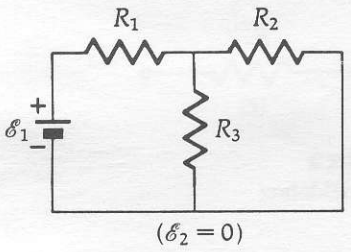
Az egyenletrendszer megoldására sokféle módszer ismeretes[1]. A megoldás a következő:

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (29\text{-}11)$$

$$I_2 = \frac{(R_1 + R_3)\mathcal{E}_2 - R_3\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (29\text{-}12)$$

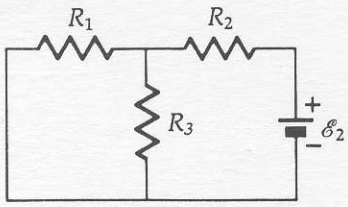
$$I_3 = \frac{R_1\mathcal{E}_2 + R_2\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (29\text{-}13)$$

Ha valamelyik I áram éppen ellenkező irányú, mint ahogy azt feltételeztük, akkor a megfelelő egyenletekbe a konkrét R és $\mathcal{E}$ értékeket behelyettesítve, negatív értéket kapunk eredményül.



($\mathcal{E}_2 = 0$)

(a)



($\mathcal{E}_1 = 0$)

(b)

29-6 ábra

A 29-5 ábra áramkörében az áramokat az *a* és *b* áramkörök áramainak szuperpozíciójával kaphatjuk meg.

29.4 A szuperpozíció elve

Feltéve, hogy az áramköri elemek *lineárisak*, azaz az ellenállások nagysága és a feszültségforrások elektromotoros ereje független a rajtuk átfolyó áram erősségétől, a 29-5 ábrán látható áramkörben folyó áramokat a szuperpozíció elvének felhasználásával is kiszámíthatjuk. Ennek alapja az, hogy bármelyik feszültségforrás hatása független a többiétől, tehát úgy tehetünk, mintha a többi feszültségforrás jelen sem volna. Az eljárás a következő: válasszuk ki valamelyik feszültségforrást, a többit pedig helyettesítsük rövidzárral (vagy ha a feszültségforrásnak nem zérus a belső ellenállása, akkor ellenállással) és számítsuk ki az áramerősségeket. Ismételjük meg ezt minden egyes feszültségforrással. Az eredeti, több feszültségforrást tartalmazó áramkörben folyó áramokat a részáramok szuperpozíciójaként, összegeként kaphatjuk meg. A 29-5 ábra áramkörének esetén elvégzendő eljárást a 29-6 ábra mutatja be: először, az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrást rövidzárral helyettesítve, a 29-6a ábra áramkörében folyó (rész)áramokat úgy kaphatjuk meg, hogy a sorba, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőit kiszámítva a teljes áramot „szétosztjuk". Hasonlóan, az $\mathcal{E}_1$ feszültségforrást helyettesítve rövidzárral, a 29-6b ábra áramkörében folyó (rész)áramok áramerőssége számítható ki. Az eredeti áramkörben folyó áramok áramerőssége pedig az egyszerűsített hálózatban folyó részáramok áramerősségének az összege. Ez az eljárás gyakorta sokkal egyszerűbb, mint az egyenletrendszer megoldása.

[1] Az egyenletrendszer megoldása időigényes feladat lehet. A lineáris egyenletrendszerek megoldásának valószínűleg a legkényelmesebb módszere a Cramer-szabály alkalmazása. (Ez a megállapítás csak a két- és háromismeretlenes egyenletrendszerekre érvényes. Fordító megjegyzése).

29-3 PÉLDA

Számítsuk ki a 29-7a ábrán látható áramkör egyes ágainak áramerősségét.

MEGOLDÁS

1. módszer: A Kirchhoff törvények alkalmazása

Válasszuk meg az egyes ágakban folyó áramok irányát a 29-7a ábrán feltüntetett módon; az egyes ellenállásokon eső feszültségeket jelöljük meg + ill. – jellel, annak megfelelően, hogy az áram az ellenállás pozitív jelű végén lép be. Az (a) jelű csomópontnál belépve haladjunk végig a hurkokon, és az első Kirchhoff törvénynek megfelelően a potenciáleséseket adjuk össze; ez az összeg zérus. Az egyszerűség kedvéért a feszültségegységeket nem jelölve, azt kapjuk, hogy

$$\Sigma V = 0$$

Bal hurok (óramutató járásával azonos irányban) $10 - 2I_1 - 4I_3 = 0$

Jobb hurok (óramutató járásával ellenkező irányban) $4 - 4I_3 = 0$

A következő lépésben a második Kirchhoff törvényt alkalmazva, a felső csomópontba belépő áramok összegét számítjuk ki, melynek zérusnak kell lennie. A belépő áramok áramerőssége pozitív, a kilépőké negatív, tehát

$$\Sigma I = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

A fenti egyenleteket átrendezve

$$-2I_1 + 0 - 4I_3 = -10$$

$$0 + 0 + 4I_3 = -4$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Behelyettesítésekkel ezt az egyenletrendszert egyszerű megoldani: I_3-at a második egyenletből kifejezve és a másik kettőbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

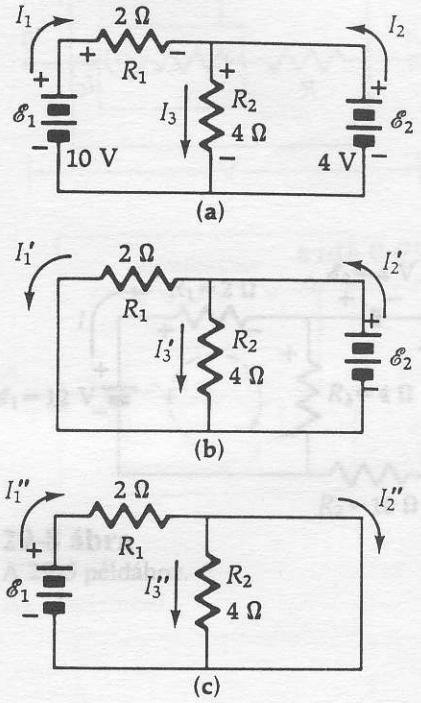
$$\boxed{I_1 = 3{,}00\ \text{A}} \quad \boxed{I_2 = -2{,}00\ \text{A}} \quad \boxed{I_3 = 1{,}00\ \text{A}}$$

I_2 negatív előjele azt jelzi, hogy ebben az ágban az áramirány a feltételezettel éppen ellentétes.

2. módszer: a szuperpozíció elvének alkalmazása

E módszer szerint, minden egyes lépésben az egyik feszültségforrást rövidzárral (zérus ellenállású vezetővel) helyettesítjük, és a másik feszültségforrás által létrehozott áramerősségeket számítjuk ki. Az adott esetben két egyszerű, a 29-7b és 29-7c ábrákon látható áramkörben folyó áramerősséget kell kiszámítani. Mivel ez utóbbi áramkörökben folyó áramok részáramok, az I' és I'' jelöléseket használjuk; vagyis a bal oldali ágban I_1' lenne az áramerősség, ha csak az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrás lenne jelen, illetve ugyanott, hasonlóképpen, az áramerősség I_1'' lenne pusztán az $\mathcal{E}_1$ feszültségforrás jelenlétében. A tényleges áramirány az R_1 ellenálláson attól függ, hogy I_1' és I_1'' közül melyik a nagyobb.

A (*b*) áramkör nem más, mint az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrással párhuzamosan kapcsolt két ellenállás. Az Ohm törvény szerint ($I = V/R$) ezen ellenállásokon átfolyó áramerősség



$$I_1' = \frac{4\ \text{V}}{2\ \Omega} = 2\ \text{A} \quad \text{és} \quad I_3' = \frac{4\ \text{V}}{4\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

Kirchhoff csomóponti törvénye szerint

$$\Sigma I = 0$$

vagy $$I_2' = I_1' + I_3' = 2\ \text{A} + 1\ \text{A} = 3\ \text{A}$$

A *c* áramkörben a jobb oldali hurokban lévő rövidzár miatt a teljes áram itt folyik, az R_2 ellenálláson semmi (úgy szoktuk ezt mondani, hogy R_2 -t „kisöntöltük"). Így

$$I_3'' = 0 \quad \text{és} \quad I_1'' = I_2'' = \frac{10\ \text{V}}{2\ \Omega} = 5\ \text{A}$$

Az eredeti áramkörben folyó áramerősségét úgy kapjuk meg, hogy a két egyszerűsített áramkörben kiszámított áramerősségeket összeadjuk. Az R_1 ellenálláson $I_1' = 2$ A bal felé, míg $I_1'' = 5$ A jobb felé folyik. Ebben a hurokban tehát az áramerősség

$$I_1'' - I_1' = 5\ \text{A} - 2\ \text{A} = 3{,}0\ \text{A} \quad \text{(jobb felé)}$$

Az R_2 ellenálláson keresztül folyó I_3'' és I_3' áramerősségek azonos irányúak, tehát

$$I_3' + I_3'' = 1\ \text{A} + 0 = 1{,}0\ \text{A} \quad \text{(lefelé)}$$

A jobb oldali hurokban I_2' és I_2'' egymással ellenkező irányúak, így

$$I_2'' - I_2' = 5\ \text{A} - 3\ \text{A} = 2{,}0\ \text{A} \quad \text{(lefelé)}$$

29-4 PÉLDA

Mutassuk meg, hogy az előző példában a feszültségforrások és az áramkör többi tagjai közötti energiacsere megfelel az energiamegmaradás törvényének.

MEGOLDÁS

Az $\mathcal{E}_1$ feszültségforráson az I_1 áram a növekvő potenciálok irányában halad át, vagyis a feszültségforrás az áramkör többi tagjának P_1 teljesítményt ad le:

$$P_1 = \mathcal{E}_1 I_1 = (10\ \text{V})(3{,}0\ \text{A}) = \underline{\underline{30{,}0\ \text{W}}}$$

Az I_1 és I_3 áramok az R_1 és R_3 ellenállásokon haladnak át. Az ellenállásokon folyamatosan, időegységenként I^2R mennyiségű hő fejlődik. Az ellenálláson a P_2 Joule-hő:

$$P_2 = I_1^2 R_1 + I_3^2 R_2 = (3{,}0\ \text{A})^2(2\ \Omega) + (1{,}0\ \text{A})^2(4\ \Omega) = \underline{\underline{22{,}0\ \text{W}}}$$

Az I_2 áram az $\mathcal{E}_2$ feszültségforráson át, annak eredeti polaritásával *ellentétes* irányban halad át. (Ilyenek a polaritások például az akkumulátorok töltésekor.) Az áram szállította töltések a feszültségforrásban átadják potenciális energiájukat, amely a feszültségforrás (akkumulátor) kémiai energiájává alakul át. A P_3 teljesítmény, amely az akkumulátorban tárolódik:

$$P_3 = \mathcal{E}_2 I_2 = (4\ \text{V})(2{,}0\ \text{A}) = \underline{\underline{8{,}0\ \text{W}}}$$

Tehát az $\mathcal{E}_1$ feszültségforrás az áramkör többi tagjának energiát szolgáltat, az $\mathcal{E}_2$ feszültségforrás pedig energiát nyel el és tárol, míg az ellenállásokon hő fejlődik. Ha az energiamegmaradás elve igaz, akkor:

$$\begin{bmatrix}\text{az } \mathcal{E}_1 \text{ feszültség-}\\ \text{forrás által leadott}\\ \text{teljesítmény}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{időegység alatt}\\ \text{képződött hő}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{az } \mathcal{E}_2 \text{ feszültség-}\\ \text{forrás által tárolt}\\ \text{teljesítmény}\end{bmatrix}$$

$$P_1 = P_2 + P_3$$

$$30{,}0\ \text{W} = 22{,}0\ \text{W} + 8{,}0\ \text{W}$$

Az energiamérleg tehát megfelel az energiamegmaradás elvének.

29-5 PÉLDA

Számítsuk ki a 29-8 ábrán látható áramkör A és B pontja közötti potenciálkülönbséget, és állapítsuk meg, melyik pont potenciálja nagyobb.

MEGOLDÁS

Az áramkör egyhurkú, ugyanis az A és B pont nincs vezetővel összekötve ($\mathcal{E}_2$-t és R_2-t tartalmazó ágakban áram nem folyik, következésképpen az R_2 ellenálláson feszültség nem esik). Áram csak a bal oldali hurokban folyik, az óramutató járásával megegyező irányban. Az A és B pont közötti potenciálkülönbség az $\mathcal{E}_2$, R_3 és R_2 áramköri elemek potenciálkülönbségeinek összege (a harmadik zérus). Először a hurokban folyó áramra alkalmazott Kirchhoff-törvényekkel meghatározzuk az R_3 ellenálláson eső feszültséget. Az óramutató járása szerinti áramirányt feltételezve, összegezzük a hurok mentén a potenciálváltozásokat:

$$\Sigma V = 0$$

$$E_1 - IR_1 - IR_3 = 0$$

I-t kifejezve, és a konkrét számértékeket behelyettesítve:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_3} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Az R_3 ellenálláson eső V_3 feszültség tehát

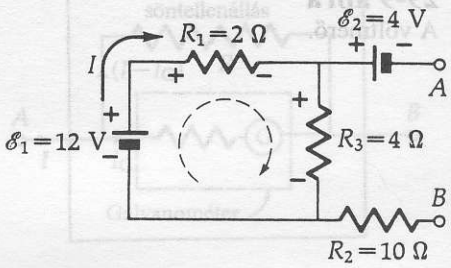
$$V_3 = IR_3 = (2\ \text{A})(4\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

és a 29-8 ábrán megjelölt polaritású.

A B pontból elindulva, és az A pont felé haladva, meghatározhatjuk V_{AB} értékét, az A pont potenciálját B-éhez képest:

$$V_{AB} = VR_2 + IR_3 + \mathcal{E}_2 = 0 + 8\ \text{V} - 4\ \text{V} = 4{,}00\ \text{V}$$

Az A pont potenciálja tehát 4 V-tal nagyobb, mint a B ponté.

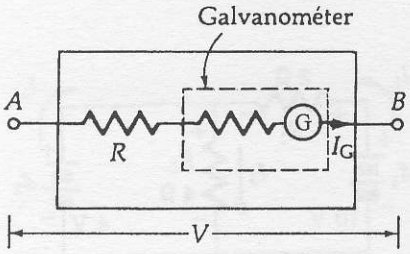


29-8 ábra
A 29-5 példához.

29.5 Alkalmazások

Az áramkörök egyes paramétereinek meghatározására számos különböző eszközt használunk*. Ezek közé tartozik a voltmérő, az ampermérő, a Wheatstone híd.

A voltmérő



29-9 ábra
A voltmérő.

Az áramkör elemein eső feszültség mérésére szolgál a voltmérő. A voltmérőben rendszerint érzékeny *galvanométer* méri a rajta áthaladó áram áramerősségét (29-9 ábra). A galvanométer érzékenysége azzal jellemezhető, hogy mekkora áramerősség idézi elő a mutató teljes kitérését. Ez rendszerint 10 μA és 1 mA közötti nagyságrendű. A galvanométer belső ellenállása R_G, ami a galvanométert mozgató mechanizmusnak az ellenállása. Szokás az áramköri rajzokon R_G-t külön ellenállásként feltüntetni, bár figyelembe kell venni, hogy ez az ellenállás magának a mérőműszernek az alkotó része. A mérendő feszültségek rendszerint sokkal nagyobbak annál, mint ami a galvanométer mutatójának teljes kitérését okozná, és ezért a galvanométerrel sorba kapcsolt R előtétellenállást alkalmaznak, hogy a galvanométeren eső feszültséget lecsökkentsék. Számítsuk ki, milyen R előtétellenállást kell ahhoz alkalmazni, hogy az AB bemenetekre adott V feszültség teljes kitérést okozzon. Ha I_G-vel jelöljük azt az áramerősséget, amely teljes kitérést okoz, és R_G a galvanométer belső ellenállása, akkor, Ohm törvényét alkalmazva

$$V = I_G(R + R_G) \tag{29-14}$$

vagy

$$R = \frac{V}{I_G} - R_G . \tag{29-15}$$

Ha a voltmérő méréshatárát meg kívánjuk változtatni, az előtétellenállást kell kicserélnünk. Olyan voltmérőben, amelyiknek több méréshatára van, az előtétellenállásokat kapcsolórendszerrel válthatjuk. (Lásd a 29B-30 és a 29B-31 számú feladatokat.)

29-6 PÉLDA

Egy galvanométer végkitéréséhez szükséges áramerősség 1 mA és ez egy 900 W-os előtétellenállással olyan voltmérővé alakítható, mely a végkitérését 1 V feszültség hatására éri el. Mekkora előtétellenállást használjunk, hogy 50 V feszültség esetén érje el a galvanométer a végkitérését?

MEGOLDÁS

A galvanométer belső ellenállását az 1 V végkitérésű voltmérő adataiból számítjuk ki. A (29-14) összefüggést felhasználva R_G értéke:

$$R_G = \frac{V}{I_G} - R = \frac{1\ \text{V}}{0{,}001\ \text{A}} - 900\ \Omega = 100\ \Omega$$

Az 50 V méréshatárú voltmérőhöz szükséges előtétellenállás nagyságának kiszámításához a (29-15) egyenletet alkalmazzuk:

$$R = \frac{V}{I_G} - R_G = \frac{50\ \text{V}}{0{,}001\ \text{A}} - 100\ \Omega = 49\ 900\ \Omega$$

* Az ebben a fejezetben leírt eszközök manapság már nem nagyon használatosak, szerepüket lényegesen jobb tulajdonságokkal bíró elektronikus eszközök vették át. A fejezetben leírtak fogalmi szempontból fontosak (a fordító megjegyzése).

Minthogy a voltmérő működtetéséhez I_G áram szükséges, ha egy áramkörhöz voltmérőt csatlakoztatunk, az szükségképpen megváltoztatja az áramkörben folyó áramokat, tehát a voltmérő nem pontosan azt a feszültséget mutatja, ami a voltmérő bekötése előtt a csatlakoztatási pontok között volt. Tehát arra van szükség, hogy a voltmérő minél nagyobb belső ellenállású legyen, és minél kevesebb áramot vonjon el a mérendő áramkörtől. A különböző voltmérőket a belső ellenállás és a teljes kitéréshez szükséges feszültség hányadosával jellemezhetjük: e mennyiség a voltmérő minőségére jellemző. A 29-4 feladatban leírt voltmérőre ez az érték 1000 Ω/V. (Ami azt jelenti, hogy ez nem különösebben jó voltmérő. Jó minőségű voltmérőnél ez az érték 20000 Ω/V.) Megmutatható, hogy a minőségre jellemző viszonyszám több méréshatárú voltmérőnél minden méréshatárban azonos, továbbá hogy ez a viszonyszám annak az áramerősségnek a reciproka, amely teljes kitérést okoz.

Az ampermérő

A galvanométer nagyon kis áramerősségeket mér. Az *ampermérővel* nagyobb áramerősségeket mérhetünk azáltal, hogy az áram egy része a galvanométerrel párhuzamos ellenálláson (*a söntön*) halad át (29-10 ábra). Az A pontnál belépő I áramnak csak kis része, I_G folyik át a galvanométeren. A söntellenálláson eső feszültség ugyanakkora, mint a galvanométeren, így

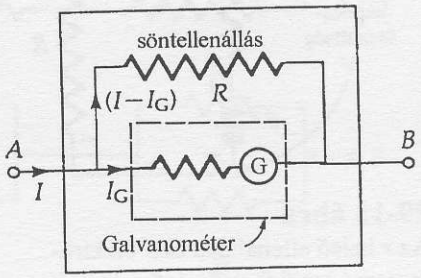
$$V_R = V_G$$

$$(I - I_G)R = I_G R_G$$

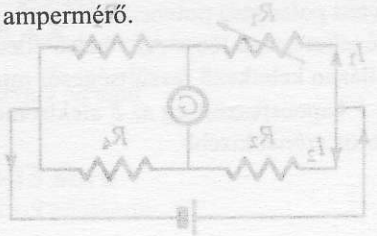
Az R_G söntellenállás értéke

$$R = \frac{I_G R_G}{I - I_G} \qquad (29\text{-}16)$$

Olyan ampermérőben, amelyiknek több méréshatára van, a söntellenállásokat kapcsolórendszer váltja, hasonlóan ahhoz, ahogy a voltmérőben az előtétellenállásokat.



29-10 ábra
Az ampermérő.



29-7 PÉLDA

Ampermérőt készítünk olyan galvanométer felhasználásával, amelynél 50 mV feszültség, és 1 mA áramerősség idéz elő végkitérést. Számítsuk ki, hogy mekkora söntellenállást alkalmazzunk, hogy 5 A áramerősség idézzen elő végkitérést.

MEGOLDÁS

A (29-16) képlet közvetlen alkalmazásához szükséges R_G ismerete. Ez azonban, a megadott mennyiségekből, az Ohm törvény alkalmazásával kiszámítható:

$$R_G = \frac{V_G}{I_G}$$

Ezt a (29-16) képletbe behelyettesítve:

$$R = \frac{I_G(V_G/I_G)}{I - I_G} = \frac{V_G}{I - I_G}$$

Figyeljük meg, hogy ez az egyenlet nem más, mint a söntellenállásra alkalmazott Ohm-törvény, ahol $I - I_G$ a söntön áthaladó áram áramerőssége. A megfelelő értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$R = \frac{50 \times 10^{-3}\,\text{V}}{5\,\text{A} - 0{,}001\,\text{A}} = 0{,}010\,\Omega$$

A söntellenállás mindig nagyon kicsi, ha a mérendő áramok sokkal nagyobbak, mint a galvanométer „működéséhez" szükséges áramerősség. Hasonlóan a voltmérőhöz, olyan ampermérő előállításához, amely a vizsgált áramkört csak kis mértékben befolyásolja, alapműszerként nagy érzékenységű galvanométer szükséges.

Az áram- és feszültségmérők használatakor vigyázzunk a helyes bekötésre. Természetesen ezeket a műszereket nem szabad olyan áramerősség, illetve feszültség mérésére használni, amelyek a legnagyobb méréshatárnál is nagyobbak. Még egy veszélyt kell megemlíteni: minthogy az ampermérők igen kis bemenő ellenállásúak, ha az ampermérőt tévedésből feszültségforrás pólusaihoz kapcsoljuk, nem pedig sorba kapcsoljuk valamely áramköri elemmel, akkor a kialakuló nagyon nagy áram a műszert tönkreteheti. Másfelől, minthogy a voltmérők nagyon nagy bemenő ellenállásúak, annak, hogy voltmérőt tévedésből az áramkörben, ampermérőként sorba kapcsolunk, valószínűleg semmilyen káros következménye nincs. Jegyezzük meg: az *ampermérőt áramköri elemekkel sorba, a voltmérőt pedig párhuzamosan kell kapcsolni.*

A Wheatstone-híd

A Wheatstone-híd elsősorban ellenállásmérésre szolgál. Ezen kívül hídjellegű áramköröket kiterjedten alkalmaznak olyan elektronikus vezérlő áramkörökben is, amelyek a feszültség vagy áramerősség kicsiny egyenlőtlenségeinek a detektálásán alapulnak.

A Wheatstone-híd áramköri rajza a 29-11 ábrán látható. Az ismeretlen R_x ellenállást úgy határozhatjuk meg, hogy az R_1 ellenállást addig változtatjuk, amíg a galvanométeren éppen nem folyik át mérhető áram. (A  szimbólummal a *változtatható ellenállást* jelöljük.) Ilyenkor a híd *kiegyenlített*, aminek a feltételeit a következőképpen érthetjük meg: Ha a galvanométeren nem halad át áram, az R_1 és R_2 ellenálláson eső feszültségnek egyenlőnek kell lennie:

29-11 ábra
A Wheatstone-híd.

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \qquad \textbf{(29-17)}$$

Továbbá, az R_1 és R_x ellenálláson azonos áram halad át, hasonlóan, az R_2 és az R_4 ellenálláson is ugyanakkora az áramerősség. Így az R_x és az R_4 ellenállásokon azonos a feszültségesés:

$$I_1 R_x = I_2 R_4 \qquad \textbf{(29-18)}$$

A (29-17) és a (29-18) egyenletekből R_x -et kifejezve

$$R_x = \frac{R_4}{R_2} R_1 \qquad \textbf{(29-19)}$$

Gyakorlati méréseknél R_4 és R_2 aránya ismert, továbbá tudjuk a változtatható ellenállás értékét is, tehát az ismeretlen R_x kiszámítható. Megjegyzendő, hogy a feszültség értékét nem kell ismernünk. (Mindazonáltal mind a feszültség nagysága, mind a galvanométer érzékenysége fontos az elérhető pontosság szempontjából: amikor a híd majdnem ki van egyenlítve, e két paraméter szabja meg a galvanométer mutatójának a kitérését.)

A kompenzációs módszer

A feszültségkompenzációs módszer lehetővé teszi a feszültségkülönbségek oly módon való mérését, hogy közben (legalábbis elvben) a mérőkörben ne folyjon áram. (Ellentétben a voltmérővel, amelyen keresztül működés közben valamennyi áram folyik.)

A 29-12 ábra áramkörében a külső feszültségforrás hatására áram folyik át a hosszú, egyenletes keresztmetszetű ellenálláshuzalon. Az ábrán feltüntetett polaritásokkal a feszültség az ellenálláshuzal mentén egyenletesen csökken a huzal jobb oldali vége felé. Itt $\mathcal{E}_s$ pontosan ismert elektromotoros erejű szabványos elemet jelöl. Kapcsoljuk be az S kapcsolóval ezt az elemet az áramkörbe, és a kicsiny nyíllal jelölt csúszókontaktust mozgatva keressük meg azt az ℓ_s helyzetet, ahol az IR feszültségesés éppen $\mathcal{E}_s$. Ezt úgy állapíthatjuk meg, hogy a G galvanométeren éppen nem folyik át áram, vagyis a két feszültség éppen kiegyenlíti egymást. Minthogy a feszültségesés az ellenálláshuzal mentén egyenletes, ezzel az eljárással a V feszültséget a bal oldali végponttól vett ℓ távolság függvényében kalibráljuk és azt találjuk, hogy a feszültség arányos az ℓ távolsággal:

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\ell_s} = \frac{V}{\ell} \qquad (29\text{-}20)$$

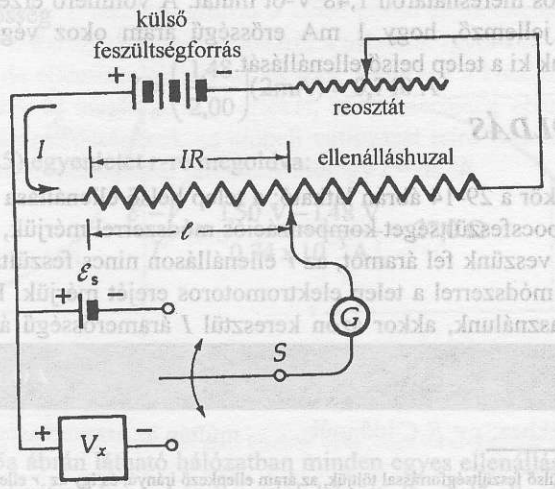
Miután ily módon kalibráltuk az ellenálláshuzalt, az S kapcsolót a megmérendő V_x feszültségforráshoz kapcsoljuk. A csúszókontaktust ismét úgy mozgatjuk, hogy a galvanométeren áram ne folyjék. A csúszókontaktus helyzete, ℓ_x lehetővé teszi, hogy V_x értékét meghatározhassuk.

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\ell_s} = \frac{V_x}{\ell_x} \qquad (29\text{-}21)$$

ahonnan

$$V_x = \left(\frac{\mathcal{E}_s}{\ell_s}\right)\ell_x \qquad (29\text{-}22)$$

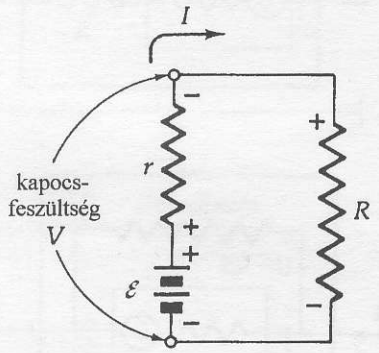
Jól reprodukálható és ismert elektromotoros erejű elemek könnyen előállíthatók, illetve hitelesített feszültségforrások a kereskedelemben is kaphatók. A mérés megkönnyíthető, ha az ellenálláshuzallal sorba kapcsolunk egy változtatható ellenállást, amivel az $\mathcal{E}_s / \ell_s$ arány a kívánt értékre beállítható.



29-12 ábra
Kompenzáló áramkör. A külső feszültségforrás, $\mathcal{E}_s$, a feszültség etalon, és a megmérendő V_x potenciálkülönbség azonos polaritásúak: mindegyiknek pozitív pólusa csatlakozik az ellenálláshuzal bal oldali végpontjához. A reosztát változtatható ellenállása szabja meg az I áramerősséget, amely az ellenálláshuzalon áthalad; ezzel lehet beállítani azt, hogy az ellenálláshuzalon a mérendő feszültséggel azonos nagyságrendű legyen a feszültség esés.

Ezzel ugyanis az ellenálláshuzalon átfolyó áramot, és így a huzal mentén az IR feszültségesés nagyságát szabályozhatjuk. Egyes esetekben annak megakadályozására, hogy a mérés kezdetén amikor a csúszókontaktus még messze van a kompenzált helyzettől, a galvanométeren nagy áram folyjon át, védőellenállást kötnek a körbe. A nagy árammal szembeni védelemre célszerű olyan védőellenállást alkalmazni, amit a kompenzált állapotot megközelítve rövidre lehet zárni, hogy a galvanométer érzékenységét megnöveljük.

A kompenzációs módszer nagy előnye, hogy *nem vesz fel áramot a mérendő áramkörből*, tehát olyankor célszerű használni, amikor úgy kell feszültséget mérnünk, hogy a mért áramkör viszonyait ne befolyásoljuk.



29-13 ábra
Az r belső ellenállású és $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű feszültségforrás pólusaihoz R ellenállást kapcsolunk. Az I áram az áramköri elemeken a feltüntetett polaritású potenciálkülönbségeket hozza létre. Az r belső ellenálláson keletkező feszültségesés miatt a V kapocsfeszültség az $\mathcal{E}$ elektromotoros erőnél kisebb.

Belső ellenállás és kapocsfeszültség

Minden telepnek van belső ellenállása. Jelöljük ezt r-rel. Az autóakkumulátorok belső ellenállása kicsi, akár 0,01 Ω nagyságrendű is lehet, míg elhasznált szárazelemek belső ellenállása elérheti az 50 Ω–t is. Noha a belső ellenállás a telepben (többé- kevésbé) egyenletesen oszlik el, az áramkörök elemzésénél az elem valamelyik pólusához kapcsolt külön ellenállásként szokás feltüntetni. Így a telepet zérus belső ellenállású, $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű feszültségforrással és a vele sorba kapcsolt r ellenállással reprezentáljuk (29-13 ábra). Természetesen az elem és az r ellenállás közötti pont feszültségét nem tudjuk megmérni, hiszen ez a pont csak az ábrán létezik. Mindazonáltal célszerű az áramkört így egyszerűsíteni.

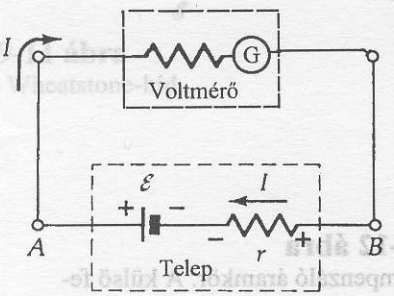
Ha a telepből áramot veszünk ki, akkor az r ellenálláson feszültség esik, amelynek a polaritása olyan, hogy a telep pólusai közötti feszültség, a kapocsfeszültség lecsökken[2] :

$$V = \mathcal{E} - Ir, \tag{29-23}$$

ahol I az áramerősség. Egyhurkú áramkörök esetén

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \tag{29-24}$$

(E két, különben hasznos egyenletet nem érdemes megjegyezni, ugyanis az áramkört kicsit tanulmányozva egyszerűen felírhatók.)



29-14 ábra
A 29-8 példához.

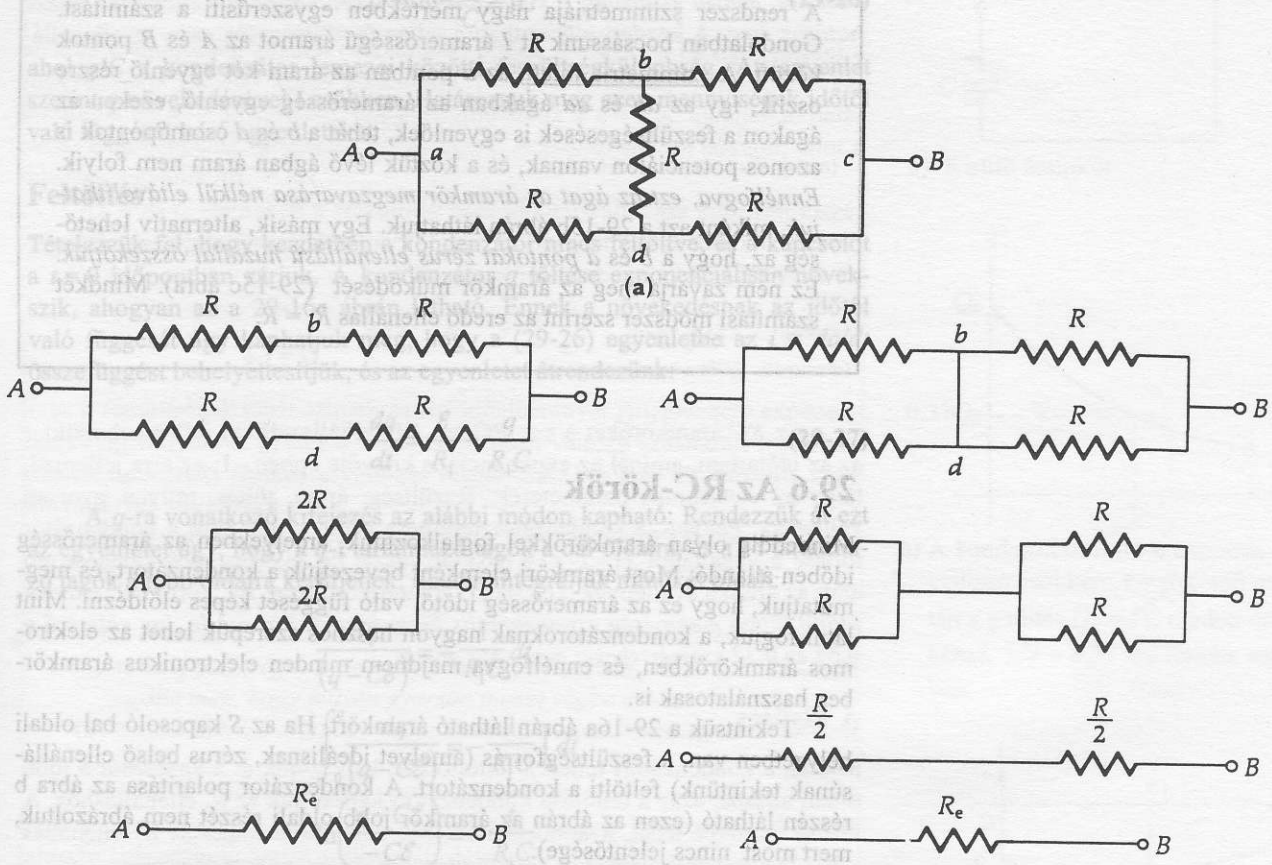
29-8 PÉLDA

Egy telep feszültségét két különböző módon mérjük meg: Kompenzációs módszerrel 1,50 V-ot kapunk; a rákapcsolt voltmérő pedig 2 V-os méréshatáron 1,48 V-ot mutat. A voltmérő érzékenységére az jellemző, hogy 1 mA erősségű áram okoz végkitérést. Számítsuk ki a telep belső ellenállását.

MEGOLDÁS

Az áramkör a 29-14 ábrán látható; a telep belső ellenállása r. Amikor a kapocsfeszültséget kompenzációs módszerrel mérjük, a telepből nem veszünk fel áramot, az r ellenálláson nincs feszültségesés, és így a módszerrel a telep elektromotoros erejét mérjük. Ha voltmérőt használunk, akkor azon keresztül I áramerősségű áram fo-

[2] Ha a telepet külső feszültségforrással töltjük, az áram ellenkező irányú, és így az r ellenálláson a feszültségesés ellentétes előjelű.



b) eltávolítva a *bd* ágat c) rövidrezárva a *bd* ágat

29-15 ábra
A 29-9 példához.

lyik, és az r belső ellenálláson létrejövő feszültség esés miatt a kapocsfeszültség lecsökken:

$$V = \mathcal{E} - Ir \qquad \textbf{(29-25)}$$

A voltmérőn 1 mA áram okoz végkitérést, tehát 2 V-os méréshatáron a végkitérést okozó 1 mA 1,48/2,00 része halad át, vagyis az áramerősség

$$I = \left(\frac{1{,}48}{2{,}00}\right)(2\text{mA}) = 0{,}740\ \text{A}$$

A (29-25) egyenletet r-re megoldva:

$$r = \frac{\mathcal{E} - V}{I} = \frac{1{,}50\ \text{V} - 1{,}48\ \text{V}}{0{,}74 \times 10^{-3}\ \text{A}} = 27{,}0\ \Omega$$

29-9 PÉLDA

A 29-15a ábrán látható hálózatban minden egyes ellenállás nagysága R. Számítsuk ki az A és B pontok közötti R_e eredő ellenállást.

MEGOLDÁS

A rendszer szimmetriája nagy mértékben egyszerűsíti a számítást. Gondolatban bocsássunk át I áramerősségű áramot az A és B pontok között. A szimmetria miatt, az a pontban az áram két egyenlő részre oszlik, így az ab és ad ágakban az áramerősség egyenlő, ezeken az ágakon a feszültségesések is egyenlőek, tehát a b és d csomópontok is azonos potenciálon vannak, és a köztük lévő ágban áram nem folyik. *Ennélfogva, ezt az ágat az áramkör megzavarása nélkül eltávolíthatjuk*, miként azt a 29-15b ábrán láthatjuk. Egy másik, alternatív lehetőség az, hogy a b és d *pontokat zérus ellenállású huzallal összekötjük.* Ez nem zavarja meg az áramkör működését (29-15c ábra). Mindkét számítási módszer szerint az eredő ellenállás $R_e = R$.

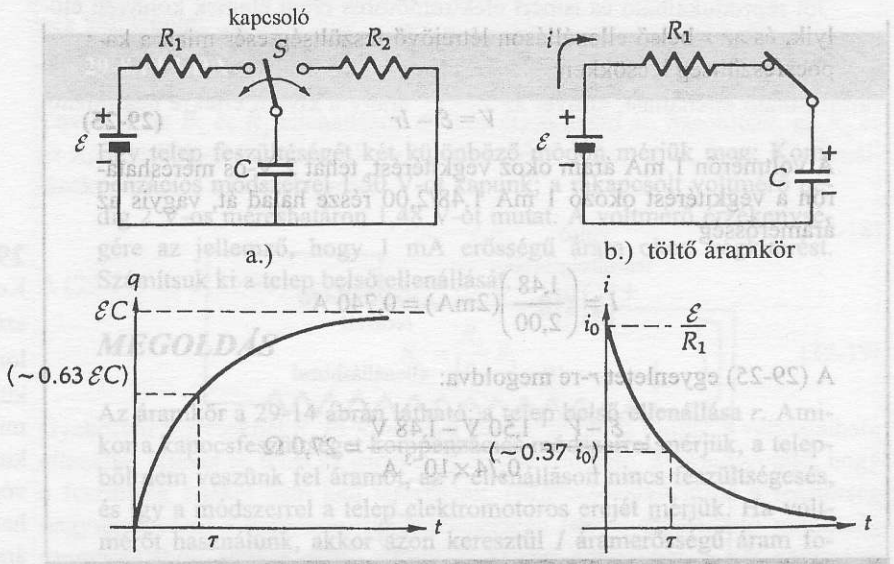
29.6 Az RC-körök

Mindeddig olyan áramkörökkel foglalkoztunk, amelyekben az áramerősség időben állandó. Most áramköri elemként bevezetjük a kondenzátort, és megmutatjuk, hogy ez az áramerősség időtől való függését képes előidézni. Mint látni fogjuk, a kondenzátoroknak nagyon hasznos szerepük lehet az elektromos áramkörökben, és ennélfogva majdnem minden elektronikus áramkörben használatosak is.

Tekintsük a 29-16a ábrán látható áramkört. Ha az S kapcsoló bal oldali helyzetben van, a feszültségforrás (amelyet ideálisnak, zérus belső ellenállásúnak tekintünk) feltölti a kondenzátort. A kondenzátor polaritása az ábra b részén látható (ezen az ábrán az áramkör jobb oldali részét nem ábrázoltuk, mert most nincs jelentősége).

A továbbiakban az időtől függő mennyiségeket kisbetűkkel, míg az időben állandókat nagybetűkkel jelöljük.

Jelölje i a töltőáramot. Alkalmazzuk Kirchhoff huroktörvényét az áramkörre. A feltöltődés alatt



c) Töltés folyamán, a kondenzátor töltése exponenciálisan közelít a végső értékhez; $\tau = R_1 C$ idő múltán a q töltés $(1 - 1/e)q_0 \approx 0{,}63q_0$.

d) Kisütés során, az áram exponenciálisan csökken; $\tau = R_1 C$ idő múltán az áramerősség $i_0 / e \approx 0{,}37 i_0$

29-16 ábra
Az a) ábrán a kapcsolót bal oldali helyzetbe állítjuk, hogy az R_1 ellenálláson keresztül a C kondenzátor feltöltődjék.

$$\Sigma V = 0$$

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0, \qquad (29\text{-}26)$$

ahol q/C a kondenzátor lemezei közötti feszültségkülönbség. Az egyenlet szerint q növekedésével i csökken. Határozzuk meg ezen mennyiségek időtől való függését leíró egyenleteket.

Feltöltés

Tételezzük fel, hogy kezdetben a kondenzátor nincs feltöltve, és a kapcsolót a $t = 0$ időpontban zárjuk. A kondenzátor q töltése exponenciálisan növekszik, ahogyan az a 29-16c ábrán látható. Ennek a növekedésnek az időtől való függését úgy kaphatjuk meg, hogy a (29-26) egyenletbe az $i = dq/dt$ összefüggést behelyettesítjük, és az egyenletet átrendezünk:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} - \frac{q}{R_1 C} \qquad (29\text{-}27)$$

A q-ra vonatkozó kifejezés az alábbi módon kapható: Rendezzük át ezt az egyenletet úgy, hogy a q-t tartalmazó tagok a bal oldalra, és a t-t tartalmazó tagok a jobb oldalra kerüljenek. Ezután integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{1}{R_1 C} dt$$

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{R_1 C}$$

A természetes logaritmus definíciójából következően ezt a kifejezést az alábbi alakba írhatjuk át:

KONDENZÁTOR FELTÖLTÉSE ELLENÁLLÁSON KERESZTÜL

$$q = C\mathcal{E}\left[1 - e^{-t/R_1 C}\right] \qquad (29\text{-}28)$$

A q időbeli változását leíró exponenciális függvény a 28-16c ábrán látható: q zérustól növekedve a $C\mathcal{E}$ érték felé tart. Az idő növekedésével q aszimptotikusan közelíti meg a $C\mathcal{E}$ értéket[3]. A kondenzátor feltöltésének sebessége R_1 és C konkrét értékétől függ. Például, ha az $R_1 C$ szorzat kisebb, a kondenzátor gyorsabban töltődik.

A kondenzátor feltöltése során a töltések nem haladnak át a kondenzátoron, hanem az $\mathcal{E}$ feszültségforrás a külső körön át, az ellenálláson keresztül mozgatja a töltéseket az egyik lemezről a másikra: így a két lemezen egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű töltés lesz. Ahogyan a kondenzátor feszültsége növekszik és megközelíti $\mathcal{E}$ értékét, az áramerősség zérushoz közelít. A töltőáram áramerősségének az időbeli változását leíró formulához a (29-28) egyenlet differenciálásával jutunk: Minthogy $i = dq/dt$,

A TÖLTŐÁRAM

$$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1}\right) e^{-t/R_1 C} \qquad (29\text{-}29)$$

[3] A $C\mathcal{E}\exp(-t/R_1 C)$ tag rövid idő alatt kisebbé válik, mint az elektronok termikus fluktuációjából származó zaj. Így az az állítás, hogy exponenciális jellegű változással a végállapot sohasem érhető el, *fizikai* szempontból értelmetlen.

Ez a csökkenő exponenciális változás látható a 29-16d ábrán. Közvetlenül a kapcsoló zárása után a $t = 0$ időpontban az i áramerősség maximális értéket vesz fel, *melyet kizárólag a kondenzátorral sorba kapcsolt ellenállás értéke határoz meg*. A kezdeti időpontban a teljes feszültségesés ezen az ellenálláson jön létre:

$t = 0$ időpontban
(maximális áram az áramkörben) $$i = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

Amikor a kondenzátor teljesen fel van töltve, az áramerősség zérus, és a teljes feszültségesés a kondenzátoron jön létre:

$t = \infty$ időpontban
(maximális töltés a kondenzátoron) $$Q = C\mathcal{E}$$

Az RC áramköröket a $\tau = RC$ ún. ***RC* időállandóval** jellemezhetjük: τ az az időtartam, aminél az exponenciális kitevője éppen -1; ez arra jellemző, hogy az elektromos paraméterek: feszültség, áram, töltés, milyen gyorsan változnak. Például, a kondenzátor feltöltése során, τ idő alatt a kondenzátor töltése a végállapot $(1-1/e) \approx 0{,}63$-ad részét éri el. Hasonlóképpen, τ idő alatt az áram a kezdetinek $1/e \approx 0{,}37$ részére csökken. RC köröknél, *minden időtől függő mennyiség exponenciális függvényekkel írható le, így célszerű a 0,63 és 0,37 számértékeket megjegyeznünk.*

A kisütés

Miután a kondenzátort teljesen feltöltöttük, kapcsoljuk át a kapcsolót a jobb oldali állásba, azaz a feltöltött kondenzátort kapcsoljuk az R_2 ellenálláshoz. A kisütő áramkör tehát, a kondenzátor és a vele sorba kapcsolt R_2 ellenállás (29-17a ábra). Alkalmazzuk Kirchhoff huroktörvényét erre az esetre:

$$\Sigma V = 0$$

$$\frac{q}{C} - iR_2 = 0, \qquad \textbf{(29-30)}$$

ahol q/C a kisülő kondenzátor feszültsége. Ebben az esetben $i = -dq/dt$ (a negatív előjel azt jelzi, hogy az idő növekedésével q csökken). Átrendezés után:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R_2 C}$$

Integráljuk ezt az összefüggést figyelembe véve, hogy a $t = 0$ időpontban $q = Q_0$:

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{R_2 C}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{R_2 C}$$

KONDENZÁTOR KISÜTÉSE ELLENÁLLÁSON KERESZTÜL $$q = Q_0 e^{-t/R_2 C}, \qquad \textbf{(29-31)}$$

ahol $Q_0 = \mathcal{E}C$, a kondenzátor kezdeti töltése.

Ezt az idő szerint deriválva megkapjuk az áramerősség változását az idő függvényében:

KISÜTÉSI ÁRAM $$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_2}\right) e^{-t/R_2C} \qquad (29\text{-}32)$$

ahol az áramerősség kezdeti (maximális) értéke $I_0 = \mathcal{E}/R_2 = Q_0/R_2C$. Ezeket a függvényeket a 29-17 ábrán ábrázoltuk. Ebben a példában szándékosan választottuk az $R_2 > R_1$ feltételt, hogy megmutassuk a $\tau = R_2C$ időállandó hatását az exponenciális változások sebességére. A kisütés sokkal lassúbb, mint a feltöltés, ugyanis $R_2C > R_1C$.

Az R és C elemeken a feszültség esés időbeli változása könnyen kiszámítható az alábbi egyenletekből:

$$v_R = iR \quad \text{és} \quad v_C = \frac{q}{C} \qquad (29\text{-}33)$$

Ezek a feszültségek tehát szintén az RC időállandóval jellemezhető exponenciális függvények. A q, i és v exponenciálissan változó szakaszait **tranzienseknek** nevezzük; amikor a változás megszűnik, beáll az **állandósult** vagy **stacionárius** végállapot.

Az egyenáramú hálózatokba kapcsolt kondenzátorokkal kapcsolatosan két fontos következtetést vonhatunk le:

(1) *A kondenzátor lemezein lévő töltés (és következésképpen a kondenzátor feszültsége) nem változhat ugrásszerűen. Az RC időállandó szabja meg, hogy milyen gyorsan mehet végbe a változás.*

(2) *A stacionárius állapot elérése után a kondenzátoron egyenáram nem folyik.*

Ezek a megállapítások nagyban megkönnyítik, hogy a kondenzátorokat tartalmazó egyenáramú áramkörök viselkedését előre megállapíthassuk.

29-10 PÉLDA

Sorba kapcsolt RC áramkörben a kapacitás 4 μF. a) Mekkora az R ellenállás, ha az áramkör időállandója 2 ms ? b) A $t = 0$ időpontban az áramkört 9 V-os feszültségforráshoz csatlakoztatjuk. Mennyi idő múlva éri el C feszültsége a 8 V-ot?

MEGOLDÁS

a) A $\tau = RC$ egyenletből $$R = \frac{\tau}{C} = \frac{2\times10^{-3}\,\text{s}}{4\times10^{-6}\,\text{F}} = 500\,\Omega$$

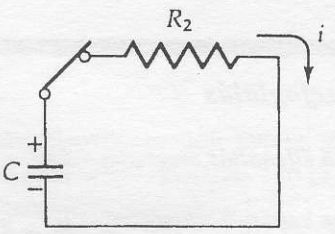
b) $$V = V_0(1 - e^{-t/RC})$$

$$e^{-t/RC} = \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$$

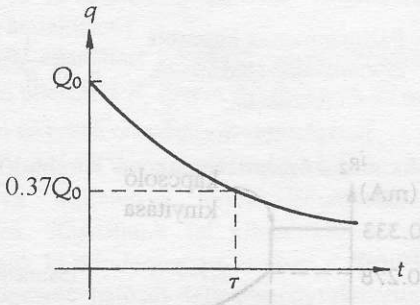
$$e^{t/RC} = \left(\frac{V_0}{V_0 - V}\right) = \frac{9\,\text{V}}{1\,\text{V}} = 9$$

$$\frac{t}{RC} = \ln 9$$

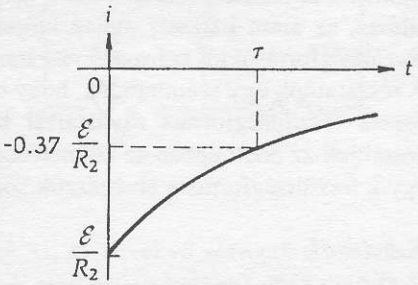
$$t = RC\ln 9 = (2\text{ ms})(\ln 9) = 4{,}39\text{ ms}$$



a) Kisütő áramkör

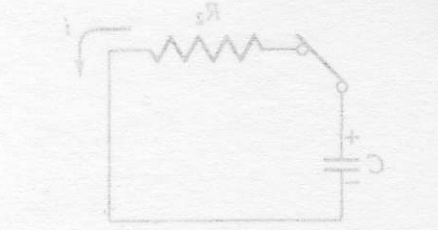


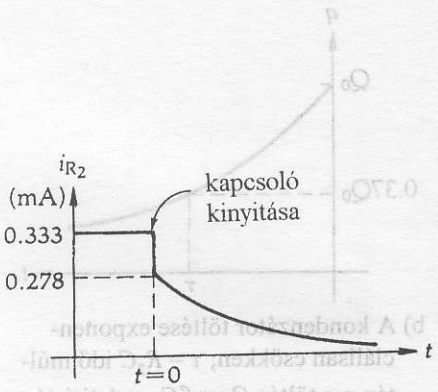
b) A kondenzátor töltése exponenciálisan csökken; $\tau = R_2C$ idő múltán a q töltés $Q_0 = \mathcal{E}C$ eredeti értékének $1/e \approx 0{,}37$ -ed részére csökken.



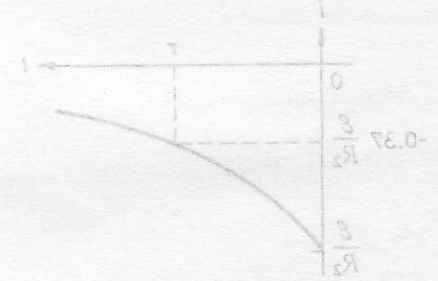
c) A kisütés során az áram negatív, minthogy ellenkező előjelű, mint a töltőáram; $\tau = R_2C$ idő múltán az áramerősség $I_0 = \mathcal{E}/R_0$ kezdeti értékének $1/e \approx 0{,}37$ -ed részére csökken.

29-17 ábra
A 29-16a ábra kapcsolóját a jobb oldali helyzetbe állítjuk, hogy a töltött kondenzátort az R_2 ellenálláson keresztül kisüssük.





29-18 ábra
A 29-11 példához.



29-11 PÉLDA

Tételezzük fel, hogy a 29-18a ábrán látható áramkörben az S kapcsoló elegendően hosszú ideig zárva volt, és így a C kondenzátor teljesen fel van töltve. Számítsuk ki a) az egyes ellenállásokon átfolyó stacionárius áramot és b) a kondenzátor Q töltését. c) A kapcsolót a $t = 0$ időpontban kinyitjuk. Fejezzük ki az R_2 ellenálláson áthaladó áram i áramerősségét, mint az idő függvényét. d) Számítsuk ki, hogy mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a kondenzátor töltése az eredeti érték egyötödére csökkenjen.

MEGOLDÁS

a) A stacionárius állapot beállta után a kondenzátoron át egyenáram nem folyik. Ennélfogva

R_3 ellenálláson keresztül: $I_{R_3} = 0$ (stacionárius állapotban)

A másik két ellenálláson átfolyó stacionárius áramerősségét annak figyelembevételével számíthatjuk ki, hogy a feszültségforrás 9 V-os feszültségesése egymással sorba kapcsolt 12 kΩ-os és 15 kΩ-os ellenállásokon megy végbe:

R_1 és R_2 ellenálláson keresztül

$$I_{(R_1+R_2)} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{9\ \text{V}}{(12\ \text{k}\Omega + 15\text{k}\ \Omega)}$$

$$= 0{,}333\text{mA} \quad \text{(stacionárius állapotban)}$$

b) Miután a tranziens áramok lecsengtek, a kondenzátor feszültsége ugyanakkora, mint az R_2 ellenálláson az IR_2 feszültségesés, minthogy az R_3 ellenálláson nincs feszültségesés. Ennélfogva, a kondenzátor Q töltése:

$$Q = CV_{R_2} = C(IR_2) = (10\ \mu\text{F})(0{,}333\ \text{mA})(15\ \text{k}\Omega) = 5{,}00\ \mu\text{C}$$

c) A kapcsoló kinyitásával az R_1-et tartalmazó ág megszakad. A kondenzátor az $(R_2 + R_3)$ ellenállásokon keresztül sül ki: $(R_2 + R_3)C = (15\ \text{k}\Omega + 3\ \text{k}\Omega)(10\ \mu\text{F}) = 0{,}180$ s időállandóval.

A kisütés kezdetén az I_0 áramerősséget a kondenzátor eredeti feszültsége és az $(R_2 + R_3)$ ellenállás hányadosa határozza meg:

$$I_0 = \frac{V_C}{(R_2 + R_3)} = \frac{IR_2}{(R_2 + R_3)} = \frac{(0{,}333\ \text{mA})(15\ \text{k}\Omega)}{(15\ \text{k}\Omega + 3\ \text{k}\Omega)} = 0{,}278\ \text{mA}$$

Így tehát, amikor a kapcsolót nyitjuk, az R_2 ellenálláson átfolyó áram ugrásszerűen 0,333 mA-ről 0,278 mA-re csökken (29-18b ábra). Ezután az áram a következő törvény szerint csökken:

$$i_{R_2} = I_0 e^{-t/(R_2+R_3)C} = (0{,}278\ \text{mA})e^{-t/(0{,}180\ \text{s})} \qquad (t > 0)$$

d) A kondenzátor q töltése Q_0-ról $Q_0/5$-re az alábbiak szerint csökken:

$$q = Q_0 e^{-t/(R_2+R_3)C}$$

$$\frac{Q_0}{5} = Q_0 e^{-t/(0{,}180s)}$$

$$5 = e^{t/(0{,}180\text{s})}$$

$$\ln 5 = \frac{t}{0{,}180\text{ s}}$$

$$t = (0{,}180\text{ s})(\ln 5) = 0{,}290\text{ s}$$

29-12 PÉLDA

Egy kondenzátort úgy töltünk fel, hogy R ellenállású huzalokkal feszültségforráshoz csatlakoztatjuk. A kondenzátor feltöltése során a feszültségforrás W munkát végzett:

$$W = QV \qquad \textbf{(29-34)}$$

ahol Q a kondenzátor töltése, és V a feszültségforrás potenciálkülönbsége. A kondenzátorban tárolt elektromos energia

$$U_c = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \qquad \textbf{(29-35)}$$

ami csak a fele a feszültségforrás által végzett munkának. Hová lett a végzett munka másik fele?

MEGOLDÁS

A „hiányzó" energia a töltő áramkör ellenállásainak melegítésére fordítódott. A töltés során az i áramerősség

$$i = \left(\frac{V}{R}\right)e^{-t/RC}$$

Az ellenállásban keletkezett teljes Joule-hőt úgy kaphatjuk meg, ha a mindenkori disszipálódó i^2R teljesítményt integráljuk $t = 0$ és $t = \infty$ határok között. A képződő U_h hőt tehát az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$U_h = \int_0^\infty i^2 R dt = R\int_0^\infty \left(\frac{V}{R}\right)^2 e^{-2t/RC} dt$$

$$U_h = -\left(\frac{V^2}{R}\right)\left(\frac{RC}{2}\right)e^{-2t/RC}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Tehát, a feszültségforrás által végzett munka másik fele a hozzávezető kábelek melegítésére fordítódik. *A képződött Joule-hő mindig ugyanakkora, mint a kondenzátorban tárolt elektromos energia, függetlenül R értékétől.*

Összefoglalás

Eredő ellenállás meghatározása:

Sorba kapcsolt ellenállások eredője: $R_e = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének reciproka: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$

Az áramkörökre vonatkozó Kirchhoff törvények a következők:

Huroktörvény: $\Sigma V = 0$ (bármely zárt hurok mentén)

Csomóponti törvény: $\Sigma I = 0$ (a csomópontba belépő áramok pozitív, a kilépő áramok pedig negatív előjelűek)

A szuperpozíció elve: Ha egy, csak lineáris áramköri elemeket tartalmazó áramkör több feszültségforrást tartalmaz, az áram bármely ágban kiszámítható az egyes feszültségforrásoktól származó részáramok összegeként. A részáramok úgy számítandók, hogy egy kivételével az összes feszültségforrást rövidzárral helyettesítjük, kiszámítjuk az adott ágban az áramerősséget, és ezt mindegyik feszültségforrásra elvégezzük.

RC-kör: Sorba kapcsolt feszültségforrást, ellenállást és kondenzátort tartalmazó áramkör.

	Kondenzátor töltése	Kondenzátor árama
Töltés	$q = CV(1 - e^{-t/RC})$	$i = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/RC}$
Kisütés (nincs feszültségforrás az áramkörben)	$q = Q_0(1 - e^{-t/RC})$	$i = -\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/RC}$

A $\tau = RC$ időállandó azt az időtartamot jelenti, amely alatt a kondenzátor töltése exponenciálisan nő a telítési (maximális) érték $1 - 1/e = 0{,}63$ részéig, az áramerőssége pedig exponenciálisan csökken a kezdeti érték $1/e = 0{,}37$ részére.

A kondenzátor a sorba kapcsolt RC-körben, állandó feszültségű feszültségforrás esetén az alábbi módon viselkedik:

1. *A kondenzátor lemezein lévő töltés (és következésképpen a kondenzátor feszültsége) nem változhat ugrásszerűen. A változás sebességét a feltöltő, illetve kisütő áramköri elemek RC időállandója határozza meg.*
2. *A stacionárius állapot elérése után a kondenzátoron egyenáram nem folyik.*

Kérdések

1. Egy 10 W teljesítményű, 220 V-os izzólámpa a nagyobb fényt bocsáthat ki, mint az ugyanahhoz a telephez kapcsolt 250 W teljesítményű, 220 V-os izzólámpa. Miért?
2. Tekintsünk egy ellenálláshuzalból készült körgyűrűt. A két kontaktust a gyűrű két különböző pontjához illesztjük. Hogyan függ az ellenállás a két kontaktus egymáshoz viszonyított helyzetétől?
3. Képzeljünk el egy bonyolult elektromos hálózatot és valahol a belsejében zárt felületet, amelyen belül áramköri elemek (ellenállások, kondenzátorok és feszültségforrások) vannak, és amelyen áramvezetők hatolnak keresztül. Vajon az ezen felületen áthaladó áramerősségek összege zérus? Érvényes-e Gauss törvénye erre a felületre?
4. A 29-4 fejezetben leírt kompenzációs módszerrel telepek elektromotoros erejét mérhetjük. Hogyan lehet ilyen módon áramerősséget és ellenállást mérni?
5. Hogyan befolyásolja a Wheatstone-híd működését az, ha a telep kissé lemerült?
6. Ha a Wheatstone-híd telepét és galvanométerét felcseréljük, az áramkör továbbra is Wheatstone-híd marad. Tételezzük fel, hogy a hidat kiegyenlítjük. Ha a telepet és a galvanométert felcseréljük, vajon a híd továbbra is kiegyenlített marad?
7. A volt-amper-ohm-mérő olyan mutatós műszer, amely olyan áramkörökkel és kapcsolókkal van ellátva, amelyek lehetővé teszik, hogy voltmérőként, ampermérőként vagy ohmmérőként működjön. Miért tanácsos az ilyen műszert használaton kívül nagy méréshatárú voltmérő állásba kapcsolni, miért nem ampermérőnek vagy ohmmérőnek?
8. Miért célszerűbb a galvanométer érzékenységét Ohm/V egységben megadni, mint amperben?
9. Hogyan mérhetünk voltmérővel kapacitást?
10. A 29-12 ábrán ábrázolt áramkörben gyakran alkalmaznak a külső feszültségforrással sorba kapcsolt változtatható ellenállást (amit reosztátnak is neveznek) azért, hogy az ellenálláshuzalon (változtatható ellenálláson) állandó áram folyjon keresztül. Tegyük fel, hogy ez a változtatható ellenállás párhuzamosan kapcsolt „nagy" és „kis" ellenállásból áll. Melyik ellenállás szolgál a durva és melyik a finom kompenzáláshoz?

Feladatok

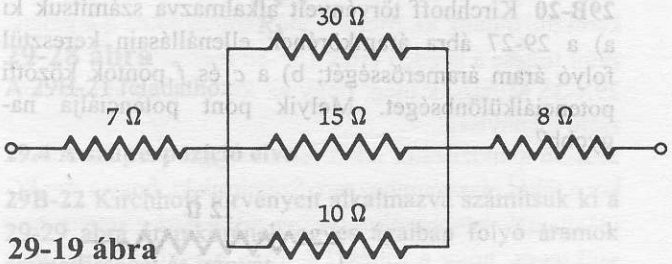
29.2 Sorosan és párhuzamosan kapcsolt ellenállások

29A-1 A párhuzamosan kapcsolt, R, $2R$ és $3R$ ellenállás eredő ellenállása 20 Ω. Mekkora az eredő ellenállás, ha sorba vannak kapcsolva?

29B-2 Ha n számú, egyenlő nagyságú ellenállást sorba kapcsolunk, az eredő ellenállás N-szer akkora, mintha párhuzamosan kapcsoltuk volna. Mi a kapcsolat n és N között?

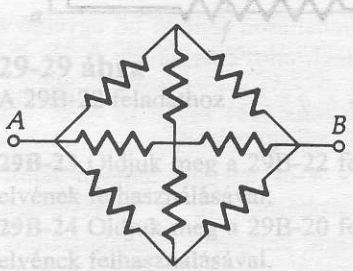
29B-3 Az A és B huzal anyaga és hosszúsága, azonos de A keresztmetszete kétszerese B-ének. a) Ha egymással párhuzamosan egy V potenciálkülönbségű feszültségforráshoz kapcsoljuk őket, melyik disszipál nagyobb teljesítményt? b) És ha sorosan kötjük őket? c) Számítsuk ki, hogy az *a)* esetben hányszor akkora hő fejlődik, mint a *b)* esetben.

29B-4 a) Számítsuk ki a 29-19 ábrán látható áramkör két végpontja közötti eredő ellenállást. b) A végpontokra 40 mV feszültséget kapcsolunk. Mekkora a feszültségesés esik a 8 Ω-os ellenálláson? c) Mekkor a 10 Ω-os ellenálláson áthaladó áram áramerőssége? d) Mekkora teljesítmény disszipálódik a 30 Ω-os ellenálláson? e) Mutassuk meg, hogyan kellene egy 20 Ω-os ellenállást az áramkörbe kapcsolni, hogy a feszültségforrást az áramkör éppen 4 A-rel terhelje.



29-19 ábra
A 29B-4 feladathoz

29B-5 A 29-20 ábra áramkörében minden egyes ellenállás értéke 1 Ω. Tételezzük fel, hogy az I áramerősségű áram az A pontnál lép be, és a B pontnál lép ki. Szimmetriameggondolásokkal mutassuk meg, hogy A és B pont között a hálózat eredő ellenállása 2/3 Ω. (Útmutatás: Mekkora lenne az eredő ellenállás, ha a függőlegesen rajzolt ellenállások nem lennének jelen?)



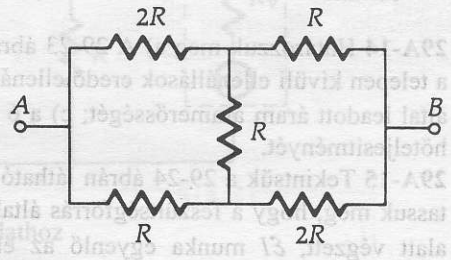
29-20 ábra
A 29B-5 feladathoz

29B-6 Két sorba kötött ellenállás eredője 690 Ω. Párhuzamosan kapcsolva őket az eredő ellenállás 150 Ω. Számítsuk ki az egyes ellenállások nagyságát.

29B-7 Számítsuk ki a 29-21 ábra hálózatának az A és B végpontok közötti eredő ellenállását. (Útmutatás: használjuk fel a 29C-43 és 29C-45 feladatoknál ismertetett csillagháromszög átalakítást.)

29B-8 Az R_A és R_B ellenállást sorba, ill. párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállás R_s illetve R_p. Fejezzük ki az R_A és R_B ellenállást az eredő ellenállások segítségével.

29B-9 Négy 220 V-os, 40 W-os izzólámpát különböző képpen kapcsolva különböző teljesítményfelvételű áramkörhöz jutunk. Rajzoljunk fel kilenc kapcsolási módot, és számítsuk ki minden egyes esetben a 220 V-os hálózathoz kapcsolt hálózat teljesítményfelvételét. Durva közelítésként tételezzük fel, hogy az izzólámpa ellenállása független a rajta áthaladó áram áramerősségétől.



29-21 ábra
A 29B-7 feladathoz

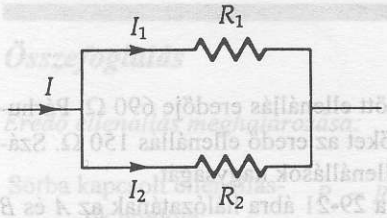
29B-10 Számítsuk ki, és növekvő sorrendben, táblázatos formában adjuk meg három különböző (2 Ω, 3 Ω és 4 Ω) ellenállás különböző kombinációjával előállítható összes kapcsolás) (17 db) eredő ellenállását.

29.3 Sokhurkú áramkörök és a Kirchhoff törvények

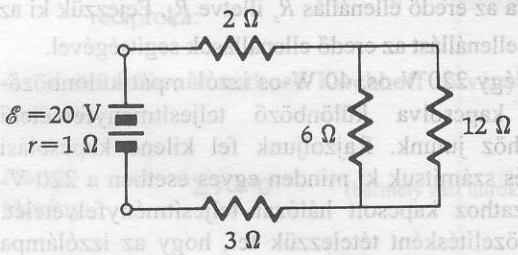
29A-11 Egy 12 V-os autóakkumulátor belső ellenállása 0,02 Ω. Számítsuk ki az akkumulátor kapocsfeszültségét az indítómotor használata közben. A motor 140 A áramerősségű áramot vesz fel. (A válasz ismeretében a következő tanács adható: ha az autó motorja leáll, indításkor célszerű a fényszórókat lekapcsolni.)

29A-12 Egy vadonatúj ceruzaelem elektromotoros ereje 1,5 V, belső ellenállása 0,311 Ω. a) Számítsuk ki a kapocsfeszültséget, ha az elem 58 mA áramerősségű áramot ad le egy külső áramkörnek; b) Mekkora a külső áramkör ellenállása?

29A-13 A 29-22 ábrán látható áramkörbe a bal oldali csomóponton át I áramerősségű áram lép be. Mutassuk meg, hogy az R_1-et tartalmazó ágon az I_1 áramerősség és a teljes I áramerősség aránya $I_1/I = R_2/(R_1+R_2)$.



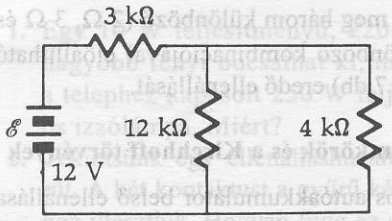
29-22 ábra
A 29B-13 feladathoz



29-23 ábra
A 29B-14 feladathoz

29A-14 Határozzuk meg a) A 29-23 ábra áramkörében, a telepen kívüli ellenállások eredő ellenállását b) a telep által leadott áram áramerősségét; c) a 6 Ω-os ellenállás hőteljesítményét.

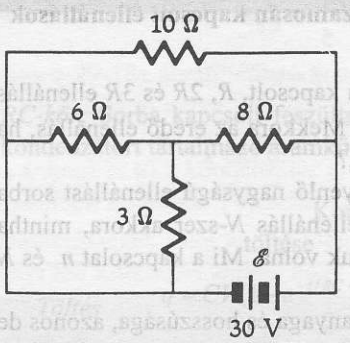
29A-15 Tekintsük a 29-24 ábrán látható áramkört. Mutassuk meg, hogy a feszültségforrás által egységnyi idő alatt végzett, $\mathcal{E}I$ munka egyenlő az ellenállások I^2R Joule-hőjének összegével.



29-24 ábra
A 29B-15 feladathoz

29A-16 Egy lakókocsi világításához n (párhuzamosan kapcsolt) R ellenállású izzólámpát és egy $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű, r belső ellenállású akkumulátort használunk. Fejezzük ki az akkumulátor által leadott áram áramerősségét a megadott mennyiségekkel.

29B-17 Számítsuk ki a) A 29-25 ábra áramkörében, a telepen kívüli ellenállások eredő ellenállását b) a telep által leadott áram áramerősségét; c) a 6 Ω-os ellenállás hőteljesítményét.

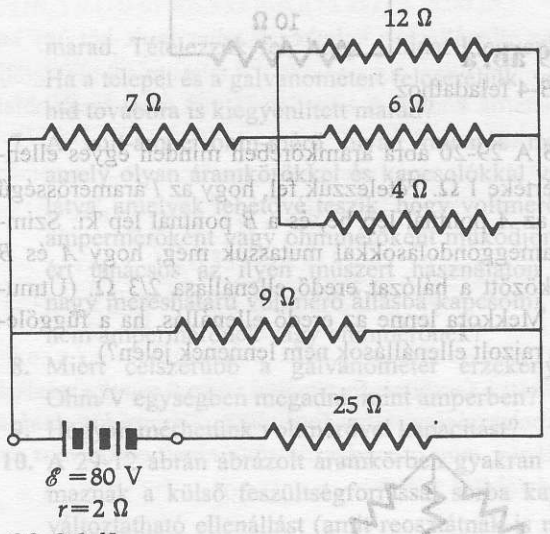


29-25 ábra
A 29B-17 feladathoz

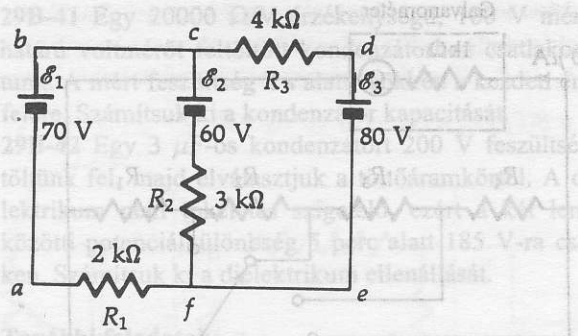
29B-18 Számítsuk ki a 29-26 ábra áramkörében, a) a telepen kívüli ellenállások eredő ellenállását b) a telep kapocsfeszültségét; c) a telep által leadott teljesítményt. d) Táblázatos formában, az ellenállások növekvő sorrendjében adjuk meg, hogy az egyes ellenállásokon mekkora teljesítmény disszipálódik. (Útmutatás: az adott áramkörben nem szükséges a Kirchhoff törvényeket alkalmazni az áramerősségek kiszámításához, ehhez az Ohm törvény is elegendő.)

29B-19 Lemerült akkumulátor elektromotoros ereje 7,22 V; 8,60 amperes árammal töltve kapocsfeszültsége 7,96 V. Mekkora az akkumulátor belső ellenállása?

29B-20 Kirchhoff törvényeit alkalmazva számítsuk ki a) a 29-27 ábra áramkörének ellenállásain keresztül folyó áram áramerősségét; b) a c és f pontok közötti potenciálkülönbséget. Melyik pont potenciálja nagyobb?

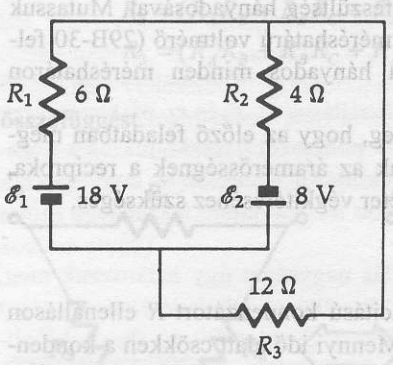


29-26 ábra
A 29B-18 feladathoz



29-27 ábra
A 29B-20 feladathoz

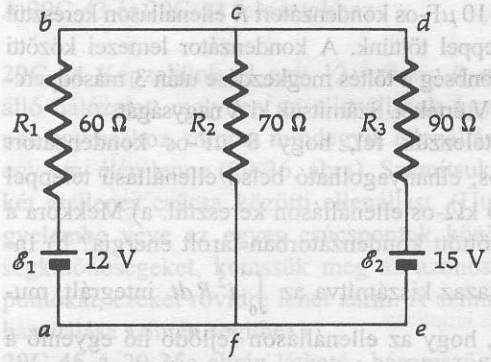
29B-21 Kirchhoff törvényeit alkalmazva számítsuk ki a 29-28 ábra áramkörének ellenállásain keresztül folyó áram áramerősségét.



29-28 ábra
A 29B-21 feladathoz

29.4 A szuperpozíció elve

29B-22 Kirchhoff törvényeit alkalmazva számítsuk ki a 29-29 ábra áramkörének egyes ágaiban folyó áramok áramerősségét és irányát.

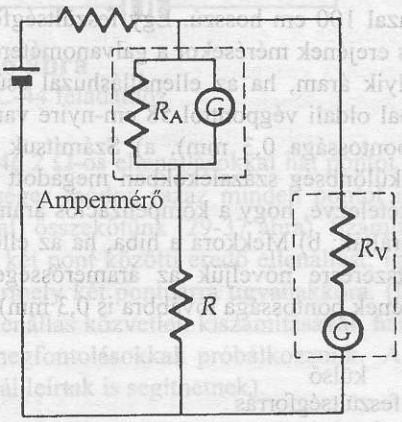


29-29 ábra
A 29B-22 feladathoz

29B-23 Oldjuk meg a 29B-22 feladatot a szuperpozíció elvének felhasználásával.
29B-24 Oldjuk meg a 29B-20 feladatot a szuperpozíció elvének felhasználásával.
29B-25 Oldjuk meg a 29B-21 feladatot a szuperpozíció elvének felhasználásával.

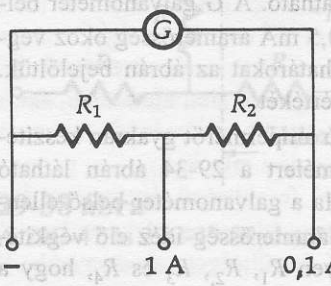
29.5 Alkalmazások

29A-26 Galvanométer tekercsének ellenállása 100 Ω és 200 μA hatására éri el a végkitérést. Számítsuk ki az ellenállások nagyságát, amelyekkel a galvanométert a) 10 V-os méréshatárú voltmérőként és b) 5 A-es méréshatárú ampermérőként alkalmazhatjuk. Készítsünk mindkét esetben kapcsolási rajzot az ellenállás csatlakoztatásának módjáról.
29B-27 Az R ellenállás nagyságát a 29-30 ábrán látható összeállítással mérhetjük meg. a) Mekkora R értéke, ha az 50 Ω eredő ellenállású ampermérő 5 mA-t, a voltmérő pedig 12,3 V-ot mutat? b) Mekkora lenne R értéke, ha az ampermérő ellenállása zérus lenne?

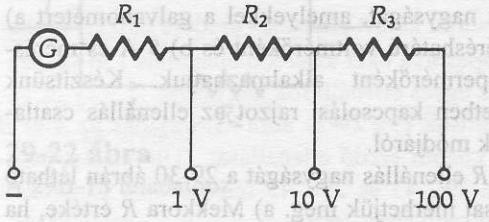


29-30 ábra
A 29B-27 feladathoz

29B-28 A 29-31 ábrán a G galvanométer ellenállása 50 Ω, és 400 μA hatására végkitérést mutat. a) Számítsuk ki az R_1 és R_2 ellenállásokat, amelyeket söntként az ábra szerint kapcsolva a galvanométert két (1 A és 0,1 A) méréshatárú ampermérőnek lehet használni. b) Hogyan lehet ugyanezt a galvanométert az R_3 és R_4 előtétellenállásokkal két (1 V és 10 V) méréshatárú voltmérőnek használni? Adjuk meg a voltmérő kapcsolási rajzát. Jelöljük meg a bemeneteket „–", „1 V", „10 V" feliratokkal ; és számítsuk ki R_3 és R_4 értékét.

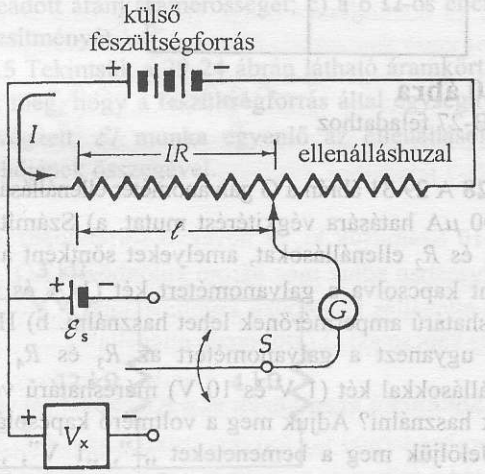


29-31 ábra
A 29B-28 feladathoz



29-33 ábra
A 29B-30 feladathoz

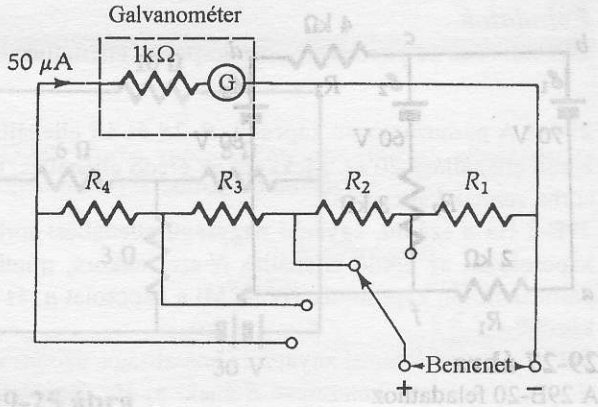
29B-29 A 29-32 ábrán látható kompenzáló áramkörben az ellenálláshuzal 100 cm hosszú. Egy feszültségforrás elektromotoros erejének mérésekor a galvanométeren át akkor nem folyik áram, ha az ellenálláshuzal csúszókontaktusa a bal oldali végponttól 58 cm-nyire van (ez utóbbi érték pontossága 0,3 mm). a) Számítsuk ki a mért potenciálkülönbség százalékokban megadott relatív hibáját, feltételezve, hogy a kompenzációs áramkört pontosan kalibrálták; b) Mekkora a hiba, ha az ellenálláshuzalon kétszeresre növeljük az áramerősséget (a kontaktus helyének pontossága továbbra is 0,3 mm).



29-32 ábra
A 29B-29 feladathoz

29B-30 A 29-33 ábrán egy több méréshatárú voltmérő előtétellenállás-sorozata látható. A G galvanométer belső ellenállása 500 Ω, és 0,5 mA áramerősség okoz végkitérést. Az egyes méréshatárokat az ábrán bejelöltük. Számítsuk ki R_1, R_2 és R_3 értékét.

29B-31 Több méréshatárú ampermérőt gyakran készítenek úgy, hogy galvanométert a 29-34 ábrán látható *Ayrtonsönttel* látnak el. Ha a galvanométer belső ellenállása 1000 Ω és 50 μA áramerősség idéz elő végkitérést, akkor mekkora legyen R_1, R_2, R_3 és R_4, hogy a kapcsoló állásától függően 10 mA, 100 mA, 1 A illetve 10 A áramerősség idézzen elő végkitérést?



29-34 ábra
A 29B-31 feladathoz

29B-32 A voltmérők jellemezhetők ellenállásuk és a végkitérést előidéző feszültség hányadosával. Mutassuk meg, hogy egy több méréshatárú voltmérő (29B-30 feladat) esetében ez a hányados minden méréshatáron ugyanakkora.

29B-33 Mutassuk meg, hogy az előző feladatban megadott hányados annak az áramerősségnek a reciproka, amelyik a galvanométer végkitéréséhez szükséges.

29.6 RC-körök

29A-34 Egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül sütünk ki. Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor töltése a kezdeti érték $1/e^2$-ed részére?

29A-35 Mutassuk meg, hogy az RC szorzat idő dimenziójú mennyiség.

29B-36 Kondenzátor adott feszültséggel való feltöltésekor a töltés maximumhoz tart. Számítsuk ki, hogy a $\tau = RC$ időállandó hányszorosa az az időtartam, ami ahhoz szükséges, hogy a töltés 2%-nyira megközelítse a maximumot?

29B-37 Egy 10 μF-os kondenzátort R ellenálláson keresztül 10 V-os teleppel töltünk. A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a töltés megkezdése után 3 másodperccel éri el a 4 V értéket. Számítsuk ki R nagyságát.

29B-38 Tételezzük fel, hogy 8 μF-os kondenzátort $\mathcal{E}$ = 20 V-os, elhanyagolható belső ellenállású teleppel töltünk, 500 kΩ-os ellenálláson keresztül. a) Mekkora a teljesen feltöltött kondenzátorban tárolt energia? b) Integrálással, azaz kiszámítva az $\int_0^\infty i^2 R\,dt$ integrált, mutassuk meg, hogy az ellenálláson fejlődő hő egyenlő a kondenzátorban tárolt elektromos energiával.

29B-39 Igazoljuk, hogy a $q = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC})$ függvény kielégíti az $\mathcal{E} - iR - q/C = 0$ egyenletet.

29B-40 Kondenzátort 9 V-os teleppel teljesen feltöltünk. Ezután a kondenzátorhoz 10 V méréshatárú, 20000 Ω/V érzékenységű voltmérőt csatlakoztatunk, amelyen a mutatott feszültség 5 s alatt csökken 8,00 V-ról 5,60 V-ra. Számítsuk ki C értékét.

29B-41 Egy 20000 Ω/V érzékenységű, 100 V méréshatárú voltmérőt feltöltött kondenzátorhoz csatlakoztatunk. A mért feszültség 2 s alatt csökken a kezdeti érték felére. Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását.

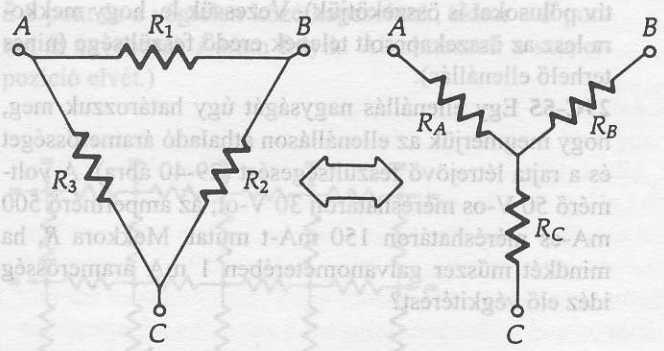
29B-42 Egy 3 μF-os kondenzátort 200 V feszültségre töltünk fel, majd elválasztjuk a töltőáramkörtől. A dielektrikum nem tökéletes szigetelő, ezért a két lemez közötti potenciálkülönbség 5 perc alatt 185 V-ra csökken. Számítsuk ki a dielektrikum ellenállását.

További feladatok

29C-43 Igazoljuk a 29-35b ábrán látható három ellenállásból álló „csillag"-kapcsolás és a 29-35a ábrán látható „háromszög"-kapcsolás közötti

$$R_1 = (R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C) / R_C$$
$$R_2 = (R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C) / R_A$$
$$R_3 = (R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C) / R_B$$

összefüggést.



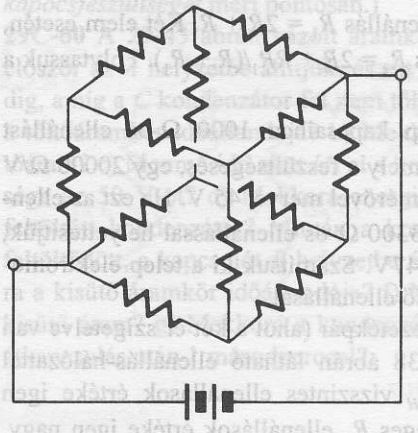
a) háromszög-kapcsolás b) csillag-kapcsolás

29-35 ábra
A 29C-43 és 29C-44 feladatokhoz

29C-44 Képzeljünk el egy 12 azonos R ellenállásból álló hálózatot, melyben az ellenállások úgy csatlakoznak egymáshoz, mintha mindegyik ellenállás egy kocka egy-egy élén lenne (29-36. ábra). Számítsuk ki a kocka két átellenes csúcsa közötti ellenállást. (Útmutatás: figyelembe véve az egyes csúcspontok közötti feszültségkülönbségeket, keressük meg az azonos potenciálú pontokat, ezeket rövidre lehet zárni. A szimmetriák felhasználása szintén segíthet.)

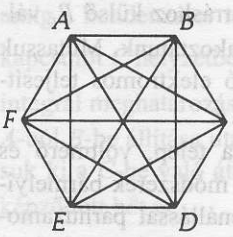
29C-45 A 29-35a ábrán látható „háromszög" kapcsolás „csillag"-kapcsolássá (29-35b ábra) transzformálható úgy, hogy az egyes végpontok közötti ellenállás változatlan marad. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

$$R_A = R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3)$$
$$R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3)$$
$$R_C = R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3)$$

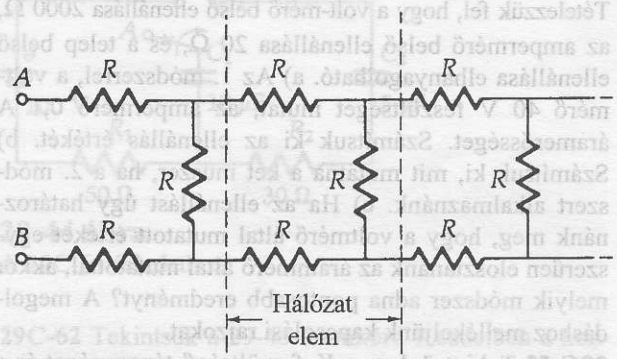


29-36 ábra
A 29C-44 feladathoz

29C-46 2 Ω-os ellenállásokkal hat pontot (A-F) minden lehetséges módon (azaz minden pontot minden másik ponttal) összekötünk (29-37 ábra). Számítsuk ki tetszőleges két pont közötti eredő ellenállást; igazoljuk, hogy ez bármely két pontpárra ugyanakkora. (Útmutatás: Ne az ellenállás közvetlen kiszámításával, hanem szimmetria megfontolásokkal próbálkozzunk. A 29C-57 feladatnál leírtak is segíthetnek).



29-37 ábra
A 29C-46 feladathoz



29-38 ábra
A 29C-47 és 29C-49 feladatokhoz.

29C-47 Tekintsük a 29-38 ábrán látható ellenállás-hálózatot, melyben minden egyes ellenállás R nagyságú. Mutassuk meg, hogy ha a hálózat elemeinek száma na-

gyon nagy, az A és B végpontok között az eredő ellenállás $R(1+\sqrt{3})$. (Útmutatás: ha csak egy elem lenne jelen, az eredő ellenállás $R_1 = 2R + R$. Két elem esetén, az eredő ellenállás $R_2 = 2R + RR_1/(R + R_1)$. Folytassuk a sorozatot.)

29C-48 Egy telep kapcsaihoz 1000 Ω-os ellenállást csatlakoztatunk; amely a feszültségesés, egy 20000 Ω/V érzékenységű voltmérővel mérve, 45 V. Ha ezt az ellenállást egy másik, 3300 Ω-os ellenállással helyettesítjük, a mért feszültség 47V. Számítsuk ki a telep elektromotoros erejét és belső ellenállását.

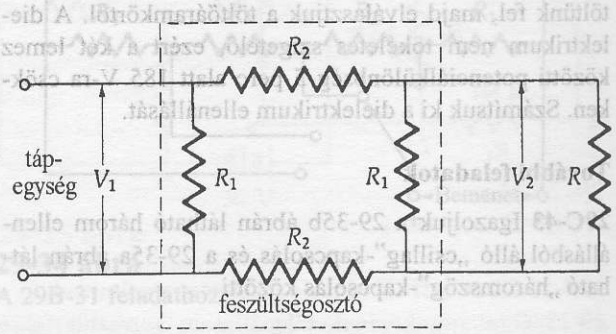
29C-49 Hosszú vezetékpár (ahol a két ér szigetelve van egymástól) a 29-38 ábrán látható ellenállás-hálózattal közelíthető; az R_H vízszintes ellenállások értéke igen kicsiny, a függőleges R_V ellenállások értéke igen nagy, hiszen az előbbiek a vezetékpár egységnyi hosszra eső $r_1/L = 2R_H/L$ ellenállásának, míg az utóbbiak az egységnyi hosszúságú szigetelés ellenállásának ($r_2/L = R_V/L$) felelnek meg. Mutassuk meg, hogy ha $r_2 >> r_1$, akkor az egységnyi hosszúságra jutó ellenállás az A és B kapcsok között $\sqrt{r_1 / r_2} / L$.

29C-50 Az R_A és R_B ellenállások sorba vannak kapcsolva. Ha az R_A ellenállást R ellenállással söntöljük, és egyidejűleg az R_B ellenállást R-rel megnöveljük, az eredő ellenállás változatlan marad. Fejezzük ki R értékét R_A függvényeként (R nem függ R_B értékétől).

29C-51 Feszültségforrás feszültsége terheletlenül $\mathcal{E}$, belső ellenállása r. A feszültségforráshoz külső R_L változtatható terhelő ellenállást csatlakoztatunk. Mutassuk meg, hogy az R_L ellenállásra jutó elektromos teljesítmény akkor a legnagyobb, ha $R_L = r$.

29C-52 Az ellenállások nagysága telep, voltmérő és ampermérő segítségével az alábbi módszerek bármelyikével meghatározható: 1. Az ellenállással párhuzamosan kapcsoljuk a voltmérőt és velük sorba kapcsoljuk az ampermérőt; 2. Az ellenállással sorba kapcsoljuk az ampermérőt, ezekkel párhuzamosan pedig a voltmérőt. Tételezzük fel, hogy a volt-mérő belső ellenállása 2000 Ω, az ampermérő belső ellenállása 20 Ω, és a telep belső ellenállása elhanyagolható. a) Az 1. módszerrel, a voltmérő 40 V feszültséget mutat, az ampermérő 0,1 A áramerősséget. Számítsuk ki az ellenállás értékét. b) Számítsuk ki, mit mutatna a két műszer, ha a 2. módszert alkalmaznánk. c) Ha az ellenállást úgy határoznánk meg, hogy a voltmérő által mutatott értéket egyszerűen elosztanánk az árammérő által mutatottal, akkor melyik módszer adna pontosabb eredményt? A megoldáshoz mellékeljünk kapcsolási rajzokat.

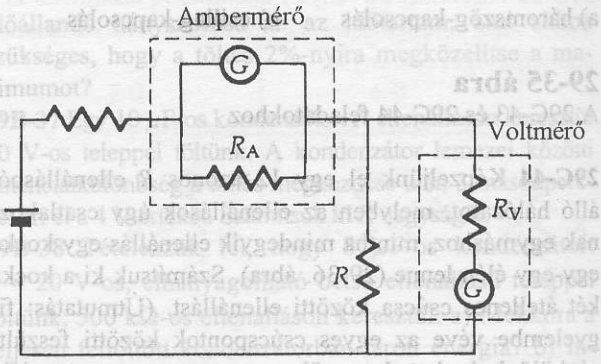
29C-53 Tekintsünk egy V_1 feszültségű tápegységet és a kimenetén egy R terhelést. Bizonyos elektronikus alkalmazásoknál a kimenő feszültséget alacsonyabb, V_2 értékre szükséges korlátozni, anélkül azonban, hogy megváltoztatnánk a feszültségforrás terhelését. Ezt a 29-39 ábrán látható feszültségosztóval érhetjük el. A megfelelően méretezett feszültségosztó esetén a feszültségforrás terhelése változatlan. Mutassuk meg, hogy ehhez az R_1 és R_2 ellenállásokat úgy kell megválasztani, hogy $R_1 = R(V_1 + V_2)/(V_1 - V_2)$ és $R_2 = R(V_1^2 - V_2^2)/4V_1V_2$.



29-39 ábra
A 29C-53 feladathoz

29C-54 Három telepet, melyeknek elektromotoros ereje $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ és $\mathcal{E}_3$; belső ellenállásuk r_1, r_2 és r_3, párhuzamosan kapcsolunk (a pozitív pólusokat összekötjük és a negatív pólusokat is összekötjük). Vezessük le, hogy mekkora lesz az összekapcsolt telepek eredő feszültsége (nincs terhelő ellenállás).

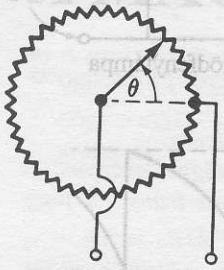
29C-55 Egy ellenállás nagyságát úgy határozzuk meg, hogy megmérjük az ellenálláson áthaladó áramerősséget és a rajta létrejövő feszültségesést (29-40 ábra). A voltmérő 50 V-os méréshatáron 30 V-ot; az ampermérő 500 mA-es méréshatáron 150 mA-t mutat. Mekkora R, ha mindkét műszer galvanométerében 1 mA áramerősség idéz elő végkitérést?



29-40 ábra
A 29C-55 feladathoz

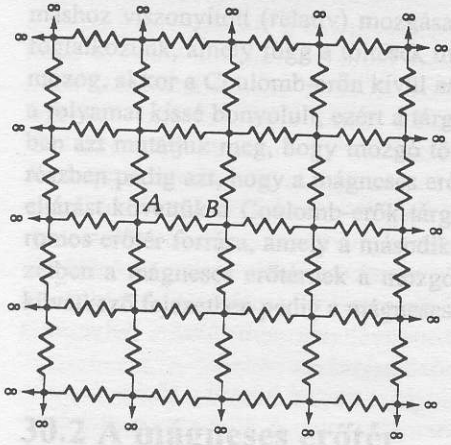
29C-56 Változtatható ellenállás készíthető, ha ellenálláshuzalt úgy csévélnek szigetelő karikára, hogy a feltekercselt ellenálláshuzal a karikát majdnem körbeéri. Az ellenálláshuzal teljes ellenállását jelöljük R-rel. A változtatható ellenállás egyik csatlakozása a zárt karika egy rögzített pontja, a másik csatlakozási pont a karika mentén körbefordítható csúszókontaktus (29-41 ábra). a) Fejezzük ki a csatlakozási pontok közötti r ellenállást R, és a radiánokban megadott θ függvényében; b) Mi-

lyen gyakorlati probléma jelentkezik a csúszókontaktus $\theta = 0°$ pontja környezetében, ha adott a csatlakozási pontok közötti feszültségkülönbség.



29-41 ábra
A 29C-56 feladathoz

29C-57 Tekintsük, a 29-42 ábrán látható, ellenállásokból álló végtelen hálózatot; legyen minden ellenállás értéke azonos, R. Mekkora az A és B pontok között az ellenállás? (Útmutatás: gondolatban kapcsoljunk az A pont és a végtelen távoli pont közé telepet; folyjon ennek hatására A-n keresztül I áram. Ha egy másik telepet a B pont és a végtelen közé kapcsolunk, akkor a B ponton át ugyancsak I áram folyik. Alkalmazzuk a szuperpozíció elvét.)

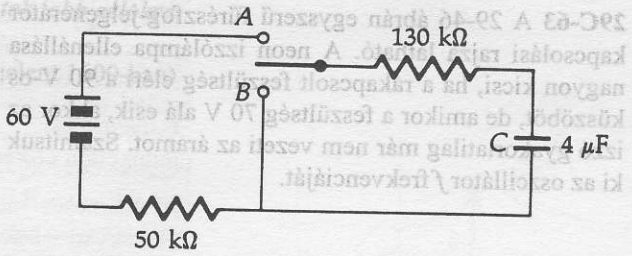


29-42 ábra
A 29C-57 feladathoz

29C-58 Egy 4 μF kapacitású és 100 V feszültségre töltött kondenzátor, 15000 Ω-os ellenállással van sorba kapcsolva. Ezt az RC kört a fel nem töltött 10 μF kapacitású kondenzátor két pólusához csatlakoztatjuk. Számítsuk ki az ellenálláson áthaladó áram erősségét, amidőn a 4 μF kapacitású kondenzátor feszültsége 50 V-ra csökken.

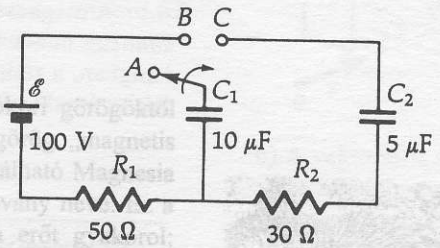
29C-59 Feszültségforrás elektromotoros ereje $\mathcal{E}$, belső ellenállása r. Ha a kapocsfeszültséget 20000 Ω/V érzékenységű, több méréshatárú voltmérővel mérjük, akkor 100 V-os méréshatáron 95 V-nak, 200 V-os méréshatáron pedig 120 V-nak adódik. Számítsuk ki $\mathcal{E}$ és r értékét. (Az, hogy a voltmérő két különböző méréshatárban más értéket mutat, nem a műszer hibája: a voltmérő a *kapocsfeszültséget* méri pontosan.)

29C-60 A 29-43 ábrán vázolt áramkörben a kapcsolót először az A helyzetbe állítjuk, és ott hagyjuk, mindaddig, amíg a C kondenzátor fel nem töltődik. a) Mekkora a töltőáramkör időállandója? b) Mekkora a kezdeti töltőáram? c) Mennyi idő alatt éri el a kondenzátor feszültsége az 50 V-ot? d) Mekkora energiát tárol a teljesen feltöltött kondenzátor? Miután a kondenzátor teljesen feltöltődött, a kapcsolót B helyzetbe állítjuk. e) Mekkora a kisütő áramkör időállandója? f) Mekkora a kezdeti kisütő áram? g) Mekkora a kondenzátor feszültsége az átkapcsolás után 1 másodperccel?



29-43 ábra
A 29C-60 feladathoz

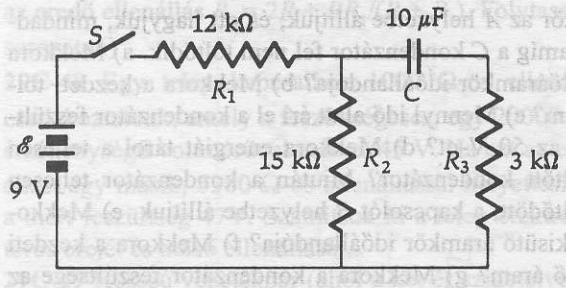
29C-61 Tekintsük a 29-44 ábrán látható áramkört. Kezdetben a kondenzátor nincs feltöltve, a kapcsolót az A-ból a B helyzetbe állítjuk át, és mindaddig úgy hagyjuk, amíg a kondenzátor teljesen fel nem töltődött. Ezután a kapcsolót C helyzetbe állítjuk. Számítsuk ki az $\int i^2 R\,dt$ integrál meghatározásával az R_1 ellenálláson, a kapcsoló A-ból B-be állítása után fejlődő hőmennyiséget. Számítsuk ki a C-be való átkapcsolás után az R_2 ellenállásban képződött hőt is.



29-44 ábra
A 29C-61 feladathoz

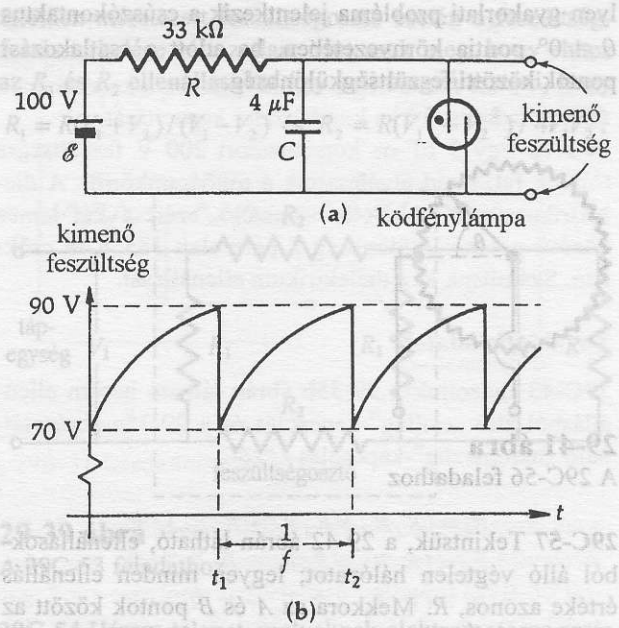
29C-62 Tekintsük a 29-45 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron nincs töltés; a $t = 0$ időpontban az S kapcsolót zárjuk. a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12}, i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövő feszültségesések (v_{12}, v_{15} és v_c) kezdeti (közvetlenül $t = 0$ utáni) értékét foglalja össze. b) Ké-

szítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek sztacionárius értékeivel.



29-45 ábra
A 29C-62 feladathoz

29C-63 A 29-46 ábrán egyszerű fűrészfog-jelgenerátor kapcsolási rajza látható. A neon izzólámpa ellenállása nagyon kicsi, ha a rákapcsolt feszültség eléri a 90 V-os küszöböt, de amikor a feszültség 70 V alá esik, akkor az izzó gyakorlatilag már nem vezeti az áramot. Számítsuk ki az oszcillátor *f* frekvenciáját.



29-46 ábra
A 29C-63 feladathoz

XXVII. Fejezet

27A-1 0,885 pF

27A-3 a) $\frac{3}{5}C$ b) $3C$ c) C d) A kondenzátorok rövidre vannak zárva

27B-5 C

27B-7 $C = \varepsilon_0 A(a + b)/[b(a - b)]$

27B-9 A válasz adott.

27B-11 A válasz adott.

27B-13 A válasz adott.

27B-15 a) 400 pC b) 80 V

27B-17 0,188 m^2

27B-19 $C = C_0/(1 - f)$k

27B-21 $2\pi\varepsilon_0 L\kappa_1\kappa_2\left[\kappa_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \kappa_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$

27A-23 a) 1,60 mJ b) 0,800 mJ

27B-25 A válasz adott.

27B-27 a) 600 nC, csökken b) 30 μJ, csökken c) 30 μJ

27B-29 A válasz adott.

27C-31 A válasz adott.

27C-33 267 V

27C-35 $C/L = \kappa 2\pi\varepsilon_0/[\ln(b/a)]$

27C-37 $1/(1 + \kappa)$

27C-39 $CV^2/2d$

27C-41 A válasz adott.

27C-43 $1{,}41 \times 10^{-15}$ m

XXVIII. Fejezet

28A-1 $3{,}12 \times 10^{19}$ elektron/s

28B-3 a) $5{,}86 \times 10^{28}$ elektron/m^3 b) 51,9 mA c) $1{,}76 \times 10^{-6}$ m/s

28A-5 0,667 Ω

28A-7 418C°

28A-9 276C°

28B-11 1,56 R

28B-13 1,66 V

28A-15 5,25 W

28A-17 a) 11,1 Ω b) 1,08 A

28A-19 a) 66,7%-kal nagyobb teljesítmény b) Nem

28A-21 $\rho L/\pi(b^2 - a^2)$

28B-25 a) 2,16 kW b) 1,34 hp c) 46,3%

28B-27 a) $9{,}36 \times 10^{11}$ részecske b) 6,00 W

28A-29 $6{,}00 \times 10^{-15}$ s

28B-31 $4{,}17 \times 10^6$ A/m^2

28B-33 A válasz adott.

28C-35 A válasz adott.

28C-37 A válasz adott.

28C-39 SI egységekben: a) $4000V^{2/3}$; $(2{,}50 \times 10^{-4})V^{5/2}$

28C-41 A válasz adott.

28C-43 8,32 h

28C-45 $(b - a)/4\pi ab\sigma$

28C-47 A válasz adott.

28C-49 A válasz adott.

XXIX. Fejezet

29A-1 220 Ω

29B-3 a) A b) B c) 4,50

29B-5 A válasz adott.

29B-7 $R_{AB} = \frac{7}{5}R$

29B-9 wattban: $10, 16, 24, 30, 40, 53\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}, 100, 160$

29A-11 9,20 V

29A-13 A válasz adott.

29A-15 A válasz adott.

29B-17 a) 5,00 Ω b) 6,00 A c) 2,00 A

29B-19 0,0860 Ω

29B-21 2,67 mA R_1-en;2,50 mA R_2-n;0,167 mA R_3-on

29B-23 A válasz adott.

29B-25 A válasz adott.

29B-27 a) 2,41 kΩ b) 2,46 kΩ

29B-29 a) 0,517% b) 0,103%

29B-31 $R_1 = 5{,}025 \times 10^{-3}$ Ω; $R_2 = 4{,}523 \times 10^{-2}$ Ω; $R_3 = 4{,}523 \times 10^{-1}$ Ω; $R_4 = 4{,}523$ Ω

29B-33 A válasz adott.

29A-35 A válasz adott.

29B-37 0,587 MΩ

29B-39 A válasz adott.

29B-41 1,44 μF

29C-43 $R_1 = (R_AR_B + R_BR_C + R_CR_A)/R_C$;
$R_2 = (R_AR_B + R_BR_C + R_CR_A)/R_A$;
$R_3 = (R_AR_B + R_BR_C + R_CR_A)/R_B$;

29C-45 $R_A = R_1R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_B = R_1R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_C = R_2R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;

29C-47 $R(1 + \sqrt{3})$

29C-49 A válasz adott.

29C-51 A válasz adott.

29C-53 A válasz adott.

29C-55 201 Ω

29C-57 $R/2$

29C-59 163 V; 1.43 MΩ

29C-61 0,050 J R_1-en; 0,0167 J R_2-n

29C-63 6,90 Hz

XXX. Fejezet

30A-1 $1{,}86 \times 10^{-6}$ m/s

30B-3 F = $1{,}44 \times 10^{-13}\,\hat{y} - 3{,}36 \times 10^{-13}\,\hat{z}$ (newtonban)

30A-5 1,20 keV

30A-7 0,357 T

30B-9 $R_\alpha = R_p = 42{,}8R$

30B-11 $R = \sqrt{2mV/qB^2}$

30A-13 $7{,}78 \times 10^5$ m/s

30B-15 $2{,}44 \times 10^5$ V/m

30B-17 b) 0,708 T

A MÁGNESES ERŐTÉR

(Mágnességtani kísérleteiről írva....)
Sok fájdalommal és nagy költségekkel
álmatlan éjszakák árán derítettük ki és igazoltuk.
Élvezzétek, s ha sikerül, használjátok jobb célokra.
WILLIAM GILBERT
A természetes mágnesércről (megjelent 1600-ban)

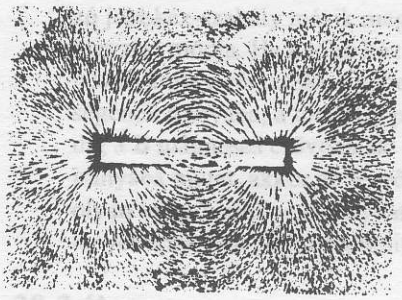
30.1 Bevezetés

Az előző fejezetekben a távolság négyzetével fordítottan arányos gravitációs és Coulomb-erőkről volt szó. Ezeket az erőket a tömegek vagy töltések egymáshoz viszonyított (relatív) mozgása nem befolyásolja. Most olyan erővel foglalkozunk, amely függ a töltések mozgásától is. Ha két töltés mindegyike mozog, akkor a Coulomb-erőn kívül *mágneses* erővel is hatnak egymásra. Ez a folyamat kissé bonyolult, ezért a tárgyalást két részre bontjuk: az első részben azt mutatjuk meg, hogy mozgó töltés mágneses erőteret kelt; a második részben pedig azt, hogy a mágneses erőtérben mozgó töltésre erő hat. (Ezt az eljárást követtük a Coulomb-erők tárgyalásakor is: az egyik töltés az elektromos erőtér forrása, amely a második töltésre erőt gyakorol.) Ebben a fejezetben a mágneses erőtérnek a mozgó töltésre gyakorolt hatását írjuk le, a következő fejezetben pedig a mágneses erőtér eredetét elemezzük.

30.2 A mágneses erőtér

A mágnességre vonatkozó első feljegyzett megfigyelés az ókori görögöktől származik, kb. 2500 évvel ezelőttről. A *mágnesség* szó a görög „magnetis lithos" kifejezésből ered, ami a Görögország északi részén található Magnesia környékén található vasoxidot (*magnetit,* Fe_3O_4) tartalmazó ásvány neve. Ez a „természetes mágnes" hasonló ércdarabokra és vastárgyakra erőt gyakorol; továbbá, mágneses tulajdonsággal ruházza fel a hozzá érintett vasdarabot is. Elsőként valószínűleg az ősi kínaiak fedezték fel, hogy egy fonálra függesztett mágnesvasérc magától észak-déli irányba áll be. Ez arra utal, hogy a Föld óriási mágnesként viselkedik. Közismertek a vasreszelék erővonal-ábrái, amelyek azt szemléltetik, hogy milyen a mágneses erőtér egy rúdmágnes körül (30-1 ábra). Mágneses erőtér jelenlétében a vasreszelék-szemcsék kicsiny mágnesekké válnak, az erőtér irányába rendeződnek és egymást vonzva láncokat alkotnak. A láncok szemléltetik a mágneses erőtér szerkezetét.

Az, hogy az iránytű a mágneses erőtérben mindig egy kitüntetett irányba mutat, arra utal, hogy a mágneses erőtérnek vektortulajdonságai vannak. A mágneses erőtér formális, mérési utasítással megadott definíciója a követ-



30-1 ábra
A papírlapra szórt vasreszelék a papír síkja alatt lévő rúdmágnes mágneses erőterének megfelelően rendeződik el.

kező: Helyezzünk el a vizsgált pontban egy tetszőleges töltést. Ha a nyugalomban lévő töltésre erő hat, arra következtethetünk hogy *elektrosztatikus erőtér* van jelen. Ha ezen kívül más erőt is tapasztalunk a töltés mozgatásakor, akkor levonhatjuk azt a következtetést, hogy *mágneses erőtér* is jelen van. Ilyen kísérletek eredményeként a mágneses erőtérre vonatkozóan a következő tapasztalatokat rögzíthetjük:

Az erő nagysága arányos a vizsgált pontban elhelyezett töltés nagyságával.
Az erőhatás iránya a mozgás irányára mindig merőleges.
Ha a töltés adott irányban mozog, az erő a sebességgel arányos; az adott sebesség esetén azonban az erő a mozgás irányától függ. (Tehát a mágneses térnek vektortérnek kell lennie.)

Az a kísérleti tapasztalat, hogy az erő mindig merőleges a sebesség irányára, arra utal, hogy a mágneses erőtér matematikailag vektoriális szorzattal írható le. A kísérleteken alapuló következő egyenlet a **B mágneses indukcióvektort** (vagy másként a **mágneses fluxussűrűséget**[1]) definiálja. A tér **B** mágneses indukciójú pontjában **v** sebességgel haladó q töltésre ható **F** erőt az alábbi összefüggés adja meg:

B mágneses indukciójú erőtérben:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (30\text{-}1)$$

A mágneses indukció SI egysége az 1 newton·szekundum/coulomb·méter (1 Ns/Cm= 1 tesla[2] (T)). Minthogy **F** mindig merőleges a **v** és **B** vektorok által alkotott síkra, a viszonyokat gyakran háromdimenziós ábrákon kell illusztrálnunk. (Ezt az erőt szokás mágneses Lorentz erőnek, röviden *Lorentz erőnek* is nevezni, de erre a későbbiekben még visszatérünk.)

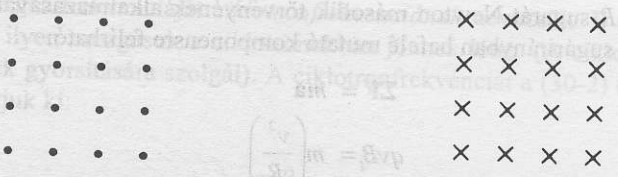
A mágneses erőteret az elektromos erőtérhez hasonlóan ábrázoljuk. Erővonalakat rajzolunk, melyek sűrűsége arányos a fluxussűrűséggel és a hozzájuk húzott érintő iránya a mágneses indukció irányába mutat az adott pontban. Éppúgy, mint az elektromos erőterek szemléltetésénél, adott mágneses indukciót jellemző erővonalak száma önkényes lehet, például adott fluxussűrűséget éppúgy jellemezhetünk 10 vonallal, mint akár 10^4 vonallal négyzetméterenként, ezért célszerűségi és kényelmi szempontok alapján választjuk meg az erővonalsűrűség és az indukció közötti arányossági tényezőt. A természetben erővonalak nem léteznek: ezek csak a mágneses erőtér tulajdonságainak, szerkezetének szemléltetésére szolgáló segédeszközök. A 30-1 ábrán látható vasreszelék-mintázat viszonylag jól mutatja a mágneses erőtér irányait, ám egyáltalán nem tükrözi helyesen a mágneses erőtér intenzitását a különböző helyeken.

A mágneses iránytűnek az északi irányt mutató hegyét a tű *északi pólusának*, a másik végét pedig *déli pólusnak* nevezzük. A 30-1 egyenlettel összhangban, a rúdmágnes mágneses erőterének iránya olyan, hogy az erővonalak az északi pólusból indulnak ki, és a déli pólusba lépnek be.

---

[1] Néha, meglehetősen pongyola módon **B**-t mágneses térerősségnek nevezik. A mágneses térerősség vektor definíciója $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, ahol μ a mágneses erőtérben az anyag mágneses permeabilitása.

[2] Ezt az egységet Nikola Tesla (1856-1943) szerb származású amerikai mérnökről nevezték el, aki az elektromos energiatermelés és szállítás számos szellemes módszerét dolgozta ki, többek között ő tervezte a Niagara-vízesésen működő erőművet. Az 1 *tesla* meglehetősen nagy egység; a legnagyobb fluxussűrűséget (68 T) 1987 tavaszán, a Massachusetts Institute of Technology (Boston, USA) mágneses laboratóriumában érték el. Ez 5,6 ms hosszú impulzussal megvalósított 68 T indukciójú mágneses tér volt. Kisebb (CGS eredetű) fluxussűrűség-egység az 1 gauss (G); 1 G=10^{-4}T. A Föld mágneses fluxussűrűsége az egyenlítőnél közelítőleg 0,3 G; kis rúdmágnes néhány száz G indukciót hozhat létre. Ennél is kisebb egység az 1 *gamma* (γ) melyet a geofizikusok és űrkutatók használnak: 1 $\gamma = 10^{-5}$ G = 10^{-9}T.



a) A papír síkjából kifelé tartó erővonalak (A pontok arra utalnak, hogy a nyilak az olvasó felé mutatnak).

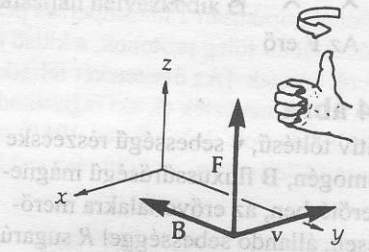
b) A papír síkjába befelé tartó erővonalak (Az x-ek arra utalnak, hogy a nyilakat hátulról látjuk).

30-2 ábra
Az ábra síkjára merőleges irányú erővonalak ábrázolási módja.

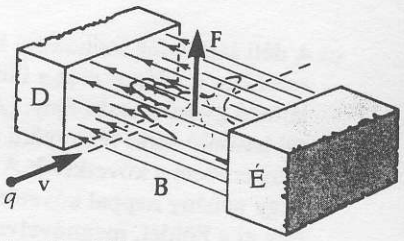
Adott síkra merőleges mágneses erőtér ábrázolásának egy lehetséges módja látható a 30-2 ábrán. Az egyes vektorok irányát a háromdimenziós térben jobban el tudjuk képzelni, ha axonometrikus ábrázolás esetén az északi pólusból kiinduló és a déli pólushoz tartó erővonalakkal együtt néha feltüntetik a mágneses pólusokat is (lásd pl. a 30-3b ábrát). A széleknél lévő térinhomogenitásokat ezeken a rajzokon rendszerint nem ábrázolják.

A mágneses Lorentz erő, a sebesség és a mágneses indukcióvektor közötti, a (30-1) egyenlettel jellemzett térbeli viszony, a 30-3a ábrán látható jobbkéz-szabállyal szemléltethető. E konvenció szerint, ha a jobb kéz behajlított ujjai abba az irányba mutatnak, amerre a **v** vektort a legkisebb szöggel forgathatnánk be a **B** irányába, akkor a kinyújtott hüvelykujj **F** irányába mutat. A jobbkéz-szabály egy másik megfogalmazását illusztrálja a 30-3b ábra: jobb tenyerünket tartsuk kinyújtva, hüvelykujjunk legyen a többi ujjal egy síkban úgy, hogy az utóbbival mutassunk a mágneses tér irányába. (Ez úgy is megjegyezhető, hogy az ujjak az erővonalak.). A hüvelykujj mutasson a töltött részecske sebességének irányába. A vektorok vektoriális szorzatának definíciója szerint az $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (qvb\sin\theta)\hat{\mathbf{n}}$ erő az $\hat{\mathbf{n}}$ egységvektor irányába mutat, ahol $\hat{\mathbf{n}}$ a jobbkéz-szabály értelmében mind **v**-re, mind **B**-re merőleges, és θ a hüvelykujj és a mutatóujj közötti szög. A részecskére ható erő a tenyérből kifelé mutat, tehát olyan irányú, mintha a tenyerünkkel valamit éppen megtolnánk.

Amikor a jobbkéz-szabályt alkalmazzuk, a q töltésnek mindig pozitívnak kell lenni. Ha q negatív, akkor először a pozitív töltésre ható erő irányát határozzuk meg, majd ezt az irányt ellentétesre változtatjuk. Ennek illusztrálására képzeljünk el egy, az egyenlítő mentén keleti irányban haladó negatív töltést (az egyenlítő tájékán a mágneses tér iránya északi irányú és nagyjából vízszintes). A jobbkéz-szabályt alkalmazva, a hüvelykujj kelet felé, a többi ujj észak felé mutat, a tenyér pedig felfelé, jelezve, hogy pozitív töltésre felfelé mutató erő hat. A negatív töltésre értelemszerűen lefelé mutató erő hat.



a) Az $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vektoriális szorzat jobbkéz-szabályának szokásos alkalmazása. Ha jobb kezünk ujjait abban az irányban hajtjuk be, amilyen irányban a **v** vektort a **B** vektorra rá tudnánk forgatni, akkor a kinyújtott hüvelykujj éppen **F** irányát jelöli ki.



b) A vektoriális szorzatra vonatkozó jobbkéz-szabály másik megjegyzési módja. Ha a jobb kéz hüvelykujja a részecske **v** sebességének irányába, a többi ujj pedig a **B** mágneses erővonalak irányába mutat, akkor az **F** erő olyan irányú, amilyen irányban a tenyér éppen megtolna valamit.

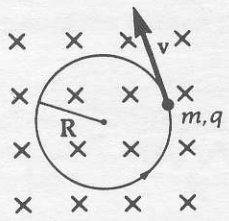
30-3 ábra
A jobbkéz-szabály megjegyzésének két módja

30.3 Töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben

Töltött részecskék mágneses erőtérben történő mozgásának fontos vonása ered onnan, hogy a Lorentz erő mindig merőleges a sebességre. Ennélfogva a *mágneses Lorentz erő a részecskén munkát nem végez*, a részecske sebessége állandó nagyságú marad, a sebesség iránya azonban az oldalirányú erő miatt változik.

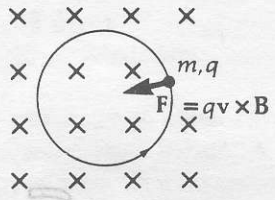
Ha a töltött részecske **v** sebessége **B**-re merőleges, akkor a részecske állandó sebességgel körpályán mozog. A centripetális erőt, amely a v^2/R centripetális gyorsulás létrehozásához szükséges (30-4 ábra), a mágneses Lorentz erő biztosítja. Minthogy **v** és **B** egymásra merőlegesek, a mágneses erő nagysága

$$F = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = qvB\sin 90^0 = qvB$$



B a papír síkjába befelé mutat

a) A **v** sebesség.



b) Az **F** erő

30-4 ábra

Pozitív töltésű, **v** sebességű részecske a homogén, **B** fluxussűrűségű mágneses erőtérben, az erővonalakra merőlegesen, állandó sebességgel R sugarú körpályán mozog. A körmozgás frekvenciáját ciklotronfrekvenciának nevezzük.

A körpálya R sugarát Newton második törvényének alkalmazásával számíthatjuk ki. A sugárirányban befelé mutató komponensre felírható:

$$\Sigma F = ma$$

$$qvB = m\left(\frac{v^2}{R}\right) \tag{30-2}$$

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{30-3}$$

A részecske mv impulzusa és K mozgási energiája között az alábbi összefüggés[3] áll fenn:

$$mv = \sqrt{2mK} \tag{30-4}$$

Az előző két egyenletből v kiküszöbölésével azt kapjuk, hogy:

$$R = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} \tag{30-5}$$

30-1 PÉLDA

Egy 500 eV kinetikus energiájú elektron 0,010 T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtérben, arra merőleges irányban mozog. Számítsuk ki a körmozgás pályájának sugarát.

MEGOLDÁS

Először bizonyosodjunk meg arról, hogy minden mennyiség SI egységben van-e megadva[4], majd helyettesítsük be azokat a (30-5) egyenletbe:

$$R = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} = \frac{\left[(2)(9{,}11\times10^{-31}\,\text{kg})(500\,\text{eV})\left(\frac{1{,}602\times10^{-19}\,\text{J}}{1\,\text{eV}}\right)\right]^{1/2}}{(1{,}602\times10^{-19}\,\text{C})(0{,}010\,\text{T})}$$

$$R = 7{,}54\times10^{-3}\,\text{m}$$

Az elektron energiáját az $1\,\text{eV} = 1{,}602\times10^{-19}\,\text{J}$ összefüggés segítségével számítottuk át SI egységűvé.

---

[3] Minthogy az elektronoknak, sőt, még a protonoknak is nagyon kicsi a tömege, ezeket a töltött részecskéket viszonylag egyszerű a fénysebességet ($c = 3\cdot10^8$ m/s) megközelítő sebességre felgyorsítani, ami bármely objektum sebességének felső korlátja (v.ö. a „Speciális relativitáselmélet" című 41. fejezetben leírtakkal). Például, ha elektront nyugalmi helyzetéből 2500 V potenciálkülönbségen át gyorsítunk, végsebessége a fénysebességnek kb. egytizede lesz. Ilyen sebességek felett a „klasszikus" (nem-relativisztikus) egyenletek közül jónéhány, például a 30-4 összefüggés is, észrevehető mértékben torzít. Jelen céljainknak megfelelően a mozgó töltések sebességét a fénysebességnél mindig sokkal kisebbnek tekintjük; a jelenség pontosabb leírása a 41. fejezetben található.

[4] Egészen eddig az egyenletek mértékegység szerinti összhangját könnyen ellenőrizhettük a mértékegységek behelyettesítésével és egyszerűsítésével. Most, hogy egyre több és több olyan származtatott egységet használunk mint pl. a tesla, mind bonyolultabb mértékegység összetételek kerülnek be az egyenletekbe, s a mértékegységek összhangjának ellenőrzése megnehezedik. Emiatt célszerű már a kezdet kezdetén minden mennyiséget SI egységben megadni, s akkor biztosak lehetünk abban, hogy a végeredményt is ebben a mértékrendszerben kapjuk. Bár a dimenzió-analízis a fizika sok területén rendkívül hasznos ellenőrzési módszer, az elektromosságtan és a mágnesség tan területén többek szerint is olyan, mint a „zűrzavartól zümmögő méhkas" ill. „ostoba hibák gyűjteménye".

A körmozgás frekvenciáját *ciklotronfrekvenciának* nevezzük. E név eredete az, hogy ilyen mozgások a ciklotronokban jönnek létre. (A ciklotron töltött részecskék gyorsítására szolgál). A ciklotronfrekvenciát a (30-2) egyenletből számíthatjuk ki:

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

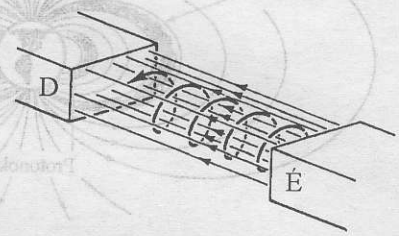
Körmozgás esetén $v = 2\pi fR$. Ezt behelyettesítve, és f-et kifejezve:

Ciklotronfrekvencia

$$f = \frac{B}{2\pi}\left(\frac{q}{m}\right), \qquad (30\text{-}6)$$

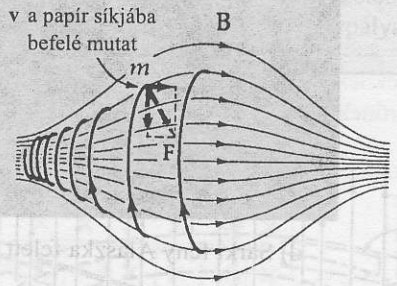
ahol f a körmozgás frekvenciája fordulat/szekundum egységben kifejezve. Ez az egyenlet adott (q/m) fajlagos töltésű részecske homogén mágneses térben való keringésének körfrekvenciáját adja meg. Figyeljük meg, hogy a *ciklotronfrekvencia független a részecske sebességétől és energiájától.*

Ha egy töltött részecske a **B** mágneses indukcióvektorral párhuzamosan mozog, akkor nem hat rá erő, összhangban azzal, hogy a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vektoriális szorzat zérus. Más (de az erőtérre nem merőleges) irányban mozogva, a részecske pályája nem kör, hanem spirális (30-5 ábra). Minthogy a részecske sebessége két komponensre, az erőtér irányával *párhuzamos,* illetve *merőleges* komponensre bontható, a ciklotronfrekvencia a spirális pályán történő mozgásra is jellemző.

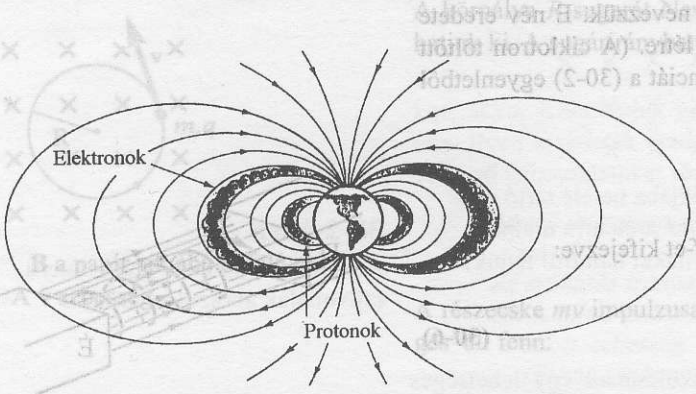


30-5 ábra
Homogén mágneses erőtérben a töltött részecskék állandó sebességgel spirális pályán mozognak. A pálya henger palástján helyezkedik el.

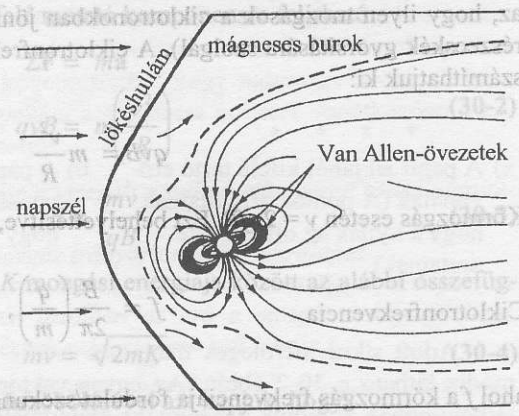
Inhomogén mágneses erőterekben a töltött részecskék mozgása meglehetősen bonyolult lehet. Mindazonáltal egy egyszerű példát érdemes megemlítenünk. A 30-6 ábrán olyan, tengelyszimmetrikus mágneses erőteret ábrázoltunk, amely a végeinél erősebb, mint a közepén. A mágneses erőtérben a részecskék spirális pályán mozognak. A pálya végét megközelítő töltés azonban az **F** mágneses erő vízszintes komponense miatt a középső részre „verődik vissza". Ezt a konfigurációt *mágneses palacknak* nevezik, ugyanis csapdaként működik, benne a töltött részecskék spirális pályán a palack végei közötti térben ide-oda mozognak. A közelmúltban mágneses palackokat alkalmaztak a szabályozott fúziós kísérletek plazmájának összetartására. Sajnos, a palack kicsit „ereszt", minthogy azok a részecskék, amelyek pontosan a mágneses erővonalak irányában mozognak, a végeknél kiszöknek a mágneses térből. Ezt a hibát úgy lehet kiküszöbölni, hogy a palack két végét toroid alakúvá összehajlítjuk.



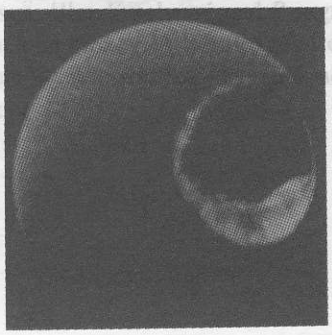
30-6 ábra
A mágneses palack a benne spirális pályán mozgó töltött részecskéket a széleknél „visszaveri", és ezáltal a részecskéket magába zárja.



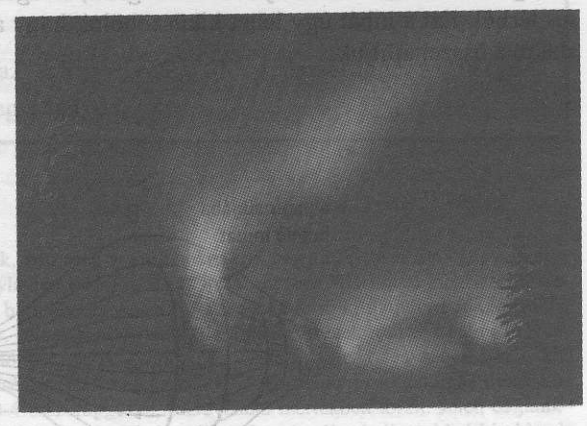
a) A Földet körülvevő ún. Van Allen övezet keresztmetszete. A Föld mágneses erőterének két tartománya mágneses palackként működik, mely a Napból jövő nagyenergiájú elektronokat és protonokat csapdába ejti. A töltött részecskék az északi és déli mágneses pólus között spirális pályán oszcillálnak, tipikusan 1 másodperces periódusidővel. A belső övezetben főleg protonok, a külső övezetben főleg elektronok vannak. [Az övezeteket felfedezőjükről, Dr. James Van Allenről nevezték el, aki ragaszkodott ahhoz, hogy az Egyesült Államok első (sikeres, 1958) műholdján Geiger-számláló legyen, a töltött részecskék detektálására.]



b) A *napszél* a Napból kibocsátott protonok és elektronok áramlása, amely a Föld mágneses erővonalrendszerét a Nappal ellentétes irányba „fújja el". A részecskék mintegy 400–800 km/s sebességgel érkeznek a Föld mágneses erőterébe és görbült alakú *lökéshullámot* valamint több millió kilométer hosszú, üstökösfarokhoz hasonlítható csóvát idéznek elő. A *mágneses burok* tartományában, a lökéshullám mögötti térben, viszonylag lassan plazma áramlik. A részecskék kis része befogódik a *Van Allen-övezetbe*, a többit a mágneses erőtér eltéríti. A napszél intenzitása általában meglehetősen egyenletes, de napfoltok és napkitörések idején néha komoly „viharok" lépnek fel.



c) A déli sarkvidék műholdról készült fényképe. A bal felső sarokban a világos rész a Föld napos része, a jobb oldalon látható gyűrű a sarki fény. (Az északi mágneses pólus körül hasonló sarki fénygyűrű szokott megjelenni.) A sarki fény eredete a következő: A napkitöréseket néhány órával vagy néhány nappal követően töltött részecskék hullámai érik el a Földet, megnövelve a Van Allen övezetben lévő, és a mágneses sarkok környezetében onnan kiszabaduló részecskék számát (a „mágneses palack" ott „ereszt"). A Van Allen övezet szerkezete olyan, hogy a legtöbb sarki fényjelenség a mágneses pólusokat körülvevő mintegy 2000 km-es átmérőjű tartományban képződik. A töltött részecskék a felső légkör gázmolekuláival ütközve az oxigén és nitrogén atomjait felvillanásokra késztetik. Ez okozza a sarki fénynek nevezett látványos fényjelenséget. A fénykép az ibolyántúli (elsősorban az atomos oxigéntől származó 130,4 nm hullámhosszúságú) fény eloszlását rögzíti; 12 perces expozíciós idővel készült az Iowai Egyetemen épített speciális műszerrel.



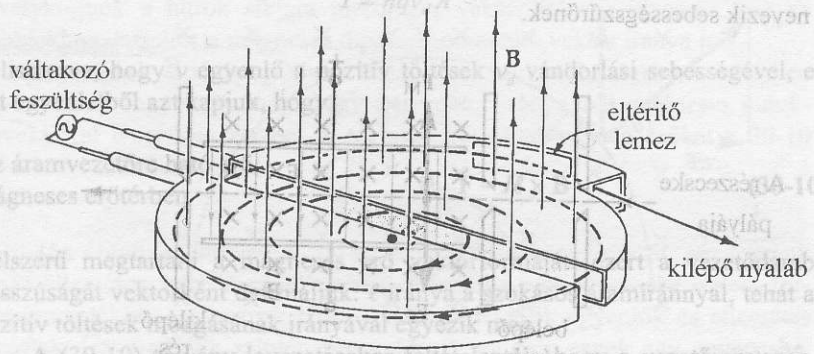
d) Sarki fény Alaszka felett.

30-7 ábra
Töltött részecskék a Föld körül.

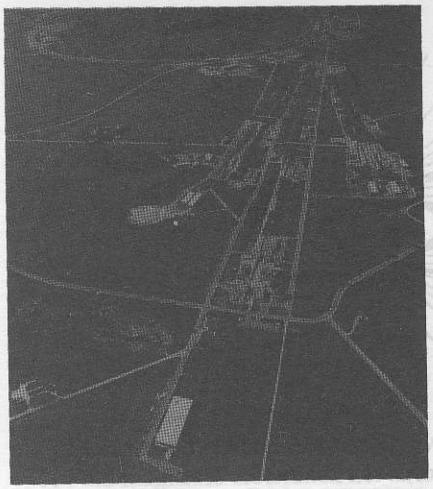
A ciklotron

1939-ben Earnest O. Lawrence kapta a fizikai Nobel díjat, mert (S.M.Livingstonnal együtt) kifejlesztette a ciklotront, amellyel töltött részecskék gyorsíthatók a magfizikai kísérletekhez szükséges nagy energiákra. A ciklotron legfontosabb alkatrésze két részre (szektorra) osztott, rézlemezből készült hengeres lapos doboz (30-8 ábra). A két szektor vákuumkamra légüres terében van, ahol a töltött részecskék a levegő molekuláival való ütközés nélkül mozoghatnak. A szektorok síkjukra merőleges irányú homogén mágneses erőtérben vannak. A két szektor közé váltakozó feszültséget kapcsolnak, ami a közöttük lévő hézagban minden félperiódusban irányt váltó elektromos erőteret létesít. A szektorok középpontjában elhelyezett ionforrás töltött részecskéket: protonokat, deuteronokat, α – részecskéket bocsát ki, kis sebességet adva ezeknek a szektorok síkjában. A réz-szektorokon belül, a fémfalak árnyékoló hatása miatt az ionokra elektrosztatikus erő nem hat. A mágneses erőteret viszont a réz nem árnyékolja, tehát az ionok körpályán haladnak. Képzeljünk el egy iont, amely akkor érkezik a szektorok közötti hézaghoz, amikor az ottani elektromos erőtér éppen maximális és olyan irányú, hogy az iont gyorsítsa. Ezután az ion, nagyobb sebessége miatt, nagyobb sugarú félkör-pályán mozog. Ha a feszültség előjele megfelelő ütemben változik, az ion a hézaghoz ismét akkor érkezik, amikor az elektromos térerősség megint maximális, de az előzőhöz képest ellentétes irányú, tehát az iont újra gyorsítja. Minden egyes alkalommal, amikor az ion átlépi a szektorok közötti hézagot, mozgási energiája nő, és emiatt mindaddig növekvő sugarú körpályán mozog, amíg meg nem közelíti a henger palástját. Itt egy negatív töltésű *eltérítő lemez* „kihúzza" az iont a körpályáról, és az egy szűk ablakon keresztül elhagyja a vákuumkamrát. A ciklotron működésének alapja az, hogy adott töltésű és tömegű ion minden egyes félkör-pályát azonos idő alatt fut be. A (30-6) képlet szerint a ciklotronfrekvencia független a részecske sebességétől és a pálya sugarától.

Az elérhető részecske-energiának a relativisztikus effektusok miatt felső határa van: ez protonok esetében kb. 22 millió elektronvolt (22 MeV). A részecskén az elektromos erőtér a hézag minden egyes átlépésekor munkát végez. Relativisztikus effektusok miatt nagy sebességeken a sebesség már nem nő elegendően ahhoz, hogy „lépést tartson" az elektromos erőtér előjelváltásaival. Ezt a problémát a *szinkrotronban* oldották meg oly módon, hogy mind a frekvencia, mind a mágneses tér intenzitása a gyorsítás ideje alatt úgy változik, hogy a részecske pályasugara nagyjából állandó maradjon. E módszer gazdaságossága abban nyilvánul meg, hogy csak a körpálya környezetében kell homogén mágneses erőteret létesíteni, nem pedig teljes körpályán.



30-8 ábra
A mágneses erőtér hatása következtében a töltések a ciklotron egyes szektoraiban félkör-pályán mozognak.



30-9 ábra
Az Enrico Fermi Nemzeti Gyorsító Laboratórium (Batavia, Illinois, USA) protonszinkrotonjának légifelvétele. A fő gyorsítógyűrű 2 km átmérőjű; 1 eV = 103 GeV = 106 MeV energiájú protonok lépnek ki belőle. A protonok a gyűrűből érintő irányban (a képen lefelé) távoznak a kísérletek konkrét helyéhez.

30-2 PÉLDA

Számítsuk ki a 0,020 T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtérben mozgó elektron ciklotronfrekvenciáját.

MEGOLDÁS

A (30-6) képletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{B}{2\pi}\left(\frac{q}{m}\right) = \frac{(2\times10^{-2}\,\mathrm{T})(1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C})}{2\pi(9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})} = 5{,}59\cdot10^{8}\,\mathrm{Hz}$$

30.4 A Lorentz-erő

Általában a töltött részecskék az elektromos és a mágneses erőtér hatását egyszerre tapasztalják. Minthogy az erőterektől származó erők vektorként adódnak össze, a töltésre ható eredő erő az alábbi módon írható:

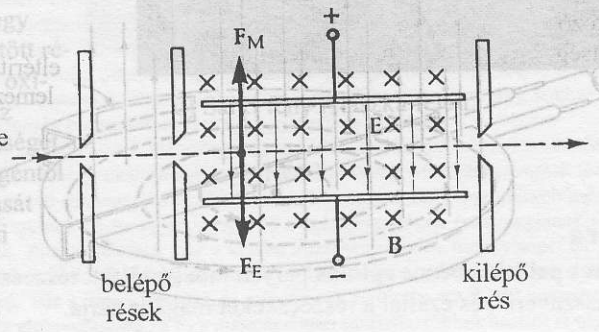
Lorentz-erő
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad (30\text{-}7)$$

ahol **F** a **v** sebességű q töltésre ható erő, amely az **E** elektromos térerősséggel és **B** mágneses fluxussűrűséggel jellemezhető. Ezt az összefüggést a **Lorentz-féle erőtörvénynek** nevezzük.

A Lorentz-féle erőtörvény felhasználható például arra, hogy töltött részecskéket sebesség szerint szétválasszunk (sebességszűrőt készítsünk). Tekintsünk egy m tömegű q töltést, amely v sebességgel halad egy rések (apertúrák) által megszabott egyenes pályán (30-10 ábra). A részecske akkor haladhat át a kilépő résen, ha a belépő rések és a kilépő rés közötti térben a rá ható erők eredője zérus. Ennek megvalósítására, ebben a tartományban az elektromos és mágneses erőteret úgy kell összehangolni, hogy a részecskére ható mágneses erő az elektromos erővel éppen egyenlő nagyságú és ellentétes irányú legyen. Pozitív töltések esetén az erők irányát a 30-10 ábra mutatja; negatív töltések esetében mindkét erő iránya éppen ellentétes. A 30-7 erőtörvény szerint $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$, tehát zérus eredő erő akkor hat a részecskére, ha $(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0$. Ez akkor teljesül, ha a vektorok nagyságára teljesül a

$$v = \frac{E}{B} \qquad (30\text{-}8)$$

feltétel. Csak azok a részecskék mozognak egyenes pályán (és lépnek ki a kilépő résen), amelyeknek éppen ekkora sebességük van. A berendezést ezért nevezik sebességszűrőnek.



30-10 ábra
A töltött részecskéket sebesség szerint szétválasztó *sebességszűrők*ben egymásra merőleges elektromos és mágneses erőteret alkalmaznak. Ha a mozgó részecskére ható $\mathbf{F}_M$ mágneses erő éppen kiegyenlíti az $\mathbf{F}_E$ elektromos erő hatását, a részecske egyenes vonal mentén mozog és képes a kilépő résen át távozni. Azok a részecskék, amelyek a kritikus sebességnél lassabban vagy gyorsabban mozognak, az egyenes pályáról letérnek.

30-3 PÉLDA

Egy elektronnyaláb sebességszűrőn halad át. Az egymásra merőleges mágneses és elektromos erőtér nagysága 2×10^{-2} T, illetve 5×10^{4} V/m. Számítsuk ki az elektronok mozgási energiáját (eV egységben).

MEGOLDÁS

A sebességet a (30-8) képlet alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{5\times10^{4}\,\mathrm{V/m}}{2\times10^{-2}\,\mathrm{T}} = 2{,}5\times10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A kapott számértékeket behelyettesítve, a kinetikus energia:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(2{,}5\times10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2$$

$$K = 2{,}85\times10^{-18}\,\mathrm{J}\underbrace{\left(\frac{1\,\mathrm{eV}}{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{J}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}} = 17{,}8\,\mathrm{eV}$$

30.5 A mágneses térben levő áramvezetőre ható erő

A legtöbb gyakorlati esetben, a töltések vezetőkben mozognak. Fémhuzalokban például, a töltések elektronok, amelyek v_d vándorlási sebességgel mozognak. A továbbiakban vizsgáljuk meg, mekkora erő hat ezekre a mozgó töltésekre, ha a vezető mágneses erőtérben van.

A (30-1) összefüggés az egyetlen töltésre ható erőt adja meg:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

Az ℓ hosszúságú huzalszakaszban lévő töltéshordozók száma a vezetési elektronok térfogategységenkénti számának (n), és a huzalszakasz $A\ell$ térfogatának szorzata. Így az ℓ hosszúságú huzalszakaszra ható erő:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})nA\ell \qquad \textbf{(30-9)}$$

A 28.3 egyenlet szerint az I áram

$$I = nqv_dA$$

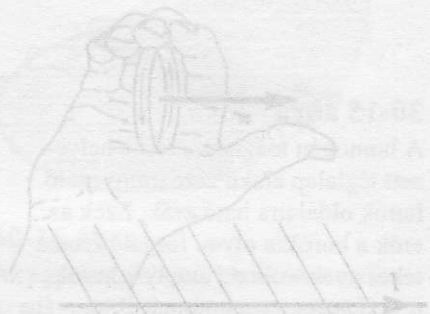
Felismerve, hogy v egyenlő a pozitív töltések v_d vándorlási sebességével, e két egyenletből azt kapjuk, hogy

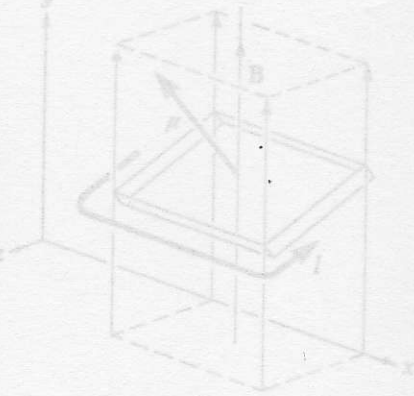
Az áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben

$$\mathbf{F} = I\ell\times\mathbf{B} \qquad \textbf{(30-10)}$$

Célszerű megtartani a mágneses erő vektorformáját: ezért a vezetődarab hosszúságát vektorként definiáljuk: ℓ iránya a szokásos áramiránnyal, tehát a pozitív töltések mozgásának irányával egyezik meg.

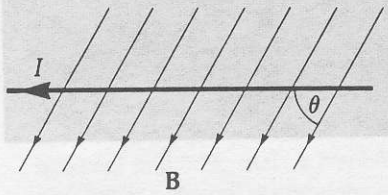
A (30-10) törvény levezetésekor feltételeztük, hogy a vezető egyenes, és a mágneses erőtér homogén. Ha a huzaldarab tetszőleges alakú, és a mág-





a) Perspektivikus kép

b) Oldalnézetből



30-11 ábra
A 30-4 példához.

neses indukció helyről helyre változik, akkor a huzal elemi kis $d\ell$ darabjára dF erő hat:

$$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \qquad (30\text{-}11)$$

Az eredő erőt úgy kapjuk meg, hogy minden egyes $d\ell$ elemhez a megfelelő **B** értéket használva, integráljuk a huzal teljes hossza mentén.

30-4 PÉLDA

Homogén, 3×10^{-3} T indukciójú mágneses erőtérbe helyezett egyenes huzalon 8A erősségű áram folyik. A mágneses erővonalak a huzallal $\theta = 48^0$-os szöget zárnak be (30-11 ábra). Mekkora erővel hat a mágneses erőtér az áramvezetőre?

MEGOLDÁS

A (30-10) képletet alkalmazva:

$$F = I\,|\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}| = I\ell B \sin\theta$$

Így

$$\frac{F}{\ell} = IB\sin\theta = (8\,\mathrm{A})(3\times10^{-3}\,\mathrm{T})(\sin 48^\circ)$$

$$\frac{F}{\ell} = 1{,}78\times10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

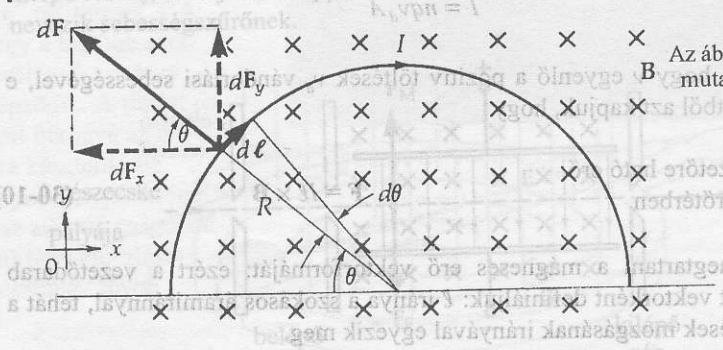
(Ez az ábra síkjából kifelé mutató irányú erő)

30-5 PÉLDA

A 30-12 ábrán illusztrált merev, R sugarú félkörben meghajlított huzalban I áram folyik. A homogén mágneses erőtér iránya a félkör síkjára merőleges. Az I áramot a félkörhöz az ábrán nem feltüntetett, az ábra síkjára merőleges huzalok vezetik. (Ezek tehát a homogén mágneses erőtér irányával párhuzamosak, és így rájuk mágneses erő nem hat.) Számítsuk ki a félkör alakú huzalra ható eredő erőt.

MEGOLDÁS

Minthogy a vezetők, amelyek a félkörhöz vezetik az áramot, párhuzamosak a mágneses térrel, az $\mathrm{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathrm{B}$ vektoriális szorzatban $\sin 0° = 0$ szerepel, tehát ezekre a vezetőkre zérus erő hat.



30-12 ábra
A 30-5 példához.

A dF erő, amely a félkör elemi $d\ell$ hosszúságú szakaszára hat, a 30-11 egyenlettel számítható: $d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$. Minthogy **B** a félkör minden pontjában merőleges $d\ell$-re, a dF erő minden pontban sugárirányú, kifelé mutat, és nagysága

$$dF = IBd\ell$$

A rendszer szimmetriája miatt, a félkör bal oldalának minden egyes $d\ell$ szakaszára ható dF erőhöz találunk egy, a rendszer jobb oldalán egy megfelelő szakaszra ható olyan másik erőt, amelynek x komponense egyenlő, de ellentétes előjelű, így összegük zérus. Az y komponensek viszont azonos irányúak. Tehát, az egész félkörre ható erők összegzését leegyszerűsíthetjük az erők y irányú komponensének összegzésére:

$$dF_y = IBR\sin\theta\, d\theta$$

Az integrálással azt kapjuk, hogy

$$F_y = \int dF_y = IBR\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = IBR(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = 2IBR \quad \text{(pozitív } y \text{ irányban)}$$

Megjegyzendő, hogy ez az erő éppen ugyanakkora, mint amekkora a félkör átmérőjével azonos hosszúságú egyenes vezetőre hatna, vagyis a huzal alakja ebből a szempontból nem lényeges. Ebben a példában azt mutattuk meg, hogy tetszés szerinti alakú, a mágneses térre merőleges síkban lévő huzaldarabra ható erő csak az árambevezetések közötti távolságtól függ. A példa alapján az a következtetés is levonható, hogy *a homogén mágneses térbe helyezett, tetszés szerinti alakú,* zárt áramvezető hurokra ható erő zérus (noha az egyes szegmensekre zérustól különböző erő hat, eredőjük zérus).

30.6 Mágneses dipólusok

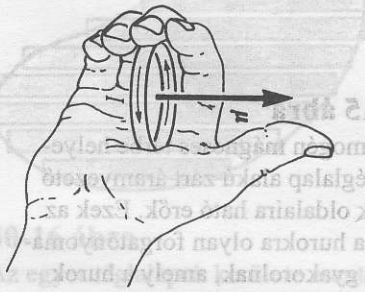
Noha a homogén mágneses erőtérbe helyezett áramvezető hurokra ható eredő erő zérus, a *forgatónyomaték* zérustól különbözik. A jelenség hasonlít a homogén elektromos erőtérbe helyezett elektromos dipólus esetére. Tulajdonképpen az analógia közöttük olyan közeli, hogy az áramvezető hurkot mágneses dipólusnak tekintjük.

A mágneses dipólus tárgyalását kezdjük egy, az áramvezető hurok síkjára merőleges vektor meghatározásával. Ezt a 30-13 ábrán illusztrált jobbkéz-szabállyal mutatjuk be: hajlítsuk be jobbkezünk ujjait a hurok mentén úgy, hogy az ujjaink az áramiránnyal azonos irányba mutassanak. Kinyújtott hüvelykujjunk a hurok síkjára merőleges vektor iránya; ugyanez lesz az alábbiakban definiált $\boldsymbol{\mu}$ mágneses dipólusmomentum vektor iránya is.

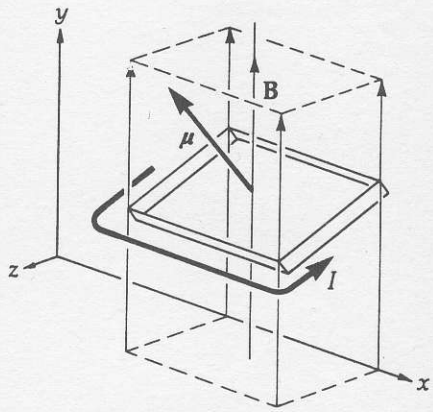
Képzeljünk el téglalap alakú áramvezető hurkot a mágneses erőtérben (30-14 ábra). Jegyezzük meg, hogy a $\boldsymbol{\mu}$ vektor iránya a **B** mágneses indukcióvektorral θ szöget zár be. A téglalap két oldalára ható erőket a 30-10 egyenlettel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

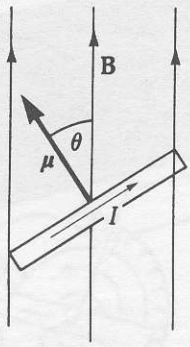
A 30-15a ábrán feltüntetett $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erők egyenlők egymással, ám irányuk éppen ellentétes, tehát eredőjük zérus. Minthogy egy egyenesbe esnek, forgatónyomatékot sem hoznak létre. Az $\mathbf{F}_3$ és $\mathbf{F}_4$ erők egyenlők és ellentétes irányúak, így eredőjük szintén zérus. Minthogy nem esnek egy egyenesbe, erőpárt képeznek (13-15b ábra) és így a (★)-gal jelölt tengely körül forgató-



30-13 ábra
Az áramvezető hurok síkjára merőleges μ vektor irányát a következő jobbkéz-szabállyal határozzuk meg: a behajlított ujjak az áram irányába mutatnak, a kinyújtott hüvelykujj μ irányát jelzi.

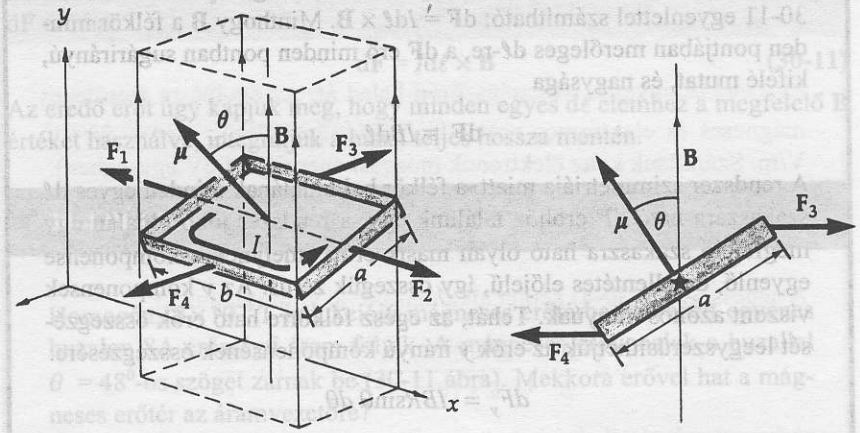


a) Perspektivikus kép



b) Oldalnézetből

30-14 ábra
Téglalap alakú áramvezető hurok, amely szöget zár be a homogén, függőleges irányú mágneses erőtérrel.



a) Perspektivikus kép b) Oldalnézetből

30-15 ábra
A homogén mágneses térbe helyezett téglalap alakú zárt áramvezető hurok oldalaira ható erők. Ezek az erők a hurokra olyan forgatónyomatékot gyakorolnak, amely a hurok μ mágneses momentumát **B** irányába igyekszik forgatni.

nyomaték jön létre. Ha **B** és a hurokra merőleges μ vektor közötti szög θ, a (★) tengelyre vonatkozó forgatónyomaték

$$M = F_3\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta + F_4\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta$$

Minthogy $F_3 = F_4$, $M = F_3 a \sin\theta$ (vagy $F_4 a \sin\theta$) **(30-12)**

Mivel a 3. és 4. oldalak **B** irányára merőlegesek, az $\mathbf{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ egyenletből

$$F_3 = IbB$$

Ezt az kifejezést a (30-12) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M = IabB\sin\theta \qquad \textbf{(30-13)}$$

Jelöljük az *ab* területet *A*-val. Az *IA* szorzatot a **μ mágneses dipólusmomentum** nagyságának nevezzük. μ irányát az előbbiekben a jobbkéz-szabállyal már definiáltuk. Az (*A* nagyságú) felület normálvektorát **A**-val jelölve:

A mágneses dipólusmomentum $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A}$ (μ irányát a jobbkéz-szabálynak megfelelően merőleges az *A* területű hurokra) **(30-14)**

N menetű hurkok (tekercsek) esetén: $\boldsymbol{\mu} = NI\mathbf{A}$

μ mértékegysége amper·m^2 (Am^2).

Vektor-jelöléseket alkalmazva a (30-13) egyenletet az alábbi alakba írhatjuk át:

A mágneses erőtérbe helyezett mágneses dipólusra ható forgatónyomaték: $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ **(30-15)**

Vegyük észre, hogy ez az összefüggés nagyon hasonlít az elektromos erőtérbe helyezett **p** elektromos dipólusra ható forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

kifejezésére, ahol **E** a térerősség.

Noha a fenti levezetésben téglalap alakú áramvezető hurkot tételeztünk fel, az eredmény tulajdonképpen bármilyen alakú sík hurokra érvényes, azaz

$$\mu = (I)\,(\text{a hurok által bezárt terület}) \qquad \textbf{(30-16)}$$

A 30-16 ábrán az e következtetés alapjául szolgáló példát illusztráltuk: Tetszés szerinti sík áramvezető hurok úgy tekinthető, mint egymáshoz illeszkedő téglalap alakú áramvezető hurkok együttese. (A téglalap alakú hurkok

együttese annál jobban megközelíti a teljes hurkot, minél nagyobb a téglalapok száma.) Az egyes téglalapok körül az áram az óramutatóval megegyező irányban folyik; így a szomszédos téglalapok egymással érintkező oldalán az áramok eredője zérus. Ily módon csak a hurok mentén folyó áram nem válik zérussá. A téglalap alakú áramvezető hurok esetére vonatkozó levezetést a fentiek alapján tetszés szerinti alakú sík hurok esetére általánosíthatjuk.

A mágneses erőtérbe helyezett áramvezető hurokra ható forgatónyomaték megjelenéséből az következik, hogy a huroknak a mágneses erőtérhez viszonyított helyzetétől függő potenciális energia rendelhető hozzá.. Hasonlóan az elektromos dipólus potenciális energiájának kiszámításakor (24.6 alpont) követett eljáráshoz, először a potenciális energia általános definícióját alkalmazzuk a hurok elfordulásának esetére:

$$U_\theta - U_{\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M}\cdot \mathrm{d}\theta$$

Minthogy θ az óramutató járásával ellentétes irányú forgatáskor növekszik (30-14b ábra), **M** és $\mathrm{d}\theta$ ellentétes irányúak. Ennélfogva, $\cos 180° = -1$ és

$$U_\theta - U_{\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M}\,\mathrm{d}\theta$$

M-nek a (30-13) és (30-14) összefüggéssel megadott kifejezését behelyettesítve, majd integrálva azt kapjuk, hogy

$$U_\theta - U_{\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \mu B\sin\theta\, d\theta = -\mu\beta(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Legyen a potenciális energia viszonyítási pontja $\theta = 90°$, amikor $U_{\theta_0} \equiv 0$. Ekkor a legutóbbi képlet

$$U = -\mu B\cos\theta \qquad \textbf{(30-17)}$$

alakú lesz ill. a skaláris szorzat definíciójának felhasználásával az alábbi alakot ölti:

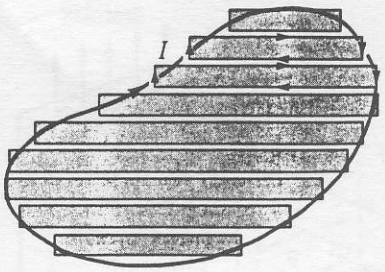
A mágneses dipólus U potenciális energiája mágneses térben ($U \equiv 0$, amikor $\boldsymbol{\mu}$ és **B** merőlegesek egymásra)

$$U = -(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) \qquad \textbf{(30-18)}$$

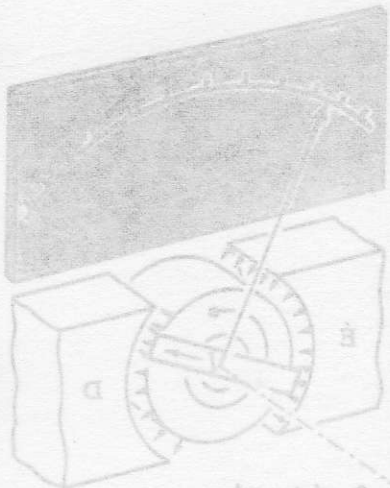
Vegyük észre, hogy a dipólus potenciális energiája akkor a legnagyobb, amikor $\boldsymbol{\mu}$ és **B** egymással ellentétes irányúak, és akkor a legkisebb, amikor azonos irányúak. (Az U zéruspontja e kettő között van, amikor $\boldsymbol{\mu}$ és **B** egymásra merőlegesek.) A (30-18) formula teljesen analóg az elektromos térbe helyezett elektromos dipólus potenciális energiáját megadó (24-19) képlettel:

$$U = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$$

Mivel a fizikai rendszerek olyan irányban változnak, hogy potenciális energiájuk minimális legyen, a mágneses dipólusok a mágneses erőtérrel párhuzamosan állnak be.



30-16 ábra
Az egyes téglalapok kerülete mentén, az óramutató járásával megegyező irányban folyó áramok eredője közelítőleg azonos a hurok mentén haladó I árammal. Ez azért van így, mert az áramerősségek a szomszédos téglalapok közös oldalán éppen ellentétes előjelűek, és összegük (végtelenül vékony téglalapok esetében a hurok belsejében mindenütt) zérus.



30-6 PÉLDA

Huzalból 10 cm átmérőjű kör alakú hurkot formálunk és 3×10^{-3} T fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezzük. A hurkon 5 A erősségű áram halad át. Számítsuk ki a) az áramvezető hurokra ható maximális

forgatónyomatékot és b) a potenciális energia legnagyobb és legkisebb értéke közötti különbséget.

MEGOLDÁS

Az áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát a (30-16) képletből számíthatjuk ki:

$$\mu = (I)\,(\text{a hurok által bezárt terület})$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$\mu = (5\ \text{A})\,(0{,}05\ \text{m})^2\pi = 3{,}93\cdot 10^{-2}\ \text{Am}^2$$

a) A homogén mágneses erőtérbe helyezett mágneses dipólusra ható forgatónyomatékot a (30-15) egyenlettel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Az **M** akkor a legnagyobb, amikor a mágneses indukcióvektor és a dipólusmomentum vektor egymásra merőleges, azaz, amikor a hurok síkja a mágneses erőtérrel éppen párhuzamos. Ilyenkor **M** nagysága

$$M = \mu B$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy:

$$M = (3{,}93\times 10^{-2}\ \text{Am}^2)(3\times 10^{-3}\ \text{T}) = 1{,}18\times 10^{-4}\ \text{Nm}$$

b) A mágneses térbe helyezett mágneses dipólus potenciális energiáját a (30-18) képletből számíthatjuk ki:

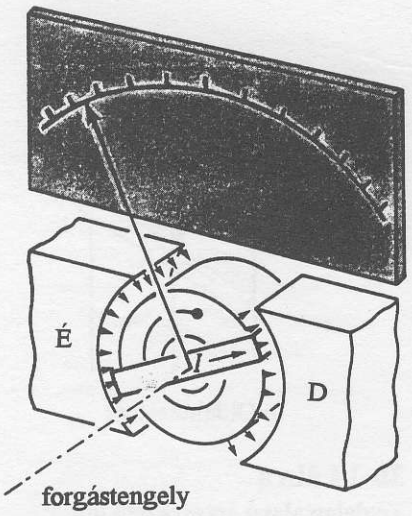
$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

A potenciális energia akkor a legnagyobb, ha a dipólusmomentum és a mágneses indukcióvektor egymással éppen ellentétes irányúak; akkor a legkisebb, amikor azonos irányúak. Különbségük:

$$\Delta U = U_{\max} - U_{\min} = -\mu B\cos\pi - (-\mu B\cos 0^\circ) = 2\mu B$$

μ és B tényleges értékét behelyettesítve:

$$\Delta U = 2(3{,}93\times 10^{-2}\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(3\times 10^{-3}\ \text{T}) = 2{,}36\times 10^{-4}\ \text{J}$$



30-17 ábra
A galvanométer felépítése.

30.7 Alkalmazások

Galvanométer

A 29. fejezetben tárgyaltuk a voltmérő és az ampermérő felépítését. Ezek legfontosabb eleme az érzékeny árammérő eszköz, a *galvanométer*. Az alábbiakban a galvanométer működésének alapelveit vizsgáljuk.

A galvanométer mágneses erőtérben mozgó áramvezető tekercset tartalmaz (30-17 ábra). A tekercs az álló tengely körül elfordulhat; a tekercshez az áramot a csapágyakon keresztül vezetékek szállítják. A tekercs egyik kivezetése spirálrugó, amely az áram bevezetésén kívül arra is szolgál, hogy a tekercsre, annak kitérésekor, megfelelő forgatónyomatékot gyakoroljon, és ezáltal a tekercset az egyensúlyi helyzetbe visszaállítsa. Ahogyan a hurok forog, a hurok oldalai mágneses erőtérben mozdulnak el, amely mindenütt konstans nagyságú és mindenütt merőleges a tekercs $\boldsymbol{\mu}$ mágneses dipólusmomentum vektorára. Ez azért van így, mert a tekercs, a speciális geometriájú mágnes pólusai és egy rögzített vashenger közötti vékony résben mozog

(30-17 ábra). Így a tekercsre ható forgatónyomaték csak az áramerősségtől és nem a tekercs pillanatnyi helyzetétől függ. A tekercs akkor kerül egyensúlyi helyzetbe, amikor a mágneses forgatónyomaték éppen ellentétesen egyenlő a rugó által kifejtett forgatónyomatékkal, mely utóbbi a Hooke-törvénnyel írható le:

$$M_{rugó} = -\kappa\theta$$

A tekercsre ható forgatónyomatékot a (30-15) képlet adja meg: $\mathbf{M}_{tekercs} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$. Minthogy $\boldsymbol{\mu}$ és $\mathbf{B}$ mindenütt merőlegesek egymásra,

$$M_{tekercs} = \mu B$$

A tekercs akkor van statikus egyensúlyban, amikor

$$M_{tekercs} = M_{rugó}$$

vagy

$$\kappa\theta = \mu B$$

Az elfordulás szögét az áramerősség függvényeként kifejezve:

$$\theta = \left(\frac{AB}{\kappa}\right) I \qquad \textbf{(30-19)}$$

ahol A a tekercs egy menete által körbezárt terület. Ha a tekercs N menetű, a hurok mágneses momentuma, tehát az elfordulás szöge is N-szeresére nő, vagyis:

$$\theta = \left(\frac{NAB}{\kappa}\right) I \qquad \textbf{(30-20)}$$

A θ szöget a tekercshez erősített mutató segítségével mérhetjük meg. *A tekercs kitérésének θ szöge egyenesen arányos a tekercsben folyó áram erősségével*, így a skála, amely előtt a mutató mozog, lineáris.

30-7 PÉLDA

Tipikus galvanométerre jellemző adatok és paraméterek a következők: a tekercs területe 1 cm^2, a menetek száma 100, a spirálrugó rugóállandója $3 \cdot 10^{-7}$ Nm/rad és 50 μA áramerősség idéz elő $\pi/2$ szögnyi kitérést (végkitérést). Számítsuk ki a mágneses erőtér fluxussűrűségét, melyben a tekercs mozog.

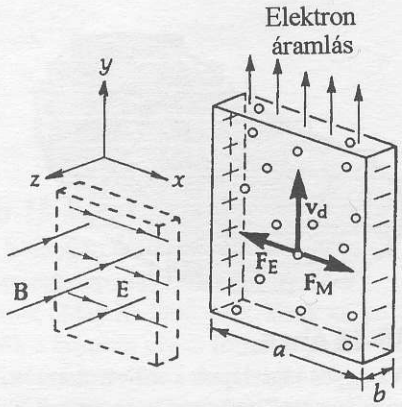
MEGOLDÁS

A (30-20) képlet alapján $\qquad B = \dfrac{\kappa\theta}{NAI}$

A megfelelő számértékeket (SI egységekben kifejezve) behelyettesítve

$$B = \frac{(3\times10^{-7}\,\text{Nm/rad})(\pi/2\,\text{rad})}{(100\,\text{menet})(10^{-4}\,\text{m}^2)(50\times10^{-6}\,\text{A/menet})} = 0{,}942\,\text{T}$$

Az érzékeny galvanométerek (mint a fenti adatokkal rendelkező is) nagyon finom eszközök, mert nagyon kicsiny az a forgatónyomaték, amit közönséges mágnesekkel és tekercsekkel el lehet érni. A forgást gyakran olyan drágakő csapágyak biztosítják, mint amilyeneket az órákba építenek be; a néhány menetű spirálrugó nagyon finom rugóacélból készült.



30-18 ábra
A Hall effektus. A *z* tengely negatív irányába mutató mágneses erőtér hatására az elektronok a vezető hasáb jobb oldallapja felé mozdulnak el, így az *x* tengely negatív irányába mutató elektromos erőtér keletkezik. Egyensúlyban az $\mathbf{F}_M$ mágneses erő ellenenkező előjellel egyenlő az $\mathbf{F}_E$ elektromos erővel.

A Hall-effektus

E. H. Hall 1879-ben a róla elnevezett effektust arra dolgozta ki, hogy vezető anyagok töltéshordozóinak előjelét megállapítsa; manapság ezt a hatást kiterjedten alkalmazzák áramerősség és mágneses erőtér mérésére. *Hall-effektusnak* nevezzük azt a potenciálkülönbséget, amely egy mágneses erőtérbe helyezett, áramvezető oldalai között jelenik meg. A potenciálkülönbség kialakulásának megértésére, tekintsünk egy ideális vezetőt, amelyben a töltéshordozók a szabad elektronok[5].

Tekintsünk egy téglalap keresztmetszetű ideális vezetőt, amelyet gondolatban **B** fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezünk (30-18 ábra). Egy elektronra $\mathbf{F}_M$ mágneses Lorentz-erő hat:

$$\mathbf{F}_M = (-e)\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}\,, \qquad \textbf{(30-21)}$$

ahol -e és $\mathbf{v}_d$ az elektron töltése, illetve vándorlási sebessége. Kezdetben, a mágneses erő következtében az elektronok a vezető jobb oldallapja felé vándorolnak; időközben a töltések felhalmozódása miatt a vezetőn belül egy **E** térerősségű elektromos tér alakul ki, ami a további oldalirányú töltésvándorlást megakadályozza. Egyensúlyban az $\mathbf{F}_E$ elektromos erő éppen kiegyenlíti az $\mathbf{F}_M$ mágneses erőt:

$$|\mathbf{F}_E| = |\mathbf{F}_M|\,.$$

A Lorentz-féle erőtörvényt alkalmazva, az erők egyensúlyban vannak, ha

$$eE = ev_dB$$

vagy

$$E = v_dB. \qquad \textbf{(30-22)}$$

A $\mathbf{v}_d$ vándorlási sebességet az áramerősségből és a vezetőre jellemző paraméterekből számíthatjuk, az áramerősség definíciója alapján:

$$I = nev_dA\,, \qquad \textbf{(30-23)}$$

ahol *n* a térfogategységre jutó töltéshordozók száma és *A* a vezető keresztmetszete, ebben az esetben $A = ab$. Behelyettesítve, és v_d -t kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$v_d = \frac{I}{neab}\,. \qquad \textbf{(30-24)}$$

A (30-22) képletbe történő további behelyettesítéssel az adódik, hogy

$$Ea = \frac{BI}{neb}\,. \qquad \textbf{(30-25)}$$

Az elektromos térerősség és a minta szélességének szorzata, $E\alpha$, a minta két oldala közötti *V* potenciálkülönbséggel egyenlő, melyet a továbbiakban Hall-feszültségnek nevezünk, és V_H-val jelölünk.

Hall-feszültség:

$$V_H = \frac{BI}{neb} \qquad \textbf{(30-26)}$$

Minthogy a Hall-feszültség a *BI* szorzattól függ, ha például ismerjük a mintán áthaladó áramerősséget, akkor meg tudjuk határozni *B* értékét a Hall-feszültség mérésével. A Hall-effektust mérő szondákat gyakran használjuk a mágneses tér erősségének mérésére. A Hall-effektus másik lényeges tulajdonsága az, hogy ha a töltéshordozók nem a negatív elektronok, hanem pozi-

[5] Az egyvegyértékű fémek, pl. a réz és az ezüst a Hall-effektus szempontjából majdnem ideális áramvezetőként viselkednek. A Hall-effektus tárgyalása mágneses anyagokban, mint pl. vasban, továbbá félvezetőkben kvantumeffektusok fellépése miatt bonyolultabb.

tív töltések, akkor a Hall-feszültség előjele, azonos irányú mágneses tér és áramerősség esetében ellentétes lesz. Így adott B fluxussűrűség esetén a Hall-effektus a töltéshordozók számának és előjelének meghatározására is alkalmazható.

30-8 PÉLDA

Tételezzük fel, hogy a 30-18 ábrán látható vezető rézből készült, és 0,5 T mágneses térben 10 A erősségű áram halad át rajta. A vezető d szélessége 1 cm, vastagsága 1 mm. Számítsuk ki a vezető két oldala között fellépő Hall-feszültséget.

MEGOLDÁS

A Hall-feszültség a (30-26) egyenlettel számítható ki:

$$V_H = \frac{BI}{neb}.$$

A réz sűrűsége $8{,}92\times10^{6}\ \mathrm{g/m^3}$, atomsúlya 63,546 g/mól. Feltételezve hogy atomonként egy elektron vesz részt a vezetésben, az egységnyi térfogatban a vezetési elektronok száma

$$n = \frac{\rho N_A}{(\text{atomsúly})},$$

ahol N_A az Avogadro szám ($6{,}022\times10^{23}$ atom/mol). A megfelelő értékeket behelyettesítve

$$n = \frac{\left(8{,}92\times10^{6}\ \frac{g}{\mathrm{m^3}}\right)\left(6{,}022\times10^{23}\ \frac{\text{elektron}}{\text{mól}}\right)}{\left(63{,}546\ \frac{g}{\text{mól}}\right)},$$

$$n = 8{,}45\times10^{28}\ \frac{\text{elektron}}{\mathrm{m^3}}.$$

Ezt és a többi számértéket a (30-26) képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$V_H = \frac{BI}{neb} = \frac{(0{,}5\,\mathrm{T})(10\,\mathrm{A})}{\left(8{,}45\times10^{28}\ \frac{\text{elektron}}{\mathrm{m^3}}\right)\left(1{,}6022\times10^{-19}\ \frac{\mathrm{C}}{\text{elektron}}\right)\left(1\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)}$$

$$V_H = 3{,}69\times10^{-7}\ \mathrm{V}$$

A Hall-feszültség tehát igen kicsiny a fémes vezetők esetében; félvezetőknél a fenti értéknél sokkal nagyobb [vö. a (30-26) képlettel; félvezetőkben n sokkal kisebb, mint fémekben.] Ez az oka annak, hogy a Hall effektuson alapuló mágneses erőtér mérésénél a szondák félvezetőkből készíthetők.

A Hall-effektus elemzésével a mágneses erőtérbe helyezett vezetőre ható erő világosabban érthető: A vezetőre tulajdonképpen a Hall-térerősségtől származó erő hat. Vegyük észre, hogy a 30-18 ábrán a mozgó töltésre ható eredő oldalirányú erő zérus:

$$\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_M = 0$$

Az $\mathbf{F}_M$ mágneses erőt a külső mágneses tér hozza létre, míg az $\mathbf{F}_E$ elektromos erő a Hall effektus következtében a vezető belsejében keletkezik. A vezetőre ható erő (Newton 3. törvénye következményeként) ellentétesen egyenlő a töltéshordozókra ható elektromos erővel. Tehát az áramot vezető anyagra ható mágneses erő tulajdonképpen olyan tulajdonságú, mint az elektromos erő.

Lineáris tömegspektrométer

A töltött részecskéket tömeg/töltés hányadosuk (q/m) szerint, a 30-19 ábrán bemutatott berendezéssel szét lehet válogatni. Az elemezni kívánt anyagmintát olyan magas hőmérsékletűre hevítjük, hogy elpárologjon. A keletkezett gőz egy erre alkalmas egységben ionizálódik. Innen az ionok viszonylag kis sebességgel jutnak ki, majd meghatározott feszültség hatására egy rés felé haladva felgyorsulnak. A réshez lényegében azonos irányú sebességgel érkeznek. A rés arra szolgál, hogy az oda érkező részecskéknek csak keskeny, nagyjából párhuzamos nyalábját engedje be a rés utáni mágneses térbe. A nyaláb azonban mégsem tökéletesen párhuzamos, a részecskék sebességének van az x tengely pozitív irányára merőleges komponense is. A rés után a részecskék longitudinális (x irányú) mágneses erőtérbe lépnek be, aminek hatására spirális pályán mozognak. Minthogy az azonos q/m mennyiséggel jellemezhető részecskék ciklotron-frekvenciája ugyanakkora, az összes ilyen részecske a spirálison megtett teljes fordulat után a tengely ugyanazon a pontján halad át. (Feltéve, hogy x irányú sebességkomponensük pontosan ugyanakkora).

Fejezzük ki a q/m hányadost a többi paraméter függvényében. A rést elhagyó részecskék v_x sebességét a mozgási és elektromos energiák egyenlőségét kifejező egyenletből kaphatjuk meg:

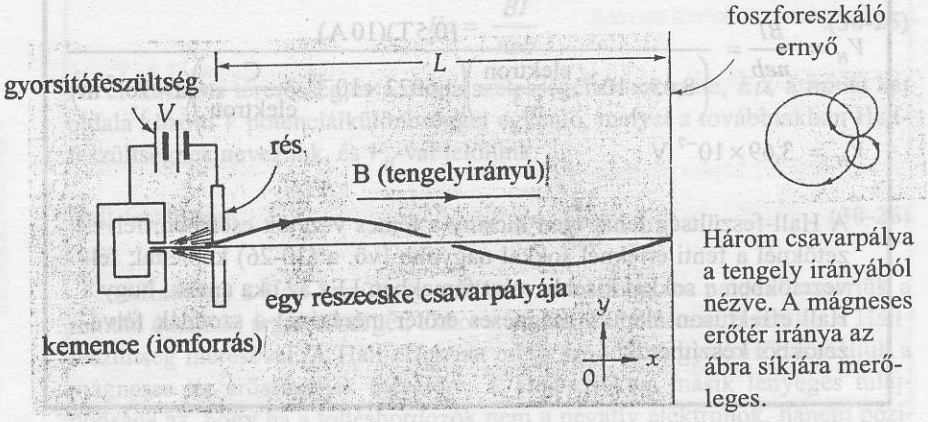
$$qV = \frac{1}{2}mv_x^2 .$$

v_x^2 -et kifejezve azt kapjuk, hogy

$$v_x^2 = 2V\left(\frac{q}{m}\right). \qquad \textbf{(30-27)}$$

A v_x -re vonatkozó másik összefüggés:

$$v_x = \frac{L}{T},$$



Három csavarpálya a tengely irányából nézve. A mágneses erőtér iránya az ábra síkjára merőleges.

30-19 ábra

A lineáris tömegspektrométer. Az összes, azonos q/m hányadossal jellemezhető töltött részecske azonos ciklotron-frekvenciával csavarpályán mozog; így pályájuk egy periódus után a spektrométer tengelyén lévő pontban keresztezi egymást.

ahol T az az idő, amely alatt a részecske a spirális pályán egy fordulatot végez. T egyenlő a részecske (30-6) egyenlet által megadott ciklotron-frekvenciájának reciprokával:

$$f = \frac{1}{2\pi} B\left(\frac{q}{m}\right).$$

Innen

$$v_x = \frac{1}{2\pi} BL\left(\frac{q}{m}\right).$$

Ezt a kifejezést a (30-27) képletbe behelyettesítve, és onnan a q/m hányadost kifejezve a (30-28) képletet kapjuk

$$\frac{q}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 L^2}. \qquad \textbf{(30-28)}$$

A q/m hányados gyakorlati meghatározásának egyik lehetséges módja az, hogy a tengely egy pontjára kisméretű, a részecskék érkezését detektáló szerkezetet helyezünk és a V gyorsítófeszültséget addig változtatjuk, amíg maximális számú részecskét nem detektálunk. A q/m hányados ezután a (30-28) egyenlettel számítható.

30-9 PÉLDA

Az elektronmikroszkóp elektronnyalábbal fényképezőlemezre képezi le a vizsgált objektumot. Az elektronnyalábot mágneses tér fókuszálja. (Hasonlóan ahhoz, mint ahogyan a lineáris tömegspektrométerben az ionok pályája egy ponton halad át.) a) Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűség minimális értékét, ami ahhoz szükséges, hogy a 10 keV-os elektronok „fókuszpontja" az elektronforrástól 10 cm-nyire legyen. b) Számítsuk ki, hogy még milyen más mágneses fluxussűrűségeknél lesz ugyanitt a fókuszpont.

MEGOLDÁS

a) Az elektronsugarak fókuszálása és a lineáris tömegspektrométerben az ionok pályájának kiszámítása analóg problémák. Ennélfogva alkalmazható a (30-28) összefüggés:

$$\frac{q}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 L^2}$$

A mágneses indukcióvektor nagyságát kifejezve:

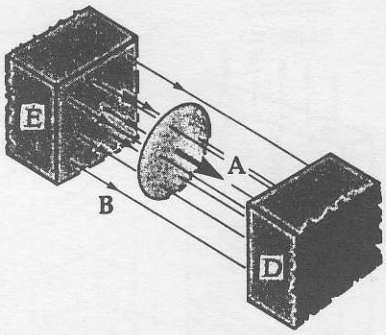
$$B = \frac{\pi}{L}\left(\frac{8Vm}{q}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{0{,}1\,\mathrm{m}}\left[\frac{(8)(10^4\,\mathrm{V})(9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C})}\right]^{1/2}$$

$$B = 2{,}12\times10^{-2}\,\mathrm{T}$$

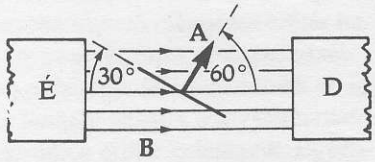
b) Ez a minimális nagyságú mágneses indukcióvektor, aminél az elektronok egyet fordulnak a csavarpályán. Ha B nagyságát megkétszereznénk, ugyanakkora L hosszúságot befutva az elektron a spirálison két menetnyit fordulna, és ugyanabban a pontban fókuszálódna. Tehát akkor is ugyanebbe a pontba fókuszálódna, ha a mágneses indukcióvektor nagysága

$$B = 4{,}24\times10^{-2}\,\mathrm{T}$$

lenne.



a) A hurok síkja merőleges az erővonalakra.



b) A hurok síkja 30°-os szöget zár be az erővonalakkal. Következésképpen a felület **A** vektora és **B** 60°-os szöget zárnak be egymással.

30-20 ábra
A 30-10 példához.

30.8 A Φ_B mágneses fluxus

Az elektromos erőtér tárgyalásakor a 25.2 fejezetben a Φ_E elektromos fluxust az adott A felületen áthaladó elektromos térerősségvonalak számával definiáltuk:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Az elektromos fluxus definíciójával teljesen analóg módon definiáljuk a Φ_B mágneses fluxust:

A Φ_B mágneses fluxus: $$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \qquad \textbf{(30-29)}$$

ahol d**A** egy (irányított) felületelem; az integrálást a teljes A felületre kell elvégezni. A mágneses fluxus SI egysége az 1 tesla·méter^2 (Tm^2), amelyet régebben 1 webernek is neveztek[6]. Ha A, a **B** homogén mágneses erőtérben lévő sík felület felszíne, akkor a fluxus kifejezése egyszerűen:

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA\cos\theta$$

ahol θ a sík **A** normálvektora és **B** által bezárt szög.

30-10 PÉLDA

Egy 3 cm sugarú, kör alakú vezető hurok a síkjára merőleges **B** = $2 \cdot 10^{-3}$ T mágneses indukcióvektorú mágneses erőtérben van. a) Számítsuk ki a Φ_B mágneses fluxust a hurok felületére. b) Számítsuk ki a mágneses fluxust, ha a hurkot megdöntjük úgy, hogy síkja 30°-os szöget zárjon be a mágneses tér irányával.

MEGOLDÁS

a) Miként az a 30-20 ábrán látható, a felület **A** vektora párhuzamos a homogén mágneses tér **B** vektorával. A (30-29) képlet így leegyszerűsödik, tehát

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA\cos\theta$$
$$= (2\times10^{-3}\ \text{T})(\pi)(0{,}03)^2(1) = 5{,}65\times10^{-6}\ \text{Wb}$$

b) Ha a hurok síkja és a tér iránya 30°-os szöget zárnak be egymással, az **A** vektor (amely a felületre merőleges) 60°-os szöget zár be **B**-vel. Ennélfogva:

$$\Phi_B = BA\cos\theta = (2\times10^{-3}\text{T})(\pi)(0{,}03)^2(\cos 60°) = 2{,}83\times10^{-6}\ \text{Wb}$$

[6] Ezt az egységet Wilhelm Weber (1814-1891) német fizikus tiszteletére nevezték el. Weber a mágnesesség elméletével és azzal kapcsolatos kísérletekkel foglalkozott. A *weber* egység régebbi, mint a *tesla*; ennélfogva számos helyen a mágneses fluxussűrűséget tesla helyett *weber/m*^{2} egységben adják meg.

30.9 Néhány megjegyzés a mértékegységekről

Az elektromosság és mágnesség tárgyalása és a feladatok megoldása során nehézséget okoz az, hogy egyes mennyiségeknek speciális (múlt századi, vagy még régebbi tudósok nevéből származó) nevük van; az ilyen név elfedi, hogy az illető egység az alapegységek (méter, kilogramm, másodperc és coulomb) milyen kombinációja, emiatt az egységek összhangját nehézkes ellenőrizni. Tovább nehezíti ezt, hogy ugyanazt a mértékegységet több különböző, a konkrét problémától függő módon lehet megadni. Ennek illusztrálására egy (korántsem teljes) listát készítettünk az elektromos és mágneses erőterek térerősségét jellemző **E** és **B** mennyiségekről:

E elektromos térerősség

$$\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]=\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]=\left[\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{s}}\right]$$

B mágneses indukcióvektor

$$[\mathrm{T}]=\left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}\right]=\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}\right]=\left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{Cm}}\right]=$$

$$=\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\right]=\left[\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{m}^2}\right]=\left[\frac{\mathrm{WH}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

(H a *henry* rövidítése. A következő fejezetben definiáljuk.)

A mértékegységek eme változatossága miatt ismételten hangsúlyozzuk, hogy mindig győződjünk meg arról, hogy az összes számértéket SI egységben helyettesítjük-e be az egyenletekbe. Ekkor ugyanis a mértékegységek különösebb ellenőrzése nélkül is bízhatunk abban, hogy a számítások során kapott mennyiség is SI mértékegységű, amit már a céljainknak legjobban megfelelő alakban adhatunk meg.

Összefoglalás

A **B** mágneses indukcióvektort vagy mágneses fluxussűrűséget az alábbi összefüggésből származtatjuk:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ahol **F** a mágneses erőtérben **v** sebességgel haladó q töltésre ható erő. **B** egysége az 1 tesla [T].

A *Lorentz-féle erőtörvény* az egyidejűleg létező **E** térerősség és **B** mágneses indukcióvektor álltal a töltésre ható erőt adja meg:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Mágneses erőtérben az ℓ hosszúságú áramvezetőre ható erő:

$$\mathbf{F} = I(\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

A $d\ell$ hosszúságú áramvezetőre ható erő:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

Az A felületű áramvezető hurok *mágneses dipólusmomentuma*:

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} \quad (\mathrm{Am}^2 \text{ egységekben})$$

ahol $\boldsymbol{\mu}$ iránya a jobbkéz-szabállyal állapítandó meg: ha a jobbkéz ujjai az áramirányba hajlanak, akkor a kinyújtott hüvelykujj $\boldsymbol{\mu}$ irányába mutat. Az **A** felületvektor a hurok síkjára merőleges.

Mágneses erőtérben a mágneses dipólusra ható **M** forgatónyomatékot az alábbi egyenlet adja meg:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Megjegyzendő az elektromos dipólussal mutatkozó hasonlóság.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomaték ugyanis:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

A mágneses erőtérben lévő mágneses dipólus U potenciális energiája:

$$U = -(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$$

(ahol $U \equiv 0$, ha $\boldsymbol{\mu}$ és **B** merőlegesek egymásra)

Az elektromos dipólus potenciális energiája hasonlóképpen: $U = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$

A Φ_B mágneses fluxust az alábbi módon definiáljuk:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \quad (\mathrm{Tm}^2 \text{ egységekben})$$

Megjegyzendő az elektromos tér esetével mutatkozó hasonlóság; az elektromos fluxus: $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

Kérdések

1. Az $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ összefüggésben szereplő vektorok közül mely párok merőlegesek szükségszerűen egymásra és melyek nem?
2. Az oszcilloszkópok fő alkatrésze a katódsugárcső, amelynek egyik végén elektronok lépnek ki a katódból, végighaladnak a csövön, majd ernyőbe ütköznek, ahol fényfolt keletkezik. A csövet különböző irányokba forgatva és a fényfoltot figyelve, hogyan lehetne elektromos és mágneses erőterek jelenlétére következtetni? Hogyan lehetne megkülönböztetni őket?
3. Egy elektron a mágnes pólusai között halad át és eközben impulzusmomentuma megváltozik. Honnan származik az az erő, amely az impulzusmomentum megváltoztatásához szükséges?
4. A *ködkamra* túltelített vízgőzt tartalmazó tartály. Ha a ködkamrán töltött részecske halad át, akkor pályája mentén ionok sorozatát kelti, amelyek kicsi vízcseppek keletkezését segítik elő; így a részecske pályája láthatóvá válik. A kamrát gyakran homogén mágneses térben helyezik el, így a részecske töltésének előjele, valamint energiája meghatározható. Az elektronok pályája gyakran körpálya helyett spirális. Vajon miért?
5. Csak egyszerű eszközöket alkalmazva, hogyan könnyebb egy elektronnyalábot eltéríteni: elektromos vagy mágneses erőtérrel?
6. Elektromos erőtérben mozgó töltött részecske sebességének nagysága vagy megváltozik, vagy nem, míg a mágneses erőtérben mozgó töltött részecskéé sohasem. Miért?
7. Egy elektron, amelynek mozgási energiája nagyobb, mint a nyugalmi energiája, mágneses térben körpályán mozog. Vajon a pályasugár nagyobb-e vagy kisebb-e annál, mint amit a nemrelativisztikus egyenletekkel kiszámíthatunk? Miért? (Lásd még a 41. fejezetet is.)
8. Egy áramvezető hurok az asztal lapján fekszik. Hirtelen függőleges irányú mágneses erőtér alakul ki a hurok környezetében. Hogyan változnak meg a hurokra ható külső erők?
9. A definíció szerinti áramirány egy vezetőben az elektronok mozgásával ellentétes. Vajon ugyanakkora-e a vezetőre ható mágneses erő, ha elektronáramlást, azaz áramirányba folyó áramot vagy a kettő valamilyen kombinációját tételezzük fel?
10. Mágneses dipólust a mágneses erőtér egy bizonyos irányba állít be; így a dipólus az erőtérben egyensúlyban van. A munka, amely a dipólus megfordításához szükséges, $2\mu B$. Függ-e ez a munka a dipólus kezdeti irányától?
11. Mágneses dipólus mágneses momentuma a mágneses erőtérrel ellentétes irányú. Hat-e forgatónyomaték a dipólusra? Vajon a dipólus stabil vagy instabil egyensúlyban van-e, avagy egyáltalán nincs is statikus egyensúlyban?
12. Az elektromos térerősség pontos méréséhez tetszőleges töltésre ható (rendszerint igen kicsiny) erő mérését kell megoldani. A mágneses erőtér intenzitásának pontos mérését vajon kicsiny mágneses dipólusra ható forgatónyomaték mérésével kell megoldani?
13. Az *n* típusú félvezetőkben a többségi töltéshordozók az elektronok, míg a *p* típusú félvezetőkben az áram pozitív töltésként viselkedő lyukak mozgásával terjed. Hogyan lehet a Hall effektus segítségével eldönteni, hogy egy félvezető *n* vagy *p* típusú?
14. Hogyan lehet iránytűt szerkeszteni vas vagy más mágneses anyag felhasználása nélkül?
15. A galvanométert ismerve, hogyan lehet villanymotort tervezni?
16. Miért előnyös az, ha a galvanométer forgótekercsének a huzala igen sok menetből áll?
17. Az ionizált atomok vizsgálatára tervezett lineáris tömegspektrométert miért nem lehet elektronok illetve negatív töltésű ionok analizálására használni?
18. Miért nagyobb a Hall-feszültség félvezetők, mint vezetők esetében?
19. Meg lehet-e mérni a töltéshordozók vándorlási sebességét a Hall-effektus alkalmazásával? Ha igen, hogyan?
20. Miért kevés a mágneses fluxus jellemzésére egyetlen (*weber* egységben megadott) szám? A Φ_B mágneses fluxus miért nem vektormennyiség?
21. Ha megfeszített tekercsrugón áram halad át, a rugó által kifejtett erő nő, csökken, vagy változatlan marad? Miért?
22. A párhuzamos áramvezetők kölcsönösen hatnak egymásra. Hogyan hatnak egymásra az egymásra merőleges vezetők?

Feladatok

30.2 A mágneses erőtér

30A-1 A Föld mágneses erőterének vízszintes komponense valamely pontban északi irányú, nagysága 30 μT. Egy elektron akkora sebességgel mozog nyugati irányban, hogy a rá ható mágneses erő éppen kiegyenlíti a gravitációs erőt. Számítsuk ki az elektron sebességét. (A válaszból kiderül, miért nehéz az elektron súlyát leméri.)

30B-2 Adott időpillanatban q töltésű részecske a $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}}$ fluxussűrűségű mágneses erőtérben $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}}$ sebességgel halad. Határozzuk meg, hogy mekkora és milyen irányú erő hat a részecskére.

30B-3 Egy elektron mágneses térben 3×10^6 m/s sebességgel halad az x tengely mentén, pozitív x irányban. Számít-

suk ki az elektronra ható erőt, ha a mágneses fluxussűrűséget tesla egységekben a $\mathbf{B} = 0{,}4\hat{\mathbf{x}} + 0{,}7\hat{\mathbf{y}} + 0{,}3\hat{\mathbf{z}}$ összefüggés adja meg.

30.3 Töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben

30A-4 A ^{14}C atommag bomlásakor keletkező 0,15 MeV energiájú β-részecske (elektron) a mozgás irányára merőleges 0,04 T fluxussűrűségű mágneses erőtérbe lép be. Számítsuk ki a részecske pályájának görbületi sugarát.

30A-5 Egy proton 0,5T fluxussűrűségű mágneses erőtérben 1,00 cm sugarú körpályán mozog. Mekkora a kinetikus energiája (eV egységekben kifejezve)?

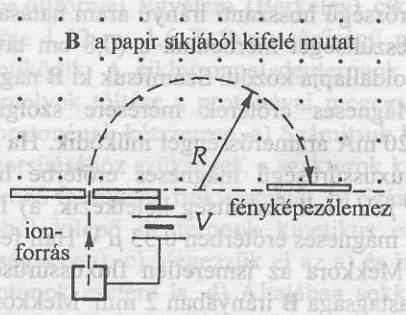
30A-6 A ^{238}U atommag bomlásakor keletkező 4,2 MeV energiájú alfa-részecske (két protonból és két neutronból álló hélium-atommag) a mozgás irányára merőleges 0,04T fluxussűrűségű mágneses erőtérbe lép be. Számítsuk ki a részecske pályájának görbületi sugarát.

30A-7 A magnetron a radar-oszcillátorok egy típusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállításához.

30B-8 Egy 1,5 keV energiájú elektron **B** fluxussűrűségű homogén mágneses erőtérben 1 cm sugarú körpályán mozog. a) Számítsuk ki **B** nagyságát. b) Egy proton ugyanebben a mágneses térben ugyanúgy 1cm sugarú körpályán mozog. Számítsuk ki a proton energiáját (eV egységekben).

30B-9 Az m_e tömegű, $-e$ töltésű elektron, az $1836m_e$ tömegű, $+e$ töltésű proton, valamint egy $4 \cdot 1836m_e$ tömegű, $+2e$ töltésű alfa-részecske homogén mágneses térben körpályán mozognak; mozgási energiájuk azonos. Fejezzük ki a proton és az alfa-részecske pályasugarát az elektron pályája R sugarának függvényeként.

30B-10 A 30-21 ábrán bemutatott tömegspektrométerben egyszeresen ionizált, 6 és 7 atomtömegű ($6 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$, illetve $7 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg) lítium ionokat 900V feszültség gyorsít, mielőtt belépnek a $B = 0{,}04$T fluxussűrűségű homogén mágneses térbe. Itt egy félkört megtéve fényképezőlemezbe csapódnak, és egymástól x távolságra lévő két foltot idéznek elő. Mekkora ez az x távolság?



30-21 ábra
A 30B-10 és a 30B-11 feladatokhoz

30B-11 A tömegspektrométerek egy típusában (30-21 ábra) m tömegű, q töltésű töltött részecskék nyugalmi helyzetből V feszültség hatására gyorsulnak; majd az ábra síkjára merőleges homogén mágneses erőtérbe lépnek be. Newton második törvényéből kiindulva vezessük le a részecskék R pályasugarát m, q, V és B fluxussűrűség függvényeként.

30B-12 Egy 2 keV energiájú elektron a Föld 50 μT fluxussűrűségű mágneses terében körpályán mozog. a) Számítsuk ki a pályasugarat. b) Számítsuk ki, mennyi idő alatt tesz meg az elektron egy teljes kört. c) Mutassuk meg, hogy a b) kérdésre adott válasz a részecske ciklotron-frekvenciájának megfelelő periódusidő.

30.4 A Lorentz-erő

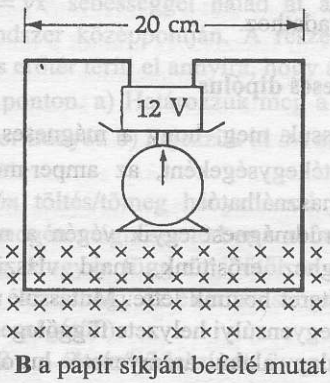
30A-13 Egy sebességszűrőben (az elektronokat sebességük szerint szétválasztó eszközben) $1{,}4 \times 10^4$ V/m elektromos és erre merőleges 18 mT fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmaznak. Számítsuk ki a szűrőn áthaladó elektronok sebességét.

30B-14 Az Egyenlítőnél, a földfelszín közelében a mágneses fluxussűrűség iránya északi, nagysága kb. 50 μT; az elektromos térerősség iránya lefelé mutat, nagysága kb. 100 N/C. Számítsuk ki, hogy ebben a pontban egy 100 eV-os, kelet felé egyenes vonalban haladó elektronra mekkora gravitációs, elektromos és mágneses erők hatnak.

30B-15 Egy sebességszűrőben alkalmazott elektromos és mágneses erőteret az alábbi egyenletekkel adhatjuk meg: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$, ill. $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}$. Ha $B = 0{,}015$ T, számítsuk ki, mekkora E térerősséget kell alkalmazni, hogy az x tengely pozitív irányában haladó 750 eV energiájú elektron pályája egyenes maradjon.

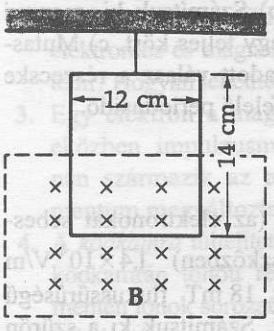
30.5 Az áramvezetőre ható erő a mágneses térben

30A-16 Egy 12 V-os telepet mérlegre helyezünk; a telep pólusaihoz téglalap alakú dróthurkot erősítünk úgy, hogy a téglalap alsó része $B = 0{,}10$ T fluxussűrűségű mágneses téren haladjon át (30-22 ábra). A telep és a hurok együttes tömege 100 g. Mekkora legyen a huzal ellenállása, hogy a mérleg éppen zérust mutasson? Melyik a telep pozitív pólusa?



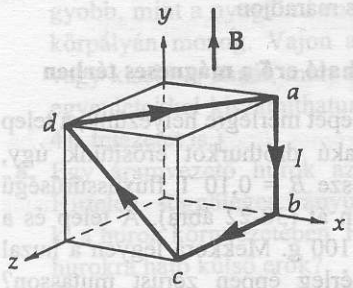
30-22 ábra
A 30A-16 feladathoz.

30B-17 Téglalap alakú, 0,200 N súlyú áramvezető hurok úgy van felfüggesztve, hogy a 30-23 ábrán vázolt módon félmagasságig vízszintes irányú, **B** indukcióvektorú homogén mágneses térbe merül. Ha 2 A erősségű áram folyik a hurkon keresztül, a felfüggesztő zsinórra 0,370 N erő hat. a) Milyen irányú a hurokban az áram? b) Számítsuk ki **B** nagyságát.



30-23 ábra
A 30A-17 feladathoz.

30B-18 A 30-24 ábrán bemutatott kocka 40 cm élhosszúságú. A négy egyenes szakaszból (*ab,bc,cd* és *da*) álló dróthurkon $I = 5$ A erősségű áram folyik. Az y tengely pozitív irányában $B = 0{,}02$ T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.



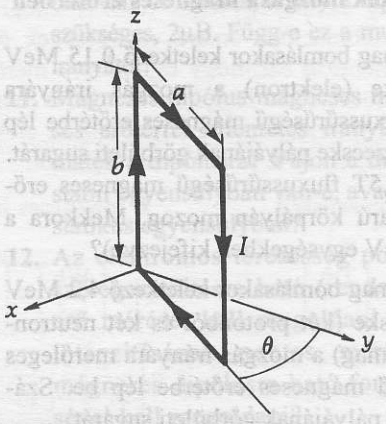
30-24 ábra
A 30B-18 feladathoz.

30.6 A mágneses dipólus

30A-19 Mutassuk meg, hogy a mágneses dipólusmomentum mértékegységeként, az amper·méter^2 helyett joule/tesla is használható.

30B-20 Egy rúdmágnest egyik végén a mennyezetről lelógó zsineghez erősítünk, majd vízszintes irányú mágneses erőteret hozunk létre. Mutassuk meg, hogy a zsineg végső egyensúlyi helyzete függőleges.

30B-21 Téglalap alakú áramvezető hurok mágneses erőtérben a 30-25 ábrán vázolt módon helyezkedik el. A $\mathbf{B} = 0{,}15\hat{\mathbf{x}}$ fluxussűrűségű (tesla egységben megadott nagyságú) mágneses erőtér a hurokra forgatónyomatékot gyakorol. Mekkora a forgatónyomaték, ha $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $\theta = 30°$ és $I = 2$ A.



30-25 ábra
A 30A-21, 30B-22 és 30B-23 feladatokhoz.

30B-22 Számítsuk ki a 30B-21 feladatban szereplő áramvezető hurok potenciális energiáját.

30B-23 Számítsuk ki a 30-25 ábrán vázolt áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát.

30.7 Alkalmazások

30A-24 Egy 4 cm széles, 0,1 mm vékony ezüstből készült szalagon 5 A erősségű áram halad át. A szalag síkjára merőlegesen 0,15 T fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmazunk. Számítsuk ki a szalag szélei között kialakuló Hall-feszültség nagyságát. Tételezzük fel, hogy minden egyes ezüstatom átlagosan egy elektronnal járul hozzá a vezetéshez. Az ezüst sűrűsége 10,5 g/cm^3, atomsúlya 107,87 g/mol.

30A-25 Egy galvanométer végkitéréséhez 50 μA erősségű áram szükséges. Hányszorosára kell a galvanométer forgórészében lévő rugó κ rugóállandóját változtatni, hogy 10 μA erősségű áram idézzen elő végkitérést?

30A-26 Egy Hall-szonda 10^{-20}/m^3 töltéshordozó-sűrűségű félvezetőből készült. A szonda 0,8 cm széles, 0,4 mm vastag és 1 cm hosszú. Ha a szondát (megfelelő irányban) **B** fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezzük, 0,9 mA erősségű hosszanti irányú áram hatására 4 mV-os Hall-feszültséget mérhetünk a (0,8 cm távolságban lévő) két oldallapja között. Számítsuk ki **B** nagyságát.

30B-27 Mágneses erőterek mérésére szolgáló Hall-szonda 120 mA áramerősséggel működik. Ha a szondát 0,08 T fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezzük, akkor 0,7 μV Hall feszültség keletkezik. a) Ismeretlen nagyságú mágneses erőtérben 0,33 μV Hall feszültséget mérünk. Mekkora az ismeretlen fluxussűrűség? b) A szonda vastagsága **B** irányában 2 mm. Mekkora a szondában a töltéshordozók sűrűsége, ha mindegyik töltése egyenlő az elektronéval.

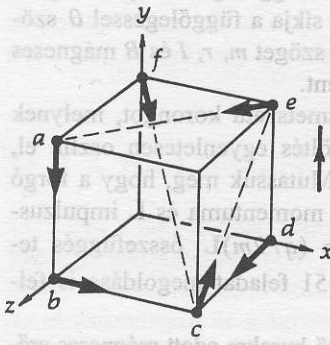
30.8 A mágneses fluxus

30B-28 Határozzuk meg az *xz* síkban fekvő *D* átmérőjű körlapon a homogén mágneses erőtér $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}$ mágneses indukcióvektorát, ha $Bx = 2By$.

30A-29 Michigan államban egy helyen a Föld mágneses erőterének mágneses indukcióvektora $5{,}80\times10^{-5}$ T, iránya északi, a vízszintessel 74°-os szöget zár be. (Ezt a szöget *inklinációnak* nevezzük.) Számítsuk ki a Φ_B mágneses fluxust lapos, vízszintesen elhelyezett 10 cm átmérőjű hurok belsejében. (Megjegyzés: a déli félteke legnagyobb részén **B** függőleges komponense felfelé mutat; ott az inklinációs szöget negatívnak tekintjük.)

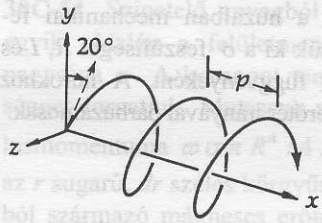
További feladatok

30C-30 Kocka minden egyes csúcsán *q* töltés van, melyek *v* sebességének irányát a 30-26 ábrán feltüntetett nyilak jelzik. A kockán belül és környezetében az *y* tengely pozitív irányába mutató **B** fluxussűrűségű homogén mágneses tér hat. a) Színes nyilakkal jelölve rajzoljuk fel az egyes töltésekre ható mágneses Lorentz-erő vektorát (a Coulomb-erők elhanyagolhatók). b) Készítsünk táblázatot, melyben az egyes erővektorok nagyságát és irányát tüntetjük fel.

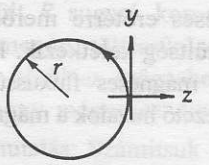


30-26 ábra
A 30C-30 feladathoz.

30C-31 A Kaliforniai Egyetem (Berkeley) ciklotronjának átmérője 1,52 m; 1,6 T fluxussűrűségű mágneses erőtérrel működik. A ciklotronnal deuteronok is gyorsíthatók, amelyek töltése a protonéval megegyezik, de tömege a protonénak kétszerese. a) Számítsuk ki a deuteronok gyorsításához szükséges, a szektorok közé kapcsolt váltakozó feszültség frekvenciáját. b) Számítsuk ki a gyorsítóból kilépő deuteronok kinetikus energiáját (MeV egységekben). c) Végezzük el az a) és b) számításokat protonok esetére is. d) Általában sokkal nehezebb a ciklotron frekvenciáját megváltoztatni, mint a mágneses indukcióvektort, ezért protonok gyorsításakor a *B* fluxussűrűséget csökkentik és nem a frekvenciát változtatják. Mekkora ilyenkor a protonok kinetikus energiája? e) Az eredeti frekvenciát alkalmazva, mekkora mágneses erőtér szükséges alfa részecskék (tömeg = $4m_p$, töltés = $2e$) gyorsításához? f) Mekkora az alfa részecskék kinetikus energiája ekkor? g) Ha a szektorok közötti gyorsítófeszültséget megemelnénk, a fenti válaszok közül melyek módosulnának?



a)



b) A csavarvonalpálya az *x* tengely pozitív irányából nézve.

30-27 ábra
A 30C-32 feladathoz

30C-32 Az *x* tengely mindkét irányával párhuzamosan *B* = 27 mT fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. A koordinátarendszer középpontjából a 30-27 ábrán vázolt módon 3×10^6 m/s sebességű elektron indul el; sebességének kezdeti iránya az *xy* síkban a pozitív *y* tengellyel 20°-os szöget zár be. Ezután az elektron a pozitív *x* tengellyel párhuzamos tengelyű csavarpályán halad. Adjuk meg a) **B** irányát; b) a csavarpálya *r* sugarát és c) a csavarpálya *p* menetemelkedését.

30-C-33 A színes televíziók képminősége, a színek tisztasága döntően azon múlik, hogy az elektronsugár a képernyő adott pontját egy milliméternél kisebb eltéréssel érje el. Mutassuk meg, hogy a Föld mágneses erőterének az elektronsugárra merőleges, kb. 10 μT nagyságú fluxussűrűsége elegendő nagyságú ahhoz, hogy a 20 keV-os elektronnyalábot annyira eltérítse, hogy az a színhűséget befolyásolja. (Megjegyzés: a csavarpályának megfelelő eltérítés az *E függelékben tárgyalt ún. sagitta képlettel* becsülhető meg). Az elektronágyú és a képernyő közötti távolságot becsüljük meg.

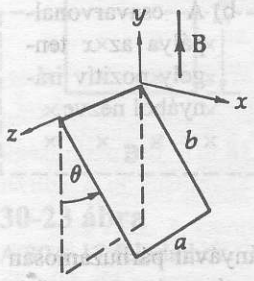
30C-34 A *q/m* töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ sebességgel halad át a derékszögű koordinátarendszer középpontján. A részecskét homogén mágneses erőtér téríti el annyira, hogy áthaladjon az $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{y}}$ ponton. a) Határozzuk meg a **B** mágneses indukcióvektor irányát. b) Fejezzük ki *b*-t *a, q, m, B* és *v* függvényeként.

30C-35 A *q/m* töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske homogén mágneses térben *v* sebességgel körpályán mozog. Hogyan függ a *t* időtől az eltérítés szöge? (Vegyük észre, hogy az eltérítés szöge független a részecske sebességétől.)

30C-36 Egy 8 cm átmérőjű leszívott üvegcsőben, a cső tengelyével párhuzamosan 5×10^{-5} T fluxussűrűségű homogén mágneses tér van. A csőbe, tengelyének egy

pontján 2×10^6 m/s sebességű elektronokat vezetünk. a) Számítsuk ki azt a legnagyobb θ szöget, amelyet az elektronok sebességvektora bezárhat a cső tengelyével, hogy az elektronok csavarpályája ne ütközzön a cső falába. b) A bevezetés pontjától milyen távolságban haladnak át az elektronok újra a tengelyen?

30C-37 Egy R sugarú, köralakú dróthurkon I erősségű áram halad keresztül. Ha a hurok síkja a homogén mágneses erőtérre merőleges, a huzalban mechanikai feszültség keletkezik. Fejezzük ki a σ feszültséget R, I és B mágneses fluxussűrűség függvényeként. A hurokhoz vezető huzalok a mágneses erőtér irányával párhuzamosak.



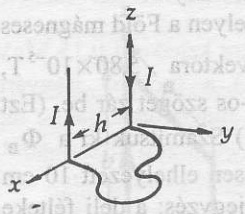
30-28 ábra
A 30C-38 feladathoz.

30C-38 Egy merev téglalap alakú huzalhurkot vízszintes a oldala körül forgatunk (30-28 ábra). A hurok tömege m, I áram folyik át rajta. Az y tengely pozitív irányába mutató a homogén mágneses tér fluxussűrűsége **B**. a) Adjuk meg, mekkora **B** esetén zár be a hurok az yz síkkal θ szöget. b) Milyen irányú az áram a hurok alsó ágában? c) Tételezzük fel, hogy a hurok a függőleges b oldala (a z tengely) mentén fordulhat el. Az a) kérdésre adott válasz módosulna-e vajon? Miért?

30C-39 Egy m tömegű és R sugarú merev huzalhurok olyan vízszintes felületen fekszik, ahol a mágneses indukcióvektort a $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}$ egyenlet adja meg és $\hat{\mathbf{y}}$ függőlegesen felfelé mutat. Számítsuk ki a hurokban folyó minimális I áramerősséget, mely ahhoz szükséges, hogy a hurok egyik ága felemelkedjen a felületről.

30C-40 A $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ fluxussűrűségű homogén mágneses térben szabálytalan alakú áramvezető huzal (nyílt hurok) az xy síkon fekszik. Az áramot a hurokhoz, illetve onnan el a z tengellyel párhuzamos huzalok vezetik. (A csatkozások az $x = 0$ illetve az $x = h$ pontokban vannak). Mutassuk meg, hogy a hurokra ható eredő erő független a hurok alakjától, és az $\mathbf{F} = -BhI\hat{\mathbf{y}}$ egyenlettel adható meg.

30C-41 A hidrogénatom Bohr-modellje szerint az elektron körpályán mozog a proton körül. A körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erő a Coulomb-kölcsönhatásból ered. A legalacsonyabb energiaszinten a pálya sugara 52,9 pm (1 pm = 10^{-12} m). a) Számítsuk ki az elektron mozgásának megfelelő áramerősséget. b) Számítsuk ki ennek az áramhuroknak a mágneses dipólusmomentumát (amit *Bohr-magnetonnak* neveznek).



30-29 ábra
A 30C-40 feladathoz.

30C-42 A téglalap alakú áramvezető hurokra mágneses erőtérben ható forgatónyomaték a téglalap oldalainak arányától függ. Mutassuk meg, hogy adott hosszúságú huzalból készült téglalap alakú hurokra akkor hat a legnagyobb forgatónyomaték, ha a hurok éppen négyzet alakú.

30C-43 Egy ℓ hosszúságú huzalból kör keresztmetszetű, N menetű tekercset készítünk. a) Mutassuk meg, hogy adott I áramerősség esetén a tekercsnek akkor legnagyobb a mágneses dipólusmomentuma, ha $N = 1$. b) Indokoljuk meg, miért a köralakú egymenetű tekercsnek legnagyobb a mágneses momentuma.

30C-44 Egy R sugarú, m tömegű köralakú, egy pontjában súrlódásmentesen felfüggesztett áramvezető hurkon I erősségű áram halad át. A függőleges irányú, mágneses erőtér hatására a hurok síkja a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki a θ szöget m, r, I és B mágneses fluxussűrűség függvényeként.

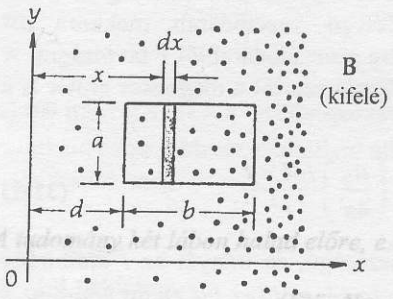
30C-45 Egyenletes keresztmetszetű korongot, melynek tömege m, és melyen q töltés egyenletesen oszlik el, tengelye körül forgatunk. Mutassuk meg, hogy a forgó töltött korong $\boldsymbol{\mu}$ mágneses momentuma és **L** impulzusmomentuma között a $\boldsymbol{\mu} = (q/2m)\mathbf{L}$ összefüggés teremt kapcsolatot. (A 30C-51 feladat megoldása is felhasználható segítségül)

30C-46 Köralakú áramvezető hurokra adott mágneses erőtérben maximálisan M_0 forgatónyomaték hat. Alakítsuk át a hurkot úgy, hogy kisebb, de kétmenetű legyen. Mekkora a maximális forgatónyomaték ezen a kisebb hurkon?

30C-47 Az ℓ hosszúságú vékony rúd szigetelő anyagból készült és rajta hosszúságegységenként λ töltés van. A rudat ω szögsebességgel forgatjuk a középpontján átmenő, a rúdra merőleges tengely körül. Mutassuk meg, hogy a mágneses dipólusmomentum $\omega\lambda\ell^3/24$. (Útmutatás: számítsuk ki a tengelytől x távolságra lévő dx hosszúságú szakasz dq töltésének mozgásából származó mágneses erőteret és integráljunk.)

30C-48 Mutassuk meg, hogy inhomogén mágneses erőtérben hat a mágneses dipólusokra forgatónyomaték is, és eredő erő is. Mi annak feltétele, hogy a dipólusok a növekvő mágneses erőtér irányában mozogjanak?

30C-49 Egy $\boldsymbol{\mu}$ dipólusmomentumú és $\mathbf{L}$ impulzusmomentumú mágneses dipólus tengelye a B fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér irányával θ szöget zár be. A $\boldsymbol{\mu}$ és $\mathbf{L}$ vektorok egymással párhuzamosak. Mutassuk meg, hogy a dipólus $\omega_p = -(\mu / L)\mathbf{B}$ szögsebességű precessziót végez. (Lásd még a 13.6 fejezetet)



30-30 ábra
A 30C-50 feladathoz.

30C-50 A $\mathbf{B} = xB_0\hat{\mathbf{z}}$ formulával megadott, a z tengely pozitív irányába (az olvasó irányába) mutató inhomogén mágneses erőtérben (30-30 ábra) a fluxussűrűség az x irályban lineárisan változik. A térben elhelyezkedő a és b oldalhosszúságú téglalap alakú hurok síkja a mágneses erőtérre merőleges; a hurok bal széle az y tengellyel párhuzamos, és attól d távolságra van. Számítsuk ki a hurok teljes felületén a Φ_B fluxust. (Útmutatás: számítsuk ki a $dA = adx$ felületen a Φ_B fluxust. A teljes fluxust integrálással kapjuk meg: $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$)

30C-51 Szigetelő anyagból készült R sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága σ. A korongot tengelye körül ω szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma $\omega \sigma \pi R^4 / 4$. (Útmutatás: Számítsuk ki az r sugarú, dr széles körgyűrűn lévő töltések mozgásából származó mágneses erőteret. Használhatjuk a (30-14) egyenletet.)

30C-52 Tekintsünk egy téglalap keresztmetszetű ρ fajlagos ellenállású fémes vezetőt. Mutassuk meg, hogy a Hall-effektus miatt létrejövő E_H térerősség és az elektromos áramot fenntartó E elektromos térerősség között fennáll az $E_H = (B / ne\rho)E$ összefüggés, ahol B a mágneses indukcióvektor nagysága és n az egységnyi térfogatra jutó ($-e$ töltésű) vezetési elektronok száma.

XXVII. Fejezet

27A-1 0,885 pF

27A-3 a) $\frac{3}{5}C$ b) $3C$ c) C d) A kondenzátorok rövidre vannak zárva

27B-5 C

27B-7 $C = \varepsilon_0 A(a + b)/[b(a - b)]$

27B-9 A válasz adott.

27B-11 A válasz adott.

27B-13 A válasz adott.

27B-15 a) 400 pC b) 80 V

27B-17 0,188 m^2

27B-19 $C = C_0/(1 - f)k$

27B-21 $2\pi\varepsilon_o L\kappa_1\kappa_2\left[\kappa_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \kappa_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$

27A-23 a) 1,60 mJ b) 0,800 mJ

27B-25 A válasz adott.

27B-27 a) 600 nC, csökken b) 30 μJ, csökken c) 30 μJ

27B-29 A válasz adott.

27C-31 A válasz adott.

27C-33 267 V

27C-35 $C/L = \kappa 2\pi\varepsilon_0/[\ln(b/a)]$

27C-37 $1/(1 + \kappa)$

27C-39 $CV^2/2d$

27C-41 A válasz adott.

27C-43 $1{,}41 \times 10^{-15}$ m

XXVIII. Fejezet

28A-1 $3{,}12 \times 10^{19}$ elektron/s

28B-3 a) $5{,}86 \times 10^{28}$ elektron/m^3 b) 51,9 mA c) $1{,}76 \times 10^{-6}$ m/s

28A-5 0,667 Ω

28A-7 418C°

28A-9 276C°

28B-11 1,56 R

28B-13 1,66 V

28A-15 5,25 W

28A-17 a) 11,1 Ω b) 1,08 A

28A-19 a) 66,7%-kal nagyobb teljesítmény b) Nem

28A-21 $\rho L/\pi(b^2 - a^2)$

28B-25 a) 2,16 kW b) 1,34 hp c) 46,3%

28B-27 a) $9{,}36 \times 10^{11}$ részecske b) 6,00 W

28A-29 $6{,}00 \times 10^{-15}$ s

28B-31 $4{,}17 \times 10^6$ A/m^2

28B-33 A válasz adott.

28C-35 A válasz adott.

28C-37 A válasz adott.

28C-39 SI egységekben: a) $4000V^{2/3}$; $(2{,}50 \times 10^{-4})V^{5/2}$

28C-41 A válasz adott.

28C-43 8,32 h

28C-45 $(b - a)/4\pi ab\sigma$

28C-47 A válasz adott.

28C-49 A válasz adott.

XXIX. Fejezet

29A-1 220 Ω

29B-3 a) A b) B c) 4,50

29B-5 A válasz adott.

29B-7 $R_{AB} = \frac{7}{5}R$

29B-9 wattban: $10, 16, 24, 30, 40, 53\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}, 100, 160$

29A-11 9,20 V

29A-13 A válasz adott.

29A-15 A válasz adott.

29B-17 a) 5,00 Ω b) 6,00 A c) 2,00 A

29B-19 0,0860 Ω

29B-21 2,67 mA R_1-en;2,50 mA R_2-n;0,167 mA R_3-on

29B-23 A válasz adott.

29B-25 A válasz adott.

29B-27 a) 2,41 kΩ b) 2,46 kΩ

29B-29 a) 0,517% b) 0,103%

29B-31 $R_1 = 5{,}025 \times 10^{-3}$ Ω; $R_2 = 4{,}523 \times 10^{-2}$ Ω; $R_3 = 4{,}523 \times 10^{-1}$ Ω; $R_4 = 4{,}523$ Ω

29B-33 A válasz adott.

29A-35 A válasz adott.

29B-37 0,587 MΩ

29B-39 A válasz adott.

29B-41 1,44 μF

29C-43 $R_1 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_C$;
$R_2 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_A$;
$R_3 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_B$;

29C-45 $R_A = R_1 R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_B = R_1 R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$;
$R_C = R_2 R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$;

29C-47 $R(1 + \sqrt{3})$

29C-49 A válasz adott.

29C-51 A válasz adott.

29C-53 A válasz adott.

29C-55 201 Ω

29C-57 $R/2$

29C-59 163 V; 1.43 MΩ

29C-61 0,050 J R_1-en; 0,0167 J R_2-n

29C-63 6,90 Hz

XXX. Fejezet

30A-1 $1{,}86 \times 10^{-6}$ m/s

30B-3 $F = 1{,}44 \times 10^{-13}\,\hat{y} - 3{,}36 \times 10^{-13}\,\hat{z}$ (newtonban)

30A-5 1,20 keV

30A-7 0,357 T

30B-9 $R_\alpha = R_p = 42{,}8R$

30B-11 $R = \sqrt{2mV/qB^2}$

30A-13 $7{,}78 \times 10^5$ m/s

30B-15 $2{,}44 \times 10^5$ V/m

30B-17 b) 0,708 T

30A-19 A válasz adott.
30B-21 $\tau = (-1{,}44 \times 10^{-3}\ \text{N·m})\,\hat{z}$
30B-23 $\mu = Iab\cos\theta\hat{x} + Iab\sin\theta\hat{y}$
30A-25 $\frac{1}{5}$
30B-27 a) 37,7 mT b) $(4{,}28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
30A-29 0,438 μW
30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
30C-33 A válasz adott.
30C-35 qBt/m
30C-37 IBR
30C-39 $mg/\pi rB_x$
30C-41 a) $1{,}05 \times 10^{-3}$ A b) $9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{A·m}^2$
30C-43 A válasz adott.
30C-45 A válasz adott.
30C-47 A válasz adott.
30C-49 A válasz adott.
30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

31A-1 1,43°
31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
31A-5 A válasz adott.
31B-7 $\mu_o I(b-a)/4ab$ (kifelé mutat)
31B-9 $\Phi_B = \mu_o Il(\ln 3)/2\pi$
31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2}/\pi b$
31A-13 a) $2{,}20 \times 10^{-5}$ Wb b) 5570 menet
31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o Ir / 2\pi a^2$
31C-17 A válasz adott.
31C-19 A válasz adott.
31C-21 A válasz adott.
31C-23 a) $B = -(\mu_o Ia/\pi[z^2 + a^2])$
b) $\lim_{z>>l} B = -(\mu_o Ia/\pi z^2)\hat{z}$
31C-25 $2RB_c$ tg $\theta/\mu_o N$
31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3)/3r$
d) $\mu_o k(b^3 - a^3)/3r$
31C-29 $-(\mu I / 6\pi a)\hat{x}$ függetlenül y-tól
31C-31 $\mu_o \sigma\omega R$
31C-33 $(\mu_o I / 2\pi\omega)\ln(1 + w/d)$
31C-35 A válasz adott.
31C-37 $\mu_0 NI/l$

XXXII. Fejezet

32B-1 30 V az óramutató járása szerint
32B-3 $\mathcal{E} = \dfrac{2B\pi r^2}{t}$
32B-5 A válasz adott.
32B-7 3,38 A/s
32A-9 A válasz adott.
32A-11 $N\mu_0\pi R/2$
32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
32A-15 a) $\mu_0 N_1^2 A/l$ $\mu_0 N_2^2 A/l$ b) $\mu_0 N_1 N_2 A/l$
32B-17 $M = \mu_0 A N_1 N_2 / l$
32B-19 a) V/L
32B-21 A válasz adott.
32A-23 145 J/m^3
32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
32C-29 b) 0,458 mV
32C-31 a) b a b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
32C-33 3,08 μC
32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
32C-37 0,132 μA
32C-39 A válasz adott.
32C-41 A válasz adott.
32C-43 A válasz adott.
32C-45 $\mu_o I^2/16\pi$
32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

33A-1 88,6 mA
33A-3 318 A
33B-5 A válasz adott.
33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

34A-1 A válasz adott.
34A-3 A válasz adott.
34B-5 a) $v = 24{,}1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
34A-7 b) $3{,}2 \times 10^{-2}$ J
34B-9 b) $v = 8{,}32 \sin(1000t + 33{,}7°)$ (SI-ben)
34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
34B-13 A válasz adott.
34B-15 $i = 2{,}11 \sin(10^5 t + 71{,}6°)$
34A-17 100
34A-19 46,5 pF-tól 419 pF-ig
34B-21 A válasz adott.
34A-23 $v = 170 \sin(377t)$ V
34A-25 122 W
34B-27 A válasz adott.
34B-29 A válasz adott.
34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
e) 90,5 V
34B-33 a) 211 μF b) 979 W
34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
34B-39 a) $1{,}82 \times 10^4$ A b) 909 A
34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
e) 64,4 V

A MÁGNESES ERŐTÉR FORRÁSA



A tudomány két lábon halad előre, e kettő: a kísérlet és az elmélet.
ROBERT A. MILLIKAN
(Előadás a Nobel-díj átvételekor, 1924.)

31.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a statikus mágneses erőterekkel és a mozgó töltésekre kifejtett erőkkel foglalkoztunk. Ebben a fejezetben a statikus mágneses erőterek eredetét vizsgáljuk meg: az elektromágnesség érdekes tulajdonsága, hogy elektromos töltések stacionárius áramlása statikus mágneses erőteret hoz létre. Megmutatjuk továbbá, hogy az elektromos és mágneses erőterek között bizonyos szimmetria áll fenn; nevezetesen az, hogy változó mágneses terek elektromos, míg változó elektromos erőterek mágneses erőteret hoznak létre. E szimmetria akkor vált nyilvánvalóvá, amikor James Clerk Maxwell (1831–1879) angol fizikus elvégezte az utolsó simításokat az elektromágnesség elméletén.

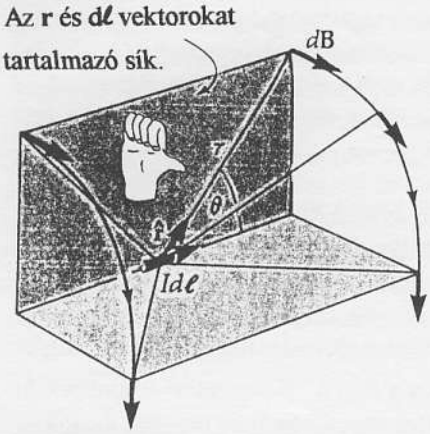
31.2 A Biot-Savart törvény

1819-ben a dán fizikus, Hans Christian Oersted (1777–1851) éppen befejezett egy elektromosságról és mágnességről szóló előadást, amikor egy áramot vezető huzalt iránytűhöz közelített. Ennek hatására az iránytű új irányba állt[1]. Az elektromosság és mágnesség közötti kapcsolat felfedezése alapvető fontosságú volt. Számos kortárs fizikus, különösen Franciaországban, követve Oersted kísérletét, hamarosan új felfedezésekkel mélyítette az elektromágnességre vonatkozó ismereteinket.

Az elektromos erőtereket tanulmányozva úgy találtuk, hogy azok eredete a elektromos töltések. Felismertük, hogy tetszés szerinti töltéseloszlástól adott pontban létrehozott elektromos térerősség kiszámításához először az elemi dq töltés által keltett $d\mathbf{E}$ elemi térerősséget kell meghatározni. Ezt az alábbi, távolság négyzetével fordítottan arányos összefüggés adja meg:

$$d\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

[1] Oersted felfedezése valószínűleg véletlen volt. Az Amerikai Fizikatanárok Egyesülete minden évben emlékérmét adományoz egy kitűnő fizikatanárnak. Az érmet Oersted-emlékéremnek nevezik annak emlékére, hogy Oersted felfedezése fizikatanítás közben történt.



31-1 ábra
Az ábra a Biot-Savart törvény geometriai vonatkozásait szemlélteti: az ábra jobb felső szélén látható $d\mathbf{B}$ vektor irányát az $Id\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}$ vektoriális-szorzatra alkalmazott jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg. A vektoriális szorzat jobbkéz-szabályának megfelelően (10-5 ábra) jobb kezünk ujjait görbítsük be úgy, hogy ujjaink hegye mutasson abba az irányba amerre az $Id\boldsymbol{l}$ vektort (az ún. elemi áramot) a θ szögű elforgatás $\hat{\mathbf{r}}$ irányába vinné át. ($\hat{\mathbf{r}}$ az elemi áramtól a vizsgált pontba mutató vektor.). Kinyújtott hüvelyk-ujjunk ilyenkor kijelöli a kép felső sarkában lévő, az elemi áramtól r távolságban lévő pontban $d\mathbf{B}$ irányát. A $d\mathbf{B}$ vektorokat néhány más helyen is feltüntettük (a jobbkéz-szabály alkalmazását ezen irányok ellenőrzésével gyakorolhatjuk). A mágneses erővonalak teljes rendszere az elemi áram $d\boldsymbol{l}$ irányára merőleges síkokon elhelyezkedő koncentrikus körökből áll. Az egyes $d\mathbf{B}$ vektorok e köröket érintik.

Itt az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor az *erőtér forrásától* (a dq töltéstől) a vizsgált pont irányába mutat. A teljes $\mathbf{E}$ térerősséget úgy kapjuk meg, hogy az elemi töltésektől származó $d\mathbf{E}$ elemi térerősségeket összegezzük.

Most egy ehhez hasonló egyenletet írunk fel, amely azt mutatja meg, hogy egy $d\ell$ hosszúságú, I áramerősségű vezetődarab mekkora $d\mathbf{B}$ fluxussűrűségű mágneses erőteret hoz létre a vezetődarabtól r távolságra. Tekintsünk egy tetszőleges alakú, I áramerősségű vezetőt (31-1 ábra). 1820-ban két francia fizikus, Jean-Baptiste Biot és Félix Savart adta meg elsőként, hogy egy $d\ell$ hosszúságú, I áramerősségű vezetődarab mekkora $d\mathbf{B}$ fluxussűrűségű mágneses erőteret hoz létre a vezetődarabtól r távolságra. A **Biot-Savart törvénynek** nevezett összefüggés szerint a mágneses erőtér is a távolság négyzetével fordítottan arányos:

Biot-Savart törvény
$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (31\text{-}1)$$

A $d\boldsymbol{l}$ vektor a huzaldarabbal azonos hosszúságú, és irányát az I áramirány határozza meg. Az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor *a tér forrásától* (az $Id\boldsymbol{l}$ elemi áramtól) *a vizsgált pont irányába mutat.* Így $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$. A vizsgált pontban a $\mathbf{B}$ fluxussűrűség kiszámítására az összes elemi vezetődarab által létrehozott $d\mathbf{B}$ elemi fluxussűrűségű mágneses indukcióvektorokat összegeznünk kell. A (31-1) formulában a μ_0 konstanst a vákuum mágneses permeabilitásának nevezik, értéke:

A vákuum mágneses permeabilitása
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$$

Ezt a számértéket úgy választották meg, hogy összhangban legyen az áramerősség mértékegységével, az amperrel (A). (A μ_0 állandót ne keverjük össze a mágneses dipólusmomentum $\boldsymbol{\mu}$ jelével!) A (31-1) képlet legjellemzőbb tulajdonsága az, hogy a mágneses erőterek, éppúgy, mint az elektromos erőterek, a távolság négyzetével fordítva arányosak. Az elektromos erőterekkel ellentétben, melyek elektromos töltésekből erednek, nincs „mágneses töltés" ahonnan a mágneses tér eredne[2]. Továbbá, az áramkör többi részétől elszigetelt $Id\boldsymbol{l}$ elemi áramok sem léteznek, ezek mindig teljes, zárt áramkör részei. A teljes mágneses erőtér kiszámítása a nem egyszerű geometriájú vezetők esetében meglehetősen fáradságos; emiatt a következő példákban csak egyszerű geometriájú, szimmetrikus elrendezésű vezetők mágneses erőterét számítjuk ki.

31-1 PÉLDA

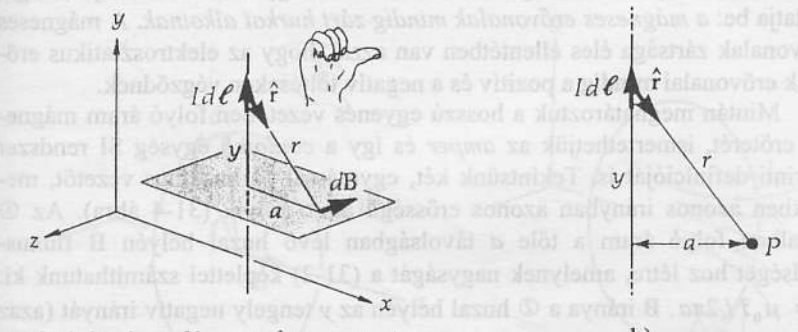
Hosszú, egyenes áramvezetőben 10 A erősségű áram folyik. Számítsuk ki, hogy tőle 10 cm távolságban mekkora a mágneses indukcióvektor.

MEGOLDÁS

Először a hosszú, egyenes vezető környezetében kialakuló mágneses indukcióvektort megadó kifejezést vezetjük le. A 31-2b ábrán illusztráltak szerint az $Id\boldsymbol{\ell}$ elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ indukció iránya a P pontban az ábra síkjába, befelé mutat. A (31-1) egyenlet szerint

$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

[2] A mágnességre vonatkozó egyes új elméletek szerint léteznek mágneses monopólusok. Ezt azonban kísérletileg eddig meggyőzően bizonyítani még nem sikerült.



a) $d\mathbf{B}$ irányát a $d\ell \times \mathbf{r}$ vektorszorzatra alkalmazott jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg.

b) ($d\mathbf{B}$ iránya a P pontban az ábra síkjába, befelé mutat.)

31-2 ábra

A 31-1 példához.

$d\mathbf{B}$ nagyságát a

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\ell}{r^2}\sin\theta$$

adja meg, ahol θ a $d\ell$ és $\hat{\mathbf{r}}$ vektorok által bezárt szög. Legyen a a P pont és a huzal közötti távolság, és legyen $d\ell = dy$; ilyen jelöléseket alkalmazva felismerhetjük, hogy $r^2 = a^2 + y^2$ és $\sin\theta = a/\sqrt{a^2+y^2}$. Így

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Ia}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}dy\,.$$

Minthogy minden egyes elemi áram azonos irányú $d\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektort hoz létre, a teljes B mágneses fluxuserősséget skalárösszegzéssel (integrálással) számíthatjuk:

$$B = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\,.$$

A G függelék integráltáblázatából a határozatlan integrált kikeresve, azt kapjuk, hogy

$$B = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\left[\frac{y}{a^2(a^2+y^2)^{1/2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi a^2}\left[1-(-1)\right].$$

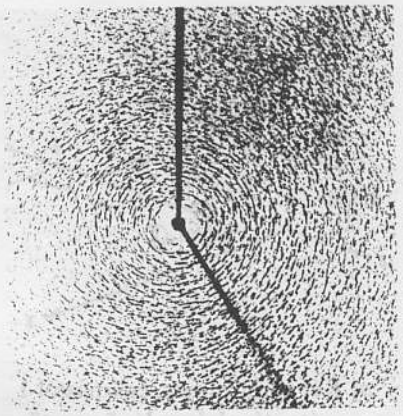
A hosszú, egyenes huzalban folyó áram mágneses terének fluxussűrűsége

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad (31\text{-}2)$$

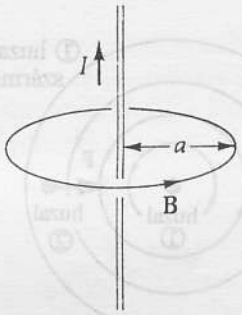
A megadott számértékeket SI egységekben behelyettesítve

$$B = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\,\dfrac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}\right)(10\,\mathrm{A})}{2\pi(0{,}10\,\mathrm{m})} = 2{,}00\times10^{-5}\,\mathrm{T}$$

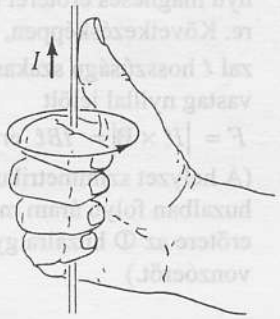
B irányát a Biot-Savart törvényben szereplő vektoriális szorzatra ($Id\ell\times\hat{\mathbf{r}}$) alkalmazott jobbkéz-szabállyal határozhatjuk meg. Minthogy szimmetria okok miatt az erővonalak a huzalt körülvevő koncentrikus körök, célszerű **B** irányát a 31-3c ábrán definiált **jobbkéz-szabály** segítségével meghatározni.



a) Ha vasreszeléket szórunk vízszintes lapra, amelyen keresztül hosszú, egyenes áramvezető halad keresztül, a vasszemcsék a mágneses térerősségvonalak mentén rendeződnek el.



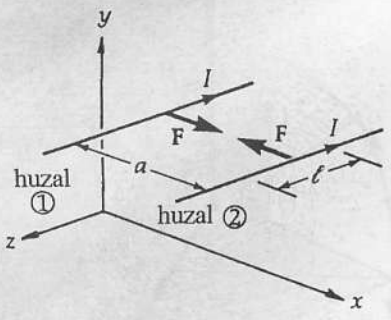
b) Egy erővonal a huzalt szimmetrikusan veszi körül.



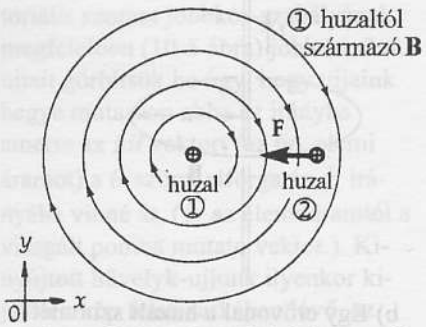
c) A mágneses erővonalak irányát az ábrán látható jobbkéz-szabállyal lehet megállapítani. Ha az áram a kinyújtott hüvelykujj irányába folyik, akkor a behajlított ujjak a mágneses erővonalak irányába mutatnak.

31-3 ábra

Egyenes áramvezető mágneses erőtere.



a) Két párhuzamos, egymástól 1 méter távolságra lévő vezető méterenként $2\cdot10^{-7}$ N vonzóerőt gyakorol egymásra, ha mindkét vezetőben azonos irányban 1 A erősségű áram folyik. Ha az áramok iránya nem párhuzamos, a huzalok között taszítóerő hat.



b) Az ① huzalban folyó áram a ② huzal helyén lefelé mutató irányú mágneses erőteret hoz létre. Következésképpen, a ② huzal ℓ hosszúságú szakaszára a vastag nyíllal jelölt $F = |I\ell \times \mathbf{B}| = IB\ell$ erő hat. (A helyzet szimmetrikus: A ② huzalban folyó áram mágneses erőtere az ① huzalra gyakorol vonzóerőt.)

31-4 ábra
Az amper definíciója.

Az előző példa a mágneses erővonalak nagyon fontos tulajdonságát mutatja be: *a mágneses erővonalak mindig zárt hurkot alkotnak.* A mágneses erővonalak zártsága éles ellentétben van azzal, hogy az elektrosztatikus erőterek erővonalai mindig a pozitív és a negatív töltéseken végződnek.

Miután meghatároztuk a hosszú egyenes vezetőben folyó áram mágneses erőterét, ismertethetjük az *amper* és így a *coulomb* egység SI rendszer szerinti definícióját is. Tekintsünk két, egymással párhuzamos vezetőt, melyekben azonos irányban azonos erősségű áram folyik (31-4 ábra). Az ① huzalban folyó áram a tőle a távolságban lévő huzal helyén **B** fluxussűrűséget hoz létre, amelynek nagyságát a (31-2) képlettel számíthatunk ki: $B = \mu_0 I / 2\pi a$. **B** iránya a ② huzal helyén az y tengely negatív irányát (azaz lefelé) mutató. A ② huzal $d\ell$ hosszúságú szakaszára ható mágneses erő a (30-11) formula szerint, $d\mathbf{F} = Id\ell \times \mathbf{B}$, ami, minthogy $d\ell$ és **B** egymásra merőleges, az alábbi alakúra egyszerűsíthető:

$$dF = IBd\ell$$

A (31-2) egyenletből B kifejezését behelyettesítve és átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}\right)I^2}{2\pi a} = \frac{2\times10^{-7}I^2}{a}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$$

Ha a huzalok távolsága 1 méter, és mindkét huzalban 1 amper erősségű áram halad át, a huzalok egységnyi hosszára jutó vonzóerő:

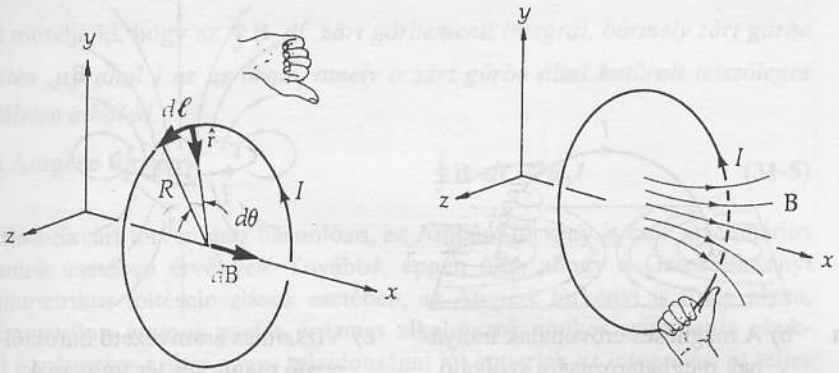
A vezető huzal egységnyi hosszára eső erő: $2\times10^{-7}\ \mathrm{T\cdot A}$ vagy $2\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

AZ AMPER DEFINÍCIÓJA: **Ha két hosszú, párhuzamos vezető egymástól 1 méter távolságra van, és mindkettőben azonos irányban 1 A erősségű áram halad, akkor a vezetők méterenként pontosan $2\cdot10^{-7}$ N erővel vonzzák egymást.**

Az ampernek ez a definíciója nagyon fontos kapcsolatot létesít az elektromos és mechanikai mennyiségek között. Ezzel válik lehetővé, hogy az SI egységrendszer az elektromos egységeket is tartalmazza. Mint azt a 24. fejezetben megemlítettük, az amper definícióján keresztül jutunk a coulomb definíciójához: ez utóbbi mennyiséget az 1 amper erősségű stacionárius áramot szállító vezető valamely keresztmetszetén 1 másodperc alatt áthaladó töltésmennyiségként definiáljuk. Az áramot vezető huzalok közötti erőhatás sokkal egyszerűbben, és sokkal nagyobb pontossággal mérhető, mint a töltések között ható Coulomb-erő. Ennélfogva komoly érvek szólnak amellett, hogy az elektromos mértékegységeket az amperre és ne a coulombra vezessük vissza. A fenti képletekből látszik, hogy az egységnyi hosszúságú huzalra ható erő egysége T·A (tesla·amper) alakban is megadható. Ezek szerint μ_0 is megadható más mértékegységgel:

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \qquad (31\text{-}3)$$

A két konstans, μ_0 és ε_0 értéke kapcsolatban van egymással. Az előbbi *áramvezetők,* az utóbbi pedig *töltések közötti erőhatásokat* leíró egyenletekben jelenik meg. Az áramok és töltések között alapvető kapcsolat van. Miként a 35. fejezetben látni fogjuk, a fenti állandók a fénysebességgel is összefüggésben vannak, ugyanis $c = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. 1983 óta a fénysebességet az SI mértékrendszer alapmennyiségének tekintjük. Minthogy μ_0 értékét az amper fenti definíciója pontosan meghatározza, ε_0 értéke is pontosan definiált.



a) A jobbkéz-szabály a $d\ell \times \hat{\mathbf{r}}$ vektoriális szorzatra vonatkozóan. Ez adja meg $d\mathbf{B}$ irányát a kör közepén.

b) A jobbkéz-szabály, amellyel az áramvezető mágneses erőterének irányát határozhatjuk meg.

31-5 ábra
A 31-2 példához.

31-2 PÉLDA

Egy $R = 10$ cm sugarú, köralakú áramvezető hurkon átfolyó áram erőssége 10 A (31-5 ábra). Számítsuk ki a hurok középpontjában a mágneses indukcióvektort.

MEGOLDÁS

Minden egyes $Id\ell$ áramszakasz és a hozzá tartozó $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor merőleges egymásra. A (31-1) összefüggés ennélfogva az alábbi alakú:

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\ell}{R^2}$$

Az integrálást sokkal kényelmesebben elvégezhetjük, ha a $d\ell$ szakaszok hosszúságát a $d\ell = Rd\theta$ alakban fejezzük ki, ahol $d\theta$ az a szög, amely alatt a $d\ell$ szakasz a középpontból látszik. Ekkor

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{I}{R}d\theta$$

A hurok középpontjában minden egyes $d\mathbf{B}$ elemi fluxussűrűség az x tengely pozitív irányába mutat, ezért a teljes B fluxussűrűség a $\theta = 0$ és $\theta = 2\pi$ határok közt kiszámított $\int dB$ integrál. Mivel az összes tag állandó, azok az integráljel elé kiemelhetők, így csak $d\theta$ marad az integrál alatt:

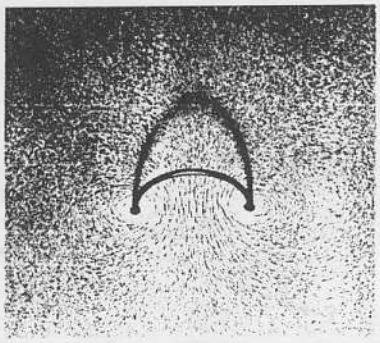
$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{I}{R}\int_0^{2\pi} d\theta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{I}{R}(2\pi - 0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

A mágneses indukcióvektor nagysága az áramvezető hurok középpontjában:

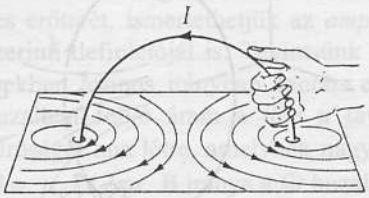
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad (31\text{-}4)$$

A megadott számértékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

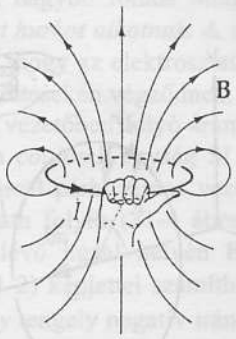
$$B = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7}\,\dfrac{\text{Tm}}{\text{A}}\right)(10\text{ A})}{2(0{,}10\text{ m})} = 6{,}28 \times 10^{-5}\text{ T}.$$



a) Az áramvezető hurokra merőlegesen papírlapot helyeztünk el és vasreszeléket szórtunk rá. A vasszemcsék nagyjából a mágneses erő-vonalak mentén rendeződnek el.



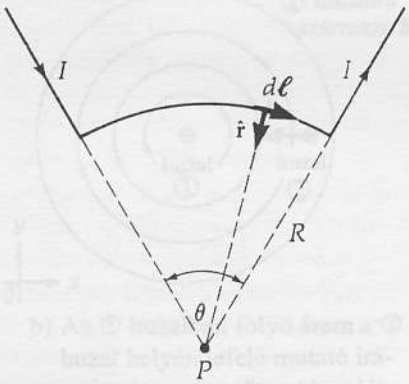
b) A mágneses erővonalak irányának meghatározására szolgáló jobbkéz-szabály.



c) Vízszintes áramvezető huroktól eredő mágneses tér irányának meghatározása jobbkéz-szabállyal.

31-6 ábra
Áramvezető hurok mágneses erőtere.

A legtöbb, mágneses erőteret alkalmazó eszközben a mágneses erőteret huzalhurkok vagy huzalokból készült tekercsek hozzák létre. A mágneses erőtér irányát jobbkéz-szabállyal adhatjuk meg: ha az áramvezető huzalt jobb kézzel úgy fogjuk meg, hogy kinyújtott hüvelykujjunk az áram irányába mutat, akkor a huzalra rákulcsolódó ujjaink a mágneses erőtér irányát jelölik ki. Köralakú *hurok belsejében*, pontosan középen a térerősség tengelyirányú; másutt a mágneses erőtér a 31-6 ábrán vázolt szerkezetű.



31-7 ábra
A 31-3 példához

31-3 PÉLDA

A 31-7 ábrán vázolt vezetőben I áram folyik. Az egyenes szakaszok a P ponttól sugár irányban kifelé haladnak; az R sugarú körív a P pontból θ szög alatt látszik. Számítsuk ki a **B** mágneses indukcióvektort a P pontban.

MEGOLDÁS

Vegyük észre, hogy az egyenes szakaszok mentén számított mágnesség indukcióvektor zérust ad, ugyanis $d\ell$ és $\hat{\mathbf{r}}$ párhuzamosak, így vektoriális szorzatukban a $\sin 0^\circ = 0$ tényező jelenik meg. A köríven $d\ell$ és $\hat{\mathbf{r}}$ egymásra merőlegesek, így

$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

A körív mentén számított vektoriális szorzatban $\sin 90^0 = 1$ tényező szerepel; a jobbkéz-szabály miatt az elemi $d\mathbf{B}$ vektorok azonos irányúak (a papír síkjára merőlegesek, befelé mutatnak). Itt $d\ell = ds = Rd\theta$, így a fluxussűrűség:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_0^\theta R d\theta = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$$

(az ábra síkjára merőleges, befelé mutató irányú)

31.3 Az Ampère törvény

Ha az áramvezető geometriája egyszerű, célszerű a Biot-Savart törvény helyett, az azzal egyenértékű, ám egyszerűbb Ampère törvényt alkalmazni. E

törvény alapja egy zárt hurok mentén történő integrálás. **Ampère törvénye**[3] azt mondja ki, hogy az $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ *zárt görbementi integrál, bármely zárt görbe esetén* $\mu_0 I$ *ahol* I *az az áram, amely a zárt görbe által határolt tetszőleges felületen áthalad.*

Az Ampère törvény[4]

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I \qquad (31\text{-}5)$$

A Biot-Savart törvényhez hasonlóan, az Ampère-törvény is csak stacionárius áramok esetében érvényes. Továbbá, éppen úgy, ahogy a Gauss törvényt szimmetrikus töltéseloszlások esetében, az Ampère törvényt is főleg olyan, szimmetrikus áramok esetén érdemes alkalmazni, amikor szimmetria okokból a mágneses erőtér egyes tulajdonságai jól ismertek az integrálási út teljes hossza mentén. Az alábbiakban az Ampère törvény használatát három fontos példán mutatjuk meg.

I. Hosszú, egyenes áramvezető mágneses erőtere. Noha Ampère törvénye tetszés szerinti integrálási út esetére igaz, az integrálás csak akkor valósítható meg kényelmesen, ha a $\mathbf{B} \cdot d\ell$ szorzat az integrálási út mentén állandó (31-3b ábra). A rendszer szimmetriájából következik, hogy a huzallal koncentrikus körön **B** nagysága állandó és ennélfogva B az integráljel elé kiemelhető. Legyen az integrálási út egy mágneses erővonal, ezen $d\ell$ **B**-vel mindenütt párhuzamos és így skaláris szorzatukban a cos 0°= 1 tényező szerepel. A görbementi integrál tehát $B\oint d\ell$ alakúra egyszerűsödik, $\oint d\ell$ pedig az a sugarú kör kerülete: $2\pi a$. Az integrálási út által határolt felületen áthaladó áram I. Tehát:

$$B\oint d\ell = \mu_0 I$$

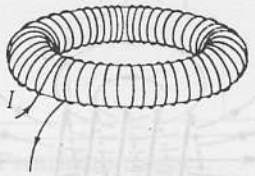
$$B(2\pi a) = \mu_0 I$$

Hosszú, egyenes áramvezető mágneses erőtere:

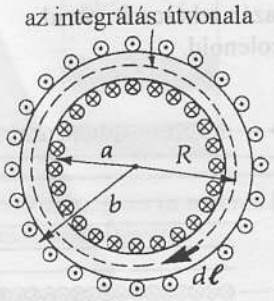
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Ez megegyezik a Biot-Savart törvény alkalmazásával kapott (31-2) képlettel. Az Ampère törvény és a Biot-Savart törvény egymással teljesen egyenértékű; a probléma jellege határozza meg, melyiket egyszerűbb használni.

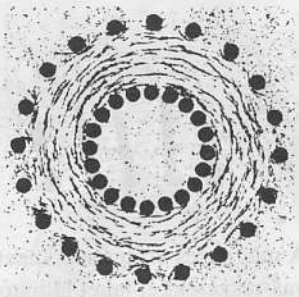
II. Toroid mágneses erőtere. Következő példánkban Ampère törvényét arra használjuk fel, hogy kiszámítsuk a 31-8 ábrán illusztrált toroid, azaz *tóruszra* tekercselt áramvezető mágneses erőterét a tekercs belsejében. A rendszer szimmetriája miatt legyen az integrálási út a tekercs középvonala, azaz R sugarú kör, a szimmetria következtében ugyanis **B** nagysága ezen a vonalon mindenütt azonos és iránya párhuzamos $d\ell$-lel. Így B az integráljel elé kiemelhető. Az R sugarú kör



a) A toroidtekercs úgy készül, hogy tórusz köré áramvezető huzalt tekercselünk.



b) A tekercs belső oldalán az áram iránya az ábra síkjára merőlegesen befelé mutat; a külső oldalán pedig kifelé.



c) A mágneses erőtér szerkezetét vas-reszelékkel lehet szemléltetni. A mágneses erőtér még lazán tekercselt toroid esetében is a tórusz belsejére korlátozódik.

31-8 ábra
A toroidtekercs. A jobbkéz-szabály szerint a tekercs belsejében a mágneses erőtér iránya megegyezik az óramutató járásával.

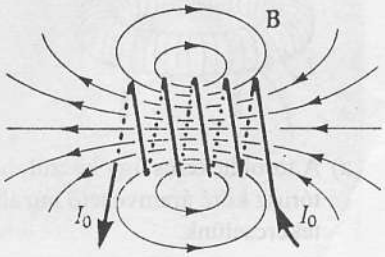
---

[3] André Marie Ampère (1775–1836) műveltségét olvasmányain kívül főleg apjától szerezte, aki bíró, és a francia forradalom ellenzője volt (18 éves korában Ampère ott állt a vérpad szélén, ahol apját lefejezték). Ampère 1826-ban jelentős tanulmányt nyújtott be a Francia Akadémiának, amelyben az elektrodinamika saját kísérletei alapján felállított új elméletét vázolta. Maxwell későbbi megjegyzése szerint ez az elmélet „mintha teljes fegyverzetben pattant volna ki az elektromosságtan Newtonjának fejéből".

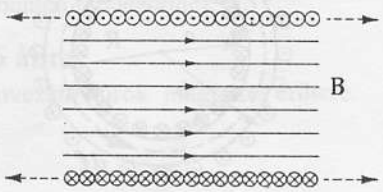
[4] Ha az I áram nem huzal belsejében halad, hanem az integrációs út által közrezárt S felületen oszlik el, akkor a (31-5) egyenlet jobb oldalát a

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

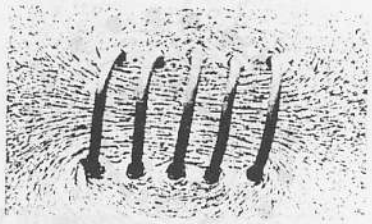
képlettel számítjuk, ahol **J** az áramsűrűség (lásd a 28.7 fejezetet). A $d\mathbf{A}$ felületelem irányát jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg: a jobbkéz ujjait hajlítsuk be úgy, hogy azok $d\ell$ irányába mutassanak; a kinyújtott hüvelykujj $d\mathbf{A}$ irányát jelöli ki.



a) Lazán tekercselt, rövid szolenoid.



b) Szorosan tekercselt, végtelen hosszú *ideális* szolenoid. A mágneses erőtér a szolenoid belsejére korlátozódik.



c) A mágneses erőtér szerkezetét vas-reszelékkel lehet láthatóvá tenni.

31-9 ábra
Szolenoid mágneses erőtere.

által határolt felületen NI áram halad át, ahol N a menetek száma, és I a tekercsen átfolyó áram. Az Ampère törvényt felhasználva:

$$\oint \mathbf{B} d\ell = \mu_0 I$$
$$B(2\pi R) = \mu_0 NI$$

Mágneses erőtér a toroid belsejében (a toroid átlagos kerülete $2\pi R$):
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \qquad \textbf{(31-6)}$$

Minthogy a fluxussűrűség R-től függ, a toroid belsejében a mágneses erőtér nem tökéletesen homogén: a belső oldalán a fluxussűrűség kicsit nagyobb. (A toroidon kívüli mágneses erőteret egyébként úgy becsülhetjük meg, hogy a toroidot nagy, R sugarú huroknak (egymenetű tekercs) tekintjük, amelyen I erősségű áram halad keresztül. Ennek mágneses erőtere a toroid belsejében lévő erőtérnél sokkal kisebb, ezért elhanyagolható.) A toroid emiatt nagyon jól használható olyan áramkörökben, ahol a mágneses erőteret le kell határolni.

III. Hosszú tekercs (szolenoid) mágneses erőtere. A szolenoid egyenes huzaltekercs (31-9a ábra). Mivel könnyű elkészíteni, leggyakrabban ilyet használnak elektromágnesként mágneses erőtér létrehozására. Lazán tekercselt, átmérőjükhöz képest rövid tekercsek mágneses erőterét bonyolult kiszámítani; a tekercs középpontjában létrejövő mágneses indukcióvektor azonban ezekben is jól becsülhető az *ideális szolenoiddal* való közelítéssel. Ez utóbbi sűrűn tekercselt, átmérőjéhez képest hosszú tekercs (31-19b ábra). Éppen úgy, mint ahogyan a nagy koncentrikus gömbfelületek közötti kapacitást síkkondenzátor kapacitásával közelítve számíthatjuk ki, a szolenoidot olyan toroid kis szakaszának tekinthetjük, melynek külső átmérője sokkal nagyobb a tekercsek átmérőjénél. A mágneses erőtér a szolenoid belsejében lényegében homogén és sokkal nagyobb, mint a szolenoidon kívül. Az erővonalak a tekercs egyik végén kijutnak a külső térbe, a másik végén pedig visszajutnak a szolenoid belsejébe. A (31-6) képlet szerint:

$$B = \left(\frac{N}{2\pi R}\right)\mu_0 I$$

A zárójelben lévő mennyiség a toroid egységnyi ívhosszára jutó menetek száma. Szolenoid esetében e mennyiség helyett az egységnyi hosszra jutó menetek számát n-t kell az egyenletbe beírnunk, azaz

Mágneses erőtér hosszú szolenoid belsejében
$$B = \mu_0 nI \qquad \textbf{(31-7)}$$
(ahol n az egységnyi hosszra jutó menetek száma)

Innen már rövid úton eljuthatunk ahhoz, hogy mekkora a mágneses erőtér a szolenoid végénél a tengelyen lévő pontban. Tekintsünk egy pontot a szolenoid belsejében, annak két végétől egyenlő távolságban (a fenti képlet erre a pontra érvényes). A szimmetria miatt a tekercs két fele azonos mértékben járul hozzá ebben a pontban a mágneses erőtérhez. Ennélfogva, ha a szolenoid felét eltávolítanánk, a mágneses indukció a szolenoid (új) végénél éppen a (31-7) összefüggéssel megadott értéknek a fele.

Mágneses erőtér hosszú szolenoid végénél
$$B = \frac{\mu_0 nI}{2} \qquad \textbf{(31-8)}$$
(ahol n az egységnyi hosszra jutó menetek száma)

31-4 PÉLDA

Permanens mágnes pólusai közötti légrésben a mágneses indukcióvektor 0,4 T (30-10a ábra). Vajon mekkora áramot kell a tekercsen átfolyatni ahhoz, hogy ekkora mágneses erőteret egy hasonló méretű szolenoiddal hozzunk létre? Tételezzük fel, hogy a szolenoid 2000 menetű, 30 cm hosszú és kis keresztmetszetű.

MEGOLDÁS

Feltételezve, hogy a szolenoid ideális, a (31-7) egyenletet ($B = \mu_0 nI$) I-re megoldva azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{0{,}4\,\text{T}}{\left(4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\text{Tm}}{\text{A}}\right)\left(\frac{2000\,\text{menet}}{0{,}30\,\text{m}}\right)} = 47{,}7\,\text{A}$$

Ha ellenőrizni akarjuk, hogy a 31-4 példa eredménye megfelel-e egy normális laboratóriumi készülékben fellépő erőtérnek, tételezzük fel, hogy a tekercs 1 mm^2 keresztmetszetű rézhuzalból készült; egy menet átlagos hossza 10 cm. A huzal ellenállását az $R = \rho\ell/A$ egyenlettel számíthatjuk ki, ahol ρ a réz fajlagos ellenállása ($1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$), ℓ és A a huzal teljes hossza illetve keresztmetszete. A megfelelő számértékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$R = (1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m})\frac{(2000\,\text{menet})(0{,}1\,\text{m})}{(1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)} = 3{,}60\,\Omega$$

Az időegység alatt a tekercsben fejlődő hő:

$$P = I^2 R = (47{,}7\text{A})^2(3{,}6\,\Omega) = 8{,}19\,\text{kW}$$

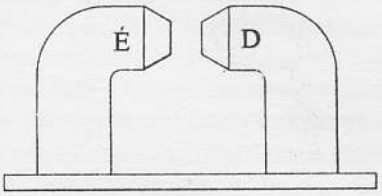
Világos, hogy ilyen szolenoidot erősen kellene hűteni; ezért mágneses erőtér előállítására használni nem érdemes. Viszont, ha a szolenoid belsejében vasmag van, akkor, miként azt a 33. fejezetben megmutatjuk, a légrésben a mágneses fluxussűrűség sokkal nagyobb. Ezért a gyakorlati célokra használt szolenoidokat a 31-10b ábrán vázolthoz hasonló alakú vasmagokkal látják el; ezek sokkal kisebb áramerősséggel üzemeltethetők.

31-5 PÉLDA

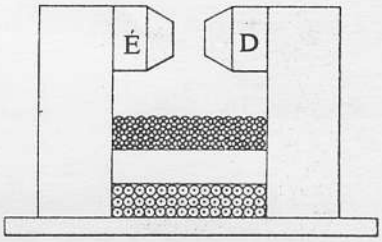
Hosszú cső falában I_0 áram halad. A cső belső sugara a, külső sugara b; az áramsűrűség-eloszlás egyenletes (31-11 ábra). Számítsuk ki a **B** fluxussűrűséget az a) $r \leq a$; b) $a \leq r \leq b$ és c) $r \geq b$ tartományokban.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokokból a mágneses erővonalak csak koncentrikus körök lehetnek (**B** iránya a 31-11b ábra szerint, a jobbkézszabály értelmében az óramutató járásával ellentétes). Továbbá a szimmetria miatt B nagyságának egy erővonal mentén mindenütt ugyanakkorának kell lennie; emiatt célszerű, ha a $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ kiszámításakor az integrációs út a cső tengelyével koncentrikus kör.

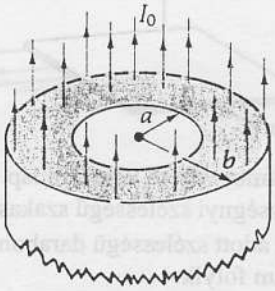


a) Permanens mágnes.

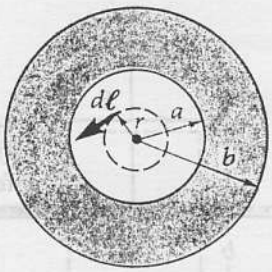


b) Elektromágnes (a tekercs keresztmetszetével)

31-10 ábra
A 31-4 példához. Tipikus laboratóriumi mágnesek.



a)



b) Az I_0 áram az árnyékolt részen folyik, az ábra síkjára merőlegesen, az Olvasó felé. A 31-3 ábrán vázolt előjelkonvenciót követve, az $r < a$ esetre vonatkozó integrációs utat szaggatott vonallal jelöltük.

31-11 ábra
A 31-5 példához. A hosszú vezető cső falában I_0 áram folyik; a cső belső sugara a, külső sugara b; a falban az áramsűrűség egyenletes eloszlású.

Az $r \leq a$ tartományban $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$

A skaláris szorzatban $\cos 0° = 1$; minthogy B az integrációs út mentén állandó, kiemelhető az integráljel elé. Minthogy $\oint d\ell = 2\pi r$, és az integrációs út által határolt területen átfolyó I áram zérus:

$$B_1(2\pi r) = \mu_0 \cdot 0$$
$$B_1 = 0$$

Az $a \leq r \leq b$ tartományban a fennálló szimmetria miatt célszerű ismét a cső tengelyével koncentrikus kört választani integrációs útként. Azonban tudnunk kell, hogy a teljes I_0 áramerősség hányadrésze halad keresztül az integrációs út által határolt felületen. Minthogy az áramsűrűség-eloszlás egyenletes, ez az arány a területek arányával egyezik meg[5]:

$$I_{\text{belül}} = \left(\frac{\text{az } r \text{ sugarú körön belüli terület}}{\text{teljes keresztmetszet}} \right) I_0 = \left[\frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)} \right] I_0$$

Ennélfogva $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$

$$B_2(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) I_0$$

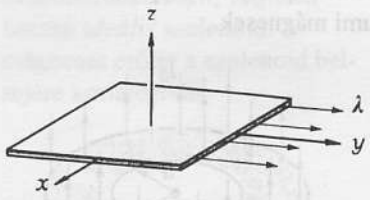
$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) I_0$$

B iránya az ábrán a jobbkéz-szabállyal összhangban az óramutató járásával ellentétes.

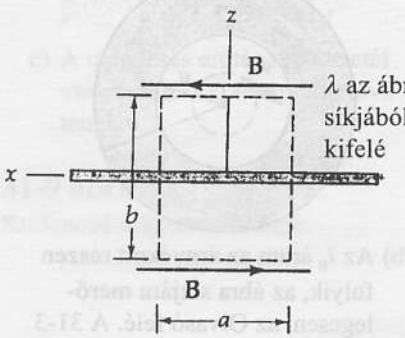
Az $r \geq b$ tartományban az integrációs út körülzárja a teljes I áramot.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$$
$$B_3(2\pi r) = \mu_0 I_0$$
$$B_3 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_0$$

B iránya az ábrán a jobbkéz-szabállyal összhangban az óramutató járásával ellentétes. Vegyük észre, hogy $B_1 = B_2$ az $r = a$ helyen és $B_2 = B_3$ az $r = b$ helyen.



a) Áramot vezető végtelen lap egységnyi szélességű szakasza. Az adott szélességű darabon λ áram folyik



b) Az áramvezető lap keresztmetszete (az áram az ábra síkjára merőlegesen, az Olvasó felé folyik). Vegyük észre, hogy **B** iránya az áramvezető lap két oldalán éppen ellentétes.

31-12 ábra
A 31-6 példához

31-6 PÉLDA

Nagyon vékony, az xy síkon elhelyezkedő lapon az y tengely pozitív irányában áram folyik át. A lap egységnyi széles tartományán átfolyó áramerősség λ. Számítsuk ki a **B** mágneses indukcióvektort a lap környezetében.

[5] Nem egyenletes áramsűrűség-eloszlás esetén a 4. lábjegyzetben leírtakat kell figyelembe venni.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokokból és a jobbkéz-szabályból az következik, hogy **B** párhuzamos a lappal, amiben az áram folyik (31-12b ábra). A rendszer szimmetriájából következik az is, hogy a lap két oldalán, attól azonos távolságban B nagyságának azonosnak kell lennie. Az $\oint \mathbf{B}\cdot d\ell$ görbementi integrál kiszámításához a 31-12b ábrán szaggatott vonallal jelölt integrációs utat választjuk, amelynek csak a lappal párhuzamos, illetve arra merőleges szakaszai vannak, az előbbiek a laptól azonos távolságra helyezkednek el. A két merőleges szakasz mentén az $\mathbf{B}\cdot d\ell$ skaláris szorzat mindenütt zérus, ugyanis e két vektor egymásra merőleges. Az a szélességű téglalapon áthaladó áram erőssége $I = \lambda a$. Az Ampère törvényt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_0 I,$$
$$2Ba = \mu_0 \lambda a,$$
$$B = \frac{\mu_0 \lambda}{2}.$$

A kapott eredmény szerint B nagysága független *a laptól vett távolságtól.* (Ez az eredmény analóg a 25-5 példa eredményével, amely szerint egyenletes σ töltéssűrűségű végtelen lap környezetében az elektromos térerősség $E = \sigma / 2\varepsilon_0$, szintén független a laptól vett távolságtól.)

Az elektromosság és mágnesség tanulmányozásakor tapasztalhatjuk, hogy a két jelenségkört leíró egyenletek meglehetősen hasonlítanak egymásra. Ennek illusztrálására a 31-1 táblázatban összefoglaljuk a hosszú egyenes áramvezető mágneses erőterére és az egyenes mentén egyenletesen elhelyezkedő töltések elektromos erőterére vonatkozó egyenleteket. A nyilvánvaló szimmetriák mellett vegyük észre azt is, hogy valahányszor az elektromos erőtérre vonatkozó egyenletben, a nevezőben ε_0 jelenik meg, a megfelelő mágneses erőtérre vonatkozó egyenlet számlálójában μ_0 szerepel.

31-1 táblázat: Elektromos és mágneses erőterek közötti hasonlóságok

	Hosszú,egyenes áramvezető mágneses erőtere	Vonalmenti töltés elektromos erőtere
1. Általános egyenletek (mindkét kifejezés a távolság négyzetével fordítva arányos)	$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$	$d\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\lambda d\ell}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ ahol λ a lineáris töltéssűrűség
2. Az általános egyenletek integrál alakja	$\oint \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_0 I$ (zárt görbementi integrál) Ampère törvény	$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (felületi integrál) Gauss törvény
3. Az egyenes környezetében az erőteret leíró egyenletek (mindkét kifejezés a távolság négyzetével fordítva arányos)	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ B körülveszi az egyenest	$E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r}$ az E térerősség a pozitív töltésű vonaltól indulva kifelé mutat.

Összefoglalás

A mágneses erőtereket mozgó töltések hozzák létre. Az $Id\ell$ elemi áram által létrehozott $d\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektort a

Biot-Savart törvény: $$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

adja meg, ahol μ_0 a vákuum mágneses permeabilitása:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\text{Tm}}{\text{A}}, \qquad \left(\text{vagy } \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \text{ vagy } \frac{\text{Wb}}{\text{Am}}\right)$$

Az amper: Egymástól egy méteres távolságban lévő két párhuzamos vezető között méterenként pontosan $2\cdot10^{-7}$N vonzóerő hat, ha a vezetőkön azonos irányban 1 amper erősségű áram halad át.

Az Ampère törvény: $$\oint \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_0 I$$

ahol az integrál bármely zárt görbére számítható és I a zárt görbe által határolt felületen áthaladó áram erőssége. Az Ampère törvényt akkor célszerű használni, ha a rendszer szimmetriája miatt a **B** mágneses indukcióvektort állandó nagyságú és a zárt görbe mentén a $d\ell$ vektorral végig azonos szöget zár be.

Áramvezetők által létrehozott mágneses erőterek:

Az áramvezető geometriája, I az áramerősség	B mágneses indukcióvektor
Hosszú egyenes huzaltól r távolságban	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
R sugarú hurok középpontjában	$B_{\text{középpontban}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$
N menetű, R közepes sugarú toroid belsejében	$B_{\text{belül}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$
Hosszú, n menet/méter menetsűrűségű szolenoid belsejében	$B_{\text{belül}} = \mu_0 nI$

Kérdések

1. Elemezzük az Ampère törvény és a Gauss törvény közötti hasonlóságot és különbséget.
2. Milyen értelemben hasonlít a Biot-Savart törvény a Coulomb törvényhez? Miben különböznek egymástól?
3. Milyen esetekben célszerűbb a mágneses erőteret inkább az Ampère törvény alkalmazásával kiszámítani, mint a Biot-Savart törvénnyel?
4. Áramot vezető üreges réz cső belsejében van-e mágneses erőtér? Ha nincs, miért nincs?
5. Az elektromos készülékekhez csatlakoztatott huzalpárokat gyakran összesodorják, hogy lecsökkentsék a mágneses eredetű zavarok lehetőségét. Mi ennek a módszernek az alapja?
6. Ha megfeszített tekercsrugón áramot vezetünk át, akkor a rugó által kifejtett erő megnő, lecsökken, vagy változatlan marad-e? Indokoljuk a választ.
7. A párhuzamos áramvezetők erőt fejtenek ki egymásra. Hogyan hatnak egymásra a merőleges áramvezetők?
8. Tekintsünk két, azonos síkban lévő koncentrikus áramvezető hurkot, melyeken azonos irányú áram halad át. Milyen mágneses erő hat az egyes hurkokra? Vajon az erők megváltoznak-e, ha mindkét áramirányt ellentétesre változtatjuk? Mi történik, ha kezdetben a két áramirány éppen ellentétes? Mi történik, ha ezeket az áramirányokat ellentétesre változtatjuk?
9. Válaszoljuk meg az előző pontban leírt kérdéseket arra az esetre, ha két azonos méretű hurok egymás közelében, párhuzamosan helyezkedik el.
10. A plazma nagyon forró, ionizált gáz, amelyben egyenlő számban vannak pozitív ionok és negatív elektronok. Tekintsünk egy henger alakú térrészben lévő plazmát, amelyen a tengellyel párhuzamos irányban elektromos áram halad át. Elemezzük, milyen irányú mágneses erők hatnak a henger falához közel. Mi a következménye az ilyen erőhatásnak?
11. Az előző kérdéssel kapcsolatban: mi történik, a) ha a henger „hajlik" illetve b) ha összeszűkül valahol? Ezeket a jelenségeket hívják rendre *kihajlási-* ill. *sótartó-* (vagy *kolbász-*) *instabilitásnak.*

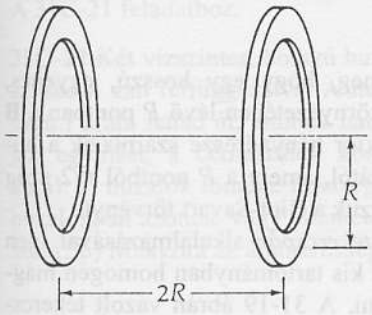
Feladatok

31.2 A Biot-Savart törvény

31A-1 Egy kiránduló zsebiránytű segítségével tájékozódik egy egyenáramú távvezeték alatt 40 méterrel. A helyes iránytól maximálisan mekkora szöggel térhet el az iránytű a távvezetékben folyó 150 A erősségű áram mágneses erőtere miatt? A Föld mágneses erőterének vízszintes komponense $3\cdot10^{-5}$ T.

31A-2 A Föld mágneses pólusainál a mágneses indukcióvektor kb. $1\cdot10^{-4}$ T. Milyen erősségű, az Egyenlítő köré fűzött huzalhurokban folyó árammal lehetne ugyanekkora mágneses erőteret létrehozni? (Tételezzük fel, hogy a hurok szimmetrikusan helyezkedik el a pólusok között.) Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

31B-3 Két N menetű, R sugarú tekercs egymástól $2R$ távolságra helyezkedik el (31-13 ábra). Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a tekercsek tengelyén, tőlük egyenlő távolságban lévő pontban. Tételezzük fel, hogy a tekercsek sorba vannak kötve, és az áramirány mindkét tekercsben azonos; továbbá legyen a tekercsek keresztmetszete R^2-hez képest kicsiny. Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.



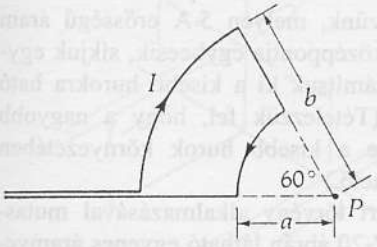
31-13 ábra
A 31B-3 feladathoz.

31A-4 Számítsuk ki két hosszú, vékony, egymástól 5 cm távolságban lévő huzal egységnyi hosszúságú szakaszai között ható erőt. Az egyik huzalon 10A erősségű áram folyik, a másikon is ugyanekkora, de ellentétes irányú. Taszító vagy vonzóerő hat a két huzal között?

31A-5 Két hosszú, vékony, párhuzamos huzalon különböző erősségű áram halad át. Mutassuk meg, hogy az egyik huzal egységnyi hosszúságú szakaszára ugyanakkora, de ellentétes irányú erő hat, mint a másik huzal azonos méretű szakaszára; vagyis Newton III. törvénye érvényes ebben az esetben is.

31B-6 Egy R sugarú, köralakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

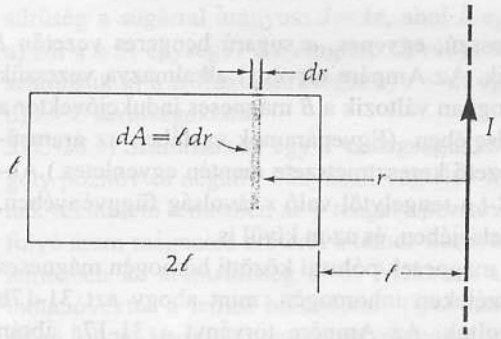
31B-7 Oldjuk meg a 31B-8 feladatot azzal a módosítással, hogy a körívek legyenek félkörök, azaz a P pontnál lévő szög 60° helyett 180° legyen.



31-14 ábra
A 31B-7 és 31B-8 feladatokhoz.

31B-8 Számítsuk ki a mágneses indukcióvektort a 31-14 ábrán látható körívekből és sugárirányú egyenes szakaszokból álló hurok köríveinek P középpontjában.

31B-9 A 31-15 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a hosszúságú, egyenes vezető azonos síkban fekszik. A vezetőhurok ellenállása 2 Ω. Számítsuk ki a hurok teljes felületén áthaladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetőn I áram halad át. (Útmutatás: Válaszszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$ fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)



31-15 ábra
A 31B-9 és 31B-10 feladatokhoz.

31B-10 A 31-15 ábrán látható elrendezés esetén tételezzük fel, hogy I_1= 30 A erősségű áram halad át az egyenes vezetőn, és I_2 = 8 A erősségű, az óramutató járásával azonos irányú áram folyik a hurokban. Számítsuk ki a hurok teljes felületén a mágneses fluxust, ha ℓ = 8 cm.

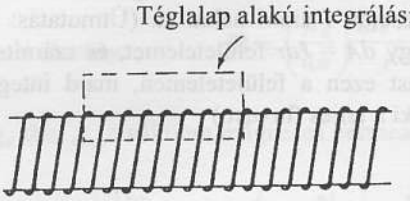
31B-11 Egy b oldalhosszúságú huzalhurokban I áram folyik. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a négyzet síkjában, a középpontban. (Tételezzük fel, hogy a hurokhoz áramot szállító vezetékeket összesodorták, így az azok erőterei semlegesítik egymást.) Felhasználhatjuk a 31C-21 feladat eredményét is.

31.3 Az Ampère törvény

31A-12 Légmagos toroidot készítünk: az egyes menetek átmérője 2 cm; a tórusz középvonalának hossza (az effektív kerület) 50 cm. Mekkora legyen a menetek száma, ha 5 A erősségű árammal 0,07 T fluxussűrűséget kívánunk a toroidban létrehozni?

31A-13 Egy 50 cm hosszú, 2 cm átmérőjű szolenoid belsejében B = 0,07 T mágneses indukcióvektort kívánunk előállítani. a) Mekkora a teljes mágneses fluxus a szolenoid belsejében, a tengelyre merőleges felületen? b) Számítsuk ki, hány menetű legyen a tekercs, ha 5 A erősségű áramot alkalmazunk.

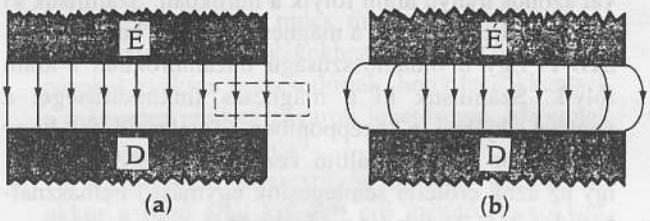
31B-14 Vezessük le, hogy mekkora a B fluxussűrűség hosszegységenként az n menetű, I áramerősségű, hosszú szolenoid belsejében. Alkalmazzuk az Ampère törvényt a 31-16 ábrán vázolt téglalap alakú zárt görbére. Tételezzük fel, hogy B egyenletes a szolenoid belsejében és azon kívül elhanyagolható.



31-16 ábra
A 31B-14 feladathoz.

31B-15 Hosszú, egyenes, a sugarú hengeres vezetőn I áram folyik. Az Ampère törvényt alkalmazva vezessük le, hogy hogyan változik a B mágneses indukcióvektor a vezető belsejében. (Egyenáramok esetében az áramsűrűség a vezető keresztmetszete mentén egyenletes.) Ábrázoljuk B-t a tengelytől való r távolság függvényében, a vezető belsejében, és azon kívül is.

31B-16 A mágnesek pólusai közötti homogén mágneses erőtér a széleken inhomogén, mint ahogy azt 31-17b ábrán vázoltuk. Az Ampère törvényt a 31-17a ábrán vázolt integrációs görbére alkalmazva mutassuk meg, hogy pólusok közötti erőtér szélén a mágneses erőtér nem ér véget hirtelen, hanem onnan kinyúlik.



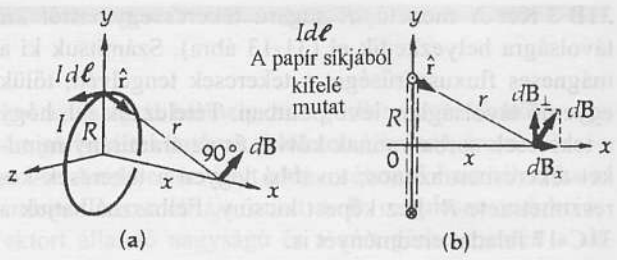
31-17 ábra
A 31B-16 feladathoz.

Vegyes feladatok

31C-17 A 31-18 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk meg, hogy a hurok tengelyén, a hurok síkjától x távolságban

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{2}\right)\frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}}$$

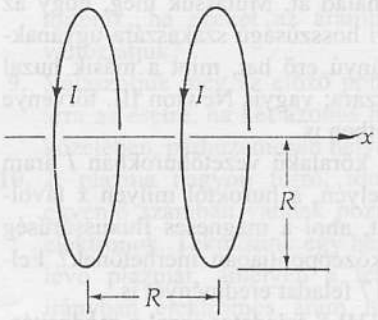
(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az $Id\ell$ elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)



31-18 ábra
A 31C-17 feladathoz.

31C-18 Határozzuk meg, hogy egy hosszú, egyenes, áramot vezető huzal környezetében lévő P pontban a **B** mágneses indukcióvektor hányadrésze származik a huzalnak attól a szakaszától, amely a P pontból $\pi/2$ szög alatt látszik. Alkalmazzuk a Biot-Savart törvényt.

31C-19 A *Helmholtz-tekercspár* alkalmazásával igen egyszerű módon lehet kis tartományban homogén mágneses erőteret létesíteni. A 31-19 ábrán vázolt tekercspár két lapos, köralakú tekercsből áll, melyek távolsága egyenlő a tekercsek sugarával; a két tekercsben az áramirány megegyezik. Mutassuk meg, hogy az x tengelyen a két tekercs között a távolság felében, a mágneses erőtér olyan, hogy dB/dx is, és d^2B/dx^2 is zérus. Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

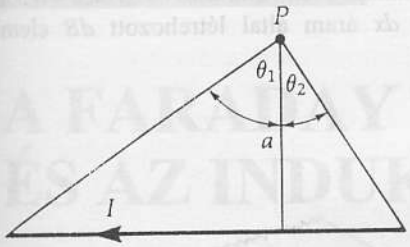


31-19 ábra
A 31C-19 feladathoz.

31C-20 Egy 15 cm sugarú köralakú hurokban 10 A erősségű áram folyik. A hurok közepére másik, 1 cm sugarú hurkot helyezünk, melyen 5 A erősségű áram folyik. A két hurok középpontja egybeesik, síkjuk egymásra merőleges. Számítsuk ki a kisebb hurokra ható forgatónyomatékot. (Tételezzük fel, hogy a nagyobb hurok mágneses tere a kisebb hurok környezetében egyenletesnek tekinthető.)

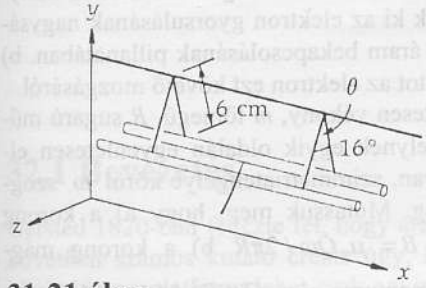
31C-21 A Biot-Savart törvény alkalmazásával mutassuk meg, hogy a 31C-20 ábrán látható egyenes áramvezető huzalszakasz környezetében lévő P pontban a B mágneses indukcióvektor nagysága:

$$B = (\mu_0 I / 4\pi a)(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\,.$$



31-20 ábra
A 31C-21 feladathoz.

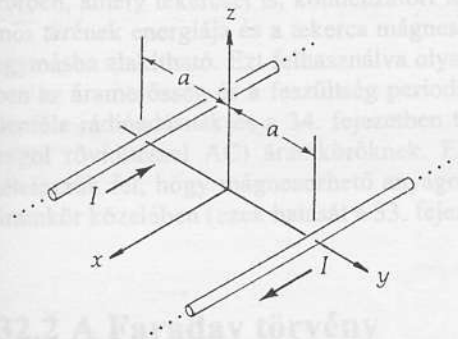
31C-22 Két vízszintes, hosszú huzal 6 cm hosszú cérnaszálakon van felfüggesztve. A huzalokon azonos nagyságú I áram halad át, aminek hatására a huzalok taszítják egymást, a cérnaszálak közötti szög 16° (31-21 ábra). A huzalok tömege hosszegységenként 40 g. a) A huzalokban azonos, vagy ellentétes irányban folyik-e az áram? b) Mekkora az áramerősség?



31-21 ábra
A 31C-22 feladathoz.

31C-23 Két hosszú, párhuzamos, az xy síkban fekvő huzalon ellentétes irányú, azonos nagyságú I áram folyik (31-22 ábra). a) Számítsuk ki a z tengely mentén a mágneses fluxussűrűség irányát és nagyságát. b) Mutassuk meg, hogy a két huzal távolságánál sokkal nagyobb távolságban B fluxussűrűség a távolság négyzetével fordítottan arányos.

31C-24 A 31-22 ábrán vázolt elrendezésnél tételezzük fel, hogy az áram mindkét huzalban az x tengely pozitív irányában folyik. a) Vázoljuk fel a mágneses erővonalak szerkezetét az yz síkban. b) A z tengely mentén mekkora távolságban maximális a mágneses fluxussűrűség?



31-22 ábra
A 31C-23, a 31C-24 és 31C-30 feladatokhoz

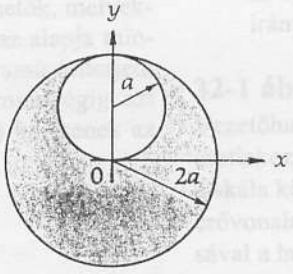
31C-25 Függőleges tengelyű mágnestűt függőleges síkú, kör alakú huzaltekercs közepén helyezünk el. A tekercs R sugarú, meneteinek száma N. A tekercset (áram nélkül) olyan irányba fordítjuk, hogy a mágnestű a tekercs síkjában legyen. Ha a tekercsen áram folyik át, a mágnestű θ szöggel kitér. Vezessük le az I áramerősséget R, N, θ és B_F függvényeként megadó összefüggést. (B_F a Föld mágneses erőteréhez tartozó fluxussűrűség vízszintes komponense. Ezt az eszközt tangens galvanométernek nevezik.)

31C-26 a) Oldjuk meg a 31C-23 a) feladatot úgy, hogy az áram a két huzalban azonos irányban (az ábrán jobbra) folyik. b) Hogyan függ a fluxussűrűség z-től $>> a$ esetén? c) Vázoljuk fel az eredő mágneses erőtér szerkezetét az yz síkban, nagy z értékekre is.

31C-27 A 31-11 ábrán vázolt hosszú, egyenes, a belső és b külső sugarú cső hosszában áram folyik. A J áramsűrűség a sugárral arányos: $J = kr$, ahol k egy állandó. a) Mi a k SI egysége? Az Ampère törvényt alkalmazva, számítsuk ki a B fluxussűrűséget b) $r < a$; c) $a < r < b$; d) $r > b$ távolságokban.

31C-28 a) Számítsuk ki egy d vastagságú, az x és y tengely pozitív és negatív irányában végtelen hosszúságúnak tekinthető lemezben az y tengely pozitív irányában folyó áram mágneses erőterét a lemez környezetében. A lemezben az áramsűrűség J. b) Mekkora a mágneses indukcióvektor a lemez belsejében? (Útmutatás: válasszunk olyan koordinátarendszert, melynek középpontja a lemez közepén van, és a z tengely legyen a lemez síkjára merőleges.)

31C-29 Tekintsünk egy, a 31-23 ábrán látható keresztmetszetű hosszú, üreges, vezető fémhengert. Az üreg sugara a, a hengeré $2a$. A vezetőn át egyenletes áramsűrűség-eloszlású I áram folyik (iránya az ábra síkjából kifelé mutat). a) Mutassuk meg, hogy az áramsűrűség $J = I/3\pi a^2$. b) Számítsuk ki a **B** mágneses indukcióvektort az y tengely mentén az $y \geq 2a$ értékeknél. (Útmutatás: A mágneses indukcióvektor két tag összege: az egyik tag $2a$ sugarú tömör, I_1 árammal átjárt henger mágneses erőteréből, a másik pedig az üreg helyén lévő a sugarú, I_2, *ellentétes irányú* árammal átjárt henger mágneses erőteréből származik. Mekkora I_1 és I_2 ? Felhasználhatjuk a 31B-15 feladat eredményét is.)

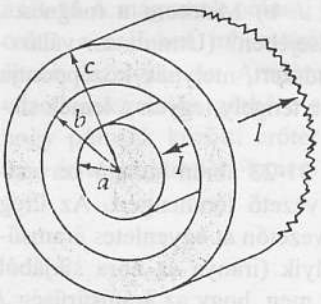


31-23 ábra
A 31C-29 feladathoz.

31C-30 Tekintsünk két hosszú, párhuzamos vezetőt, melyeken egyenlő nagyságú, ellentétes irányú áramok folynak (31-22 ábra). Számítsuk ki a mágneses indukcióvektor nagyságát és irányát az y tengely pozitív irányában (a huzalok síkjában) a) $0 < y < a$ és b) $y > a$ tartományban. c) Mutassuk meg, hogy ha $y >> a$, a fluxussűrűség a távolság négyzetével fordítva arányos.

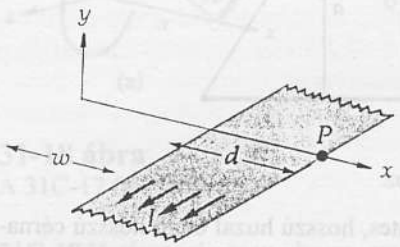
31C-31 Egyenletes vastagságú vékony, R sugarú műanyagkorong mindkét oldalán a felületmenti töltéssűrűség nagysága σ. Számítsuk ki a korong középpontjában a mágneses fluxussűrűséget, ha a korong ω szögsebességgel forog szimmetriatengelye körül. (Útmutatás: számítsuk ki az r sugarú, dr szélességű körgyűrűn lévő töltések áramát.)

31C-32 Tekintsünk egy hosszú egyenes koaxiális kábelt (31-24 ábra), melynek belső erén I erősségű áram folyik az egyik irányban, és a külső árnyékoláson ugyanakkora áram folyik a másik irányban. Az áramsűrűség mindkét vezetőben egyenletes. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűség nagyságát a következő tartományokban: a) $r < a$; b) $a < r < b$; c) $b < r < c$; d) $r > c$. e) Vázoljuk fel a mágneses fluxussűrűség változását a kábel tengelyétől vett távolság függvényében.



31-24 ábra
A 31C-32 feladathoz.

31C-33 Egy w szélességű hosszú, vékony vezető szalagon egyenletes eloszlású I erősségű áram folyik (31-25 ábra). Számítsuk ki a B mágneses fluxussűrűséget a szalag síkjában lévő, annak szélétől d távolságban lévő P pontban. (Útmutatás: Számítsuk ki a dx széles sávban folyó $(I / w) dx$ áram által létrehozott dB elemi fluxussűrűséget.)



31-25 ábra
A 31C-33 feladathoz.

31C-34 Egy elektron $3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel hosszú egyenes huzaltól 1,0 cm-es távolságban vele párhuzamosan mozog. Hirtelen 10 A erősségű áram kezd el folyni a huzalon, az elektron mozgásával azonos irányban. a) Számítsuk ki az elektron gyorsulásának nagyságát és irányát az áram bekapcsolásának pillanatában. b) Készítsünk vázlatot az elektron ezt követő mozgásáról.

31C-35 Egyenletesen vékony, m tömegű, R sugarú műanyagkorong, melynek egyik oldalán egyenletesen elosztott Q töltés van, szimmetriatengelye körül ω szögsebességgel forog. Mutassuk meg, hogy a) a korong középpontjában $B = \mu_0 Q\omega / 2\pi R$ b) a korong mágneses dipólusmomentuma $\mu = Q\omega R^2 / 4$. c) Mutassuk meg, hogy a korong mágneses momentumának és impulzusmomentumának hányadosa (az ún. *giromágneses arány*) $Q/2m$.

31C-36 Mutassuk meg, hogy a 31-29 példában a **B** mágneses indukcióvektor az üregben mindenütt azonos és iránya megegyezik az x tengely negatív irányával. Felhasználhatjuk a 31B-15 feladat eredményét is.

31C-37 Számítsuk ki, mekkora a hosszú szolenoid középpontjában a mágneses indukcióvektor. A számítást úgy végez-zük el, hogy az egyes menetektől származó mágneses fluxussűrűségeket integráljuk. Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

30A-19 A válasz adott.
30B-21 $\tau = (-1{,}44 \times 10^{-3}\ \text{N·m})\,\hat{z}$
30B-23 $\mu = Iab\cos\theta\hat{x} + Iab\sin\theta\hat{y}$
30A-25 $\frac{1}{5}$
30B-27 a) 37,7 mT b) $(4{,}28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
30A-29 0,438 μW
30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
30C-33 A válasz adott.
30C-35 qBt/m
30C-37 IBR
30C-39 $mg/\pi rB_x$
30C-41 a) $1{,}05 \times 10^{-3}$ A b) $9{,}27 \times 10^{-24}$ A·m^2
30C-43 A válasz adott.
30C-45 A válasz adott.
30C-47 A válasz adott.
30C-49 A válasz adott.
30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

31A-1 1,43°
31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
31A-5 A válasz adott.
31B-7 $\mu_o I(b-a)/4ab$ (kifelé mutat)
31B-9 $\Phi_B = \mu_o Il(\ln 3)/2\pi$
31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2/\pi b}$
31A-13 a) $2{,}20 \times 10^{-5}$ Wb b) 5570 menet
31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o Ir / 2\pi a^2$
31C-17 A válasz adott.
31C-19 A válasz adott.
31C-21 A válasz adott.
31C-23 a) $B = -(\mu_o Ia/\pi[z^2 + a^2])$
b) $\lim_{z>>l} B = -(\mu_o Ia/\pi z^2)\hat{z}$
31C-25 $2RB_e \text{ tg } \theta/\mu_o N$
31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3)/3r$
d) $\mu_o k(b^3 - a^3)/3r$
31C-29 $-(\mu I / 6\pi a)\hat{x}$ függetlenül y-tól
31C-31 $\mu_o \sigma\omega R$
31C-33 $(\mu_o I / 2\pi\omega)\ln(1 + w/d)$
31C-35 A válasz adott.
31C-37 $\mu_0 NI/l$

XXXII. Fejezet

32B-1 30 V az óramutató járása szerint
32B-3 $\mathcal{E} = \dfrac{2B\pi r^2}{t}$
32B-5 A válasz adott.
32B-7 3,38 A/s
32A-9 A válasz adott.
32A-11 $N\mu_0\pi R/2$
32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
32A-15 a) $\mu_0 N_1^2 A/l$ $\mu_0 N_2^2 A/l$ b) $\mu_0 N_1 N_2 A/l$
32B-17 $M = \mu_0 A N_1 N_2 / l$
32B-19 a) V/L
32B-21 A válasz adott.
32A-23 145 J/m^3
32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
32C-29 b) 0,458 mV
32C-31 a) $b\ a$ b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
32C-33 3,08 μC
32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
32C-37 0,132 μA
32C-39 A válasz adott.
32C-41 A válasz adott.
32C-43 A válasz adott.
32C-45 $\mu_o I^2/16\pi$
32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

33A-1 88,6 mA
33A-3 318 A
33B-5 A válasz adott.
33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

34A-1 A válasz adott.
34A-3 A válasz adott.
34B-5 a) $v = 24{,}1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
34A-7 b) $3{,}2 \times 10^{-2}$ J
34B-9 b) $v = 8{,}32 \sin(1000t + 33{,}7°)$ (SI-ben)
34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
34B-13 A válasz adott.
34B-15 $i = 2{,}11 \sin(10^5 t + 71{,}6°)$
34A-17 100
34A-19 46,5 pF-tól 419 pF-ig
34B-21 A válasz adott.
34A-23 $v = 170 \sin(377t)$ V
34A-25 122 W
34B-27 A válasz adott.
34B-29 A válasz adott.
34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
e) 90,5 V
34B-33 a) 211 μF b) 979 W
34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
34B-39 a) $1{,}82 \times 10^4$ A b) 909 A
34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
e) 64,4 V

A FARADAY TÖRVÉNY ÉS AZ INDUKTIVITÁS

Sir Robert Peel brit miniszterelnök nem sokkal azután, hogy Faraday feltalálta a dinamót, meglátogatta a tudós laboratóriumát. Rámutatott a különös készülékre, s megkérdezte hogy mire használható, Faraday azonnal válaszolt: „Azt még nem tudom, de lefogadom, hogy a kormány egyszer majd adót vet ki rá" Hát végeredményben ez bekövetkezett.

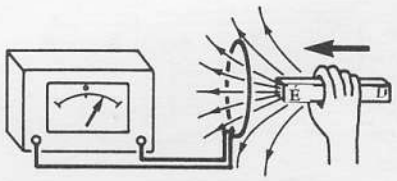
32.1 Bevezetés

Oersted 1820-ban fedezte fel, hogy áram hatására mágneses tér jön létre. Ezt követően számos kutató érezte úgy, hogy az elektromosság és mágnesség közötti kapcsolat nem lehet csak egyirányú, és keresték a fordított effektust: Vajon a mágneses erőtér létrehozhat-e elektromos áramot? Erre a kérdésre igen a válasz; bár ez csak annak felfedezése után vált nyilvánvalóvá, hogy a mágneses erőteret a mozgó töltések hozzák létre. Így az áramot talán a *változó* mágneses erőterek indukálják. Ennek felfedezése két kutató nevéhez fűződik: 1831-ben Michael Faraday, a kitűnő angol kísérletező és vele egyidőben az Egyesült Államokban dolgozó Joseph Henry egymástól függetlenül fedezte fel az elektromágneses indukciónak nevezett effektust. Az effektus gyakorlati szempontból is nagyon fontos, ugyanis ennek alapján működnek a modern társadalmakat elektromos árammal ellátó generátorok. Azelőtt az elektromos áram termelésének egyedüli módja a telepek alkalmazása volt. Az *indukció* felfedezése tette lehetővé a villamosmérnöki tudomány kibontakoztatását és vele együtt a villamos eszközök elterjedését.

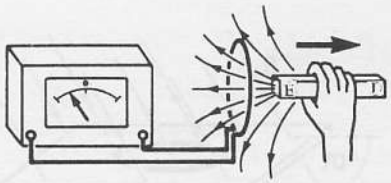
Az elektromágneses indukció jelensége egy fontos áramköri elemmel, a *tekerccsel* áll szoros kapcsolatban. A tekercs a mágneses erőterében – éppúgy mint a kondenzátor az elektromos erőterében – energiát tárol. Olyan áramkörben, amely tekercset is, kondenzátort is tartalmaz, a kondenzátor elektromos terének energiája és a tekercs mágneses erőterének energiája oda-vissza egymásba alakítható. Ezt felhasználva olyan áramkörök készíthetők, melyekben az áramerősség és a feszültség periodikusan változik. Ez az alapja mindenféle rádióadásnak és a 34. fejezetben tárgyalt váltakozó áramú (elterjedt angol rövidítéssel AC) áramköröknek. Ebben a fejezetben mindvégig azt tételezzük fel, hogy mágnesezhető anyagok (mint például vas) nincsenek az áramkör közelében (ezek hatását a 33. fejezetben tárgyaljuk).

32.2 A Faraday törvény

Könnyen megmutathatjuk, hogy változó mágneses erőtérrel áramot kelthetünk. A 32-1 ábrán galvanométerhez csatlakoztatott vezetőhurkot láthatunk.

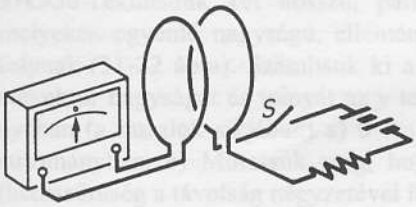


a) Ha a hurok felé mágnest mozgatunk, a galvanométer mutatója kitér.



b) Ha a mágnest a huroktól eltávolítjuk, a galvanométer mutatója az a) ábrán láthatóval ellentétes irányban tér ki.

32-1 ábra
Vezetőhurkot olyan galvanométerhez csatlakoztatunk, melynek zéruspontja a skála közepén van. A hurkot metsző erővonalak számának megváltoztatásával a hurok végpontjai között feszültséget indukálunk, amelyet a galvanométer mutatójának kitérésével észlelünk.



32-2 ábra
A két hurok egymás közelében helyezkedik el, közöttük elektromos kapcsolat nincs. Ha az *S* kapcsolót zárjuk, majd nyitjuk, a galvanométer mutatója rövid ideig az egyik, illetve a másik irányba tér ki, jelezvén, hogy a baloldali hurokban a mágneses erőtér változásakor feszültség indukálódik.

Ha mágnest az a) ábrán látható módon a hurok felé mozgatunk, a galvanométer mutatója kitér, annak jeléül, hogy a mágnes mozgásának hatására a hurokban áram folyik. Miközben a mágnest a huroktól eltávolítjuk (b ábra), a mutató ellenkező irányban tér ki, ellenkező irányú áramot jelezve. Ha a mágnes egyhelyben van, a mutató nem tér ki. Hasonló eredményre vezet, ha a mágnest tartjuk egyhelyben és a hurkot a mágneshez közelítjük, illetve távolítjuk; mind a két esetben a mutató ellentétes irányban tér ki. Vagyis tulajdonképpen nincs különbség abban, hogy a mágnest mozgatjuk az álló hurok felé, vagy a hurkot mozgatjuk az álló mágnes felé. Csak a hurok és a mágnes *relatív* mozgása számít.

E kísérletek lényeges vonása az, hogy a *hurok környezetében változó mágneses tér a hurokban áramot kelt* (közkeletű, latin eredetű szóval: *indukál*). Ha a hurok környezetében a mágneses erőtér nem változik, áram sem folyik a hurokban. Az ilyen módon keltett áramokat indukált áramoknak nevezzük, és úgy tekinthetjük, hogy az áramkörben levő *indukált elektromotoros erők* hozzák létre őket.

Indukált elektromotoros erőt nem mozgó áramkörökben is kelthetünk, például a 32-2 ábrán bemutatott módon: Két fix helyzetű, egymással elektromosan nem érintkező hurok helyezkedik el egymáshoz közel. Az *S* kapcsoló zárásakor a jobb oldali hurokban áram kezd el folyni, aminek hatására a másik körben a galvanométer mutatója azonnal kitér, majd visszatér a zérushelyzetbe, azaz a bal oldali áramkörben rövid ideig indukált áram folyik. Ha a kapcsolót ezután kinyitjuk, a galvanométer ellenkező irányú, rövid ideig tartó áramot jelez. A jobb oldali áramkörben folyó áram mágneses erőteret hoz létre a bal oldali hurok helyén. Indukált áram csak akkor keletkezik, ha a mágneses erőtér változik; tehát ha a jobb oldali hurokban állandó nagyságú áram folyik, a másik hurokban nem indukálódik áram.

E kísérletek közös vonása az, hogy

Feszültség akkor indukálódik egy áramkörben, ha az áramhurok által közrefogott mágneses indukcióvonalak száma megváltozik.

Hangsúlyozzuk a *megváltozik* szót!: Az nem számít, hogy éppen hány erővonal halad át az áramkör által határolt felületen; az indukált feszültség nagyságát az indukcióvonalak számának *változási sebessége* határozza meg.

Zárt hurok által határolt felületen áthaladó mágneses erővonalak számát a Φ_B mágneses fluxussal adjuk meg (30-29 egyenlet):

Mágneses fluxus
$$\mathbf{F}_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \qquad (\mathrm{T \cdot m^2}\ \text{egységben}) \qquad \textbf{(32-1)}$$

ahol **B** a mágneses indukcióvektor és d**A** az elemi felület.
Az integrálást a hurok által határolt teljes *A* felületre kell elvégezni, ami lehet sík, vagy tetszőleges görbe felület. A $\mathbf{F}_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ integrált mágneses indukciófluxusnak nevezzük. Ha *N* menetű tekercs minden egyes menetének ugyanekkora a fluxusa, a tekercs indukciófluxusa *N*-szer nagyobb. Ezeket a kísérleti megfigyeléseket a **Faraday törvény** fogalmazza meg általános alakban. Szavakkal kifejezve:

Egy áramkörben indukált feszültség az áramhurok által határolt felületen átmenő mágneses fluxus egységnyi idő alatti megváltozásával egyenlő.

Képletben:

A Faraday-féle indukció törvény:
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(egymenetű hurok esetében)} \qquad \textbf{(32-2)}$$

A negatív előjel (későbbiekben erre még visszatérünk) az indukált feszültség polaritását jelöli ki. Ha a hurok *N* menetű (azaz tekercs), az összes feszültség-

forrás sorosan kapcsoltnak tekintendő, vagyis az indukált feszültség N-nel megszorzódik:

A Faraday-féle indukció törvény:
$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (N \text{ menetű tekercs esetében}) \qquad \textbf{(32-3)}$$

Gyakran foglalkozunk olyan problémákkal, melyekben a mágneses erőtér nagysága, noha időben változó lehet, egy A sík felületen homogén. Ilyenkor az A felületen a Φ_B mágneses fluxus nagyságát egyszerűen az alábbi skaláris szorzat adja:

$$\Phi_B = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = BA\cos\theta \quad \text{(homogén mágneses erőtér esetén)} \qquad \textbf{(32-4)}$$

ahol θ a **B** vektor és a felületre merőleges **A** vektor iránya közötti szöget jelenti.

A Faraday féle indukció törvény:
$$\mathcal{E} = -N\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) \quad \text{(homogén mágneses erőtér esetén)} \qquad \textbf{(32-5)}$$

Így egy áramkörben többféle módon is indukálhatunk feszültséget. Változtathatjuk: 1.) a **B** vektor nagyságát; 2.) a hurok vagy tekercs A felületét; 3.) a θ szöget. Bármelyik módszert is alkalmazzuk azonban, mindenképpen az áramhurokkal határolt felületre vonatkozó $N\Phi_B$ indukciófluxust változtatjuk meg.

32-1 PÉLDA

A **B** mágneses indukcióvektor *nagyságának változtatása*. Száz menetű, 40 cm² felületű lapos tekercset B = 0,45 T indukciójú, a tekercs síkjára merőleges mágneses térbe helyezünk. Számítsuk ki a tekercs végpontjai között megjelenő indukált feszültséget, ha a mágneses indukcióvektor 0,05 T/s sebességgel változik.

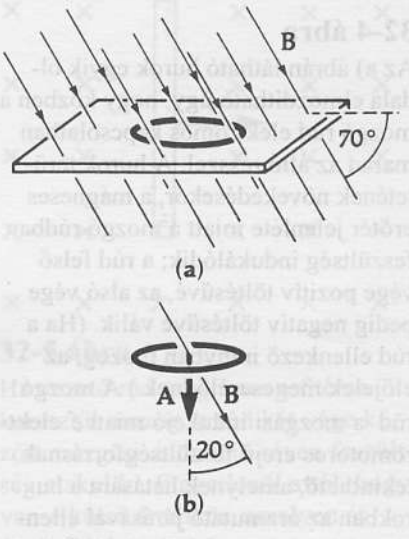
MEGOLDÁS

A **B** mágneses indukcióvektor nagysága nem lényeges. Az indukált feszültséget B időbeli változása szabja meg. Ha csak az $\mathcal{E}$ indukált feszültséget nagyságát kívánjuk meghatározni, akkor a (32-3) képletben lévő negatív előjelet figyelmen kívül is hagyhatjuk:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = NA\frac{dB}{dt} = (100)(40\,\text{cm}^2)\underbrace{\left[\frac{1\,\text{m}^2}{10^4\,\text{cm}^2}\right]}_{\text{átszámítási arány}}\left(0{,}05\frac{\text{T}}{\text{s}}\right) = 0{,}020\,\text{V}$$

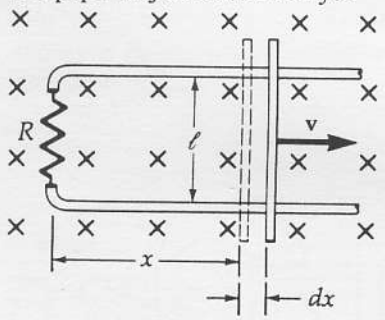
32-2 PÉLDA

A hurok síkjának megváltoztatása: Egy 20 cm² felületű köralakú hurok vízszintes asztallapon fekszik. Az adott földrajzi helyen a Föld mágneses erőterének mágneses indukcióvektora $B = 50\,\mu\text{T}$ nagyságú és, északi irányban, a vízszintessel 70 fokos szöget bezárva lefelé mutat (32-3 ábra). A hurkot 0,6 s alatt másik oldalára fordítjuk át. Számítsuk ki, hogy az átfordítás alatt átlagosan mekkora feszültség indukálódott a hurokban.

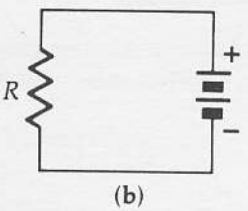


32-3 ábra
A 32-2 példához

B a papír síkjába befelé irányul



(a)



(b)

32-4 ábra

Az a) ábrán látható hurok egyik oldala elmozdítható úgy, hogy közben a mozgó rúd elektromos kapcsolatban marad az álló résszel. A hurok területének növekedésekor, a mágneses erőtér jelenléte miatt a mozgó rúdban feszültség indukálódik; a rúd felső vége pozitív töltésűvé, az alsó vége pedig negatív töltésűvé válik. (Ha a rúd ellenkező irányban mozog, az előjelek megcserélődnek.) A mozgó rúd a mozgási indukció miatt $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű feszültségforrásnak tekinthető, amelynek hatására a hurokban az óramutató járásával ellentétes irányú áram folyik. A b) ábrán egy, a hurokkal analóg, telepet tartalmazó áramkör látható.

MEGOLDÁS

A hurok síkja a mágneses erővonalakra nem merőleges, így a (32-4). képlet alapján a hurok által határolt felületen átmenő mágneses fluxus nagysága:

$$\Phi_B = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = BA\cos\theta = (5\times10^{-5}\,\mathrm{T})(20\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2)(\cos 20^\circ)$$

$$\Phi_B = 9{,}397\times10^{-8}\,\mathrm{T\cdot m}^2.$$

A hurok átfordítása során a fluxus zérusra csökken, majd tovább változik, amíg eléri az eredeti értékét ellenkező előjellel. Így a $\Delta t = 0{,}60$ s idő alatt a mágneses fluxus változása az eredeti érték kétszerese:

$$2(9{,}397\times10^{-8}\,\mathrm{T\cdot m}^2) = 1{,}879\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}^2.$$

A (32-2) képlet alkalmazásával, (ismét figyelmen kívül hagyva a negatív előjelet) azt kapjuk, hogy:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{(1{,}879\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}^2)}{(0{,}60\,\mathrm{s})} = 0{,}313\,\mu\mathrm{V}$$

32.3 A mozgási indukció

Miként azt az előző pont kísérleteivel kapcsolatban láttuk, ha egy vezető a mágneses erőtérhez képest mozog, feszültség indukálódik benne. Ebben a pontban azzal foglalkozunk, hogy mekkora feszültség indukálódik akkor, ha a vezető állandó mágneses térben mozog. Ezt a feszültséget a **mozgási indukció** hozza létre. Képzeljünk el egy négyszögletes hurkot, amelynek három oldala rögzített, a negyedik pedig az eredeti helyzetéhez képest párhuzamosan elmozgatható rúd (32-4 ábra). A hurok elektromos ellenállása elhanyagolható a hurokba kapcsolt R ellenálláshoz képest. A **B** mágneses indukcióvektor az ábra síkjára merőleges, iránya az ábra síkjára merőlegesen befelé mutat. Tetszőleges időpontban a hurok felületére számított mágneses fluxus nagysága $\Phi_B = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = B\ell x$. A rúd mozgásakor, a hurok A felülete növekszik: $dA/dt = \ell dx/dt = \ell v$. Így a hurok felületén a mágneses fluxus is időben változik és a Faraday törvény szerint a rúd mozgatásakor indukált feszültség:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -B\frac{dA}{dt} = -B\ell v$$

Mozgással indukált feszültség $\mathcal{E} = -B\ell v$ **(32-6)**

A polaritást megszabó negatív előjel a következő fejezetben részletezett speciális jelentéssel bír.

Érdemes e példa energiaviszonyait elemezni. A mozgó rúdban indukált feszültség hatására a 32-4 ábrán látható zárt hurokban áram folyik. Állandó v sebesség esetén az I áram is időben állandó:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\ell v}{R} \qquad \textbf{(32-7)}$$

Az R ellenálláson az egységnyi idő alatt fejlődő hőmennyiség:

$$P_{\text{hő}} = I^2R = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)^2 R = \frac{B^2\ell^2v^2}{R} \qquad \textbf{(32-8)}$$

Honnan származik ez a (hő)teljesítmény? Emlékezzünk a 30-5. fejezetben tárgyaltakra: ha egy vezetőben mágneses erőtér jelenlétében I erősségű áram halad, akkor arra $\mathbf{F}_{\text{mágnes}} = I\ell \times \mathbf{B}$ mágneses erő hat. Esetünkben az ℓ hosszúságú rúd és a $\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektor egymásra merőlegesek, és így a rúdra ható erőt az alábbi egyenlettel számíthatjuk:

$$F_{\text{mágnes}} = I\ell B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R} \qquad \textbf{(32-9)}$$

Miként a későbbiekben röviden megmutatjuk, a mágneses erő a rudat balra tólja, tehát ez az erő éppen ellenkező irányú, mint a jobbra húzó (azonos nagyságú) külső erő. A rúdra ható erők eredője tehát zérus, vagyis a rúd egyenletes sebességgel mozog. A külső erő által egységnyi idő alatt végzett munka:

$$P_{\text{külső}} = F_{\text{mágnes}} v = I\ell B v = \left(\frac{B^2\ell^2 v}{R}\right)v = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R} \qquad \textbf{(32-10)}$$

A (32-8) és (32-10) egyenletek jobb oldala azonos, vagyis a külső erő által egységnyi idő alatt végzett munka éppen egyenlő az ellenálláson keletkező y^2R hőteljesítménnyel. Az energiamegmaradás ebben az esetben is érvényes.

Az áramot vezető rúdra ható mágneses erő irányát egyszerűen megállapíthatjuk: A mozgó rúd szabad (negatív töltésű) vezetési elektronjaira ható $\mathbf{F} = -q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ Lorentz-erő, iránya a 32-4 ábrán lefelé mutat, tehát az elektronokat az ábrán lefelé mozgatja. A rúd alsó vége negatívan, a felső pedig pozitívan töltötté válik, ezáltal az I áram a hurokban az óramutató járásával ellentétes irányban, a rúdban pedig felfelé indul meg. Következésképpen a rúdra ható $\mathbf{F}_{\text{mágnes}} = I\ell \times \mathbf{B}$ *mágneses erő iránya balra mutat.*

A mozgó vezető rúd végei között akkor is kialakul potenciálkülönbség, ha a vezető nem alkot zárt hurkot (32-5 ábra). Ebben az esetben, amint a rúd mozogni kezd a mágneses térben, a vezetési elektronokra azonnal hat a Lorentz-erő, így a negatív töltések a rúd felső, a pozitívak pedig az alsó végénél felszaporodnak. Az egyensúly rövid idő alatt beáll, amikor a qvB Lorentz-erő és a szétvált ellentétes töltések között ható qE elektrosztatikus vonzóerő egyenlővé válik. A töltésszétválás miatt kialakuló E elektromos térerősség a rúd két vége közötti potenciálkülönbséggel arányos: $V = E\ell$. Mindaddig, amíg a rúd mozog, két vége között ekkora a potenciálkülönbség. A $qE = qvB$ egyenlőség miatt $E = vB$, vagyis:

$$V = E\ell = B\ell v \qquad \textbf{(32-11)}$$

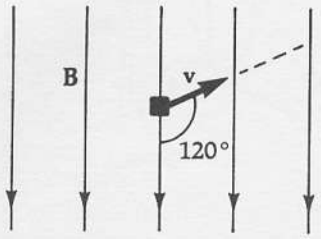
Ez megegyezik a Faraday törvény alkalmazásával kapott eredménnyel.



32-5 ábra
Ha vezető rúd mágneses erőtéren keresztül mozog, a rúd két vége között mozgási indukció révén feszültség alakul ki, függetlenül attól, hogy van-e külső áramkör, amelyen át áram folyhat.

32-3 PÉLDA

A 32-5 ábrán vázoltak szerint egy 10 cm hosszú fémrúd $B = 2\text{mT}$ fluxussűrűségű homogén mágneses térben mozog. a) Milyen v sebességgel mozog a rúd, ha a végei között 1 mV potenciálkülönbség alakul ki? b) Ha a rúd ellenkező irányban mozog, vajon a potenciálkülönbség előjele megváltozik? c) Tételezzük fel, hogy a rúd merőleges a mágneses erővonalakra, és a $\mathbf{v}$ sebességvektor 120°-os szöget zár be a mágneses indukcióvektorral. Mekkora a rúd két vége közötti potenciálkülönbség, ha a sebesség ugyanakkora, mint az a) esetben?



32-6 ábra
A 32-3 c) példához. A mozgó rúd az ábra síkjára merőleges.

MEGOLDÁS

a) A (32-11) képlet alapján

$$V = B\ell v$$

$$1\times10^{-3}\,\mathrm{V} = (2\times10^{-3}\,\mathrm{T})(0{,}1\,\mathrm{m})\,v$$

$$v = 5{,}00\,\mathrm{m/s}$$

b) Ha a rúd balra mozog, a $-e$ töltésű szabad elektronjaira ható $\mathbf{F} = (-e)(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ Lorentz erő felfelé irányul, vagyis a

potenciálkülönbség előjele megváltozik.

c) A 32-6 ábrán a mozgást oldalnézetből vázoltuk, vagyis a rúd az ábra síkjára merőleges. A Lorentz-erő kifejezésében, $\mathbf{F} = (-e)(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, a vektoriális szorzat miatt a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{B}$ közötti szög szinusza jelenik meg; ez az a tényező, amely az eredeti (a merőleges mozgásiránynak megfelelő) $\mathcal{E}_0$ potenciálkülönbséget az

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\sin(120^\circ) = (1\,\mathrm{mV})(0{,}866) = 0{,}866\,\mathrm{mV}$$

értékre csökkenti le. Megjegyzendő, hogy ha a vezető és a $\mathbf{B}$ vektor nem lennének egymásra merőlegesek, még egy szögkorrekciót kellene alkalmazni. A rúd két vége között akkor legnagyobb a potenciálkülönbség, ha az ℓ hosszúságú vezető, a $\mathbf{v}$ sebességvektor és a $\mathbf{B}$ indukcióvektor egymásra páronként merőlegesek.

Megjegyzések

A fentiekben az indukált feszültség keltésének két módját mutattuk meg: feszültség indukálódhat a vezető stacionárius mágneses erőtérben való mozgatásakor, illetve, ha a nyugvó áramkör változó mágneses erőtérben van. Mindkét esetet a Faraday törvény írja le:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -\left[\underbrace{B\frac{dA}{dt}}_{①} + \underbrace{A\frac{dB}{dt}}_{②}\right] \qquad \textbf{(32-12)}$$

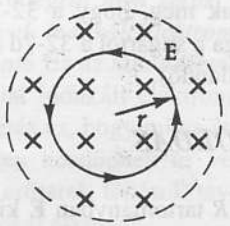
A 32-4 ábrán szemléltetett példában, a mozgó rúdban indukált feszültséget az ① tag adja meg; de ugyanerre az eredményre vezet a Lorentz törvény alkalmazása is. Faraday nagy felfedezése a ② tag. Azt ugyanis, hogy nyugvó A felületű áramhurokban a változó mágneses erőtér feszültséget indukál, semmilyen korábbi fizikai törvény nem mondta ki. Faraday mutatta meg először ennek az effektusnak a létezését. Továbbá e törvény szerint az inerciarendszerek az indukció szempontjából is egyenértékűek: a jelenség leírására egyaránt alkalmas az álló hurokhoz rögzített koordinátarendszer (amelyben a mágnes mozog) és a mágneshez rögzített koordinátarendszer, (amelyben a hurok mozog). Ez az *invarianciaelv* Einstein relativitáselméletének egyik fontos alapja; ezért lett Einstein első relativitáselmélettel kapcsolatos cikkének címe a következő: „Mozgó testek elektrodinamikájáról".

Mint azt már említettük, Faraday törvényének fontos következménye, hogy indukált elektromos erőtér még akkor is kialakul, ha *konkrét anyag nincs is jelen*. A 32-7a ábrán időben változó mágneses erőteret mutatunk be, ahol a változás sebessége állandó. Ha ebben a térben, a mágneses erővonalakra merőlegesen köralakú hurok helyezkedik el, akkor a hurokban a változó mágneses fluxus hatására feszültség indukálódik, melynek nagyságát a

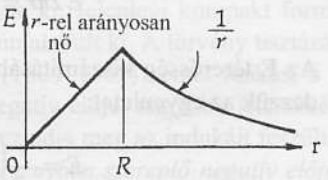
B a papír síkjába befelé irányul



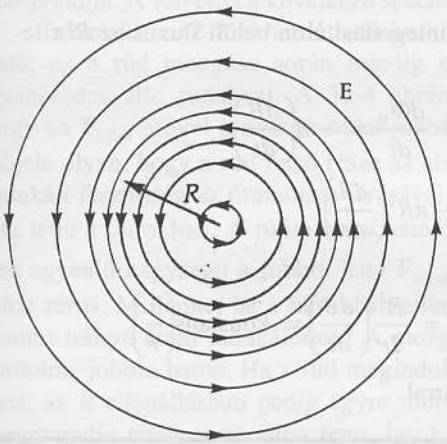
a) Az r sugarú vezető hurkot a homogén, növekvő nagyságú mágneses erőtérben szimmetrikusan helyezzük el. A gyűrű kerülete mentén $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\ell$ feszültség indukálódik. (Ha **B** csökkenne, **E** iránya ellentétes lenne.)



b) Az integrálási út mentén az **E** térerősség akkor is változatlan marad, ha a vezetőt eltávolítjuk.



Az indukált **E** térerősség változása a sugár mentén (vö. a 32-4 ábrával).



c) Ha az a) ábrán vázolt térerősség növekszik a mágneses erőtér tartományán belül és azon kívül is, akkor **E** térerősségű elektromos erőtér jön létre.

32-7 ábra
Az R sugarú köralakú tartományban a homogén mágneses erőtér nagysága egyenletesen növekszik, azaz dB/dt = konstans.

(zárt) hurok mentén vett $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\ell$ zárt görbementi integrál adja meg. Így kaphatjuk meg Faraday törvényének legáltalánosabb alakját:

A Faraday törvény
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(32-13)}$$

Ebben az egyenletben semmiféle utalás nincs vezető anyagokra, töltésekre vagy áramokra: a jelenség az anyagi hordozótól független, „üres" térben játszódik le. *A változó mágneses erőtér elektromos erőteret hoz létre.* Az elektromos erőtér akkor is létezik, ha a vezető hurkot eltávolítjuk. A 32-7c ábrán az ilyen, változó mágneses erőtér által indukált **E** elektromos térerősség szerkezetét mutatjuk be. A Faraday törvény bármely zárt görbére alkalmazható; nem szükséges hogy az éppen köralakú legyen.

32-4 PÉLDA

Mutassuk meg, hogy a 32-7 ábrán látható esetben az **E** térerősség nagysága a sugártól a 32-7d ábrán vázoltak szerint függ (feltéve, hogy *dB/dt* állandó).

MEGOLDÁS

Az $r < R$ tartományban **E** kiszámításához, **B** szimmetriájának megfelelően, válasszunk r sugarú köralakú integrálási utat.
Faraday törvénye szerint

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\left(\frac{dB}{dt}\right)$$

$$E2\pi r = -\pi r^2\left(\frac{dB}{dt}\right)$$

Az **E** térerősség kiszámításához elhagyjuk a negatív előjelet és átrendezzük az egyenletet:

$$E = \frac{r}{2}\left(\frac{dB}{dt}\right) = \text{konstans}\cdot r$$

Az $r > R$ tartományban az integrálási úton belüli fluxus az $R^2\pi$ terület fluxusa, tehát

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\left(\frac{dB}{dt}\right)$$

$$E2\pi r = -\pi R^2\left(\frac{dB}{dt}\right)$$

A térerősség nagysága tehát $E = \frac{R^2}{2r}\left(\frac{dB}{dt}\right) = \text{konstans}\left(\frac{1}{r}\right)$

azaz fordítva arányos az r sugárral.

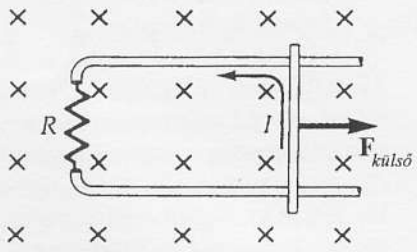
Elektromos erőterek és az indukált feszültség

Az előző fejezetekben olyan elektromos erőterek tulajdonságait tanulmányoztuk, amelyek állandó elektromos töltésektől származtak. Ezek *konzervatív* erőterek, ugyanis tetszőleges két pont között definiálható a két pont közötti úttól független potenciálkülönbség.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell \qquad \textbf{(32-14)}$$

A konzervatív erőtérre jellemző, hogy ha a fenti összefüggésben a két végpontot (a és b) egyesítjük, azaz zárt görbe mentén integrálunk, akkor zérust kapunk:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\ell = 0 \qquad \textbf{(32-15)}$$



32-8 ábra

Alkalmazzuk most a Faraday törvényt változó mágneses térbe helyezett zárt hurok esetére (32-7b ábra). A B változása során a hurokban $\mathcal{E}$ feszültség indukálódik, amelyet az $\oint \mathbf{E}\cdot d\ell$ zárt görbementi integrállal határozhatunk meg:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \qquad \textbf{(32-16)}$$

ahol $d\ell$ az S felületet körülvevő C görbén fut végig. $d\mathbf{A}$ irányát a jobbkézszabály adja meg: jobb kezünket fordítsuk úgy, hogy a behajlított ujjaink a $d\ell$ vektor irányába mutassanak; ekkor a kinyújtott hüvelykujjunk $d\mathbf{A}$ irányába mutat. *Minthogy a zárt hurok mentén vett integrál nem zérus, az indukált elektromos erőtér nem konzervatív; más szóval, indukált elektromos erőterek esetében elektromos potenciál nem definiálható* Ez az álló töltések létrehozta statikus, és a változó mágneses erőterek által indukált elektromos erőterek közötti legfontosabb különbség. További eltérés az, hogy míg a statikus töltések elektromos erővonalai mindig töltéseken kezdődnek és végződnek, a változó mágneses erőterek által létrehozott erőterek töltések távollétében is létezhetnek, és erővonalaik mindig zárt hurkokat alkotnak.

32.4 A Lenz törvény

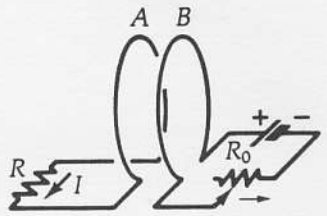
A Faraday törvény tartalmát Faraday maga eredetileg meglehetősen nehézkes módon, több különböző összefüggéssel fejezte ki. Jelenlegi kompakt formája csak később, több más kutató munkája nyomán alakult ki. A törvény tisztázásában jelentős szerepet játszott Heinrich Lenz (1804–1865) német fizikus, ő vezette be a formulába a negatív előjelet. A negatív előjel nagyobb jelentőségű, mint azt első ránézésre gondolnánk; ugyanis ez adja meg az indukált feszültség helyes irányát. *A Lenz törvény a Faraday törvényben szereplő negatív előjelet interpretálja.* A törvényt a következő speciális eset elemzésével illusztráljuk:

Tekintsük a 32-8 ábrán látható hurkot, amelynek egyik oldala mozgatható; ez a rúd mozgása során mindig elektromos kontaktusban marad a szomszédos álló rudakkal. A 32-4 ábrán vázoltakkal kapcsolatban láttuk, hogy ha $\mathbf{F}_{\text{külső}}$ erővel a mozgó rudat jobbfelé húzzuk, az indukált feszültség előjele olyan, hogy a rúd felső része az alsóhoz képest pozitívvá válik; ez az indukált feszültség az óramutató járásával ellentétes irányban folyó I áramot hoz létre a hurokban. A rúdra balra ható $\mathbf{F}_{\text{mágnes}} = I\ell \times \mathbf{B}$ erő hat, amely éppen egyenlő nagyságú a jobbra ható $\mathbf{F}_{\text{külső}}$ erővel; a rúdra ható erők eredője tehát zérus. Mi lenne, ha a hurokban ellentétes, azaz az óramutató járásával azonos irányú áram indukálódna? A mozgatható rúdra ható erő iránya megfordulna, jobbra hatna. Ha a rúd megindulna, a mágneses erő tovább gyorsítaná, az R ellenállásban pedig egyre több hő fejlődne – vagyis az energiamegmaradás tétele nem állna fenn. Így hát azt a következtetést kell levonnunk, hogy *bármely, az indukált feszültségből származó hatásnak gátolnia kell a feszültséget indukáló hatást.* Ezt a tételt fogalmazta meg Lenz, és ennek a gondolatmenetnek felel meg a negatív előjel az $\mathcal{E} = -d\Phi_B / dt$ egyenletben.

A Lenz törvény más módon való megértéséhez juthatunk a vezetőhurok által körülzárt fluxus változásának elemzésével. Amikor a rudat jobbra húzzuk, a hurok területén az (ábrába befelé tartó irányú) mágneses erővonalak száma növekszik. Az indukált áram mágneses erővonalai az ábrából kifelé tartó irányúak (ellenőrzésül alkalmazzuk az áramvezető mágneses erőterének irányára vonatkozó jobbkéz-szabályt), azaz az áramot létrehozó fluxus*változással* ellentétes irányúak.

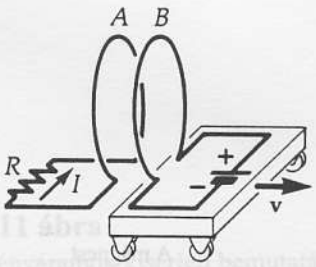
A Lenz törvény: **Zárt hurokban olyan irányú áram indukálódik, hogy mágneses erőtere az áramot létrehozó <u>fluxusváltozást csökkentse</u>.**

Jegyezzük meg, hogy az indukált áram mágneses erőtere nem a mágneses fluxust, hanem a *fluxus változásának* hatását csökkenti (elég gyakori hiba, hogy e különbségről elfelejtkeznek). Még akkor is, ha az áramkör nem alkot zárt hurkot (vagyis nincs indukált áram), egy elképzelt hurokban meg tudjuk határozni az indukált áram irányát. A 32-9 ábrán példák láthatók; az elemzés tanulmányozását itt abbahagyva vajon meg tudjuk-e határozni Lenz törvényének alkalmazásával az R ellenállásokon folyó áram irányát? Próbáljuk meg!

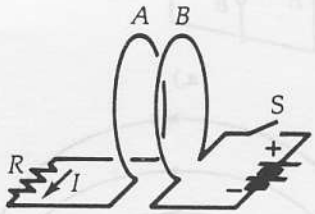


(a kontaktust jobbra mozgatjuk)

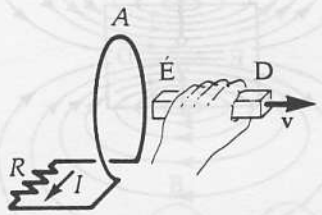
a) A B hurokban folyó áramot a változtatható ellenállás csúszókontaktusának jobbramozgatásával megváltoztatjuk.



b) A tekercseket egymástól eltávolítjuk

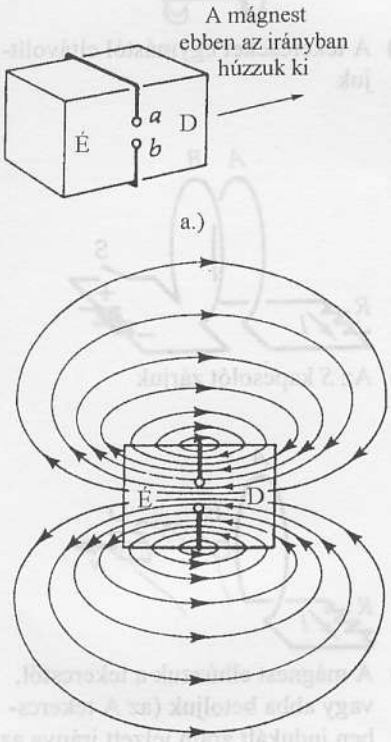


c) Az S kapcsolót zárjuk



d) A mágnest elhúzzuk a tekercstől, vagy abba betoljuk (az A tekercsben indukált áram jelzett iránya az előbbi esetre vonatkozik).

32-9 ábra
Az A vezető hurokban feszültség indukálható a mágneses fluxus megváltoztatásával. Határozzuk meg az I áramirányokat magunk is!



b) A permanens mágnes erővonalai teljes zárt hurkot alkotnak, melyek a mágnesből az északi saroknál lépnek ki, és a déli saroknál lépnek be. A mágnes belsejében az erővonalak a déli pólus felől az északi felé haladnak.

32-10 ábra
A 32-5 példához

Lenz törvényét a 32-9 ábrán illusztrált esetekben az alábbiak szerint alkalmazzuk:

a) Kezdetben, a *B* hurokban folyó áram olyan mágneses erővonalakat hoz létre, amelyek az *A* hurok felületén balról jobbra mutatnak. A változtatható ellenállás csúszókontaktusának az ábrán feltüntetett irányban való mozgatásakor az áram a *B* tekercsben növekszik, ami miatt *A* síkját balról jobbra még több mágneses erővonal metszi. Az *A* tekercsben indukált áram olyan irányú, hogy mágneses erővonalai *A* síkját jobbról balra metszik át, csökkentve a fluxus növekedésének ütemét.

b) Kezdetben mindkét hurok síkját a mágneses erővonalak balról jobbra metszik. A *B* hurkot jobbra mozgatva az *A* hurok belsejét kevesebb erővonal metszi; az utóbbiban tehát olyan irányú áram indukálódik, amelynek mágneses erőtere fékezi a fluxuscsökkenés ütemét.

c) A jobb oldali áramkörben lévő *S* kapcsoló zárásakor balról jobbra irányuló mágneses erővonalak jelennek meg az *A* hurok belsejében. Az *A* hurokban indukált áram mágneses erővonalai tehát a hurok belsejében jobbról balra mutatnak, vagyis fékezik a mágneses erőtér kialakulásának ütemét.

d) A mágneses erővonalak a mágnes északi pólusából erednek és a déli póluson végződnek. Kezdetben tehát az erővonalak az *A* hurok belsejét jobbról balra lépik át. Amint a mágnest jobbra mozgatjuk, az *A* hurok felületén a fluxus csökken; ennélfogva az *A* hurokban a jelzett irányú áram balra mutató mágneses erőtere fékezi a fluxus csökkenését.

32-5 PÉLDA

A 32-10a ábrán vázolt rögzített hurok belsejéből kihúzzuk a permanens mágnest. Állapítsuk meg a hurok két végpontja (*a* és *b*) között az indukált feszültség *polaritását,* vagyis azt, hogy *a* és *b* pontok közül melyiknek a potenciálja nagyobb.

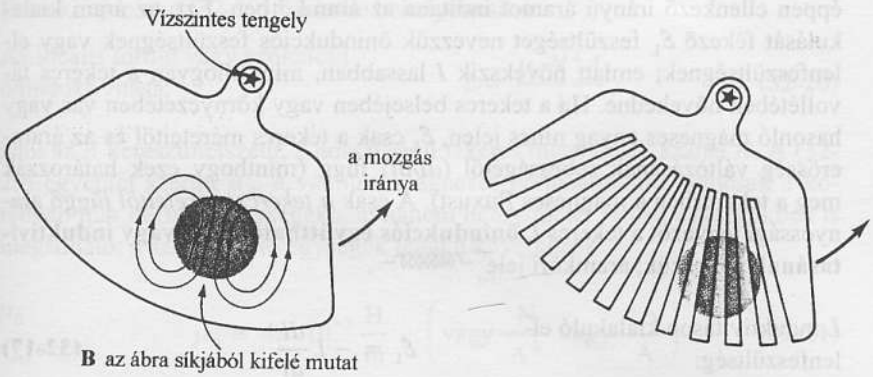
MEGOLDÁS

A mágneses erővonalak mindig teljes, zárt hurkot alkotnak. Minthogy a mágneses erővonalak a mágnes belsejében záródnak, a hurok belsejében az erővonalak kezdetben jobbról balra mutatnak (32-10b ábra). Ha az *a* és *b* pontokat rövidrezárva zárt hurkot hoznánk létre, akkor a rövidzárat alkotó huzalban a mágnes kihúzásakor az indukált áram *b*-ből *a* felé folyna, vagyis a hurokban indukált áram olyan irányú mágneses erőteret hozna létre, amely igyekezne fenntartani a hurokban a kezdeti fluxust. (A *változás* sebességét csökkentené.) Így a *b* pont magasabb potenciálú, mint az *a* pont. Az *a* és *b pontok tulajdonképpen egy feszültségforrás kapcsai, amelyekhez ha külső huzalt csatlakoztatunk, azon át a b pontból az a pontba folyik áram.* Az indukált potenciálkülönbség független attól, hogy a pontok huzallal össze vannak-e kötve vagy sem.

A *b* pont potenciálja nagyobb.

32.5 Az örvényáramok

Vannak olyan esetek, amikor az indukált áramok számára nincs jól definiált irány kijelölve; például, ha fémdarab (inhomogén) mágneses erőtérben mozog, vagy álló fémtömbre változó mágneses tér hat, az indukált áramok a



a) Az árnyékolással jelzett tartományban a mágneses erőtér az ábra síkjából **kifelé** mutat. Ezen a tartományon áthaladva, a fémlapban örvényáramok indukálódnak. Az áramvonalak zárt hurkokat alkotnak; a „visszatérő ágban" az áram a mágneses erőtér tartományán kívül folyik. Az örvényáramokra ható mágneses erők fékezik az örvényáramokat létrehozó mozgást.

b) A fémlapba keresztben vágott rések megszakítják az örvényáramok útját, emiatt az örvényáramok fékező hatása nagymértékben lecsökken.

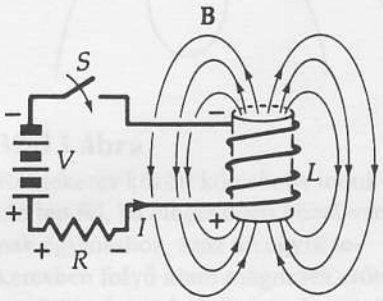
32-11 ábra
Örvényáramok kísérleti bemutatása

fémtömb belsejében, annak teljes térfogatában cirkulálnak. Mivel ezen cirkuláló áramok tulajdonságai hasonlítanak a folyadékok áramlásakor keletkező örvényekre, *örvényáramoknak* nevezzük őket.

Az örvényáramok jelenlétét a következőképpen mutatjuk meg: Nem mágneses anyagból (pl. rézből vagy alumíniumból) készült lapot függesszünk fel vízszintes tengelyre úgy, hogy a mágneses erőtérben szabadon lenghessen (32-11 ábra). A vezető anyagú lap mozgása közben a mágneses erőtér a szabad töltéshordozókra erőt gyakorol, örvényáramokat hoz létre. A Lenz törvény értelmében a fémlapban kialakuló örvényáramok mágneses tere olyan irányú, hogy a fémlapra ható $\mathbf{F} = I\ell \times \mathbf{B}$ mágneses erő az örvényáramokat létrehozó mozgást fékezze. (A fémlapra csak ott hat erő, ahol van mágneses indukció; tehát az örvényáram-hurkok mágneses erőtéren kívüli tartományában, a „visszatérő ágban" fékezőerő nem hat.) Az örvényáramok eredményeként a fémlap mozgása lefékeződik. Ezt a hatást a gyakorlatban az elektromágneses fékek egy típusában, az ún. örvényáramú fékekben is alkalmazzák. Ha a fémlapba keresztben réseket vágunk, akkor megakadályozhatjuk, hogy nagyméretű örvényáram-hurkok jöjjenek létre; ezzel az örvényáramok fékező hatását nagymértékben csökkenthetjük.

32.6 Az önindukció

Míg az ellenállások az áramkörben folyó áram nagyságát határozzák meg, a tekercsek az áramkörben folyó *áramerősség változásának ütemét* korlátozzák. E hatás illusztrálására tekintsünk ellenállásból, tekercsből és telepből álló áramkört (32-12 ábra). Az *S* kapcsoló zárásakor a nyíllal jelzett irányban *I* áram kezd el folyni. A teljes áramerősség nem pillanatszerűen alakul ki, mert amint *I* nőni kezd, a tekercsben a mágneses tér is megnövekszik. A Faraday és a Lenz törvény szerint a változó mágneses fluxus a tekercsben olyan irányú feszültséget indukál, amely fékezi a változást; azaz, az indukált feszültség polaritása olyan, (a tekercs alsó fele pozitívabb a felsőnél), hogy



32-12 ábra
Sorbakapcsolt tekercs, ellenállás és telep. Figyeljük meg, milyen polaritású feszültségek alakulnak ki az *R* és *L* áramköri elemek kapcsain az áram bekapcsolása után.

éppen ellenkező irányú áramot indítana az áramkörben. Ezt, az áram kialakulását fékező $\mathcal{E}_L$ feszültséget nevezzük önindukciós feszültségnek vagy ellenfeszültségnek; emiatt növekszik I lassabban, mint ahogyan a tekercs távollétében növekedne. Ha a tekercs belsejében vagy környezetében vas vagy hasonló mágneses anyag nincs jelen, $\mathcal{E}_L$ csak a tekercs méreteitől és az áramerősség változásának sebességétől (dI/dt) függ (minthogy ezek határozzák meg a tekercsben a mágneses fluxust). A csak *a tekercs méreteitől függő* arányossági tényezőt a tekercs L **önindukciós együtthatójának vagy induktivitásának** nevezzük; áramköri jele .

L induktivitáson kialakuló ellenfeszültség:

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \qquad \textbf{(32-17)}$$

Az induktivitás SI egysége az 1 *henry* (H)[1]. Adott tekercs L öninduktivitásának kiszámítása rendszerint elég bonyolult, főleg azért, mert nehéz kiszámítani a tekercs végének és a menetek között „kiszűrődő" mágneses térnek a hatását. Szorosan tekercselt szolenoid (vagy egy toroidtekercs) L önindukciós együtthatóját mindazonáltal ki lehet számítani, az alábbiak szerint:

Minden egyes meneten $\mathcal{E}_L = -d\Phi_B / dt$ ellenfeszültség indukálódik. Ideális esetben az N menet mindegyikén a Φ_B fluxus ugyanakkora, így

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(32-18)}$$

Ezt a (32-17) képlettel összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$L\frac{dI}{dt} = N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Mindkét oldalt integrálva és felhasználva, hogy $\Phi_B = 0$, ha $I = 0$, azt kapjuk, hogy

$$LI = N\Phi_B$$

Innen az

L önindukció:

$$L \equiv \frac{N\Phi_B}{I} \qquad \textbf{(32-19)}$$

Az $N\Phi_B$ szorzatot tekercsfluxusnak nevezzük; így L a tekercsfluxus és az áramerősség hányadosa; ez a mennyiség kizárólag a tekercs méreteitől függ. Minthogy a mágneses fluxus egysége az 1 tesla·m^2, L egysége 1 henry vagy 1 tesla·méter^2/amper (Tm^2/A). L-et gyakran a tekercs induktivitásának nevezzük.

E fejezetben korábban már megmutattuk, hogy (elhanyagolva a tekercs végeinek hatását) ideális szolenoidban a mágneses erőtér homogén és $B = \mu_0 nI$, ahol n az egységnyi hosszúságra jutó menetek száma és I az áramerősség. Ha a tekercs keresztmetszete A, a tekercsben a fluxus $\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$. Egy ℓ hosszúságú és N menetszámú szolenoid vagy toroid esetében (vagyis ha $n = N/\ell$), a tekercsfluxust az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 NIA}{\ell}$$

[1] Ezt az egységet Joseph Henry (1797-1878), amerikai fizikus tiszteletére nevezték el, aki Faradaytől függetlenül felfedezte az indukcióra vonatkozó törvényszerűségeket. Eredményeit Faraday közölte először, így az indukció alaptörvényét róla nevezték el.

Ezt a kifejezést a (32-19) képletbe behelyettesítve:

Az ideális toroid vagy szolenoid öninduktivitása:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}, \qquad \textbf{(32-20)}$$

ahol az A keresztmetszetű, ℓ hosszúságú tekercs meneteinek száma N. A (32-20) egyenlet szerint μ_0, a vákuum mágneses permeabilitása nemcsak a korábban már definiált egységekben, hanem henry/méter (H/m) egységekben is megadható; a szóbajöhető egységek tehát a következők:

μ_0 egységei:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{H}}{\text{m}} \quad \left(\text{vagy } \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \text{ vagy } \frac{\text{Tm}}{\text{A}}\right) \qquad \textbf{(32-21)}$$

32-6 PÉLDA

a) Számítsuk ki az 1 cm^2 keresztmetszetű, 10 cm hosszú és 1000 menetű szolenoid öninduktivitását. b) Mekkora az indukált ellenfeszültség, ha a tekercsen átfolyó áram erőssége egyenletesen, 15 A/s sebességgel nő?

MEGOLDÁS

a) A megadott adatok szerint a szolenoid sűrűn tekercselt és hossza az átmérőjéhez képest nagy. Így a végeinek hatását elhanyagolhatjuk. A megfelelő, SI egységekben megadott számértékeket a (32-21) egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(1000\ \text{menet})^2 (10^{-4}\ \text{m}^2)}{0{,}10\ \text{m}} = 1{,}26\ \text{mH}$$

b) A (32-17) egyenlet szerint

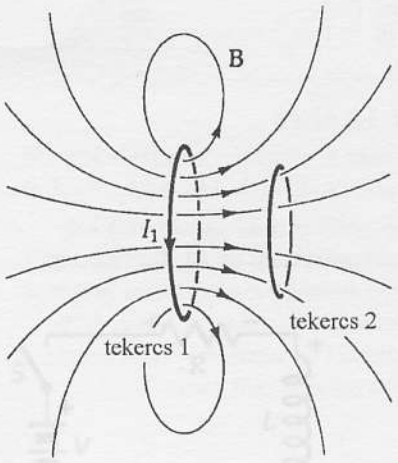
$$|\mathcal{E}| = L\frac{dI}{dt} = (1{,}26 \times 10^{-3}\ \text{H})\left(15\,\frac{\text{A}}{\text{s}}\right) = 18{,}9\ \text{mV}$$

32.7 A kölcsönös indukció

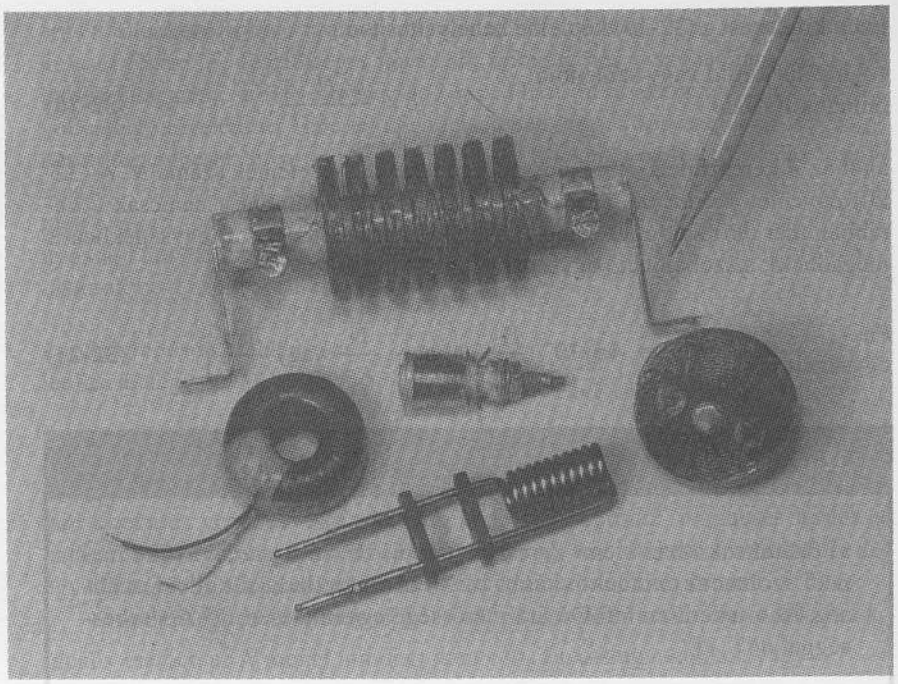
Az előző részben a tekercs L öninduktivitását a változó áramerősség hatására indukálódott ellenfeszültség fogalmának bevezetésével definiáltuk. Az ellenfeszültség kialakulásához hasonló hatás akkor is fellép, ha két tekercs elég közel van egymáshoz és az egyik tekercs mágneses erőtere a másikon is áthatol; ilyenkor ugyanis ha valamelyik tekercsben az áramerősség megváltozik, a másik tekercsben feszültséget indukál (32-13 ábra). Ezt a folyamatot *kölcsönös indukciónak* nevezzük, és az alábbiak szerint definiáljuk: Ha a 2-es tekercsben az áramerősség változási sebessége dI/dt, az 1-es tekercsben indukált feszültség nagyságát az

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

egyenlet adja meg, ahol M_{12} az 1-es tekercs 2-esre vonatkozó **kölcsönös induktivitása**. A kölcsönös induktivitás egysége ugyanúgy az 1 henry, mint az öninduktivitásé.



32-13 ábra
Két tekercs között kölcsönös indukció lép fel, ha elegendően közel vannak egymáshoz, azaz az egyik tekercsben folyó áram mágneses erőtere a másik tekercs helyén is számottevő. (Az ábrán az 1. tekercsben folyó áram mágneses fluxusa a 2. tekercsen jelentős.) A hatás kölcsönös: *bármelyik* tekercsben is *változik* az áramerősség, *a másik* tekercsben *feszültséget indukál*.



32-14 ábra
Elektronikus áramkörökben alkalmazott kisméretű tekercsek.

Hasonlóképpen, ha az 1-es tekercsben az áramerősség változik, a 2-es tekercsben feszültség indukálódik, melynek nagysága:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

ahol M_{21} a 2-es tekercs 1-esre vonatkozó kölcsönös induktivitása. Itt nem közölt módon bebizonyítható, hogy

$$M_{12} = M_{21}. \qquad \textbf{(32-22)}$$

Így az index nélkül írt M jelöli a továbbiakban a kölcsönös induktivitást, vagyis

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{dI_2}{dt} \text{ és } \mathcal{E}_2 = -M\frac{dI_1}{dt}. \qquad \textbf{(32-23)}$$

Minthogy a kölcsönös induktivitás az egyik tekercsben folyó I áram hatására a másik tekercsen létrejövő $N\Phi_B$ tekercsfluxustól függ, a (32-19) egyenlettel fennálló analógia alapján azt írhatjuk, hogy

M kölcsönös indukt.: $$M = \frac{N_2\Phi_{B_2}}{I_1} \quad \text{és} \quad M = \frac{N_1\Phi_{B_1}}{I_2} \qquad \textbf{(32-24)}$$

M SI egysége ugyanaz, mint L egysége: a henry (H). Feltéve, hogy vas vagy hasonló mágnesezhető anyag nincs a tekercsek közelében (vagy belsejében), M értéke geometriai tényezőktől függ, például attól, hogy milyen távol vannak egymástól és milyen egymáshoz képest a térbeli helyzetük. M számértékének kiszámítása többnyire igen bonyolult, kivételt képez az az eset, amikor a két tekercset azonos mag köré tekercselték, tehát az egyik tekercstől származó teljes fluxus áthalad a másikon.

A kölcsönös indukció jelenségére gyakorlati példa a telefonkábelek közötti „áthallás": amikor az egyik kábelben az áramerősség változik, a szomszédos kábelben feszültség indukálódik. (Kapacitív hatások hasonló problémákat okozhatnak.) Egy másik példa a hangfrekvenciás erősítőkben (pl. rádióban) fellépő „brumm": a hálózatból származó váltakozó áramok válta-

kozó feszültséget indukálhatnak bizonyos érzékeny áramkörökben. (Az effektus csökkenthető az áramkörök megfelelő mágneses árnyékolásával vagy elegendően távol helyezésével.)

32-7 PÉLDA

Egy $\ell_1 = 30\text{cm}$ hosszú, $A = 6\ \text{cm}^2$ keresztmetszetű, $N_1 = 500$ menetű szolenoidra egy másik $N_2 = 20$ menetű tekercset csévélünk szorosan, a másik tekercs közepe körül (32-15 ábra). Számítsuk ki a két tekercs közötti kölcsönös indukciót.

MEGOLDÁS

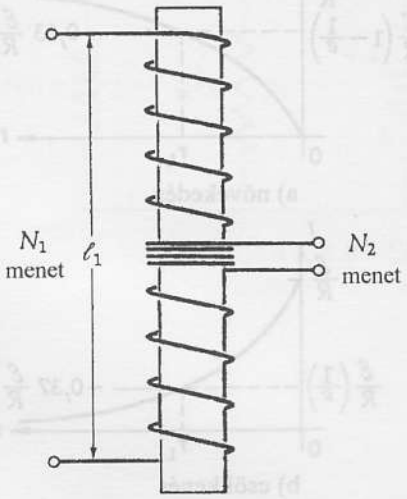
Minthogy a tekercseket szorosan egymásra csévéltük, keresztmetszetük és azon a Φ_B mágneses fluxus azonos. A (32-20) egyenlet alapján, az I_1 árammal átjárt szolenoid közepén a mágneses fluxus nagysága

$$\Phi_{B_1} = \Phi_{B_2} = \frac{\mu_0 A N_1 I_1}{\ell_1}$$

Az M kölcsönös induktivitás tehát

$$M = \frac{N_1 \Phi_{B_2}}{I_1} = \frac{\mu_0 A N_1 N_2 I_1}{I_1 \ell_1} = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{\ell_1}$$

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(6 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(500)(20)}{0{,}30\ \text{m}} = 25{,}1\,\mu\text{H}$$



32-15 ábra
A 32-15 példához.
Két, azonos magra csévélt tekercs kölcsönös induktivitásának számításához.

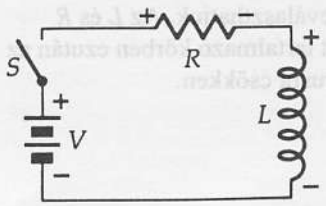
32.8 RL áramkörök

Minthogy a tekercsek nem zérus ellenállású huzalból készülnek[2], mindig van valamekkora, a huzal fajlagos ellenállásától, hosszától és keresztmetszetétől függő ellenállásuk is. A tekercsek ellenállását (ha egyáltalán számottevő) rendszerint hozzáadjuk az áramkör egyéb ellenállásához, és így az R ellenállással sorbakötve, „tiszta" L induktivitásunk marad. Az ilyen RL körök elég gyakoriak az elektromos áramkörökben.

Tekintsük a 32-16 ábrán látható RL áramkört. Amikor az S kapcsolót zárjuk, a telep „megpróbál" valamekkora áramot áthajtani a tekercsen. Az áramerősség növekedésével a tekercsben indukálódó ellenfeszültségnek olyan a hatása, mintha a tekercs egy (ellentétes polaritású) telep lenne. Növekvő áramerősség esetén az L kapcsai közötti potenciálkülönbség $\mathcal{E}_L = -L dI/dt$, polaritását az ábrán + és – jelekkel jelöltük. A kapcsoló zárása utáni minden időpillanatban érvényesnek kell lennie Kirchhoff huroktörvényének. Az egyes elemek kapcsainak polaritását megjelölve felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

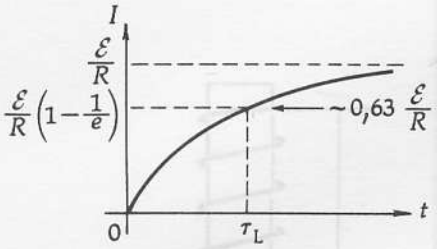
$$\Sigma \mathcal{E} = 0$$

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0. \qquad (32\text{-}25)$$

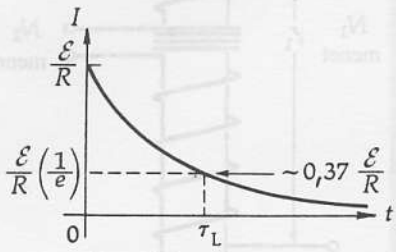


32-16 ábra
Soros RL áramkör, a tekercsben változó áramerősség elemzéséhez. A jelzett polaritások az S kapcsoló zárása után kialakuló viszonyokat tükrözik.

[2] A szupravezetők kivételt képeznek, mert ellenállásuk az un. kritikus hőmérséklet alatt ténylegesen zérussá válik.

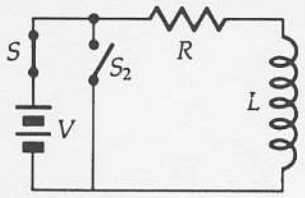


a) növekedés



b) csökkenés

32-17 ábra
Az áramerősség növekedése és csökkenése soros *RL* áramkörben.



32-18 ábra
Miután a tekercsen keresztül állandó áramerősség alakul ki, az S_2 rövidzárkapcsolót zárjuk; ezután az *S* kapcsoló nyitásával az *RL* áramkörben folyó áram megváltoztatása nélkül a telepet leválaszthatjuk. Az *L* és *R* elemeket tartalmazó körben ezután az áram zérusra csökken.

E differenciálegyenletet megoldva[3] az *RC* áramkörökre jellemzőhöz hasonló *I(t)* összefüggést kapunk (vö. a 29.6 fejezetben leírtakkal):

Az áramerősség növekedése egy *RL* áramkörben

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad \textbf{(32-26)}$$

Az *I(t)* függvény a 32-17a ábrán látható. Az exponenciális tag miatt az áramerősség aszimptotikusan közelít a végső, maximális értékéhez ($\mathcal{E}/R$). A növekedés üteme az *L/R* hányadostól függ; minél nagyobb ennek az értéke, annál lassabban növekszik az áramerősség. Az *L/R* hányadost az *RL* áramkör τ_L időállandójának nevezzük. A kapcsoló zárása után egy időállandónyi idő elteltével az áramerősség végső, maximális értékének $(1-1/e) \approx 0{,}63$-szorosát éri el.

Miután az állandósult (stacionárius) állapot beállt, (vagyis az áramerősség állandó ($\mathcal{E}/R$) és a tekercsen nincs feszültségesés), a 32-18 ábrán vázolt módon az *R* és *L* elemeket a teleptől elválasztjuk, majd rövidre zárjuk[4]. Vizsgáljuk meg, hogyan csökken az áramerősség az idő függvényében. Az S_2 kapcsoló zárása után az S_2 kapcsolón, az *R* és *L* elemeken keresztül az áram zavartalanul tovább folyhat; az *S* kapcsoló nyitásával pedig a telepet választhatjuk el az áramkör többi részeitől. Minthogy az áramkörben a továbbiakban

---

[3] Ezt a differenciálegyenletet a *változók szétválasztásának* nevezett módszerrel oldjuk meg. A (32-25) egyenlet átrendezésével az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L}$$

Itt az *I* és *t* változókat tartalmazó tagok az egyenlet két oldalán találhatók. Az egyenlet mindkét oldalát integráljuk:

$$\int_0^I \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

A G-II. függelék integráltáblázatát használva azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{R}\ln(\mathcal{E} - IR) = \frac{t}{L} + c$$

ahol a *c* integrálási állandót a kezdeti feltételek segítségével határozhatjuk meg: Ha $t_1 = 0$ időpillanatban $I_1 = 0$, akkor $c = -(1/R)\ln\mathcal{E}$. Ezt az értéket a fenti egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{R}{L}t$$

Ha $\ln y = x$, akkor $y = e^x$, így

$$\left(\frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{E}}\right) = e^{-(R/L)t}$$

Innen *I*-t kifejezve:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$$

[4] Gyakorlati probléma: Ha az eredeti (32-16 ábrán vázolt) áramkörben lévő *S* kapcsolót nyitjuk, a tekercsben a gyors áramerősségváltozás hatására nagyon nagy feszültség indukálódik, és ez, Kirchhoff huroktörvényének következményeként, a kapcsoló kontaktusai között jelenik meg. Az itt kialakuló nagy elektromos térerősség miatt szikrázás, ívkisülés indul meg. Általában, emiatt, az induktív tagokat is tartalmazó áramkörök kikapcsolásakor gondoskodni kell arról hogy szikrázás, ívkisülés ne forduljon elő.
Az ábra szerinti „rövidzárásos" módszer, amelynek során az áramot nem szakítjuk meg; másféle gyakorlati problémát okoz: egyes telepek komolyan károsodnak, ha kapcsaikat másodpercekre is rövidrezárják. Mégis, mihelyt az S_2 kapcsoló zárva van, a telepet az áramkörről az *S* kapcsoló nyitásával leválaszthatjuk anélkül, hogy befolyásolnánk az áramkör többi részében folyó áramot. Ebben az elméleti levezetésben most ne törődjünk a valóságban adódó bosszantó apróságokkal – laboratóriumi munka során viszont nem szabad semmibevenni őket.

telep nincs, az áramerősség csökkenni kezd, bár a tekercsben indukált ellenfeszültség miatt egyre lassabban. Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva:

$$\Sigma\mathcal{E} = 0\,,$$
$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0\,. \qquad \textbf{(32-27)}$$

Ezt az egyenletet a (32-25) egyenlet megoldásánál alkalmazott módszer szerint oldjuk meg (lásd még a 32C-43 feladatot); ennek eredménye szerint

Az áramerősség csökkenése egy *RL* áramkörben:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-(R/L)t} \qquad \textbf{(32-28)}$$

Az áramerősség egy időállandónyi ($\tau_L = L/R$) idő alatt csökken kezdeti értékéről ($I_0 = \mathcal{E}/R$) *e*-ed részére (azaz kb. 37%-ára). Az *I(t)* függvény a 32-17b ábrán látható.

Az *RL* áramkörökben mérhető exponenciális áramnövekedés- és csökkenés hasonlít az *RC* körökben észlelhető exponenciális változásokhoz. (Érdemes újra elolvasni a 29.6 fejezetben az *RC* körökről írottakat; a hasonlóságok és analógiák nagymértékben segítik a jelenségek megértését.) Soros *RL* körökben (állandó feszültségű feszültségforrást feltételezve) a tekercsekre a következők jellemzők:

1. *Tekercsen átfolyó áram nem változhat ugrásszerűen. Az időben exponenciálisan változó áramerősség változási sebességét az áramkör L/R időállandója határozza meg.*
2. *Ha a tekercs árama a stacionárius állapotnak megfelelő állandó, akkor a „tiszta" induktivitáson (az „ideális" tekercsen) a feszültségesés mindig zérus.*

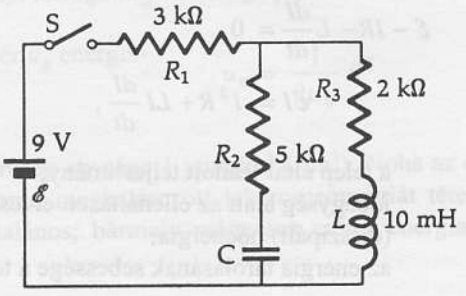
32-8 PÉLDA

Tekintsük a 32-19 ábrán látható áramkört. Számítsuk ki az R_1, R_2 és R_3 ellenállásokon át folyó stacionárius áram erősségét.

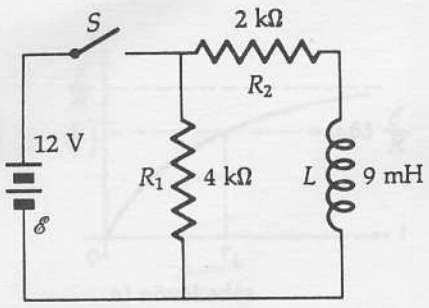
MEGOLDÁS

A kondenzátor jelenléte miatt az R_2-t tartalmazó ágban stacionárius áram nem folyhat, vagyis $I_2 = 0$. (Ez az ág, egyenáramú szempontból „szakadás"). Minthogy a tekercsen eső feszültség stacionárius állapotban zérus, $\mathcal{E}_L = 0$, az áram az R_3-at tartalmazó ágban (és minthogy $I_2 = 0$, a főágban is):

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3} = \frac{9\,\text{V}}{3\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega} = 1{,}80\,\text{mA}$$



32-19 ábra
A 32-8 példához



32-20 ábra
A 32-9 példához

32-9 PÉLDA

A 32-20 ábrán látható áramkör S kapcsolóját zárjuk és megvárjuk, amíg az áramerősség állandósul. Ekkor, a $t = 0$ időpontban a kapcsolót nyitjuk. a) Számítsuk ki a tekercs kapcsai közötti $(\mathcal{E}_L)_0$ feszültséget a kapcsoló nyitása utáni időpontban. b) Mennyi idő alatt csökken az áramerősség kezdeti értékének egyhatodára?

MEGOLDÁS

a) Az áramerősség állandósulása után a tekercsen nincs feszültségesés, így a tekercset is tartalmazó ágban az áramerősséget R_2 határozza meg:

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{12\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = \underline{\underline{6{,}00\,\text{mA}}}$$

A kapcsoló nyitása utáni időpontban a tekercsen áthaladó áram erőssége ugyanakkora, mint a nyitás előtt: 6 mA. (Gondoljunk arra, hogy a tekercsben az áramerősség nem változhat ugrásszerűen.) A tekercsben indukált ellenfeszültség kezdetben ekkora áramot vezet át az R_1-et és R_2-t tartalmazó hurkon, vagyis

$$(\mathcal{E}_L)_0 = IR = (6{,}0\,\text{mA})(6\,\text{k}\Omega) = 36{,}0\,\text{V}$$

Az indukált ellenfeszültség polaritása az áram *változását* lassítja: a tekercs alsó vége a felsőhöz képest pozitív, ami „megpróbálja" fenntartani az áramot. (Lásd még a 32C-43 feladatot.)

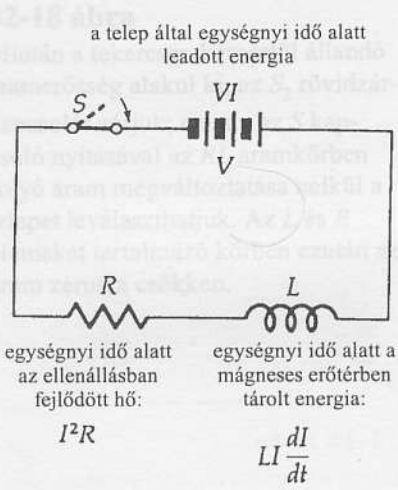
b) Ennek az áramkörnek az időállandója $L/(R_1+R_2) = 9\,\text{mH}/6\,\text{k}\Omega = 1{,}5\,\mu\text{s}$. Így, a keresett időtartamot a következőképpen lehet kiszámítani:

$$I = I_0 e^{-(R/L)t},$$

$$\frac{1}{6} = e^{-(R/L)t},$$

$$\ln 6 = \left(\frac{R}{L}\right)t,$$

$$t = \left(\frac{L}{R}\right)\ln 6 = (1{,}5\,\mu\text{s})\ln 6 = 2{,}69\,\mu\text{s}$$



32-21 ábra
A kapcsolót a $t = 0$ időpontban zárjuk. Mialatt az áramerősség a stacionárius értékéhez közelít, a telep által leadott energia egy része a tekercsben tárolódik, a másik része pedig az R ellenálláson hővé alakul.

32.9 Az önindukciós tekercs energiája

A tekercsben tárolt energia kiszámításához alkalmazzuk Kirchhoff huroktörvényét a 32-21 ábra áramkörére, majd a kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg I-vel és rendezzük át:

$$\Sigma\mathcal{E} = 0,$$

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0, \qquad (32\text{-}29)$$

$$\mathcal{E}I = I^2R + LI\frac{dI}{dt},$$

ahol
- $\mathcal{E}I$ — a telep által leadott teljesítmény;
- I^2R — időegység alatt az ellenálláson elveszített (disszipált) hőenergia;
- $LI(dI/dt)$ — az energia tárolásának sebessége a tekercsben.

Jelöljük U_L-lel a tekercsben tárolt energiát. Így

$$\frac{dU_L}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

vagy

$$dU_L = LIdI$$

Minthogy $U_L = 0$, ha $I = 0$, integrálással azt kapjuk, hogy

A tekercsben tárolt energia:

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \textbf{(32-30)}$$

Figyeljük meg a tekercsben és a kondenzátorban tárolt energiát megadó összefüggések alakjának hasonlóságát:

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \textbf{(32-31)}$$

A kondenzátor és tekercs energiatároló tulajdonsága között az a fontos különbség van: hogy ha a feltöltött kondenzátort kivesszük az áramkörből benne tárolt energiát megtartja, a tekercsek csak addig tárolnak energiát, amíg rajtuk áram folyik át.

Emlékezzünk vissza arra, hogy a kondenzátorban tárolt energia $U_C = \frac{1}{2}CV^2$ kifejezéséből kiindulva vezettük le az elektromos erőtér energiasűrűségét megadó

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \textbf{(32-32)}$$

kifejezést. A mágneses erőtér esetében hasonló eljárást követünk. Tekintsünk egy toroidtekercset, amelyet (formálisan) hosszú szolenoidból készíthetünk úgy, hogy a végeit összehajlítjuk és összeillesztjük (32-22 ábra). A tekercs menetei legyenek nagyon szorosan csévélve, így a mágneses erőtér túlnyomó része az ismert térfogatú tórusz belsejében van. Ha a tórusz sugarához képest az egyes menetek sugara elhanyagolhatóan kicsi (vagyis a (31-6) képletben R a tekercs belsejében állandónak tekinthető), a tóruszon belül B mágneses indukcióvektor homogénnek tekinthető és nagysága ugyanakkora, mint a hosszú egyenes szolenoid belsejében. A (31-6) szerint:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \quad \text{és} \quad B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

ahol ℓ a tekercshossz (a tórusz kerülete). Az I értékét kifejezve és a fenti értékeket a (32-30) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

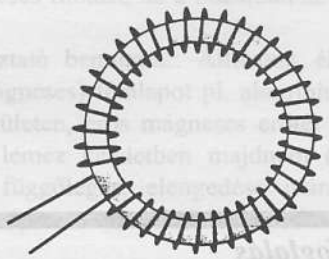
$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\right)\left(\frac{B\ell}{\mu_0 N}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)(A\ell)$$

Minthogy $A\ell$ a tórusz belsejének térfogata, a mágneses erőtér u_B energiasűrűsége (egységnyi térfogatra jutó energiája):

A mágneses tér u_B energiasűrűsége

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad \textbf{(32-33)}$$

Az energiasűrűség egysége 1 joule/m^3 (J/m^3). Noha az egyszerűség kedvéért a számítás során meghatározott tekercsgeometriát tételeztünk fel, a kapott eredmény általános; bármely mágneses erőtér energiasűrűségére érvényes.



32-22 ábra
A toroidtekercs tóruszalakú magra sűrűn csévélt tekercs. Ha a tórusz sugara a tekercs meneteinek sugaránál sokkal nagyobb, a mágneses erőtér a tekercs belsejében nagyjából homogén (ugyanolyan, mint a hosszú, egyenes szolenoidban).

Vegyük észre az elektromos erőtér energiasűrűségét megadó képlettel való hasonlóságot[5]:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

32-10 PÉLDA

Számítsuk ki az előző fejezet 31-10a ábráján bemutatott permanens mágnes pólusai közötti hézagban tárolt energiát. Tételezzük fel, hogy a pólusok között a mágneses erőtér homogén és fluxussűrűsége $B = 0{,}5\text{T}$. A hézag térfogata 2 cm^3.

MEGOLDÁS

A (32-33) képlet alapján az u_B energiasűrűség:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{(0{,}5\text{T})^2}{2(4\pi\times10^{-7}\,\text{H/m})} = 9{,}95\times10^4\,\text{J/m}^3$$

A V térfogatban tárolt teljes U_B energia:

$$U_B = u_B V = \left(9{,}95\times10^4\,\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right)(2{,}0\times10^{-6}\,\text{m}^3) = 0{,}199\,\text{J}$$

Míg az elektromos erőtérben tárolt energia kinyerhető, az állandó mágnes által keltett mágneses erőtérben tárolt energia kinyerésére eddig még *nem dolgoztak ki eljárást*. Goldoljuk csak meg, micsoda energiatartalékok rejlenek a Föld mágneses erőterében!

Összefoglalás

A Faraday törvény: $\mathcal{E}_L = -N\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

vagy $\oint \mathbf{E}\cdot d\ell = -\dfrac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$

A Lenz törvény: Zárt hurokban indukált áram olyan irányú, hogy a mágneses erőtere fékezze a létrehozó fluxus változását.

A mozgással indukált feszültség akkor keletkezik, ha vezetőt mozgatunk stacionárius mágneses erőtérben.

$\mathcal{E} = -B\ell v$ (ha **B**, ℓ és v egymásra kölcsönösen merőlegesek)

Az L induktivitás (öninduktivitásnak is nevezik) az

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

összefüggéssel definiálható.

Egy ℓ hosszúságú, hosszú szolenoid vagy ℓ kerületű toroidtekercs induktivitása:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$ (ahol N a menetek száma)

Az M *kölcsönös induktivitás*:

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{dI_2}{dt} \quad \text{és} \quad \mathcal{E}_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$$

[5] Az elektromos és mágneses mennyiségekre vonatkozó egyenletek összehasonlításakor észrevehetjük, hogy valahányszor az egyik egyenletben ε_0 a számlálóban szerepel, a megfelelő másikban μ_0 a nevezőben jelenik meg és megfordítva.

RL áramkörök: Ha egy áramkör V feszültségforrásból, sorbakötött R ellenállásból és L induktivitású tekercsből áll, az áramerősség változása az idő függvényében:

Bekapcsoláskor : $I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$

Kikapcsoláskor : $I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-(R/L)t}$

Egy $\tau_L = L/R$ idő alatt a növekvő áram a végső (maximális) érték ~63%-át éri el; az exponenciálisan csökkenő áram pedig kezdeti értékének ~37%-ára csökken.

Önindukciós tekercsben tárolt energia:

$$U_L = \tfrac{1}{2} LI^2$$ (joule egységekben)

A mágneses erőtér energiasűrűsége:

$$u_B = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)$$ (joule/m^3 egységekben)

Soros *RL* körökben (állandó feszültségű feszültségforrást feltételezve) a tekercsekre a következők jellemzők:

(1) *A tekercsen átfolyó áram nem változhat ugrásszerűen. Az exponenciális változások sebességét az áramkör L/R időállandója határozza meg.*

(2) *Állandósult állapotban az „ideális" tekercsen („tiszta" induktivitáson) a feszültségesés mindig zérus.*

Kérdések

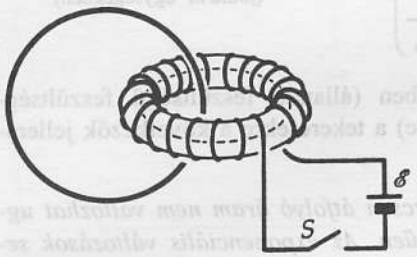
1. Hol és milyen irányban repüljön egy repülőgép, hogy a Föld mágneses erőtere a maximális potenciálkülönbséget hozza létre a repülőgép szárnyának két végpontja között és a jobb szárny (pozitív) potenciálja legyen a nagyobb?
2. Elképzelhető-e, hogy a töltésektől származó térerősségvonalak zárt hurkot alkotnak?
3. Mi a kapcsolat a Lenz törvény és az energiamegmaradás elve között?
4. Mágnes északi pólusát körülvevő zárt felületen a mágneses fluxus zérus, vagy attól különbözik? Elektromos dipólus pozitív töltését körülvevő zárt felületen az elektromos fluxus vajon zérus-e?
5. A toroidtekercsnek gyakorlatilag csak a tóruszon belül van mágneses erőtere. Mindazonáltal kicsiny mágneses erőtér elkerülhetetlenül kialakul a toroidon kívül is. Magyarázzuk meg ennek szerkezetét és eredetét.
6. Egy légcsavaros repülőgép a Föld mágneses erővonalainak mentén repül. a) Van-e a légcsavar egyes lapátjainak vége között potenciálkülönbség? b) Van-e a légcsavar tengelye és az egyes lapátok vége között potenciálkülönbség?
7. Két azonos, téglalap alakú hurok homogén mágneses erőtérben, arra merőlegesen helyezkedik el. Az *A* hurkot ω szögsebességgel a hosszabb oldalakkal párhuzamos szimmetriatengely körül, míg a *B* hurkot ugyanakkora szögsebességgel a *rövidebb* oldallal párhuzamos szimmetriatengely körül forgatjuk. Vajon az indukált feszültség csúcsértéke az *A* vagy a *B* hurokban nagyobb (netán egyenlők)? Vajon ugyanez lenne-e a helyes válasz, ha a forgás nem a szimmetriatengely, hanem az egyik oldal körül történne?
8. Nagyobb ellenállás választása miért növeli meg az RC körök időállandóját? És miért csökkenti az RL kör időállandóját?
9. Hogyan lehet kiszámítani szigetelt hosszú huzal induktivitását? (Útmutatás: számítsuk ki a huzalon belül a mágneses fluxust, ha a huzalban az áramsűrűség *J*.)
10. Egy szórakoztató bemutatás: Állítsunk élére egy (nem ferromágneses) fémlapot pl. alumínium lapot vízszintes felületen, erős mágneses erőtér jelenlétében. Ha a lemez kezdetben majdnem (de nem tökéletesen) függőleges, elengedése után, lassan (néhány másodperc alatt) dől el. Mi ennek a magyarázata?
11. Hasonlítsuk össze a kondenzátor elektromos erőterében és a szolenoid mágneses erőterében tárolt energia nagyságrendjét, laboratóriumi körülmények között rendelkezésre álló tipikus eszközöket feltételezve.
12. Nagyon kis induktivitású huzalellenállást úgy lehet előállítani, hogy ellenálláshuzalt magra csévélünk fel; a huzal felét az egyik irányban tekerjük, a másik felét pedig ellentétes irányban. Miért van az ilyen ellenállásnak elhanyagolhatóan kicsiny induktivitása?

Feladatok

32.2 A Faraday törvény
32.4 A Lenz törvény

32B-1 Egy toroidtekercsen gyűrű van átfűzve (32-23 ábra). Az *S* kapcsoló zárásakor a toroidon áram kezd folyni. a) Számítsuk ki a gyűrűben indukált feszültséget, ha a toroidon belül a mágneses fluxus 30 Tm^2/s sebességgel változik. b) Ideális toroid mágneses erőtere gyakorlatilag teljesen a tórusz belsejébe van lokalizálva, azaz a karikát a mágneses erőtér nem éri. Honnan származik akkor az indukált áram?

32B-2 Rugalmas huzalból készült 20 cm átmérőjű hurok függőlegesen felfelé mutató irányú homogén, $B = 0{,}7$ T fluxussűrűségű mágneses erőtérben vízszintes felületen fekszik. A hurok végpontjait hirtelen szét-



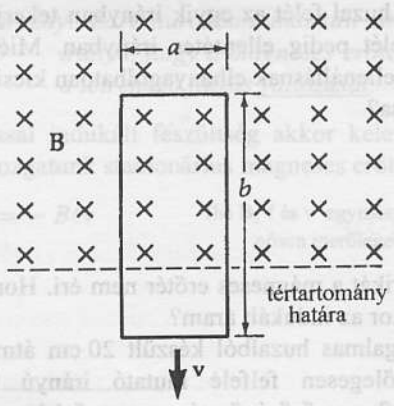
32-23 ábra
A 32B-1 feladathoz

rántjuk; 0,06 s alatt a hurok területe zérussá válik. a) Számítsuk ki, hogy átlagosan mekkora feszültség indukálódik a hurokban. b) Felülről nézve, a hurok kinyitásakor indukált áram iránya az óramutató járásával azonos, vagy azzal ellentétes irányú?

32B-3 Egy R ellenállású, r sugarú köralakú huzalhurok a **B** homogén mágneses erőtér irányára merőleges felületen fekszik. A hurkot gyorsan, t idő alatt 180°-kal átfordítjuk. Számítsuk ki, hogy mekkora átlagos $\mathcal{E}$ feszültség indukálódott ezalatt a hurokban.

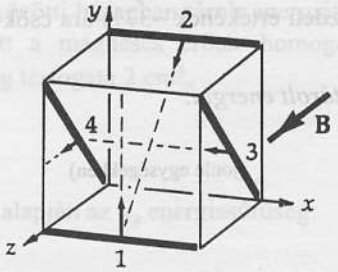
32B-4 Egy 70 m fesztávolságú repülőgép vízszintesen, 1000 km/h sebességgel az északi mágneses pólus irányában repül. A repülőgép adott helyzetében a Föld mágneses indukcióvektorának függőleges komponense 2×10^{-5} T. Számítsuk ki a repülőgépszárnyak vége közötti V potenciálkülönbséget. Melyik szárny (pozitív) potenciálja nagyobb? Miért nem lehet ezt a potenciálkülönbséget energiaforrásként felhasználni?

32B-5 Egy m tömegű, R ellenállású és a 32-24 ábrán feltüntetett méretű téglalap alakú hurok a gravitációs térben szabadon esik és éppen kilép egy olyan tartományból, ahol a mágneses erőtér homogén és vízszintes irányú. A hurok síkja merőleges a **B** mágneses indukcióvektorra. a) A hurokban indukált áram iránya az óramutató járásával azonos vagy ellentétes irányú? b) Meghatározott **v** sebességgel kilépve a mágneses erőtérből, a hurok gyorsulás nélkül mozog. Mutassuk meg, hogy ennek feltétele: $v = mgR/B^2A^2$.



32-24 ábra
A 32B-5 feladathoz

32B-6 A 32-25 ábrán látható, 50 cm élhosszúságú kocka a z tengely pozitív irányába eső $B = 0{,}3$ T fluxussűrűségű homogén mágneses térben helyezkedik el. A számokkal jelzett négy huzaldarabot a nyilakkal jelzett irányokban, $v = 2m/s$ sebességgel mozgatjuk. a) Számítsuk ki az egyes huzaldarabokban a mozgatással indukált potenciálkülönbségeket. b) Az ábrán pozitív és negatív előjelekkel jelöljük meg az indukált feszültségek polaritását.



32-25 ábra
A 32B-6 feladathoz

32B-7 Egy 30 menetes lapos huzaltekercset hosszú, 4000 menet/m menetsűrűségű szolenoid végéhez illesztünk. A szolenoid és a huzaltekercs tengelye, és sugara azonos $R = 5$ cm. Számítsuk ki, mekkora a szolenoidban az áramerősség változása, ha a drótkercsben 2 mV-os feszültség indukálódik.

32.6 Az önindukció

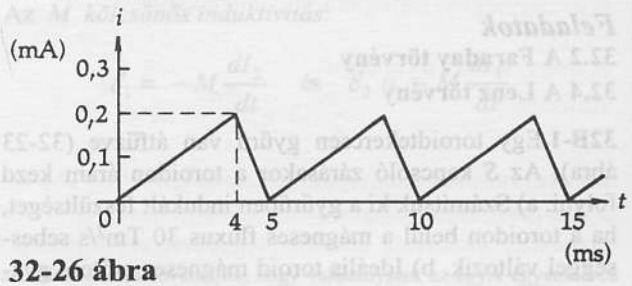
32A-8 Egy 400 menetes tekercsben 12 A/s áramerősség változás hatására 28 mV-os ellenfeszültség indukálódik. Mekkora a tekercs induktivitása?

32A-9 Az L induktivitás és R ellenállás definíciójából kiindulva mutassuk meg, hogy L/R idő dimenziójú.

32A-10 A végek hatását elhanyagolva számítsuk ki egy 39 cm hosszú, 3 cm átmérőjű, 1200 menetes szolenoid induktivitását.

32A-11 A (31-4) egyenlet szerint R sugarú áramvezető hurok középpontjában a mágneses indukcióvektor nagysága $B = \mu_0 I/2R$. Mekkora egy N menetű lapos tekercs induktivitása? (Tételezzük fel, hogy B a hurok síkjában, a hurkon belül mindenütt azonos)

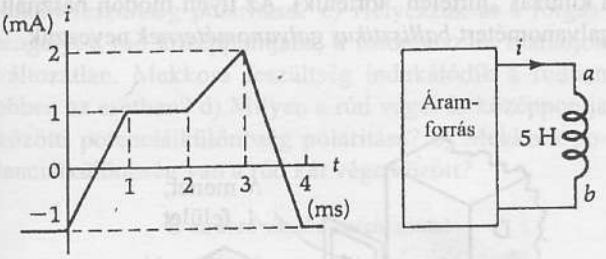
32B-12 Egy 12 mH induktivitású, elhanyagolhatóan kis ellenállású tekercsen áthaladó áram erőssége időben a 32-26 ábrán látható fűrészfog alakú hullám szerint változik. Ábrázoljuk a tekercsen a feszültség változását az idő függvényében.



32-26 ábra
A 32B-12 feladathoz

32B-13 Egy 90 mH induktivitású tekercsen áthaladó áram erőssége az $I = t^2 - 6t$ egyenlet szerint függ az időtől (az egyes mennyiségek SI egységben adottak). Számítsuk ki az indukált feszültséget az a) $t = 1$s és b) $t = 4$s időpontban. c) Mikor zérus az indukált feszültség?

32B-14 Egy 5 H induktivitású tekercsen átfolyó áram erőssége a 32-27 ábrán vázolt függvény szerint függ az időtől. Készítsünk ábrát, a konkrét értékek feltüntetésével, amely megadja az a pont potenciálját a b pont potenciáljához viszonyítva, az eltelt idő függvényében. Az ábrán feltüntettük az áram irányát.



32-27 ábra
A 32B-14 feladathoz

A kölcsönös indukció

32A-15 Egy A keresztmetszetű és ℓ kerületű toroid két külön tekercsből áll: mindkettőt a tórusz teljes kerülete mentén egyenletesen csévélték fel; menetszámuk N_1 és N_2 a) Mekkora az (önállóan használt) tekercsek L_1 és L_2 induktivitása? b) Mekkora a két tekercs M kölcsönös induktivitása? c) Mutassuk meg, hogy $M^2 = L_1 L_2$. (Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha bármelyik tekercs teljes fluxusa egyuttal benne van a másik tekercs belsejében is.)

32A-16 Az A és B tekercs egymáshoz közel helyezkedik el, így kölcsönös induktivitásuk nem hanyagolható el. Ha az A tekercsben az áramerősség változásának sebessége 1,8 A/s, a B tekercsben indukált feszültség nagysága 24 mV. a) Számítsuk ki a tekercsek kölcsönös induktivitását. b) Mekkora sebességgel változzék a B tekercsben az áramerősség ahhoz, hogy az A tekercsben 30 mV feszültség indukálódjon?

32B-17 Egy ℓ hosszúságú, A keresztmetszetű, N_1 menetszámú hosszú szolenoid közepére szorosan és elektromosan szigetelve egy másik, N_2 menetszámú tekercset csévélnek. Számítsuk ki a szolenoid és a tekercs kölcsönös induktivitását, elhanyagolva a tekercsvégek hatását.

32.8 Az *RL* áramkörök

32A-18 Egy áramkör a sorba kötött $\mathcal{E} = 10$ V-os feszültségforrásból, az S kapcsolóból, az $R = 50\ \Omega$ ellenállásból és az $L = 5$ H induktivitású tekercsből áll. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy az áramerősség elérje a stacionárius állapotnak megfelelő értékének a) felét, illetve b) a 90 %-át.

32B-19 Egy soros RL áramkörben az áram lecsengését a (32-28) egyenlet írja le. a) Számítsuk ki az $I(t)$ függvény kezdeti meredekségét. b) Mutassuk meg, hogy ha az áramerősség csökkenése a kezdeti sebességgel folytatódna (tehát lineárisan, és nem exponenciálisan csökkenne), akkor az áramerősség éppen az időállandónak megfelelő időtartam alatt válna zérussá.

32B-20 Egy áramkör sorba kötött telepből, kapcsolóból és az R ellenállású, 2 H induktivitású tekercsből áll. A kapcsoló zárása után 0,8 s elteltével az áramerősség a stacionárius állapotnak megfelelő értékének 80%-át éri el. Számítsuk ki R értékét.

32B-21 Igazoljuk behelyettesítéssel, hogy az $I = (\mathcal{E}/R)(1 - e^{-(R/L)t})$ függvény az $\mathcal{E} - IR - LdI/dt = 0$ differenciálegyenlet megoldása.

32.9 Az önindukciós tekercs energiája

32A-22 Számítsuk ki a 44 cm kerületű, 10 cm^2 keresztmetszetű, 800 menetű toroidtekercsben tárolt energia nagyságát, ha rajta 3 A erősségű áram halad át.

32A-23 Számítsuk ki a 3800 menet/m menetsűrűségű, hosszú szolenoid közepén a mágneses tér energiasűrűségét, ha a szolenoidon áthaladó áram erőssége 4 A. Függ-e az energiasűrűség a menetek sugarától?

32A-24 Egy 60 V-os feszültségforrást sorbakapcsolt 40 Ω-os ellenálláshoz és 90 mH induktivitású tekercshez csatlakoztatunk. Számítsuk ki a tekercsben tárolt mágneses energia nagyságát akkor, amikor az áram stacionárius állapotnak megfelelő értékének háromnegyedét érte el.

32A-25 Egy 10 V-os telepet 5 Ω-os ellenállással és 10 H induktivitású tekerccsel kötünk sorba, és megvárjuk, amíg az áramerősség állandósul. Számítsuk ki a) a telep által leadott teljesítményt; b) az ellenállás által disszipált teljesítményt; c) a tekercsben disszipált teljesítményt; d) a tekercs mágneses erőterében tárolt energiát.

32B-26 A $t = 0$ időpontban $\mathcal{E} = 500$ V-os feszültségforrást kapcsolunk egy tekercsre, melynek ellenállása 30 Ω, induktivitása 0,80 H. a) Számítsuk ki a mágneses erőtérben tárolt energiát abban az időpontban, amikor az áramerősség a stacionárius állapotnak megfelelő érték fele; b) A feszültségforrás csatlakoztatása után mennyi idő szükséges ahhoz, hogy az áramerősség ekkora legyen?

További feladatok

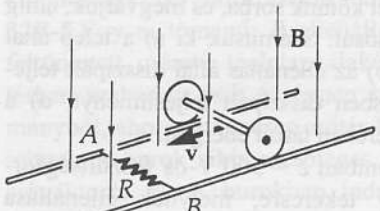
32C-27 Vékony, 0,8 m hosszú, vízszintes fémrúd a nehézségi erő hatására esni kezd. Esés közben a mágneses kelet-nyugati irányban végig vízszintes marad. A rúd adott helyzetében a Föld B fluxussűrűségű mágneses erőterének nagysága $5 \cdot 10^{-5} T$ és iránya a vízszintessel 70^0-os szöget bezárva lefelé mutat. a) Számítsuk ki a rúdban indukált feszültséget 8m esés után. b) A rúd melyik végén nagyobb a potenciál?

32C-28 Kórházi betegek légzését úgy figyelik meg gépi úton, hogy a beteg mellkasa köré rugalmas, vékony

szíjba ágyazott 200 menetes huzaltekercset fűznek. Belélegzés során a hurok keresztmetszete megnő. Becsüljük meg a tekercsben átlagosan indukált feszültséget, ha egy belélegzés időtartama mintegy 1,8 s, ezalatt a hurok keresztmetszete 39 cm^2-tel nő meg és a tekercs síkja a Föld mágneses erőterével (fluxussűrűsége $B = 50\ \mu T$) 28°-os szöget zár be.

32C-29 Egy autóra 1,2 m hosszú függőleges rádióantenna van felszerelve. Az autó 65 km/h sebességgel vízszintes országúton halad, ahol a Föld mágneses erőterének fluxussűrűsége 50 μT és iránya északi, és a vízszintessel 65°-os szöget bezárva lefelé mutat. a) Milyen irányban kell haladnia az autónak, hogy az antennában maximális feszültség indukálódjék (az antenna csúcsa pozitív az aljához képest). b) Számítsuk ki az indukált feszültség nagyságát.

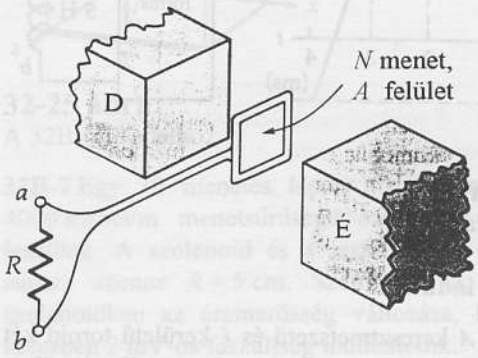
32C-30 A 32-28 ábrán vázoltak szerint 1,5 m széles vasúti tengelyt vízszintes sínen $v = 3$ m/s egyenletes sebességgel tolnak. Az egymással átellenes A és B pontokat $R = 0{,}4\ \Omega$ ellenállással kötik össze. (A kerekek és a sínek között jó kontaktus van, így a sínek, a tengely és az ellenállás zárt áramkört alkotnak. Az áramkörben az egyedüli figyelembe veendő ellenállás R.) A $B = 0{,}08$ T fluxussűrűségű mágneses erőtér homogén, és függőlegesen lefelé irányul. a) Számítsuk ki az ellenálláson átfolyó indukált áramot. b) Mekkora vízszintes F erő szükséges ahhoz, hogy a tengelyt egyenletes mozgásban tartsák? c) Az ellenállás A vagy B végének a potenciálja nagyobb? d) Megfordul-e vajon az R ellenálláson áthaladó áram iránya, miután a tengely átgördül az ellenállás felett?



32-28 ábra
A 32C-30 feladathoz

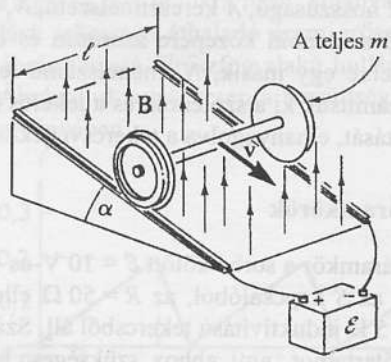
32C-31 A mágneses erőtér nagyságának egyik mérési módja az, hogy kicsiny, sűrűn csévélt tekercset helyezünk a mérendő erőtérbe, úgy, hogy a tekercs síkja merőleges legyen a mágneses erővonalakra. A tekercset a mágneses erőtérből hirtelen eltávolítva a fluxusváltozás következtében feszültség indukálódik benne, ami a külső áramkörben áramlökésként jelentkezik (32-29 ábra). a) A tekercs kihúzásakor milyen irányú áram folyik át az R ellenálláson? b) A Faraday törvény szerint az átlagos indukált feszültség $\mathcal{E} = (-)N\Delta\Phi/\Delta t$ és az indukált áramerősség $I = \mathcal{E}/R$. Számítsuk ki az R ellenálláson átfolyó töltés mennyiségét N, R és Φ függvényében. (Útmutatás: használjuk fel az $I = \Delta Q/\Delta t$ összefüggést.) c) Számítsuk ki a B mágneses indukcióvektort R, N, A (a tekercs keresztmetszete), és Q (az ellenálláson átfolyt töltés) függvényében.

Megjegyzés: A c) megoldásaként kapott egyenlet szerint B arányos Q-val. Legyen R egy viszonylag nagy tehetetlenségű galvanométer ellenállása. Ha a teljes töltés sokkal rövidebb idő alatt folyik át a galvanométeren, mint amennyi a forgórész kilendüléséhez szükséges, akkor azt érdemes mérni, meddig tért ki a galvanométer mutatója. Ez ugyanis a forgórésznek átadott impulzusmomentummal arányos, amely viszont Q-val (és így B-vel) arányos. A mérőtekercs kihúzásához szükséges idő a mérésnek nem lényeges paramétere (mindaddig amíg a kihúzás „hirtelen" történik). Az ilyen módon használt galvanométert *ballisztikus galvanométernek* nevezzük.



32-29 ábra
A 32C-31 feladathoz

32C-32 Fémből készült vasúti tengely lejtőre fektetett sínpáron gördül alá (32-30 ábra). A sínek között felfelé mutató homogén mágneses erőtér van. A sínek közé az ábrán feltüntetett polaritással $\mathcal{E}$ feszültségű akkumulátort kapcsolunk. A mágneses erőtérben gördülő tengelyben áram indukálódik és a rendszer tulajdonképpen akkutöltőként működik: az akkumulátor pozitív kapcsához töltéseket szállít. Állandó v sebességű mozgás akkor alakul ki, ha dU_g/dt egyenlővé válik az akkumulátorba táplált teljesítménnyel. Adjuk meg a v sebességet $\mathcal{E}$, B, ℓ és α (a lejtőszög) függvényében.



32-30 ábra
A 32C-32 feladathoz

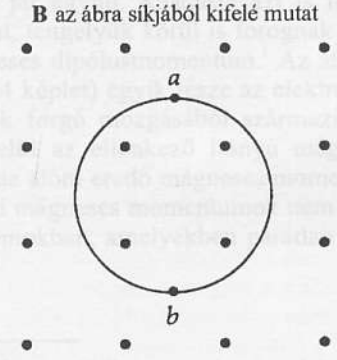
32C-33 Egy 30 cm átmérőjű, 2 Ω ellenállású vezetőkarika asztal lapján fekszik, ahol a Föld mágneses terének fluxussűrűsége 48 μT és iránya 65°-os szöget zár be a vízszintessel. Számítsuk ki, mekkora töltés halad át a karika valamely pontján, ha azt hirtelen 180°-kal átfordítjuk.

32C-34 Vékony, vízszintes, 40 cm hosszú fémrudat 0,2 T nagyságú, függőlegesen felfelé mutató fluxussűrűségű mágneses erőtérben 6 fordulat/mp sebességgel forgatunk az egyik végén áthaladó függőleges tengely körül. a) Mekkora feszültség indukálódik a rúdban? b) Felülről nézve, a forgatás az óramutató járásával megegyező irányú. Milyen a rúd végei között keletkező indukált feszültség polaritása? c) Helyezzük át a forgástengelyt a rúd középpontjába; a fordulatszám maradjon változatlan. Mekkora feszültség indukálódik a rúdban ebben az esetben? d) Milyen a rúd végei és középpontja közötti potenciálkülönbség polaritása? e) Mekkora potenciálkülönbség van a rúd két vége között?



32-31 ábra
A 32C-35 feladathoz

32C-35 A 32-31 ábrán vázolt áramkör homogén, időben egyenletesen csökkenő fluxussűrűségű mágneses erőtérben helyezkedik el. $dB/dt = -k$, ahol k pozitív állandó. Az áramkör egy a sugarú hurok, melyben egy R ellenállás és egy C kapacitású kondenzátor van (az utóbbi lemezei a mágneses erőtér irányára merőlegesek). a) Mekkora a kondenzátor maximális Q töltése? b) A kondenzátor melyik lemezének nagyobb a potenciálja? c) Elemezzük, hogy milyen erők okozzák a töltések szétválását.



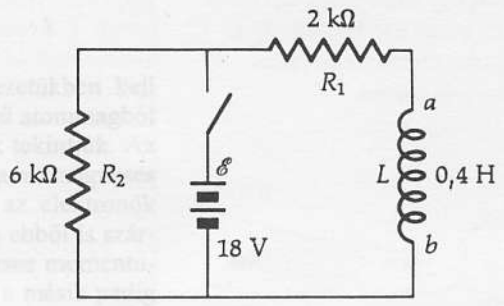
32-32 ábra
A 32C-36 feladathoz

32C-36 A 32-32 ábrán egy r sugarú vezető hurkot láthatunk, amelynek R ellenállása a kerülete mentén egyenletesen oszlik el. A hurok síkja a homogén, időben egyenletes sebességgel csökkenő B fluxussűrűségű mágneses erőtér irányára merőleges ($dB/d\,t = -k$, ahol k pozitív állandó). a) Milyen az indukált áram iránya? b) Mekkora az indukált áram erőssége? c) Melyik pont (a vagy b) a nagyobb potenciálú? d) Elemezzük, milyen erők hozzák létre a hurokban az áramot.

32C-37 A 31B-9 feladattal kapcsolatban: ha az egyenes vezetőben folyó áram 2 s alatt egyenletesen csökken 10 A-ről 2 A-re, és $\ell = 30$ cm, akkor mekkora I áramerősség indukálódik a hurokban?

32C-38 Egy A felületű, R ellenállású körvezető egy, a síkjára merőleges homogén mágneses erőtérben rögzítetten helyezkedik el. A mágneses erőtér B_0 mágneses indukcióvektor a kezdeti értékről exponenciálisan lecsökken (azaz $B = B_0 e^{-\alpha t}$, ahol α egy pozitív állandó). a) Készítsünk a hurokról vázlatos rajzot, feltüntetve az ábra síkjába *befelé* mutató irányú mágneses erővonalakat. Jelöljük be az indukált áram irányát. b) Az indukált árammal kapcsolatos erők hatására a hurok kitágulna, összemenne, vagy a hurok méretére ezek nem hatnak? c) Legyen Q a hurok egy tetszőleges pontján áthaladó töltés mennyisége B csökkenése során. Vezessük le, hogyan függ Q a következő mennyiségektől: B, A, R, α. d) Határozzuk meg, hogyan függ ugyanezen mennyiségektől a hurokban disszipált energia B csökkenése során.

32C-39 Tekintsünk két, azonos tengelyű hosszú szolenoidot (az egyik szolenoid a másik belsejében van). A belső szolenoid sugara R_1, menetsűrűsége n_1 menet/méter; a külső sugara R_2, menetsűrűsége n_2 menet/méter. Mutassuk meg, hogy hosszegységenként a kölcsönös induktivitás $(M/\ell) = \mu_0 \pi n_1 n_2 R_1^2$.



32-33 ábra
A 32C-40 feladathoz

32C-40 A 32-33 ábra áramkörében lévő kapcsolót zárjuk és megvárjuk, amíg az áramerősségek állandósulnak. Ezután a kapcsolót nyitjuk; ennek pillanata legyen $t = 0$. a) Számítsuk ki az L tekercsben indukálódó $\mathcal{E}_0$ feszültséget közvetlenül a kapcsoló nyitása után. A tekercs melyik vége pozitívabb potenciálú, a vagy b? b) Vázoljuk fel az R_1 és R_2 ellenállásokon átfolyó áram

időtől való függését a $t < 0$ és $t > 0$ időtartományban (a stacionárius áramerősségeket válasszuk pozitív előjelűeknek). c) A kapcsoló nyitása után mennyi idő elteltével csökken az R_2 ellenálláson átfolyó áram erőssége 2 mA-re?

32C-41 A sorba kapcsolt L_1 és L_2 tekercsek egymástól elég messze helyezkednek el ahhoz hogy mágneses erőterük ne hasson egymásra. a) Mutassuk meg, hogy a két tekercs eredő induktivitása $L_1 + L_2$. b) Mutassuk meg, hogy ha a két tekercs egymáshoz közel helyezkedik el, és kölcsönös induktivitásuk M, az eredő induktivitás $L_1 + L_2 \pm 2M$. Magyarázzuk meg, mit jelent a „±" jel?

32C-42 Az $\mathcal{E}_L = -L(dI/dt)$ egyenletet felhasználva mutassuk meg, hogy a 32-9 példában a tekercsben indukálódott ellenfeszültség, közvetlenül a kapcsoló nyitása után, 36,0 V.

32C-43 Mutassuk meg, hogy a (32-27) differenciálegyenlet megoldása a (32-28) függvény. Készítsünk áramköri rajzot, feltüntetve a polaritásokat az R és L elemeknél, mialatt az áramerősség csökken.

32C-44 Egy lapos vezetőtekercs induktivitása 2 H; ellenállása 40 Ω. A $t = 0$ időpontban $\mathcal{E} = 60$ V-os telepet csatlakoztatunk a tekercshez. Vizsgáljuk meg a tekercs energiaviszonyait egy időállandónyival későbbi időpontban: a) Mekkora teljesítményt ad le a telep? b) Mekkora Joule-hő fejlődik a tekercsben? c) Mekkora az energia tárolásának sebessége a mágneses térben?

32C-45 Egy R sugarú hengeres vezetőn I erősségű áram halad át; az áramsűrűség a vezető keresztmetszetén egyenletes. Határozzuk meg a vezető belsejében egységnyi hosszúságú szakaszra jutó mágneses energia nagyságát. (Útmutatás: mekkora a mágneses energia egy ℓ hosszúságú, r ($r < R$) sugarú dr vastagságú hengerpalástban (csőben)? A 31B-13 feladat megoldása is felhasználható.)

32C-46 Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a J áramsűrűség a henger sugara mentén lineárisan változik, azaz $J = J_0 r$. a) Fejezzük ki a teljes I áramot J_0 és R függvényeként. b) Adjuk meg a vezető belsejében hosszegységenként tárolt mágneses energia nagyságát.

30A-19 A válasz adott.
30B-21 $\tau = (-1{,}44 \times 10^{-3}\ \text{N·m})\,\hat{z}$
30B-23 $\mu = Iab\cos\theta\hat{x} + Iab\sin\theta\hat{y}$
30A-25 $\frac{1}{5}$
30B-27 a) 37,7 mT b) $(4{,}28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
30A-29 0,438 μW
30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
30C-33 A válasz adott.
30C-35 qBt/m
30C-37 IBR
30C-39 $mg/\pi rB_x$
30C-41 a) $1{,}05 \times 10^{-3}$ A b) $9{,}27 \times 10^{-24}$ A·m^2
30C-43 A válasz adott.
30C-45 A válasz adott.
30C-47 A válasz adott.
30C-49 A válasz adott.
30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

31A-1 1,43°
31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
31A-5 A válasz adott.
31B-7 $\mu_o I(b-a)/4ab$ (kifelé mutat)
31B-9 $\Phi_B = \mu_o Il(\ln 3)/2\pi$
31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2/\pi b}$
31A-13 a) $2{,}20 \times 10^{-5}$ Wb b) 5570 menet
31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o Ir/2\pi a^2$
31C-17 A válasz adott.
31C-19 A válasz adott.
31C-21 A válasz adott.
31C-23 a) $B = -(\mu_o Ia/\pi[z^2 + a^2])$
b) $\lim_{z>>l} B = -(\mu_o Ia/\pi z^2)\hat{z}$
31C-25 $2RB_e \text{ tg } \theta/\mu_o N$
31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3)/3r$
d) $\mu_o k(b^3 - a^3)/3r$
31C-29 $-(\mu I / 6\pi a)\hat{x}$ függetlenül y-tól
31C-31 $\mu_o \sigma\omega R$
31C-33 $(\mu_o I / 2\pi\omega)\ln(1 + w/d)$
31C-35 A válasz adott.
31C-37 $\mu_0 NI/l$

XXXII. Fejezet

32B-1 30 V az óramutató járása szerint
32B-3 $\mathcal{E} = \dfrac{2B\pi r^2}{t}$
32B-5 A válasz adott.
32B-7 3,38 A/s
32A-9 A válasz adott.
32A-11 $N\mu_0\pi R/2$
32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
32A-15 a) $\mu_0 N_1^2 A/l$ $\mu_0 N_2^2 A/l$ b) $\mu_0 N_1 N_2 A/l$
32B-17 $M = \mu_0 A N_1 N_2 / l$
32B-19 a) V/L
32B-21 A válasz adott.
32A-23 145 J/m^3
32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
32C-29 b) 0,458 mV
32C-31 a) $b\ a$ b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
32C-33 3,08 μC
32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
32C-37 0,132 μA
32C-39 A válasz adott.
32C-41 A válasz adott.
32C-43 A válasz adott.
32C-45 $\mu_o I^2/16\pi$
32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

33A-1 88,6 mA
33A-3 318 A
33B-5 A válasz adott.
33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

34A-1 A válasz adott.
34A-3 A válasz adott.
34B-5 a) $v = 24{,}1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
34A-7 b) $3{,}2 \times 10^{-2}$ J
34B-9 b) $v = 8{,}32 \sin(1000t + 33{,}7°)$ (SI-ben)
34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
34B-13 A válasz adott.
34B-15 $i = 2{,}11 \sin(10^5 t + 71{,}6°)$
34A-17 100
34A-19 46,5 pF-tól 419 pF-ig
34B-21 A válasz adott.
34A-23 $v = 170 \sin(377t)$ V
34A-25 122 W
34B-27 A válasz adott.
34B-29 A válasz adott.
34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
e) 90,5 V
34B-33 a) 211 μF b) 979 W
34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
34B-39 a) $1{,}82 \times 10^4$ A b) 909 A
34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
e) 64,4 V

AZ ANYAG MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

Az engedelmes (mágnes) acél az eleven ösztönétől vezérelve mindig az őt vonzó pólus felé fordul.

CHARLES DARWIN

33.1 Bevezetés

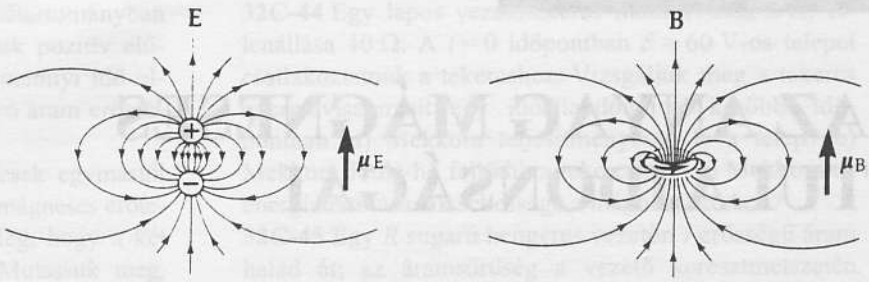
Eddigi tanulmányaink során feltételeztük, hogy az áramvezetőkkel létrehozott mágneses erőtereket körülvevő közeg a vákuum. Egyes anyagok jelenlétében a mágneses erőtér ettől nagyon különbözhet. A klasszikus felfogás szerint az elektronok az atomokban körpályán mozognak és így mikroszkopikus mágneses dipólusoknak tekinthetők. Bizonyos anyagokban ezek a mágneses dipólusok az erőtér irányába rendeződhetnek és az eredő mágneses erőtér tulajdonságait nagy mértékben befolyásolhatják.

Az anyagok mágneses tulajdonságainak teljes megértéséhez a kvantumelmélet ismerete szükséges; ez viszont ebben a fejezetben nem lehet célunk. Mindazonáltal, anélkül, hogy mélyen a részletekbe merülnénk, az anyagok mágneses viselkedésének három leggyakoribb típusáról: a paramágnességről, diamágnességről és ferromágnességről rövid leírást közlünk.

33.2 Az anyagok mágneses tulajdonságai

Az anyagok mágneses tulajdonságainak eredetét atomszerkezetükben kell keresni. Jelen céljainknak megfelel, ha az atomot pozitív töltésű atommagból és a körülötte körpályákon keringő elektronokból felépítettnek tekintjük. Az elektron keringése mikroszkopikus köráramnak felel meg, ami mágneses dipólustérrel jár együtt. Ráadásul azt is feltételezzük, hogy az elektronok pörgettyűként, tengelyük körül is forognak („spinjük" van), és ebből is származik mágneses dipólusmomentum.[1] Az atom eredő μ mágneses momentumának (30-14 képlet) egyik része az elektronok keringéséből, a másik pedig az elektronok forgó mozgásából származik. Általános tendencia, hogy az atomokon belül az ellenkező irányú mágneses dipólusok párokba rendeződnek, így az atom eredő mágneses momentuma zérus is lehet. Más esetekben, az elemi mágneses momentumok nem teljesen oltják ki egymást. Például, olyan atomokban, amelyekben páratlan számú elektron van, szükségsze-

[1] A forgó elektron modellje nagyon leegyszerűsített és ezért nem szabad szó szerint venni. Az elektronok spinje és azzal kapcsolatos tulajdonságok a modern kvantumelmélet keretein belül jól értelmezhetők. Mindazonáltal a tengelye körül forgó elektron klasszikus modellje nagyon hasznos a spinnel kapcsolatos fogalmak bevezetéséhez.



(a) Elektromos dipólus. A középpontban az elektromos erővonal az elektromos dipólus-vektorral ellentétes irányú.

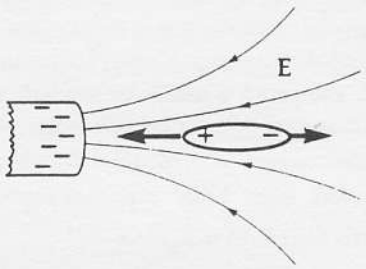
(b) Köráram, mint mágneses dipólus. A középpontban a mágneses erővonal a mágneses dipólus-vektorral azonos irányú.

33-1 ábra
Elektromos és mágneses dipólusok összehasonlítása. Mindkét dipólusvektor felfelé mutat. A dipólusoktól távol, az erővonalstruktúra hasonló; a középpont környezetében azonban a **B** és **E** vektorok ellentétes irányúak.

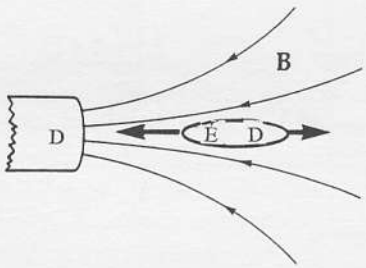
rűen van egy *pár nélküli* elektron, minek következtében az eredő mágneses momentum zérustól különbözik.

A paramágnesség

A hőmozgás következtében a mágneses dipólussal rendelkező atomok nem rendeződnek, ezért az atomi mágneses dipólusok iránya véletlenszerű és a makroszkopikus anyag eredő dipólusmomentuma zérus. Külső mágneses erőtér hatására azonban, a 30. fejezetben tárgyaltak szerint, a mágneses dipólusokra forgatónyomaték hat, ami azokat az erőtér irányába igyekszik beforgatni. Mágneses erőtér jelenlétében egyes anyagokban eredő *mágneses dipólusmomentum* alakul ki; ez a mágneses erőtér erősségétől és a hőmérséklettől függ (a hőmozgás ugyanis „megakadályozza" a dipólusok orientációját). A mágneses erőtér megszűnése után az egyes atomi dipólusok orientációját a hőmozgás megszünteti, és az anyag elveszíti mágneses dipólusmomentumát. Azokat az anyagokat, amelyek mágneses erőtérben így viselkednek, **paramágneseknek** nevezzük.



(a) Inhomogén elektromos erőtérben egy elektromos dipólusra olyan eredő erő hat, amely a nagyobb térerősségű tartomány felé húzza.

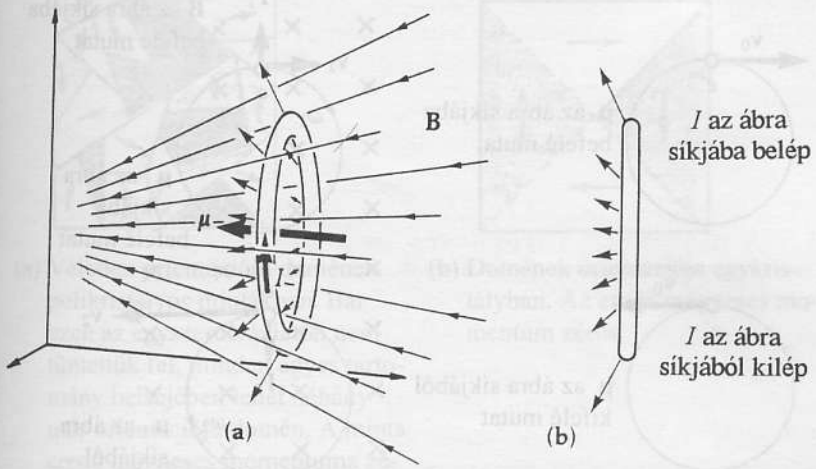


(b) Inhomogén mágneses erőtérben egy mágneses dipólusra olyan eredő erő hat, amely a nagyobb térerősségű tartomány felé húzza.

33-2 ábra
Dipólusok inhomogén erőterekben.

Amikor a mágneses dipólusok az erőtér irányába rendeződnek, akkor saját mágneses erőterük az adott erőtérhez hozzáadódik és kis mértékben megnöveli annak a térerősségét. Ezt illusztrálandó, a 33-1 ábrán összehasonlítunk egy elektromos és egy mágneses dipólust: noha a dipólustól távol az erővonalstruktúra nagyon hasonló, a középpont környezetében a **B** és **E** vektorok éppen *ellentétes* irányúak. Tehát, amikor az erőtér elektromos dipólusokat rendez (27.3 fejezet), a dipólus töltései közötti erőtérben a dipólus erővonalainak az iránya és az erőtér iránya ellentétes; ennek következményeként az anyagban az eredő elektromos térerősség csökken. A mágneses erőtérben rendeződő mágneses dipólusok közepén a dipólusok erővonalainak és a mágneses erőtér iránya megegyezik; ezért az anyag belsejében a mágneses fluxussűrűség megnő. Az effektus kicsi, ugyanis a hőmozgás miatt a mágneses dipólusoknak mindig csak igen kis hányada rendeződik a mágneses erőtér irányába.

Inhomogén mágneses erőtér jelenlétében a mágneses dipólusokra a *nagyobb térerősségű hely felé mutató eredő erő hat.* A jelenség hasonlít az elektromos dipólusok esetén tapasztalthoz: a 33-2a ábra szerint inhomogén elektromos erőtérben egy elektromos dipolusra a nagyobb térerősségű hely felé mutató eredő erő hat. Bár túlzott egyszerűsítés a mágneses dipólusokról azt képzelni, hogy pici rúdmágnesek, déli és északi pólusokkal (33-2b ábra), mégis ez az egyszerűsítő modell teszi érthetővé a fellépő vonzóerőt. A 33-3 ábrán ugyanezt az effektust egy másik modellel illusztráltuk: a mágneses dipólus mint köráram széttartó mágneses erőtérben a 33-2b ábra mágneseihez hasonlóan viselkedik.



33-3 ábra
A mágneses erőtérben szabadon mozgó áramhurok úgy áll be, hogy μ mágneses dipólusmomentuma az erőtér irányába mutasson. Ha az erőtér inhomogén, az áramhurokra ferdén kifelé, ható mágneses erők eredője olyan irányú (lásd a (b) ábrán), hogy a hurok a nagyobb térerősségű tartomány felé mozdul el.

33-1 PÉLDA

A Bohr atommodell szerint a (-*e*) töltésű, *m* tömegű elektron *v* sebességgel *r* sugarú körpályán mozog, így köráramnak is tekinthető. a) Számítsuk ki e körpályának megfelelő μ_l pályamomentumot.[2] b) A kvantumelmélet szerint a pályához tartozó *mvr* impulzusmomentum kvantált, nagysága csak $h/2\pi$ egész számú többszöröse lehet (ahol *h* a Planck állandó; bővebben lásd a 42. és 44. fejezetekben). Mekkora a legkisebb (azaz $h/2\pi$) impulzusmomentumú pályához tartozó mágneses dipólusmomentum? Fejezzük ki μ_l diapólusmomentumot *h* és *m* függvényében.

MEGOLDÁS

(a) A mágneses pályamomentum $\mu_l = IA$, ahol *A* az áramhurok területe. Az áramerősség $I = q/T$, ahol $T = 2Pr/v$ a mozgás periódusideje. Így:

$$\mu_l = IA = \left(\frac{e}{2\pi r / v}\right)\left(\pi r^2\right) = \frac{evr}{2}$$

(b) Az impulzusmomentum $L = mvr = h/2\pi$. Így:

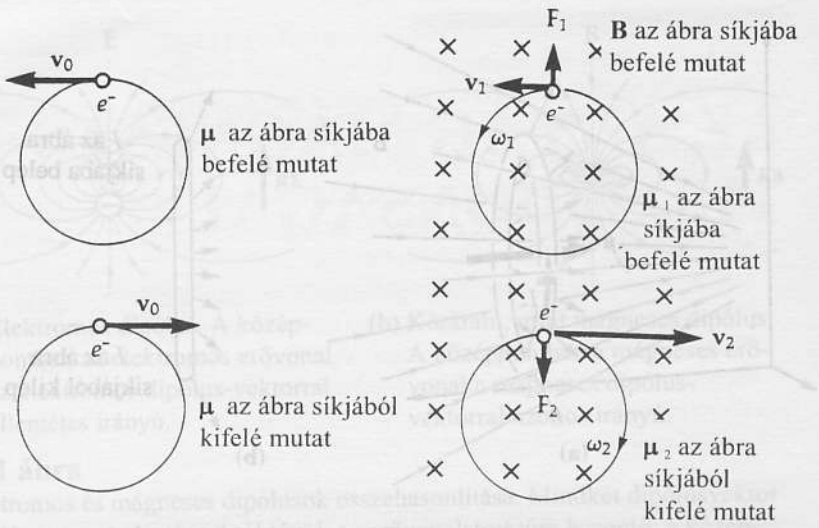
$$\mu_l = \frac{evr}{2} = \left(\frac{e}{2m}\right)(mvr) = \frac{eh}{4\pi m}$$

Ez a mennyiség, a *Bohr magneton,* az atomelméletben a mágneses momentum alapegysége

A diamágnesség

Néhány anyagot (kémiai elemet) a permanens mágnesek *taszítanak,* ezeket **diamágneses** anyagoknak nevezzük. Michael Faraday bizmuton észlelte ezt a jelenséget; de az ezüst is diamágneses. Az effektus meglehetősen gyenge.

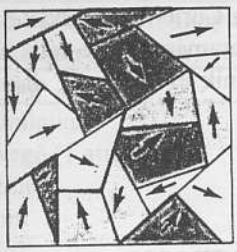
[2] A mágneses pályamomentumnak μ_l és a mágneses spinmomentumnak μ_s jelölését a modern kvantumelmélet is alkalmazza.



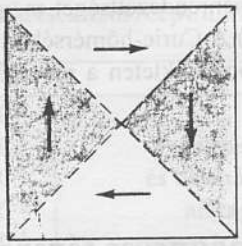
33-4 ábra
A diamágnesesség eredete

(a) A két elektron ellentétes irányban kering. Az eredő mágneses dipólusmomentum zérus, ugyanis a két dipólusmomentum ellentétes irányú és azonos nagyságú. (b) A külső mágneses erőtér a pályák sugarát nem változtatja meg; viszont F_1, illetve F_2 járulékos mágneses erőt kelt, ami miatt $v_2 > v_1$. Következésképpen $\mu_2 > \mu_1$, és az eredő dipólusmomentum iránya a külső erőtér **B** vektoráéval ellentétes.

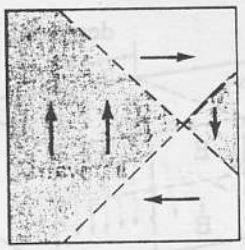
Azon anyagok, melyek atomjainak (vagy molekuláinak) eredő mágneses momentuma zérus, diamágnesek. A permanens mágneses momentummal rendelkező atomokból felépülő (nem *ferro*mágneses) anyagok lehetnek paramágnesesek vagy diamágnesesek is, attól függően, hogy melyik hatás az erősebb. A diamágnesesség jelenségének a megértéséhez, idézzük fel a klasszikus atommodellt, melyben a pozitív töltésű atommag körül keringő elektronokat elektrosztatikus kölcsönhatás tartja a pályájukon. A diamágneses atomokban egyes elektronok az egyik irányban keringenek, mások az ellenkezőben, minek eredményeként az elemi mágneses dipólusmomentumok éppen semlegesítik egymást. Tekintsünk két azonos sebességgel, ellentétes irányban keringő elektront (33-4a ábra). (A könnyebb érthetőség kedvéért külön-külön ábrázoltuk őket.) Minthogy az elektronok ellentétes irányban keringenek, eredő mágneses dipólusmomentumuk zérus. Ha az atom külső mágneses erőtérbe kerül, a keringő elektronokra sugárirányú $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ erő hat. Az egyik esetben az erő hozzáadódik az atommag és az elektron közötti sugárirányú vonzóerőhöz, a másik esetben azzal ellentétes irányú. Megmutatható, hogy a pályasugár változatlan marad, viszont az $mr\omega^2$ centripetális erő megváltozásához vezet. Így az egyik esetben a keringő elektronnak a sebessége megnő, és emiatt **B**-vel ellentétes irányú, nagyobb mágneses momentuma lesz, a másik esetben a sebesség csökken, és ez **B**-vel azonos irányú, kisebb mágneses momentumot eredményez. Mindkét effektus a **B** fluxussűrűségű külső mágneses erőtérrel ellentétes irányú eredő dipólusmomentum kialakulására vezet (ellentétben a paramágneses anyagokkal, ahol a két vektor azonos irányú). Mivel a kialakult (makroszkopikus) mágneses momentum a mágneses erőtérrel ellentétes irányú, ezért ha a diamágneses anyagot állandó mágnes inhomogén erőterébe helyezzük, akkor a csökkenő erőtér irányába mutató erő hat rá. Az állandó mágnes és a diamágneses anyag taszítja egymást. Minthogy minden anyag elektronpárokat tartalmazó atomokból épül fel, a diamágneses effektus tulajdonképpen minden anyagban bekövetkezik, csakhogy a permanens dipólusoktól származó paramágneses hatás rendszerint sokkal nagyobb ennél, s az effektust elfedi. A paramágneses (vagy ferromágneses) anyagokra az erősebb mágneses erőtér irányába mutató vonzóerő hat.



(a) Véletlen orientációjú domének polikristályos mintákban. Bár ezen az egyszerű vázlaton nem tüntettük fel, minden egyes tartomány belsejében lehet néhány más orientációjú domén. A minta eredő mágneses momentuma zérus.



(b) Domének orientációja egykristályban. Az eredő mágneses momentum zérus.



(c) Ha külső mágneses erőtér hat a mintára, akkor azoknak a doméneknek a térfogata, amelyek mágneses momentumának iránya egybeesik a **B** mágneses indukcióvektor irányával, nőni kezd; a szomszédos, kedvezőtlen orientációjú doméneké pedig csökken. Ennek eredményeként a doménfal az ábrán vázolt módon eltolódik. A kristálynak **B**-vel azonos irányú eredő mágneses momentuma alakul ki.

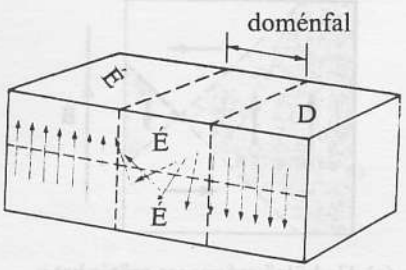
33-5 ábra
Ferromágneses anyagok mágnesező-dése.

A ferromágnesesség

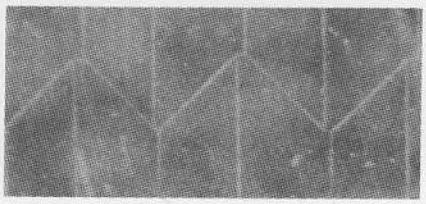
A mágneses anyagok harmadik osztályába öt elem, a vas, a kobalt, a nikkel, a gadolínium és a diszprózium, továbbá egyes ötvözetek tartoznak. Ezeket ferromágneses anyagoknak nevezzük; rajtuk a mágneses hatások nagyságrendekkel nagyobbak, mint a paramágneses és diamágneses anyagokon. Az alapvető különbség onnan ered, hogy kvantummechanikai kölcsönhatások következményeként a **ferromágneses** atomok mágneses dipólusmomentumai a szomszéd atomok dipólusaira olyan erőt gyakorolnak, hogy az anyag egyes tartományaiban (doménben) az összes atomi dipólusok egy irányba rendeződnek. A mágneses domének 10^{-6}–10^{-2} cm^3 térfogatúak, így egy-egy domén akár 10^{17}–10^{21} atomot is tartalmazhat. A különböző orientációjú dipólusokat tartalmazó tartományok közötti határrétegeket doménfalaknak nevezzük. Noha az egyes doménekben a mágneses rendeződés teljes, szomszédos domének mágnesezettsége lehet különböző, és így az eredő mágneses momentum zérus: az anyag makroszkopikusan nem mágneses (33-5a ábra). Külső mágneses erőtér bekapcsolásakor az erőtérrel megegyező irányú domének nőni kezdenek, a szomszédos, más orientációjú domének mágneses momentuma „átrendeződik" az erőtér irányába, és a doménfal eltolódik. A doménfalak a 33-6 ábrán vázolt technikával tehetők láthatóvá. Ha a mágneses térerősség elegendően nagy, a domén összes dipólusa egyszerre rendeződik át az erőtér irányába.[3] Ha a külső mágneses teret megszüntetjük, a makroszkopikus mágneses momentum (nagy része) megmarad, minthogy a nagy doméneket a hőmozgás nem tudja széttörni. Így a „mágnesezett" anyagoknak maradandó, permanens mágneses momentuma lesz. Permanens mágneseket ferromágneses anyagokból szokás készíteni; ilyen például a *permalloy* és az *alnico*. Ezek alumínium-nikkel-kobalt-vas ötvözetek, melyeknek a mágnesezés után nagy, permanens mágneses momentumuk marad.

Minden ferromágneses anyagra jellemző egy kritikus hőmérséklet, az ún. **Curie-hőmérséklet**, amely felett a hőmozgás energiája elegendő ahhoz,

[3] Amikor egy domén mágneses orientációja megváltozik, a domén maga nem fordul el, hanem a kvantummechanikai erők hatására az összes atom mágneses momentuma fordul át szinte egyidejűleg. Ha sokmenetű tekercset helyezünk a mágneses minta köré, és érzékeny erősítőn keresztül hangszóróhoz kötjük, az egyes domének átbillenésekor hirtelen kicsit megváltozó fluxus által létrehozott „áramtüskéket" a hangszóróban sercegésként hallhatóvá lehet tenni. Ezt felfedezőjéről (1919) *Barkhausen-effektusnak* nevezik.



(a) Az egyes domének közötti határréteg néhány száz atomréteg szélességű; itt a dipólusok iránya fokozatosan változik a két doménre jellemző dipólusirány között. Ennek következményeként mágneses anyag felületén, a doménfalak környékén a dipólusok iránya a felületből kifelé mutat, és emiatt a felület felett lokalizált, nagyon intenzív mágneses erőtér jelenik meg. A felületre nagyon finom magnetit (vasoxid) szuszpenziót vékonyan felkenve a falak helyét láthatóvá tehetjük, ugyanis a magnetitszemcsék a nagy térerősségű helyeken ülepednek le.



(b) 3,8 % szilíciumot tartalmazó vasból készült egykristály doménfalai.

33-6 ábra
Mágneses domének

hogy a doménrendezettséget megszüntesse. (A vas Curie-hőmérséklete például 770°C) A Curie-hőmérséklet felett az anyag paramágnesessé válik; még nagyobb hőmérsékleten a paramégnesesség is eltűnik és az anyag diamágneses lesz.

33.3 A mágneses térerősség és a mágneses indukcióvektor

A mágneses anyagok három alaptípusának – *paramágneses*, *diamágneses* és *ferromágneses* anyagok – megismerése után megvizsgáljuk, hogy milyen hatása van annak, ha szolenoid belsejébe paramágneses anyagot helyezünk (33-7 ábra). Tekintsünk egy hosszú szolenoidot, melynek belsejében, (a paramágneses anyag távollétében) a mágneses erőtér fluxussűrűsége a (31-7) egyenlet szerint $B = \mu_0 nI$. Minthogy az egységnyi hosszra jutó menetek száma: $n = N/l$, a tekercs belsejében lévő B_0 fluxussűrűség csak az adott tekercsben folyó I áramerősségtől függ:

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

Ez a képlet vákuumra vonatkozik (és jó közelítéssel igaz az ún. légmagos tekercsre is). Ha a tekercsben valamilyen anyag van, akkor járulékos mágneses tér alakul ki, paramágneses anyagok esetén az orientálódott dipólusok, a diamágneses anyagok esetében az indukált dipólusok következtében. Ez a járulékos B' mágneses tér az eredeti, a tekercsben folyó áram által létrehozott $B_0 = \mu_0 NI/l$ fluxussűrűséggel arányos:

$$B' = \chi\left(\mu_0 \frac{NI}{\ell}\right), \qquad \text{(33-1)}$$

ahol a χ arányossági tényezőt **mágneses szuszceptibilitásnak** nevezzük. Ennek értéke nagyon kicsiny, 10^{-5} nagyságrendű, pozitív a paramágneses és negatív a diamágneses anyagok esetében. A teljes fluxussűrűség tehát:

$$B = B_0 + B'$$

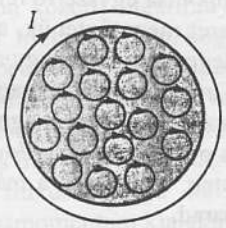
$$B = \left(\mu_0 \frac{NI}{\ell}\right) + \chi\left(\mu_0 \frac{NI}{\ell}\right)$$

vagy egyszerűen

$$B = \mu_0(1+\chi)H \qquad \text{(33-2)}$$



(a) A légmagos szolenoid egy menetében folyó I áram $\mathbf{B}_0$ mágneses indukcióvektort hoz létre.



(b) Paramágneses anyagból készült magra tekercselt szolenoid. A $\mathbf{B}_0$ mágneses indukcióvektorú erőtér a paramágneses anyag mágneses dipólusmomentumait egy irányba rendezi.



(c) Az egy irányba rendezett mágneses momentumok olyan hatásúak, mintha a mag körül I' köráram folyna, és a $\mathbf{B}_0$ mágneses indukcióvektorral azonos irányú B' fluxussűrűségű erőtere lenne.

33-7 ábra
Szolenoid keresztmetszete: a paramágneses anyagból készült tekercsmag hatása.

33-1 táblázat Néhány anyag χ (Khi) mágneses szuszceptibilitása (általában 20 °C-on)

Anyag	χ (Khi)	
Alumínium	$2{,}1\times10^{-5}$	**Paramágneses és diamágneses anyagok** (a negatív χ (Khi)- jű anyagok diamágnesesek)
Levegő (1 atm)	$0{,}036\times10^{-5}$	
Bizmut	-17×10^{-5}	
Ólom	$-1{,}7\times10^{-5}$	
Ezüst	$-2{,}6\times10^{-5}$	
Folyékony oxigén (90K)	400×10^{-5}	
Hideghengerelt acél	2 000	**Ferromágneses anyagok** *Maximális telítési értékek* Ezek az értékek nagy mértékben függenek a korábbi mágnesezettségtől, H-tól, a hőkezeléstől, a tisztaságtól és korábbi mechanikai feszültségektől
Vas	5 000	
45 Permalloy	25 000	
Mu-Metal	100 000	
Supermalloy	800 000	

ahol

A H MÁGNESES TÉRERŐSSÉG (hosszú szolenoid esetében)

$$H = \frac{NI}{\ell} \qquad (33\text{-}3)$$

A H mennyiséget **mágneses térerősségnek nevezzük**[4]; egysége az amper/méter (az N menetszámnak nincsen dimenziója.)

A (33-2) képletet olyan módon is felírhatjuk, hogy a mágneses indukció és mágneses térerősség vektorjellegét is kifejezze:

B ÉS H KAPCSOLATA

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (33\text{-}4)$$

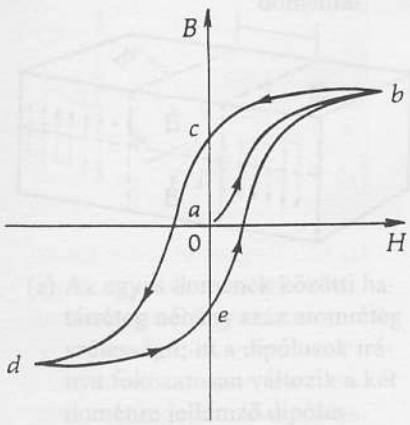
ahol

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \qquad (33\text{-}5)$$

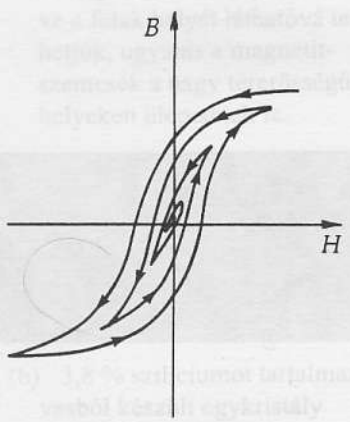
A μ-vel jelölt mennyiség a mágneses anyag **permeabilitása** és ugyanolyan dimenziójú, mint μ_0. Tényezőként tartalmazza μ_0-t *(a vákuum permeabilitását),* valamint függ a paramágneses, ill. diamágneses anyagok mágneses sajátosságaitól. χ abszolút értéke kicsi, nagyságrendje, $\sim10^{-5}$, paramágneses anyagokra pozitív, diamágneses anyagokra pedig negatív. Néhány anyag mágneses szuszceptibilitását a 33-1. táblázat tartalmazza.

Noha a (33-4) összefüggést gyakran ferromágneses anyagokra is felírják, ebben az esetben különleges probléma merül fel. A ferromágneses anyagokat jellemző χ érték nem állandó, hanem erősen függ H értékétől, és a minta korábbi mágnesezettségétől is (ezt a következő fejezetben részletesen tárgyaljuk). A mágneses hiszterézis jelensége miatt a ferromágneses anyagokban χ zérus is lehet, vagy nagyon nagy (akár százezres nagyságrendű) is, illetve pozitív vagy negatív értékű is lehet. (A 33-1 táblázatban a ferromágneses anyagokra csak a maximális pozitív értékeket tüntettük fel.) A ferromágneses anyagokat azért alkalmazzák elektromágnesekben, transzformátorokban és egyéb eszközökben, mert felhasználásukkal, adott áramerősséggel és tekercscsel sokkal nagyobb mágneses indukciót lehet létrehozni, mint nélkülük. Amint azt valaki találóan megjegyezte: „A mágneses térerősség **H** vektora az, amit megfizetünk, a mágneses indukció **B** vektora pedig az, amit kapunk érte."

[4] Néha (helytelenül) a *B mágneses indukciót* nevezik *mágneses térerősségnek.*



(a) Nem mágneses mintával az 0 pontból indulunk. Az a-b szakaszt *mágnesezési görbének* nevezzük. A szolenoidban folyó áramerősség periodikus, egyenletes változtatásával a *bcdeb* határgörbéhez jutunk, amelyet *hiszterézishuroknak* neveznek.



(b) Ferromágneses anyagokat „lemágnesezni" vagy „demagnetizálni" úgy lehet, hogy az anyagokat egyre csökkenő amplitúdójú periodikus mágneses térben helyezzük el (vagyis egyre kisebb amplitúdójú hiszterézishurkon „haladunk" a zérus permanens mágneses momentumnak megfelelő origó felé).

33-8 ábra
Szolenoid vasmagjában kialakuló B fluxussűrűség a tekercsen átfolyó áram hatására kialakuló H mágneses térerősség függvényében.

33-2 PÉLDA

Hosszú, légmagos szolenoid belsejébe vasmagot helyezünk, aminek következtében az eredeti B_0 fluxussűrűség B-re nő. Számítsuk ki a B/B_0 hányadost, feltételezve, hogy az adott H térerősségnél a vas szuszceptibilitása a maximális értéknek egynegyede.

MEGOLDÁS

A vasmag nélkül a fluxussűrűség $B_0 = \mu_0 H$. Vasmaggal $B = \mu_0 (1 + \chi) H$. A B/B_0 hányados tehát

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\mu_0 (1+\chi) H}{\mu_0 H} = (1+\chi)$$

A 33-1 táblázat szerint χ maximális értéke 5000, ennek negyede 1250. Így

$$\frac{B}{B_0} = (1+\chi) = (1+1250) \cong 1250$$

A vasmag jelenlétében a tekercs belsejében a B fluxussűrűség tehát jelentősen megnövekszik.

33.4 A mágneses hiszterézis

Ferromágneses anyag mágneses térbe helyezésekor egész sor érdekes effektus figyelhető meg. Ezek eredménye lehet rendkívül összetett, ugyanis χ értéke (amely a domének rendezettségének mértékére jellemző), nemcsak H nagyságától, hanem az adott anyag mágneses előéletétől, korábbi hőkezelésektől, mechanikai feszültségektől és további tényezőktől is függ. Helyezzünk szolenoid belsejébe olyan vasdarabot, amelyben a domének véletlenszerűen orientáltak. Növeljük fokozatosan a tekercsben folyó áramot. A B-H síkon (33-8a ábra) az a pontból indulunk. H a szolenoidon átfolyó áramerősséggel arányos ($H = NI/l$). A növekvő mágneses térerősség hatására a domének egyre inkább ebbe az irányban rendeződnek, és emiatt a **B** mágneses indukcióvektor is nő. A görbe a b ponttól kezdve vízszintessé válik a telítődés miatt. Ekkor a domének döntő többsége a legkedvezőbb irányba áll be. Ha a telítődés teljes, az áram további növelése csak kis mértékben (a (33-2) egyenlet $\mu_0 H$ tagjának megfelelő mértékben) növelné meg a **B** vektort. Ha az áramerősséget most zérusra csökkentjük, a B-H görbe most más úton a c pontba jut el, ugyanis néhány domén iránya állandósult marad. Az anyag permanens mágnesként viselkedik. Azt a jelenséget, hogy a mágnesezési görbe fel- és lefutó szakaszai nem esnek egybe, görög eredetű szóval **hiszterézisnek** nevezzük. A mágnesező áramot két határ között egyenletesen, periodikusan változtatva a 33-8a ábrán látható jellegzetes alakú *hiszterézishuroknak* nevezett görbéhez jutunk.

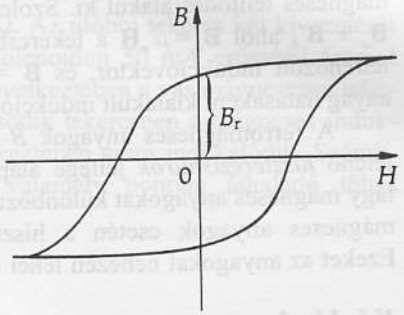
A ferromágneses anyagok aszerint osztályozhatók, hogy mágnesesen „lágyak" vagy „kemények". A kemény mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok széles, és az áram kikapcsolása után nagy $\mathbf{B}_r$ fluxussűrűségű *remanens* (visszamaradó) mágneses indukcióvektorral rendelkeznek (33-9a ábra). A lágy mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok keskeny, a remanens indukcióvektor rendszerint kicsiny (33-9b ábra). Mint az a 33B-5. feladat megoldásával megmutatható, a hiszterézishurok által bezárt terület az egy

ciklus alatt az anyag egységnyi térfogatában disszipálódó (hővé alakuló), és a domének orientáltságához szükséges energia. Mivel ezt az elvesző energiát a tekercsben folyó áramot szolgáltató feszültségforrás fedezi, a váltakozó feszültséget átalakító transzformátorokban lágy mágneses tulajdonságú vasmagokat használnak. Mágnesesen kemény anyagokból készítik pl. a hangszórókban és villanymotorokban alkalmazott állandó mágneseket.

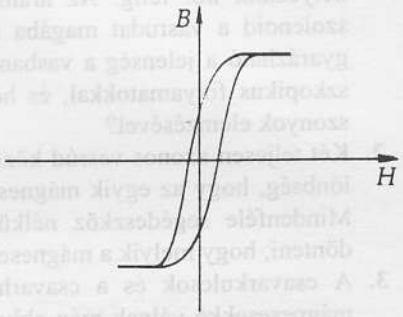
Mechanikus deformációk vagy nagy hőmérsékleti hatások miatt a permanens mágnesek elveszíthetik mágnesezettségüket. Olyan tárgyak, amelyek ilyen brutális kezelésnek nem vethetők alá (például mechanikus órák vagy magnószalagok), úgy demagnetizálhatók, hogy pl. szolenoid mágneses erőterében ciklikus, egyre csökkenő amplitúdójú mágneses térerősség hatásának tesszük ki őket (33-8b ábra).

Magnetostrikciónak nevezzük azt a jelenséget, hogy bizonyos anyagokból készült rúd alakú testek hossza a mágnesezés során kis mértékben, kb. 10^{-6} résznyivel megnő. Ennek oka az, hogy az egyes doménekben orientált mágneses dipólusmomentumok a kristályrácsot némiképp deformálják, és a mágnesezettség irányában kissé megnyújtják. Ez az oka a hálózati transzformátorok brummogó hangjának: a mágneses erőtér irányának megváltozása során a transzformátor vasmagja periodikusan összehúzódik majd kitágul, ami hanghullámokat kelt. Érdekes fordított effektus: ha demagnetizált ferromágneses anyagú rudat megfeszítünk, kis mértékben mágnesessé válik.

Végezetül megemlítjük, hogy a fenti három típusba sorolhatókon kívül más mágneses tulajdonságú anyagok is vannak: közülük a *ferriteket* nagy elektromos ellenállásuk és mágneses permeabilitásuk, valamint kis remanens mágnesességük miatt elterjedten használják a nagyfrekvenciás elektronikus áramkörökben. Az *antiferromágneses* anyagokban a szomszédos mágneses dipólusok egymással ellentétes irányúak. Ezekről bővebben szakkönyvekben olvashatunk.



(a) Wolframacél, kemény mágneses anyag.



(b) Vas, lágy mágneses anyag.

33-9 ábra
Két különböző anyag mágneses hiszterézishurokja

Összefoglalás

Az anyagok mágneses viselkedésük szerint három fő csoportba oszthatók:

Diamágneses anyagok: Az ebbe a csoportba tartozó anyagok atomjainak nincs eredő mágneses dipólusmomentuma. Külső mágneses tér jelenlétében a térrel *ellentétes* irányú dipólusmomentum indukálódik. Az inhomogén mágneses tér a diamágneses anyagokat a kisebb térerősségű tartomány felé taszítja.

Paramágneses anyagok: Az ebbe a csoportba tartozó anyagoknak van eredő dipólusmomentuma; ez véletlenszerűen orientált. Külső mágneses tér jelenlétében a dipólusok a térrel megegyező irányba állnak be (*mágneses polarizáció* alakul ki). Az inhomogén mágneses tér a paramágneses anyagokat a nagyobb térerősségű tartomány felé vonzza. A paramágnesesség hőmérsékletfüggő tulajdonság, ugyanis a növekvő hőmérséklet a rendeződő dipólusokat szétszórja.

Ferromágneses anyagok: öt elem – Fe, Co, Ni, Gd és Dy – atomjai állandó mágneses momentummal rendelkeznek, és ezek *doméneknek* nevezett kis tartományokban párhuzamosan állnak. Mágneses tér hatására a térrel megegyező irányú domének nagysága megnő; aminek következtében az eredő mágneses tér akár néhány százezerszeresére is nőhet.

A H mágneses térerősséget az elektromos áram által **létrehozott mágneses erőtér** jellemzésére használjuk. Hosszú szolenoidban a mágneses térerősség:

$$H = \frac{NI}{\ell}$$

A **B mágneses indukció** vagy **mágneses fluxussűrűség** és a **H** mágneses térerősség kapcsolatát mágneses anyagok jelenlétében a következő összefüggés adja meg:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

ahol $\mu = \mu_0(1 + \chi)$

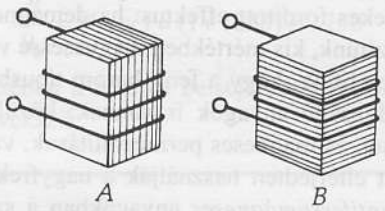
A mágneses anyag μ permeabilitása a vákuum *permeabilitásán* (μ_0) kívül a rendeződött dipólusok hatását kifejező χ **mágneses szuszceptibilitástól** is függ. Diamágneses anyagokra χ zérushoz közeli nagyságú, negatív, paramágnesesekre ugyancsak kicsiny, de pozitív állandó. Ferromágneses anyagok esetében χ nagyon nagy értékű is lehet, ha a külső mágneses erőtér hatására az összes mágneses dipólus azonos irányba áll be, azaz

mágneses telítődés alakul ki. Szolenoid belsejében $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, ahol $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ a tekercsben folyó áram által létrehozott indukcióvektor, és $\mathbf{B}' = \mu_0 \chi \mathbf{H}$ a mágneses anyag hatásaként kialakult indukcióvektor.

A ferromágneses anyagok *B-H* grafikonján megjelenő *hiszterézishurok* jellege alapján kemény, illetve lágy mágneses anyagokat különböztetünk meg. Kemény mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok széles. Ezeket az anyagokat nehezen lehet mágnesezni, viszont nagy remanens mágneses terük van, és így permanens mágnesek készítésére alkalmasak. Lágy mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok keskeny, ezek könnyen mágnesezhetőek, viszont a mechanikus vagy termikus behatások könnyen demagnetizálják őket. A hiszterézishurok által bezárt terület arányos az egy mágnesezési ciklus során egységnyi térfogatú anyagban disszipált energiával, ezért pl. transzformátorokban lágy mágneses anyagokat alkalmaznak.

Kérdések

1. Kikapcsolt szolenoidba (nem mágnesezett) vasrudat helyezünk kb. félig. Az áram bekapcsolásakor a szolenoid a vasrudat magába rántja. Hogyan magyarázható a jelenség a vasban végbemenő mikroszkopikus folyamatokkal, és hogyan az energiaviszonyok elemzésével?
2. Két teljesen azonos vasrúd között csak annyi a különbség, hogy az egyik mágnesezett, a másik nem. Mindenféle segédeszköz nélkül hogyan lehet eldönteni, hogy melyik a mágnesezett?
3. A csavarkulcsok és a csavarhúzók néha enyhén mágnesesekké válnak még akkor is, ha elektromos szerelésekhez nem használtuk őket. Miért?
4. Elektronikus készülék úgy szigetelhető el egy mágneses erőtértől, hogy vasból vagy speciális, nagy permeabilitású fémből készült dobozba zárjuk. Mi az ilyen mágneses árnyékolás elvi alapja?
5. A legtöbb fémdetektor érzékelő eleme tekercs. Hogyan működhet az ilyen fémdetektor? (Ilyen elven működik a közlekedési lámpák vezérléséhez alkalmazott, az úttest burkolatába épített hurok is.)
6. A 33-10 ábrán lemezelt vasmagú tekercset láthatunk. A vasmag egymástól szigetelt vékony lemezekből áll. Ha a tekercsbe váltakozó áramot vezetünk, a változó mágneses erőtér a vasmagban váltakozó áramot (*örvényáramot*) kelt. Vajon az *A* vagy *B* módon kell-e a lemezeket elhelyezni ahhoz, hogy a vasmagban fejlődő I^2R hőteljesítmény csökkenjen?



33-10 ábra
A 6. kérdéshez

7. Szükségszerű-e vajon, hogy egy permanens mágnesnek egy északi és egy déli pólusa legyen? Készíthető-e vajon olyan permanens mágnes, amelynek például két északi pólusa van? És olyan, amelyiknek északi pólusa egyáltalán nincs?

Feladatok

33A-1 Egy 20 cm hosszú, szorosan tekercselt 700 menetű szolenoid vasmagja 1,4 cm átmérőjű. Feltételezve, hogy a vasmag a mágneses telítettség állapotában van, milyen erősségű áram hatására lesz a tekercs közepén átmenő síkon 3×10^{-4} Tm^2 a mágneses fluxus?

33A-2 Számítsuk ki az $1{,}8\times10^{-5}$ szuszceptibilitású anyag mágneses permeábilitását!

33A-3 Amikor szupravezető anyagot mágneses térbe helyezünk, akkor a felületén olyan áramok alakulnak ki, hogy az anyag belsejében a mágneses erőtér zérus legyen. (Vagyis az anyag tökéletes diamágnesként viselkedik.) Tekintsünk egy 2 cm átmérőjű korongot, amelyet $B = 0{,}02$ T fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezünk úgy, hogy a korong síklapjai az erővonalakra merőlegesek legyenek. Számítsuk ki, hogy mekkora a felületi áram nagysága a korong palástján.

33B-4 Egy 25 cm hosszú, sűrűn tekercselt, 600 menetű szolenoidon 30 mA erősségű áram folyik át. Számítsuk ki H és B nagyságát a szolenoid középpontjában (a) ha a szolenoid légmagos és (b) ha a szolenoid magja 45 Permalloyból készült, melynek szuszceptibilitása a maximális telítési értéknek háromnegyede.

33B-5 Mutassuk meg, hogy a $B{\cdot}H$ szorzat dimenziója energia/térfogat.

33B-6 Tekintsünk egy mágnesezhető anyagú maggal ellátott toroidtekercset (néha ezt a tekercsfajtát *Rowland-gyűrűnek* nevezik), melynek közepes sugara 10 cm, 250 menetű, vasmaggal készült, és 150 mA-es áram halad át rajta. (a) Számítsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belsejében. (b) Számítsuk ki a B mágneses indukcióvektort a vasmagban, ha az 70%-ig telítődött.

33B-7 Hosszú, 2000 menet/m menetsűrűségű vasmagos szolenoidon 10 mA erősségű áram halad át. (a) Számítsuk ki a B mágneses indukciót a vasmagban, ha az 20%-ig telítődött. (b) Mekkora áramerősséggel lehetne elérni ugyanekkora indukciót vasmag nélkül?

33B-8 Egy 50 cm kerületű toroidtekercs 1000 menetű és rajta 200 mA erősségű áram halad át. A vasmag olyan anyagból készült, amelynek telítési szuszceptibilitása 3000. (a) Számítsuk ki a B mágneses indukció-

vektort a magban, ha anyaga 85%-ig telítődött. (b) Számítsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belsejében. (c) Számítsuk ki B azon részét, amely csak tekercsben folyó áramtól ered.

33C-9 Hosszú, vasmagos szolenoid sugara 1,25 cm; menetsűrűsége 1200 menet/m. Erre a tekercsre szorosan egy másik, 40 menetű tekercset is csévélünk, amelynek teljes ellenállása 5 Ω. Az utóbbi tekercs két kivezetését rövidrezárjuk. A szolenoidon 50 mA erősségű áramot indítunk, aminek következtében a vas mágnesesen teljesen telítődik. A második tekercsben a mágneses indukció változása következtében áram indukálódik. Számítsuk ki e tekercs valamely pontján áthaladó töltés mennyiségét.

30A-19 A válasz adott.
30B-21 $\tau = (-1{,}44 \times 10^{-3}\ \text{N·m})\,\hat{z}$
30B-23 $\mu = Iab\cos\theta\hat{x} + Iab\sin\theta\hat{y}$
30A-25 $\frac{1}{5}$
30B-27 a) 37,7 mT b) $(4{,}28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
30A-29 0,438 μW
30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
30C-33 A válasz adott.
30C-35 qBt/m
30C-37 IBR
30C-39 $mg/\pi rB_x$
30C-41 a) $1{,}05 \times 10^{-3}$ A b) $9{,}27 \times 10^{-24}\ \text{A·m}^2$
30C-43 A válasz adott.
30C-45 A válasz adott.
30C-47 A válasz adott.
30C-49 A válasz adott.
30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

31A-1 1,43°
31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
31A-5 A válasz adott.
31B-7 $\mu_o I(b-a)/4ab$ (kifelé mutat)
31B-9 $\Phi_B = \mu_o Il(\ln 3)/2\pi$
31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2/\pi b}$
31A-13 a) $2{,}20 \times 10^{-5}$ Wb b) 5570 menet
31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o Ir/2\pi a^2$
31C-17 A válasz adott.
31C-19 A válasz adott.
31C-21 A válasz adott.
31C-23 a) $B = -(\mu_o Ia/\pi[z^2 + a^2])$
b) $\lim_{z>>l} B = -(\mu_o Ia/\pi z^2)\hat{z}$
31C-25 $2RB_e \text{ tg } \theta/\mu_o N$
31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3)/3r$
d) $\mu_o k(b^3 - a^3)/3r$
31C-29 $-(\mu I / 6\pi a)\hat{x}$ függetlenül y-tól
31C-31 $\mu_o \sigma\omega R$
31C-33 $(\mu_o I/2\pi\omega)\ln(1 + w/d)$
31C-35 A válasz adott.
31C-37 $\mu_0 NI/l$

XXXII. Fejezet

32B-1 30 V az óramutató járása szerint
32B-3 $\mathcal{E} = \dfrac{2B\pi r^2}{t}$
32B-5 A válasz adott.
32B-7 3,38 A/s
32A-9 A válasz adott.
32A-11 $N\mu_0\pi R/2$
32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
32A-15 a) $\mu_0 N_1^2 A/l$ $\mu_0 N_2^2 A/l$ b) $\mu_0 N_1 N_2 A/l$
32B-17 $M = \mu_0 A N_1 N_2/l$
32B-19 a) V/L
32B-21 A válasz adott.
32A-23 145 J/m^3
32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
32C-29 b) 0,458 mV
32C-31 a) $b\ a$ b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
32C-33 3,08 μC
32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
32C-37 0,132 μA
32C-39 A válasz adott.
32C-41 A válasz adott.
32C-43 A válasz adott.
32C-45 $\mu_o I^2/16\pi$
32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

33A-1 88,6 mA
33A-3 318 A
33B-5 A válasz adott.
33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

34A-1 A válasz adott.
34A-3 A válasz adott.
34B-5 a) $v = 24{,}1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
34A-7 b) $3{,}2 \times 10^{-2}$ J
34B-9 b) $v = 8{,}32 \sin(1000t + 33{,}7°)$ (SI-ben)
34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
34B-13 A válasz adott.
34B-15 $i = 2{,}11 \sin(10^5 t + 71{,}6°)$
34A-17 100
34A-19 46,5 pF-tól 419 pF-ig
34B-21 A válasz adott.
34A-23 $v = 170 \sin(377t)$ V
34A-25 122 W
34B-27 A válasz adott.
34B-29 A válasz adott.
34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
e) 90,5 V
34B-33 a) 211 μF b) 979 W
34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
34B-39 a) $1{,}82 \times 10^4$ A b) 909 A
34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
e) 64,4 V

VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖK

Az isteni Buddha éppoly szívesen tartózkodik a digitális komputerek áramköreiben és a sebességváltók fogaskerekei között, mint a hegyek csúcsain vagy a virágszirmokban.

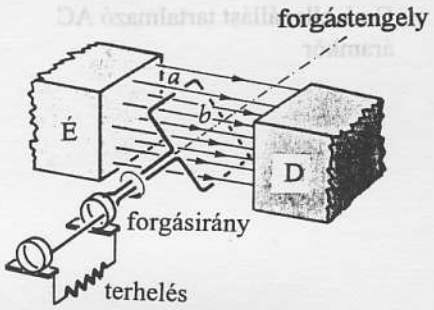
ROBERT PIRSIG
(Zen és a motorkerékpár karbantartás művészete)

34.1 Bevezetés

A korábbiakban megtárgyaltuk, hogyan változik az áramerősség sorba kapcsolt RC-körben, ha a kört telepre kapcsoljuk. Kezdetben az áramerősség nagy, értékét csak az ellenállás korlátozza, majd exponenciálisan zérushoz közelít. Hasolóképpen ha a telepet sorba kapcsolt *RL* áramkörhöz kapcsoljuk, akkor az áramerősség zérusról indulva exponenciálisan közelít az ellenállás nagysága által megszabott stacionárius értékhez. Mindkét esetben a kör a feszültségforrás bekapcsolására tipikusan átmeneti (tranziens) árammal reagál: az időbeli változás csak egy bizonyos ideig tart, ezután stacionárus állapot áll be. Az áramkör *időállandója* azt mutatja meg, hogy az exponenciális szakaszok milyen meredekek.

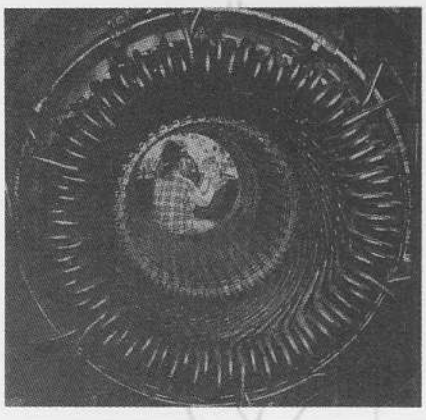
Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen áram alakul ki, ha a körben folyamatosan változó feszültséget alkalmazunk.[1] A legtöbb elektromechanikus áramfejlesztő *szinuszosan* váltakozó feszültséget hoz létre, amelynek hatására a külső áramkörben szinuszosan váltakozó áram folyik. Az egyszerűség kedvéért a közkeletű angol rövidítést (AC, alternating current) használva a továbbiakban az ilyen áramot, feszültséget, áramkört stb. egységesen az „AC" jelzővel látjuk el, így például az „AC feszültség" kifejezést a „váltakozó feszültség" szinonímájaként használjuk. (Hasonlóképpen, az egyenáramú mennyiségeket, áramköröket a „DC" (direct current) rövidítéssel jelölhetjük). Váltakozó áramú köröket elterjedten használnak energia átvitelére, hírközlésre (rádió, TV, műholdas adatátvitelben), számítógépekben, továbbá számos egyéb fontos gyakorlati, ipari alkalmazásuk is van.

[1] Az egyenáramú áramkörökben folyó áramokat leíró törvények és egyenletek fogalmi szempontból egyszerűbbek, mint a váltakozó áramú áramkörökre vonatkozóak. A váltakozó áramokat leíró törvényeket a múlt század végén Charles Proteus Steinmetz, a kitűnő mérnök-matematikus vezette le: a váltakozó áramú áramkörök elméletéről szóló, részletes és bonyolult matematikai levezetéseket tartalmazó első publikációja három kötet terjedelmű.



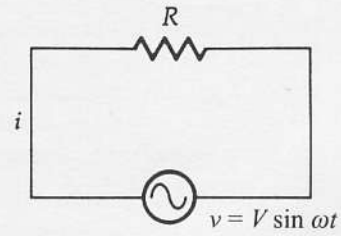
A tengelyen lévő gyűrűkontaktusokkal csúszókontaktusok ("szénkefék") érintkeznek.

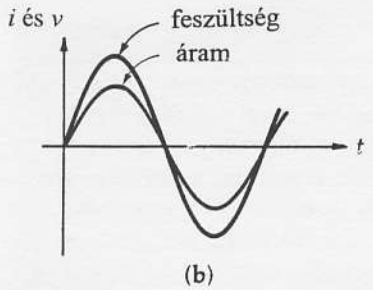
(a) A váltakozó áramú generátor elve. A mágneses térben forgó vezetőhurokban $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ feszültség indukálódik.



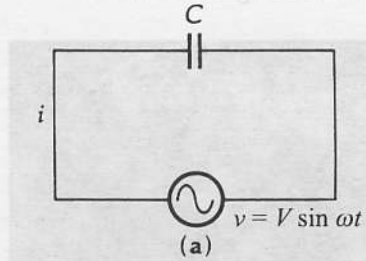
(b) A modern váltakozó áramú generátorok számos tekercset tartalmazó forgórésze (az ábrán nem látható) nagy elektromágnesek mágneses terében forog.

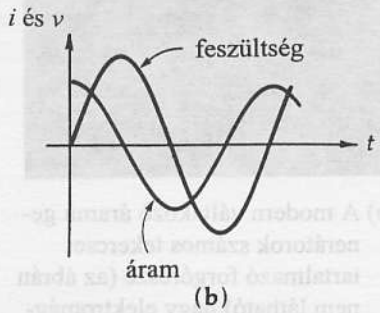
34-1 ábra
A váltakozó áramú generátor





34-2 ábra
Csak ellenállást tartalmazó AC áramkör





34-3 ábra
Csak kapacitást tartalmazó AC áramkör.

34.2 Egyszerű váltakozó áramú körök

Az egyszerűség kedvéért az AC áramkörökkel kapcsolatban speciális jelölésmódot vezetünk be. Legyen a váltakozó feszültség és váltakozó áram szinuszos[2], azaz

$$v = V \sin \omega t \qquad \text{és} \qquad i = I \sin(\omega t - \phi) \qquad \textbf{(34-1)}$$

A feszültség és az áram *csúcsértékét*, vagy *amplitúdóját* nagybetűkkel jelöljük (V, illetve I); a kis betűk magukat az időtől függő mennyiségeket (v, illetve i jelentik. A szinuszosan változó mennyiségeket amplitúdójukon kívül adott időpontban a *fázisszögük* jellemzi (pl. a fenti kifejezésekben $\omega t - \phi$). *Két különböző szinuszosan változó mennyiség fázisszögének különbségét, a ϕ szöget, fáziskülönbségnek nevezzük.*

A váltakozó áramú körök tulajdonságainak elemzését leszűkíthetjük az egyetlen frekvenciával jellemezhető szinuszos AC mennyiségek vizsgálatára. Ennek oka az, hogy bármely (tetszőlegesen bonyolult), f_0 frekvenciájú *periodikus* függvény helyettesíthető az f_0 és harmonikusai ($2f_0$, $3f_0$, $4f_0$ ...) szinuszos és koszinuszos függvényeit tartalmazó összeggel. (Az eljárást *Fourier-analízisnek* nevezik, részletek az F függelékben találhatók). Így bonyolult, periodikus hullámalakok egyszerű szinuszos komponensekre bonthatók, s ezekre már alkalmazhatók a következőkben kifejtett módszerek.

Megmutatjuk, hogy ha sorba kapcsolt, ellenállást, kondenzátort és tekercset tartalmazó áramkörben az áramerősség időben szinuszosan változik, akkor az egyes elemeken a feszültségesés fázisszöge nem szükségképpen ugyanakkora. Az egyes elemeken a feszültségesés (illetve a rajtuk átfolyó áram) nemcsak az áramköri elemek nagyságától, hanem a frekvenciától is függ.

Csak ellenállást tartalmazó áramkörök

Tekintsük a 34-2. ábrán látható áramkört. Legyen az alkalmazott feszültség $v = V \sin \omega t$, vagyis a $t = 0$ időpontban $v = 0$. Az áramköri rajzokon az AC feszültségforrások jele –⊖– Az i áramerősség kiszámítását annak alapján végezzük el, hogy a töltésmegmaradás és energiamegmaradás elve váltakozó áramú körökben éppen úgy fennáll, mint az egyenáramúakban. Ezért *bármely időpontban* érvényesek a Kirchhoff-törvények. A zárt hurok mentén a feszültségeket összegezve:

$$\Sigma v = 0,$$
$$v - iR = 0.$$

A (34-1) egyenletből v kifejezését behelyettesítve, majd átrendezve, az Ohm-törvényhez hasonló kifejezéshez jutunk:

$$V \sin \omega t = iR,$$

ebből
$$i = \frac{V}{R} \sin \omega t \qquad \textbf{(34-2)}$$

Vegyük észre, hogy az áramerősség és a feszültség *fázisszöge azonos*. Ezt illusztráltuk a 34-2b ábrán.

Csak kapacitást tartalmazó áramkörök

Tekintsük a 34-3a ábrán látható áramkört. A zárt hurok mentén a feszültségek összegének zérusnak kell lennie, tehát

$$\Sigma v = 0$$

[2] Az ($\omega t - \phi$) kifejezésben szereplő negatív előjel értelme a 34.3. pontban válik nyilvánvalóvá.

$$V \sin \omega t - \frac{q}{C} = 0 , \qquad \textbf{(34-3)}$$

ahol q a kondenzátor töltése a t időpontban. Az áramkörben folyó áram tulajdonképpen a kondenzátor lemezein lévő töltés változásának sebessége: $i = dq/dt$. A (34-3) egyenletet differenciálva majd dq/dt-re megoldva azt kapjuk, hogy

$$i = \frac{dq}{dt} = V\omega C \cos \omega t . \qquad \textbf{(34-4)}$$

Ezt az egyenletet az Ohm-törvényhez hasonló formájúra alakíthatjuk:

$$i = V\omega C \cos \omega t = \left(\frac{V}{X_c} \right) \cos \omega t$$

Érdemes bevezetnünk a kapacitív ellenállás (reaktancia) fogalmát:

KAPACITÍV ELLENÁLLÁS

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \qquad \textbf{(34-5)}$$

Az X_C egysége *ohm* (Ω). Ez a mennyiség a csak ellenállást tartalmazó áramkörben lévő ellenálláshoz hasonlóan az átfolyó áram erősségét korlátozza. (Feladat: mutassuk meg, hogy a kapacitív ellenállás valóban ellenállás dimenziójú.) Vegyük észre, hogy az áram $\pi/2$ radiánnal illetve 90°-kal megelőzi a feszültséget (34-3b ábra). Az „áram siet a feszültséghez képest" kifejezést arra szoktuk alkalmazni, hogy az áramerősség időben előbb éri el a csúcsértékét, mint a feszültség. Hangsúlyozzuk a különbséget: kapacitásokon az áram és a feszültség között 90° fáziskülönbség van; ellenállásokon a két mennyiség *mindig* egymással azonos fázisban van.

34-1 PÉLDA

Számítsuk ki a 2μF-os kondenzátor kapacitív ellenállását (reaktanciáját) (a) 50 Hz, és (b) 1 Mhz frekvencián.

MEGOLDÁS

(a) $f = 50$ Hz frekvencián $\omega = 2\pi(50\ \text{s}^{-1}) = 314{,}15$ rad/s. Így

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(314\ \text{rad/s})(2 \times 10^{-16}\ \text{F})} = 1592\ \Omega$$

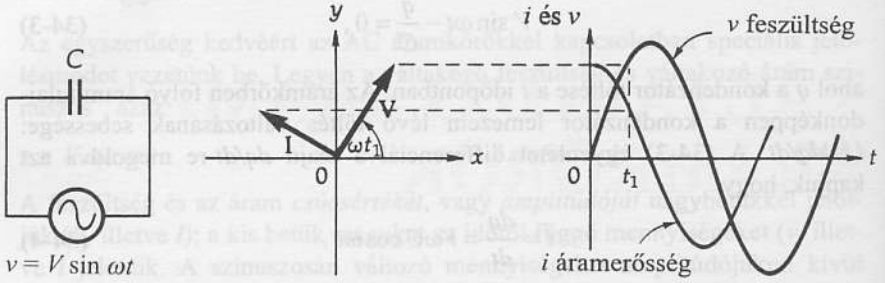
Minthogy Európában a villamos hálózat frekvenciája 50 Hz, könnyű megjegyezni a hálózati feszültség körfrekvenciáját:

$$\omega = 314\ \text{rad/s}.$$

(b) 10^6 Hz frekvencián

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2\pi)(1 \times 10^6\ \text{Hz})(2 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 0{,}0796\ \Omega$$

A kondenzátor reaktanciája a frekvencia *növekedtével csökken*. A másik irányban változtatva a frekvenciát, a kapacitás reaktanciája nagyon naggyá válik; az $\omega = 0$ határesetben (vagyis egyenáramok esetében) az ellenállás végtelen, vagyis DC áramkörben kondenzátort tartalmazó ágban áram nem folyik.



(a) A csak kapacitást tartalmazó AC áramkör

(b) A fázisvektordiagram. A fázisvektorok ω szögsebességgel, az óramutató járásával ellentétes irányban forognak. A **V** és **I** vektorok közötti szög mindig 90°.

(c) A fázisvektorok forgása közben a függőleges tengelyen vett vetületük a pillanatnyi áramnak, illetve feszültségnek megfelelően változik az időben.

34-4 ábra
Csak kapacitást tartalmazó áramkörben az áramerősség és a feszültség viszonya

A vektordiagramok (fazorok)

A feszültség és az áramerősség közötti fázisviszonyokat **vektordiagramok** segítségével szemléltethetjük. A csak kapacitást tartalmazó áramkörre jellemző vektordiagramot a 34-4. ábrán láthatunk. Ezen a diagramon a feszültséget és az áramerősséget a **V** és **I** nyilakkal, az ún. fázisvektorokkal[3] ábrázoltuk, melyek az óramutató járásával ellentétes irányban, azonos ω szögsebességgel forognak, tehát közben a nyilak által bezárt szög állandó marad. A fázisvektorok hossza az időben változó feszültség és áramerősség amplitúdója; a közöttük lévő szög pedig a v feszültség és i áramerősség ϕ **fáziskülönbsége**. A fázisvektorok függőleges tengelyen vett vetületét az alábbi képletek adják meg:

$$v = V \sin \omega t \quad \text{és} \quad i = I \cos \omega t,$$

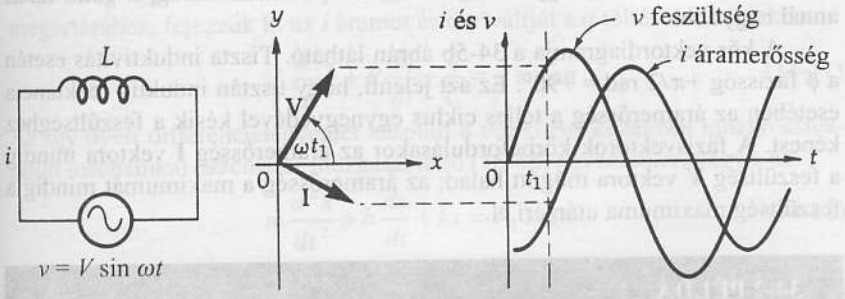
$$i = I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{34-6}$$

A vetületek tulajdonképpen azt adják meg, hogy a mérhető fizikai mennyiségek (v és i) időben hogyan változnak. A ϕ fáziskülönbség az adott esetben $-\pi/2$ rad $= -90°$ (minthogy $i = I\sin(\omega t - \phi)$). Ez azt jelenti, hogy tisztán kapacitív ellenállás esetében az áramerősség a teljes ciklus egynegyedével siet a feszültséghez képest. A fázisvektorok körbefordulásakor, az áramerősség **I** fázisvektora mindig a feszültség **V** fázisvektora előtt halad; az áramerősség a maximumát mindig a feszültség maximuma előtt éri el. A fázisvektordiagram tehát a feszültség és az áramerősség közötti fázisviszonyokat szemlélteti.

Csak induktivitást tartalmazó áramkörök

Tekintsük a 34-5a ábrán látható áramkört; tételezzük fel, hogy L „tisztán induktív" elemet (tekercset) jelent, vagyis a menetek ellenállása elhanyagolha-

[3] Bár a feszültség és az áram a szokásos értelemben nem vektormennyiség, a fázisvektorokra érvényes a jól ismert vektorösszegzési szabály. A vektordiagramok hasznos segédeszközök, amelyekkel világossá tehetők az áramok és feszültségek fázisviszonyai.
A feszültségeket és áramokat reprezentáló vektorokat a továbbiakban (az angol nyelvű phasor szó alapján) fazoroknak is nevezzük. (A fordító)



(a) A csak induktivitást tartalmazó AC áramkör

(b) A fázisvektordiagram. A fázisvektorok ω szögsebességgel, az óramutató járásával ellentétes irányban forognak. A **V** és **I** vektorok közötti szög mindig 90°.

(c) A fázisvektorok forgása közben a függőleges tengelyen vett vetületük a pillanatnyi áramnak, illetve feszültségnek megfelelően változik az időben.

34-5 ábra
Csak induktivitást tartalmazó áramkörben az áramerősség és a feszültség viszonya

tóan kicsiny. A hurok mentén a feszültségesések összege ebben az esetben is zérus. A tekercs kapcsai között a feszültségesés $v_L = -L di/dt$, tehát

$$\Sigma v = 0,$$

$$v - L\frac{di}{dt} = 0. \qquad (34\text{-}7)$$

A $v = V \sin \omega t$ behelyettesítéssel és átrendezéssel a (34-7) összefüggés az alábbi alakban írható:

$$L\frac{di}{dt} = V \sin \omega t .$$

Ezt a differenciálegyenletet az i és t változók szétválasztásának módszerével oldjuk meg, vagyis ezeket a változókat az egyenlet két különböző oldalára rendezzük. Integrálással (vö. a G függelékkel) azt kapjuk, hogy

$$\int di = \frac{V}{L}\int \sin \omega t \, dt$$

$$i = -\frac{V}{\omega L}\cos \omega t + c$$

Minthogy $c = 0$[4], és felhasználva a $-\cos \omega t = \sin(\omega t - \pi/2)$ azonosságot, ezt a kifejezést az Ohm-törvényhez hasonló alakra írhatjuk át:

$$i = \frac{V}{X_L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (34\text{-}8)$$

AZ INDUKTÍV ELLENÁLLÁS (REAKTANCIA) X_L

$$X_L = \omega L \qquad (34\text{-}9)$$

Az induktív ellenállás éppen úgy korlátozza az áramerősség amplitúdóját, mint ahogyan a csak ellenállást tartalmazó áramkörben az ellenállás. A reaktancia a frekvencia növelésével nő, hiszen az induktivitás gátolja az

[4] A c integrálási állandó időben állandó DC áramnak felel meg. Ha az áramkörben DC áramforrás lenne jelen, c zérustól különbözne.

áramváltozásokat. Minél gyorsabban változik az áramerősség, a gátló hatás annál nagyobb.

A kör vektordiagramja a 34-5b ábrán látható. Tiszta induktivitás esetén a ϕ fázissög $+\pi/2$ rad = $+90°$. Ez azt jelenti, hogy tisztán induktív reaktancia esetében az áramerősség a teljes ciklus egynegyedével késik a feszültséghez képest. A fázisvektorok körbefordulásakor az áramerősség **I** vektora mindig a feszültség **V** vektora mögött halad; az áramerősség a maximumát mindig a feszültség maximuma után éri el.

34-2 PÉLDA

A 30 mH induktivitású tekercshez 15 V-os, 50 Hz-es AC feszültségforrást csatlakoztatunk. Számítsuk ki a tekercsen átfolyó áramerősséget.

MEGOLDÁS

A 34-8 egyenlet szerint az áramerősség amplitúdója:

$$I = \frac{V}{X_L}$$

Minthogy $X_L = \omega L = 2\pi fL$

$$I = \frac{V}{2\pi fL} = \frac{15\ \text{V}}{(2\pi)(50\ \text{s}^{-1})(3\times10^{-2}\ \text{H})} = 1{,}6\ \text{A}$$

Ismert, hogy a tiszta induktivitás esetén az áramerősség a feszültséghez képest $\pi/2$ radián szöggel késik. Az áramerősség frekvenciája ugyanakkora, mint az AC feszültségé, 50 Hz. Így az áramerősséget SI egységekben az alábbi összefüggés adja meg:

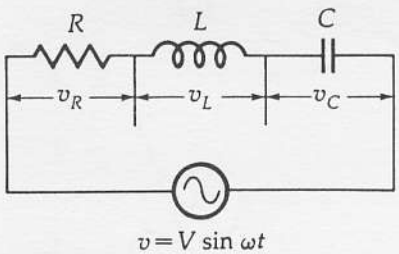
$$i = I\sin(\omega t - \phi) = 1{,}6\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\text{A}$$ (ahol t másodpercekben adott)

34.3 Sorba kapcsolt RLC-áramkörök

Tekintsük a 34-6 ábrán látható áramkört. Kirchhoff huroktörvénye értelmében bármely időpontban az alkalmazott $v = V\sin\omega t$ feszültségnek egyenlőnek kell lennie a tekercsben keletkező $v_L = Ldi/dt$ feszültség, az ellenálláson keletkező $v_R = iR$ feszültségesés és a kondenzátor lemezei közötti $v_C = q/C$ feszültség összegével:

$$\Sigma v = 0,$$

$$V\sin\omega t - L\frac{di}{dt} - iR - \frac{q}{C} = 0.$$



34-6 ábra
Bármely t időpontban az áramköri elemeken a feszültségesések összege egyenlő az alkalmazott v feszültséggel, azaz $v = v_R + v_L + v_C$.

Átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = V\sin\omega t\,. \qquad \textbf{(34-10)}$$

A (34-10) egyenletben szereplő egyes tagok fizikai jelentésének pontosabb megértéséhez, fejezzük ki az i áramot és deriváltját a q töltés deriváltjaként.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V\sin\omega t \qquad \textbf{(34-11)}$$

Az így nyert differenciálegyenlet hasonlít a viszkózus közegben mozgó csillapított mechanikai oszcillátor mozgását leíró (15-48) egyenlethez, vagyis az

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\sin\omega t \qquad \textbf{(34-12)}$$

egyenlethez.

A két egyenlet tagonkénti összehasonlítása alapján a következők állapíthatók meg:

(1) Az induktivitás a töltésáramlás változásainak éppen úgy ellenáll, mint ahogy a mechanikai rendszerben a tömeg a gyorsulásnak.

(2) Az elektromos áramkörök tisztán ohmos ellenállása a mechanikai rendszer viszkozitásával analóg mennyiség: mindkettő energiadisszipációt (elektromos esetben Joule-hőt) okoz.

(3) A kapacitás reciproka az elektromos áramkör „rugalmasságát" fejezi ki, analógiában a mechanikai rendszerekben az egyensúlyi helyzet felé visszatérítő erőt jellemző rugóállandóval.

Ezeket, más analógiákkal együtt, a 34-1 táblázatban foglaltuk össze.

A (34-11) egyenletet megoldva, a q töltés a t idő függvényében adódik; abból az áramerősséget t szerinti differenciálással kaphatjuk meg. Az egyenlet megoldásának az ismertetése meghaladja e könyv kereteit, ezért bizonyítás nélkül közöljük az eredményt:

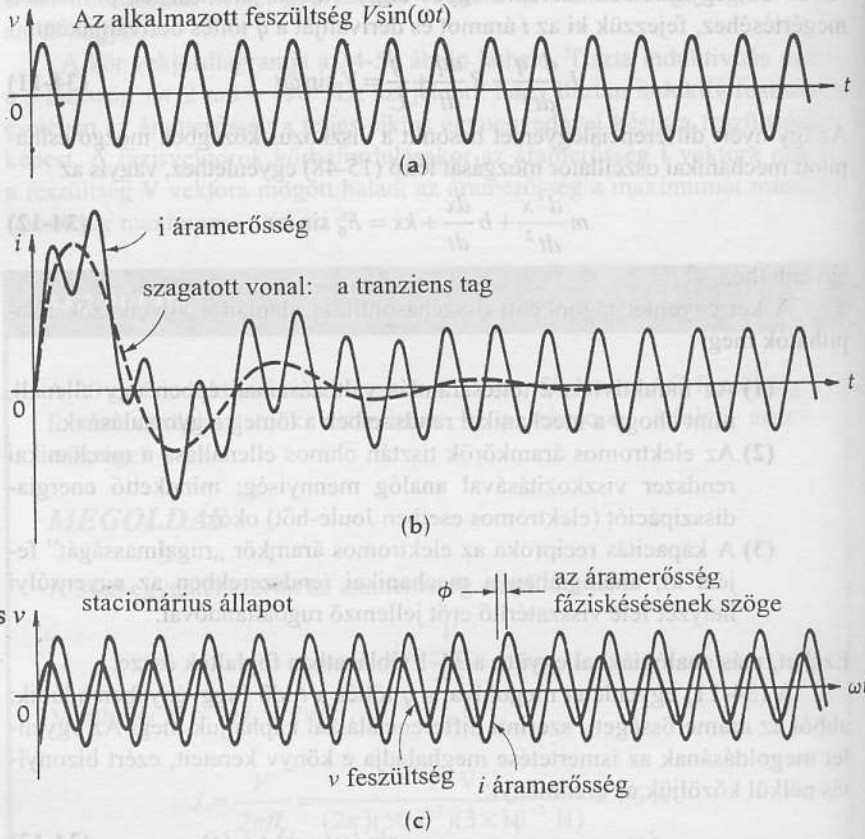
$$i=\frac{V}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}\sin(\omega t-\phi)+i_0(t) \qquad \textbf{(34-13)}$$

ahol a korábbiak szerint, $X_L=\omega L$ és $X_C=1/\omega C$. Az $i_0(t)$ tagot *tranziens tagnak* nevezik, ugyanis ez adja meg az áramerősség változását közvetlenül a feszültség bekapcsolása után. A legtöbb áramkörben ez a tag a feszültség bekapcsolása után hamarosan gyakorlatilag zérusság válik.[5] A 34-7 ábrán egy

34-1 táblázat
Az elektromos és a mechanikai mennyiségek közötti analógiák.

Mechanikai rendszer	Elektromos áramkör
M tömeg (a sebességváltozást gátolja)	L induktivitás (az áramerősségváltozást gátolja)
b viszkozitási együttható (az energiát hővé alakítja)	R ellenállás (az energiát hővé alakítja)
k rugóállandó (a mechanikai mozgás rugalmasságát, a rugó „visszahúzó képességét" fejezi ki).	$1/C$ reciprok kapacitás (az elektromos áramkör rugalmasságát fejezi ki.)
x elmozdulás	q töltés
$v=dx/dt$ sebesség	$i=dq/dt$ áramerősség
F erő	V feszültség

[5] A tranziens tag nagysága a kezdeti körülményektől függ. Például attól, hogy a feszültség milyen fázisában kapcsoljuk be a feszültségforrást vagy attól, hogy a kondenzátor töltött vagy feltöltetlen? A kezdeti állapot gondos megválasztásával a tranziens tag teljesen kiküszöbölhető; a kezdeti állapotra jellemző paraméterek bizonyos kombinációja esetén viszont a tranziens tag olyan nagy áramlökést is jelenthet, ami az áramkört károsíthatja.



34-7 ábra
Feszültség és áramerősség olyan sorba kapcsolt RLC áramkörben, melyben az induktív reaktancia nagyobb, mint a kapacitív reaktancia. Az áramkör úgy viselkedik, mintha az ellenállás egy kisebb (L és C reaktanciáinak különbségével egyenlő) reaktanciával lenne sorbakapcsolva.

tipikus példán illusztráljuk az áramköri viszonyokat: A tranziens tag viszonylag gyorsan lecseng és stacionárius AC áramerősség áll be. A trenziens tagot ne vizsgáljuk tovább, figyelmünket fordítsuk inkább a *stacionárius AC áramra*, melynek általános alakja a következő:

$$i = I \sin(\omega t - \phi) \qquad \textbf{(34-14)}$$

ahol a ϕ **fázisállandó**:

A ϕ FÁZIS-ÁLLANDÓ

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \qquad \textbf{(34-15)}$$

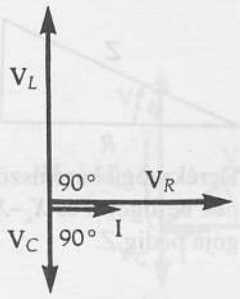
A ϕ értéke X_L és X_C értékétől függően $-\pi/2$ radián és $+\pi/2$ radián között akármekkora lehet. (Emlékeztetőül: ϕ a v alkalmazott feszültség és az áramkörben folyó i áramerősség közötti fáziskülönbség.)

A sorba kapcsolt *RLC* áramkör fázisviszonyai viszonylag egyszerűen szemléltethetők, illetve megjegyezhetők a következőképpen: Minthogy bármely időpontban az összes elemen átfolyó áramerősség *ugyanaz*, **célszerű minden fázisvektort az I áramerősség vektorához viszonyítani**. A 34-8a ábrán a feszültségesések **V** vektorai (az **I** áram vektorával együtt) láthatók. Konvenció szerint az **I** vektor vízszintes és jobbra mutat. Minthogy az ellenálláson a feszültségesés az áramerősséggel azonos *fázisú*, $\mathbf{V}_R$ és **I** azonos irányú. A tekercsben az áramerősség $\pi/2$ radiánnyit késik a feszültséghez képest és így a $\mathbf{V}_L$ fázisvektor 90°-kal megelőzi az áramerősség **I** fázisvektorát (vagyis a $\mathbf{V}_L$ fázisvektor az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal van elforgatva az **I** fázisvektorhoz képest). A kondenzátoron átfolyó áramerősség $\pi/2$ radiánnyit siet a feszültséghez képest és így a $\mathbf{V}_C$ vektor 90°-kal az **I** fázisvektor után van (vagyis a $\mathbf{V}_C$ fázisvektor az óramutató járásával megegyező irányban 90°-kal van elforgatva az I fázisvektorhoz képest). Kirchhoff hurokszabálya alapján *az áramköri elemeken a feszültségesésnek az alkalmazott feszültséggel azonosnak kell lennie, azaz a* **V** *vektor az egyes feszültség-vektorok vektoriális összege:*

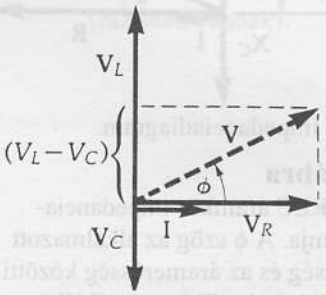
A FESZÜLTSÉG-VEKTOROK VEKTORIÁLIS ÖSSZEGE

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C \qquad \textbf{(34-16)}$$

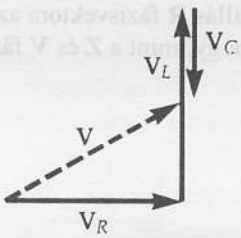
A feszültség-vektordiagram a sorba kapcsolt RLC áramkörben uralkodó fázisviszonyokat szemlélteti. A fázisvektorok, persze, ω szögsebességgel az óramutató járásával ellentétes irányban forognak, és *a függőleges tengelyen vett vetületük megadja az áramerősségnek és az egyes elemeken a feszültségeséseknek az időbeli változását.*



(a) A feszültség-vektordiagram. Az irányokat az **I** fázisvektortól mérjük.



(b) Az alkalmazott feszültség **V** fázisvektora az egyes áramköri elemeken a feszültségesések fázisvektorainak vektoriális összege, azaz $\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$.



(c) A feszültség-fázisvektorok ábrázolásának alternatív módja.

34-8 ábra
Feszültségek és áramerősség közötti fázisviszonyok sorba kapcsolt RLC áramkörben. (Ezen az ábrán az áramkör eredő reaktanciája induktív, így az **I** áramerősség a **V** alkalmazott feszültséghez képest késik; közöttük a fáziskülönbség ϕ.)

34.4 Sorba kapcsolt RLC áramkörök impedanciája

Az *RLC* áramkörön áthaladó áram erősségét az R, L, és C értéke, valamint az alkalmazott feszültség frekvenciája szabja meg. Az *I* áramerősség a (34-13) képlet szerint

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \textbf{(34-17)}$$

ahol
V = az alkalmazott feszültség
R = az ellenállás
X_L = ω L az induktív reaktancia
X_C = $1/(\omega C)$ a kapacitív reaktancia

Az ohmos ellenállásokat, az induktív és kapacitív ellenállásokat (reaktanciákat) együtt **impedanciának** nevezzük. Az impedancia ellenállásegységben (ohm **Ω**) adható meg.

SORBA KAPCSOLT RLC ÁRAMKÖR IMPEDANCIÁJA

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \textbf{(34-18)}$$

Igy az áramerősség és a feszültség amplitúdója között az egyszerű $I = V/Z$ arányosság áll fenn. Más alakban:

A VÁLTAKOZÓ ÁRAMRA VONATKOZÓ OHM TÖRVÉNY

$$V = IZ \qquad \textbf{(34-19)}$$

Az AC áramkörök tárgyalása során a Z impedancia ugyanazt a szerepet tölti be mint az ellenállás a DC áramköröknél.

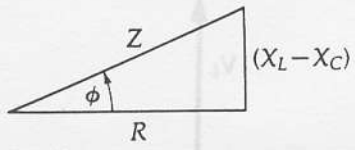
A (34-18) egyenlet algebrai alakja a Pitagorasz-tétel alkalmazását sugallja: ha R és X_L–X_C egy derékszögű háromszög két befogójának hossza, Z nagyságát az átfogó hossza adja meg, (34-9 ábra). A Z és R közötti szöget a (34-15) egyenlettel számíthatjuk:

A FÁZIS-KÜLÖNBSÉG:

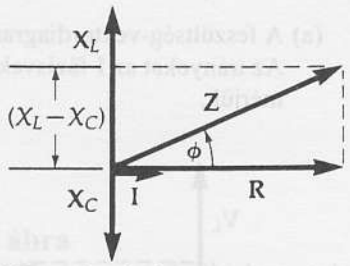
$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \qquad \textbf{(34-20).}$$

Vegyük észre, hogy ez megegyezik a v feszültség és az i áramerősség közötti fázisszöggel.[6] A 34-9a ábra háromszöge a 34-9b ábrán látható teljes *impedanciadiagram* része: az utóbbit úgy szerkesztjük meg, hogy az **R** ellenállást

[6] Az **I** áramerősség a $\mathbf{V}_R$ feszültség-fázisvektorral mindig azonos fázisban van. Pozitív ϕ fáziskülönbség azt jelenti, hogy az áramerősség az alkalmazott **V** feszültséghez képest késik, és megfordítva. Ez egybevág a (34-1) egyenlet szerinti AC áramerősség definíciójával, miszerint $i = I \sin(\omega t - \phi)$. Szerencsére a fáziskésést vagy sietést könnyen el tudjuk dönteni a feszültségvektordiagramok segítségével: mindössze azt kell megjegyeznünk, hogy az áramerősség (és az ellenállásokon a feszültségesés) fázisvektora vízszintesen jobbra, az induktív, illetve kapacitív tagokon a feszültségesések fázisvektora felfelé, illetve lefelé mutat.



(a) Derékszögű háromszög, melynek befogói R és X_L–X_C, átfogója pedig Z.



(b) Impedanciadiagram.

34-9 ábra
Soros RLC áramkör impedanciadiagramja. A ϕ szög az alkalmazott feszültség és az áramerősség közötti fáziskülönbség. Ebben a példában az eredő reaktancia induktív, vagyis $X_L > X_C$; tehát a ϕ fáziskülönbség pozitív és az $i = I\sin(\omega t - \phi)$ áramerősség az alkalmazott feszültséghez képest késik. A (b) ábrán az áramerősség **I**, és az ellenállás **R** fázisvektora azonos irányú, éppúgy, mint a **Z** és **V** fázisvektoraik.

az x tengely pozitív irányában, az $\mathbf{X}_L$ reaktanciát az y tengely pozitív irányában, az $\mathbf{X}_C$ reaktanciát pedig az y tengely negatív irányában vektorként rajzoljuk fel. E három vektor vektorális összege a **Z** eredő impedancia.

Az impedanciadiagram a 34-8 ábrán látható feszültség-vektordiagram közeli rokona; ugyanis az azon szereplő feszültségvektorok az egyes elemek impedanciájának (skalár) I-szeresei; vagyis a két ábra csak az I skálafaktorban és abban különbözik egymástól, hogy az impedanciadiagramon a vektorok nem forognak.

34-3 PÉLDA

Tekintsük a 34-6 ábra szerinti sorba kapcsolt RLC áramkört a következő paraméterekkel: $R = 200\ \Omega$, $L = 552{,}5$ mH és $C = 22{,}1\mu$F. Az alkalmazott feszültség amplitudója 50 V, a frekvencia 50 Hz. Számítsuk ki

(a) az i áramerősség amplitúdóját és az alkalmas ott v feszültséghez viszonyított ϕ fáziskülönbségét;

(b) az ellenálláson a V_R feszültségesés;

(c) a kondenzátoron a V_C feszültségesés;

(d) a tekercsen a V_L feszültségesés amplitúdóját és az áramhoz viszonyított fáziskülönbségét.

MEGOLDÁS

Ilyen feladatoknál az első lépés az, hogy kiszámítjuk a reaktanciákat (impedanciákat), majd alkalmazzuk a váltakozó áramú Ohm-törvényt.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{(2\pi)(50\,\mathrm{s}^{-1})(22{,}1\times10^{-6}\,\mathrm{F})} = 144\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = (2\pi)(50\,\mathrm{s}^{-1})(552{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{H}) = 173{,}49\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = [(200)^2 + (173{,}49 - 144)^2]^{1/2}\ \Omega = 202{,}2\ \Omega$$

A 34-10b ábrán ezen áramkör impedanciadiagramja látható. Minthogy $X_L > X_C$, az eredő impedancia induktív, vagyis az áram késik a feszültséghez képest.

(a) Az áramerősség I amplitúdóját a váltakozó áramú Ohm-törvénnyel határozzuk meg:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\,\mathrm{V}}{202{,}2\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}247\,\mathrm{A}}}$$

Az áramerősség frekvenciája ugyanakkora, mint a feszültségé, 50 Hz. Az áramerősség és a feszültség közötti ϕ fáziskülönbséget a (34-20) összefüggés segítségével számíthatjuk ki:

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{173{,}49\,\Omega - 144\,\Omega}{200\,\Omega}\right) = \underline{\underline{8{,}39^\circ}} = 0{,}146\ \mathrm{rad}$$

(az eredő reaktancia induktív, tehát az áramerősség késik a feszültséghez képest).

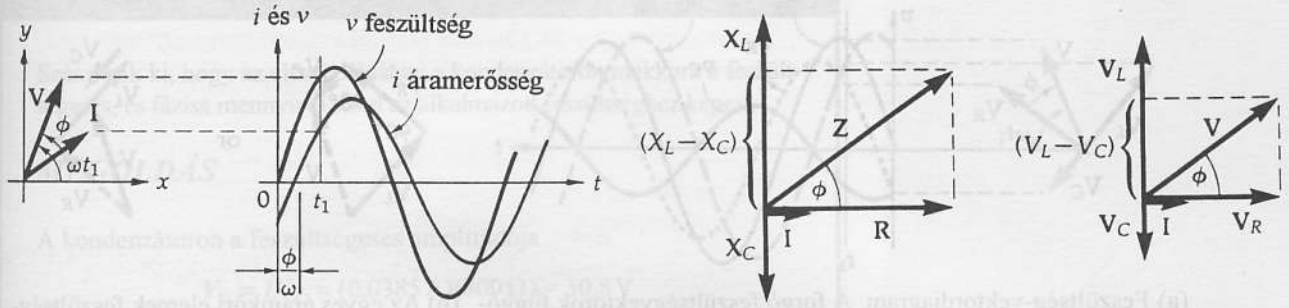
Ezeket az értékeket a (34-14) egyenletbe behelyettesítve, az áramerősség az időtől az alábbiak szerint függ:

$$i = \{I\sin(\omega t - \phi) = 0{,}247\sin[(2\pi)(50\,\mathrm{s}^{-1})t - 0{,}146]\}\ \mathrm{A}$$

$$i = \{0{,}247\sin(100\pi t - 0{,}146)\}\ \mathrm{A}$$

(ahol t másodpercekben van adva)

(b) Az ellenálláson a V_R feszültségesés:



(a) A forgó fázisvektorok függőleges tengelyen vett vetülete megadja a v feszültség és i áramerősség időtől való függését.

(b) Impedanciadiagram

(c) Feszültség-fázisvektordiagram. Az $\mathbf{I}$ és $\mathbf{V}_R$ fázisvektorok azonos irányúak (fázisban vannak).

34-10 ábra
A 34-3 példához.

$$V_R = IR = (0{,}247\ \text{A})(200\ \Omega) = 49{,}4\ \text{V}$$

Az ellenálláson a feszültségesés mindig azonos *fázisú* a rajta átfolyó árammal, így $\phi = 0°$.

(c) A kondenzátoron a V_C feszültségesés:

$$V_C = IX_C = (0{,}247\ \text{A})(144\ \Omega) = 35{,}57\ \text{V}$$

(d) A kondenzátoron a feszültségesés az átfolyó áramhoz képest mindig $\phi = 90°$-kal ($= \pi/2$ radián) késik.

$$V_L = IX_L = (0{,}247\ \text{A})(173{,}49\ \Omega) = 42{,}85\ \text{V}$$

A tekercsen a feszültségesés az átfolyó áramhoz képest mindig $\phi = 90°$-kal ($= \pi/2$ radiánnal) siet.

A 34-11 ábra feszültség-vektordiagramján az összes feszültségvektort feltüntetjük. Hangsúlyozandó, hogy a V alkalmazott feszültség *nem* egyenlő az egyes elemeken keletkező feszültségesések amplitúdójának összegével ($V_R+V_L+V_C \neq V$: az adott esetben 49,4V + 35,57V + 42,85V = 127,82V > 50V). Másfelől a feszültségek pillanatnyi értékére az összegzés lehetséges: ezek *algebrai* összege megegyezik a v *alkalmazott* feszültség pillanatnyi értékével:

$$v = v_R + v_L + v_C$$

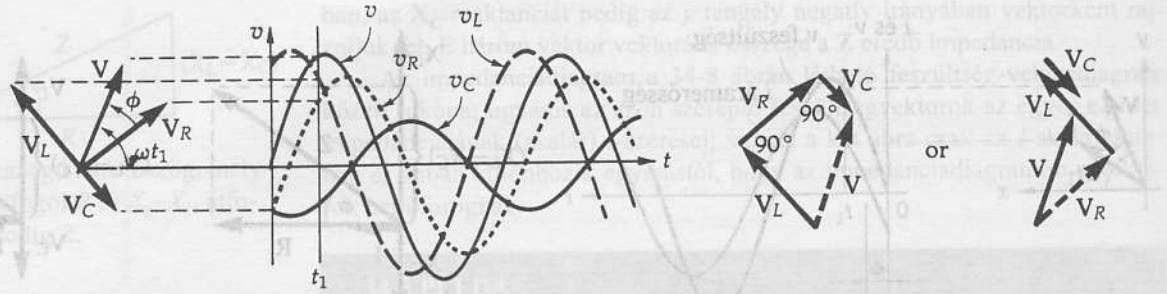
Ezek a pillanatnyi feszültségek a feszültség–vektordiagram (34-11 ábra) függőleges tengelyen vett vetületei. A vetületek összege ezért egyenlő az alkalmazott v feszültség pillanatnyi értékével, mert maguk a fázisvektorok *vektorként* adandók össze:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

A 34-11b vektorábra szerint

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 = (49{,}4\ \text{V})^2 + (42{,}85\ \text{V} - 35{,}57\ \text{V})^2 = 50\ \text{V}$$

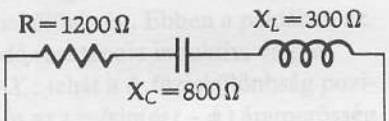
amely érték megegyezik az alkalmazott feszültség amplitúdójával.



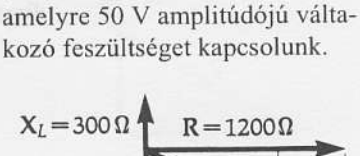
(a) Feszültség-vektordiagram. A forgó feszültségvektorok függőleges tengelyen vett vetülete megadja az egyes elemeken a feszültségesés időtől való függését.

(b) Az egyes áramköri elemek feszültségvektorai *vektorként* adandók össze. Vektoriális összegük éppen egyenlő az alkalmazott feszültség vektorával ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$). Az ábrán a vektorösszegzés két módját illusztráltuk).

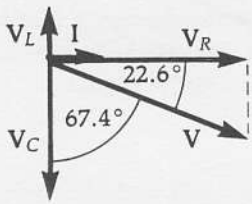
34-11 ábra
A 34-3 példához. Feszültség-vektordiagramok.



(a) Sorba kapcsolt RLC áramkör, amelyre 50 V amplitúdójú váltakozó feszültséget kapcsolunk.



(b) Az (a) ábrán látható áramkör impedanciadiagramja.



(c) A feszültség-vektordiagram.

34-12 ábra
A 34-4 példához.

34-4 PÉLDA

Tekintsük a 34-12 ábrán látható RLC áramkört. Számítsuk ki (a) az RLC kör impedanciáját; (b) a körben folyó áram erősségét és (c) az alkalmazott feszültség és a körben folyó áram közötti fáziskülönbséget.

MEGOLDÁS

(a) Az impedencia

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = [(1200\,\Omega)^2 + (300\,\Omega - 800\,\Omega)^2]^{1/2}$$

$$= 1300\,\Omega$$

A 34-12b ábrán látható az impedenciadiagram.

(b) Az AC Ohm-törvény szerint

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\,\text{V}}{1300\,\Omega} = 0{,}0385\,\text{A}$$

(c) A fáziskülönbség

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{300\,\Omega - 800\,\Omega}{1200\,\Omega}\right) = -22{,}6°$$

(az áramerősség az alkalmazott feszültséghez képest siet.)

A negatív fáziskülönbség-érték azt jelenti, hogy az áramerősség az alkalmazott feszültséghez képest siet. Ez összhangban áll azzal, hogy az eredő reaktancia kapacitív, hiszen $X_C > X_L$.

34-5 PÉLDA

Számítsuk ki, hogy az előző példában a kondenzátoron mekkora a feszültségesés, és fázisa mennyivel tér el az alkalmazott feszültséghez képest.

MEGOLDÁS

A kondenzátoron a feszültségesés amplitúdója

$$V_C = IX_C = (0{,}0385\,\text{A})(800\,\Omega) = 30{,}8\,\text{V}$$

Az impedenciadiagram egyes vektorait I-vel szorozva a feszültségvektordiagramhoz jutunk (34-12c ábra). A kondenzátoron a V_C feszültségesés az alkalmazott V feszültséghez képest késik; ennek szöge $90° - \phi = 90° - 22{,}6° = 67{,}4°$.

34.5 Párhuzamosan kapcsolt RLC áramkörök impedanciája

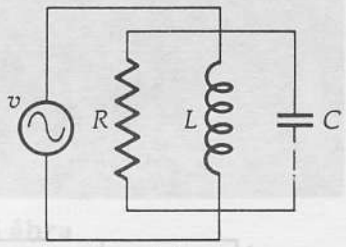
Tekintsük a 34-13a ábrán látható áramkört: a v feszültségforrással párhuzamosan kapcsolt impedanciákat. A párhuzamosan kapcsolt áramkör vizsgálata egy alapvető tulajdonsága miatt különbözik a sorba kapcsolt áramkör esetében követett eljárástól: A sorba kapcsolt áramkörben az összes elemen azonos erősségű áram folyik át, így az egyes feszültségvektorokat az *áramerősség* **I** fázisvektorához viszonyítottuk. Párhuzamosan kapcsolt áramkörök esetében az egyes ágakon a feszültségesés azonos, így **a fázisviszonyok megállapításához a V feszültség-fázisvektort használjuk viszonyítási alapul**. A számítási módszer a következő: először az egyes ágakban folyó áramerősséget számítjuk ki, majd az áramok fázisvektorait *vektoriálisan* összegezve megkapjuk a főágon folyó áramerősséget. Ez a módszer Kirchhoff csomóponti törvényén ($\Sigma i = 0$) alapul, vagyis a csomópontba belépő áramok összegének bármely időpontban egyenlőnek kell lennie a csomópontból távozó áramok összegével. Hasonlóan ahhoz, ahogyan a feszültségek vektoriális összegzésére feszültség-vektordiagramot készítettünk, most az áramerősségek vektori összegzéséhez áramerősség-vektordiagramot készítünk. A 34-13b ábrán láthatók az egyes impedanciákon áthaladó áramok fázisvektorai (a **V** feszültség-fázisvektorhoz viszonyítva). A 34-13c ábrán vázolt módon az áramerősség-fázisvektorokat vektoriálisan összegezve megkapjuk az áramforrásból kivett teljes **I** áramerősséget ($\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C$).

34-6 PÉLDA

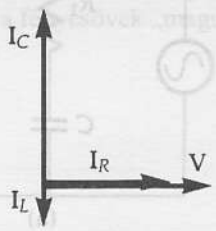
Az R, L és C áramköri elemek a 34-13a ábra kapcsolási rajza szerint párhuzamosan vannak kapcsolva. (a) Vázoljuk fel az egyes ágakban folyó áramerősségek fázisvektorát, feltéve, hogy $R = X_L = 2X_C$. (b) Számítsuk ki a teljes áramerősség **I** vektora és az alkalmazott feszültség **V** vektora közötti ϕ fáziskülönbséget.

MEGOLDÁS

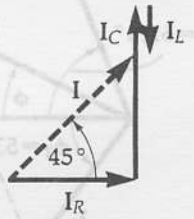
(a) Mindhárom ág végpontjai között a feszültség V, ezért a **V** fázisvektorhoz viszonyítjuk az áramerősségvektorokat. Ez utóbbiak az induktív és kapacitív ágban 90°-os szöget zárnak be V-vel (és I_R-rel



(a)



(b) Az áramerősségek vektordiagramja (a feszültség **V** fázisvektorához viszonyítva).



(c) Az áramerősségvektorok vektoriális összege egyenlő az áramforrásból kivett teljes áramerősség **I** vektorával ($\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C$).

34-13 ábra
A 34-6 példához

is): relatív nagyságuk pedig az $I = V/Z$ egyenlet szerint $I_R = I_L$ és $I_C = 2I_L$ (minthogy $X_L = R = 2X_C$). Így tetszőleges léptékben megszerkeszthetjük a 34-13b ábra szerinti vektordiagramot.

(b) Minthogy $I_C = 2I_L = 2I_R$, a feszültségforrás áramában az y irányú komponens nagysága

$$I_y = (I_C - I_L) = (2I_L - I_L) = I_L = I_R$$

Hasonlóképpen az x komponens nagysága

$$I_x = I_R$$

I és **V** között a fáziskülönbség $\phi = \text{arctg}(I_y/I_x) = \text{arctg}(I_R/I_R) = 45°$ (34-13c ábra).

Megjegyzendő, hogy az áramkör az adott frekvencián úgy viselkedik, mint egy *kapacitív* reaktanciájú RC kör (bár $X_L > X_C$). A párhuzamosan kapcsolt ohmos ellenállásokhoz hasonlóan itt is a *legkisebb* impedanciájú elem dominál, ezen át folyik a legnagyobb áram.

34-7 PÉLDA

Tekintsük a 34-14a. ábrán látható áramkört. Az alkalmazott feszültség $v = 260 \sin \omega t$, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $X_C = 12\ \Omega$ és $X_L = 16\ \Omega$. Milyen függvény szerint váltakozik a főágban folyó áram erőssége?

MEGOLDÁS

A megoldás a következő lépésekből áll:

(1) Számítsuk ki az egyes ágak impedanciáját.
(2) Számítsuk ki az egyes ágakban folyó áramerősség amplitúdóját és a v alkalmazott feszültséghez viszonyított fázisát.
(3) Szerkesszünk áramerősség-vektordiagramot és a főágban folyó i áramerősség kiszámítása végett adjuk össze *vektoriálisan* az egyes ágak áramerősségének fázisvektorát.

1. ág:

1. lépés:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_{L_1} - X_{C_1})^2}$$

$$Z_1 = \sqrt{(5\,\Omega)^2 + (-12\,\Omega)^2} = 13\,\Omega$$

2. lépés:

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{260\,\text{V}}{13\,\Omega} = 20\,\text{A}$$

$$\phi_1 = \text{arctg}\left(\frac{X_{L_1} - X_{C_1}}{R_1}\right)$$

$$\phi_1 = \text{arctg}\left(\frac{-12\,\Omega}{5\,\Omega}\right) = -67{,}4°$$

Az $\mathbf{I}_1$ áramerősség a **V** feszültséghez képest 67,4°-kal *siet*.

2. ág:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_{L_2} - X_{C_2})^2}$$

$$Z_2 = \sqrt{(12\,\Omega)^2 + (16\,\Omega)^2} = 20\,\Omega$$

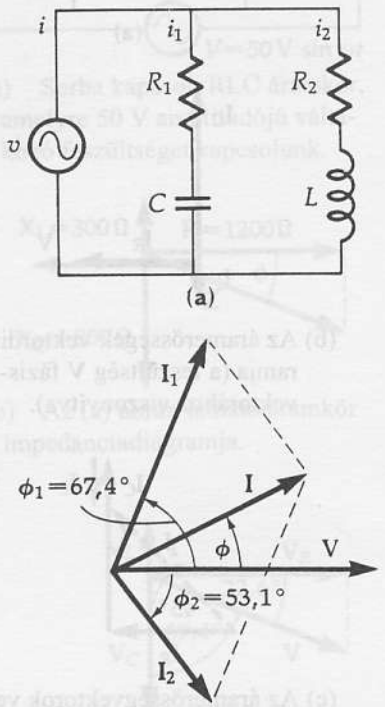
$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{260\,\text{V}}{20\,\Omega} = 13\,\text{A}$$

$$\phi_2 = \text{arctg}\left(\frac{X_{L_2} - X_{C_2}}{R_2}\right)$$

$$\phi_2 = \text{arctg}\left(\frac{16\,\Omega}{12\,\Omega}\right) = 53{,}1°$$

Az $\mathbf{I}_2$ áramerősség a **V** feszültséghez képest 53,1°-kal *késik*.

3. lépés: Felvázoljuk az áramerősségvektorokat a **V** feszültség-fázisvektorokhoz viszonyítva. Ezután vektoriális összegzéssel (az x és y



(b) Az áramerősség vektor diagramja a (mindkét ágban aznos) V feszültség-fázisvektorhoz viszonyítva.

34-14 ábra
A 34-7 példához

irányú komponensek külön-külön összegzésével) kiszámítjuk az $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ eredőt. Az x és y irányú komponensek összegzését az alábbiak szerint végezzük el:

x komponens:	**y komponens:**
$I_1 : I_{1x} = I_1 \cos\phi_1$	$I_{1y} = I_1 \sin\phi_1$
$= (20\,\text{A})\left(\frac{5}{13}\right) = 7{,}69\,\text{A}$	$= (20\,\text{A})\left(\frac{12}{13}\right) = 18{,}5\,\text{A}$
$I_2 : I_{2x} = I_2 \cos\phi_2$	$I_{2y} = I_2 \sin\phi_2$
$= (13\,\text{A})\left(\frac{3}{5}\right) = 7{,}80\,\text{A}$	$= (13\,\text{A})\left(-\frac{4}{5}\right) = -10{,}4\,\text{A}$
$I : I_x = I_{1x} + I_{2x}$	$I_y = I_{1y} + I_{2y}$
$= 7{,}69\,\text{A} + 7{,}80\,\text{A} = 15{,}5\,\text{A}$	$= 18{,}5\,\text{A} + 10{,}4\,\text{A} = 8{,}10\,\text{A}$

I_x és I_y eredője

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{(15{,}5\,\text{A})^2 + (8{,}10\,\text{A})^2} = \underline{\underline{17{,}5\,\text{A}}}$$

a fáziskülönbség pedig

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{I_y}{I_x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{8{,}10\,\text{A}}{15{,}5\,\text{A}}\right) = \underline{\underline{27{,}6^\circ}}$$

A fázisvektordiagram szerint az áramerősség a v feszültséghez képest ekkora szöggel *siet*. Ennél fogva az áramerősség $i = I\sin(\omega t - \phi)$ általános egyenletében ϕ előjelét megváltoztatjuk (vagyis $\phi = -27{,}6°$):

$$i = 17{,}5\sin(\omega t + 27{,}6^\circ)\,\text{A}$$

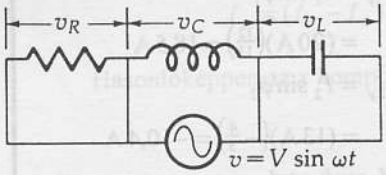
Megjegyzendő, hogy (az adott frekvencián) a kapacitást tartalmazó ágnak kisebb az impedenciája, az áramkör úgy viselkedik, mint egy RC kör. Hasonlóan az ellenállásokat tartalmazó DC áramkörök viselkedéséhez, ahol a párhuzamosan kapcsolt áramkör eredő ellenállásában a legkisebb ellenállás, a sorba kapcsolt áramkör eredő ellenállásában viszont a legnagyobb ellenállás dominál, az AC áramkörök esetében párhuzamosan kapcsolt, illetve sorba kapcsolt áramkörök eredő impedanciájában a (nagyságrendileg) legkisebb, illetve a *legnagyobb* impedanciájú elem dominál.



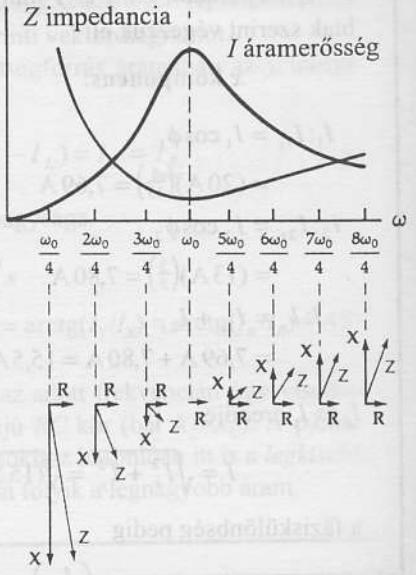
34-15 ábra
A 765 kV-os váltóáramú távvezeték alatt az elektromos térerősség olyan nagy, hogy a fénycsövek „maguktól" világítanak.

34.6 Rezonancia-jelenségek

Noha általában tisztában vagyunk azzal, hogy bizonyos mechanikai rendszerekben (pl. ugródeszka, hangvilla) természetes rezonancia jöhet létre, nem szoktuk ezeket *frekvencia-kiválasztó mechanizmusoknak* tekinteni. Pedig ezek pontosan így működnek: ha a gerjesztés frekvenciája megegyezik a rendszer valamely sajátfrekvenciájával, nagy amplitúdójú rezgés jöhet létre. Tekercsekből, kondenzátorokból és ellenállásokból álló elektromos áramkörök hasonló módon viselkednek: ha rezonanciára képes áramkörre éppen a **rezonanciafrekvenciával** azonos frekvenciájú váltakozó feszültség hat, akkor az áramerősség az áramkör konstrukciójától függően maximális vagy minimális értéket vesz fel. Meg fogjuk mutatni, hogy az áramkörre jellemző rezonanciafrekvencia az a frekvencia, amelynél az *áramkörben folyó áram a gerjesztő feszültséggel éppen azonos fázisú*. Az elektromos rezonancia jelenségét széleskörűen, mint *frekvencia-kiválasztó mechanizmust* alkalmazzák: pl. rádió vagy TV készülékünk hangolásakor a rezonanciára képes áramköröknek ezt a tulajdonságát használjuk ki.



(a) Sorba kapcsolt RLC áramkör



(b) Áramerősség és impedancia a frekvencia függvényében. A görbék $Q = 2$ jósági tényezőjű RLC áramkörre vonatkoznak.

34-16 ábra
Sorba kapcsolt áramkör rezonanciája

Soros rezgőkör

Tekintsünk egy sorba kapcsolt *RLC* áramkört (34-16a ábra). Abból a célból, hogy az áramkör tulajdonságait az ω körfrekvencia függvényében megvizsgáljuk, egy sorozat impedanciadiagramot készítünk. A 34-16b ábrán látható diagram elkészítését úgy kezdjük, hogy legyen $X_L = X_C$: ekkor a Z impedancia éppen az R ellenállással egyenlő. Az ezen feltételt teljesítő ω_0 frekvencia a következőképpen számítható ki:

$$X_L = X_C$$

Az X_L és az X_C reaktancia frekvenciától való függését figyelembe véve:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

ahonnan:

A SORBA KAPCSOLT RLC KÖR REZONANCIA-KÖRFREKVENCIÁJA

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (34\text{-}21)$$

Ezután megszerkesztjük az 1/4 ω_0, 2/4 ω_0, 3/4 ω_0... frekvenciákhoz tartozó impedanciadiagramokat egészen a 8/4 ω_0 frekvenciáig. A **Z** impedanciának két komponense van, ami reaktanciától származik: a felfelé mutató $\mathbf{X_L}$, és a lefelé mutató $\mathbf{X_C}$. A frekvencia növekedésével $\mathbf{X_L}$ lineárisan nő, $\mathbf{X_C}$ hiperbolikusan csökken; az **R** ohmos ellenállás állandó marad. Az impedancia abszolút értékét (a Z vektor hosszát) minden egyes impedancia-diagramról és a frekvencia függvényében ábrázolva a 34-16b ábrán látható impedancia-függvényhez jutunk; ugyanezen az ábrán az I áramerősség frekvenciától való függését, az ún. *rezonanciagörbét* is feltüntettük. Az utóbbi függvény vizsgálata alapján megállapíthatók a sorba kapcsolt rezgőkörök fontos tulajdonságai:

(1) A rezonanciagörbe *élessége* növekszik, ha az ellenállás értéke az induktív vagy kapacitív reaktanciákhoz képest csökken. A görbe élességét az alábbi definícióval megadható *Q jósági tényezővel* jellemezzük.

A REZGŐKÖR *Q* JÓSÁGI TÉNYEZŐJE:

$$Q \equiv \frac{\omega_0 L}{R} \qquad (34\text{-}22)$$

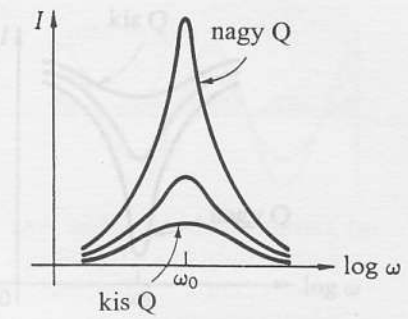
A Q dimenziónélküli mennyiség, minthogy ellenállásdimenziójú mennyiségek hányadosa. A tipikus kisfrekvenciás rezgőkörök jósági tényezője 10-nél kisebb szám, míg a nagyfrekvenciás rezgőkörökre ez az érték akár az 1000-es nagyságrendet is meghaladhatja (34-17 ábra).

(2) A rezonanciafrekvencián az áramerősséget R értéke határozza meg; ugyanis

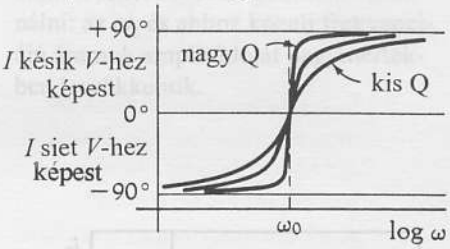
$$I = \frac{V}{R}, \qquad (34\text{-}23)$$

ahol V az alkalmazott feszültség; I ezen a frekvencián tehát akár nagyon nagy is lehet.

(3) A rezonanciafrekvenciánál a tekercsen ugyanakkora a feszültség mint a kondenzátoron, fázisuk azonban éppen ellentétes, vektori összegük tehát zérus: $\mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = 0$. *Bár az összeg minden időpontban zérus*, maguk a feszültségek külön-külön nagyon nagyok is lehetnek; nagy jósági tényezőjű áramkörökben a reaktanciákon a feszültségesés az alkalmazott feszültségnek akár több ezerszerese is lehet!



(a) Különböző Q jósági tényezőjű sorba kapcsolt RLC áramkörök rezonanciagörbéi.



(b) Az áramerősség és a feszültség közötti ϕ fáziskülönbség sorba kapcsolt RLC körben.

34-17 ábra
Sorba kapcsolt RLC kör rezonanciája

34-8 PÉLDA

Sorba kapcsolt *RLC* áramkör a következő adatokkal jellemezhető: $L = 20$ mH, $C = 100$ nF, $R = 20\ \Omega$, $V = 100$ V és $v = V\sin \omega t$. Számítsuk ki (a) a rezonanciafrekvenciát; (b) az áramerősség amplitúdóját a rezonanciafrekvencián; (c) az áramkör Q jósági tényezőjét és (d) a tekercs kapcsai közötti feszültség amplitúdóját a rezonanciafrekvencián.

MEGOLDÁS

(a) A rezonanciafrekvenciát a (34-21) képlet alapján számítjuk ki:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Konkrét számértékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\omega_0 = [(20\times10^{-3}\ \text{H})(100\times10^{-9}\ \text{F})]^{-1/2} = 2{,}24\times10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_0 = \left(2{,}24\times10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\,\text{ciklus}}{2\pi\ \text{rad}}\right) = 3{,}56\,\text{kHz}$$

(b) A rezonanciafrekvencián az áramerősség az alkalmazott feszültség és az ellenállás hányadosa:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100\,\text{V}}{20\,\Omega} = 5{,}00\,\text{A}$$

(c) Az áramkör Q jósági tényezőjét a (34-22) képlettel számítjuk ki:

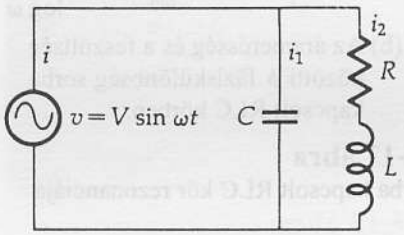
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\left(2{,}24\times10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(20\times10^{-3}\ \text{H})}{20\,\Omega} = 22{,}4$$

Megjegyzendő, hogy Q dimenzió nélküli szám.

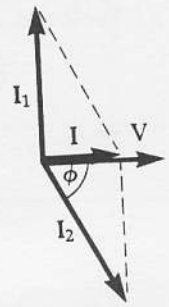
(d) A tekercs kapcsai közötti feszültség amplitúdója $V_L = X_L I$, ahol X_L a tekercs induktív reaktanciája a rezonanciafrekvencián; I pedig az áramerősség amplitúdója ugyanezen a frekvencián:

$$V_L = \omega_0 L I = \left(2{,}24\times10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(20\times10^{-3}\ \text{H})(5\,\text{A}) = 2240\,\text{V}$$

Vegyük észre, hogy ez a feszültség lényegesen nagyobb, mint a 100 V amplitúdójú alkalmazott feszültség.



(a) Párhuzamos rezgőkör



(b) Az áramerősség-vektordiagram a rezonancia állapotában.

34-18 ábra
Rezonancia párhuzamosan kapcsolt áramkörben

Párhuzamos rezgőkör

A rezgőkörök egyik leggyakoribb formája a 34-18a ábrán illusztrált párhuzamosan kapcsolt kondenzátorból és tekercsből álló áramkör. A tekerccsel sorba kötött ellenállás a tekercs meneteinek ellenállásából származik.[7] Az áramkör tulajdonságainak a vizsgálata céljából az áramerősségek vektordiagramját a **V** feszültség-fázisvektorhoz viszonyítva szerkesztjük meg. Rezonancia esetén az **I** áramerősségvektor ($= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$) az alkalmazott feszültséggel *azonos fázisú*. Továbbá ilyenkor az **I** fázisvektor minimális nagyságú (34-18b ábra). Az **I** áramerősségvektor a kondenzátoron átfolyó $\mathbf{I}_1$ áramerősség és a sorba kapcsolt *RL* ágban folyó $\mathbf{I}_2$ áramerősség vektoriális összege. **V**-hez képest az $\mathbf{I}_1$ áramerősség $\pi/2$ radiánnyit siet, az $\mathbf{I}_2$ áramerősség pedig ϕ szögnyit késik, ahol

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right) \qquad \textbf{(34-24)}$$

Az $\mathbf{I}_1$ és az $\mathbf{I}_2$ fázisvektorok amplitúdója

$$I_1 = \frac{V}{X_C} \qquad I_2 = \frac{V}{\sqrt{X_L{}^2 + R^2}} \qquad \textbf{(34-25)}$$

A rezonancia állapotában az $\mathbf{I}_1$ és $\mathbf{I}_2$ fázisvektorok függőleges komponensei egyenlők, tehát ilyenkor (ezen a frekvencián) az áramkör úgy viselkedik, mintha egyszerű ellenállás lenne, azaz

$$\frac{V}{X_C} = \frac{V}{\sqrt{X_L{}^2 + R^2}} \sin\phi \qquad \textbf{(34-26)}$$

[7] A kapacitív ág nem tartalmaz ellenállást. Ennek oka a következő: ha a kondenzátor dielektrikuma „szivárog", azaz valamekkora piciny egyenáram folyik át rajta, az ennek megfelelő elektromos ellenállást a kondenzátorral párhuzamosan kapcsoltnak kell feltételeznünk. Minthogy a rezgőköröket rendszerint úgy tervezzük, hogy jósági tényezőjük minél nagyobb legyen, ilyen célokra olyan kondenzátorokat választunk, amelyek ellenállása nagyon nagy, a rajtuk folyó áram gyakorlatilag zérus, azaz a szivárgási ellenállás elhanyagolható.

ahol X_L, X_C és ϕ értéke a rezonanciafrekvencián értendő. A (34-24) összefüggés szerint tg $\phi = \omega_0 L/R$. Ennélfogva:

$$\sin\phi = \frac{\omega_0 L}{\sqrt{(\omega_0 L)^2 + R^2}}$$

A (34-26) egyenletbe behelyettesítve és ebből ω_0 értékét kifejezve:

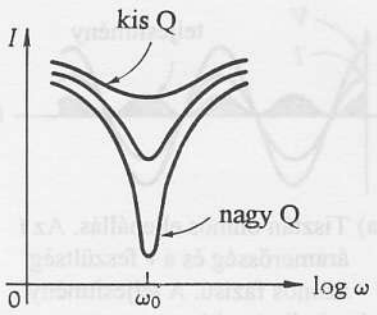
$$\omega_0 C = \left(\frac{1}{\sqrt{(\omega_0 L)^2 + R^2}}\right)\left(\frac{\omega_0 L}{\sqrt{(\omega_0 L)^2 + R^2}}\right)$$

vagyis

A 34-18 ÁBRA PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT RLC ÁRAMKÖR REZONANCIAKÖRFREKVENCIÁJA:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \qquad \textbf{(34-27)}$$

Nagy Q értékkel jellemzett áramkörben (vagyis ha $R << L\omega_0$) a gyökjel alatti második tag elhanyagolhatóvá válik, tehát $\omega_0 = 1/\sqrt{(L/C)}$. Ez ugyanolyan alakú kifejezés, mint a soros rezgőkör rezonanciafrekvenciáját megadó (34-21) képlet. A különböző jósági tényezőjű párhuzamos rezgőkörök áramerősségének amplitúdója a frekvenciától a 34-19 ábrán vázolt módon függ.



34-19 ábra
Párhuzamos rezgőkörök rezonanciagörbéi. A rezonancia állapotában az áramerősség minimális. Az ilyen áramköröket sávszűrőként lehet használni: az ω_0 és ahhoz közeli frekvenciájú áramok amplitúdóját nagymértékben lecsökkentik.

34.7 A váltakozó áramú áramkörök teljesítménye

Az egyenáramú áramkörök esetében az energiamérleg felállítása egyszerű. A feszültségforrások által a körbe betáplált elektromos energia egyenlő az ellenállásokon disszipált energiával, azaz a Joule-hővel. Az *AC* áramkörökben a feszültségforrásnak *minden időpontban* nemcsak az ellenállásokban hővé alakult energiát, hanem a kondenzátorokban és tekercsekben elektromos, illetve mágneses erőtér formájában tárolt energiát is fedeznie kell.

A v feszültségű áramforrás, miközben dq töltés potenciálját v-vel megváltoztatja, dW munkát végez. A munkavégzés sebessége egyenlő a feszültségforrás által leadott pillanatnyi teljesítménnyel: $p = dW/dt$. E két összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$p = v\frac{dq}{dt} = vi \qquad \textbf{(34-28)}$$

Minthogy $v = V\sin\omega t$ és $i = I\sin(\omega t - \phi)$, a $p = vi$ pillanatnyi teljesítmény:

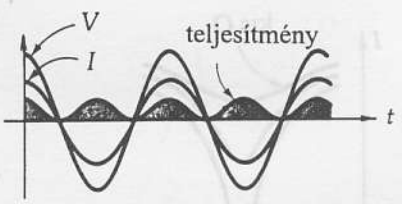
$$p = VI\sin\omega t\sin(\omega t - \phi) \qquad \textbf{(34-29)}$$

Az áramkörnek leadott teljesítmény tehát időben változik (34-20 ábra). A gyakorlatban viszont általában az áramforrás által leadott $P_{átl}$ átlagos teljesítmény a lényeges mennyiség. Ezt az *időbeli átlagot* az alábbi módon számítjuk ki:

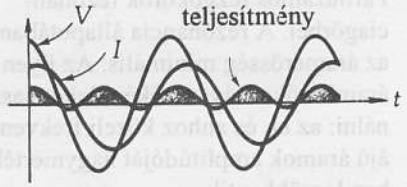
$$P_{átl} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt\,,$$

ahol T a periódusidő. [Vegyük észre, hogy az időbeli átlag kiszámítása hasonlít a tömegközéppont meghatározásához, l (9-12) formula]

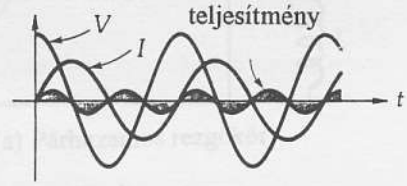
A (34-29) képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy



(a) Tisztán ohmos ellenállás. Az i áramerősség és a v feszültség azonos fázisú. A teljesítmény mindig pozitív.



(b) Induktív reaktanciából és ohmos ellenállásból álló áramkör. Az i áramerősség a feszültséghez képest késik; $\phi = 45°$. A teljesítmény negatív, amikor az energia a tekercsből a feszültségforrás felé áramlik.



(c) Tisztán induktív áramkör esete (nincs jelen ohmos ellenállás). Az i áramerősség a feszültséghez képest késik: $\phi = 90°$. A teljesítmény azonos nagyságú pozitív és negatív értékek között váltakozik; átlaguk zérus.

34-20 ábra

Feszültség, áramerősség és teljesítmény változása az idő függvényében AC áramkörökben. A p pillanatnyi teljesítmény (v és i pillanatnyi értékének szorzata) szinuszosan $2f$ frekvenciával változik. A $P_{átl}$ átlagos teljesítmény a ϕ fázisszögtől függ: $P_{átl} = VI \cos \phi$.

$$P_{átl} = \frac{1}{T}\int_0^T VI \sin \omega t \sin(\omega t - \phi)\, dt \qquad (34\text{-}30)$$

A D. függelékben leírtak szerint, $\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi$. Ennek felhasználásával a (34-30) összefüggés átalakítható:

$$P_{átl} = \frac{VI \cos\phi}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t\, dt - \frac{VI \sin\phi}{T}\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t\, dt$$

A G-II. függelékben leírtak szerint az integrálást elvégezve:

$$P_{átl} = \frac{VI \cos\phi}{T}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4}\right)\Bigg|_0^T - \frac{VI \sin\phi}{T}\left(\frac{\sin^2 \omega t}{2}\right)\Bigg|_0^T$$

Az integrálási határokat behelyettesítve és felhasználva a $T = 2\pi/\omega$ összefüggést, a

$$P_{átl} = \frac{VI}{2}\cos\phi \qquad (34\text{-}31)$$

végeredményhez jutunk, ahol ϕ a v feszültség és i áramerősség közötti fáziskülönbség. (Megjegyzendő, hogy mind $\sin^2 \omega t$, mint $\cos^2 \omega t$ integrálja T időtartam alatt 1/2.) A cos ϕ tényezőt **teljesítménytényezőnek** nevezzük. A 32-12b ábra szerint

TELJESÍTMÉNY-TÉNYEZŐ
$$\cos\phi = \frac{R}{Z} \qquad (34\text{-}32)$$

Érdemes megvizsgálni a teljesítménytényező szerepét és eredetét. Tisztán induktív áramkörben a fázisszög $\phi = \pi/2$. Minthogy $\cos(\pi/2) = 0$, a tisztán induktív tekercsben energia nem disszipálódik. Ennek fizikai magyarázata az, hogy az első negyedperiódusban a tekercs mágneses erőterének felépítéséhez szükséges, a feszültségforrásból származó energia a következő negyedperiódusban a mágneses erőtér megszűnésekor visszaáramlik a feszültségforrásba. Hasonlóképpen a tisztán kapacitív áramkörben a fázisszög $\phi = -\pi/2$, s minthogy $\cos(-\pi/2) = 0$, a tisztán kapacitív kondenzátoron sem disszipálódik energia: A lemezek közötti elektromos erőtér létrehozásához szükséges energia a következő negyedperiódusban, – az elektromos erőtér megszűnésekor – a feszültségforrásba visszatáplálódik. Ha az áramkör csak induktív és kapacitív impedanciákat tartalmaz, a mágneses és elektromos erőterek felépülése és megszűnése éppen $\pi/2$ fáziseltolódással követi egymást: azaz míg az elektromos erőtér felépül, a mágneses erőtér leépül, és viszont. Ennek eredményeként az (ideális) tekercs és az (ideális) kondenzátor között az energia ide-oda áramlik; és ha az áramkörben nincs ellenállás, akkor a két elemben nincs is energiaveszteség. *Energiadisszipáció csak az R ellenálláson történik, Joule-hő fejlődésével.* Minthogy az ellenálláson a v_R feszültségesés a rajta áthaladó i árammal azonos fázisú, cos ϕ=cos 0 = 1, a (34-31) összefüggés szerint

$$P_{átl} = \frac{V_R I}{2} \qquad (34\text{-}33)$$

Az átlagos teljesítményt V és I *effektív értékével* [*] is kifejezhetjük.

---

[*] Az effektív érték a sokszor használt négyzetes átlag speciális esete, melyet a $V_{eff}^2 = \left(1/T\right)\int_0^T v^2(t)dt$ összefüggéssel definiáltunk. Szinuszosan változó elektromos mennyiségek (pl. a V váltakozó feszültség) effektív értékét az alábbi egyenlet definiálja:

$$V_{eff}^2 = \left(1/T\right)\int_0^T V^2 \sin^2 \omega t\, dt\,,$$

ahol T a periódusidő. Az integrálást elvégezve megmutatható, hogy $V_{eff} = V/\sqrt{2}$. Nem szinuszos AC mennyiségek effektív értéke a (34–34) képletek által megadottól eltér.

EFFEKTÍV ÉRTÉKEK:
$$V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \tag{34-34}$$

Innen
$$P_{\text{átl}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi \tag{34-35}$$

Felhasználva a $V_R = V\cos\phi$ összefüggést, $P_{\text{átl}}$ a

$$P_{\text{átl}} = (V_R)_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \tag{34-36}$$

alakban is megadható.

A $P_{\text{átl}}$ tehát az alábbi összefüggésekkel fejezhető ki:

SOROSBA KAPCSOLT RLC ÁRAMKÖRBEN DISSZIPÁLT ÁTLAGOS TELJESÍTMÉNY

$$P_{\text{átl}} \begin{cases} = \dfrac{VI}{2}\cos\phi & (34\text{-}37) \\ = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi & (34\text{-}38) \\ = \dfrac{V_{\text{eff}}^2}{Z}\cos\phi & (34\text{-}39) \\ = (V_R)_{\text{eff}} I_{\text{eff}} & (34\text{-}40) \\ = I_{\text{eff}}^2 R & (34\text{-}41) \end{cases}$$

Az utolsó két formula hasonlít az egyenáramú áramkörökre érvényes kifejezésekhez, melyek szerint állandó I árammal átjárt R ellenálláson disszipált P teljesítmény

(Egyenáramú áramkörökben)
$$P = V_R I \quad \text{és} \quad P = I^2 R \tag{34-42}$$

ahol V_R az ellenállás kapcsain az állandó nagyságú feszültségesés. Az AC esetre vonatkozó (34-40) és (34-41) egyenletek nagyon hasonlítanak a DC teljesítményét leíró (34-42) egyenletekhez: ennek alapján nevezzük a (34-34) összefüggésekkel definiált mennyiségeket **effektív értékeknek**. *Az ellenállásokon a V_{eff} és I_{eff} mennyiségekkel jellemezhető AC feszültség, ill. áramerősség hatására fejlődő hő ugyanakkora, mintha rajta $V = V_{\text{eff}}$ feszültségű és $I = I_{\text{eff}}$ erősségű egyenáram hatására fejlődne hő.*

A hálózati feszültségeket és áramerősségeket legtöbbször effektív értékükkel adjuk meg, noha az effektív értékre való utalást rendszerint elhagyjuk. Például, hazánkban a fali csatlakozókban az effektív feszültség 220 V, tehát a feszültség amplitúdója $220\ \text{V} \times \sqrt{2} = 311\ \text{V}$. A hálózati feszültség időtől való függését tehát a $v = 311 \times \sin(2 \times 50\,\pi\, t)$ függvény adja meg.

34-9 PÉLDA

Sorba kapcsolt *RLC* áramkörre a $v = 100 \sin(1000t)$ függvénnyel megadott AC feszültséget kapcsolunk (az egyes mennyiségek SI egységekben értendők). Számítsuk ki az áramkörben átlagosan disszipált teljesítményt, ha $R = 400\ \Omega$, $C = 5\ \mu\text{F}$ és $L = 0{,}5\ \text{H}$

MEGOLDÁS

Az átlagos disszipált teljesítmény mindhárom kifejezésében szerepel az áramerősség, ezért először azt számítjuk ki. A (34-18) egyenlet szerint a Z impedancia:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

ahol $$X_L = \omega L = \left(1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}50\ \text{H}) = 500\ \Omega$$

és $$X_C = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\left(1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(5{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 200\ \Omega$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$Z = \sqrt{(400\ \Omega)^2 + (500\ \Omega - 200\ \Omega)^2} = 500\ \Omega$$

Az áramerősség amplitúdója $I = \frac{V}{Z} = \frac{100\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0{,}200\ \text{A}$

Az áramerősséget ismerve, az átlagos teljesítményre vonatkozó bármelyik összefüggést felhasználhatjuk. Az alábbiakban mindegyiket illusztráljuk.

A (34-37) alkalmazásával: $P_{\text{átl}} = \frac{VI}{2}\cos\phi$,

ahol $$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{400\ \Omega}{500\ \Omega} = 0{,}800$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$P_{\text{átl}} = \frac{(100\ \text{V})(0{,}200\ \text{A})}{2}(0{,}800) = 8{,}00\ \text{W}$$

A (34-38) alkalmazásával:

$$P_{\text{átl}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi = \left(\frac{100\ \text{V}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{0{,}200\ \text{A}}{\sqrt{2}}\right)(0{,}800) = 8{,}00\ \text{W}$$

A (34-39) alkalmazásával:

$$P_{\text{átl}} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z}\cos\phi = \left(\frac{100\ \text{V}}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1}{500\ \Omega}\right)(0{,}800) = 8{,}00\ \text{W}$$

A (34-40) alkalmazásával:

$$P_{\text{átl}} = (V_R)_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

ahol $$(V_R)_{\text{eff}} = (IR)_{\text{eff}} = \frac{(0{,}200\,\text{A})(400\,\Omega)}{\sqrt{2}} = \frac{80}{\sqrt{2}}\,\text{V}$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$P_{\text{átl}} = \left(\frac{80}{\sqrt{2}}\,\text{V}\right)\frac{(0{,}200\,\text{A}}{\sqrt{2}} = 8{,}00\,\text{W}$$

A (34-41) alkalmazásával:

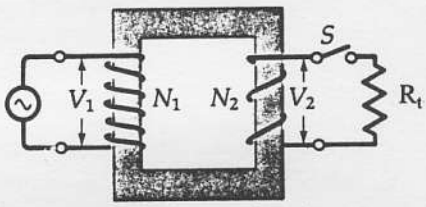
$$P_{\text{átl}} = I_{\text{eff}}^2 R = \left(\frac{0{,}200\,\text{A}}{\sqrt{2}}\right)^2 (400\,\Omega) = 8{,}00\,\text{W}$$

34.8 Transzformátorok

Az egyik legáltalánosabban használt elektromos készülék a *transzformátor*, amellyel váltakozó feszültségek amplitúdója számottevő energiaveszteség nélkül megnövelhető vagy lecsökkenthető. Villamos energiát nagy távolságra rendszerint úgy szállítanak, hogy az erőművekben termelt szinuszos feszültséget transzformátorral nagyon nagy feszültségűvé transzformálják. Minthogy a $(V_{\text{eff}}I_{\text{eff}})$ teljesítmény a transzformálás során nem nőhet, a feszültség növelésekor az áramerősség lecsökken; ennek következményeként a távvezetéken a szállítás során az I^2R veszteség is csökken. A távvezeték másik végén, egy másik transzformátor a feszültséget alkalmas értékűre alakítja vissza a fogyasztó számára.

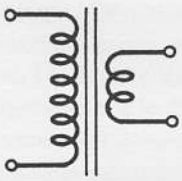
A 34-21 ábrán a transzformátorok szokásos jelölésmódja látható. A primer tekercshez a V_1 feszültségű AC feszültségforrás csatlakozik; a szekunder tekercsen V_2 *kimenő* feszültség jelenik meg. A transzformátor lágyvas magja nagy mértékben megnöveli a primer tekercs belsejében a mágneses fluxussűrűséget, és minthogy az erővonalak szinte teljesen a vasmag belsejében haladnak, a primer tekercs belsejében futó erővonalakat a mag szinte hiánytalanul átvezeti a szekunder tekercs belsejébe. *Ideálisnak* tekintjük azt a transzformátort, melyben az erővonalak kiszóródása miatt fellépő, valamint a tekercsekben illetve a vasmagban hőfejlődéssel járó veszteségek elhanyagolhatók [9]. Legyen kezdetben az S kapcsoló nyitva, tehát a szekunder körben áram nem folyik, a transzformátor energiát nem ad át a szekunder körnek. A szekunder tekercs belsejében változó mágneses fluxus a tekercsben feszültséget indukál, ez jelenik meg a tekercs kapcsain. Minthogy mindkét tekercs belsejében lényegében ugyanakkora a (változó) mágneses fluxus, az indukált elektromotoros erő a két tekercsben menetenként ugyanakkora, azaz

$$\frac{\mathcal{E}_1}{N_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{N_2} \qquad (34\text{-}43)$$



primér tekercs szekundér tekercs

(a) Vasmagos transzformátor N_1 menetű primér tekercséhez AC feszültségforrás csatlakozik. A szekundér tekercs N_2 menetű.



(b) A vasmagos transzformátor áramköri jelölése. (légmagos transzformátorok esetében a függőleges vonalakat nem húzzuk be.)

34-21 ábra
A transzformátor

[9] Léteznek olyan, helyesen méretezett, nagy teljesítményű transzformátorok, melyek hatásfoka megközelíti a 99%-ot, így az ideális transzformátor feltételezése nem irreális. A tekercsekben keletkező Joule-hő kis ellenállású huzalok felhasználásával, az örvényáram veszteségek lemezelt vasmag alkalmazásával csökkenthetők. A hiszterézis-veszteségeket pedig nagyon vékony hiszterézis-hurkú lágyvasmag alkalmazásával csökkentik le.

Ha a primer tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható az induktív ellenállásához képest, akkor a transzformátor AC feszültségforráshoz csatlakoztatott tiszta induktivitásnak tekinthető. Az áramerősség és feszültség között 90°-os fáziskülönbség van, tehát a váltakozó áramú forrás átlagosan zérus energiát ad le a transzformátornak.

Ha az S kapcsoló zárásával R_t ellenállást („terhelést") csatlakoztatunk a szekunder tekercshez, akkor áram indul meg és az R_t ellenálláson időegységenként I^2R_t hő fejlődik. Lenz törvénye értelmében a szekunder körben folyó áram olyan mágneses erőteret kelt, amely ellentétes irányú a primer körben folyó áram mágneses erőterével, és így lecsökkentené a primer feszültséget. A V_1 primer feszültséget viszont az AC generátor szabja meg, ezért a primer tekercsbe, hogy az eredeti fluxust fenntartsa, többletáram érkezik a generátorból. Az elektromotoros erő jele helyett a megfelelő feszültség jelét használva a fenti képletet átírjuk az alábbi alakba

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} \qquad \textbf{(34-44)}$$

A kapott összefüggés szerint ideális transzformátorban a tekercsek *menetszámainak aránya* (N_2/N_1) egyenlő a feszültségek arányával (V_2/V_1). Ha a transzformátor kimenő feszültsége nagyobb a bemenőnél, akkor a bemenő feszültséget **feltranszformáljuk**, ha pedig kisebb, akkor **letranszformáljuk**. Minthogy ideális transzformátor esetén a V_1I_1 bemenő teljesítmény egyenlő a V_2I_2 kimenő teljesítménnyel, a menetszámok N_2/N_1 aránya az áramerősségek arányának reciproka:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad \textbf{(34-45)}$$

Így tehát a transzformátor áramerősségek átalakítására is alkalmazható (megjegyzendő, hogy a feszültség *feltranszformálása* az áramerősség *letranszformálását* jelenti).

Magyarországon az erőművekben termelt villamos energiát az országos távvezetékhálózat 220 kV-os feszültségére transzformálják fel. A felhasználáshoz ezt két lépésben (transzformátor-telepeken) 10 kV-ra, majd (utcai transzformátorokban) 220 V-ra transzformálják le. A hálózat háromfázisú, azaz három fázisvezető-huzalból és egy földelt vezetőből áll. Kisebb teljesítményű fogyasztók 220 V-os egyfázisú feszültséggel, nagyobb teljesítményűek háromfázisú (3×380 V-os) hálózatról működnek.

34-10 PÉLDA

Tekinsük a 34-21 ábrán látható ideális transzformátort. Fejezzük ki a V_1/I_1 arányt, N_1, N_2 és R_t függvényeként. (Ez fontos hányados, ugyanis ekkora a transzformátor bemenő ellenállása, ha a szekunder tekercshez az R_t tehelő ellenállást csatlakoztatjuk.)

MEGOLDÁS

A transzformátor szekunder oldali feszültsége

$$V_2 = R_2I_2 \qquad \textbf{(34-46)}$$

A (34-44) szerint $V_2 = (N_2/N_1)V_1$; (34-45) szerint pedig $I_2 = (N_1/N_2)I_1$. Ezeket a (34-46) összefüggésbe behelyettesítve és az $R_{\text{eff}} = V_1/I_1$ hányadost képezve:

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)V_1 = R_2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)I_1$$

$$R_{\text{eff}} = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 \qquad (34\text{-}47)$$

A generátor számára a transzformátor ekvivalens egy R_{eff} terhelő ellenállással.

A transzformátorral tehát megváltoztatható a feszültségforrás (V_1/I_1) effektív kimenő ellenállása, ezért a transzformátorok fontos szerephez jutnak ott, ahol elektronikus áramkörök egyik részéből a másikba energiát kell átvinni: A DC tápegységekre vonatkozó állításhoz (29C-51 feladat) hasonlóan *maximális energia* akkor vihető át, ha a feszültségforrás kimenő impedanciájának nagysága éppen egyenlő a terhelő impedanciáéval[10]. Ez az oka például annak, hogy a váltakozó áramú méréstechnikában gyakran alkalmazunk illesztőtranszformátorokat, hogy a mérendő jeleket „ne veszítsük el".

34-11 PÉLDA

Az AC feszültségforrás belső ellenállása 3200 Ω. Abból a célból, hogy az $R_2 = 8\ \Omega$ terhelő ellenállásra a maximális teljesítményt lehessen kicsatolni, a generátor és az ellenállás közé transzformátort iktatunk be. Felételezve, hogy a transzformátor ideális, (a) számítsuk ki a tekercsek menetszámának arányát. Ha a feszültségforrás kimenő feszültsége $V_{\text{eff}} = 80$ V, mekkora lesz (b) az ellenálláson az effektív feszültségesés; (c) az ellenálláson áthaladó effektív áramerősség. (d) Számítsuk ki az ellenálláson disszipált teljesítményt. (e) Igazoljuk, hogy az áramerősségek és a menetszámok fordítottan arányosak.

MEGOLDÁS

(a) A maximális teljesítményátvitel végett a 8 Ω-os terhelés effektív ellenállása (vö. a 34-10 példával) 3200 Ω kell, hogy legyen. A (34-47) alapján

$$R_{\text{eff}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2$$

tehát

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{R_{\text{eff}}}{R_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{3200\,\Omega}{8\,\Omega}\right)^{1/2} = 20$$

A primer tekercsnek hússzor annyi menetűnek kell lennie, mint a szekundernek.

(b) Felhasználva a (34-44) egyenletet és V_{eff} számértékét behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$V_2 = V_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right) = (80\,\text{V})\frac{1}{20} = 4{,}00\,\text{V}$$

[10] A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy ha a terhelésnek kapacitív ellenállása van, akkor a feszültségforrás kimenő impedanciájának ezzel azonos nagyságú induktív ellenállással kell rendelkeznie és viszont. Ilyen esetek vizsgálatával nem foglalkozunk.

(c) Az ellenálláson átfolyó áram

$$I_2 = \left(\frac{V_2}{R_2}\right) = \frac{4\,\text{V}}{8} = 0{,}500\,\text{A}$$

(d) Minthogy a terhelés tisztán ohmos ellenállás, a teljesítmény:

$$P_2 = (I_{\text{eff}})^2 R_2 = (0{,}500\,\text{A})^2(8\Omega) = 2{,}00\,\text{W}$$

(Ha az impedancia-illesztő transzformátort nem alkalmaznánk, és a terhelő ellenállást közvetlenül az AC feszültségforráshoz csatlakoztatnánk, az ellenálláson leadott teljesítmény mindössze $7{,}77\cdot10^{-5}$ W lenne!)

(e) A primer tekercsen folyó effektív áramerősség

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{80\,\text{V}}{3200} = \underline{\underline{25\,\text{mA}}}$$

Így az áramerősségek aránya

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{25\times10^{-3}\,\text{A}}{0{,}500\,\text{A}} = \frac{1}{20}$$

ami a menetszámok arányának a reciproka.

Összefoglalás

A váltakozó feszültségeket és áramerősségeket a

$v = V\sin\omega t$ és $i = I\sin(\omega t - \phi)$

képletek írják le, ahol i és v szinuszosan változó mennyiségek; I és V a csúcsértékek és ϕ a v és i közötti *fáziskülönbség*. A fázisviszonyok ideális áramköri elemeken a következők:

Ellenállás: i és v azonos fázisúak;

Kondenzátor: i $\pi/2$ radiánnal *siet* v-hez képest

Tekercs: i $\pi/2$ radiánnal *késik* v-hez képest

Az áramköri elemek *reaktanciái*:

Kapacitív: $X_C = 1/\omega C$;

Induktív: $X_L = \omega L$;

Teljes reaktancia: $X = X_L - X_C$

Sorba kapcsolt RLC áramkör:

Z impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

i áramerősség: $i = \frac{V}{Z}\sin(\omega t - \phi)$

ahol $\phi = \text{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$

A *fázisvektordiagramokon* a feszültségeket és áramerősségeket az ún. *fázisvektorokkal* jelöljük, melyek hossza az amplitúdóval arányos, és irányuk a fázisviszonyokat tükrözi. A vektordiagramon az áram- és feszültségvektorok az óramutató járásával ellentétes irányban ω körfrekvenciával forognak. A fázisvektorok függőleges tengelyen vett vetülete v és i pillanatnyi értékét adja meg.

Az *impedanciadiagramokon* R az x tengely pozitív irányába; X_C az y tengely negatív irányába; X_L az y tengely pozitív irányába mutató vektor. Az áramkör Z impedanciáját a vektorok vektoriális összegzésével kapjuk meg; a ϕ fázisszög egyenlő az R és Z közötti szöggel.

REZONANCIA:

Soros rezgőkör $X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Párhuzamos: Ha kondenzátorral párhuzamosan sorba kötött tekercs és ellenállás van kapcsolva, akkor

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

A Q jósági tényező: $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R}$

A szinuszosan váltakozó feszültség, ill. áramerősség *effektív* értéke egyenlő azzal az egyenáramú feszültséggel, ill. áramerősséggel, amely egy adott ellenállást ugyanakkora hőteljesítménnyel melegít. Az effektív értékek és a csúcsértékek kapcsolata:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad V_{\text{eff}} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Átlagos teljesítmény AC áramkörökben: A váltakozó áramú teljesítmény csak az ohmos ellenállásokban disszipálódik. Ha V feszültségű tápegység hatására egy áramkörben I áram folyik, akkor

$$P_{\text{átl}} = \frac{VI}{2}\cos\phi = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z}\cos\phi$$

$$= (V_R)_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}^2 R$$

(a két utolsó képlet csak az ohmos ellenállást és az ezen ellenálláson keletkező feszültségesést tartalmazza.)

Kérdések

1. Egyenletek használata nélkül hogyan lehetne elmagyarázni, hogy a kondenzátoron átfolyó áram miért siet, a tekercsen átfolyó áram pedig miért késik a feszültséghez képest?
2. Sorba kapcsolt RL áramkörre négyszög-feszültséget kapcsolunk. Milyen a tekercs kapcsai között a feszültség időbeli változását, ha az ellenállás a tekercsnek a négyszög-feszültség alapharmonikusának frekvenciáján számított induktív reaktanciájánál sokkal nagyobb?
3. Miért folyik át áram a transzformátor primér tekercsén még akkor is, ha a szekundér tekercshez semmit se csatlakoztattunk?
4. Sorba kapcsolt RLC áramkörre váltakozó feszültséget kapcsolunk. Hogyan függ a fázisszög az ω frekvenciától a $0 < \omega < \infty$ tartományban?
5. Hogyan kell a DC áramkörökre érvényes Kirchhoff-törvényeket (a huroktörvényt és a csomóponti törvényt) megfogalmazni, hogy AC áramkörökre is érvényesek legyenek?
6. Hasonlítsuk össze a sorba kapcsolt és párhuzamosan kapcsolt LC áramkörök viselkedését a teljes frekvenciatartományban ($0 \le \omega \le \infty$).
7. Párhuzamosan kapcsolt LC áramkörben az induktív ág reaktanciája nagyobb, mint a kapacitív ágé. Ha a két ág impedanciáit sorba kapcsoljuk, az eredő reaktancia vajon induktív vagy kapacitív?
8. Vajon miért veszélyes nagy jósági tényezőjű rezonáló áramkörökkel kísérletezni?

Transzformátorok: (Az 1. index a *primer* tekercsre, a 2. index a *szekunder* tekercsre vonatkozik.) *Ideális* transzformátorban (melyben nincs I^2R veszteség és nincs erővonal-kiszóródás) a bemenő és kimenő teljesítmények egyenlők:

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

A menetszámok hányadosa:

A feszültségarány	Az áramerősségarány
$\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{V_2}{V_1}$	$\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{I_2}{I_1}$

A V_1 feszültség *feltranszformálásánál* $V_2 > V_1$ és $I_2 < I_1$; A szekundér oldalhoz csatlakoztatott R_2 terhelő ellenállást a primer oldal felől

$$R_{\text{eff}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2$$

effektív ellenállásának észleljük.

9. Milyen frekvenciánál disszipálódik a legnagyobb teljesítmény a sorba kapcsolt RLC áramkör ellenállásán?
10. Igaz-e a következő állítás: sorba kapcsolt RLC áramkörben az I_{eff} effektív áramerősség az ω_0/N frekvenciánál és az $\omega_0 \cdot N$ frekvenciánál egyenlő egymással (ahol ω_0 a rezonanciafrekvencia, N tetszőleges pozitív szám).
11. Lehetséges-e rezonancia a nagyfeszültségű távvezetékeknél? Komoly problémát jelenthet-e ez, s ha igen, akkor mit kell tenni az elkerülésére?
12. Az RLC áramkör analóg a csillapított mechanikai oszcillátorral. Mik az analógiák a két rendszer között?
13. Sorba kapcsolt RLC áramkörre AC feszültséget kapcsolunk. Hogyan lehetne megállapítani, hogy az alkalmazott frekvencia a rezonanciafrekvenciánál nagyobb, vagy kisebb? És ha az RLC áramkör olyan, hogy C sorba kapcsolt RL körrel van párhuzamosan kapcsolva?
14. Rádióállomások rezgőkörének teljesítményfokozatában a tekercs vastag huzalokból készül és nagy szigetelőkön nyugszik. Miért?
15. Ha feszültséget fel akarunk transzformálni, miért nem tanácsos ezt feszültség letranszformálására készült transzformátor fordított bekötésével megoldani? (Útmutatás: Mi szabja meg a primer tekercsben az áramerősséget, ha a szekunder tekercshez semmit se csatlakoztatunk?)
16. Az RLC áramkörök folyamatosan vagy pulzálva disszipálják az elektromos energiát?

17. Miért az effektív áramerősséget, és miért nem a teljesítménytényezőt kell csökkenteni a háztartások villanyszámlájának csökkentésére?
18. Transzformátor szekunder tekercséhez ellenállást csatlakoztatunk; a primer tekercsre négyszögfeszültséget kapcsolunk. Milyen az ellenálláson a feszültségesés alakja?
19. Az ideális tekercsen és kondenzátoron teljesítmény nem disszipálódik, noha mindkét eszköz elektromos energiát nyel el, illetve ad le. Hogyan függ a két áramköri elem által elnyelt illetve leadott energia az időtől? Hogyan lehetséges az, hogy az átlagosan felvett teljesítmény zérus?
20. Edison javaslata szerint a villamos energiaelosztó rendszernek egyenáramúnak kellene lennie. Mik az ilyen rendszer előnyei és hátrányai?
21. A villamos hálózatot felügyelő mérnökök miért ragaszkodnak ahhoz, hogy a fogyasztók lehetőleg nagy teljesítménytényezőjű berendezéseket használjanak? (Útmutatás: gondoljunk a távvezetékhálózaton disszipálódó energiára.)
22. Sorba kapcsolt RLC áramkörhöz AC feszültségforrás csatlakozik; a frekvenciát ω_1-ről ω_2-re növelve az áramerősség csökken. Ha az áramkörhöz még egy kondenzátort kapcsolunk sorba, vajon az áramkör impedanciája nő-e vagy csökken ebben a frekvenciatartományban?
23. Hogyan lehetne transzformátort változtatható induktivitásként használni? Indokoljuk meg, hogy ezt a technikát miért nem alkalmazzák a gyakorlatban.

Feladatok

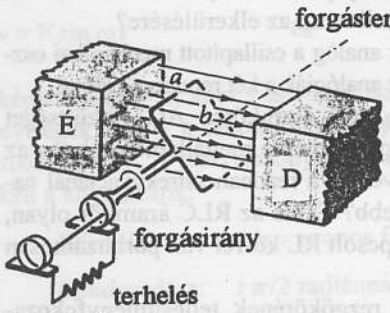
34.2 Egyszerű váltakozó áramú áramkörök

34A-1 A kapacitás és induktivitás definíciójából kiindulva mutassuk meg, hogy (a) a kapacitív reaktancia is, és az induktív reaktancia is ellenállás dimenziójú és (b) $(LC)^{1/2}$ idő dimenziójú.

34A-2 (a) Számítsuk ki a 8 μF-os kondenzátor reaktanciáját 50 Hz és 5 kHz frekvencián. (b) Oldjuk meg az (a) feladatot 8 mH induktivitású tekercs esetére is. (c) Milyen frekvencián egyenlő a kondenzátor és a tekercs reaktanciája?

34A-3 Mutassuk meg, hogy az $i = (V/\omega L)\sin(\omega t - 90°)$ függvény a $V\sin \omega t - L di/dt = 0$ egyenlet megoldása.

34B-4 (a) Mutassuk meg, hogy a 34-22 ábrán vázolt váltakozó áramú generátor forgórészének forgatásához szükséges forgatónyomaték $M = [\omega(abB)^2/R]\sin^2\omega t$. (b) A hurok milyen helyzetében hat rá maximális forgatónyomaték? A téglalap alakú hurok oldalainak hosszúsága a és b.



34-22 ábra
A 34B-4. és a 34B-5. feladatokhoz

34B-5 A 34-22. ábrán egyszerű AC generátor látható. A vezető hurok homogén mágneses erőtérben forog, és benne $v = V\sin \omega t$ feszültség indukálódik. A téglalap alakú, $a = 0{,}2$ m és $b = 0{,}4$ m oldalhosszúságú hurok a $B = 0{,}8$ T mágneses indukciójú homogén mágneses erőtérben 3600 fordulat/perc sebességgel forog. (a) Határozzuk meg az indukált feszültséget. (b) Milyen a hurok helyzete a $t = 0$ időpontban?

34-4 Sorba kapcsolt *RLC* áramkörök impedanciája

34A-6 Sorba kapcsolt RC körre ($R = 30\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F) $v = 100 \cdot \sin 2500\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.) (a) Készítsük el az áramkör impedancia- és fázisvektordiagramját. (b) Számítsuk ki a kondenzátor elektromos erőterében tárolt maximális energiát.

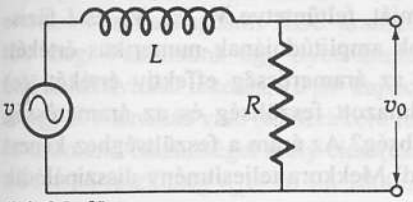
34A-7 Sorba kapcsolt RL körre ($R = 30\ \Omega$, $L = 15$ mH) $v = 100 \cdot \sin 2500\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.) (a) Készítsük el az áramkör impadancia- és fázisvektordiagramját. (b) Számítsuk ki a tekercs mágneses erőterében tárolt maximális energiát.

34A-8 Sorba kapcsolt RLC körre ($R = 30\ \Omega$, $L = 15$ mH, $C = 10\ \mu$F) $v = 100 \sin 2500\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.) (a) Készítsük el az áramkör impedancia- és fázisvektordiagramját. (b) Számítsuk ki a tekercs mágneses erőterében tárolt maximális energiát.

34B-9 Sorba kapcsolt RC körre ($R = 1{,}5$ kΩ, $C = 1{,}0\ \mu$F) $v = 10 \sin 1000\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.). (a) Készítsünk fázisvektor-diagramot feltüntetve az alkalmazott feszültség, az ellenálláson és a kondenzátoron a feszültségesés, valamint az áramerősség fázisvektorát. (b) Adjuk meg az ellenálláson a feszültségesést (az alkalmazott feszültség megadott formájához hasonló alakban, a fáziskülönbség feltüntetésével).

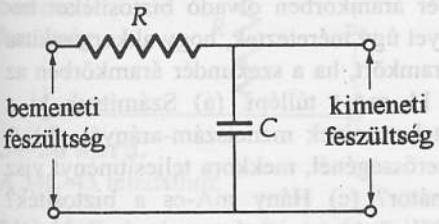
34B-10 Fázistoló áramkör (lásd a 34B-11 feladatot) bemenetére $V = 15\sin 1000\ t$ feszültséget adunk (a számértékek SI egységben értendők). Az áramkör kimenetén a feszültség $V_0\sin(1000t + \pi/3)$. (a) Tervezzünk ilyen tulajdonságú fázistoló áramkört $10^4\ \Omega$-os ellenállásból és kondenzátorból. (b) Tervezzünk ilyen tulajdonságú fázistoló áramkört $10^4\ \Omega$-os ellenállásból és tekercsből. (c) Határozzuk meg V_0 értékét mindkét esetben.

34B-11 Tekintsünk egy fázistoló áramkört (34-23 ábra). A bemenetre adott feszültség $v = 10\sin 200\ t$ (a számértékek SI egységben értendők). Ha $L = 500$ mH, (a) számítsuk ki R értékét, hogy a kimeneten megjelenő v_0 feszültség 30°-nyit késsen v-hez képest és (b) számítsuk ki a v_0 amplitúdóját.



34-23 ábra.
A 34B-11. feladathoz

34B-12 A 34-24 ábrán látható áramkört aluláteresztő szűrőnek nevezik. A kondenzátor impedanciája nagyobb frekvenciákon kisebb, így a kimenő feszültség is kisebb. A szűrő karakterisztikus vagy ún. levágási frekvenciájánál a kimenő feszültség a bemenő feszültség $1/\sqrt{2}$ -szerese. (a) Fejezzük ki a levágási frekvenciát R és C függvényeként. (b) Mekkora ezen a frekvencián a kimenő és bemenő feszültség közötti fáziskülönbség?



34-24 ábra.
A 34B-12 feladathoz

34.5 Párhuzamosan kapcsolt RLC áramkörök impedanciája

34B-13 Mutassuk meg, hogy párhuzamosan kapcsolt R ellenállás, L induktivitás és C kapacitás Z impedanciája: $Z^2 = R^{-2} + [1/(\omega L) - \omega C]^{-2}$

34B-14 Párhuzamosan kapcsolt RC körre ($R = 600\ \Omega$, $C = 2{,}5\ \mu$F) $v = 240 \sin 500\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők). Fejezzük ki a feszültségforrás áramerősségét az $i = I\sin(\omega t - \phi)$ alakban, de I és ϕ helyett ezen mennyiségek konkrét, SI egységben megadott számértéke szerepeljen.

34B-15 Párhuzamosan kapcsolt RL körre ($R = 60\ \Omega$, $L = 0{,}2$ mH) $V = 40 \sin(10^5\ t)$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.) Fejezzük ki a feszültségforrás áramerősségét az $i = I \sin(\omega t - \phi)$ alakban, de I és ϕ helyett ezen mennyiségek konkrét, SI egységben megadott számértéke szerepeljen.

34B-16 Sorba kapcsolt RLC áramkörre 100 V amplitúdójú szinuszosan váltakozó feszültséget kapcsolunk ($R = 10\ \Omega$, $L = 100$ mH, $C = 0{,}1\ \mu$F). Számítsuk ki a kondenzátoron a feszültségesés amplitúdóját (a) a rezonanciafrekvencián és (b) a rezonanciafrekvencia tizedénél. (c) Vajon ezeken a frekvenciákon az áramkört alapvetően induktívnak, kapacitívnak avagy ohmikusnak kell tekintenünk?

34.6 Rezonancia-jelenségek

34A-17 Számítsuk ki a 34A-16 feladatban szereplő áramkör Q jósági tényezőjét.

34A-18 Sorba kapcsolt RLC áramkör rezonanciafrekvenciája 1070 kHz. (a) Mekkora L, ha $C = 0{,}2\ \mu$F? (b) Mekkora R, ha $Q = 70$?

34A-19 Középhullámú rádió hangoló (állomásválasztó) áramköre elhanyagolható ellenállású párhuzamosan kapcsolt LC áramkör. A tekercs induktivitása 0,2 mH. Vajon milyen tartományban lehet a kondenzátor kapacitását változtatni, ha az áramkör 550 kHz és 1650 kHz közötti frekvenciákon képes rezonanciára?

34B-20 Vázoljuk fel a párhuzamosan kapcsolt rezgőkör (34-18 ábra) feszültsége és áramerőssége közötti ϕ fáziskülönbség frekvenciától való függését.

34B-21 Mutassuk meg, hogy sorba kapcsolt RLC áramkörben a ϕ fázisszög kifejezhető a Q jósági tényező és az ω_0 rezonanciafrekvencia függvényeként az alábbi módon: $\operatorname{tg} \phi = Q(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega\omega_0$.

34.7 Váltakozó áramú áramkörök teljesítménye

34A-22 Egy (amerikai) ruhaszárítógép $V_{\text{eff}} = 220$ V-os, $f = 60$ Hz-es hálózatról működik, teljesítménye 4,7 kW. Számítsuk ki (a) az effektív áramerősséget és (b) az áramerősség amplitúdóját. (c) Mekkorák lennének ezek az értékek, ha a szárítógép 110 V-os hálózatról üzemelne?

34A-23 Az európai országok többségében a háztartásokban az elektromos hálózat 220 V feszültségű, 50 Hz frekvenciájú. Fejezzük ki az elektromos hálózat feszültségét a $v = V\sin(\omega t)$ alakban, de V és ω helyett ezen mennyiségek konkrét, SI egységben megadott számértéke szerepeljen.

34A-24 A 34A-16. feladat áramkörében átlagosan mekkora teljesítmény disszipálódik (a) a rezonanciafrekvencián és (b) a rezonanciafrekvencia tizedénél?

34A-25 Egy 100 Ω ellenállású elektromos fűtőtestre 156 V amplitúdójú váltakozó feszültséget kapcsolunk. Mekkora a fűtőtest teljesítménye?

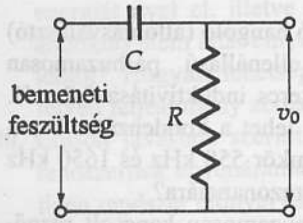
34A-26 Egy sorba kapcsolt RL körre ($R = 700\ \Omega$, $L = 100$ mH) a $v = 100 \sin 5000\ t$ feszültséget kapcsoljuk (a számértékek SI egységben értendők.) (a) Készítsük el az áramkör impedancia- és fázisvektordiagramját. (b) Számítsuk ki az áramkörben folyó I_{eff} effektív áramerősséget. (c) Számítsuk ki az ellenálláson disszipált teljesítményt. (d) Számítsuk ki a feszültségforrás által leadott teljesítményt.

34B-27 Egy sorba kapcsolt RLC áramkörre V_{eff} effektív feszültségű váltakozó feszültséget kapcsolunk. Mutassuk meg, hogy az áramkörben átlagosan disszipált teljesítmény $P_{\text{átl}} = RV_{\text{eff}}^2/Z^2$.

34B-28 Egy 39 Ω reaktanciájú tekercsen keresztül 0,5 A effektív értékű váltakozó áram folyik. A tekercs I^2R

hőteljesítménye 8 W. Számítsuk ki a tekercs impedanciáját.

34B-29 A 34-25 ábrán látható áramkört felüláteresztő szűrőként lehet használni. Elegendően nagy frekvenciákon, ha a bemenetre V_{eff} effektív értékű feszültséget kapcsolunk, az ellenálláson V^2_{eff}/R teljesítmény disszipálódik. Milyen frekvencián disszipálódik e teljesítmény fele?



34-25 ábra.
A 34B-29 feladathoz

34B-30 Sorba kapcsolt RLC körre ($R = 20\ \Omega$, $L = 100$ mH, $C = 200\ \mu$F) 100 V amplitúdójú váltakozó feszültséget kapcsolunk. Számítsuk ki a disszipált teljesítményt és a teljesítménytényezőt (a) 60 Hz-en és (b) 50 Hz-en.

34B-31 Sorba kapcsolt RL körre ($R = 2500\ \Omega$, $L = 1{,}5$ H) a $v = 200 \sin 2000\ t$ feszültséget kapcsoljuk. (a) Készítsük el az áramkör impedancia- és fázisvektordiagramját. Számítsuk ki (b) az alkalmazott feszültség és (c) az áramerősség effektív értékét; továbbá (d) a tekercsen és (e) az ellenálláson a feszültségesést.

34B-32 Egy 50 Ω ellenállású és 0,15 H induktivitású tekercsre 60 Hz frekvenciájú, 156 V amplitúdójú szinuszos váltakozó feszültséget kapcsolunk. Számítsuk ki, milyen sebességgel fejlődik hő a tekercsben, ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy a tekercs ellenállása és az ideális induktivitás egymással (a) sorba vagy (b) párhuzamosan vannak kapcsolva.

34B-33 Egy $V_{eff} = 110$ V feszültségű, 60 Hz frekvenciájú feszültségforrás által leadott teljesítmény 480 W; a teljesítménytényező 0,7, és az áram késik a feszültséghez képest. (a) Mekkora C kondenzátort kell a fogyasztóval sorba kapcsolni, hogy a teljesítménytényező 1 legyen?(b) Számítsuk ki, hogy ekkor a feszültségforrás mekkora teljesítményt ad le.

34B-34 Egy 150 mH induktivitású tekercs meneteinek ellenállása 30 Ω. A tekercsre $V_{eff} = 20$ V feszültségű, 60 Hz frekvenciájú váltakozó feszültséget kapcsolunk. Feltételezve, hogy a tekercs sorba kapcsolt RL áramkörnek tekinthető, számítsuk ki (a) a teljesítménytényezőt és (b) a menetekben fejlődő hőteljesítményt. (c) Mekkora a menetekben fejlődő hőteljesítmény, ha a frekvenciát 50 Hz-re változtatjuk? (Ez akkor jelent gyakorlati problémát, amikor az Amerikában 60 Hz frekvenciára méretezett készülékeket olyan országokban használják, ahol a hálózati frekvencia 50 Hz.)

34B-35 Sorba kapcsolt RLC áramkörre 50 V amplitúdójú szinuszosan váltakozó feszültséget kapcsolunk ($R = 10\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 100\ \mu$F). Számítsuk ki az áramerősség effektív értékét (a) a rezonanciafrekvencián, (b) a rezonanciafrekvencia felénél és (c) a rezonanciafrekvencia kétszeresénél.

34B-36 Sorba kapcsolt RC körre ($R = 900\ \Omega$, $C = 4\ \mu$F) 200 V amplitúdójú, 60 Hz frekvenciájú váltakozó feszültséget kapcsolunk. (a) Vázoljuk fel az áramkör fázisvektordiagramját, feltüntetve $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_C$ és $\mathbf{I}$ fázisvektorokat és azok amplitúdójának numerikus értékét. (b) Számítsuk ki az áramerősség effektív értékét; (c) Mekkora az alkalmazott feszültség és az áramerősség közötti fáziskülönbség? Az áram a feszültséghez képest siet vagy késik? (d) Mekkora teljesítmény disszipálódik az áramkörben?

34.8 Transzformátorok

34A-37 „Ideális" modellvasút-transzformátor 220 V, 50 Hz-es hálózatról működik; a primér tekercs meneteinek száma 1100, a szekundéré 100. Számítsuk ki a szekundér oldal effektív (a) feszültségét és (b) áramerősségét, ha a primér tekercsben az effektív áramerősség 60 ma. (Válasz: 20 V, 0,66 A)

34B-38 Neonreklámhoz szükséges 20 kV-os feszültséget transzformátor állít elő a 220 V-os hálózati feszültségből. A primér áramkörben olvadó biztosítékot helyeztek el, amelyet úgy méreteztek, hogy akkor szakítsa meg a primér áramkört, ha a szekundér áramkörben az áramerősség a 11 mA-t túllépi. (a) Számítsuk ki a transzformátor tekercseinek menetszám-arányát. (b) A maximális áramerősségénél, mekkora teljesítményt visz át a transzformátor? (c) Hány mA-es a biztosíték? (Válasz: 91, 220 W, 1 A)

34B-39 Egy 400 MW-os erőmű 22 kV-os váltakozó feszültséget állít elő. Ezt, a gazdaságos energiaátvitel végett, 440 kV-ra feltranszformálják. (a) Számítsuk ki a generátoroldali áramerősség effektív értékét. (b) Számítsuk ki a távvezetékben folyó áramerősség effektív értékét.

34B-40 Egy transzformátor a hálózat 220 V feszültségét kert megvilágításához 12 V feszültségűre transzformálja le. A kertben 8 db 40 W-os izzólámpa működik. (a) Számítsuk ki a teljes világító rendszer eredő ellenállását. (b) Mekkora az áramerősség a szekunder körben? (c) Mekkora az az ellenállás, mely a 220 V-os hálózathoz kapcsolva ugyanakkora teljesítményt fogyaszt, mint a transzformátor a lámpákkal? Mutassuk meg, hogy ez egyenlő az (a) kérdésre adott válaszban szereplő eredő ellenállás és a menetszám-arány négyzetgyökének szorzatával.

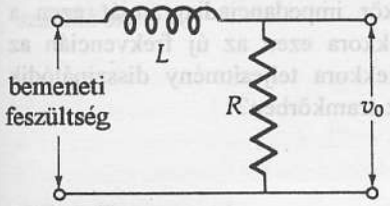
Vegyes feladatok

34C-41 Sorba kapcsolt RLC körre ($R = 1000\ \Omega$, $L = 1{,}5$ mH, $C = 0{,}5\ \mu$F) a $v = 100 \sin 1000\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.) (a) Készítsük el az áramkör impedanciadiagramját. Számítsuk ki a $t = 0{,}7$ ms időpontban (b) az ellenálláson; (c) a kondenzátoron; (d) a tekercsen keletkező feszültségesés

pillanatnyi értékét. (e) Számítsuk ki ezen feszültségek algebrai összegét, és hasonlítsuk össze az áramkörön keletkező teljes feszültségeséssel. (f) Jelöljük be a feszültségek polaritását az áramkör ábráján.

34C-42 Ellenállásból és kapacitásból, vagy ellenállásból és induktivitásból felépített fázistoló áramkörökkel legfeljebb 90°-os fázistolást lehet elérni. Nagyobb fáziseltolások sorba kapcsolt RLC áramkörökkel valósíthatók meg. Tekintsünk egy ilyen áramkört, melyben 80 mH induktivitású tekercs, 10 μF kapacitású kondenzátor és egy R ellenállás van. (a) Mekkora legyen R nagysága, és a kimenő feszültséget mely elem(ek)ről vegyük le, ha a bemenő feszültség $v_{be} = 10 \sin 1000t$, a kimenő feszültség pedig $v_{ki} = V_{ki} \sin(1000t+120°)$. (b) Mekkora $V_{ki\,értéke}$?

34C-43 Tekintsük a 34-26 ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a v_{ki} kimenő feszültség közelítőleg arányos a bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha az R ellenállás az induktív reaktanciánál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak).



34-26 ábra.
A 34C-43 feladathoz

34C-44 Sorba kapcsolt RL körre ($R = 2500\ \Omega$, L = 1,5 H) $v = 100 \sin(2000t)$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők.) (a) Készítsük el az áramkör impedanciadiagramját. Számítsuk ki a $t = 1$ ms időpontban (b) az alkalmazott feszültség és (c) az áramerősség értékét; továbbá (c) az ellenálláson és (e) a tekercsen a feszültségesést. Ellenőrzés: A (d) és (e) kérdésekre kapott értékek összegének egyenlőnek kell lennie a (b) kérdésnél kapott feszültséggel.

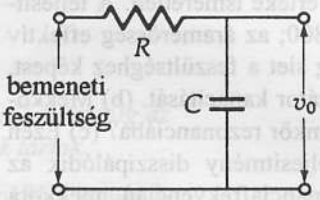
34C-45 A 34-26. ábrán látható áramkörben az induktivitást helyettesítsük C kapacitással. Mutassuk meg, hogy a v_{ki} kimenő feszültség közelítőleg arányos a bemenő feszültség idő szerinti deriváltjával, ha az R ellenállás a kapacitív reaktanciánál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak.)

34C-46 Egy nem elhanyagolható ellenállású tekercset 4 μF-os kondenzátoron keresztül 120 V, 60 Hz-es feszültséghez csatlakoztatunk. A kondenzátor, illetve a tekercs kapcsai között mérhető feszültség effektív értéke $V_{eff} = 180$ V, illetve 75 V. Számítsuk ki a tekercs (a) induktivitását és (b) ellenállását, feltételezve, hogy a tekercs egy sorba kapcsolt RL áramkörrel modellezhető.

34C-47 Sorba kapcsolt RL körre ($R = 40$ kΩ, $L = 30$ mH) $v = 100 \sin 10^6\ t$ feszültséget kapcsolunk (a számértékek SI egységben értendők). Mekkora az áramerősség maximális értéke?

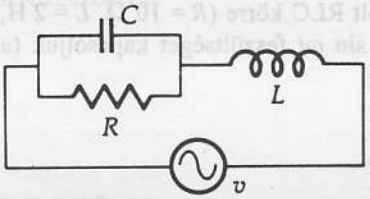
34C-48 Sorba kapcsolt RLC áramkörre ($R = 500\ \Omega$, L = 50 mH, $C = 40\ \mu$F) szinuszosan változó feszültséget kapcsolunk. Milyen frekvenciánál folyik át olyan áram a körön, amely 30°-kal siet a feszültséghez képest?

34C-49 Tekintsük a 34-27 ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a v_{ki} kimenő feszültség közelítőleg arányos a v bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha a kapacitív reaktancia az R ellenállásnál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak.)



34-27 ábra.
A 34C-49 feladathoz

34C-50 Vázoljuk fel a 34-28 ábra áramkörének fázisvektordiagramját arra az esetre, ha az áramerősség a feszültséghez képest siet.



34-28 ábra.
A 34C-50 és a 34C-56 feladathoz

34C-51 Sorba kapcsolt RLC kör AC feszültségforráshoz csatlakozik. Az áramkörben az áramerősséget leíró egyenletet Kirchhoff huroktörvényének alkalmazásával kapjuk meg: $L(di/dt)+Ri+q/C = V \sin \omega t$. Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy ezt az egyenletet az $i = V/Z \sin(\omega t-\phi)$ függvény kielégíti, ahol $\phi = \text{arctg}[(X_L-X_C)/R]$.

34C-52 A 34-14a ábra áramkörében $v = 100 \sin \omega t$, $R_1 = 0$, $X_C = 80\ \Omega$, $I = 2 \sin(\omega t\text{-}32{,}0°)$. (a) Számítsuk ki az RLC elemek eredő Z impedanciájának abszolút értékét és fázisszögét. (b) Számítsuk ki az induktív ág impedanciájának abszolút értékét és az R_2 ellenálláshoz viszonyított fázisszögét. (c) Számítsuk ki az R_2 ellenállást és az L induktivitás X_L reaktanciáját.

34C-53 A 34-14a ábrán látható áramkör elemei a következő nagyságúak: $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $X_C = 3\ \Omega$, $X_L = 20\ \Omega$; az alkalmazott feszültség $v = 200 \sin \omega t$. Az áramerősséget az $i = I \sin(\omega t-\phi)$ egyenletet adja meg. Mekkora I és ϕ?

34C-54 Ahhoz a módszerhez hasonlóan, ahogyan a sorba kapcsolt RLC áramkörökben bemutattuk a rezonancia jelenségét, vázoljuk fel a rezonanciagörbét kondenzátorral párhuzamosan és egymással sorba kapcsolt RL kör esetére is.

34C-55 Tekercscsel sorba kötött 20 Ω-os ellenálláson 50 W teljesítmény disszipálódik, ha az áramkört a 220 V, 50 Hz-es hálózathoz csatlakoztatjuk. Mekkora a tekercs induktivitása?

34C-56 Soros rezgőkör egy ideális induktív tekercsből és „szivárgásos" kondenzátorból áll (34-28 ábra). Vázoljuk fel a fázisvektordiagramot a rezonanciafrekvencián. Ábrázoljuk az egyes elemeken átfolyó áramerősség, és a rajtuk keletkező feszültségesés fázisvektorát.

34C-57 Sorba kapcsolt RLC áramkörben $R = 20\ \Omega$, $X_L = 10\ \Omega$. Az alkalmazott feszültség: $V_{\text{eff}} = 50$ V; $\omega = 400$ rad/s. A kapacitás értéke ismeretlen. A teljesítménytényező nagysága: 0,800; az áramerősség effektív értéke 2 A; az áramerősség siet a feszültséghez képest, (a) Számítsuk ki a kondenzátor kapacitását. (b) Mekkora frekvencián kerül az áramkör rezonanciába? (c) Ezen a frekvencián mekkora teljesítmény disszipálódik az áramkörben? (d) A rezonanciafrekvencián mekkora feszültség van a tekercs kapcsai között? (e) Az áramkör rezonanciába hozható úgy is, hogy az $\omega = 400$ rad/s frekvenciát változatlanul hagyva egy másik kondenzátort csatlakoztatunk az áramkörhöz. (f) Mekkora legyen ennek kapacitása és (g) az eredeti kondenzátorral sorba vagy párhuzamosan kell kötnünk?

34C-58 Sorba kapcsolt RLC körre ($R = 10\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 10\ \mu$F) a $v = 100 \sin \omega t$ feszültséget kapcsoljuk (a feszültségamplitúdó számértéke SI egységben értendő). (a) Számítsuk ki az ω_0 körfrekvenciát, melynél az ellenálláson disszipált teljesítmény maximális, (b) Mekkora ezen a frekvencián az ellenálláson disszipált teljesítmény? (c) Számítsuk ki azt a két, ω_1 és ω_2 körfrekvenciát, amelynél a disszipált teljesítmény a maximálisnak fele. [A Q jósági tényező közelítőleg $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$]

34C-59 Egy AC tápegység belső ellenállása r_s. (a) Mutassuk meg, hogy a teljesítmény a külső R változtatható terhelő ellenálláson akkor maximális, ha $r_s = R$. (Azt, hogy a tápegység belső ellenállása és a terhelő ellenállás legyen egyenlő a maximális AC teljesítményátvitel érdekében, impedancia-illesztéssel érjük el.)

34C-60 Egy 5 Ω-os ellenállás, 2 μF-os kondenzátor, és tekercs sorba van kötve; ezekre 20 mV effektív értékű feszültséget kapcsolunk, melynek 5000 Hz-es frekvenciája éppen rezonanciában van az áramkörrel. (a) Mekkora az áramkörben lévő L induktivitás? (b) Számítsuk ki az áramkör egyes elemein a feszültségesés effektív értékét. (c) Az alkalmazott, változatlan amplitúdójú feszültség frekvenciáját 7500 Hz-re változtatjuk. Vázoljuk fel az áramkör impedanciadiagramját ezen a frekvencián. (d) Mekkora ezen az új frekvencián az áramerősség? (e) Mekkora teljesítmény disszipálódik ezen a frekvencián az áramkörben?

30A-19 A válasz adott.
30B-21 $\tau = (-1{,}44 \times 10^{-3}\ \text{N·m})\,\hat{z}$
30B-23 $\mu = Iab\cos\theta\hat{x} + Iab\sin\theta\hat{y}$
30A-25 $\frac{1}{5}$
30B-27 a) 37,7 mT b) $(4{,}28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
30A-29 0,438 μW
30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
30C-33 A válasz adott.
30C-35 qBt/m
30C-37 IBR
30C-39 $mg/\pi rB_x$
30C-41 a) $1{,}05 \times 10^{-3}$ A b) $9{,}27 \times 10^{-24}$ A·m^2
30C-43 A válasz adott.
30C-45 A válasz adott.
30C-47 A válasz adott.
30C-49 A válasz adott.
30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

31A-1 1,43°
31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
31A-5 A válasz adott.
31B-7 $\mu_o I(b-a)/4ab$ (kifelé mutat)
31B-9 $\Phi_B = \mu_o Il(\ln 3)/2\pi$
31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2}/\pi b$
31A-13 a) $2{,}20 \times 10^{-5}$ Wb b) 5570 menet
31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o Ir/2\pi a^2$
31C-17 A válasz adott.
31C-19 A válasz adott.
31C-21 A válasz adott.
31C-23 a) $B = -(\mu_o Ia/\pi[z^2 + a^2])$
b) $\lim_{z>>l} B = -(\mu_o Ia/\pi z^2)\hat{z}$
31C-25 $2RB_c \text{ tg } \theta/\mu_o N$
31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3)/3r$
d) $\mu_o k(b^3 - a^3)/3r$
31C-29 $-(\mu I / 6\pi a)\hat{x}$ függetlenül y-tól
31C-31 $\mu_o \sigma \omega R$
31C-33 $(\mu_o I / 2\pi\omega)\ln(1 + w/d)$
31C-35 A válasz adott.
31C-37 $\mu_0 NI/l$

XXXII. Fejezet

32B-1 30 V az óramutató járása szerint
32B-3 $\mathcal{E} = \dfrac{2B\pi r^2}{t}$
32B-5 A válasz adott.
32B-7 3,38 A/s
32A-9 A válasz adott.
32A-11 $N\mu_0 \pi R/2$
32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
32A-15 a) $\mu_0 N_1^2 A/l$ $\mu_0 N_2^2 A/l$ b) $\mu_0 N_1 N_2 A/l$
32B-17 $M = \mu_0 A N_1 N_2 / l$
32B-19 a) V/L
32B-21 A válasz adott.
32A-23 145 J/m^3
32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
32C-29 b) 0,458 mV
32C-31 a) $b\ a$ b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
32C-33 3,08 μC
32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
32C-37 0,132 μA
32C-39 A válasz adott.
32C-41 A válasz adott.
32C-43 A válasz adott.
32C-45 $\mu_o I^2/16\pi$
32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

33A-1 88,6 mA
33A-3 318 A
33B-5 A válasz adott.
33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

34A-1 A válasz adott.
34A-3 A válasz adott.
34B-5 a) $v = 24{,}1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
34A-7 b) $3{,}2 \times 10^{-2}$ J
34B-9 b) $v = 8{,}32 \sin(1000t + 33{,}7°)$ (SI-ben)
34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
34B-13 A válasz adott.
34B-15 $i = 2{,}11 \sin(10^5 t + 71{,}6°)$
34A-17 100
34A-19 46,5 pF-tól 419 pF-ig
34B-21 A válasz adott.
34A-23 $v = 170 \sin(377t)$ V
34A-25 122 W
34B-27 A válasz adott.
34B-29 A válasz adott.
34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
e) 90,5 V
34B-33 a) 211 μF b) 979 W
34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
34B-39 a) $1{,}82 \times 10^4$ A b) 909 A
34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
e) 64,4 V

34C-43 A válasz adott.
34C-45 A válasz adott.
34C-47 2000 A/s
34C-49 A válasz adott.
34C-51 A válasz adott.
34C-53 $i = 40{,}8\ \sin(\omega t + 25{,}6°)$
34C-55 239 mH
34C-57 a) 100 μF b) 632 rad/s c) 125 W d) 39,5 V f) 150 μF g)párhuzamosan
34C-59 A válasz adott.

XXXV. Fejezet

35A-1 30,0 cm
35B-3 A válasz adott.
35B-7 ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$; ha $r > R$: $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$
35A-9 A válasz adott.
35B-11 377 Ω
35A-13 a) $1{,}67 \times 10^{13}$ T b) $3{,}32 \times 10^{12}$ W/m^2
35B-15 a) $(2\times10^{-8})\sin(kx - 10^{16}t)\hat{z}$ b) $1{,}88 \times 10^{-7}$ m c) $1{,}59 \times 10^{-10}$ J/m^3
35B-17 a) 1,20 m b) $u = 2{,}36 \times 10^{5}$ J/m^3 c) $E_o = 2{,}31 \times 10^{8}$ V/m
35B-19 A válasz adott.
35A-21 $8{,}97 \times 10^{-3}$ N
35A-23 $5{,}60 \times 10^{-6}$ N/m^2
35B-25 a) 1900 V/m b) $5{,}00 \times 10^{-11}$ J c) $1{,}67 \times 10^{-19}$ kg·m/s
35C-27 a) $1{,}88 \times 10^{-10} \cos 377t$ b) $1{,}00 \times 10^{-4} \cos[(3{,}77 \times 10^{-8})t]$
35C-29 A válasz adott.
35C-31 A válasz adott.
35C-33 21,9 V/m
35C-35 a) 292 nm
35C-37 A válasz adott.
35C-39 A válasz adott.
35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

XXXVI. Fejezet

36A-1 A válasz adott.
36B-3 A válasz adott.
36B-5 (30, –40), (–30, 40), (–30, –40), (cm-ben)
36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép egyenesállású, virtuális, $N = 0{,}273$
36A-9 a) 7,50 cm b) ∞
36B-11 9,23 cm
36B-13 8,00 cm
36C-15 A válasz adott.
36C-17 40,0 cm
36C-19 A válasz adott.
36C-21 ha $t = 228$ cm, a kép fordított állású, valódi és $N = -0{,}123$ ha $t = 21{,}9$ cm, a kép egyenes állású, virtuális és N = 8,12
36C-23 A válasz adott.
36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67
36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

XXXVII. Fejezet

37A-1 $n = 1{,}52$
37B-3 A válasz adott.
37B-5 0,624 cm
37B-7 a) 20,6° b) 0,400 szteradián c) 35,4°
37B-9 1,51
37B-11 2,14 szteradián
37B-13 17,0%
37A-15 R
37B-17 2,00
37A-19 3,57 mm kifelé
37A-21 26,7 cm
37B-23 $2f$
37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125
37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) –51,7 cm d) –17,24 cm
37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm
37A-31 a) 24,0 b) 48,1°
37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm
37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig
37C-37 A válasz adott.
37C-39 A válasz adott.
37C-41 A válasz adott.
37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c) 2,63 μs
37C-45 a gömbfelülettől számítva: a) $2{,}67R$ b) $1{,}80R$ c) $0{,}960R$
37C-47 A válasz adott.
37C-49 $(L^2 - 4fL)^{1/2}$
37C-51 A válasz adott.
37C-53 A válasz adott.
37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított állású kép $N = -2$ b) a lencse tárgyoldalán
37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a gyújtólencsén túl, $N = -0{,}42$
37C-59 A válasz adott.

XXXVIII. Fejezet

38A-1 5,00 mm
38A-3 1,33 mm
38B-5 A válasz adott.
38B-7 a) 1034,4827 b) 62,1°
38B-9 6
38B-11 sötét
38B-13 a) $2{,}73E_o$, 30° b) $2E_o$, 60° c) 0, definiálatlan
38A-15 a) 105 nm b) 1,30
38A-17 199 nm

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

Van még egy félretett cikkem a fény elektromágneses elméletéről, amit míg az ellenkezőjéről meg nem győződtem, addig hatalmas fegyvernek tartok.

J. C. MAXWELL: C. H. Cay-hoz írt levelében1865. január 5.

Nem szabadulhatunk attól az érzéstől, hogy a Maxwell egyenleteknek önálló létük, s intelligenciájuk van, bölcsebbek mint mi vagyunk, bölcsebbek, még alkotóiknál is és sokkal több olvasható ki belőlük mint amire eredetileg szánták őket.

HEINRICH HERTZ

35.1 Bevezetés

A 18. fejezetben tárgyalt mechanikai hullámjelenségek terjedéséhez közegre van szükség, például a hanghullámok, vízhullámok vagy a kifeszített zsinegen végigfutó hullám esetében a mechanikai mozgás, a hullám okozta zavar tovaterjedése anyagi közegben megy végbe. Ebben a fejezetben elektromágneses hullámokat tárgyalunk, amelyek vákuumban, a „tökéletesen üres" térben is terjednek.

1864-ben James Clerk Maxwell megalkotta az *elektromágnesesség* elméletét,[1] amellyel egyesítette az elektromosság és a mágnesesség törvényeit, elméletét. Nagy lépés volt ez a fizika fejlődésében, hatalmas intellektuális teljesítmény. A mágnesesség és elektromágnesesség elméletének egyesítése Newton mechanikájához és Einsein relativitáselméletéhez hasonlítható. Maxwell elmélete nagy hatást gyakorolt a fizika filozófiai megalapozására is: a fizika törvényei hirtelen egységesnek kezdtek feltűnni – a fizika különböző területei közötti egységesítési törekvések akkor kezdődtek el, és azóta is tartanak. Maxwell munkássága vezetett az elektromágneses spektrum fogalmának megalkotásához, majd a rádióhullámok létezésének igazolásához

[1] Az elektromágneses Maxwell-elmélet legalább annyira elegáns és széleskörűen alkalmazható, mint Newton mechanikai törvényei. Maxwell négy tömör egyenlete mindent tartalmaz, amit az elektromosságról, mágnesességről és az elektromágneses hullámokról (a fényről, rádióhullámokról, stb.) tudunk. Persze, atomi léptékben alkalmazva kvantummechanikai és relativisztikus effektusokat is figyelembe kell venni. Az ezek figyelembevételével megalkotott modern elméletek kis sebességek és makroszkópikus méretek esetén természetesen visszaadják Maxwell és Newton törvényeit.

Maxwell híres könyvét (Treatise on Electricity and Magnetism) R. A. Millikan, az 1921-es fizikai Nobel-díj kitüntetettje, Newton Principiájával azonos fontosságúnak értékelte: „e kettő az, amely a modern mechanikai és elektromos ismeretrendszerünket kialakította".

(Heinrich Hertz, 1890), majd ezek távközlési célokra való alkalmazásához. A Maxwell-elmélet szerint az optikai jelenségek is elektromágneses eredetűek; Einstein relativitáselméletének egyik alapját is Maxwell egyenletei képezik.

35.2 Az eltolási áram és a Maxwell-egyenletek

A Maxwell-egyenletek tárgyalását azzal kezdjük, hogy összefoglaljuk az elektromosság és mágnesesség törvényeit aszerint, ahogyan azok 1870-ben ismeretesek voltak (35-1. táblázat). Ezután azt mutatjuk meg, hogy az egyik egyenletet hogyan kellett Maxwellnek egy további taggal kiegészítenie, hogy Coulomb, Faraday, Orsted, Ampère és mások nagyszerű felfedezései beleilleszkedjenek az egységes elektromágneses elméletbe.

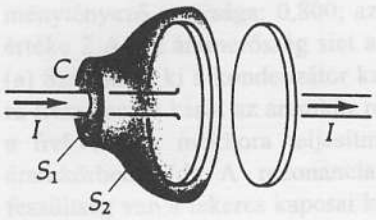
A következőkben leírt esetet vizsgálva Maxwell felismerte, hogy az $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$ alakban felírt Ampère törvény nem teljes. Tételezzük fel, hogy párhuzamos lemezű kondenzátort I árammal töltünk (35-1 ábra). Alkalmazzuk az Ampère-törvényt olyan kör alakú görbére (C), amely a kondenzátor egyik lemezéhez vezető huzalt körülveszi; legyen a C görbe által körbevett felület S_1 Ezen a felületen áram halad át és az Ampère-törvény értelmében mágneses teret hoz létre. A lemezek közötti térben lévő S_2 felületet viszont áramvezető nem metszi, az Ampère-törvény szerint a C görbe mentén mágneses tér nincs. Ennek az ellentmondásnak a feloldására Maxwell az Ampère-törvényt az alábbi módon egészítette ki:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \qquad \textbf{(35-1)}$$

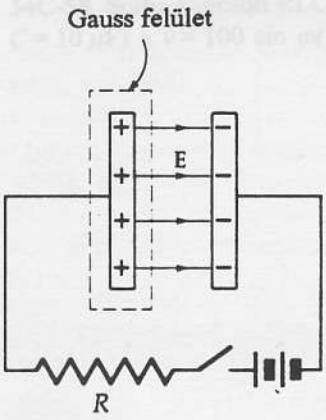
ahol Φ_E a C görbe által bezárt felületen az elektromos tér fluxusa.

Az $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$ tagot a 35-2 ábrán vázolt áramkör elemzésével kaphatjuk meg: a kapcsoló zárásakor a vezetőben töltések áramlanak, feltöltik a kondenzátor lemezeit és **E** térerősségű elektromos erőteret hoznak létre közöttük. Az egyik lemez köré szerkesztett Gauss-felület belsejében lévő q töltés és a Φ_E elektromos fluxus között a Gauss-törvény értelmében bármely időpontban a

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \Phi_E$$



35-1 ábra
Az $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ integrált a huzalt körbevevő C zárt hurokra számítjuk ki.



35-2 ábra
A kapcsoló zárásakor a síkkondenzátor lemezeire töltések áramlanak. Ezek a lemezek közötti térben **E** elektromos térerősséget hoznak létre. A Gauss-felület belsejében az egyik lemeznek q töltése van.

35-1. táblázat

Törvény	Jelenség, a törvény tárgya	Képlet
Coulomb-törvény	Töltések között ható elektrosztatikus erő	$F = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
Gauss-törvény	A távolság négyzetével való fordított arányosságot kifejező Coulomb-törvény matematikai következménye	$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
Lorentz-erőtörvény	Mozgó töltésre ható mágneses erő (a mágneses indukcióvektor definíciója)	$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
	Nyugvó töltésre ható elektromos erő (az elektromos térerősség definíciója)	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
Biot-Savart-törvény	Áramvezető mágneses erőtere	$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Id\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$
Ampère-törvény eredeti alakja	A Biot-Savart-törvény matematikai következménye	$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$
Faraday-törvény	Változó mágneses fluxus által keltett elektromos erőtér	$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

összefüggés áll fenn. Innen q-t kifejezve és a huzalban folyó $I = dq/dt$ áramerősséget kiszámítva:

$$I = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{35-2}$$

Ezt az eredményt a 35-1 ábrán vázoltak alapján a következőképpen értelmezhetjük: minthogy $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ értékének ugyanakkorának kell lennie az S_1 és S_2 felületekre (vagyis nem függhet attól, hogy a Gauss-felület belsejében van vagy sem), az Ampère-törvényt az alábbi módon kell kiegészíteni

AMPÈRE TÖRVÉNYÉNEK MAXWELL ÁLTAL KIEGÉSZÍTETT ALAKJA:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \tag{35-3}$$

A zárójelben lévő I, illetve $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$ tag zérus, ha az S_2, illetve az S_1 felület kerülete mentén végezzük el az integrálást. Az $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$ áramerősség dimenziójú tagot *eltolódási áramnak*[2] nevezzük.

AZ I_d ELTOLÓDÁSI ÁRAM:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{35-4}$$

A feltöltődő kondenzátor lemezei közötti mágneses erőtér mágneses indukcióvektorát a Biot-Savart-törvénnyel is kiszámíthatnánk, ha a törvényt a lemezekhez vezető huzalokban folyó áramok mágneses erőterére alkalmazzuk[3]. Célszerűbb azonban ezt a számítást az általánosított Ampère-törvény segítségével elvégezni (35-3 képlet). Válasszuk integrálási útnak a köralakú lemezek közötti térbe eső C köralakú görbét, melynek belsejében áram nem folyik, tehát

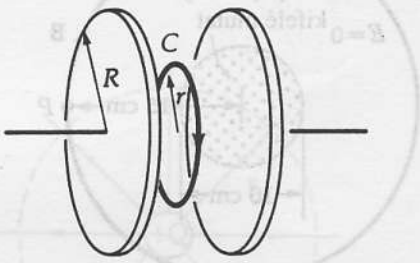
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{35-5}$$

Legyen az $r < R$ sugarú C kör a rendszer szimmetriájához illeszkedően, a kondenzátor tengelyével koncentrikus (35-3 ábra). Az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

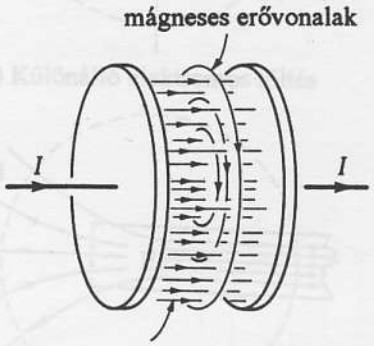
$$B(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Az $(r/R)^2$ tényező azt fejezi ki, hogy a $d\Phi_E/dt$ fluxusváltozásnak mekkora hányada esik a hurok belsejébe. A B-t kifejezve:

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \frac{d\Phi_E}{dt} \left(\frac{r}{R^2} \right) \qquad (r \le R) \tag{35-6}$$



(a) Az integrálási görbe a C zárt hurok.



(b) Az áram hatására a Φ_E elektromos fluxus megnő a lemezek közötti térben.

35-3 ábra
Változó elektromos erőtér hatására mágneses erőtér jön létre. Az ilyen mágneses erőtér létezése, például kondenzátor lemezei között, kísérletileg igazolható.

[2] Az eltolódási áram kifejezés onnan származik, hogy az εE mennyiséget elektromos eltolódásnak nevezik. Az utóbbi név eredete pedig arra vezethető vissza, hogy (az azóta túlhaladott álláspont szerint) a vákuumot elektromosan polarizálható éter tölti ki, amelynek viselkedése hasonló a dielektrikumokéhoz, tehát a polarizáció elektromos töltések szétválása, *eltolódása* által következik be. Tudománytörténeti érdekesség, hogy az eltolódási áram bevezetését Maxwell legnevesebb fizikus kortársai értetlenséggel fogadták.

[3] E lehetőség felett az eltolódási áram tárgyalása során gyakran átsiklanak.

Látható, hogy B mindaddig arányos r-rel, amíg $r < R$. Ha $r \geq R$:

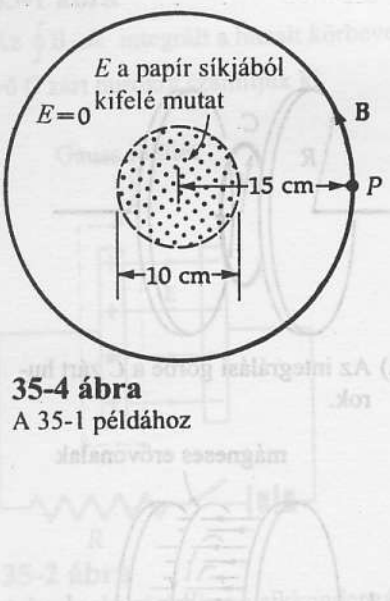
$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \frac{d\Phi_E}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (r \geq R) \qquad \textbf{(35-7)}$$

A (35-2) képlet szerint $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$ egyenlő a kondenzátorba befolyó I áram erősségével, így B kifejezésére az $r \geq R$ tartományban

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \qquad (r \geq R) \qquad \textbf{(35-8)}$$

adódik. Ekkora tehát B nagysága egy kondenzátorhoz vezető huzal körül (vö. a (31-2) képlettel). Következésképpen a kondenzátoron kívül ($r > R$) a mágneses erőtér ugyanakkora, mint a hozzá vezető huzaltól ugyanakkora távolságban.

A kiegészített Ampère-törvény lehetővé teszi, hogy a mágneses erőtér nagyságát ott is kiszámítsuk, ahol elektromos áram nincs, hanem csak változó elektromos erőtér van jelen. Ilyen esetet tárgyalunk a következő példában.



35-4 ábra
A 35-1 példához

35-1 PÉLDA

A 35-4 ábrán vázoltak szerint egy 10 cm átmérőjű köralakú tartományban az elektromos térerősség nagysága 300 V/m, iránya az ábra síkjából kifelé mutat. Mekkora, és milyen irányú a mágneses indukcióvektor a kör középpontjától 15 cm-re lévő P pontban, ha a térerősség másodpercenként 20 V/m-rel nő?

MEGOLDÁS

Ampère-törvényének kiegészített alakját alkalmazzuk (35-3 képlet). Minthogy mozgó töltések nincsenek jelen, $I = 0$, és

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \textbf{(35-9)}$$

Az integrál kiszámítására felhasználjuk a rendszer *körszimmetriáját*: a középpontból kifelé mutató bármely irány a többivel egyenértékű. A 35-3 ábrán illusztrált kísérlet eredményéből tudjuk, hogy a mágneses erővonalak a tengelyre merőleges síkban koncentrikus körök; tehát egy ilyen kör mentén végighaladva a mágneses fluxussűrűség nagysága mindenütt ugyanakkora. Ha $\mathbf{B}$ irányáról ideiglenesen megfeledkezünk, és végrehajtjuk a $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ integrálást az $R = 0{,}15$ m sugarú kör mentén, ennek eredménye $2\pi RB$. A $\Phi_E = AE$ összefüggést az idő szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)\frac{dE}{dt}$$

A (35-9) formula így az alábbi alakot ölti:

$$2\pi RB = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)\frac{dE}{dt}$$

A B-t kifejezve: $$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi R}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)\frac{dE}{dt}$$

A konkrét számértékeket behelyettesítve:

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m})(8{,}85\times 10^{-12}\,\mathrm{F/m})(\pi)(0{,}1\,\mathrm{m})^2(20\,\mathrm{V/m\cdot s})}{(2\pi)(0{,}15\,\mathrm{m})(4)}$$
$$= 1{,}85\times 10^{-18}\,\mathrm{T}$$

A (35-2) összefüggés megadja a mágneses indukcióvektor irányát is, minthogy a növekvő elektromos fluxus olyan irányú mágneses erőteret hoz létre, mint az I áram. A 35-4 ábrán az elektromos térerősség *növekménye* az ábra síkjából kifelé mutat; a jobbkéz-szabály értelmében B iránya az óramutató járásával ellentétes. Hangsúlyozzuk, hogy az elektromos erőtér iránya lényegtelen, mert a mágneses erőtér irányát és nagyságát E változási sebessége határozza meg

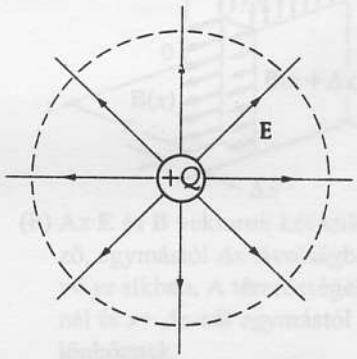
A 35-1 táblázat hiányos: nem tartalmazza azt, hogy ismereteink szerint mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek. A mágneses monopólus fogalma a mágneses és elektromos dipólusok közötti analógiából származik. Minthogy az elektromos dipólusok két különálló, $-q$ és $+q$ elektromos töltésből épülnek fel, csábító a gondolat, hogy a mágneses dipólust is különálló mágneses „töltésekből", *monopólusokból* felépítettnek tekintsük. A mágnes északi pólusa a $+p$ monopólus (amelyből a mágneses erővonalak kiindulnak), míg a déli pólus a $-q$ monopólus (ahová az erővonalak összegyűlnek) lenne. Természetesen, ez a gondolkodásmód éles ellentétben áll azzal, hogy a mágneses dipólust körárammal modellezzük. A köráram-modell kizárja a különálló monopólus létezését; a köráram szükségképpen mindkét pólust egyszerre generálja, így az alapvető mágneses struktúra a dipólus. Ha hosszú rúdmágnest kettétörünk, akkor két dipólust hozunk létre, nem pedig monopólusokat; elméletileg a mágnes darabolása mindaddig folytatható, amíg a mágnest önálló atomokká nem vágjuk szét. Minthogy az atomokban is folynak köráramok, az elektronoknak spinjük van, tehát ezek is mágneses dipólusok. Érdemes megemlíteni, hogy egyes modern elméletek szerint léteznek mágneses monopólusok. Az észlelésükre elvégzett számtalan kísérlet azonban mindeddig sikertelen volt. Ha mágneses mnopólusok valóban léteznének a természetben, akkor bizonyos elektromágneses egyenleteket meg kellene változtatni.

Annak ellenére, hogy a monopólusok létét nem ismerjük el, mégis foglalkozzunk velük egy kicsit. A 35-5 ábrával a töltések és a mágneses pólusok közötti különbséget szemléltetjük. A 35-5a ábra az elektromos töltésekre vonatkozó Gauss-törvényt illusztrálja, miszerint

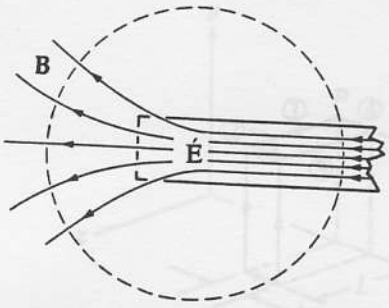
AZ ELEKTROMOS ERŐTÉRRE VONATKOZÓ GAUSS-TÖRVÉNY
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (35\text{-}10)$$

ahol a Gauss-felületen áthaladó teljes elektromos fluxus nem zérus. A 35-5b ábrán hosszú rúdmágnes északi pólusát körülvevő Gauss-felületet láthatunk.

Minthogy mágneses monopólusok nem léteznek, a mágnes északi pólusához szükségképpen hozzátartozik egy déli pólus is. Vagyis zárt felületen ugyanannyi mágneses erővonal megy az északi pólusból kiindulva kifelé, mint a déliből befelé. Ezt a következő egyenlettel lehet kvantitatív módon megfogalmazni:



(a) Különálló elektromos töltés



(b) Mágneses dipólus egyik vége

35-5 ábra
Az (a) esetben, a zárt Gauss-felületen az elektromos fluxus nem zérus, ha a felület belsejében a töltések összege zérustól különböző. A (b) esetben a zárt Gauss-felületen a mágneses fluxus zérus, ugyanis monopólusok nem léteznek.

A MÁGNESES TÉRRE VONATKOZÓ GAUSS-TÖRVÉNY $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$ (35-11)

A 35-2 táblázat a 28-1 táblázat tömörített változata. A Coulomb-törvényt és a Biot-Savart-törvényt kihagytuk, ugyanis azokat (más alakban) az elektromos erőtérre vonatkozó Gauss-törvény és Ampère-törvény tartalmazza. A Lorentz-erőtörvényt szintén kihagytuk. Az Ampère-törvényt kiegészítettük azzal a taggal, amely megadja a változó elektromos erőtér hatására kialakuló mágneses erőteret. A táblázatban szerepel továbbá a mágneses erőtérre vonatkozó Gauss-törvény is. A 35-2 táblázatban szereplő négy alapvető egyenletet Maxwell tiszteletére a négy **Maxwell-egyenletnek** nevezzük[4].

A fizikusok számára a Maxwell-egyenletrendszer a tömörség, általánosság és matematikai elegancia csúcsa. Tömörségük ellenére minden elektromos és mágneses jelenséget leírnak; alkalmazásukkal villanymotorok, generátorok, rádió, televízió, részecskegyorsító, száloptikás távközlési rendszerek és mágneses lebegtetésű járművek tervezhetők. A Maxwell-egyenletrendszer ugyanolyan hatalmas szellemi teljesítmény, mint annak idején a Newton-törvények voltak[5]. Az egyenletrendszer váratlan szépsége az is, hogy relativisztikusan kovariánsak: míg a Newton törvényeket a fényét megközelítő sebességeken lényegesen módosítani kell, a Maxwell egyenletek változatlanul érvényben maradnak. (Ez a tény Maxwellt valószínűleg örömmel töltötte volna el, ha megéri a relativitáselmélet megszületését.)

35.3 Az elektromágneses hullámok

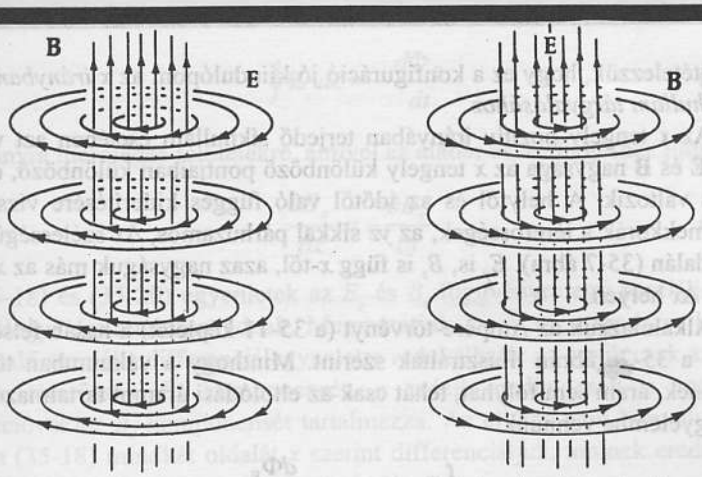
Mint azt megmutattuk, Maxwell az elektromosságtan és a mágnesesség egyenleteit azáltal egyesítette, hogy az Ampère-törvényt kiegészítette egy taggal. E műveletnek másik meglepő következménye az, hogy az egyenletrendszernek a megoldása *hullámfüggvény,* és ezzel mintegy megjósolta az

35-2. táblázat A Maxwell-egyenletek (vákuumban)

Az elektromos erőtérre vonatkozó Gauss-törvény	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	(35-12)
A mágneses erőtérre vonatkozó Gauss-törvény	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	(35-13)
Az Ampère-törvény (Maxwell kiegészítésével)	$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	(35-14)
A Faraday-törvény	$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	(35-15)

[4] A Maxwell-egyenleteket gyakran differenciális alakban adják meg; azonban a differenciális alakok használata olyan matematikai műveletek ismeretét kívánja meg, amelyet célszerű a későbbi elektrodinamika kurzusokra halasztani. A Maxwell-egyenletekben a dielektrikumok jelenlétét úgy vehetjük figyelembe, hogy a vákuum ε_0 permittivitását egyszerűen ε-ra, az illető dielektrikum permittivitására cseréljük. Hasonlóképpen, a mágneses anyagok esetében, a vákuum μ_0 permeabilitása helyére az egyenletekben az illető mágneses anyag μ permeabilitása kerül.

[5] Ludwig Boltzmann Goethe egy sorát idézte, amikor ezeket kommentálta: „Csak nem egy isten írta fel ezeket a sorokat?" – J. R. Pierce Az elektronok és a hullámok c. könyvében az egyik fejezetnek ezt a címet adta: „Maxwell csodálatos egyenletei" és ezt mondta: Bárki számára, akit valami is érdekel a szűk prakticizmuson túl, érdemes megérteni Maxwell egyenleteit, egyszerűen csak a saját lelki üdve érdekében!



Faraday-törvény

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

(a) Ha Φ_B egyenletesen növekszik, állandó **E** térerősségű elektromos erőtér jön létre.

Az Ampere-törvény (Maxwell kiegészítésével)

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

(b) Ha Φ_E egyenletesen növekszik, állandó **B** mágneses indukciójú mágneses erőtér jön létre.

35-6 ábra

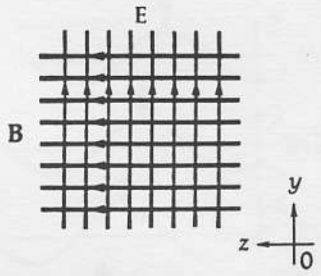
E és **B** szimmetriája, ha nincsenek mozgó töltések. Vegyük észre, hogy a szimmetria nem tökéletes, ugyanis azok az erőterek, amelyeknek az erővonalai koncentrikus körök, ellentétes körüljárási irányúak (az egyik egyenletben ugyanis egy negatív előjel van).

elektromágneses hullámok létezését, akár tökéletes vákuumban is. Maxwell továbbá azt is megmutatta, hogy ezeknek a hullámoknak sebessége ugyanakkora, mint a c fénysebesség. Ez volt az első határozott jelzés arra, hogy a fény elektromágneses hullámjelenség.

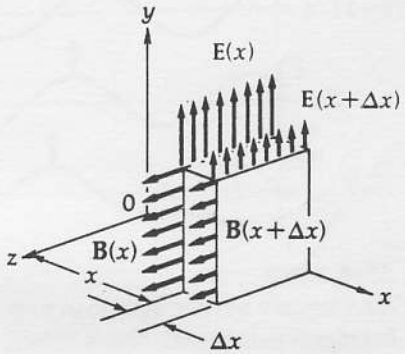
Az elektromágneses hullámok megértését a hullámformákat szemléltető ábrák nagy mértékben segítik. A 35-6 ábra az **E** térerősségű elektromos erőtér és a **B** mágneses indukciójú mágneses erőtér közötti szimmetriát illusztrálja, azt, hogy változó **E** térerősségű elektromos erőtér mágneses erőteret hoz létre és megfordítva, a változó mágneses erőtér körül elektromos erőtér keletkezik.

Ahhoz, hogy Maxwell egyenleteiből az elektromágneses hullámok létét levezessük, viszonylag bolyolult matematikai műveleteket kell elvégezni, ezért itt most nem a teljes, részletes levezetést adjuk meg. Ehelyett **E** és **B** egy egyszerű kombinációjából indulunk ki; megmutatjuk, hogy ilyen kombináció következménye az elektromágneses *hullám*, és hogy a hullámot leíró egyenlet összhangban van a Maxwell-egyenletekkel. A kiindulópont vákuumbeli, egymásra merőleges **E** térerősségű elektromos erőtér és **B** mágneses indukciójú mágneses erőtér. (35-7 ábra)[6]. Leegyszerűsített példában feltételezzük, hogy az erőterek az yz síkban homogének, azaz a térerősségek mindkét irányban $+\infty$ és $-\infty$ között *azonos nagyságúak* (az ábrán a térerősségstruktúrának csak kicsiny részletét ábrázoltuk). Amint azt egy későbbi fejezetben megmutatjuk, kísérletileg könnyű igazolni, hogy haladó hullámban az **E** és **B** vektorok mindegyike a haladás irányára merőleges. Így

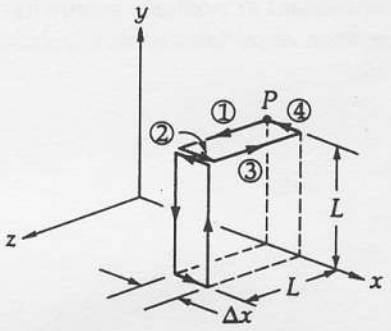
[6] A Maxwell-egyenletek megkövetelik azt, hogy **E** és **B** vektorok egymásra merőlegesek legyenek, de ezeknek nem kell homogén erőtereknek lenniök. A jelen tárgyalásban szereplő merőleges erőterek az eltolódási áramok által keltett erőterek legegyszerűbb esetét jelentik. Ha például megvizsgáljuk a töltődő kondenzátor környezetében kialakuló erőtereket (35-3 ábra), azt találjuk, hogy **E** és **B** mindenütt merőleges egymásra.



(a) Az **E** és **B** terek egymásra merőlegesek. (A vektorterek ugyanígy folytathatók a teljes yz síkban.)



(b) Az **E** és **B** vektorok két különböző, egymástól Δx távolságban lévő yz síkban. A térerősségek x-nél és $x+\Delta x$-nél egymástól különböznek.



(c) A (b) ábrán vázolt hasáb felső lapjának csúcspontjain áthaladó integrálási út.

35-7 ábra

Az x tengely pozitív irányában haladó elektromágneses síkhullámban az **E** térerősségű és **B** mágneses indukciójú erőterek egymásra merőlegesek.

hát feltételezzük, hogy ez a konfiguráció jó kiindulópont az *x irányban terjedő síkhullám tárgyalásához.*

Az x tengely pozitív irányában terjedő síkhullám esetében azt várjuk, hogy **E** és **B** nagysága az x tengely különböző pontjaiban különböző, és időben is változik. A helytől és az időtől való függés kiderítésére vizsgáljuk meg, mekkorák a térerősségek, az yz síkkal párhuzamos, Δx szélességű réteg két oldalán (35-7 ábra). E_y is, B_z is függ x-től, azaz nagyságuk más az x, mint az $x + \Delta x$ helyen.

Alkalmazzuk az Ampère-törvényt (a 35-11 képletet) a hasáb felső felületére, a 35-7c ábrán illusztráltak szerint. Minthogy a vákuumban töltések nincsenek, áram sem folyhat, tehát csak az eltolódási áramot tartalmazó tagot kell figyelembe vennünk:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \textbf{(35-16)}$$

A hasáb méretei: az y és z irányban L, az x irányban Δx. Számítsuk ki a hasáb egy lapja körül a számokkal jelölt élek mentén az $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ integrált, a P-vel jelölt sarokból indulva. A négy él mentén az integrál értéke:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \underbrace{B_z(x)L}_{①} + \underbrace{0}_{②} - \underbrace{B_z(x+\Delta x)L}_{③} + \underbrace{0}_{④}$$

A ② és ④ élek mentén az integrál zérus, ugyanis **B** és $d\ell$ egymásra merőlegesek.

Az (35-16) összefüggés jobb oldala átírható úgy is, hogy **E**-t tartalmazza, ugyanis $\Phi_E = AE_y$, és így $d\Phi_E/dt = A dE_y/dt$. Az integrálási görbe által határolt terület $A = L\Delta x$. Pontosabban: minthogy E_y térben és időben is változik és mialatt a deriválást elvégezzük, az összes többi változó értékét konstansnak tartjuk, ezért a parciális deriválás jelét[7] használjuk. Így a (35-16) jobb oldala:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 L \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

A két utóbbi képletet egybevetve azt kapjuk, hogy:

$$B_z(x)L - B_z(x+\Delta x)L = \mu_0 \varepsilon_0 L \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Mindkét oldalt L-lel osztva, és a hasáb vastagságát zérushoz közelítve:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{B_z(x+\Delta x) - B_z(x)}{\Delta x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \textbf{(35-17)}$$

Az egyenlet bal oldala éppen a dB_z/dx deriváltat definiálja, tehát

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \textbf{(35-18)}$$

(Ismét a *parciális* deriválás jelét használjuk, mivel B_z időben is változik.) Az előzőkhöz hasonlóan alkalmazzuk a Faraday-törvényt:

[7] A parciális deriválásra vonatkozó megjegyzés a G-V. függelékben olvasható.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(35-19)}$$

a z irányra merőleges felületekre, amivel az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \textbf{(35-20)}$$

A (35-18) és (35-20) egyenletek az E_y és B_z függvényre egy parciális differenciálegyenlet-rendszert adnak. Megmutatjuk, hogy ez a rendszer két másodrendű parciális differenciálegyenletre redukálható: az egyik csak az elektromos térerősség E_y komponensét, a másik pedig csak a mágneses indukcióvektor B_z komponensét tartalmazza. Az eljárás nem bonyolult: először a (35-18) mindkét oldalát x szerint differenciáljuk, aminek eredményeként azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} \qquad \textbf{(35-21)}$$

Ezután a (35-20) mindkét oldalát differenciáljuk t szerint, aminek eredményeként azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad \textbf{(35-22)}$$

A $\delta^2 B_z/\delta x \delta t$ vegyes parciális derivált értékét a (35-21)-be helyettesítve olyan összefüggést kapunk, amelyben csak B_z szerepel:

A HULLÁMEGYENLET B_z-RE
$$\frac{\partial B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad \textbf{(35-23)}$$

Hasonló eljárással a (35-18) és a (35-20) egyenletek úgy is kombinálhatók, hogy csak az E_y komponenst tartalmazó egyenlethez jussunk:

A HULLÁMEGYENLET E_y-RA
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(35-24)}$$

E két utóbbi egyenlet éppen olyan, mint amit a kifeszített kötélen végighaladó transzverzális hullám esetére a 18. fejezetben levezettünk (lásd a (18-8) hullámegyenletet). A hullámegyenlet megoldása az alábbi alakú:

$$A = A_0 \sin(kx - \omega t) \quad \text{(az } x \text{ tengely pozitív irányában haladó hullám)} \qquad \textbf{(35-25)}$$

ahol A_0 = a hullám *amplitúdója*

$k = 2\pi/\lambda$ a λ *hullámhosszúságú* hullám *hullámszáma*,

$\omega = 2\pi/T$ a *körfrekvencia*,

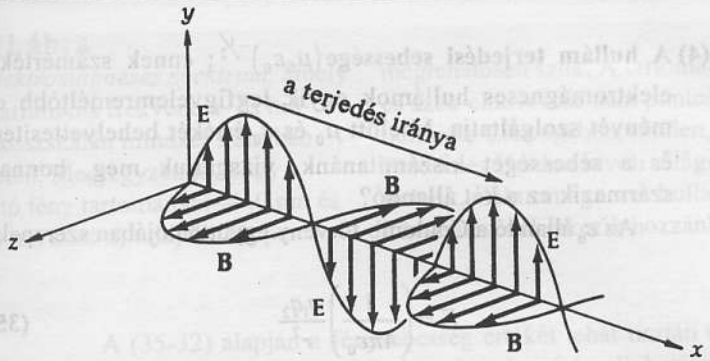
$T = 1/f$ az f frekvenciájú hullám *periódusideje*,

$v = \omega/k$ a hullám *terjedési sebessége*,

$v = \lambda f$ (vákuumban $v = c$)

Az elektromos térerősség E_y komponense időben és térben tehát az alábbiak szerint változik:

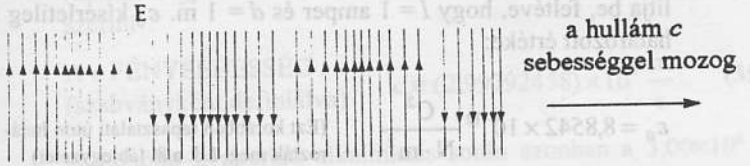
AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉGNEK (az x tengely irányában) SÍKHULLÁMKÉNT TERJEDŐ E_y KOMPONENSE
$$E_y = E_{y0} \sin(kx - \omega t) \qquad \textbf{(35-26)}$$



(a) Az x tengely pozitív irányában haladó elektromágneses síkhullám térbeli változásáról készített „pillanatfelvétel". A vektorok hossza a térerősség, illetve a mágneses indukcióvektor nagyságának felel meg. A szinuszos hullám az *x* tengely pozitív irányában *c* sebességgel mozog.

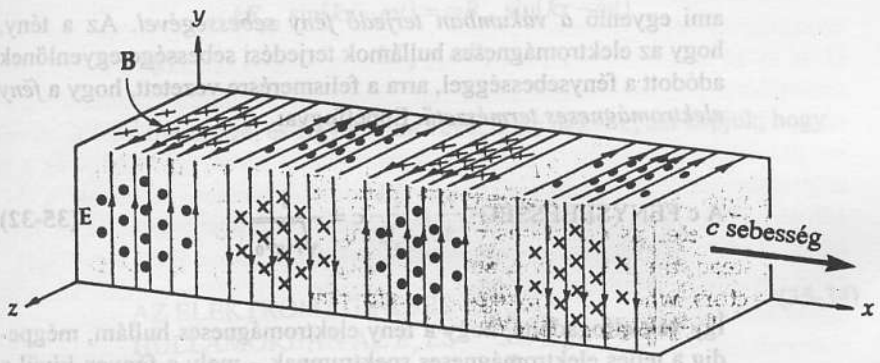


(b) Szinuszos hullámmal való ábrázolás. A térerősségvektorok helyett gyakran csak a burkológörbéjüket ábrázoljuk.



(c) Erővonalas reprezentáció: Az ábrán illusztráltak szerint az erővonalak ott sűrűbbek, ahol a térerősség nagyobb és ott ritkábbak, ahol a térerősség kisebb. Minthogy síkhullám esetében a térerősség az egész *yz* sík mentén állandó, az erővonalakat gondolatban az *y* koordináta irányában végtelenig meg kell hosszabbítanunk, továbbá az ábra síkjával párhuzamosan (az ábra mögött is, előtt is) végtelen ilyen erővonalsereget kell elképzelnünk, amelyek az ±*z* irányban kitöltik a teret. A hullámfrontok az *yz* síkkal párhuzamos síkok; ezek az x tengely pozitív irányában *c* sebességgel mozognak. (A hullám fázisa a hullámfront minden pontjában azonos.)

35-9 ábra
Az elektromágneses síkhullám különböző ábrázolási módjai



35-10 ábra
Az x tengely pozitív irányában haladó elektromágneses síkhullám egy részletéről, az **E** és **B** vektorok térbeli változásáról készített „pillanatfelvétel". (Hasonlítsuk össze a 35-9 ábrával)

(4) A hullám terjedési sebessége $(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$; ennek számértéke az elektromágneses hullámok egyik legfigyelemreméltóbb eredményét szolgáltatja. Mielőtt μ_0 és ε_0 értékét behelyettesítenénk és a sebességet kiszámítanánk, vizsgáljuk meg, honnan is származik ez a két állandó?

Az ε_0 állandó a Coulomb-törvény együtthatójában szerepel:

$$F = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \textbf{(35-30)}$$

Modern definíciója szerint, a q töltés egységét az amperből származtatjuk: az 1 amper (= 1 Cb/s) egységet egymástól d távolságra lévő párhuzamos áramvezetők l hosszúságú szakaszai között ható erő nagyságával definiáljuk az alábbi képlet alapján:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \qquad \textbf{(35-31)}$$

Ebben a képletben μ_0 *önkényesen* választott szám, amely a (35-31) összefüggésben F/l értékét *pontosan* $2\pi\cdot10^{-7}$ N/m nagyságúra állítja be, feltéve, hogy $I = 1$ amper és $d = 1$ m. ε_0 kísérletileg meghatározott értéke:

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542\times10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$$

(Ezt korábban tapasztalati úton határozták meg. Ld. a 8. lábjegyzetet)

Definíció szerint

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{C}^2}$$

Ezeket a számértékeket a terjedési sebesség kifejezésébe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

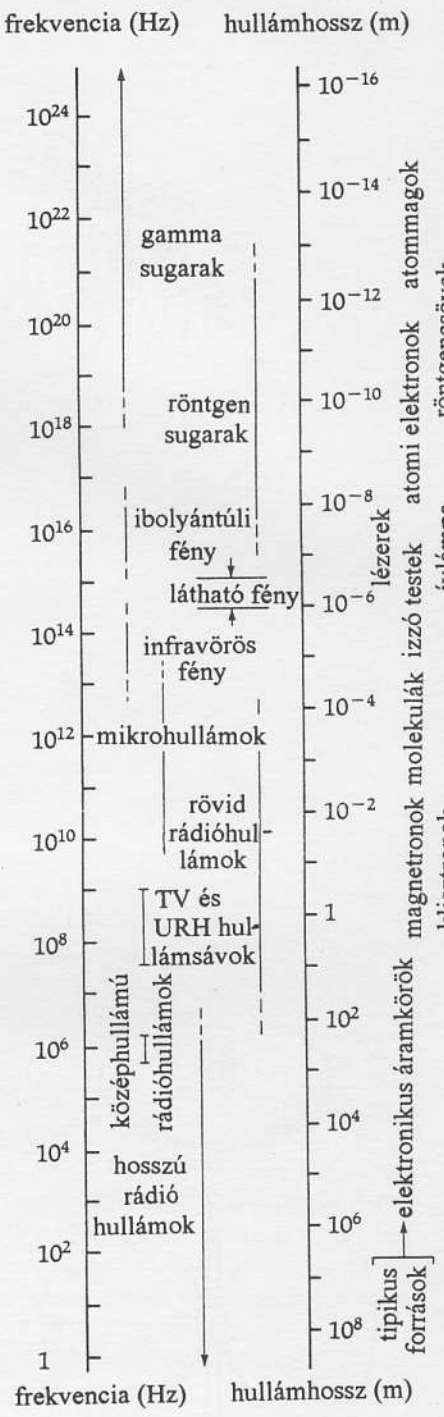
$$(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2} = \left[\left(4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{C}^2}\right)\left(8{,}8542\times10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}\right)\right]^{-1/2}$$

$$= 2{,}9979\times10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ami egyenlő *a vákumban terjedő fény sebességével*. Az a tény, hogy az elektromágneses hullámok terjedési sebessége egyenlőnek adódott a fénysebességgel, arra a felismerésre vezetett, hogy a *fény elektromágneses természetű*. Ennélfogva:

A c FÉNYSEBESSÉG $$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(35-32)}$$

Így vált elfogadottá, hogy a fény elektromágneses hullám, mégpedig a teljes elektromágneses spektrumnak – mely a fényen kívül a rádióhullámokat, mikrohullámokat, infravörös sugarakat, röntgensugarakat és gamma-sugarakat tartalmazza – csak kis része. A Maxwell-egyenletekkel mindezek leírhatók.



35-11 ábra
Az *elektromágneses spektrum*, amely a logaritmikus frekvencia- és hullámhosszskálán mindkét irányban végtelen. Megjegyzendő, hogy a látható fény tartománya(~440 nm és ~670 nm között) tulajdonképpen meglehetősen szűk. A tartományok és azok elnevezése nem pontosan definiált. Lényegében minden, amit a Földön és Holdon kívüli világról tudunk, elektromágneses hullámok közvetítésével érkezik hozzánk.

A (35-32) alapján a fénysebesség értékét tehát tisztán elektromos mérésekkel (és nem direkt sebességméréssel) határozhatjuk meg. Például tekintsünk egy síkkondenzátort, amelyet teleppel töltünk. A kondenzátorhoz vezető huzalok közötti, valamint a kondenzátor lemezei között ható erő mérésével c értéke meghatározható. 1906-ban E. B. Rosa és N. E. Dorsey az amerikai szabványügyi hivatalban (National Bureau of Standards) csodálatosan pontos kísérletet végzett el, amelynek során elektromos mérésekkel határozták meg a fénysebesség értékét. Ez volt abban a korban c legpontosabb értéke: 299784±15 km/s.

Az elektromos mértékegységek történetében 1983. október 20. fontos dátum: ekkor fogadták el hivatalosan a fénysebesség (akkori legpontosabb) értékét elsődleges SI-szabványnak, mely szerint

A c FÉNYSEBESSÉG (szabványként definiálva)
$$c \equiv (2{,}99792458)\times 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \textbf{(35-33)}$$

A legtöbb gyakorlati alkalmazás során azonban a $3{,}00\times 10^{8}$ m/s elegendően pontos érték.

(5) Az E és a B vektorok nagysága egymással összefügg. A hullámegyenletek megoldásai a (35-26) és a (35-28) összefüggések szerint:

$$E_y = E_{y0}\sin(kx-\omega t) \text{és} B_z = B_{z0}\sin(kx-\omega t)$$

E függvényeknek ki kell elégíteniök a hullámegyenlet levezetése során kapott (35-20) egyenletet is:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

A deriváltakat kiszámítva azt kapjuk, hogy:

$$kE_{y0}\sin(kx-\omega t) = \omega B_{z0}\sin(kx-\omega t)$$

vagy
$$kE_y = \omega B_z$$

Átrendezve, és figyelembe véve, hogy $\omega/k = c$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{E_y}{B_z} = \frac{\omega}{k} = c$$

AZ ELEKTROMÁG-NESES HULLÁMOKBAN AZ E_y ÉS A B_z KOMPONENSEK KÖZÖTTI KAPCSOLAT:
$$\frac{E_y}{B_z} = c \qquad \textbf{(35-34)}$$

35-2 PÉLDA

Egy elektromágneses hullámban az elektromos térerősséget a következő függvény adja meg:

$$E_y = 100\sin\left(10^7 x - \omega t\right) \qquad \text{(SI egységekben)}$$

Számítsuk ki (a) a mágneses hullám amplitudóját és (b) a λ hullámhosszt és (c) az f frekvenciát.

MEGOLDÁS

(a) A (35-34) szerint

$$B_z = \frac{E_y}{c} = \frac{\left(100\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)}{\left(3\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 3{,}33\times10^{-7}\ \text{T}$$

(b) A λ hullámhossz és az f frekvencia kiszámításához vegyük figyelembe, hogy az adott térerősség egyenlete $E_y = E_{y0}\sin(kx - \omega t)$. A (35-25) összefüggés alapján

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(10^{-7}\,\text{m}^{-1})} = 6{,}28\times10^{-7}\,\text{m}\underbrace{\left(\frac{10^9\,\text{nm}}{1\,\text{m}}\right)}_{\substack{\text{(átszámítási}\\ \text{tényező)}}} = 628\ \text{nm}$$

Ez a hullámhossz piros színű fénynek felel meg.

(c) A frekvencia a következő módon számítható ki:

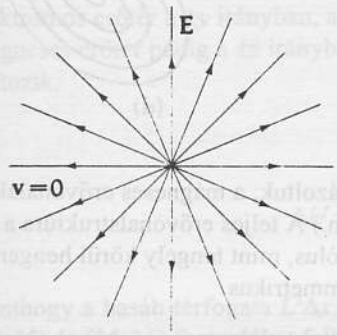
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{\left(3\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(6{,}28\times10^{-9}\ \text{m})} = 4{,}78\times10^{14}\ \text{Hz}$$

35.4 Az elektromágneses hullámok keltése

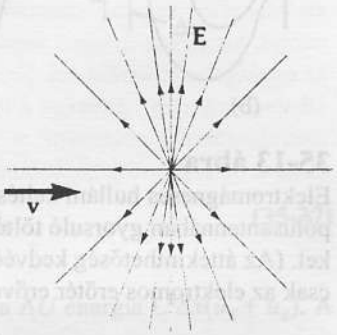
Az elektromágneses hullámok keltésének számos módja van. Mindegyik azon alapul, hogy *gyorsuló töltések elektromágneses sugárzást bocsátanak* ki. A 35-12 ábra szemlélteti e sugárzás eredetét. A 35-12a ábrán, a töltés eredetileg az O pontban nyugalomban van, az erővonalstruktúra gömbszimmetrikus. A $t = 0$ időpontban rövid Δt ideig gyorsul és az O' pontba érve $v = 0{,}2\ c$ sebességet ér el, majd attól fogva állandó sebességgel halad és a t időpontban eléri a P pontot. Ekkor az erővonalak „összenyomódnak" (35-12b ábra). Van tehát egy belső, „összenyomódott" térerősségstruktúra, és egy külső, eredeti, gömbszimmetrikus térerősségeloszlás, ahová még a gyorsuló, majd egyenletes sebességű mozgás hatása nem ért el. E két tartomány közötti törésvonal c sebességgel mozog kifelé, ez az a tartomány, amely a gyorsulásra vonatkozó információt őrzi. Tehát, O körül ct-nél nagyobb távolságokra, a gyorsulásra vonatkozó információ még nem érkezett meg, és a térerősségvonalak O felé, mint centrum felé mutatnak. O'-től ct-nél kisebb távolságokban az erővonalak a töltés pillanatnyi P helye felé mutatnak (35-12b ábra). A két tartományt elválasztó törésvonalnak (rétegnek) fontos tulajdonsá-

ga, hogy ott az elektromos térerősségnek *transzverzális* komponense van. *Ez a szétterjedő hullámban megjelenő transzverzális* **E** *térerősségű elektromos erőtér eredete.*

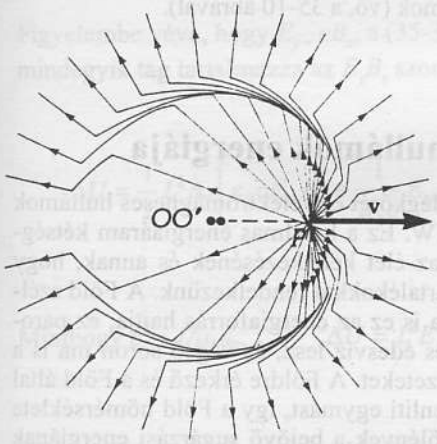
Elektromágneses hullámok keltésére szolgál a 35-13 és 35-14 ábrákon vázolt *dipólusantenna*. Két huzalból áll, amelyek váltakozó feszültségű feszültségforráshoz csatlakoznak. Az elektronok ide-oda gyorsulnak a huzalpárban, így a dipólusvégek felváltva pozitívak, illetve negatívak. Az oszcillációk hatására a térben szétterjedő térerősségszerkezet alakul ki (35-13a ábra). A potenciálkülönbség előjelváltásának pillanataiban a töltés a



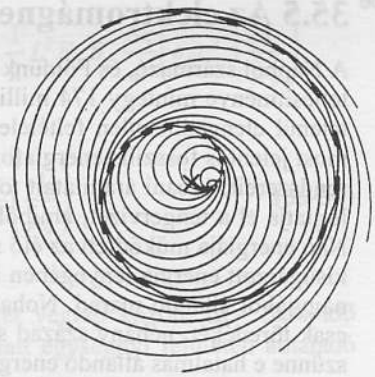
(a) Nyugalomban lévő pozitív ponttöltés erővonalai.



(b) Állandó sebességgel mozgó ponttöltés erővonalai. Nyugvó koordinátarendszerben az erővonalstruktúra a mozgás irányában összenyomottnak látszik; vagyis a mozgás irányában az erővonalak ritkábbak, arra merőlegesen sűrűbbek.



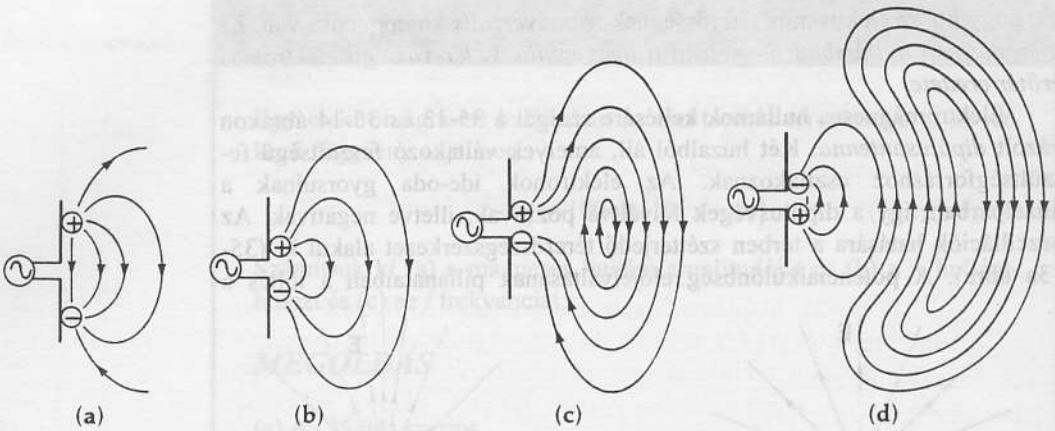
(c) Pozitív töltés erővonalai. A töltés nyugalmi helyzetből, az *O* pontból indulva az *O'* pontig hirtelen gyorsul, onnan egyenletes sebességgel áthalad a *P* ponton. Az erővonalstruktúrában megfigyelhető törésvonal az *OO'* pontok tartományából kifelé c sebességgel halad.



(d) Az óramutató járásával megegyező irányban, az × pont körül $v = 0{,}9\ c$ sebességgel körpályán mozgó pozitív töltés erővonalai. A törésvonal c sebességgel spirálszerűen kifelé mozog.

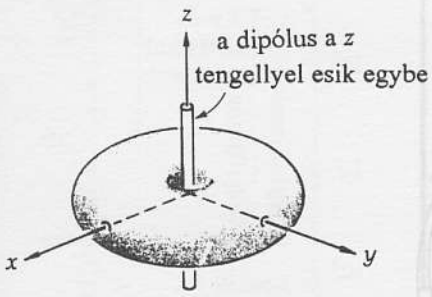
35-12 ábra

Ha ponttöltés gyorsul, akkor az erővonalszerkezetben törés keletkezik, amely c sebességgel a gyorsuló töltéstől kifelé halad. A (c) és (d) ábrán látható törésvonalon **E**-nek a mozgás irányára merőleges komponense van; ez a kifelé mozgó **E** komponens a gyorsuló töltéstől származó elektromágneses sugárzás

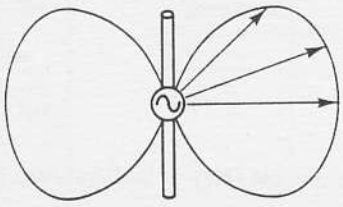


35-13 ábra
Elektromágneses hullám keltése dipólusantennában gyorsuló töltésekkel. (Az áttekinthetőség kedvéért csak az elektromos erőtér erővonalait ábrázoltuk; a mágneses erővonalakat nem.) A teljes erővonalstruktúra a dipólus, mint tengely körül hengerszimmetrikus.

dipólusvégeken zérus, ott erővonalak tehát nem záródnak. E pillanatokban az elektromos erővonalak a dipólusról „leszakadó" zárt hurkokat alkotnak, melyek az antennától c sebességgel távolodnak. A tér bármely pontjában az elektromos térerősség időben változik, tehát a Maxwell-egyenletekkel összhangban (az ábrán nem jelölt) változó mágneses tér is keletkezik: az antennától nagy távolságban a hullámok közelítőleg síkhullámok (vö. a 35-10 ábrával).



(a) A sugárzás intenzitáseloszlása



(b) Az intenzitáseloszlás keresztmetszete

35-14 ábra
A dipólussugárzásának az intenzitáseloszlása három dimenzióban (a dipólustól távol). A sugárzás intenzitása arányos a dipólus középpontjából a vizsgált irányba húzott vektor hosszával. A sugárzás intenzitása a dipólusra merőlegesen a legnagyobb, a dipólus tengelyének irányában a kisugárzott teljesítmény zérus.

35.5 Az elektromágneses hullámok energiája

A Napból származó, és Földünk felső légkörét érő elektromágneses hullámok teljesítménye mintegy 174 milliárd MW. Ez a hatalmas energiaáram kétségtelenül elengedhetetlen feltétele volt az élet keletkezésének és annak, hogy most jelentős fosszilis energiaforrás-tartalékokkal rendelkezünk. A Föld szélrendszereit, óceáni áramlatait továbbra is ez az energiaforrás hajtja, ez párologtatja el a tengervizet, amiből eső és édesvíz lesz, és végső soron ma is a Nap energiája működteti az élő szervezeteket. A Földre érkező és a Föld által kisugárzott energia lényegében kiegyenlíti egymást, így a Föld hőmérséklete nagyjából állandó marad. Noha az élőlények a bejövő sugárzási energiának csak töredékét, néhány század százalékát hasznosítják, az élet gyorsan megszűnne e hatalmas állandó energiaáram nélkül.

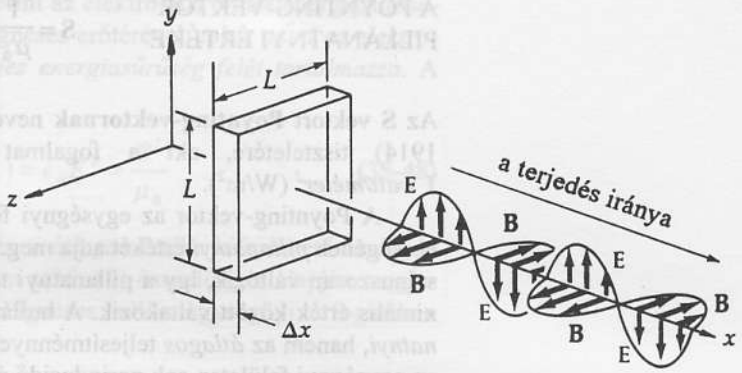
Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy az elektromágneses hullámok hogyan szállítanak energiát. Miként azt az előző fejezetekben megmutattuk ((27-16) és (32-33) formulák), az elektromos és mágneses erőterekben az egységnyi térfogatra eső energia, az *u energiasűrűség*:

AZ ELEKTROMÁGNESES TEREK PILLANATNYI ENERGIA SŰRŰSÉGE:

Elektromos $$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (35\text{-}35)$$

Mágneses $$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad (35\text{-}36)$$

Ahhoz, hogy megértsük, hogy a hullámok miként szállítanak energiát, alkalmazzuk ezeket a képleteket a 35-15 ábrán vázolt keskeny térfogatelemre (hasábra). Adott pillanatban a térfogatelem teljes ΔU energiája az elektromos erőtér ΔU_E és a mágneses erőtér ΔU_B energiájának összege:



35-15 ábra
Síkhullám, amely a keskeny hasábon keresztül c sebességgel elektromágneses energiát szállít. Az elektromos erőtér a $\pm y$ irányban, a mágneses erőtér pedig a $\pm z$ irányban változik.

$$\Delta U = \Delta U_E + \Delta U_B \tag{35-37}$$

Minthogy a hasáb térfogata $L^2\Delta x$, a hasábban a ΔU energia $L^2\Delta x(u_E + u_B)$. A (35-35) és (35-36) formulákat felhasználva:

$$\Delta U = \frac{1}{2}L^2\Delta x\left(\varepsilon_0 E_y^{\,2} + \frac{1}{\mu_0}B_z^{\,2}\right) \tag{35-38}$$

Figyelembe véve, hogy $E_y = cB_z$, a (35-38) összefüggés átírható úgy, hogy mindegyik tag tartalmazza az E_yB_z szorzatot:

$$\Delta U = \frac{1}{2}L^2\Delta x\left(\varepsilon_0 cE_yB_z + \frac{1}{\mu_0 c}E_yB_z\right) = \frac{1}{2}L^2E_yB_z\frac{\Delta x}{c}\left(\varepsilon_0 c^2 + \frac{1}{\mu_0}\right)$$

Minthogy $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$,
$$\Delta U = L^2E_yB_z\frac{\Delta x}{c}\left(\frac{1}{\mu_0}\right) \tag{35-39}$$

Ahhoz, hogy a ΔU energia áthaladjon a két véglap között, $\Delta t = \Delta x/c$ idő szükséges. S-sel jelölve az egységnyi idő alatt egységnyi felületen áthaladó energia nagyságát,

$$S = \frac{(\text{Energia})}{(\text{Terület})(\text{Idő})} = \frac{\Delta U}{L^2\Delta t}$$

melybe az előző kifejezést behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$S = \frac{1}{\mu_0}E_yB_z \tag{35-40}$$

Minthogy **E** és **B** a hullám terjedési irányára merőleges vektorok (35-15 ábra), vektoriális szorzatuk, az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ *a terjedés irányába mutat*. Tehát, az előző képletet átírhatjuk a következő alakúra:

A POYNTING-VEKTOR[8] PILLANATNYI ÉRTÉKE

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \qquad (35\text{-}41)$$

Az **S** vektort **Poynting-vektornak** nevezzük, John Henry Poynting (1852–1914) tiszteletére, aki a fogalmat bevezette. SI-mértékegysége az 1 *watt/méter*^{2} (W/m^2).

A Poynting-vektor az egységnyi felületen áthaladó energiaáramlás sebességének *pillanatnyi* értékét adja meg. A vizsgált hullámok esetében E és B szinuszosan változik, így a pillanatnyi teljesítmény zérus és valamilyen maximális érték között váltakozik. A hullám intenzitását általában nem a *pillanatnyi*, hanem az *átlagos* teljesítménnyel adjuk meg; gyakorlati szempontból az egységnyi felületen sok periodusidő átlagából adódóan egységnyi idő alatt áthaladó energia nagysága a lényeges mennyiség; melyet az alábbiak szerint igen egyszerű kiszámítani: A Poynting-vektort definiáló (35-41) képletbe E_y és B_z szinuszos kifejezését behelyettesítve

$$S = \frac{1}{\mu_0}E_{y0}B_{z0}\sin^2(kx-\omega t) \qquad (35\text{-}42)$$

Adott ponton áthaladó energia tehát a szinusz függvény négyzete szerint változik időben, maximumát a hullám periódusideje alatt kétszer éri el. Az átlagos energiaáramsűrűséget az alábbi kifejezés adja meg:

$$S_{\text{átl}} = \frac{E_{y0}B_{z0}}{\mu_0}\left[\frac{1}{(T/2)}\int_0^{T/2}\sin^2(kx-\omega t)dt\right] \qquad (35\text{-}43)$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés számértéke 1/2, így

A POYNTING-VEKTOR ÁTLAGOS NAGYSÁGA SZINUSZOS HULLÁM ESETÉN:

$$S_{\text{átl}} = \frac{1}{2\mu_0}E_{y0}B_{z0} \qquad (35\text{-}44)$$

Így a hullám terjedésére merőleges A felületen áthaladó átlagos energiaáram (W egységekben)

$$\int_A S_{\text{átl}}\cdot dA = (S_{\text{átl}})(A) = \left(\frac{dU}{dt}\right)_{\text{átl}} = \left[\begin{array}{l}\text{A hullám terjedési}\\ \text{irányára merőleges}\\ A \text{ felületen áthaladó}\\ \text{energiaáram}\end{array}\right] \qquad (35\text{-}45)$$



35-16 ábra
A világ legnagyobb naperőműve Kaliforniában, a Los Angeles közelében lévő Mojave sivatagban található. Mintegy 400 hektár területen fekszik és a világ napenergia-eredetű villamosenergia-termelésének 95%-át adja. A 650 ezer parabolatükör a Nap mozgását követve annak fényét a fókuszban lévő csövekre vetíti. Az ezekben keringő szintetikus olaj 400 C°-ra hevül; ami hőcserélőkben túlhevített gőzt fejleszt, ez utóbbi gőzturbinákat, ill. generátorokat forgat. A naperőmű elektromos teljesítménye 196 MW. Bár az itt előállított elektromos energia magas önköltsége miatt a naperőmű a hagyományos erőművekkel nem versenyképes, a konstruktőrök értékes üzemi tapasztalatot gyűjtenek a technológia továbbfejlesztéséhez.

Az energiasűrűség

Miként azt korábban megmutattuk, elektromos és mágneses erőtér energiasűrűsége

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \text{és} \qquad u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad (35\text{-}46)$$

Elektromágneses hullámok esetén az E és B mennyiségeket az $E = cB$ reláció kapcsolja össze, és $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Ezek figyelembevételével az

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = u_B \qquad (35\text{-}47)$$

[8] Miként azt a 33. fejezetben megtárgyaltuk, vákuumban a **H** mágneses térerősség és a **B** mágneses indukcióvektor közötti kapcsolatot a $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ összefüggés fejezi ki. Így a (35-41) képletet néha az $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ alakban írják fel.

összefüggésekhez jutunk, melyek szerint az elektromos erőtér energiasűrűsége minden pillanatban egyenlő a mágneses erőtérével, *tehát mind az elektromos, mind a mágneses erőtér a teljes energiasűrűség felét tartalmazza.* A teljes energiasűrűség:

$$u = (u_E + u_B) = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \qquad \textbf{(35-48)}$$

A szinuszosan változó erőterek esetén *u átlagos* értéke kifejezhető az E_{y0} és B_{z0} amplitúdók segítségével, amelyben a(35–43) összefüggés alapján megjelenik egy 1/2 tényező. Így az elektromágneses hullám egységnyi térfogatában az átlagos $u_{átl}$ energia:

AZ ELEKTROMÁGNESES HULLÁM ÁTLAGOS ENERGIASŰRŰSÉGE:

$$u_{átl} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{y0}^2 \text{ vagy } u_{átl} = \frac{1}{2\mu_0} B_{z0}^2 \qquad \textbf{(35-49)}$$

melyet J/m^3 egységben adunk meg. Ezt összehasonlítva a (35-44) egyenlettel és figyelembevéve, hogy $E = cB$, azt vehetjük észre, hogy

A HULLÁM INTENZITÁSA:

$$S_{átl} = u_{átl} c \qquad \textbf{(35-50)}$$

A hullám intenzitása (W/m^3 egységben) egyenlő a J/m^3 egységben kifejezett átlagos energiasűrűség és a (m/s egységben megadott) fénysebesség szorzatával.

35-3 PÉLDA

Tekintsünk egy 100 W-os (nagyjából monokromatikus) zöld fényű izzólámpát, amely fényét a tér minden irányában egyenletesen bocsátja ki. Mekkora a lámpától 10 m-re a fény elektromos erőterének amplitúdója, ha az izzólámpa 3%-os hatásfokkal alakítja át az elektromos energiát fényenergiává?

MEGOLDÁS

Minthogy a lámpa hatásfoka 3%, a kibocsátott elektromágneses hullámok energiája 3 W, ami egy 10 m sugarú gömb felületén egyenletesen oszlik el. A gömb felületén tehát az egységnyi felületre jutó átlagos energia

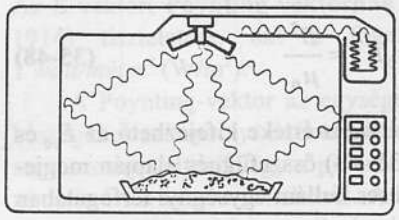
$$S_{átl} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{3{,}0\ \text{W}}{4\pi(10\ \text{m})^2} = \frac{0{,}030}{4\pi}\left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$$

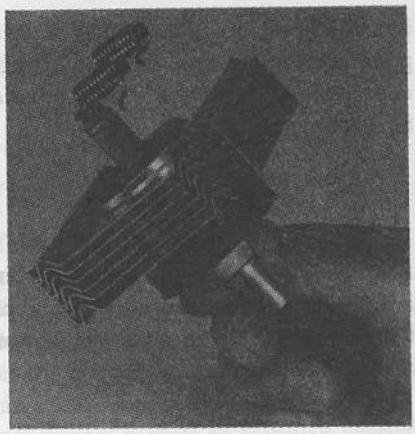
Ha a fény monokromatikusnak tekinthető, akkor egyetlen λ hullámhosszal jellemezhető elektromágneses hullám, és akkor a (35-49) és a (35-50) összefüggések szerint

$$S_{átl} = u_{átl} c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{y0}^2$$

Az E_{y0} amplitudót kifejezve:

$$E_{y0} = \sqrt{\frac{2S_{átl}}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{(2)\left(0{,}030\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)}{\left(8{,}85\times10^{-12}\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}\right)\left(3\times10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(4\pi)}} = 1{,}34\frac{\text{V}}{\text{m}}$$





mikrohullámú sütő

35-17 ábra
A II. világháború óta folyó radarfejlesztések eredményeként manapság számos helyen alkalmazzák a nagyteljesítményű mikrohullámokat előállító kompakt magnetroncsöveket. Például magnetronokat alkalmaznak a mikrohullámú sütőkben. A sütőben a mikrohullámok állóhullámokat alkotnak. Az egyenletes melegítés érdekében a hullámok intenzitáseloszlását vagy fém lapátú ventillátorok homogenizálják, vagy pedig a melegítendő ételt helyezik forgó tányérra (így az étel különböző részei felváltva haladnak át a hullámtér csomópontjain). A magnetron 2,45 GHz frekvenciájú mikrohullámokat bocsát ki. Ez a frekvencia közel van a vízmolekulák egyik rotációs-vibrációs energiaátmenetére jellemző frekvenciához; a mikrohullámokat a vízmolekulák tehát igen erősen abszorbeálják: ez a melegítés és főzés mechanizmusának alapja.

A magnetron alumínium hűtőbordái a túlhevülést meggátolandó a többlethőt a környezetnek adják le. A tápfeszültséget bevezető huzalokkal egy-egy kis induktivitású tekercset sorba kapcsolnak, ezzel lehet meggátolni azt, hogy a huzalok mikrohullámú energiát vezessenek vissza a tápegységbe. A mikrohullámok a magnetron másik végén lévő üreges hullámvezetőn távoznak.

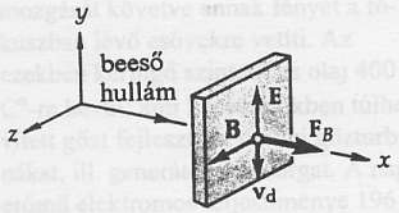
35.6 Az elektromágneses hullámok impulzusa

Mint megmutattuk, az elektromágneses hullámban energia terjed. Most azt mutatjuk meg, hogy a hullámnak impulzusa is van. Először azt mutatjuk be, hogy az elektromágneses hullám töltött részecskére a hullám terjedésének irányába eső erőt gyakorol, annak ellenére, hogy mind az **E** elektromos térerősség, mint pedig a **B** mágneses indukció *transzverzális* (azaz a terjedés irányára merőleges). Tehát, ha elektromágneses hullám lép kölcsönhatásba valamely (elektronokat tartalmazó) anyaggal, akkor annak (hullámterjedés irányú) impulzust ad át. A kölcsönhatás részletei nagyon érdekesek.

Tekintsünk egy, az x tengely pozitív irányában haladó elektromágneses hullámot (35-18 ábra) amely véges vezetőképességű anyagból készült lemezben szabadon mozgó elektronra hat. Tételezzük fel, hogy a lemezben az elektromos tér a $\pm y$, a mágneses tér pedig a $\pm z$ irányban oszcillál, vagyis

$$\mathbf{E} = \left(E_0 \sin \omega t\right)\hat{\mathbf{y}} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{B} = \left(B_0 \sin \omega t\right)\hat{\mathbf{z}} \qquad (35\text{-}51)$$

Az elektromos erőtér hatására a $-e$ töltésű elektron függőlegesen mozog az anyagban. Jelen céljainknak megfelel, ha az elektron mozgását a v_d driftsebességgel jellemezzük, vagyis mintha viszkózus közegben mozogna. Így



35-18 ábra
Az elektromágneses hullám a vezető lap elektronjaira erőt gyakorol. Az átlagos eredő $\mathbf{F}_B$ erő iránya megegyezik a hullám terjedési irányával.

$\mathbf{F}_E = b\mathbf{v}_d$, ahol b egy állandó és $\mathbf{F}_E$ az elektromos tér által kifejtett erő: $\mathbf{F}_E = (-eE_0 \sin \omega t)\,\hat{\mathbf{y}}$. Ezen képletek kombinációjával a következő kifejezéshez jutunk:

$$\mathbf{v}_d = -\left(\frac{eE_0}{b}\sin\omega t\right)\hat{\mathbf{y}} \qquad \textbf{(35-52)}$$

Vegyük észre, hogy az elektron sebessége és az elektromos térerősség mindig pontosan ellentétes fázisúak. A mozgó elektronra mágneses erő is hat:

$$\mathbf{F}_B = -e\left(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}\right) \qquad \textbf{(35-53)}$$

A $\mathbf{v}_d$ és a $\mathbf{B}$ fenti kifejezését ebbe a képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}_B = -e\left(\frac{-eE_0}{b}\sin\omega t\right)\hat{\mathbf{y}} \times \left(B_0 \sin\omega t\right)\hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{e^2E_0B_0}{b}\sin^2\omega t\right)\hat{\mathbf{x}} \qquad \textbf{(35-54)}$$

Minthogy a $\sin^2 \omega t$ tényező mindig pozitív, *az elektronra mindig +x irányú – tehát a hullám terjedésével azonos irányú – erő hat.* A vezető anyagból készült lemezre ható erő az elektronokra ható erők eredője.

Annak során hogy az elektromágneses hullámok az elektronokat a véges vezetőképességű anyagban mozgatják, az elektronok a súrlódási munkának megfelelő energiát vesznek fel (abszorbeálnak) a hullámból. Az energiaátadás sebessége

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{v}_d$$

ahol U az elektron által felvett energia. $\mathbf{F}_E$ és $\mathbf{v}_d$ fenti kifejezését behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dU}{dt} = \left(-eE_0 \sin\omega t\right)\hat{\mathbf{y}} \cdot \left(\frac{-eE_0}{b}\sin\omega t\right)\hat{\mathbf{y}} = \frac{e^2E_0^{\,2}}{b}\sin^2\omega t \qquad \textbf{(35-55)}$$

Minthogy $E = cB$, az energiafelvétel sebessége másként

$$\frac{dU}{dt} = c\left(\frac{e^2E_0B_0}{b}\sin^2\omega t\right). \qquad \textbf{(35-56)}$$

Ezt a képletet a (35-54) formulával összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{dU}{dt} = cF_B = c\frac{dp}{dt}, \qquad \textbf{(35-57)}$$

ahol $F_B = dp/dt$, az elektronok impulzusváltozásának sebessége (a változás $+x$ irányú). Az egyenlet szerint az energiaabszorbció dU/dt sebessége egyenlő az impulzusváltozás és a fénysebesség szorzatával. Minthogy mind az abszorbeált energia, mind az elektron által felvett impulzus az elektromágneses hullámtól származik, ha az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás elvét alkalmazzuk, és a (35-57) képletet idő szerint integráljuk, azt kapjuk, hogy:

$$\int_0^U \frac{dU}{dt} = c\int_0^p \frac{dp}{dt}$$

AZ U ENERGIÁJÚ HULLÁM ÁLTAL SZÁLLÍTOTT p IMPULZUS

$$U = cp \tag{35-58}$$

Minthogy az U energiájú elektromágneses hullám impulzusa p, ha az elektromágneses hullám merőlegesen esik egy felületre, akkor arra $F = dp/dt$ erőt gyakorol. A (35-57) összefüggés alapján, ezen erő nagysága:

AZ ABSZORBEÁLÓDÓ SUGÁRZÁS ÁLTAL KIFEJTETT ERŐ

$$F = \frac{1}{c}\frac{dU}{dt} \tag{35-59}$$

Ha a sugárzás teljesen elnyelődik, az egységnyi felületre ható erő az ugyanakkora felületnek átadott energia 1/c-szerese. Az egységnyi felületre ható erőt **sugárnyomásnak** vagy *fénynyomásnak*[9] nevezzük. Minthogy a Poynting-vektor nagysága az egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladó energiával egyenlő, a sugárnyomást az alábbiakkal is kifejezhetjük:

A SUGÁRNYOMÁS (merőlegesen beeső hullám esetén)

$$\text{Nyomás} = \frac{S_{\text{átl}}}{c} \quad \text{(teljes abszorpció)} \tag{35-60}$$

$$\text{Nyomás} = \frac{2S_{\text{átl}}}{c} \quad \text{(teljes reflexió)} \tag{35-61}$$

A második egyenletben szereplő „2" azt jelenti, hogy teljes reflexió esetén az impulzusváltozás kétszer akkora, mint teljes abszorpció esetén.

35-4 PÉLDA

A 6 W/m^2 teljesítménysűrűségű elektromágneses síkhullám 40 cm^2 területű, a terjedési irányra merőlegesen elhelyezett zsebtükörre esik. (a) Másodpercenként mekkora impulzust ad át a hullám a tükörnek? (b) Mekkora erő hat a tükörre?

MEGOLDÁS

(a) A (35-45) összefüggés szerint

$$\frac{dU}{dt} = (S_{\text{átl}})(\text{terület}) = \left(6\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)(40\times10^{-4}\,\text{m}^2) = 2{,}40\times10^{-2}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

A hullám egy másodperc alatt $U = 2{,}40\times10^{-8}$ J energiát szállít a tükörhöz. A (35-58) képlet szerint a teljes visszaverődés esetén a tükörnek másodpercenként átadott p impulzus nagysága:

$$p = \frac{2U}{c} = \frac{2(2{,}40\times10^{-8}\,\text{J})}{(3\times10^{8}\,\text{m/s})} = 1{,}60\times10^{-10}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}} \quad \text{(minden másodpercben)}$$

(b) $$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1{,}60\times10^{-10}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{1\,\text{s}} = 1{,}60\times10^{-10}\,\text{N}$$

[9] A nyomásnak, impulzusnak és teljesítménynek egyaránt p vagy P a jele. E fejezetben mindhárom mennyiség szerepel; ne tévesszük őket össze.

Megjegyzések a sugárnyomásról

Sokan ismerik a Crookes-*radiométernek* nevezett játékszert (35-19a ábra). A szerkezet forgórésze tűcsapágyon könnyen mozgó lapátkerék: a függőleges fémlapok egyik oldala fekete, a másik fényes. A szerkezet légüres térben, üvegbúrában helyezkedik el. A búrában a vákuum nem tökéletes, mert a leszívatás során valamennyi levegő mindig marad benne. Fény (vagy akár egy vasaló infravörös sugárzása) hatására, a kerék pörögni kezd, mégpedig a fényes felületek irányában. A jelenséget elhamarkodottan a sugárnyomásnak tulajdoníthatnánk; ám ez a következtetés a következő három ok miatt téves:

(1) Ha a lapátokra ható forgatónyomaték a sugárnyomásból eredne, a lapátok éppen ellentétes irányban forognának. (Megmutattuk, hogy a reflektáló fényes felületre kétszer akkora sugárnyomás hat, mint az abszorbeálódó fekete felületre, ezért a kerék a fényes lapoknak háttal forogna.)

(2) Hirtelen megvilágítás hatására a lapátkerék szöggyorsulása viszonylag nagy. Az elektromágneses hullám által a lapátokra kifejtett erő sokkal kisebb annál, mint ami ekkora szöggyorsulást képes előidézni. (A 35-4 példa eredményével megbecsülhető, mekkora erő hatna a lapátkerékre izzólámpa közelében.)

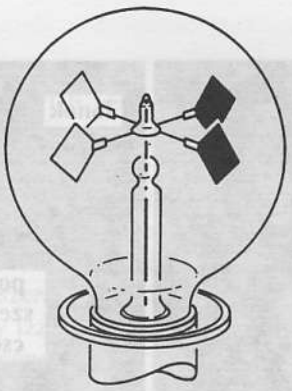
(3) Ha a búrát nagyon kis nyomásra leszívatjuk, a kerék megszűnik forogni. (A sugárnyomásból származó forgatónyomaték túl kicsi ahhoz, hogy legyőzze a kerék csapágyazásának súrlódását.)[10]

A Crookes-radiométer lapátkerekének forgására először Maxwell adott magyarázatot 1879-ben. A magyarázat azon alapul, hogy az egyenlőtlen hőmérsékletű felületek mentén a levegő a magasabb *hőmérsékletű tartomány* felé áramlik[11]. A lapátkerék esetében a levegő a lapátok éleit megkerülve a melegebb fekete oldal felé áramlik. *Ennek hatására a fekete oldalak mentén megnövekvő légnyomás forgatja a kereket.* Tipikus Crookes-radiométerben ez a hatás mintegy 10 000-szer nagyobb, mint a sugárnyomás hatása.

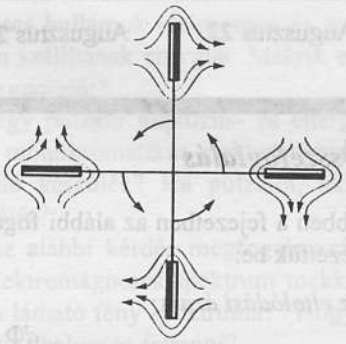
A sugárnyomásnak viszonylagos kicsinysége ellenére bizonyos esetekben lényeges hatása lehet. Például a Nap Földre gyakorolt sugárnyomása kb. 6×10^8 N erőt fejt ki. A korai ballon-műholdak (mint pl. a 60-as évek elején felbocsátott *Echo* távközlési műholdak) pályája észrevehetően módosult a napfény sugárnyomása következtében. Az űrhajók nagyméretű napelemtábláira ható sugárnyomás következtében az űrhajókra tömegközéppontjuk körüli forgatónyomaték hat.

Egyes üstökösöknek két csóvájuk van, az egyik ionizált atomokból és molekulákból áll, a másik pedig porszemcsékből (35-20 ábra). Az üstökös magjáról úgy gondoljuk, hogy jég, kövek és porszemcsék keveréke. Amint az üstökös megközelíti a Napot, a hősugarak hatására az üstökösmag felszínéről kb. méternyi vastag réteg elpárolog. A *sugárnyomás* hatására a porrészecskék a görbült, diffúz csóvában gyűlnek össze. Az elpárolgott atomok és molekulák viszont nagyobb sebességekre (egészen 100 km/s értékűre) gyorsulnak a *napszél* (a Napból többé-kevésbé egyenletesen kibocsátott töltések, főleg protonok és elektronok árama) hatására.

Becslések azt mutatják, hogy kellően nagy „vitorlákkal" felszerelt űrjárművek a sugárnyomással a Naprendszerből „kifelé" gyorsíthatók. Persze ez a módszer a fényforrástól túl messze, pl. *csillagközi* utazásokhoz nem alkalmas.



(a) A Crookes-radiométer.

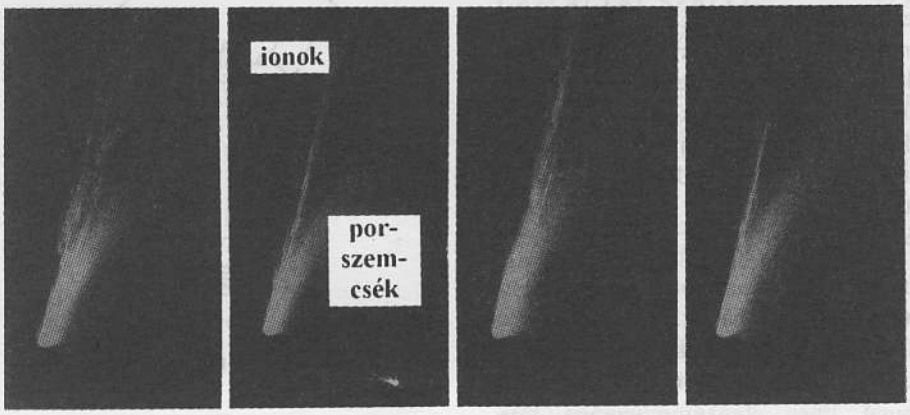


(b) A lapátok környezetében kialakuló légáramlatok felülnézetből.

35-19 ábra
A Crookes-radiométer lapátkereke fény hatására forgásba jön. A forgást előidéző forgatónyomatékot **nem** a fény sugárnyomása hozza létre.

[10] Ha a lapátkereket vékony kvarcszálra függesztik, és a búrában a nyomás nagyon alacsony, akkor a sugárnyomás hatása tényleg jelentkezik. Csak az egyik lapátot megvilágítva a torziós szálon függő kerék kissé elfordul.

[11] A radiométer mozgásának magyarázata megtalálható például E. H. Kemard Kinetic Theory of Gases McGraw-Hill, 1938. c. művében. (Magyar nyelvű irodalom erre vonatkozóan: Fizikai Kísérletek Gyűjteménye, Tankönykiadó 1992. (a fordító megj.))



Augusztus 22. Augusztus 24. Augusztus 26. Augusztus 27.

35-20 ábra
A Mrkos-üstökös az 1957-ben készült fényképeken jobbról balra mozog. Az üstökös görbült, diffúz, a haladási irányra majdnem merőleges, porszemcsékből álló csóváját a Nap sugárnyomása „fújta el". A másik, egyenes csóva ionizált atomokból és molekulákból áll, melyet a Napból kibocsátott ionok és elektronok árama: a *napszél* taszít messzebbre.

Összefoglalás

Ebben a fejezetben az alábbi fogalmakat és törvényeket vezettük be:

Az eltolódási áram:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

A négy Maxwell-egyenlet (vákuum esetében):

$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$
$\oint \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)$	$\oint \mathbf{E}\cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

A hullámegyenlet (az x tengely pozitív irányában haladó síkhullám esetében):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Szinuszos, az x tengely pozitív irányában haladó *elektromágneses hullám* esetében

$$E_y = E_{y0}\sin(kx - \omega t) \text{ és } B_z = B_{z0}\sin(kx - \omega t)$$

ahol **E** és **B** egymásra merőlegesek, így **E**×**B** a hullám terjedési irányába mutat.

A fénysebesség vákuumban $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Az elektromágneses hullámban **E** *és* **B** *vektorok kapcsolata:*

$$E_y = cB_z$$

Az elektromágneses hullám átlagos energiasűrűsége:

$$u_{átl} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{y0}^2 \quad \text{vagy} \quad = \frac{1}{2\mu_0} B_{z0}^2$$

Elektromágneses hullámban az energiaáramsűrűség (W/m² egységben):

Pillanatnyi érték: $\mathbf{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$

Átlagos érték: $S_{átl} = \dfrac{1}{2\mu_0} E_{y0}B_{z0}$

ahol **S** a *Poynting-vektor* (mértékegysége W/m²), amelynek iránya megegyezik az elektromágneses hullám terjedési irányával. Szokásos neve még: *hullámintenzitás*.

Hullámintenzitás: $S_{átl} = u_{átl}c$

Az A felületen áthaladó átlagos (W-ban kifejezett) energiaáram:

$$(\text{Energiaáram})_{átl} = \int \mathbf{S}_{átl}\cdot d\mathbf{A}$$

Az elektromágneses hullám impulzusa: Ha U elektromágneses energia elnyelése során egy test p impulzust is átvesz, akkor p és U között az

$$U = cp$$

kapcsolat áll fenn

A *sugárnyomás*: Az $S_{átl}$ sugárzási energiafluxust elnyelő testre P nyomás hat.

$$P = \frac{S_{átl}}{c} \text{ (teljes elnyelődés esetén)}$$

$$P = \frac{2S_{átl}}{c} \text{ (teljes visszaverődés esetén)}$$

Kérdések

1. Milyen egyszerű készülékkel lehetne azt bemutatni, hogy a változó mágneses erőtér elektromos erőteret kelt? Hasonlóképpen, milyen egyszerű készülékkel lehetne megmutatni, hogy változó elektromos erőtér hatására mágneses erőtér jön létre?
2. Egyszer egy fizikus laboratóriumában függőlegesen felfelé mutató irányú, és időben növekvő mágneses erőteret hozott létre. Ekkor a függőlegesen felfelé irányuló (tehát **B**-vel megegyező irányú) elektronnyaláb a mágneses erőtérben eltért a függőlegestől. Vajon mi okozta az elhajlást? Milyen információt lehetett szerezni az elhajlás mértékéből a mágneses erőtérre vonatkozóan?
3. Ellenállással sorba kötött síkkondenzátort teleppel töltünk. Hogyan függ az eltolódási áram a dielektrikum anyagi minőségétől?
4. Vajon következtethetünk-e változó mágneses erőtér által indukált elektromos erőtér nagyságából és irányából a mágneses erőtér kezdeti irányára vagy nagyságára?
5. A mágneses dipólusok és kvadrupólusok tulajdonságai a Maxwell-egyenletekkel értelmezhetők. Lehetséges-e vajon a Maxwell-egyenletekkel összeférő tulajdonságú mágneses (pl. két északi és egy déli pólust tartalmazó) tripólust konstruálni?
6. A tér valamely pontjában, bizonyos időpontban az elektromágneses hullámban mind az elektromos térerősség, mind a mágneses indukcióvektor zérus. Hogyan terjedhet tovább ebből a pontból a hullám?
7. A rádiók huzal- vagy rúdantennáit úgy tervezik, hogy a rádióhullámok az elektromos térerősség változásait és ne a mágneses erőtérváltozásait érzékeljék. Miért?
8. Tekercset irányérzékeny rádióantennaként használnak. Vajon egy ilyen antenna az elektromágneses hullám mágneses vagy elektromos erőterének változásait érzékeli? Milyen legyen a tekercs orientációja, ha a rádióadóantenna függőleges?
9. Tervezzünk olyan kísérleti berendezést, amellyel a fénysebesség – legalábbis elvileg – kizárólag időben változó erők mérésével lenne meghatározható.
10. Minthogy ε_0 és c mért értékei μ_0 definiált értékén keresztül függenek össze, hogyan kell a Maxwell-egyenleteket átrendezni, hogy azokban ε_0 és μ_0 explicit alakban ne szerepeljenek?
11. Mi a különbség egy izzólámpából és egy rádióadóból kilépő elektromágneses sugárzás között?
12. Miért nem igaz az alábbi állítás: Az elektromágneses hullám elektromos erőtere sokkal nagyobb a mágneses erőterénél, mert $E = cB$.
13. Az elektromágneses hullámok elektromos és mágneses erőterükben szállítanak energiát. Melyik erőtér tartalmaz több energiát?
14. Vajon állandó vagy pulzáló impulzus- és energiaáramot érzékel a monokromatikus elektromágneses hullámot detektáló készülék? Ha pulzálót, akkor milyen frekvenciájút?
15. Mi a helytelen az alábbi kérdés megfogalmazásában? „A teljes elektromágneses spektrum mekkora hányadát jelenti a látható fény spektruma?" Hogyan kellene ezt a kérdést helyesen feltenni?
16. Milyen értelemben hasonlít az elektromágneses hullám egy részecskenyalábhoz?
17. A Crookes-radiométer lapátkereke úgy forog, hogy a lapátok fényes felülete halad elöl, a fekete pedig hátul. Ez éppen ellentétes azzal az iránnyal, amit a sugárnyomás idéz elő. Lehet-e és vajon miként lehet a kereket ellenkező irányban forgatni (persze a lapátkerék módosítása nélkül)?
18. Ideális telep kondenzátort V feszültségre tölt fel. Az áramkör összes vezetékei szupravezetőből készültek, így az áramkör ellenállása zérus. A telepet Q töltés hagyta el, V potenciálkülönbségen, így a telep QV energiát adott le. A kondenzátor $1/2QV$ energiát vett fel. Hová lett a telep által leadott energia másik fele?

Feladatok

35.2 Az eltolódási áram és a Maxwell-egyenletek

35A-1 Mekkora utat tesz meg a fény 1 ns alatt?

35B-2 Síkkondenzátor lemezei 10 cm átmérőjűek és 1 mm-es távolságban vannak egymástól. mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor szélénél, ha a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség 1000 V/s sebességgel nő? (Az elektromos erőtér inhomogenitását a lemezek szélénél el lehet hanyagolni.)

35B-3 Mutassuk meg, hogy az $i_d = \varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ eltolódási áram valóban áramerősség-dimenziójú.

35B-4 Egy 0,5 μF-os síkkondenzátort 100 Ω-os ellenálláson keresztül 9 V-os telepről töltünk. Számítsuk ki a kondenzátoron átfolyó eltolódási áramot a töltés megkezdése után 50 μs eltelte után.

35B-5 Mutassuk meg, hogy a síkkondenzátor lemezei között folyó eltolódási áram az $i_d = CdV/dt$ formulával adható meg, ahol C a kondenzátor kapacitása és dV/dt a kondenzátor feszültségének változási sebessége.

35B-6 Párhuzamos körlemezekből álló kondenzátort töltünk. Vázoljuk fel a mágneses indukcióvektor nagy-

ságának a változását a kondenzátor tengelyétől vett távolság függvényében (a lemezek szélén túl is; e tartományban az elektromos erőtér inhomogenitásának hatását hanyagoljuk el).

35B-7 Az R sugarú párhuzamos körlemezekből álló kondenzátor kapacitása C. A lemezek közötti potenciálkülönbség állandó dV/dt sebességgel változik. Feltételezve, hogy a lemezek széleinél az elektromos tér inhomogenitása elhanyagolható, mutassuk meg, hogy a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor tengelyétől vett távolság függvényében az alábbi függvények szerint változik: ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt\times10^{-7}$; ha $r > R$: $(2C/r)dV/dt\times10^{-7}$ (ahol az egyes mennyiségek SI egységekben adottak).

35.3 Elektromágneses hullámok

35A-8 Elektromágneses hullám mágneses indukcióvektorának az amplitúdója vákuumban 3×10^{-8} T. (a) Számítsuk ki a megfelelő elektromos térerősség amplitúdóját. (b) Ha az elektromos térerősség $-y$ irányú és a hullám a $-x$ irányban terjed, milyen irányú vajon a mágneses indukcióvektor?

35A-9 Mutassuk meg, hogy az $E = cB$ képlet dimenzió szerint helyes.

35A-10 Elektromágneses síkhullám elektromos térerősségének az amplitúdója 25 V/m. (a) Számítsuk ki a mágneses indukcióvektor amplitúdóját. (b) Mekkora a frekvencia, ha a hullámhossz 2,80 m? (c) Írjuk fel a hullám elektromos komponensét leíró, $E = E_m \sin(kx - \omega t)$ alakú összefüggést konkrét SI mértékegységű számértékekkel.

35B-11 A $\mu_0 E/B$ hányados impedancia dimenziójú. A vákuumban terjedő elektromágneses hullám esetében ezt a hányadost a vákuum karakterisztikus impedanciájának nevezzük. Mutassuk meg, hogy SI mértékegysége ohm, és számítsuk ki számértékét.

35.5 Az elektromágneses hullámok energiája

35B-12 A Föld mágneses terének tipikus fluxussűrűsége 50 μT. Számítsuk ki, milyen intenzitású elektromágneses hullámban ekkora a mágneses indukcióvektor amplitúdója.

35A-13 Az URH rádió által vett elektromágneses hullám elektromos térerősség-komponensének amplitúdója 5×10^{-5} V/m. (a) Mekkora az ehhez tartozó mágneses indukcióvektor amplitúdója? (b) Számítsuk ki a hullám intenzitását.

35B-14 Egy 2 mm átmérőjű rézhuzal ellenállása méterenként 5,2 mΩ. Számítsuk ki a huzal felületén (a) E_0, (b) B_0, (c) $S_{átl}$ értékét, ha a huzalon 20 A amplitúdójú váltakozó áram halad át. (Az áramsűrűséget a huzalban egyenletesnek tekinthetjük.)

35B-15 Egy $+x$ irányban terjedő elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-komponensét SI egységekben az $\mathbf{E} = 6\sin(kx - 10^{16}t)\,\hat{y}$ függvény írja le. (a) Írjuk fel a mágneses indukcióvektor jellemző képletét is. (b) Számítsuk ki a sugárzás hullámhosszát. (c) Számítsuk ki a sugárzás átlagos energiasűrűségét.

35B-16 Felhasználva a 35B-14 feladatban kapott $S_{átl}$ értékét, igazoljuk numerikusan a huzal 1 méteres szakaszára, hogy $\oint S_{átl} \cdot dA = i^2 R$.

35B-17 Impulzuslézer 4 ns hosszúságú, 2 J energiájú fényimpulzusokat ad le. A fénynyaláb átmérője 3 mm. (a) Számítsuk ki a kibocsátott fénynyaláb hosszát. (b) Számítsuk ki a fénynyaláb energiasűrűségét (J/m^3 egységben). (c) Mekkora a hullám E_0 elektromos térerősség komponensének az amplitúdója?

35B-18 Fényforrás 100 W elektromágneses teljesítménynyel monokromatikus fényt bocsát ki egyenletesen a tér minden irányában. (a) Számítsuk ki az elektromos erőtér átlagos energiasűrűségét a fényforrástól 1 m távolságban. (b) Számítsuk ki a mágneses erőtér átlagos energiasűrűségét a fényforrástól ugyanekkora távolságban (c) Számítsuk ki a hullám intenzitását ezen a helyen.

35B-19 Mutassuk meg, hogy egy szinuszos elektromágneses hullám esetében a Poynting-vektor $|\mathbf{S}_{átl}|$ átlagos értékét az elektromos térerősség E_{eff} effektív értékével az $E_{eff} = \sqrt{\mu_0 c S_{átl}}$ képlet kapcsolja össze.

35B-20 Az 1 m-es élhosszúságú kocka élei a derékszögű koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosak. A kockán egy $+y$ irányban haladó szinuszos elektromágneses síkhullám halad át, melyben az elektromos térerősség csúcsértéke 600 V/m. A λ hullámhossz olyan nagy, hogy a kockában gyakorlatilag mindig, mindenütt ugyanakkora a térerősség. (a) Számítsuk ki a kockában az elektromos erőtér energiájának maximális értékét. (b) Mekkora, és milyen irányú a B vektor ha $\mathbf{E} = E_0\,\hat{\mathbf{x}}$? (c) Számítsuk ki a kocka egyes lapjain áthaladó átlagos teljesítményt a Poynting-vektor felhasználásával.

35.6 Az elektromágneses hullámok impulzusa

35A-21 Egy 50 m átmérőjű műanyag (mylar) „léggömb"-műhold a földfelszín feletti 1000 km-es magasságú pályán kering. Mekkora, a napfény sugárnyomásából származó erő hat a műholdra? Tételezzük fel, hogy a teljes sugárzás elnyelődik.

35A-22 Egy 100 mW-os lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörre?

35A-23 Tiszta időben a Föld felszínén a napfény intenzitása 840 mW/m^2. Ha egy, a napsugarakra merőleges felület tökéletesen reflektál, mekkora rajta a sugárnyomás?

35B-24 (a) Vajon mekkora erővel hat a napfény sugárnyomása a Földre? (Tételezzük fel, hogy a Föld az ösz-

szes beeső napsugárzást elnyeli.) (b) Hasonlítsuk össze ezt az erőt a Nap gravitációs vonzóerejével.

35B-25 Egy 15 mW teljesítményű hélium-neon lézer kör keresztmetszetű fénynyalábot bocsát ki. A nyaláb átmérője 2 mm, a fény hullámhossza 632,8 nm. (a) Mekkora a nyalábban az elektromos térerősség maximális értéke? (b) Mekkora energia van a nyaláb 1 méteres szakaszában? (c) Mekkora impulzusa van a nyaláb 1 méteres szakaszának?

35B-26 Felületre merőlegesen 50 W/m^2 intenzitású sugárzás esik. A sugárzás 10%-a elnyelődik, a többi visszaverődik. Számítsuk ki a sugárnyomást.

Vegyes feladatok

35C-27 Vákuumban lévő kis fémgömbre a hozzá vezető huzalon keresztül felváltva pozitív, illetve negatív töltéseket juttatunk. A gömb töltése időben a $q = (4\ \text{pC})\ \sin \omega t$ függvény szerint változik, ahol $\omega = 2\pi f$. Számítsuk ki a gömböt körülvevő tér egy oktánsában az $i_d(t)$ eltolódási áramot (a) ha $f = 60$ Hz, illetve (b) ha $f = 60$ MHz.

35C-28 Elektromágneses síkhullám az x tengely irányában terjed. A tengely adott pontjában és adott időpontban a hullám elektromos térerőssége 7,5 V/m, és $2{,}8\times10^{16}$ V/ms sebességgel változik. (a) Mutassuk meg, hogy a megadott értékek zöld színű ($\lambda = 500$ nm) fényt jellemezhetnek. (b) Számítsuk ki ugyanezen a helyen és időpontban $\delta B_z/\delta t$ nagyságát.

35C-29 Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy az $E = E_0 e^{k(x-ct)}$ függvény kielégíti a $\delta^2E/\delta x^2 = (1/c^2)\delta^2E/\delta t^2$ hullámegyenletet. (Bármely, $f(x \pm ct)$ alakú függvény kielégíti a hullámegyenletet!)

35C-30 Az x tengely irányában 500 nm hullámhosszúságú, 60 μW/m^2 intenzitású monokromatikus fény terjed. Meghatározott időpontban a koordinátarendszer origójában a Poynting-vektor nagysága zérus. Mekkora az elektromos térerősség és mágneses indukcióvektor nagysága ugyanebben az időpontban, az x tengely mentén, 2/3 hullámhossznyira az origótól?

35C-31 Mutassuk meg, hogy az $E = E_0 f(x \pm ct)$ függvény (ahol $f(x \pm ct)$ tetszőleges alakú), kielégíti a $\delta^2E/\delta t^2 = c^2\delta^2E/\delta x^2$ hullámegyenletet.

35C-32 Mikrohullámú adó parabolaantennája 10^{-2} szteradián térszögben sugároz. Az adótól 2 km-es távolságban a mikrohullámú sugárzás elektromos térerőssége 8 V/m. Mekkora az adó teljesítménye?

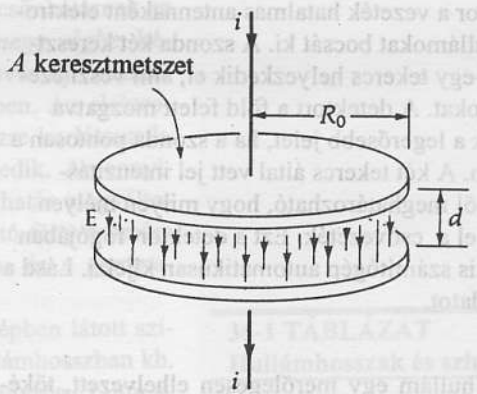
35C-33 Elektromágneses sugárzást kibocsátó forrás hosszú egyenes mentén sugároz (vonalforrás); teljesítménye méterenként 20 W. Mekkora az elektromos térerősség amplitúdója a vonalforrástól 5 m-re?

35C-34 Mekkora az előző feladatban a vonalforrástól 5 m-re az elektromágneses hullám energiasűrűsége?

35C-35 Egy űrbeli porszemcsére a Nap gravitációs vonzóereje és a sugárnyomás taszítóereje hat. Tételezzük fel, hogy a porszemcse R sugarú, $p = 2$ g/cm^3 sűrűségű gömb, mely a rá eső sugárzást teljesen elnyeli. (a) Mekkora R esetén egyenlő a gravitációs és a sugárnyomás által kifejtett erő? (A számításhoz szükséges állandók a függelékekben megtalálhatók.) (b) Miért nem lényeges a Naptól vett távolság?

35C-36 Síkkondenzátor 15 cm sugarú, egymástól 0,1 mm távolságban lévő lemezekből áll. A kondenzátort 5 MΩ-os ellenálláson keresztül 120 V feszültségű teleppel töltjük. Tekintsünk egy, a kondenzátor tengelyétől 8 cm távolságban lévő pontot. Mekkora ebben a pontban a töltés megkezdése után 1 ms elteltével (a) a mágneses indukcióvektor; (b) az elektromos térerősség és (c) a Poynting-vektor nagysága.

35C-37 Síkkondenzátort i áramerősséggel töltünk (35-21 ábra). (a) Mutassuk meg, hogy mialatt az elektromos térerősség növekszik, az **S** Poynting-vektor a lemezek közötti térben mindenütt a kondenzátor tengelye felé mutat. (A lemezek szélénél a térerősséginhomogenitásait figyelmen kívül hagyhatjuk.) (b) Ha a Poynting-vektort a kondenzátort körbevevő hengerpalást mentén integráljuk, akkor a felület által bezárt térrészbe áramló energia nagyságát kapjuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az energiaáram egyenlő a kondenzátor elektromos erőterében tárolt energia növekményével. (Ebben az értelemben, a kondenzátor energiája nem az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik".)



35-21 ábra
A 35C-37 feladathoz

35C-38 Az x irányban terjedő elektromágneses síkhullám frekvenciája 90 MHz. Az elektromos térerősség csúcsértéke 2 mV/m; $\pm y$ irányú. (a) Számítsuk ki a hullámhosszat, a periódusidőt és a mágneses indukcióvektor B_0 amplitúdóját. (b) Hogyan változik az elektromos térerősség és a mágneses indukció térben és időben? Adjuk meg a megfelelő elektromos és mágneses erőteret leíró függvényeket a konkrét értékekkel. (c) Mekkora a hullám felületegységre jutó átlagos teljesítménye? (c) Számítsuk ki a hullámban az átlagos energiasűrűséget (J/m^3 egységben). (e) Mekkora erőt gyakorolna az elekt-



35-22 ábra
Ez a hordozható szonda új módszert alkalmaz a földalatti gázvezetékek felderítésére. A csővezetékre a földből kiemelkedő egyik pontjában 80 kHz-es AC jelet adnak, s ekkor a vezeték hatalmas antennaként elektromágneses hullámokat bocsát ki. A szonda két keresztfejében egy–egy tekercs helyezkedik el, ami veszi ezeket a hullámokat. A detektort a föld felett mozgatva akkor kapjuk a legerősebb jelet, ha a szonda pontosan a cső felett van. A két tekercs által vett jel intenzitáskülönbségéből meghatározható, hogy milyen mélyen helyezkedik el a csővezeték. Ezt a detektor fogójában elhelyezett kis számítógép automatikusan kijelzi. Lásd a 35C-43 feladatot.

romágneses hullám egy merőlegesen elhelyezett, tökéletesen reflektáló felületre?

35C-39 Egy a sugarú, ρ fajlagos ellenállású anyagból készült hosszú hengeres ellenálláson váltakozó áram folyik át. (a) Mutassuk meg, hogy az **S** Poynting-vektor minden időpontban az ellenállás felületén sugárirányú és befelé mutat. (b) Integráljuk $S_{átl}$ értékét az ellenállás l hosszúságú szakaszának felületére. Mutassuk meg, hogy az integrál egyenlő az ellenállás adott hosszúságú szakaszában disszipált $I_{eff}^2 R$ hőteljesítménnyel. A számítást leegyszerűsíti, hogy a henger felületén **E** párhuzamos a tengellyel. (E számítás azt sejteti, hogy az ellenálláson hővé alakuló energia nem az ellenálláson és az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik".)

35C-40 Űrhajók hajtására a napfény sugárnyomása is felhasználható; ehhez nagy méretű, teljesen reflektáló „napvitorlák" kellenek. Tekintsünk egy űrhajót, a Föld és a Mars között félúton lévő bolygópályán. (a) Az L függelék adatait felhasználva, számítsuk ki, mekkora a napsugárzás 1 m^2 felületre eső teljesítménye. (b) Képzeljük el, hogy az űrhajóra, a Nap irányára merőlegesen beálló 900 m × 1200 m méretű, téglalap alakú, tökéletesen reflektáló lapos napvitorlát szerelnek. Mekkora az űrhajó gyorsulása, ha a teljes tömege (a napvitorlával együtt) 2900 kg? (c) Ha a vitorla orientációját megváltoztatjuk úgy, hogy a felület normálisa a napsugarakkal 28°-os szöget zárjon be, akkor mekkora és milyen irányú lesz a gyorsulás? (Megjegyzés: ha a fény ferdén éri a felületet, a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel.)

35C-41 Képzeljünk el egy űrhajóst, aki űrséta során az űrhajótól 10 m távolságban elveszíti a kapcsolatot az űrhajóval, és hogy oda visszajusson, lámpáját, mint „foton-rakétát" működteti, mindig az űrhajó felé hajtva magát. Az űrhajós kezdeti sebessége (az űrhajóhoz képest) zérus, felszereléssel együtt tömege 110 kg; a lámpája 100 W teljesítményű fényforrás, amely egyenes fénynyalábot bocsát ki. (a) Mennyi idő alatt érne vissza így az űrhajóhoz? (b) A lámpa működtetése helyett az űrhajós a 3 kg tömegű lámpát inkább eldobja. A lámpa 12 m/s sebességgel távolodik tőle. Mennyi idő alatt ér vissza az űrhajós ekkor az űrhajóhoz?

35C-42 (a) Vezessük le, milyen összefüggés van egy abszorbeáló felületre merőlegesen beeső sugárzás sugárnyomása és a sugárzás energiasűrűsége között. (b) Miért nem függ ez az összefüggés attól, hogy a felület reflektáló vagy abszorbeáló? (c) Vajon ugyanilyen összefüggést kapunk-e akkor is, ha a beeső sugárzás nem merőleges a felületre? Miért?

35C-43 Tekintsük a 35-22 ábrán látható fémdetektort. A két vízszintes vevőtekercs egymástól 50 cm távolságban, az alsó a földtől 10 cm magasságban helyezkedik el. A szondát a képen látható férfi föld alatti egyenes gázcső felett tartja, amelyre az ábraaláírásban részletezett módon AC feszültséget kapcsoltak. A felső illetve alsó tekercsben indukált AC feszültség effektív értéke 0,052 mV, illetve 0,074 mV. Milyen mélyen van a gázcső a föld alatt?

34C-43 A válasz adott.
34C-45 A válasz adott.
34C-47 2000 A/s
34C-49 A válasz adott.
34C-51 A válasz adott.
34C-53 $i = 40{,}8\sin(\omega t + 25{,}6°)$
34C-55 239 mH
34C-57 a) 100 μF b) 632 rad/s c) 125 W d) 39,5 V f) 150 μF g)párhuzamosan
34C-59 A válasz adott.

XXXV. Fejezet

35A-1 30,0 cm
35B-3 A válasz adott.
35B-7 ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$; ha $r > R$: $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$
35A-9 A válasz adott.
35B-11 377 Ω
35A-13 a) $1{,}67 \times 10^{13}$ T b) $3{,}32 \times 10^{12}$ W/m^2
35B-15 a) $(2\times10^{-8})\sin(kx - 10^{16}t)\hat{z}$ b) $1{,}88 \times 10^{-7}$ m c) $1{,}59 \times 10^{-10}$ J/m^3
35B-17 a) 1,20 m b) $u = 2{,}36 \times 10^{5}$ J/m^3 c) $E_o = 2{,}31 \times 10^{8}$ V/m
35B-19 A válasz adott.
35A-21 $8{,}97 \times 10^{-3}$ N
35A-23 $5{,}60 \times 10^{-6}$ N/m^2
35B-25 a) 1900 V/m b) $5{,}00 \times 10^{-11}$ J c) $1{,}67 \times 10^{-19}$ kg·m/s
35C-27 a) $1{,}88 \times 10^{-10}\cos 377t$ b) $1{,}00 \times 10^{-4}\cos[(3{,}77 \times 10^{-8})t]$
35C-29 A válasz adott.
35C-31 A válasz adott.
35C-33 21,9 V/m
35C-35 a) 292 nm
35C-37 A válasz adott.
35C-39 A válasz adott.
35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

XXXVI. Fejezet

36A-1 A válasz adott.
36B-3 A válasz adott.
36B-5 (30, –40), (–30, 40), (–30, –40), (cm-ben)
36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép egyenesállású, virtuális, $N = 0{,}273$
36A-9 a) 7,50 cm b) ∞
36B-11 9,23 cm
36B-13 8,00 cm
36C-15 A válasz adott.
36C-17 40,0 cm
36C-19 A válasz adott.
36C-21 ha $t = 228$ cm, a kép fordított állású, valódi és $N = -0{,}123$ ha $t = 21{,}9$ cm, a kép egyenes állású, virtuális és N = 8,12
36C-23 A válasz adott.
36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67
36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

XXXVII. Fejezet

37A-1 $n = 1{,}52$
37B-3 A válasz adott.
37B-5 0,624 cm
37B-7 a) 20,6° b) 0,400 szteradián c) 35,4°
37B-9 1,51
37B-11 2,14 szteradián
37B-13 17,0%
37A-15 R
37B-17 2,00
37A-19 3,57 mm kifelé
37A-21 26,7 cm
37B-23 $2f$
37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125
37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) –51,7 cm d) –17,24 cm
37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm
37A-31 a) 24,0 b) 48,1°
37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm
37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig
37C-37 A válasz adott.
37C-39 A válasz adott.
37C-41 A válasz adott.
37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c) 2,63 μs
37C-45 a gömbfelülettől számítva: a) $2{,}67R$ b) $1{,}80R$ c) $0{,}960R$
37C-47 A válasz adott.
37C-49 $(L^2 - 4fL)^{1/2}$
37C-51 A válasz adott.
37C-53 A válasz adott.
37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított állású kép $N = -2$ b) a lencse tárgyoldalán
37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a gyújtólencsén túl, $N = -0{,}42$
37C-59 A válasz adott.

XXXVIII. Fejezet

38A-1 5,00 mm
38A-3 1,33 mm
38B-5 A válasz adott.
38B-7 a) 1034,4827 b) 62,1°
38B-9 6
38B-11 sötét
38B-13 a) $2{,}73E_o$, 30° b) $2E_o$, 60° c) 0, definiálatlan
38A-15 a) 105 nm b) 1,30
38A-17 199 nm

GEOMETRIAI OPTIKA I. – A FÉNYVISSZAVERŐDÉS

Tükörbe nézve csak egy lehetetlen,
arcod akárhogy fordítod,
Azt látni, milyen vagy te, mint ember,
ha valós magad látni nem akarod.

PIET HEIN
(Farkas László fordítása)

36.1 Bevezető

Amikor a fény sima tükröző felületről visszaverődik, a visszavert sugarakból kép is kialakulhat. Ebben a fejezetben bennünket ennek a kölcsönhatásnak az *eredménye* érdekel, azt, hogy ez a kölcsönhatás *miképpen megy végbe*, később fogjuk tárgyalni. Ezért ebben a fejezetben aránylag kevés új fizikáról lesz szó, viszont több geometriáról, mint az előző fejezetekben. Az elektromágneses sugárzás tárgyalását a látható tartományba eső részre korlátozzuk, amelyben tetszőleges rezgésszámú hullám ugyanúgy viselkedik. Amennyiben a színkép látható részén messzire túlmegyünk, a kölcsönhatás megváltozik. Így például az a vékony alumíniumlemez, amely a látható fény számára tükröző felület, lényegében átlátszónak bizonyul a röntgen- és a gammasugarak számára.

A látható fény hullámhossztartománya kiterjed a színképben látott színek teljes sorozatára, a mély ibolyától a sötét vörösig, ez hullámhosszban kb. 400 nm-től 700 nm-ig terjed. A **nanométer** (nm) hosszegység, ($1\text{nm} \equiv 10^{-9}\,\text{m}$,) az a szokásos mértékegység, amellyel a látható fény hullámhosszát mérjük. Normális látású ember már alig tud megkülönböztetni két olyan színt, amelynek a hullámhossza 1 nm-rel különbözik egymástól.[1] Egy másik hosszegység, amit általában a spektroszkópusok használnak, az *angström*, (Å), ($1\text{Å} \equiv 10^{-10}\,\text{m}$), de ezt fokozatosan kiszorítja a nanométer. A 36-1 táblázat a látható fény színképét mutatja az egyes színtartományokat jellemző hullámhosszak közelítő értékének feltüntetésével.

Ahogyan a legutolsó fejezetben tárgyaltuk, az elektromágneses sugárzás forrásai, alapjában véve, a *gyorsuló töltések*. Amennyiben megfontolásainkat a látható fény előállítására korlátozzuk, a forrás gyakran egy forrón izzó test, pl. izzólámpa izzószála, amelynek tipikus hőmérséklete kb. 3000 K. Szilárd

36-1 TÁBLÁZAT
Hullámhosszak és színek

Hullámhossz (nm)	Szín
420	Lila
470	Kék
520	Zöld
570	Sárga
620	Narancs
670	Piros

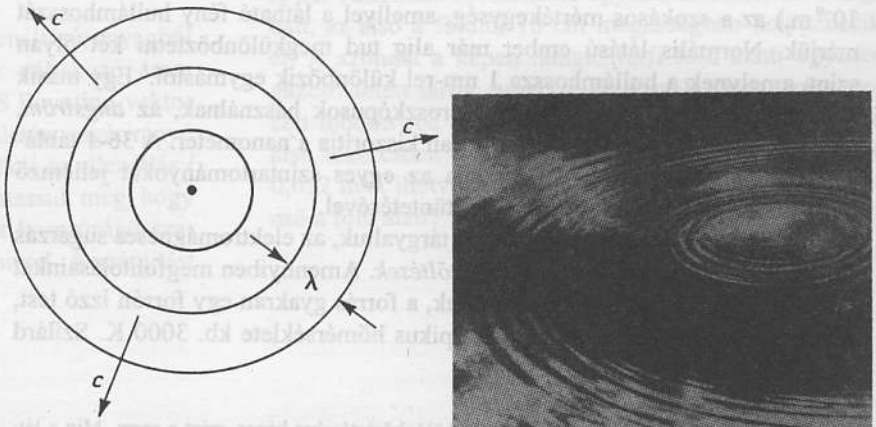
[1] Az emberi fül sok tekintetben jobb megkülönböztetésekre képes, mint a szem. Míg a látható fény alig fog át egy oktávot (a frekvenciában ez egy kettes szorzót jelent), a hallható hang hullámtartománya mintegy 10 oktáv, és a legkisebb érzékelhető változás a hangmagasságban egy cent, ahol is egy oktáv 1200 centből áll.

testekben hőmozgást végző atomok és molekulák olyan sugárzást bocsátanak ki, amely sokféle hullámhossz keveréke. A hullámhossz többnyire az infravörös tartományba esik, az energiának csupán kis százaléka jut a látható tartományba. Az *ívfény* különösen erős fényforrás, amely akkor alakul ki, amikor egymástól csupán néhány milliméterre széthúzott szénrudak között egyenáramú elektromos kisülés jön létre (ívfény fémrudak között is létrejöhet; *a fordító megjegyzése*). Az egyik rúdvégbe ütköző elektronok hatására ott kb. 4000 K hőmérséklet alakul ki, aminek eredménye az erős fehér fényt kibocsátó forrás létrejötte. Az ívfény különösen alkalmas arra, hogy vetítőgépekben és erős reflektorokban használják. Az üvegcsőbe zárt fénygőzön keresztül kialakuló *ívkisülés* eredménye a közvilágításra használt higanygőzlámpa kékeszöld és a nátriumlámpa autóutakról ismert sárgás fénye. A fénycsövekben argongáz-higanygőz keverékben jön létre elektromos kisülés; az itt keletkező ibolyántúli sugárzást a fénycső belső falán vékony rétegben felvitt ún. fénypor elnyeli, majd az elnyelt energiát látható fény formájában újra kibocsátja, azaz *fluoreszkál*. A *lézerek*, ezek a legutóbbi évtizedek során kifejlesztett fényforrások keskeny, különleges nyalábban rendkívül intenzív és közelítőleg *monokromatikus* (egyszínű) sugárzást bocsátanak ki. Ez lényegében egyetlen hullámhosszúsággal jellemezhető. A lézerekről a 39. fejezetben lesz szó.

36.2 Hullámfrontok és fénysugarak

Ennek a bevezető tárgyalásnak a céljára tekintsünk egy *pontszerű fényforrást*, mely *egyetlen* λ hullámhosszúságú fényt bocsát ki. Ha ettől a pontforrástól távolodó gömbhullámok metszetét vizsgáljuk, akkor ahhoz hasonlót kapunk, amit a tó vízfelszínén fel-le mozgatott kisméretű tárgy segítségével kelthetünk: köralakú hullámzást, ami a hullámforrástól kifelé terjed. Az elektromágneses hullámok *elektromos* térerősségének változásait a vízfelszíni hullámok hegyeivel-völgyeivel hasonlíthatjuk tehát össze, ahogyan azt a 36.1 ábra is teszi.

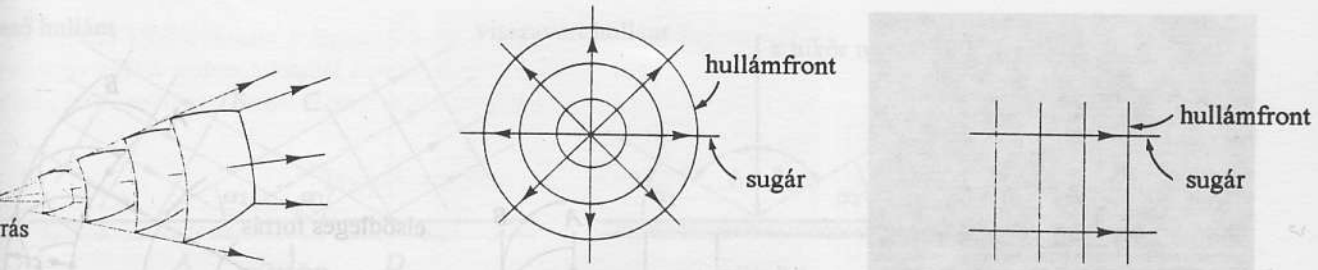
A hasonlóság a vízhullámok és az elektromágneses hullámok között több, mint pusztán geometriai. Kiterjed más tulajdonságokra is. Például az elektromágneses hullámok elhajlanak akadályok mellett, ahogyan a vízhullámok is elhajlanak a hullámtörő gát végénél. Ha az akadályon van egy rés, *apertúra*, akkor a hullámok a rés mögött szétterülnek, ez a *diffrakciónak* nevezett jelenség (39. fejezet). Az elhajlás nagysága függ a résnek a hullám-



(a) pontforrásból kifelé terjedő gömbhullám sematikus képe

(b) körhullámok a víz felszínén

-1 ábra
pontszerű fényforrásból kibocsátott
y gömbhullámainak síkmetszete ha-
ló a vízfelszín egy pontjában keltett
hullámokhoz.



(a) A pontforrásból kiinduló gömbhullám-front részletek.

(b) A pontforrásból kiinduló gömbhullám-frontok szokásos ábrázolása.

(c) Jobbra haladó síkhullámok.

-2 ábra

sugarak merőlegesek a hullámfrontokra. A nyilak a hullámfront terjedési irányát mutatják.

sszhoz viszonyított méretétől. (Minél inkább megközelíti a rés szélessége a lámhosszat, annál nagyobb az elhajlás). De a diffrakciójelenségeket egy őbbi fejezetre halasztjuk és itt csak azokat az eseteket tárgyaljuk, ame-knél a rés – vagy az akadály – mérete nagy a hullámhosszhoz képest és az elhajlás és szétterülés hatásaitól kicsinységük miatt eltekinthetünk. Ez özelítés kiválóan megfelel tükrök, lencsék, prizmák és más optikai beren-ések, pl. teleszkópok (távcsövek) és mikroszkópok elemzésére.

A pontforrásból kibocsátott fényhullámok esetében a táguló gömbfelü-minden pontjában a *hullám fázisa ugyanakkora*; Az azonos fázisú felületet **lámfrontnak** nevezzük. Vázlatkészítéskor gyakran ábrázoljuk a hullám-ntokat vonalakkal, mint a 36.1a. ábrán. Tanácsos azonban észben tartani, y az elektromágneses hullámok hullámfrontjai *felületek*. Az az irány, erre a hullámfront terjed, mindig merőleges a magára hullámfrontra. Bár-y vonalat, amely merőleges a hullámfrontra, **sugárnak** nevezünk, a su-ra helyezett nyíl a terjedés irányát mutatja. A 36-2b ábrán bemutatunk ány sugarat, mely a pontszerű fényforrásból kiinduló gömbhullám-ntokkal kapcsolatos. A forrástól nagyon nagy távolságban a hullámfrontok vegében *síkká* válnak, mivel a gömbfelületek sugara nagyon nagy lesz. ha hasznos lehet, ha a hullámfrontokat egy hullámhossznyi távolságra oljuk fel egymástól, bár ennek nincsen különösebb jelentősége. Ahogyan d megmutatjuk, a pontforrásból kiinduló két sugár elegendő lesz az opti-rendszerek elemzéséhez.

36-3 ábra

A napsugár fénynyalábjai azt a benyomást keltik, hogy a fénysugarak széttartó egyenes vonalakban haladnak. A fénynyalábok a valóságban párhuzamosak, csak perspektivikus okokból látszanak széttartónak.



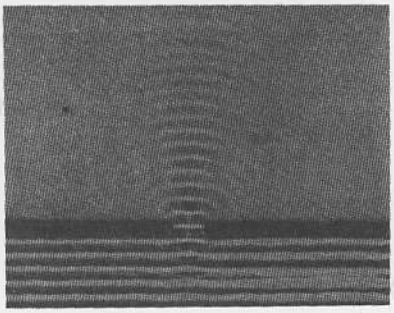
.3 A Huygens-elv

optikai rendszerek elemzésének hasznos módszerét dolgozta ki Christian gens (1629-1695) holland fizikus és csillagász. A következőket javasol-

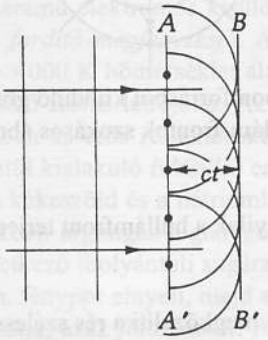
HUYGENS-V

A hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető. Az elemi hullámok a fény sebességével terjednek tova. Egy későbbi *t* időpontban a hullámfront új helyzetét az elemi hullámok burkolója adja meg.[2]

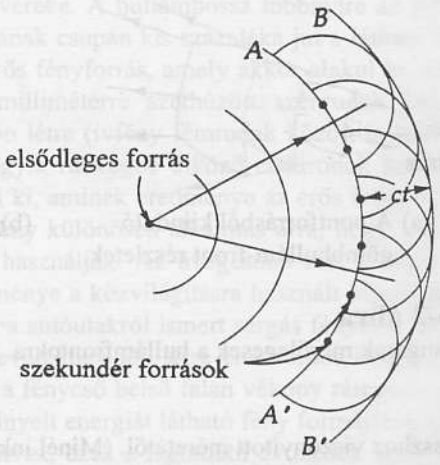
Az eljárás kissé mesterkélt. Ha a hullámfronton valamennyi pont valóban pontforrás lenne, kkor az elemi hullámoknak nemcsak a hullámfront haladásának irányába előre, hanem átrafelé is kellene terjedniük. Ez utóbbit Huygens figyelmen kívül hagyta. Egy bonyolul-abb leírásból, amit később Kirchhoff adott meg, kiderült, hogy a hátrafelé kibocsátott su-gárzás interferencia miatt kioltódik. Erről a 38. fejezetben lesz szó.



(a) Síkhullámok hullámkádban. A síkhullám olyan gáthoz érkezik, amelyiken a hullámhosszhoz képest kis nyílás van. Huygens elvével összhangban ez a nyílás szekundér hullámok forrásaként viselkedik, a gát túloldalán körhullámok jelennek meg.



(b) síkhullámfrontok



(c) Gömbhullámfrontok.

36-4 ábra

Huygens-elv. Az AA' hullámfrontot elemi hullámok kibocsátására alkalmas pontforrások sorozatának tekintjük. A t idő elteltével ezek a szekundér hullámok ct távolságra jutnak el. Ezeknek a szekundér hullámoknak az eredője a BB' hullámfront. A nyilak a hullámterjedés irányát mutatják

A 36-4 ábra bemutatja az eljárást. Az AA' hullámfront minden pontja pontforrásnak tekinthető, mindegyikből új, másodlagos (szekundér) elemi hullámok indulnak ki. Egy későbbi t időpontban ezeknek az elemi hullámoknak a burkolója a BB' hullámfront. Az eljárás nemcsak a sík- és a gömbhullámfrontok esetén, hanem tetszőleges alakú hullámfront esetében is működik.

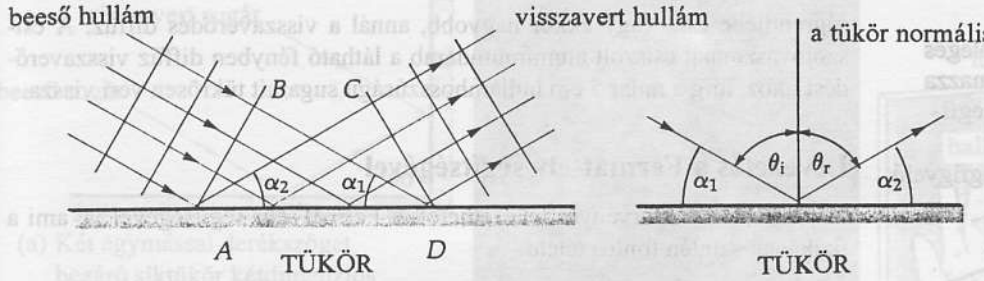
36.4 A fényvisszaverődés síktükrön

A tükrökön tapasztalt fényvisszaverődés törvényét minden bizonnyal már Platón korában, az i.sz.e. 4. században is ismerték. Itt most két módszerrel is levezetjük ezeket a törvényeket, mindkét módszer a fizika egy-egy fontos elvét világítja majd meg.

Levezetés a Huygens-elv segítségével

Gyakran ugyanabban az értelemben beszélünk arról, hogy belenézünk egy tükörbe, ahogyan benézünk egy szobába. A képeket úgy látjuk, mintha azok bizonyosan a tükör másik oldalán lennének. Minden gyerek kíváncsi volt már arra, hogy milyen lehet átmenni a tükrön abba a másik világba, amely kölcsönösen és egyértelmű összefüggésben van a valódi világ dolgaival. Milyen távol van a tükör mögött egy adott tárgy képe? Tekintsünk egy síkhullámot, amely a tükörhöz érkezik, ahogyan a 36-5a ábra mutatja. A beeső AB hullámfronthoz tartozó sugarak a tükör felületével α_1 szöget alkotnak. Ahogyan a beeső elektromágneses hullám egyes részei a tükröt érik, a tükör felületének elektronjait rezgésbe hozzák. Ezek a rezgő elektronok elektromágneses hullámokat bocsátanak ki, így mindegyikük másodlagos hullámok forrásává válik.[3]

[3] Úgy tűnhet, hogy Huygens elgondolása, mely szerint a szabad térben a hullámfront minden pontja elemi hullámok kiindulópontja, csak ügyes trükk, amely elvezet a helyes eredményhez. Amikor azonban közeg is jelen van, amelyben a rezgő elektronok játsszák az újra kisugárzott hullámok forrásának szerepét, ez az elgondolás valóban hihetőnek és olyannak mutatkozik,



(a) A CD visszavert hullámfrontot azoknak az elemi hullámoknak a burkolója alkotja, amelyek a tükör felületén keletkeztek.

(b) A beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel: $\theta_i = \theta_r$

36-5 ábra
Síkhullám visszaverődése síktükrön.

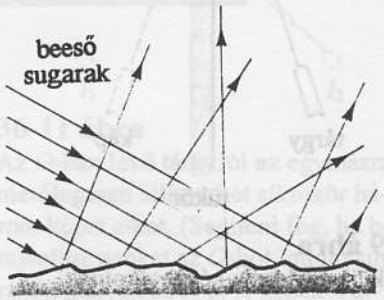
Vizsgáljuk meg közelebbről a 36-5 ábrán bemutatott visszavert hullámfrontokat! Amint az *AB* hullámfront *A* pontja a tükör felületét eléri, az *A* pontból körhullám terjed a *CD* visszavert hullámfront *C* pontja felé. Ezalatt a *B* pontból induló hullám folytatja útját a tükör *D* pontjáig. Ha a hullámvonulatnak az *A* és a *C* közötti út megtételéhez ugyanakkora idő kell, mint a *B* pontból indulónak a *D*-be éréséhez, akkor a *C* és *D* pontok azonos fázisban lesznek és így mindketten a visszavert hullámfronthoz tartoznak. Természetesen a tükör az *A* és *B* pontok közötti tetszőleges pontból induló elemi hullámokat a *C* és *D* pontok közötti megfelelő pontba veri vissza. Ennélfogva az *AC* és a *BD* távolságok egyenlőek, az *ABD* derékszögű háromszög pedig egybevágó az *ACD* derékszögű háromszöggel. (Közös az AD átfogójuk és a megfelelő oldalaik egyenlőek. Ezért az α_1 és α_2 szögek egyenlőek.) Ebből következik, hogy θ_i, ill. θ_r, pótszögeik is egyenlőek. Az optikában az a szokás, hogy a szögeket a felületre merőleges, *normális* iránytól mérjük. Ezért a 36-5b ábrán is látható módon a θ_i *beesési szög* és a θ_r *visszaverődési szög* egyenlő. Továbbá, ha az elemzést a háromdimenziós térben hajtjuk végre, megmutatható, hogy a beeső sugár, a tükör normálisa és a visszavert sugár egy síkban fekszenek.

A FÉNYVISSZAVERŐDÉS TÖRVÉNYEI

(1) A beesési szög és a visszaverődési szög egyenlő: $\theta_i = \theta_r$

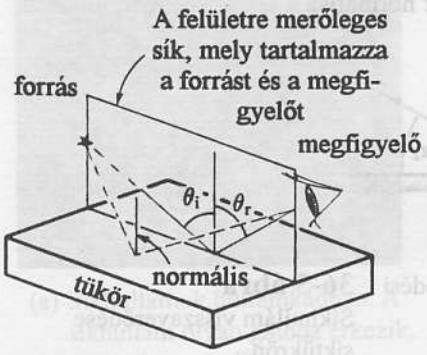
(2) A beeső sugár, a tükör normálisa és a visszavert sugár egy síkban fekszik.

Ha a felület rücskös, mint a 36-6 ábrán látszik, a párhuzamosan érkező sugarak különböző szögekben verődnek vissza. Ezt a visszaverődési típust, a *diffúz* (szórt) visszaverődést mutatja az a papírlap is, amit most Ön éppen olvas. Bár a lap megvilágítása egy olvasólámpából kiinduló, lényegében párhuzamos sugarakkal történik, a lap minden irányból olvasható. A legtöbb önállóan nem világító tárgy a diffúz visszaverődés következtében látható. A diffúz és a *tükrös* visszaverődés közti különbség a felületi egyenetlenségeknek a megvilágító fény hullámhosszához viszonyított méretétől függ. Ha az egyenetlenségek a fény hullámhosszához képest kicsik, akkor tükrös visszaverődés következik be. Ha a szabálytalanságok mérete a hullámhossz nagy-

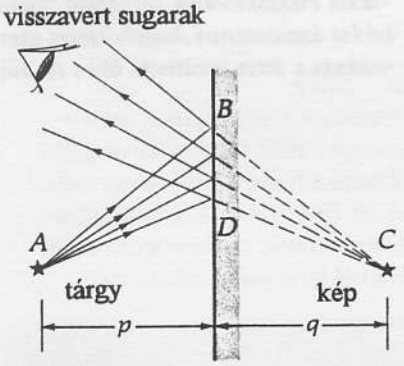


36-6 ábra
Diffúz visszaverődés esetén a párhuzamosan érkező sugarak a felület egyenetlenségei miatt különböző irányokban verődnek vissza.

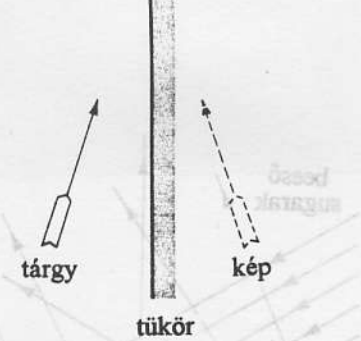
amely az elektromágneses hullámok és az anyagi közeg kölcsönhatását helyesen írja le. Huygens idejében azt hitték, hogy a fényt hordozó közeg - az éter, ahogyan akkor nevezték - mindenütt jelen van, még a vákuumban is. Ezért könnyű megérteni, hogy hogyan is született Huygens elve. Természetesen Einstein nyomán a mai fényelmélet már nem használja az éter fogalmát.



36-7 ábra
Fermat elve: a fénysugár úgy verődik vissza, hogy a fényforrás és a megfigyelő közti teljes utat minimális idő alatt tegye meg.



36-8 ábra
A síktükör a tükör mögött alkot képet, ugyanolyan távolságban a tükörtől, mint amennyivel a tárgy van a tükör előtt.



36-9 ábra
A síktükrök olyan képet alkotnak, mely a tükörtől – a tükör mögött – ugyanolyan távol van, mint a tükör előtt a tárgy. A kép ugyanakkora, mint a tárgy.

ságrendjébe esik vagy akkor nagyobb, annál a visszaverődés diffúz. A csiszolóvászonnal csiszolt alumíniumdarab a látható fényben diffúz visszaverődést okoz, míg a radar 5 cm hullámhosszúságú sugarait tükrösen veri vissza.

Levezetés a Fermat-elv segítségével

A visszaverődés törvényei levezethetők a Fermat[4]-elv segítségével is, ami a fizikának szintén fontos tétele.

A FERMAT-ELV **A fénysugár egyik pontból a másikba olyan úton terjed, amely ugyanannyi vagy kevesebb időt vesz igénybe, mintha bármely más úton haladna.**

Illusztrációképpen alkalmazzuk a Fermat-elvet a 36-7 ábrán látható esetre. A fényforrás és a megfigyelő a síktükörre merőleges síkban van. A szaggatott vonal egy tetszőleges fénysugarat ábrázol. Világosan látszik, hogy a kiválasztott út nem a legrövidebb a forrástól a megfigyelőig, ezért a fény nem is teszi meg a legrövidebb idő alatt. Míg nyilvánvalónak látszik, hogy a legrövidebb út (a kihúzott vonal) abba a síkba esik, amely a tükör normálisát tartalmazza, továbbá az is igaz, hogy a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel. Az utóbbi állításnak a Fermat-elvvel való bebizonyítását feladatként az olvasóra bízzuk.

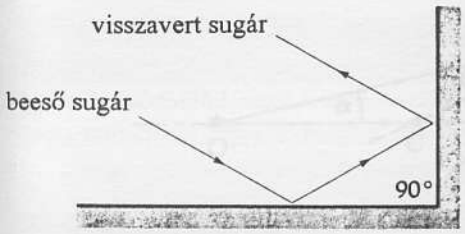
Térjünk most vissza ahhoz a kérdéshez, amit a fejezet elején vetettünk fel. Milyen messze van a tükör mögött a tárgy képe? A válasz érdekében szerkesszünk néhány sugarat a visszaverődés törvényeinek megfelelően! A 36-8 ábra az A (★) forrásból kiinduló és a tükör által visszavert sugarakat mutatja. A visszavert sugarak meghosszabbításai a tükör mögötti *C* pontban metszik egymást, ezért olyan benyomásunk támad, mintha onnan indulnának ki. Ez az *A* fényforrás képe. (Bár mi az ábrán három sugármenetet rajzoltunk, a *C* pont kitűzéséhez már kettő is elegendő.) A tárgyalás megkönnyítésére a következő jelölést vezetjük be. Legyen a *t tárgytávolság*, a tárgynak a tükörre merőleges egyenes mentén a tükörtől vett távolsága, a *k képtávolság* pedig a képnek a tükör síkjára merőlegesen mért távolsága a tükörtől. A visszaverődés törvénye szerint az ábrán felvett sugarak az ábra síkjában fekszenek, valamint nyilvánvaló, hogy az *ABD* háromszög egybevágó a *CBD* háromszöggel. (Van ugyanis közös oldaluk, a *BD*, és a háromszögek másik két megfelelő oldala a *BD* oldallal egyenlő szöget zár be.) Így:

A KÉP HELYE SÍKTÜKRÖKNÉL **A *k* képtávolság egyenlő a *t* tárgytávolsággal**

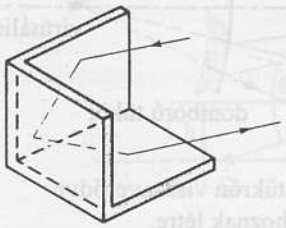
Ezt a következtetést pontszerű tárgyra vonatkozóan nyertük.

Véges kiterjedésű tárgy felfogható pontszerű fényforrások eloszlásaként, melyek mindegyikének meglesz a saját képe. Így fennáll a tárgy és tükörképe közti kölcsönösen egyértelmű összefüggés. Minthogy minden egyes tárgypontra és képére $t = k$, a tárgy és a kép a tükör két oldalán szimmetrikusan helyezkedik el, amint azt a 36-9 ábra mutatja.

[4] A modern valószínűségszámítást Pierre de Fermat (1601-1665) francia nemesember alkotta meg a szerencsejátékok iránti érdeklődése miatt. A Fermat-elv mellett nevezetes még a Fermat-sejtésről is, melynek bizonyítása még mindig ellenáll a matematikusok erőfeszítéseinek. Egy, a halála után előkerült jegyzetében, amit egy könyv margójára írt, azt állította, hogy bebizonyította, hogy az *xyz* egész számok körében az $x^n + y^n = z^n$ összefüggésnek nincsen nemtriviális megoldása $n > 2$ esetére. Mind a mai napig senki nem tudta igazolni, vagy cáfolni ezt az állítást.

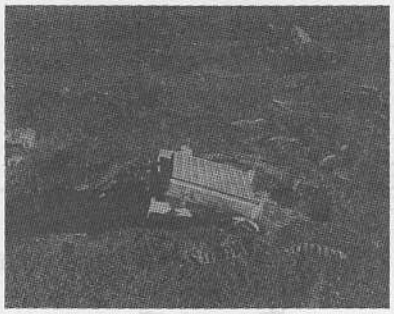


(a) Két egymással derékszöget bezáró síktükör kétdimenziós saroktükröt alkot olyan sugarakra vonatkozóan, melyek a tükrök síkjára merőleges síkban haladnak. Két visszaverődés után bármely beeső sugár önmagával párhuzamosan, a forrás felé indul vissza.

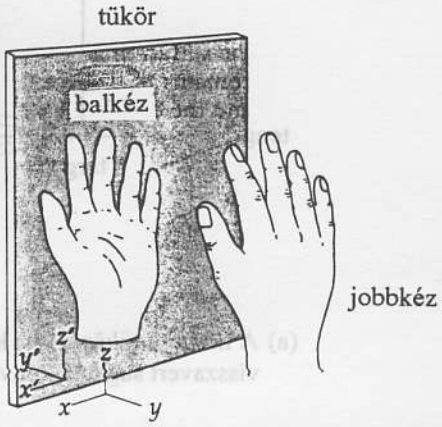


(b) A három, egymásra kölcsönösen merőlegesen elhelyezett tükör (háromdimenziós saroktükör) a beeső fénysugarakat a beesési iránnyal párhuzamosan veri vissza. A járművekre szerelt „macskaszemek" ilyen saroktükrök százaiból állnak.

36-12 ábra
Saroktükrök



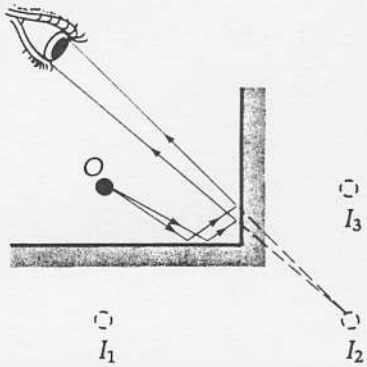
(c) Laser Rangingretro Reflector (LRRR), lézeres távmérő visszaverőrendszer a Holdon. Az Apollo asztronautái három 45,72 cm oldalhosszúságú négyzet alakú egyenként 100 saroktükröt tartalmazó tükröt helyeztek el a Holdon, míg a negyediket egy orosz űrhajó telepítette. Több földkörüli pályán közlekedő űrhajón is voltak saroktükrök. A Földről a tükrökhöz indított lézer impulzusok oda-vissza útjának ideje olyan pontosan mérhető, hogy a Föld-LRRR távolságot mindössze néhány cm-es hibával meg lehetett határozni. Ezáltal lehetővé vált olyan hosszútávú vizsgálatok megkezdése, amelyek a Föld és a Hold relatív mozgásának finomszerkezetét tárják majd fel. A kontinensek elmozdulását ma már közvetlenül vizsgálják ezzel a technikával.



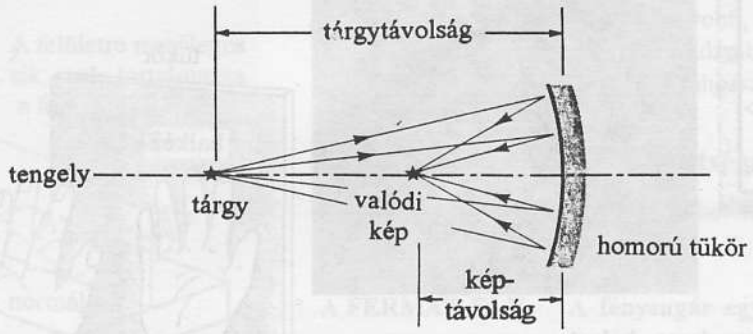
36-10 ábra
A síktükör alkotta képen a jobb és a bal oldal felcserélődik. A jobbsodrású koordinátarendszer a tükörben balsodrásúvá válik.

A síktükrök alkotta képek sajátos tulajdonsága, hogy a jobb és bal oldal felcserélődik. Jobb kezünk pl. bal kézként jelenik meg, lásd a 36-10. ábrát. Hasonlóképpen jobbsodrású koordinátarendszer tükörképe balsodrású koordinátarendszer.

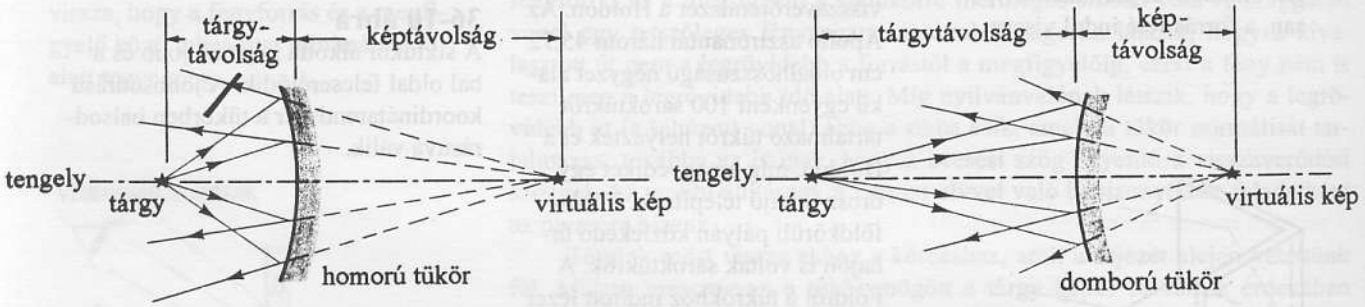
Két egymásra merőleges síktükör 90°-os *szögtükröt*, vagy saroktükröt alkot (36-12a ábra). Bármely sugár két visszaverődés után pontosan a beeső sugárral párhuzamosan, de ellentétes irányban – a forrás felé – verődik vissza. (36B-3 feladat) Három tükör, amely kocka csúcspontja körüli oldalakként helyezkedik el, háromdimenziós saroktükörként viselkedik, 36-12b ábra. A járművekre felszerelt macskaszemek és egyes útjelző táblák kicsiny saroktükrök százaiból állnak.



36-11 ábra
Az *O*-ban lévő tárgyról az egymásra merőlegesen állított két síktükör három képet alkot. (Segíteni fog, ha berajzoljuk azokat az *O*-ból induló sugarakat, melyek az I_1 és I_3 képeket alkotják. Mindegyik csak egy visszaverődést szenved.)



(a) A homorú tükör a (★) kiszemelt pontszerű tárgyból kiinduló sugarak mindegyikét visszaveri, a visszavert sugarak konvergálnak (összetartanak) és valódi képet hoznak létre.



(b) A (★) pontszerű tárgyakból kiinduló sugarak a homorú vagy a domború tükrön visszaverődve úgy divergálnak (széttartanak), hogy meghosszabbításaik virtuális képet hoznak létre.

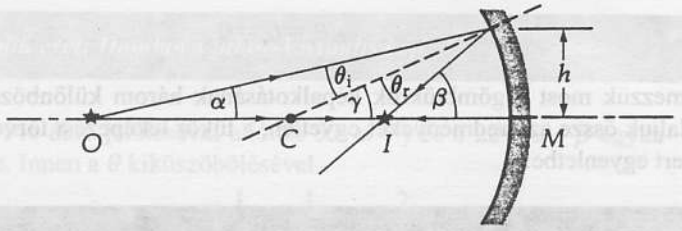
36-13 ábra
Gömbtükrök képalkotása

36.5 Fényvisszaverődés gömbtükrön

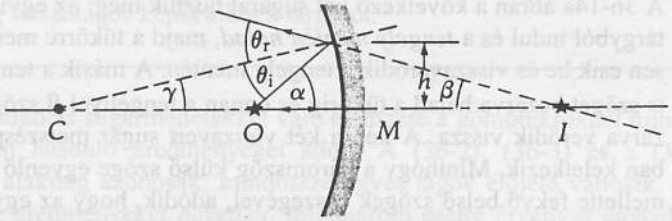
Sokunk legnagyobb sajnálatára reggelente az életnagyságnál jóval nagyobb képünk köszönt bennünket a borotválkozó vagy sminktükörben. Leggyakrabban, amikor tükörrel találkozunk, a kép a tükör mögött van, bár – ahogyan majd látni fogjuk – vannak bizonyos esetek, amikor a kép a tükör előtt is létrejöhet.

A görbült felületű tükrök – elsősorban *gömbtükrök* – homorúak (konkávok) vagy domborúak (konvexek) lehetnek, attól függően, hogy melyik típusú görbült felületre esik be a vizsgált fény. A gömbfelület felszíne, ha a gömb belseje felől közelítjük meg, akkor **homorú**, ha kívülről, akkor **domború**.

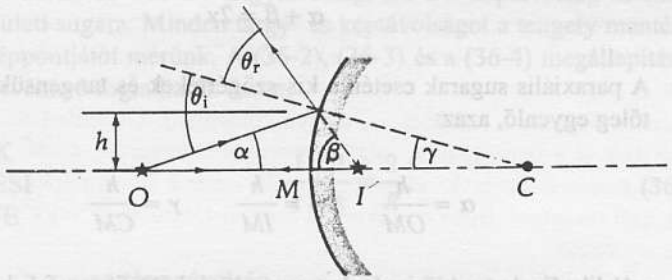
A gömbtükör képalkotásának jellemzésére sugármeneteket szerkesztünk. Jó tájékozódásul szolgál ehhez az optikai tengely, ami a tükör szimmetriatengelye, és a tükör felületére merőlegesen halad át. Tekintsünk egy, az optikai tengelyen elhelyezkedő pontot és vizsgáljuk meg, hogyan változtatja meg a tükör az e pontból kiinduló sugármeneteket. Visszaverődés után a sugarak vagy összetartóvá válnak (konvergálnak) és **valódi** képet alkotnak, ahogyan a 36-13a ábra mutatja, vagy széttartóvá válnak (divergálnak) és látszólagos vagy **virtuális** képet alkotnak, mint a 36-13b ábrán. A *valódi* szó azt jelenti, hogy a fénysugarak ténylegesen metszik egymást a kép helyén és ott képet alkotnak. Ha oda ernyőt helyeznénk (anélkül, hogy a sugarak haladását befolyásolnánk), az ernyőn kép jönne létre. A *virtuális* szó azt jelenti, hogy a fénysugarak valójában nem mennek át a képponton, s hiába helyeznénk el oda ernyőt, nem jönne létre rajta kép, pontosan úgy, ahogyan a síktü-



(a) Első eset: homorú tükör, valódi kép.



(b) Második eset: homorú tükör, virtuális kép.



(c) Harmadik eset: domború tükör, virtuális kép.

36-14 ábra
Sugármenet-elemzés gömbtükrök esetén. Az *O* tárgyból kiinduló és a tükör tengelye mentén haladó sugár a tengely irányába verődik vissza. A tengellyel α szöget bezáró irányban haladó sugár a tengellyel β szöget bezáró irányban verődik vissza. A kép ott keletkezik, ahol a két visszavert sugár metszi egymást.

kör alkotta kép esetében. Mindkét esetben azonban, ha szemünk olyan helyen van, hogy a tükröt elhagyó visszavert sugarakat fel tudja fogni, látjuk a képet. Egyéb támpont híján azonban nem tudjuk eldönteni, hogy a kép valódi-e vagy látszólagos, szemünk számára mindkét képtípus ugyanolyan.

A kép helyének meghatározása érdekében *két* olyan *sugarat* húzunk meg, melynek menetét könnyű megállapítani. Mivel minden visszavert sugár ugyanazon a ponton halad át, ezért már kettő is elegendő a kép helyének meghatározásához. A 36-14 ábra jelölései szerint a görbületi középpont a *C* pontban, a tárgy az *O*, a kép az *I*, a tükör pedig az *M* pontban van. Azokra a sugármenetekre szorítkozunk, amelyek az optikai tengellyel annyira kicsiny szöget zárnak be, hogy adiánban mért értékük közelítőleg egyenlő a szög tangensének értékével. Vagyis $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$. Az ilyen sugarak a tengelyhez közel haladnak és közelítőleg párhuzamosak a tengellyel, ezért **paraxiális** (tengellyel párhuzamos) sugaraknak nevezzük őket. Ezt a közelítést elfogadva a sugármenet-analízis eredményét érvényesnek fogjuk találni mindazon tükrökre, amelyek átmérője sokkal kisebb a görbületi sugaruknál.[5] Minden esetben a visszaverődés törvényét alkalmazzuk és az egyszerűség kedvéért az indexeket elhagyjuk:

[5] Ezt a feltételt gyakran úgy fogalmazzuk meg, hogy „kis nyílásszögű (apertúrájú) tükör"-ről beszélünk. Ez azt jelenti, hogy a tükör átmérője kicsi a görbületi sugárhoz képest. Minthogy ez relatív mérték, lehet, hogy egy 3 m átmérőjű csillagászati tükör kis apertúrájúnak tekinthető, míg az 5 cm átmérőjű közönséges tükör nem.

$$\theta_i = \theta_r = \theta$$

Elemezzük most a gömbtükrök képalkotásának három különböző esetét és foglaljuk össze az eredményeket egyetlen, a tükör leképezési törvénye néven ismert egyenletbe:

Első eset: Homorú tükör – Valódi kép

A 36-14a ábrán a következő két sugarat húztuk meg: az egyik az O tárgyból indul és a *tengely mentén halad*, majd a tükörre merőlegesen esik be és visszaverődik a tengely mentén. A másik a tengellyel α szöget bezárva halad a tükörig és onnan a tengellyel β szöget bezárva verődik vissza. A kép a két visszavert sugár metszéspontjában keletkezik. Minthogy a háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, adódik, hogy az egyik háromszögre: $\beta = \gamma + \theta$, és a másik háromszögre: $\beta = \alpha + 2\theta$. Ezzel kiküszöbölve a θ szöget, kapjuk, hogy

$$\alpha + \beta = 2\gamma \qquad \textbf{(36-1)}$$

A paraxiális sugarak esetén a kis szögértékek és tangensük közelítőleg egyenlő, azaz:

$$\alpha \approx \frac{h}{OM} \qquad \beta \approx \frac{h}{IM} \qquad \gamma \approx \frac{h}{CM}$$

adódik. Ezeket a kifejezéseket egyenlőségként fogva fel, behelyettesítünk a (36-1) egyenletbe, s azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{IM} = \frac{2}{CM} \qquad \textbf{(36-2)}$$

Figyeljük meg, hogy a h és a θ nem jelenik meg ebben az összefüggésben. Ez azt jelenti, hogy a tárgyról minden irányban (legalábbis az optikai tengellyel közel párhuzamosan) kiinduló és a tükörről visszaverődő fénysugarak mind a képpontba tartanak.

Második eset: Homorú tükör-Virtuális kép

Az 1. esetben követett eljáráshoz hasonlóan a 36-14b ábra jelöléseivel adódik, hogy $\theta = \beta + \gamma$ és $\alpha = \theta + \gamma$. Innen a θ kiküszöbölésével nyerjük, hogy

$$\alpha - \beta = 2\gamma$$

A szögeket a tangenseikkel közelítve a paraxiális sugarakra azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{IM} = \frac{2}{CM} \qquad \textbf{(36-3)}$$

Harmadik eset: Domború tükör-Virtuális kép

A 36-14c ábra jelölésével adódik $\theta = \alpha + \gamma$ és a $2\theta = \alpha + \beta$ egyenlősége. Innen a θ kiküszöbölésével

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{IM} = -\frac{2}{CM} \qquad \textbf{(36-4)}$$

kapható. Figyeljük meg, hogy szemben a homorú tükör esetével, amely akár valódi, akár virtuális képet is alkothat, a domború tükör *mindig* látszólagos képet alkot a tárgyról.

A képalkotás sugármenetekkel való elemzése a gömbtükröknél mindhárom esetben hasonló eredményeket adott. A (36-2), (36-3) és a (36-4) egyenletek alakilag azonosak, mindössze egyes tagok előjele változik. Előnyös, ha az eredményeket *egyetlen*, mindhárom esetre érvényes egyenletbe foglaljuk össze. Ezt azzal érjük el, hogy elfogadunk egy **előjelkonvenciót** az egyenletben szereplő mennyiség számértékére vonatkozóan. Figyeljük meg, hogy a 36-14 ábrán az *OM* a *t* tárgytávolság, *IM* a *k* képtávolság és *CM* a tükör *R* görbületi sugara. Minden tárgy- és képtávolságot a tengely mentén a tükör *M* középpontjától mérünk. A (36-2), (36-3) és a (36-4) megállapítások leképezési törvénnyé foglalhatók össze.

A TÜKRÖK LEKÉPEZÉSI TÖRVÉNYE

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R}, \qquad \textbf{(36-5)}$$

ahol t a tárgytávolság,
k a képtávolság,
R a tükör görbületi sugara.

Ahhoz, hogy ezt az egyenletet használni tudjuk, el kell fogadnunk a következő *előjelkonvenciót*:

ELŐJELKONVENCIÓ TÜKRÖK ESETÉRE[6]

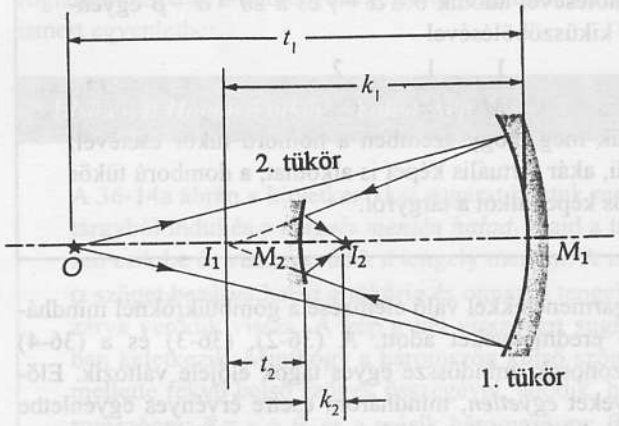
(1) A *t* számértékének előjele pozitív, ha a *tükörhöz érkező* sugarak szétt-artanak (divergálnak). Egyébként *t* negatív.

(2) A *k* számértékének előjele pozitív, ha a *tükörtől távozó* sugarak összetartóak (*konvergálnak*). Egyébként *k* negatív.

(3) Az *R* számértékének előjele pozitív, ha a tükör homorú és negatív, ha domború.

Az előjelkonvenciót érdemes jól megjegyezni, mert a legtöbb probléma megoldásakor szükség van rá a (36-5) és (36-7) leképezési törvényben. Emlékeztetünk arra, hogy a leképezési törvényt mindig a fenti formában kell felírni! *A negatív előjel csak akkor szerepelhet, amikor már behelyettesítjük a*

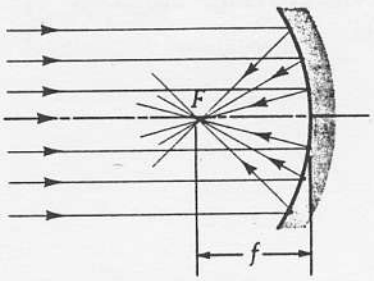
[6] Néhány más előjelkonvenció is használatos. Az egyik változat szerint *t*, *k* és *f* (lásd a (36-6) képletet) mind pozitív abban a szokásos esetben, amikor a tükör valódi képet hoz létre valódi tárgyról. Ettől a szabvány helyzettől minden eltérés egy mínusz jel felléptét követeli meg. Az eltérések közé soroljuk azt is, ha a t tárgytávolság kisebb, mint a tükör fókusztávolsága. A tükrökön a fény visszaverődik, így a valódi képek a beeső fény oldalán keletkeznek. Az R előjelét a (3) pontban megfogalmazott szabály határozza meg.



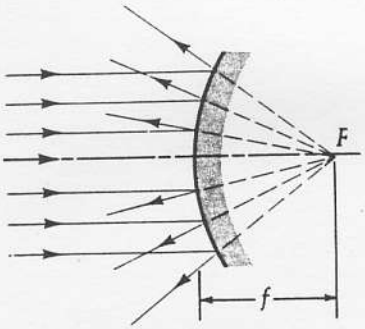
36-15 ábra
Összetett, többszörös tükörrendszer, amelynél az előjelkonvenciónak megfelelően a t_2 tárgytávolság negatív ($t_2 < 0$) Ez azért van így, mert a második – M_2 – tükörre eső sugarak összetartóak.

változó számértékét. Ugyanezt a szabályt követjük a fizika valamennyi általános törvényében is!

Tükörrendszerek esetén egyes tükrökre a t tárgytávolság lehet negatív is. Például a (36-15) ábrán az M_1 első tükör – ha egyedül volna jelen – I_1-ben valódi képet hozna létre. Bizonyos értelemben ez a kép az M_2 másik tükör számára tárgyként szerepel, (t_2 tárgytávolsággal). De mivel az M_2 tükröt az előtt érik el a fénysugarak, mielőtt metszenék egymást, az M_2 tükröt érő sugarak *konvergálnak.* Az előjelkonvenció miatt a t_2 számértékét így negatívnak kell tekinteni. Ilyen esetekben a tárgyat látszólagos vagy *virtuális tárgynak* nevezzük.



(a) homorú tükör



(b) domború tükör

36-16 ábra
A tengellyel párhuzamosan érkező fénynyalábról alkotott kép esetén, a képtávolságot fókusztávolságnak hívjuk. F a fókuszpont. Homorú tükör esetén f pozitív, domború tükörnél f negatív.

A tükrökkel (és lencsékkel) kapcsolatban gyakran használjuk a **fókusztávolságot** (f) (lásd a (36-16) ábrát). *Homorú* tükörre eső, a tengellyel párhuzamosan érkező sugárnyaláb úgy verődik vissza, hogy a sugarak egy pontban, a tükör előtt f távolságban találkoznak. Ezt a pontot nevezzük **fókuszpontnak.**[7] Ha a párhuzamos sugarak *domború* tükörre esnek, divergens, széttartó módon verődnek vissza, éspedig úgy, mintha a tükör túloldalán a fókusztávolságban lévő pontból erednének. A párhuzamosan érkező sugarak azt jelzik, hogy a tárgy a végtelenben van, vagyis $t = \infty$. Ezt az értéket behelyettesítve a leképezési törvénybe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R}$$

ahol k egyben az f fókusztávolsággal egyenlő. Ezt f-re megoldva

$$f = \frac{R}{2} \qquad (36\text{-}6)$$

adódik. Tekintettel arra, hogy a fókusztávolság számértéke a *homorú* tükrökre *pozitív*, a domború tükrökre pedig *negatív*, a (36-5) egyenlet a következő alakot ölti:

[7] Az, hogy az F pontot fókuszpontnak nevezzük, nem jelenti azt, hogy a kép mindig ebben a pontban keletkezik. Ez csak a tengellyel párhuzamosan érkező sugarak esetén igaz; minden más esetben a kép máshol jön létre. Hasznos, ha F-re, mint olyan pontra gondolunk, amely a tükörhöz „tartozik", és amely a sugármenet diszkussziójában segít.

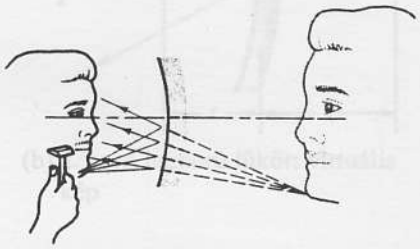
LEKÉPEZÉSI TÖRVÉNY (alternatív alak)

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \qquad (36\text{-}7)$$

Ebben a fejezetben könnyű összezavarodni, amikor a tükrök és lencsék különböző elrendezésének számos esetét elemezzük. A fejezet legfontosabb megállapítása azonban egyetlen egyenletben foglalható össze: $1/t + 1/k = 1/f$. Ez szolgál a tükrök és lencsék képalkotásakor a képtávolság meghatározásának kiindulópontjául. *Az előjelkonvenció ismerete azonban lényeges.* Az előjelkonvenció emlékezetbe idézésének egyik egyszerű módja a következő: Egy „megszokott összeállításban", amikor a tárgy egy *gyűjtő (homorú) tükörtől* annak fókusztávolságán kívül helyezkedik el, t, k, f és R mindegyikének számértéke pozitív. Negatív a számértéke a tükör mögé kerülő távolságoknak. A következő két példa kellőképpen meg fogja világítani a leképezési törvény és az előjelkonvenció használatát.

36-1 PÉLDA

Borotválkozótükröt az ablak mellett tartva létrehozhatjuk a Nap képét az ablak melletti falon, ha a tükör a faltól 50 cm-re van. Borotválkozás közben a borotválkozó személy álla 20 cm-re van (a tükör előtt). Adjuk meg, hogy milyen távol van a tükörtől az álláról alkotott kép.



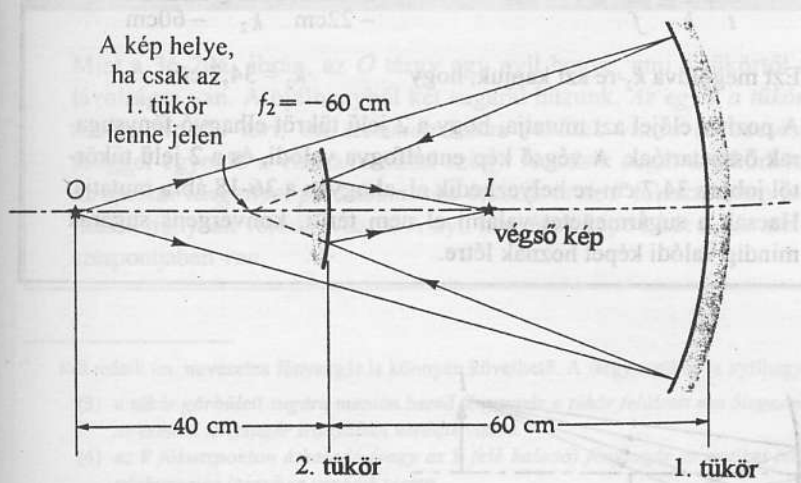
36-17 ábra
A 36-1 példához.

MEGOLDÁS

A fénysugarak a Napból lényegében párhuzamosan érkeznek, ezért a Nap képe a tükör fókuszpontjában áll elő. Így $f = +\ 50$ cm. (Tudjuk, hogy f pozitív, mert csak a homorú (gyűjtő) tükrök alkotnak valódi képet és az előjelkonvenció szerint ezek fókusztávolsága pozitív.) A borotválkozó ember álláról induló fénysugarak divergálnak, miközben a tükörhöz közelednek, ezért az előjelkonvenció szerint $t = +\ 20$ cm. A tüköregyenletből kiindulva:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{+20\text{ cm}}+\frac{1}{k}=\frac{1}{+50\text{ cm}}$$

Ezt k-ra megoldva adódik, hogy: $k = -33{,}3$ cm.



36-18 ábra
A 36-2 példához.

Az előjelkonvenció szerint a negatív előjel azt jelenti, hogy tükörfelületről széttartó fénysugarak indulnak úgy, mintha a tükör *mögött* lévő virtuális képből erednének. (Itt a *virtuális* szó ismételten azt jelenti, hogy a kép tényleges helyén semmiféle sugár nem megy át). Így a kép a tükör mögött 33,3 cm-re van (lásd a (36-17) ábrát).

36-2 PÉLDA

Tekintsük a 36-18. ábrán bemutatott tükörrendszert. Határozzuk meg a tárgy végső képének a helyét. Valódi vagy virtuális képet kapunk?

MEGOLDÁS

Tükörrendszerek esetén azt az eljárást kell követnünk, hogy meghatározzuk az egyes tükrök által alkotott képek helyét olyan sorrendben, ahogyan a fény az egyes tükrökről visszaverődik. Ebben az esetben az 1. tükörrel kell kezdeni. Írjuk fel a tükröregyenletet:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{+(40\text{cm}+\ 60\text{cm})}+\frac{1}{k_1}=\frac{1}{45\text{cm}}$$

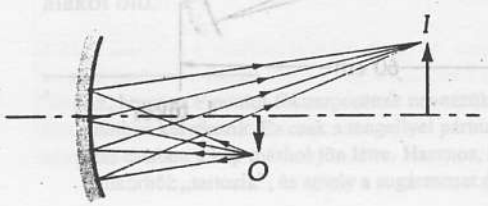
Ha ezt k_1-re megoldjuk, adódik, hogy $k_1 = +82\text{ cm}$

Az előjelkonvenció szerint a pozitív előjel azt jelenti, hogy a fénysugarak konvergálnak, amikor az 1 jelű tükröt elhagyják! Ha ez a tükör egyedül lenne jelen, 82 cm-rel az 1 jelű tükör előtt valódi képet hozna létre. Ezek a fénysugarak azonban 22 cm-rel az előtt, hogy ez a kép kialakulhatna, a 2 jelű tükörre esnek. Mindemellett úgy vehetjük, mintha létezne ez a feltételezett kép, a 2 jelű tükör számára tárgyként szerepelne. Mivel a 2 jelű tükörre érkező fénysugarak összetartóak, a t_2 tárgytávolság negatív, ($t_2 = -22$ cm, az előjelkonvenció szerint). A tárgy látszólagos (*virtuális*), mert azon a helyen semmiféle fénysugár nincsen jelen. A megfelelő számértékeket behelyettesítve a tükröegyenletbe, adódik, hogy

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-22\text{cm}}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{-60\text{cm}}$$

Ezt megoldva k_2-re azt kapjuk hogy $k_2 = 34{,}7\text{ cm}$

A pozitív előjel azt mutatja, hogy a 2 jelű tükröt elhagyó fénysugarak összetartóak. A végső kép ennélfogva valódi, és a 2 jelű tükörtől jobbra 34,7 cm-re helyezkedik el, ahogyan a 36-18 ábra mutatja. Hacsak a sugármenetet valami el nem téríti, konvergens sugarak mindig valódi képet hoznak létre.



36-19 ábra
Minden sugár, amely a nyíl hegyéről indul és a tükörre esik, a fókuszban álló nyílhegy-képben találkozik.

Amikor a feladat olyan, hogy látszólagos tárgyak és többszörös visszaverődés szerepel benne, akkor a pontos sugármenetek megszerkesztése nem könnyű. Tulajdonképpen a látszólagos tárgytól a következő tükörig fény ténylegesen nem halad, ezért ezekben az esetekben csak előzetes sugármenetábra vázolható fel az első kép helyének megállapítása érdekében, s ezután a tüköregyenletet kell használni arra, hogy a második tükör által készített kép helyét meghatározzuk. (Pontos, méretarányos ábrák megrajzolásával a kép mindig megszerkeszthető!; *A fordító megjegyzése.*)

36.6 A sugárdiagram és a nagyítás

A borotválkozótükör szerepe az, hogy egyenes állású, nagyított képet hozzon létre. Ebben a fejezetben a sugármenetek megszerkesztésével azt mutatjuk meg, hogy hogyan képeződik le egy, az *optikai tengelyen kívül* fekvő pont. Ábráinkon az ilyen pontokat nyíllal ábrázoljuk; a nyíl hegye az *O*-val jelölt pontba mutat (lásd a 36-19 ábrát). Egy tárgy *bármely pontjából* kiinduló összes fénysugár (legalábbis azok, amelyek a tükörre jutnak) a tükörről visszaverődve a *kép megfelelő pontjában* gyűlik össze. Általában a nyíl hegyéből kiinduló sugarak menetét szerkesztjük meg (persze, a nyíl többi pontjai is hasonlóan képeződnek le). Már két, egymást *I*-ben (képpontban) metsző fénysugár elegendő *I* helyének meghatározásához. Noha más választással is élhetnénk, a továbbiakban két jellegzetes, minden esetben előforduló és egyszerű menetű (ún. nevezetes) fénysugarat választunk a szerkesztéshez:

A KÉPSZERKESZTÉS SORÁN HASZNÁLT NEVEZETES FÉNYSUGARAK:

(1) Az a sugár, amelyik a tükröt a középpontjában éri, szimmetrikusan verődik vissza. (A beesési szöggel egyenlő a visszaverődési szög.)

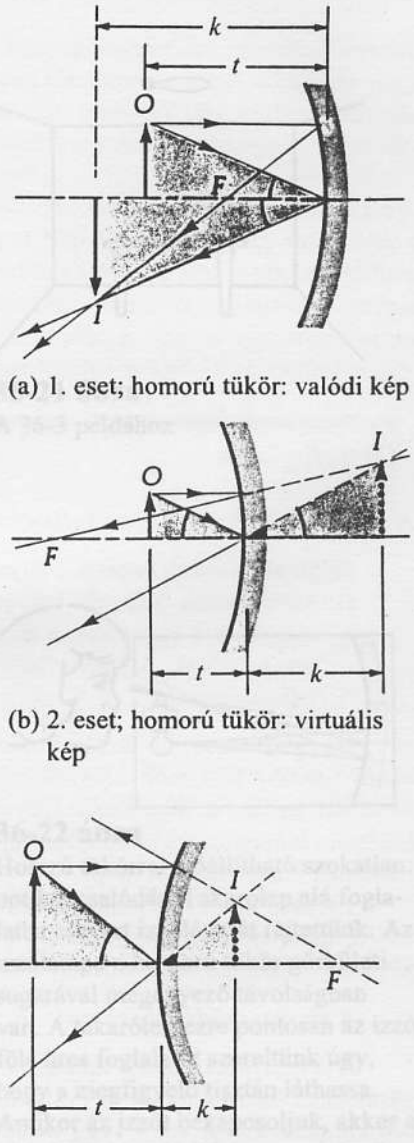
(2) Az optikai tengellyel párhuzamos sugár az *F* fókuszponton át verődik vissza.

A két visszavert sugár[*] metszéspontja megadja a nyílhegy képének helyét, a nyíl többi részét a tükör hasonlóan képezi le.

Mint az előző pontban, a három lehetséges esetet most is külön fogjuk tárgyalni. Emlékezzünk arra, hogy a homorú tükrök fókusztávolsága és görbületi sugara is pozitív és mindkét pont a tükör előtt helyezkedik el. Ezzel szemben a *domború* tükrök fókusztávolsága és görbületi sugara is negatív és mindkettő a tükör mögött helyezkedik el. Minden gömbtükörre $f = R/2$.

Első eset: Homorú tükör – Valódi kép

Mint a 36-20a. ábrán, az *O* tárgy egy nyíl hegye, ami a tükörtől *t* távolságra van. A nyílhegyből két sugarat húzunk. *Az egyik a tükör középpontjába tart, ott szimmetrikusan verődik vissza* (a beesési szöggel egyenlő a visszaverődési szög). A másik sugár a tükörhöz az *optikai tengellyel párhuzamosan* érkezik és az *F* fókuszponton áthaladó irányban verődik vissza. A nyíl hegyének képe e két sugár metszéspontjában van.



(a) 1. eset; homorú tükör: valódi kép

(b) 2. eset; homorú tükör: virtuális kép

(c) 3. eset; domború tükör: virtuális kép

36-20 ábra
Gömbtükrök nagyítása. A tükrök mögött meghosszabbított sugarakat szaggatott vonalak jelölik. A virtuális képeket pontozott vonalakkal ábrázoltuk.

[*] Két másik ún. nevezetes fénysugár is könnyen követhető. A tárgypontból (a nyílhegyből)

(3) *a tükör görbületi sugara mentén beeső fénysugár a tükör felületét merőlegesen éri és az eredeti fénysugár irányában verődik vissza.*

(4) *az* F *fókuszponton áthaladó (vagy az* F *felé haladó) fénysugár az optikai tengellyel párhuzamos irányban verődik vissza.*

Kettőnél több sugármenet felvázolása is hasznos lehet, mert ezzel ellenőrizhetjük a szerkesztést. Szerencsétlen esetekben ezeket a sugarakat nehézkes megrajzolni.

Az optikai rendszerek által alkotott kép nagysága lényeges jellemző. A kép ugyanis nagyobb vagy kisebb is lehet a tárgynál. A nevezetes sugarakat felhasználva a tengely, a kép és a tárgy által alkotott háromszögek lehetővé teszik a tengelyre merőleges N **tranzverzális nagyítás** mértékének egyszerű kifejezését.

$$N \equiv \frac{\textit{képnagyság}}{\textit{tárgynagyság}}. \qquad \textbf{(36-8)}$$

Figyeljük meg, hogy a 36-20a ábra vonalkázott háromszögei hasonló derékszögű háromszögek, amelyeknél a megfelelő oldalak aránya megegyezik. Tehát

NAGYÍTÁS $$N = -\frac{k}{t} \qquad \textbf{(36-9)}$$

A negatív előjelet azért vezettük be, hogy az N *negatív* értéke *fordított állású* képre utaljon. Ugyanez az előjelkonvenció érvényes mind tükrök, mind lencsék esetére.

A sugármenetek megszerkesztésével igazolni tudjuk, hogy ha homorú tükör *valódi* képet hoz létre, akkor az mindig fordított állású és *nagyobb*, mint az eredeti tárgy. A különböző esetekre vonatkozó részleteket nem szükséges memorizálni, mert ezek az információk benne foglaltatnak az előjelkonvencióban, és a nagyítás definíciójában. A képszerkesztés alapján minden egyes esetben megállapíthatók ezek a jellegzetességek.



2. eset: Homorú tükör – Virtuális kép

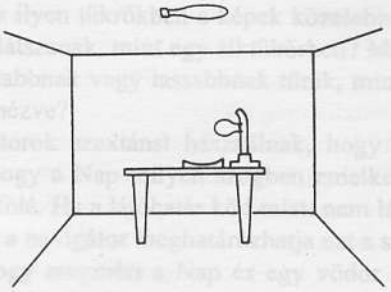
Ha a tárgyat a fókusztávolságnál közelebbre tesszük a homorú tükörhöz, a kép virtuális lesz, ahogyan az a 36-20b. ábrán látszik. Mint az első esetben, most is két nevezetes sugarat használunk a szerkesztéshez. Az egyik a tárgyat jelentő nyílhegyet a tengellyel *párhuzamos* irányban hagyja el, és az F fókuszponton áthaladó irányban verődik vissza. A másik sugár a *tükör középpontjában szimmetrikusan verődik vissza*. Az előző esettel szemben most a visszavert fénysugarak úgy divergálnak, mintha a tükör mögött lévő pontból indultak volna ki. Ez a pont a nyílhegy képe. Helyének meghatározásához meghosszabbítjuk a visszavert sugarakat egészen metszéspontjukig. Ez a metszéspont lesz a képpont. Mivel azonban a meghosszabbított sugarak mentén tényleges fénysugár nem halad, ezeket a vonalakat szaggatottan húztuk. Minthogy a képet nem tényleges fénysugarak alkotják, a kép *virtuális*. A képet pontozott vonallal rajzoltuk meg.

A vonalkázott háromszögek megint hasonlóak, úgyhogy (mint az előbb), az N nagyítás $N = k/t$. Miként az ábra mutatja, ha homorú tükör látszólagos képet hoz létre, akkor az mindig nagyobb, mint a tárgy. A borotválkozótükör homorú és ha az arcunktól megfelelő távolságra helyezzük el, akkor egyenes állású látszólagos képet hoz létre a tükör mögött.

Az imént diszkutált két eset fontos vonásokban különbözik. Az 1. esetben a tárgy a tükör fókusztávolságánál *messzebb* van és fordított állású valódi kép jön létre. A 2. esetben a tárgy *közelebb* van a fókusztávolságnál és egyenesállású virtuális kép jön létre.

3. eset: Domború tükör – Virtuális kép

A 36-20c ábrán a nyílhegy végpontjáról érkező sugár a tükör középpontjából szimmetrikusan verődik vissza. A másik nevezetes sugár a tükörhöz a tengellyel párhuzamos irányban közeledik és úgy verődik vissza, mintha a fókuszpontból jönne. (Emlékezzünk arra, hogy domború tükör esetén a görbületi középpont és a fókuszpont is a tükör mögött van.) A nagyítás: $N = k/t$. A domború tükrök mindig virtuális képet alkotnak (valódi tárgyról) és ezek a képek mindig kisebbek a tárgynál. A fényes gömbökön látszó képek mind ebbe a típusba tartoznak.



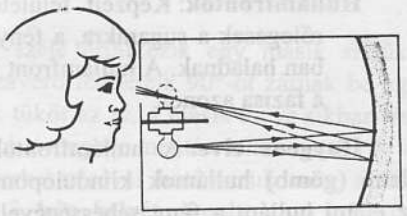
36-21 ábra
A 36-3 példához

A képek leírásához az alábbiakat kell megadni:

A KÉPEK JELLEMZŐI

valódi vagy virtuális
egyenes vagy fordított állású,
a nagyítás.

Nem érdemes memorizálni a képalkotás összes típusát, amik szóró és gyűjtőtükrök (és lencsék) előtt különböző távolságokban álló tárgyak esetében felmerülnek. Ehelyett inkább abban érdemes jártasságot szerezni, hogy gyorsan felvázoljuk a nevezetes sugarakat, amik felfedik a kép jellegét. Ez a megközelítés sokkal egyszerűbb és lehetővé teszi olyan helyzetek elemzését is, amelyekkel esetleg még nem találkoztunk. *A numerikus számításokhoz az előjelkonvenció ismerete lényegbevágó.*



36-22 ábra
Hosszú tükörrel előállítható szokatlan optikai csalódás. Takarólap alá foglalatba csavart izzólámpát rejtettünk. Az izzólámpa a homorú tükör görbületi sugarával megegyező távolságban van. A takarólemezre pontosan az izzó fölé üres foglalatot szereltünk úgy, hogy a megfigyelő tisztán láthassa. Amikor az izzót bekapcsoljuk, akkor a világító izzó valódi képe megjelenik az üres foglalatban. Ha a tükör jó minőségű, akkor a látvány – és az illúzió – meglepő.

36-3 PÉLDA

Asztallapon 0,50 m-re az íróasztali izzólámpa alatt homorú tükör fekszik, ahogyan a 36-21 ábrán látszik. A mennyezeten megjelenik az izzó fordított állású, éles képe, amely az izzó méretének ötszöröse. (a) Milyen magasan van a mennyezet? (b) Mekkora a tükör fókusztávolsága?

MEGOLDÁS

(a) A feladatban leírt helyzet eléggé valószínűtlen (hacsak nem véletlenül fordul elő). Általában a mennyezeten nem jön létre tiszta, éles kép, mert a képtávolság és tárgytávolság között, a leképezési törvény által meghatározott összefüggésnek kell fennállnia:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}$$

Minthogy ebben a példában csak a t tárgytávolság van megadva, még két ismeretlennel van dolgunk: a k-val és az f-fel. Szükség van egy további összefüggésre a t és a k között. Ha ismert az N nagyítás, akkor a (36-9) egyenlet megfelel erre a célra: $N = -k/t$. A számértékeket felhasználva $N = -5$, (ez *negatív*), mert a kép fordított állású) és $t = 0{,}5\text{m}$ (ez *pozitív*, mert az izzóból érkező fénysugarak divergálnak, mielőtt a tükörhöz érnének), kifejezzük a k távolságot az asztal lapja és a mennyezet között:

$$k = -Nt = -(-5)(0{,}5\text{ m}) = 2{,}50\text{ m}$$

A k képtávolság pozitív, s ez természetes is, hiszen tudjuk, hogy a

tükröt elhagyó sugarak konvergálnak, mert *valódi* képet kell létrehozniuk a mennyezeten.

(b) Most, hogy a három ismeretlen közül kettőnek az értékét már tudjuk, alkalmazzuk a leképezési törvényt.

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{+0{,}5\,\mathrm{m}}+\frac{1}{+2{,}5\,\mathrm{m}}=\frac{1}{f}$$

Ennek megoldása a fókusztávolságra: $f = 0{,}417\ \mathrm{m}$

Összefoglalás

A *fény terjedését sugarak* és *hullámfrontok* jellemzik.

Sugarak: Képzelt vonalak a terjedés iránya mentén.

Hullámfrontok: Képzelt felületek, amelyek merőlegesek a sugarakra, a fény terjedése irányában haladnak. A hullámfront minden pontjának a fázisa azonos.

Huygens elve: A hullámfrontok minden pontja elemi (gömb) hullámok kiindulópontjának tekinthető, az elemi hullám a fény sebességével terjed tova. Egy későbbi t időpontban a hullámfront új helyzetét az elemi hullámok burkolója adja meg.

Fermat elve: Két pont között a fény olyan úton terjed, amelynek megtételéhez ugyanannyi vagy kevesebb idő szükséges, mint bármely más út esetén.

A visszaverődés törvénye: $\theta_i = \theta_r$

A képszerkesztéshez többnyire az alábbi két sugármenetet használjuk: A tárgyat jelképező nyíl hegyéből kiinduló alábbi két – vagy néhány további – sugár metszéspontja tűzi ki a nyílhegy képét (lásd a 8. lábjegyzetet).

(1) A tükör középpontjába befutó sugár, amely szimmetrikusan verődik vissza.

(2) Az optikai tengellyel párhuzamosan haladó sugár, amely az F fókuszponton áthaladva verődik vissza.

A *képek valódiak, virtuálisak, egyenes* vagy *fordított állásúak* lehetnek:

leképezési törvény	nagyítás
$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}$	$N=-\frac{k}{t}$

ahol t a tárgytávolság, k a képtávolság, f a fókusztávolság ($= R/2$). Ezek az egyenletek az **előjelkonvencióval** együtt használhatók:

(1) t értéke *pozitív*, ha a tükörre eső sugarak szétartóak (*divergálnak*);

(2) k értéke *pozitív*, ha a tükröt elhagyó sugarak összetartóak (*konvergálnak*),

(3) az $f = R/2$ fókusztávolság előjelét a tükör R görbületi sugarának az előjele határozza meg. Ez *pozitív*, ha a tükör felülete *homorú*, és *negatív*, ha a felület *domború*.

Az előjelkonvenciót úgy jegyezhetjük meg, hogy ha homorú tükör előtt a fókusztávolságnál nagyobb van a tárgy, akkor a leképezési törvényben szereplő összes mennyiség számértéke pozitív; negatív előjele a tükör túloldalára kerülő távolságoknak van.

Kérdések

1.) A síktükör olyan képet alkot, amelyen a jobb és bal oldal felcserélődik. Miért nem cserélődik fel a síktükör alkotta képen a „fent" és a „lent"?

2.) Valódi vagy virtuális képet fognak alkotni a síktükör által visszavert konvergáló sugarak?

3.) Kirakatüvegre festett jelet a boltból nézve fordítottnak látunk. Amikor a fordított jelet tükörből nézzük, a jel képe fordítottnak látszik?

4.) Állítsunk össze síktükörrendszert úgy, hogy olyan képet alkosson, amelynél a jobb és a bal oldal ninccsen felcserélve (úgy, mint egyetlen síktükör esetén).

5.) Egy szoba sarkában a mennyezet és két fal síktükör. Ha a sarokba nézünk, hány képet látunk?

6.) Milyen feltételek esetén alkot a domború tükör valódi képet? (Ez megvalósítható, ha egy második tükröt is alkalmazunk.)

7.) Vázoljuk fel azt a tükörrendszert, amellyel tarkónkat láthatjuk. Megvalósítható-e ez csupán két tükör használatával úgy, hogy tekintetünk közvetlenül a

fejtől kiinduló egyenesen legyen? (A képnek egyenesállásúnak kell lennie!) Ezen a képen a jobb és a bal oldal fel van-e cserélve? Mi a minimálisan szükséges tükrök száma, ha vízszintesen előre akarunk nézni? Adjuk meg a sugármenetet is. Ezen a képen a jobb és a bal oldal felcserélődik-e?

8.) Írjuk le, milyen feltételek között ad egy gömbtükör a) valódi, b) virtuális, c) egyenes állású, d) fordított, e) nagyított és f) kicsinyített képet. Mind a homorú, mind a domború tükörrel foglalkozzunk!

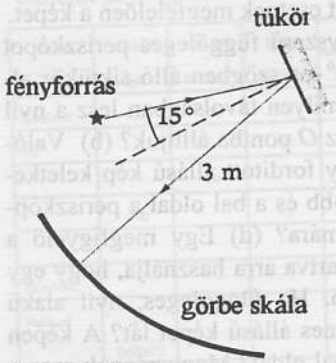
9.) Igen távoli tárgyat közelítünk (a tengely mentén) a homorú tükörhöz egészen addig, hogy érintse a tükröt. Írjuk le, hogy hogyan változnak a kép jellegzetességei és a helye e folyamat során. Ismételjük meg az eljárást domború tükörrel is!

Feladatok

36-4 – Fényvisszaverődés síktükrön

36A-1 Fénynyaláb esik síktükörre és visszaverődik. Mutassuk meg, hogy ha a tükröt α szöggel a tükör síkjában lévő tengely körül elforgatjuk, akkor a visszavert sugár 2α szöggel fordul el.

36A-2 Ahogyan a 36-23 ábrán látható, egy fénysugár 15° beesési szöggel esik síktükörre és a 3 m távolságban lévő skálára verődik vissza. Milyen messzire mozdul el a fényfolt, ha a tükröt 2°-kal elforgatjuk? A skála görbült, úgy, hogy a visszavert sugár mindig merőlegesen érje.



36-23 ábra
A 36A-2 feladathoz

36B-3 Lézersugár két, egymáshoz képest derékszögben álló tükrön verődik vissza, ahogyan a 36-12a ábra mutatja. A sugarak és a tükörlapok normálisai mind ugyanabban a síkban fekszenek. Bizonyítsuk be, hogy ha a beesési szög olyan, hogy a fénysugár mindkét tükrön visszaverődik, akkor a kilépő fénysugár mindig párhuzamos és ellentétes irányú a belépővel.

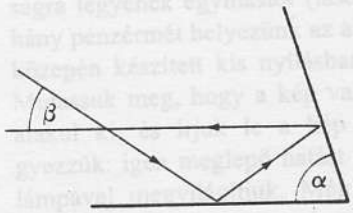
36B-4 Egy hölgy, akinek szemei a padlótól 1,59 m-re vannak, tükör előtt áll. (a) Ha a kalapjának teteje 14 cm-rel magasabban van mint a szeme, határozzuk meg, legalább mekkora legyen a falitükör függőleges mérete, hogy (a kalapot is beleértve) magát tetőtől talpig láthassa. Milyen magasan legyen a padlótól a tükör alsó széle?

10.) Egyes autók visszapillantó tükre enyhén domború. Miért? Az ilyen tükrökben a képek közelebb vagy távolabb látszanak, mint egy síktükörben? Mozgásuk gyorsabbnak vagy lassabbnak tűnik, mint síktükörből nézve?

11.) A navigátorok szextánst használnak, hogy megmérjék, hogy a Nap milyen szögben emelkedik a látóhatár fölé. Ha a látóhatár köd miatt nem látható pontosan, a navigátor meghatározhatja ezt a szöget úgy is, hogy megméri a Nap és egy vödör vízen visszavert képe közötti szöget és az eredményt elosztja kettővel. Magyarázzuk el a sugármenetek megszerkesztésével, hogy hogyan működik ez az eljárás?

36B-5 Síktükör széle érintkezik egy másik síktükör szélével, és visszaverő felületeik 90°-ot zárnak be egymással. Az egyik tükör az xz, a másik az yz síkban van, tehát a széleik a $\pm$ z-tengely mentén találkoznak. A sugármenet megszerkesztésével határozzuk meg arról a tárgyról készült 3 kép helyét, amely az $x = 30$ cm, $y = 40$ cm koordinátájú pontban van.

36B-6 Fénysugár két tükrön szenved visszaverődést, ahogyan a 36-24 ábra mutatja. Mindkét fénysugár és a két tükör normálisa is ugyanabban a síkban fekszik. Adjuk meg a β szöget az α függvényeként! Igazoljuk, hogy ha $\alpha = 90°$, akkor $\beta = 0$.



36-24 ábra
A 36B-6 feladathoz

36.5 Fényvisszaverődés gömbtükrön
36.6 Képszerkesztés és nagyítás

36A-7 Egy 6 cm átmérőjű üveggömbnek a felülete tükröző. A gömb nyugalomban van az asztalon. Egy légy mászik az asztalon a gömb felé.(a) Adjuk meg a légy képének a távolságát a gömb felületétől, amikor a légy 4 cm-re van a gömb felületétől. Szerkesszük meg a képet! (b) Írjuk le a kép jellegzetességeit.

36A-8 Egy 2,7 cm magas tárgy domború gömbtükörtől 15 cm távolságra van letéve. A tükör görbületi sugara 29 cm. Hol és milyen kép keletkezik? Szerkesszük meg a képet.

36A-9 Homorú tükör görbületi sugara 30 cm. (a) Hová tegyük a tükör elé a tárgyat, hogy képe a tükör mögött 15 cm-re keletkezzék? (b) Ha a tükör domború, görbületi sugara ugyanakkora, akkor hová tegyük a tárgyat? Szerkesszük meg a képet.

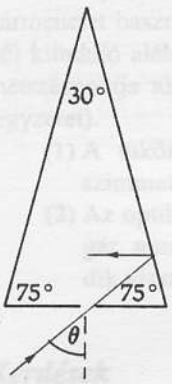
36B-10 Vizsgáljunk domború gömbtükörre az optikai tengellyel párhuzamosan beeső fénnyalábot. A leképezési törvény szerint a tengelyhez közel haladó sugarak az F fókuszpontban, a tükörtől $R/2$ távolságban futnak össze. Mi történik a tengelytől távolabb futó sugarakkal? Az F pontnál közelebb vagy távolabb fognak találkozni? Illusztráljuk a választ egy, a visszaverődés törvénye szerint pontosan megszerkesztett fénysugárral.

36B-11 Gömbtükör elé 30 cm távolságra helyezett tárgyról a tükörtől 40 cm-re valódi kép keletkezik. Határozzuk meg, hogy hová kell a tárgyat elhelyezni ahhoz, hogy a kép a tükör mögött 20 cm-re legyen. Szerkesszük meg a képet.

36B-12 A 8. lábjegyzetben azt állítottuk, hogy a (3) és (4) sugarakat egyes esetekben nehézkes megrajzolni. Szerkesszük meg e két sugár menetét. (Útmutatás: vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor a tárgy az F ponthoz vagy az R görbületi középponthoz közel helyezkedik el.)

36B-13 Homorú tükörtől 5 cm-re elhelyezett tárgyról a tükör valódi és négyszeresre nagyított képet alkot. Adjuk meg a tükör görbületi sugarát. Szerkesszük meg a képet.

Vegyes feladatok.



az alaplap normálisa

36-25 ábra
A 36C-14 feladathoz

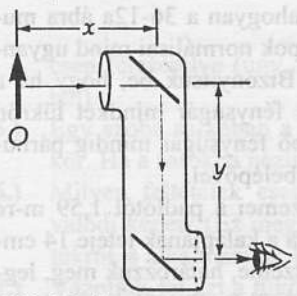
36C-14 A 36-25 ábra háromszög alaprajzú zárt teret mutat, melynek belső falai tükrök. Egy fénysugár lép be a rövidebb oldal közepén készített kis lyukon. Készítsünk az alábbi esetek mindegyikére külön-külön vázlatot, mely a fénysugár útját követi és határozzuk meg a θ szög értékét, amely megfelel a feladat kívánalmainak. (a) A fénysugár mindkét oldalfalon egyszer visszaverődik és a lyukon keresztül elhagyja a térrészt. (b) A fénysugár csak egyszer verődik vissza és elhagyja a térrészt. (c) Van-e olyan sugármenet, melyen három visszaverődés után lép ki a fény? Ha igen, rajzoljuk fel a sugármenetet és adjuk meg a θ szöget! (d) A sugár négyszer verődik vissza és azután lép ki.

36C-15 Megfigyelő pontszerű fényforrást szemlél, melynek fénye egy tükörben visszaverődik, ahogyan a 36-7 ábra mutatja. Fermat elvének alkalmazásával mutassuk meg, hogy a θ_i beesési szög és a θ_r visszaverődési szög egyenlő. Használjuk fel, hogy a beeső sugár és a visszavert sugár ugyanabban a síkban fekszenek, de azt ne, hogy a forrás és a megfigyelő a tükör fölött ugyanolyan távolságra van. (Útmutatás: Válasszuk független változónak azt a távolságot, ami a tükrön a forrás alatti pont és a visszaverődési pont között van, ettől mind θ_i, mind θ_r függ.)

36C-16 Két síktükör tükröző felületei egymással szemben állnak, az egyik tükör széle a másik szélével érintkezik úgy, hogy a két sík közti szög α. Ha tárgyat helyezünk a két tükör közé, a képek egész sora jön létre. Általában, ha a két sík közti α szög olyan, hogy $n\alpha = 360°$, ahol n egész, a létrejött képek száma $n-1$. Szerkesszük meg az összes kép helyét $n = 6$ esetére, ha a tárgy a két tükör között, de nem a szögfelezőn van.

36C-17 Homorú tükör által alkotott valódi kép nagysága megkétszereződik, ha a tárgytávolság 80 cm-ről 50 cm-re csökken. Határozzuk meg a tükör görbületi sugarát. Szerkesszük meg a két esetnek megfelelően a képet.

36C-18 A 36-26 ábra egyszerű függőleges periszkópot mutat be, amelyet két 45°-os szögben álló síktükör alkot. (a) Az alsó tükörtől milyen távolságban lesz a nyíl (tárgy) képe, ha a nyilat az O pontba állítjuk? (b) Valódi, virtuális, egyenes vagy fordított állású kép keletkezik? (c) Felcserélődik a jobb és a bal oldal a periszkópba néző megfigyelő számára? (d) Egy megfigyelő a periszkópot vízszintesen tartva arra használja, hogy egy házsarok mögül kinézzen. Ha függőleges, nyíl alakú tárgyat figyel, vajon egyenes állású képet lát? A képen felcserélődik a jobb és a bal oldal? Magyarázzuk meg a válaszokat! (e) Mit lát az a megfigyelő, aki a függőleges iránnyal 45°-os szögben tartott periszkópon át néz?



36-26 ábra
A 36C-18 feladathoz

36C-19 Háromdimenziós saroktükör a beérkező fénysugarat a beesési iránnyal párhuzamosan a fényforrás felé veri vissza, ha a fénysugár mindhárom tükrön visszaverődik. Bizonyítsuk be ezt az állítást! (Útmutatás: tekintsük úgy, hogy a beeső sugár a $\mathbf{t} = t_x\hat{\mathbf{x}} + t_y\hat{\mathbf{y}} + t_z\hat{\mathbf{z}}$ vektor által megadott irányban halad. Milyen változás következik be t alakjában, amikor a sugár az xy síkban lévő tükrön visszaverődik?)

36C-20 Kempingtúrán két barát tükör segítségével vált üzenetet egymással. Mindegyik tükör mindkét oldalán tükrözővé tett síklap, középen kis lyukkal. Az egyik tükrét az arca elé tartva úgy céloz, hogy a lyukon áthaladó napfény foltja éppen arcára essen, és ezt saját tükrében lássa. Ezután a lyukon keresztül a célpontot (társa arcát) nézve úgy dönti a tükröt, hogy az arcán lévő foltnak a képe közel legyen vagy egybeessék a lyukkal. Magyarázzuk el a művelet elméletét. (Ez az egyszerű eszköz hatásos módszert tesz lehetővé eltévedt turisták és tengeri balesetek túlélői számára, mert ezzel adhatnak jelet a kereső repülőgépnek.)

36C-21 Egy 25 cm fókusztávolságú homorú tükör a tárgytól 200 cm-re alkot képet. Határozzuk meg azt a *két* tárgytávolságot, amely eleget tesz ilyen tárgy-kép viszonynak. Milyenek ezek a képek?

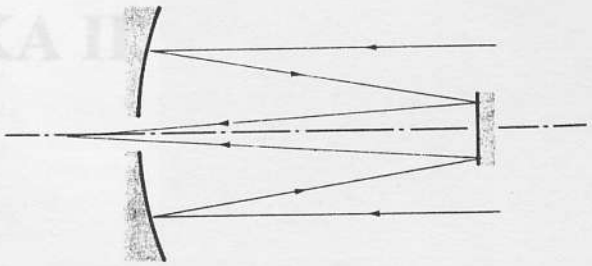
36C-22 Egészítsük ki az alábbi táblázatot *tükrök* esetére. Mindegyik esetben tegyük fel, hogy a tükör átmérője kicsi a felületének görbületi sugarához képest. Minden számérték cm-ben van kifejezve. Adjuk meg az összes előjelet az előjelkonvenciónak megfelelően.

A tükör típusa	Görbületi sugár	Fókusz távolság	Tárgy távolság	Kép			Nagyítás
				Távolsága	Valódi?	Fordított?	
Domború	-120	-60	+30	-20	Nem	Nem	+2/3
Sík			+30				
		+10		-20			
	-100		+5				
				+100			-2
Domború				-20			1/4 (előjel?)
Homorú	20 (előjel?)			+100			

36C-23 A 36C-22 feladat minden kérdéséhez készítsünk ábrát.

36C-24 Az alábbi három esethez szerkesszük meg a sugármeneteket. (a) Homorú tükör, amint valódi képet alkot, (b) homorú tükör, amint virtuális képet alkot, (c) domború tükör, amint virtuális képet alkot. Mindegyik esetben szerkesszük meg a nyíl alakú tárgy hegyéből kiinduló négy sugarat, amit a 36.6 pontban – és a 8. lábjegyzetben – említettünk.

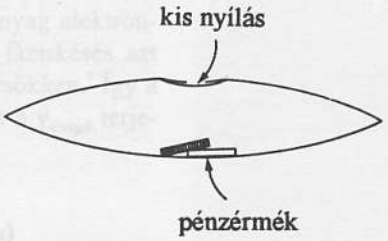
36C-25 Szemüveg nélkül egy ember könnyen fókuszálja szemét 70 cm-nél nem közelebbi tárgyakra. (a) Egy +75 cm fókusztávolságú borotválkozótükör használata esetén ez az ember 80 cm-rel a szeme előtt látja megerőltetés nélkül az arcát. Határozzuk meg, hogy milyen távol kell lennie az arcának a tükörtől? (b) Adjuk meg a nagyítást.



36-27 ábra
A 36C-26 feladathoz

36C-26 A távcsövek egyik fajtája a *Cassegrain-féle tükrös távcső*, amit a 36-27 ábrán mutatunk be. A nagy homorú tükörre távoli tárgyról beeső fény visszaverődik a kis tükrön. A fénysugarak ezután áthaladnak a nagy tükör felületén lévő lyukon, és a nagy tükör mögött alkotnak képet. Az elrendezés nagy előnye, hogy a kép fénykép készítésére, vagy más optikai képelemző eljárás számára könnyen elérhető helyen alakul ki. A nagy tükör görbületi sugara 14 m, a két tükör 5 m távolságra van egymástól. (a) Vajon a kis tükörnek homorúnak vagy domborúnak kell lennie ahhoz, hogy a nagy tükör mögött 1 m-re alakuljon ki a kép? (b) Adjuk meg a kis tükör görbületi sugarát.

36C-27 A „lebegő pénzérme" illúziója kelthető a 36-28 ábra szerint elrendezett két parabolatükörrel. A tükrök 7,5 cm fókusztávolságúak és egymással szemben vannak elhelyezve úgy, hogy középpontjuk 7,5 cm távolságra legyenek egymástól (lásd a 36-28 ábrát). Ha néhány pénzérmét helyezünk az alsó tükörre, a felső tükör közepén készített kis nyílásban előáll az érmék képe. Mutassuk meg, hogy a kép valóban ebben a nyílásban alakul ki, és írjuk le a kép tulajdonságait! (Megjegyezzük: igen meglepő hatást vált ki, ha a képet zseblámpával megvilágítjuk. Még súrlódó beeséskor is a beeső fény szemlátomást visszaverődik az érmék *képeiről*! Érthető, hogy miért?)



36-28 ábra
A 36C-27 feladathoz

36C-28 Homorú tükör előtt 50 cm-re tárgyat helyezünk el, amiről valódi kép alakul ki. Ha a tárgy 5 cm-rel a tükör felé mozdul, a kép 10 cm-t tesz meg. Adjuk meg a tükör fókusztávolságát.

34C-43 A válasz adott.
34C-45 A válasz adott.
34C-47 2000 A/s
34C-49 A válasz adott.
34C-51 A válasz adott.
34C-53 $i = 40{,}8\sin(\omega t + 25{,}6°)$
34C-55 239 mH
34C-57 a) 100 μF b) 632 rad/s c) 125 W
d) 39,5 V f) 150 μF g)párhuzamosan
34C-59 A válasz adott.

XXXV. Fejezet

35A-1 30,0 cm
35B-3 A válasz adott.
35B-7 ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$;
ha $r > R$: $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$
35A-9 A válasz adott.
35B-11 377 Ω
35A-13 a) $1{,}67 \times 10^{13}$ T b) $3{,}32 \times 10^{12}$ W/m^2
35B-15 a) $(2\times10^{-8})\sin(kx - 10^{16}t)\hat{z}$
b) $1{,}88 \times 10^{-7}$ m c) $1{,}59 \times 10^{-10}$ J/m^3
35B-17 a) 1,20 m b) $u = 2{,}36 \times 10^5$ J/m^3
c) $E_o = 2{,}31 \times 10^8$ V/m
35B-19 A válasz adott.
35A-21 $8{,}97 \times 10^{-3}$ N
35A-23 $5{,}60 \times 10^{-6}$ N/m^2
35B-25 a) 1900 V/m b) $5{,}00 \times 10^{-11}$ J
c) $1{,}67 \times 10^{-19}$ kg·m/s
35C-27 a) $1{,}88 \times 10^{-10} \cos 377t$
b) $1{,}00 \times 10^{-4} \cos[(3{,}77 \times 10^{-8})t]$
35C-29 A válasz adott.
35C-31 A válasz adott.
35C-33 21,9 V/m
35C-35 a) 292 nm
35C-37 A válasz adott.
35C-39 A válasz adott.
35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

XXXVI. Fejezet

36A-1 A válasz adott.
36B-3 A válasz adott.
36B-5 (30, –40), (–30, 40), (–30, –40), (cm-ben)
36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép egyenesállású, virtuális, $N = 0{,}273$
36A-9 a) 7,50 cm b) ∞
36B-11 9,23 cm
36B-13 8,00 cm
36C-15 A válasz adott.
36C-17 40,0 cm
36C-19 A válasz adott.
36C-21 ha $t = 228$ cm, a kép fordított állású, valódi és $N = -0{,}123$
ha $t = 21{,}9$ cm, a kép egyenes állású, virtuális és N = 8,12
36C-23 A válasz adott.
36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67
36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

XXXVII. Fejezet

37A-1 $n = 1{,}52$
37B-3 A válasz adott.
37B-5 0,624 cm
37B-7 a) 20,6° b) 0,400 szteradián c) 35,4°
37B-9 1,51
37B-11 2,14 szteradián
37B-13 17,0%
37A-15 R
37B-17 2,00
37A-19 3,57 mm kifelé
37A-21 26,7 cm
37B-23 $2f$
37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125
37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) –51,7 cm
d) –17,24 cm
37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm
37A-31 a) 24,0 b) 48,1°
37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm
37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig
37C-37 A válasz adott.
37C-39 A válasz adott.
37C-41 A válasz adott.
37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c) 2,63 μs
37C-45 a gömbfelülettől számítva: a) $2{,}67R$ b) $1{,}80R$
c) $0{,}960R$
37C-47 A válasz adott.
37C-49 $(L^2 - 4fL)^{1/2}$
37C-51 A válasz adott.
37C-53 A válasz adott.
37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított állású kép $N = -2$ b) a lencse tárgyoldalán
37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a gyújtólencsén túl, $N = -0{,}42$
37C-59 A válasz adott.

XXXVIII. Fejezet

38A-1 5,00 mm
38A-3 1,33 mm
38B-5 A válasz adott.
38B-7 a) 1034,4827 b) 62,1°
38B-9 6
38B-11 sötét
38B-13 a) $2{,}73E_o$, 30° b) $2E_o$, 60°
c) 0, definiálatlan
38A-15 a) 105 nm b) 1,30
38A-17 199 nm

GEOMETRIAI OPTIKA II. – A FÉNYTÖRÉS

*Három fivér szarvasmarha-telepet vásárolt és elnevezték „Fókusz"-nak. Amikor apjuk megkérdezte, hogy miért választották ezt a nevet, így válaszoltak: „It's the place where the sons raise meat."**

A szójáték W. B. Pietenpoltól származik
Colorado Egyetem, Fizikai Intézet Boulder, Colorado

37.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben a geometriai optika áttekintését folytatva a fénysugarak útját kizárólag geometriai megfontolásokkal követjük. A fénytörés vagy *refrakció* akkor lép fel, ha a fénysugarak két különböző anyag határfelületére ferdén esnek be. Ez teszi lehetővé képalkotó lencsék kialakítását. A fénytörés alapján működnek a fényképezőgépek, távcsövek, mikroszkópok, szemüvegek, amelyek segítségével egyaránt megláthatjuk a parányi élőlényeket és az éjszakai égbolt félelmetesen hatalmas alakzatait.

37.2 Fénytörés sík felületen

A c univerzális állandó mindig a fény vákuumbeli terjedési sebességét jelöli. Bármilyen más közegben ez a sebesség kisebb. Ennek az az oka, hogy amikor a fény anyagi közegen halad keresztül, az atomok állandóan elnyelik, majd újra kisugározzák. A beeső fényhullám az atomokat a sugárzás elnyelésére készteti és arra, hogy maguk is rezegjenek a hullám frekvenciájával. A gondos elemzés azt mutatja, hogy az elektronok újra kisugározzák az elektromágneses hullámokat, ám *fázisban késve.* A fáziskésés az anyag elektronsűrűségétől és természetes rezonanciafrekvenciáitól függ. A fáziskésés azt eredményezi, hogy az anyagban a hullám terjedési sebessége csökken.[1] Így a fény terjedési sebessége az anyagban c-nél kisebb. Levegőben a $v_{\text{levegő}}$ terjedési sebesség csak 0,03%-kal kisebb c-nél,

$$\frac{c}{v_{\text{levegő}}} = 1{,}00029 \qquad (0\,^\circ\text{C és 1 atm})$$

* Magyarul: „Ez az a hely, ahol *a fiaid húst termelnek.*" Ha azonban a fenti mondatot a következőképpen írjuk: „It's the place where the sun's rays meet" (ami ugyanúgy *hangzik,* mint a fenti), akkor a jelentése: „Ez az a hely, ahol *a napsugarak találkoznak.*"

[1] Lásd pl. R.P. Feynman et al. Feynman-előadások, I. kötet, 31 fejezet Budapest, 19.. Műszaki Könyvkiadó



37-1 ábra
„Elfáradt" fénysugár? Néhányan arra gondoltak, hogy a fény, miközben csillagászati távolságokon terjed, fokozatosan lelassul. Sajnos nem lehet összehasonlítani a terjedési sebességét egy laboratóriumi fényforrásból származó fénynek és mondjuk egy 10 milliárd fényévre lévő kvazárból eredő fénynek (amely a feltevés szerint már 10 milliárd éve úton van a tér mélységein keresztül.) Tekintettel arra, hogy a fény elnyelődik és újra kibocsátódik valahányszor atomokkal találkozik, definiálhatjuk az L kioltási hosszat úgy, mint azt az átlagos távolságot, melyet a fény az anyagon áthaladva megtesz, mielőtt valamelyik atom elnyelné és újra kibocsátaná. Ez az L hossz a térfogategységben lévő elektronok számától függ. Üvegdarabban $L \approx 10^{-6}$ m, levegőben $\approx 10^{-3}$ m. Így a kvazár fénye – amit teleszkópban látunk, valójában már magában a teleszkópban lévő levegőben keletkezett. Földkörüli pályán, a légkör felett keringő teleszkóp esetében a csillagközi gáz sűrűsége a mi Tejútrendszerünkben akkora, hogy L ≈ 2 fényév, így aztán úgy látszik, sohasem lesz szerencsénk ténylegesen őskori fényhez hozzájutni, hogy az ellenőrző kísérletet elvégezzük. [John B Schaefer „Régi fény hozzáférhetetlensége" c. cikke nyomán, American Journal of Physics, 57. 200. (1989)]

37-1 Táblázat Néhány anyagok törésmutatója.

Az anyag neve	Az n törésmutató a $\lambda \approx 550$ nm hullámhosszon
levegő (0°C, 1 atm)	1,00029
hidrogén (0°C, 1 atm)	1,00013
jég	1,31
víz	1,333 (= 4/3)
kvarcolvadék	1,46
koronaüveg	1,52
polisztirén	1,59
flintüveg	1,66
dijodometán	1,75
gyémánt	2,42
tallium-jodid	2,76

Amikor a három értékes jegyű pontosság elfogadható, akkor – a számolás megkönnyítésére – úgy vehetjük, hogy a fény terjedési sebessége levegőben is c.

A c/v hányadost törésmutatónak nevezzük:

$$\text{TÖRÉSMUTATÓ} \qquad n \equiv \frac{c}{v} = \frac{\text{fénysebesség vákuumban}}{\text{fénysebesség közegben}} \tag{37-1}$$

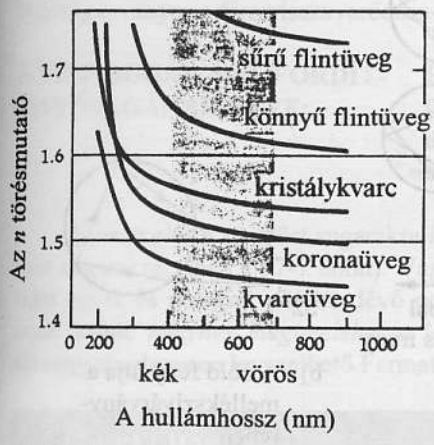
A 37-1 Táblázatban különböző anyagok törésmutatóit soroljuk fel.

A nagy törésmutatójú anyagokat *optikailag sűrű* anyagokként emlegetjük. Nem mindig igaz azonban, hogy a *fizikailag* sűrűbb anyagoknak nagyobb a törésmutatója. Például, a legtöbb olaj úszik a vizen, mégis nagyobb a törésmutatója a vizénél. A legtöbb átlátszó műanyag törésmutatója nagyobb a koronaüvegénél, pedig az utóbbinak a sűrűsége nagyobb. Így nincsen olyan általános összefüggés, amely a fizikai és az optikai sűrűség kapcsolatát kifejezné.

A diszperzió

Az optikai berendezések tervezését nehezíti, hogy a lencsék készítésére használt üvegnek nem állandó a törésmutatója, hanem a λ hullámhossz függvénye. Tipikusnak tekinthető, hogy a látható színkép teljes tartományán mintegy 2%-os a változás. A törésmutató változását a hullámhossz függvényében bemutató görbéket *diszperziós görbéknek* nevezzük.[2] Ilyen látható a 37-2 ábrán. A **diszperziónak,** azaz a *törésmutató hullámhossztól való függésének* lehetnek gyakorlati szempontból hasznos és káros következményei, amint a továbbiakban röviden bemutatjuk. A szivárvány színei, a gyémánt tüze, egyaránt a diszperzió következménye.

[2] A fényt illetően, az elektronok az atomokban úgy viselkednek, mintha rugók tartanák őket a helyükön. A legtöbb anyag egyes elektronjainak természetes rezonanciafrekvenciája van az ultraibolya frekvenciatartományban. Amikor a fény frekvenciája a kisebb frekvenciák felől közeledik a rezonanciafrekvenciához, a kisugárzott fény fáziskésleltetése egyre nagyobb lesz (lásd a 34-17b ábrát). Ennek eredményeként a fény terjedése lelassul, vagyis az anyag törésmutatója a rövidebb hullámhosszak tartományában megnövekedik. Emiatt nagyobb a törésmutató a kék fényre, mint a vörösre.



37-2 ábra

Az n törésmutató hullámhossztól való függése különböző üvegtípusok esetén (a vonalkázott sáv mutatja a látható hullámhossztartományt). A látható fény hullámhosszán a törésmutatót általában öt értékes jegyre meg lehet mérni. (Az ábra „Eugene Hecht és Alfred Zajac „Optika" c. könyvéből származik, az angol nyelvű kiadás: Addison- Wesley, 1974)



37-3 ábra

A fehér fény mindenféle hullámhosszúságú hullámok keveréke a kb 400 nm-estől a kb. 700 nm-esig. Tekintettel arra, hogy a törésmutató függ a hullámhossztól, az üvegprizmán áthaladó fehér fény folytonos, a hullámhossz szerint kissé különböző szögben elterülő legyezővé válik szét, ez a diszperzió, aminek mértéke a vörös színű fény eltérítési szöge és az ibolyaszínű fény eltérítési szöge közti különbség. Ha a felbontott sugarak ernyőre esnek, ott színképet, spektrumot hoznak létre. Ha a diszpergált fény útjába egy másik, az előbbivel azonos prizmát helyezünk el és törőszögét fordított helyzetbe állítjuk az előbbivel, akkor a fénynyaláb újra fehér nyalábbá egyesül.

A fénytörés

Amikor egy fénysugár két különböző törésmutatójú közeg határfelületéhez ér, akkor a fénysugár iránya megváltozhat. Ezt a jelenséget **fénytörésnek** (refrakciónak) nevezzük. A 37-4 ábrán az n_1 és az n_2 törésmutatójú közegekben terjedő és a határfelületen megtörő fénysugarat látunk ($n_2 > n_1$). Ezekben a közegekben a fény rendre a

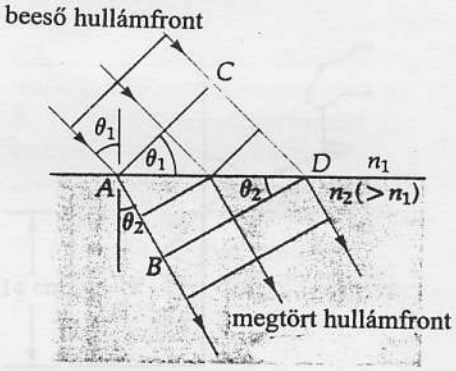
$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad \text{és} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2} \qquad \textbf{(37-2)}$$

sebességgel terjed. Huygens elvét az AC hullámfrontra alkalmazva azt kapjuk, hogy amíg az első közegben egy elemi hullám t idő alatt ér C-ből D-be, addig a 2-es közegben egy másik elemi hullám A-tól B-ig jut el:

$$t = \frac{CD}{v_1} \qquad \text{és} \qquad t = \frac{AB}{v_2} \qquad \textbf{(37-3)}$$

A (37-2) egyenleteket felhasználva $n_1 CD = n_2 AB$ **(37-4)**

Az ACD és az ABD háromszögek derékszögűek és az AD oldaluk közös, így



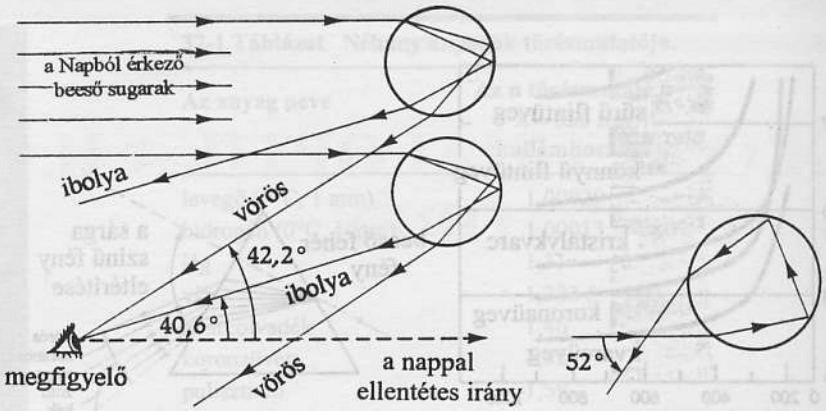
37-4 ábra

Síkhullám törése két közeg közti sík határfelületen.



37-5 ábra

A bot bemerített részéről érkező fény a víz-levegő határfelületen megtörik, ez okozza, hogy a bot töröttnek látszik.



(nem méretarányos az ábra)

a) A főszivárvány kialakulása.

b) A zöld fény útja a mellékszivárvány-ívben.

37-6 ábra

A szivárvány. A diszperzió miatt a Napból érkező fénysugárban lévő különböző hullámhosszúságú összetevők különböző irányokban törnek meg. Vízben $n_{\text{vörös}} = 1{,}332$ és $n_{\text{ibolya}} = 1{,}343$.. Ahogyan az (a) ábra mutatja, a diszperzió, mind a gömb alakú esőcseppbe belépő, mind az abból kilépő fény esetén bekövetkezik. Ennek eredménye, hogy a megfigyelő a különböző hullámhosszúságú fényeket kissé eltérő irányokból látja érkezni. A szivárvány külső széle 42,2° szögből érkezik az ún. antiszoláris (nappal ellentétes) irányhoz képest, míg az ibolyaszínű belső széle 40,6° szögből. Ezek a szögek az antiszoláris irány, mint tengely körül nyíló kúp alkotói mentén értendők. Egy halványabb mellékszivárványív is kialakul az 50,7°, ill. 53,6° szögeknél, ahogyan a (b) ábra mutatja, de ekkor a fénysugarak a cseppben még két további visszaverődést szenvednek. A mellékszivárvány spektruma a főszivárvány színeinek sorrendjéhez képest fordított (Lásd a 37C-44 problémát). Érdekes, hogy nincs két olyan ember, aki pontosan ugyanazt a szivárványt látná és tisztában kell lennünk azzal, hogy a színes ív valójában nem is létezik.

$$CD = AD\sin\theta_1 \qquad \text{és} \qquad AB = AD\sin\theta_2$$

Ezeket az összefüggéseket a (37-4) egyenletbe helyettesítve adódik

SNELLIUS FÉNYTÖRÉSI TÖRVÉNYE[3]

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (37\text{-}5)$$

Jegyezzük meg, hogy θ_1 a beeső sugár és a két közeg határfelületi normálisa közötti szög, θ_2 pedig a megtört sugárnak ugyanettől a normálistól mért szöge. Mint a visszaverődés esetén, a beeső sugár, a normális és a megtört sugár ugyanabban a síkban fekszenek.

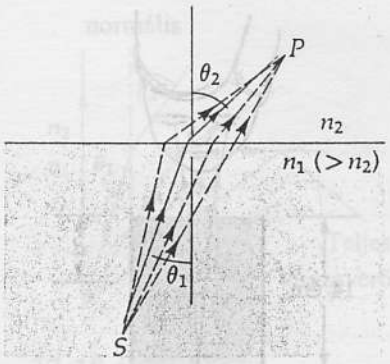
Ugyanez a törési törvény érvényes, amikor a nagyobb törésmutatójú közeg felől megy a fény a kisebb törésmutatójú közeg felé. Így, ha a fénysugár irányát megfordítjuk (és az abszorpciótól eltekintünk), akkor a fény

[3] A Snellius-törvényt felfedezőjéről, Willebrord Snel van Royen (1591–1626) holland fizikusról nevezték el. Snellius 21 éves korában követte apját a leydeni egyetemen a matematika professzoraként. 1621-ből származó publikálatlan felfedezését az optika egyik nagy pillanatának tekintik. Ugyanezt az összefüggést valószínűleg René Descartes francia filozófus-matematikus (1596–1650) is felfedezte tőle függetlenül, amikor a törvényt a fényrészecske-elmélet alapján „Dioptrika" c. művében levezette. Franciaországban ezért ezt a törvényt Descartes-törvénynek nevezik. 1617-ben Snel megmérte a Föld felületének a görbületét Alkmaar és Bergen-op-Zoom között és ebből meghatározta a Föld méretét.

ugyanazon az úton fog haladni visszafelé is. Minthogy ugyanez a megfordíthatóság érvényes a fényvisszaverődésnél is, megállapíthatjuk a következőket:

A FÉNYSUGÁR MEGFORDÍTHATÓSÁGÁNAK ELVE: **Ha egy optikai rendszeren áthaladó fény irányát megfordítjuk, a fény ugyanazon az úton fog haladni az ellenkező irányban is.**

Fermat elve a megtört sugarakra is éppúgy érvényes, ahogyan a visszavert sugarakra. (lásd a 37-7 ábrát). Vagyis, *a fény* a két közeg közti határfelület egyik és a másik oldalán lévő pont közötti *összes lehetséges út közül azon halad, melynek megtételéhez a legrövidebb idő szükséges*. A Snellius törvény ténylegesen levezethető Fermat-elvéből (lásd a 37C-37 problémát).



37-7 ábra
Fermat elvének alkalmazása a fénytörésre. Az *S* fényforrásból kiinduló összes sugár közül csak egy halad át a *P* ponton. Ez a sugár a síkban fut, eleget tesz Snellius törvényének ($n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$) és az *S* és *P* pont közti út megtételéhez a legrövidebb időt veszi igénybe. (Fermat elv). Még ha a többi lehetséges pályákon, amelyeket szaggatott vonalakkal jelöltünk, a távolság rövidebbnek is tűnik, a megtételükhöz szükséges idő hosszabb, így ezek a fény számára nem „járható" utak.

37-1 PÉLDA

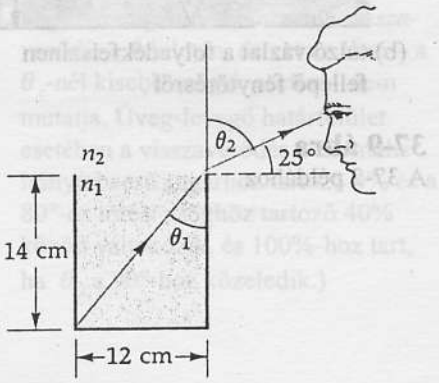
Egy 14 cm magas és 12 cm átmérőjű konzervdobozban ismeretlen folyadék van színültig. Egy megfigyelő a vízszinteshez képest 25° szögben tekint az edényre és éppen látja az edény belsejének alsó szélét. Határozzuk meg a folyadék törésmutatóját.

MEGOLDÁS

A folyadékon keresztülhaladó fénysugár $\theta_1 = \text{arctg}(12/14) = 40{,}6°$ szöggel érkezik a felszínre. A levegő törésmutatója $n_2 = 1{,}0000$ (négy értékes jegyre). Alkalmazzuk Snellius törvényét a levegőbe kijutó megtört sugárra, amelynek iránya $\theta_2 = 65°$. Ekkor

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$
$$n_1 \sin 40{,}6° = (1{,}00) \sin 65°$$

Ezt n_1-re megoldva adódik $$n_1 = \frac{\sin 65°}{\sin 40{,}6°} = 1{,}39$$



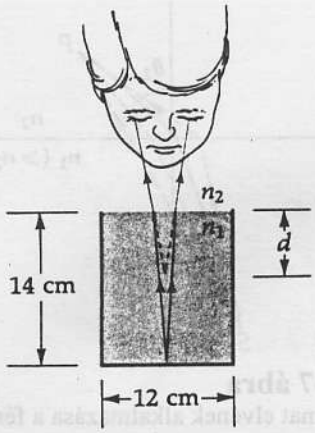
37-8 ábra
A 37-1 példához

A látszólagos mélység

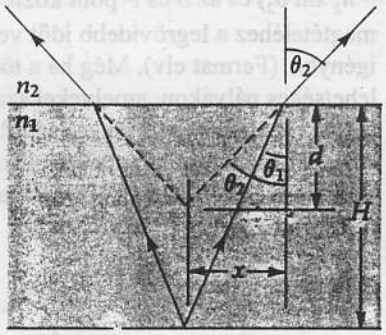
Amikor függőlegesen lefelé egy vödör vízbe nézünk, a vödör feneke észrevehetően magasabban látszik, mint a padló szintje. Hogyan ítélhetjük meg rátekintésre a távolságot? Az emberi mélységérzékelés különböző tényezők hatására alakul ki. Az egyik tényező az érzékelt méret összehasonlítása ismert méretű tárggyal. Távoli tájképek esetén a légköri pára is hasznos információt ad. (Ilyen pára nélkül az ember könnyen alábecsüli a „közeli" hegyek távolságát.) Hozzánk közeli tárgyak esetén segít az ún. parallaxis-effektus, ami akkor lép fel, ha fejünket lassan elfordítjuk. Két szemünket ugyanis kissé különböző irányba kell beállítanunk, mert a közeli tárgyakról kiinduló fénysugarak nem párhuzamosak, hanem széttartóak. Tudatunk a szerzett tapasztalatok alapján ezt a beállítást hozza kapcsolatba a távolsággal a becslés során. A következő példa ezt az utóbbi módszert használja a távolság becslésére.

37-2 PÉLDA

Megfigyelő függőlegesen néz bele a 37-1 példában említett edénybe. Mi a folyadék látszólagos mélysége?



(a) függőlegesen belenézünk egy folyadékot tartalmazó edénybe



(b) túlzó vázlat a folyadékfelszínen fellépő fénytörésről

37-9 ábra
A 37-2 példához

MEGOLDÁS

A 37-9a ábrán berajzolt két fénysugár az edény aljáról széttartóan jön a felszín felé. Ahogy kilépnek a levegőbe, széttartásuk tovább nő a fénytörés miatt. A megfigyelő számára úgy tűnik, hogy a fénysugarak a felszín alatt d távolságról indultak. Hogy a vízfelszínen bekövetkező fénytörés szerepét hangsúlyozzuk, ezt a hatást eltúloztuk a 37-9b ábrán. A példában szereplő szögek valójában olyan kicsik, hogy alkalmazhatjuk a kis szögekre vonatkozó közelítéseket. Nevezetesen

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \theta_1 \quad \text{és} \quad \sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 \approx \theta_2$$

(A jelölés egyszerűsítése érdekében a közelítő egyenlőség jelét a továbbiakban az egyenlőség jelével helyettesítjük.) A trigonometriából adódóan $x = d \text{ tg } \theta_2$ és $x = H \text{ tg } \theta_1$. Ha az x mennyiséget ezekből az egyenletekből kiküszöböljük és a kis szögekre vonatkozó közelítést alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\theta_1 H = \theta_2 d \tag{37-6}$$

Snellius törvénye szerint. $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

De $\sin\theta \approx \theta$ miatt $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ (37-7)

A (37-6) és a (37-7) egyenletekből

A LÁTSZÓLAGOS MÉLYSÉG (a határfelületre merőlegesen tekintve)[4]

$$d = H\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{37-8}$$

Így $$d = 14\,\text{cm}\left(\frac{1{,}00}{1{,}39}\right) = 10{,}1\,\text{cm}$$

37.3 Teljes visszaverődés

Amikor a fény egy adott törésmutatójú közeg határához ér és hirtelen egy más törésmutatójú közegbe lép át, a határfelületen mindig fellép valamilyen visszaverődés is. Különleges esetet képez az, amikor a második közeg törésmutatója kisebb, mint az elsőé. Bizonyos feltételek mellett a visszaverődés eléri a 100%-ot és *a határfelületen egyáltalán nem lép át fény.* Ennek belátására induljunk ki Snellius törvényéből:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

A 37-10 ábrán látható, hogy a beesési szög növekedésével a törési szög 90° felé tart. A határesetben, amikor éppen 90°, sin90° = 1 és ezért

$$\sin\theta_1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)1$$

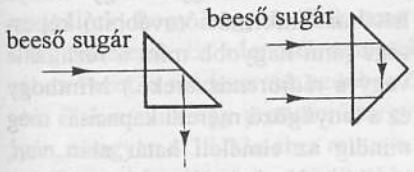
[4] Minthogy a kis szögekre vonatkozó közelítést használtuk a látszólagos mélység képletének levezetésében, ez csak abban az esetben érvényes, ha az edény fenekéről érkező fénysugarak csaknem merőlegesen érnek a folyadék-levegő határfelülethez. Amikor ez nem teljesül, akkor a látszólagos mélység erősen megváltozik. Figyeljük meg pl., hogy a (nyugodt vizű) úszómedence alja görbültnek látszik, amikor a medence széléről vizsgáljuk. Vegyük észre azt is, hogy a kép változik ha a medence körül sétálunk.

A θ_c **kritikus szögnél** nagyobb beesési szög esetén a teljes visszaverődés lép fel és nem lesz megtört sugár.

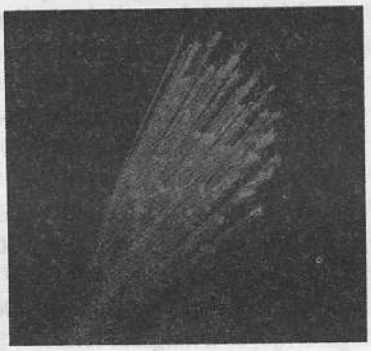
A TELJES VISSZAVERŐDÉS θ_c HATÁRSZÖG

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad n_2 < n_1\text{-nél} \qquad (37\text{-}9)$$

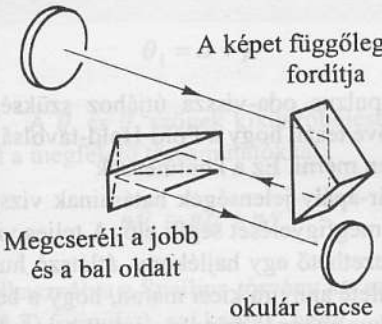
(Természetesen teljes visszaverődés nem lép fel abban az esetben, ha a fény kisebb törésmutatójú közeg felől érkezik a nagyobb törésmutatójú közegbe.)
A teljes visszaverődésnek egész sor gyakorlati alkalmazása van. Például a prizmás távcsövekben (37-11b ábra) a kép azért lesz egyenes állású, mert a fény több, 45°-os visszaverődést szenved a távcsőbe épített prizmákon. Minthogy 45° nagyobb, mint az üvegre vonatkozó határszög, a fény visszatükrözésére inkább egyszerű üvegprizmát használunk, mint ezüstbevonatú tükröt (a bevonat ugyanis idővel károsodik). A visszaverődés az üveg belső felületén 100%-os. Hasonlóképpen tömör üveg saroktükrök, amelyek oldalai rendre pontosan 90°-os szögben találkoznak, felhasználhatók arra, hogy a teljes beeső fényt az eredeti irányba térítsék vissza. Ilyen saroktükörrendszereket helyeztek már el a Holdon azért, hogy a Földről indított lézer



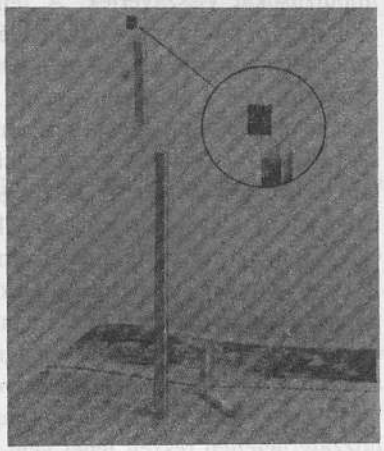
(a) Az egyenlőszárú derékszögű háromszög alapú üvegprizmák a fényt a teljes belső visszaverődés miatt verik vissza



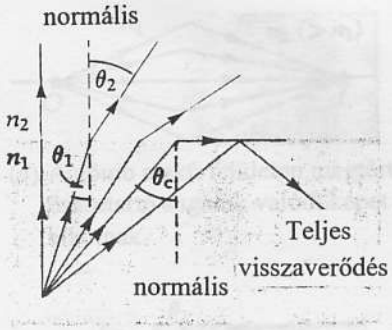
(c) A fény üvegszálakon is továbbítható a teljes visszaverődés alapján.



(b) Optikai út prizmás látcső egyik csövében. A két 45° -os és egymáshoz képest derékszögben állított prizma a végső képet egyenes állásúvá teszi és a jobb és a bal oldalt sem cseréli fel. Minthogy a nagyítás az objektív lencse fókusztávolságával arányos, a prizma használata „felhajtogatja" a nagy optikai úthosszat, s a távcső így kezelhetőbbé, rövidebbé válik.

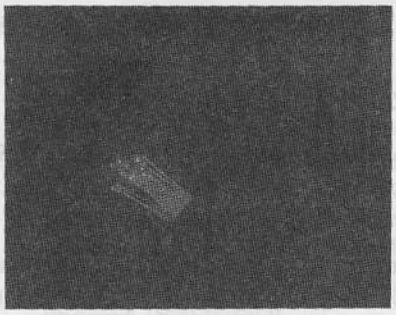


(d) Átlátszó szálak ezreit fénykábellé lehet összefogni és vele a valódi kép továbbítható még akkor is, ha a kábel útközben meghajlik.

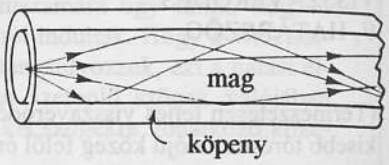


37-10 ábra
Teljes visszaverődés. Amikor n_1 törésmutatójú közegben haladó fénysugár kisebb törésmutatójú közeghez ér, a sugár teljes visszaverődést szenvedhet a határfelületen. Ha a θ_1 beesési szög nő, a θ_2 törési szög is nagyobb lesz. A θ_c **határszög** a választóvonal a megtört sugár számára, mert ekkor a fény a határfelülettel majdnem párhuzamosan ($\theta_2 \approx 90°$) még kiléphet a közegből, míg kicsivel nagyobb beesési szög esetén már nem, a visszaverődés 100%-os lesz. Minden olyan szögre, amelyre $\theta_1 > \theta_c$, teljes visszaverődés áll elő. (Megjegyezzük, hogy mindig van valamennyi *visszaverődés* a felületen, de ezt az ábra – a θ_c-nél kisebb szögek esetén – nem mutatja. Üveg-levegő határfelület esetében a visszaverődés a normális irányú beeső sugárhoz tartozó 4% és a 80°-os törési szöghöz tartozó 40% között váltakozik, és 100%-hoz tart, ha θ_2 a 90°-hoz közeledik.)

37-11 ábra
Példák teljes visszaverődésre.



(a) Nagytávolságú távközlésre használt üvegszálak. Jelenleg erősítés, (ismétlés) nélkül kb. 50 km-ig lehet használni, ezen túl az abszorpciós veszteségek pótlásáról kell gondoskodni.



(b) A szál magjában a fény továbbítása a teljes belső visszaverődés mechanizmusával történik. Az egyik használatos száltípus átmérője 50 μm, vagyis kb. akkora, mint egy emberi hajszálé. Más esetekben előfordultak már 2 μm magátmérőjű szálak is.

37-12 ábra

Távközlés optikai szállal. Az elmúlt 20 évben hatalmas fejlődés tapasztalható az optikai üvegszálak információtovábbítási alkalmazásai terén. A fényimpulzusok sorozatában (*digitális modulálással*) kódolt információt hordozó fénysugarat az üvegszál magja vezeti. Bár a szál elhajolhat, a fény a szál magjában marad a falakon fellépő teljes visszaverődés következtében. A magot külső, kisebb törésmutatójú üvegréteg borítja, és a magszál felületét védi a nedvesség, a por, az olaj, stb... szennyezése ellen. Ez ugyanis optikailag „kilyukaszthatja" a szálat, mert a falon való visszaverődés körülményeit befolyásolja. Az optikai szálas távközlés egyik nagy előnye hatalmas információtovábbító képessége (ami nagyobb mint a rézhuzalé vagy a rádiórendszereké.) Minthogy ez a lenyűgöző méretű kapacitás még mindig az elméleti határ alatt van, további előrehaladás várható. A további előnyök: kis méret és súly, elektromos zavarokkal szemben mutatott immunitás, lehallgatással szembeni biztonság és az olcsóság. (Lásd a 37B-14, a 37C-42 és 37C-43 feladatokat)

impulzusokat visszaverjék. A fényimpulzus oda-vissza útjához szükséges időtartam pontos mérése ugyanis lehetővé teszi, hogy a Föld-Hold-távolságot centiméteres pontossággal meg lehessen mérni. Ez a kontinensek vándorlásának a tanulmányozását, az ár-apály-jelenségek hatásainak vizsgálatát és más hasonló jelenségek pontos megfigyelését segíti elő. A teljes visszaverődés miatt a fény gond nélkül vezethető egy hajlékony, átlátszó huzalon, az ún. *fénykábelen*, ha a szál görbülete annyira kicsi marad, hogy a belül haladó fény a szál felületére a θ_c kritikus szögnél mindig nagyobb szögben esik. Néhány századmilliméter átmérőjű fénykábeleket használhatnak a rádió, a televízió és a telefonvonalak nagy távolságba való átvitelére, de komputer-adatok gyors továbbítására is. (lásd a 37-12 ábrát). A néhány ezredmilliméter átmérőjű üvegszálak eléggé hajlékonyak ahhoz, hogy a belőlük összeállított nyaláb használható legyen az orvosi gyakorlatban, az emberi test belső szerveinek vizsgálatában; vagy a technikában, ahol a mechanizmusok hozzáférhetetlen részeit lehet vele megnézni. A természet a száloptika elvét már millió évek óta használja, egyes rovarok és rákfélék ugyanis olyan érzékelővel rendelkeznek, amely száloptika-köteg segítségével továbbítja a fényt a külső cornea lencsék és a mélyen a test belsejében elhelyezkedő fényérzékelő szervek között.

37-3 PÉLDA

Adjuk meg a 2,14 törésmutatójú átlátszó műanyagra a teljes visszaverődés határszögét, ha 1,63 törésmutatójú olajba merítjük.

MEGOLDÁS

A határszöget a (37-9) képlet adja meg $\sin\theta_c = n_2/n_1 = 1{,}63/2{,}14 = 0{,}762$. Ebből

$$\theta_c = 49{,}6°$$

37.4 Fénytörés gömbfelületen

A legtöbb közhasználatú optikai berendezésben inkább lencséket használunk, mint tükröket, mert tartósabbak és könnyebb az optikai rendszer egyéb elemeivel kombinálni őket. A lencsék tanulmányozásában első lépésként azt vizsgáljuk, hogy hogyan törik meg a fény, amikor gömbfelülettel határolt üvegtestre esik. Ez a lencsék tanulmányozására alkalmas módszer kidolgozásához vezet, a módszernek azonban önmagában is hasznos alkalmazásai vannak. Tekintsünk egy pontszerű tárgyat a két közeg közti gömbfelület tengelyén, ahogyan a 37-13a ábra mutatja. Először vegyük azt az esetet, amelyben minden sugár eléggé megtörik ahhoz, hogy mindegyikük még a közegben elmetssze a tengelyt. Bebizonyítjuk, hogy kis szögű közelítésben minden sugár egy valódi képpontba, az I pontba tart.

Egyetlen sugarat meghúzva, ahogyan a 37-13b ábra mutatja, látjuk, hogy a sugár a tengelyt a CI képtávolságnál metszi. Felhasználva, hogy a háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, az ábra két háromszögére rendre adódik, hogy

$$\theta_1 = \alpha + \gamma \qquad \text{és} \qquad \gamma = \theta_2 + \beta \qquad \textbf{(37-10)}$$

A θ_1 és θ_2 szögek kiküszöbölésére szorozzuk meg ezeket az egyenleteket a megfelelő törésmutatókkal:

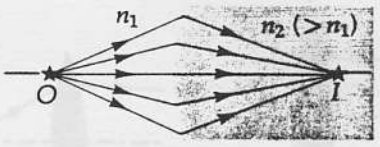
$$n_1\theta_1 = n_1\alpha + n_1\gamma \qquad \text{és} \qquad n_2\theta_2 = n_2\gamma - n_2\beta$$

Felhasználva a Snellius-törvény kis szögekre érvényes közelítő alakját (lásd a (37-7) formulát), azt kapjuk, hogy

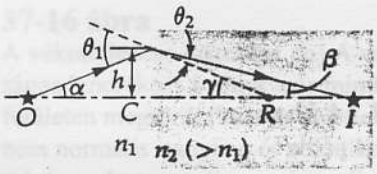
$$n_1\alpha + n_2\beta = (n_2 - n_1)\gamma \qquad (37\text{-}11)$$

Minthogy α, β és γ kicsi, $\alpha = \operatorname{tg}\alpha = h/OC$, $\beta = \operatorname{tg}\beta = h/IC$ és $\gamma = \operatorname{tg}\gamma = h/RC$, a (37-11) egyenletből

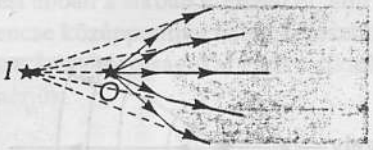
$$\frac{n_1}{OC} + \frac{n_2}{IC} = \frac{n_2 - n_1}{RC} \qquad (37\text{-}12)$$



(a) A gömb alakú felületen megtört összetartó sugarak valódi képet alkotnak.

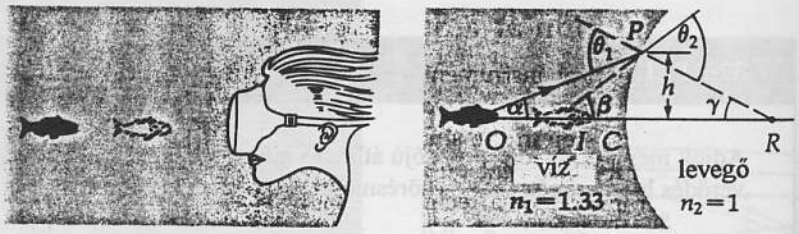


(b) Az O tárgyból az I képbe tartó sugármenet.



(c) Ha a fénytörés nem elegendő ahhoz, hogy összetartó sugarak jöjjenek létre, akkor virtuális kép alakul ki a közegen kívül. (A virtuális képet természetesen csak a közegben lévő megfigyelő láthatja, mert a sugaraknak a határfelületen meg kell törniük a kép létrehozásához.)

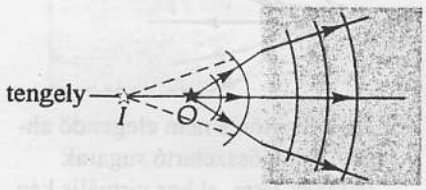
37-13 ábra
Fénytörés két közeg közötti gömbfelületen.



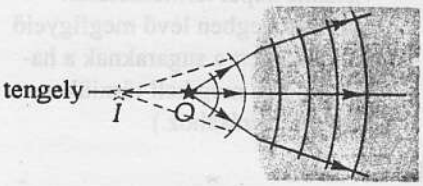
a) Búvármaszkot viselő úszó, ha a maszk átlátszó lapja kifelé domborodik, a szembejövő hal képét közelebbinek látja, mint amenynyire a hal van tőle.

b) A halról érkező fénysugarak széttartását jócskán eltúlozzuk, hogy világosabban rámutathassunk a búvármaszk átlátszó lemezén, mint a víz és levegő határfelületén bekövetkező fénytörési jelenségre.

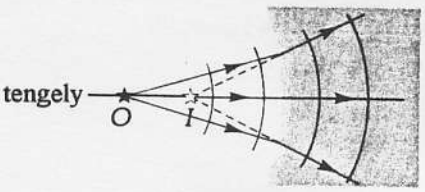
37-14 ábra
37-4 példa



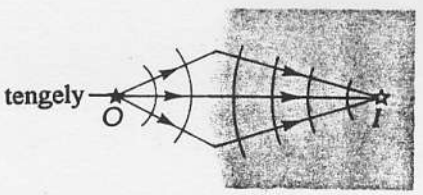
a) Sík



b) Konvex



c) Konkáv



d) Konvex

37-15 ábra
Fénytörés egyetlen határfelületen. Az árnyékolt tartományok törésmutatója a nagyobb. A szaggatott vonalak a megtört sugarak folytatásai, ezek virtuális képet alkotnak.

adódik. A t tárgytávolság, és a kis k távolság valamint az R görbületi sugár bevezetésével nyerjük, hogy

FÉNYTÖRÉS EGYETLEN GÖMB ALAKÚ HATÁRFELÜLETEN

$$\frac{n_1}{t}+\frac{n_2}{k}=\frac{n_2-n_1}{R} \qquad (37\text{-}13)$$

A szokásos előjelkonvenció alkalmazható a t és a k esetére, ha R pozitív a konvex külső felületeknél (vagyis, ha a görbületi középpont a közegen belül van). Az, hogy h és θ nem szerepel a képletben, azt jelenti, hogy minden fénysugár, amit a határfelület megtör, ugyanabba az I képpontba tart (már amennyire az alkalmazott kis szögű közelítés érvényességi körén belül vagyunk). Ha a sugarak nem törnek meg annyira, hogy a közegben egy ponthoz tartsanak, akkor széttartó egyeneseik visszafelé való meghosszabítása a határfelület bal oldalán, egy I virtuális képpontban találkoznak, amint ez a 37-13c ábrán látható. Az alábbi példa illusztrálja ezt a helyzetet.

37-4 PÉLDA

Búvár kis halat lát a búvármaszkján keresztül, ahogyan a 37-14a ábra mutatja. A maszk ablaklemeze kifelé domborodik, 0,40 m görbületi sugarú külső konvex felületet hozva létre. Ha a hal tényleges távolsága a búvártól 3,0 m, akkor milyen távolinak látja azt a búvár?

MEGOLDÁS

Tekintsünk el az ablaklemez vastagságától. Az ablaklemez határfelület a víz ($n_1 = 1{,}33$) és a maszkban lévő levegő ($n_2 = 1$) között. Ha a haltól kiinduló egyetlen sugár útját rajzoljuk meg, ahogyan a 37-14b ábrán is látszik, két háromszög alakul ki, amelyekben $\theta_1 = \alpha + \gamma$ és $\theta_2 = \beta + \gamma$. Snellius törvényét felhasználva, $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ miatt, úgy járunk el, mint fentebb és azt kapjuk, hogy

$$\frac{n_1}{OC}-\frac{n_2}{IC}=\frac{n_2-n_1}{RC}$$

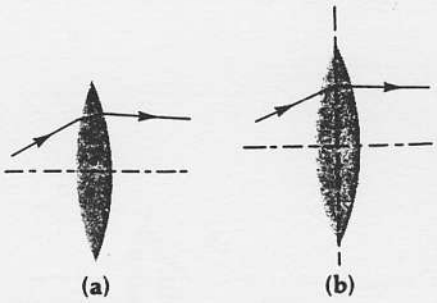
A megfelelő számértékeket behelyettesítve:

$$\frac{1{,}33}{3{,}00\,\text{m}}-\frac{1}{IC}=\frac{1{,}00-1{,}33}{0{,}40\,\text{m}}$$

Az IC mennyiségre rendezve IC = 0,788 m

A tényleges 3 m helyett a látszólagos távolság csak 0,788 m. Nyilvánvaló, hogy a domború homloklap a tényleges távolságokat nagy mértékben eltorzítja. Ahogyan a 37-2 példában megmutattuk, a sima lap a hal képét 2,3 m-re hozná, ami a tényleges távolsághoz mégiscsak közelebb esik.

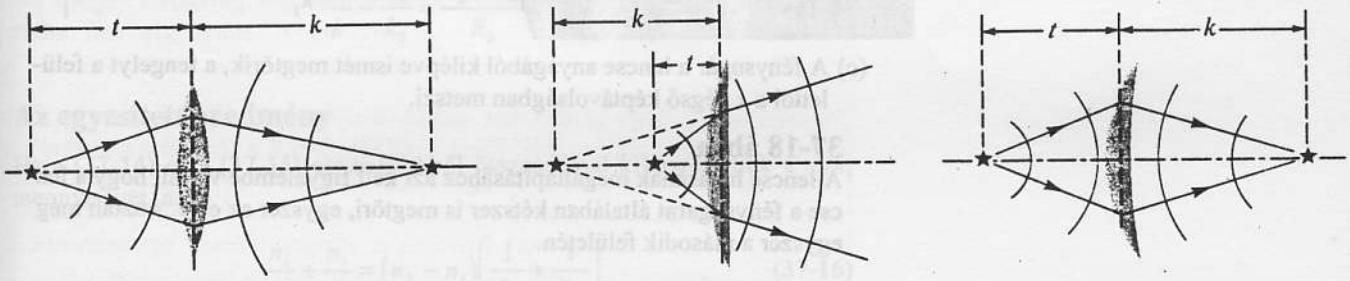
A 37-15 ábra példákat sorol fel arra, hogy az optikai tengelyen lévő tárgyból kiinduló sugarakat a közeg határfelülete hogyan töri meg. A domború felület létrehozhat valódi és virtuális képet is.



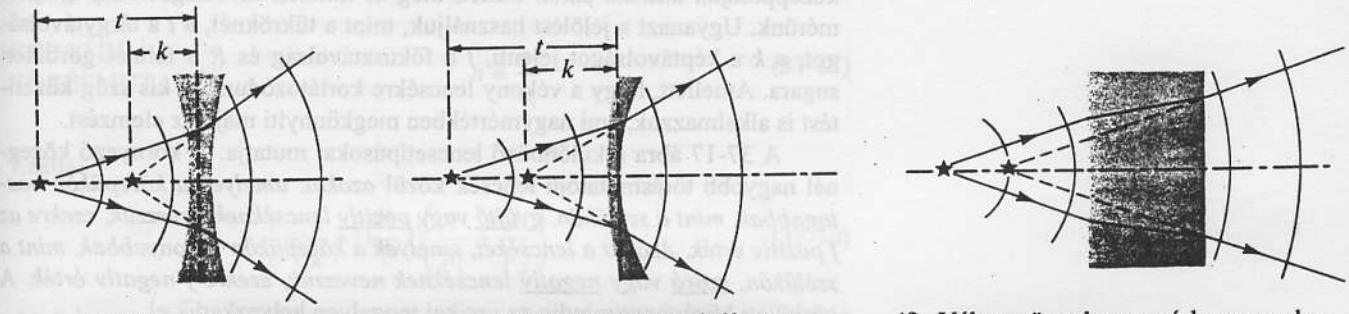
37-16 ábra
A vékonylencse-közelítés. (a) A valóságos lencséknél a fénysugár mindkét felületen megtörik (hacsak véletlenül nem normális irányban ér a felületre). (b) A sugármenet-diagramban elhanyagoljuk a lencse vastagságát és feltesszük, hogy a sugár minden fénytörést abban a síkban szenved el, ami a lencse középpontján halad keresztül. A t, k és f távolságokat ettől a síktól mérjük.

37.5 Vékony lencsék

A legtöbb lencsét gömbfelületek határolják, amelyek mindegyike hozzájárul a fénytöréshez. Így, hacsak a sugár nem merőlegesen esik be a határfelületre, a sugár iránya a lencsébe belépve és onnan kilépve is megváltozik (lásd a 37-16a ábrát). Tárgyalásunkat a vékony lencsék esetére korlátozzuk, amikor a lencse vastagsága elhanyagolható a többi távolsághoz képest. Ez a vékony-

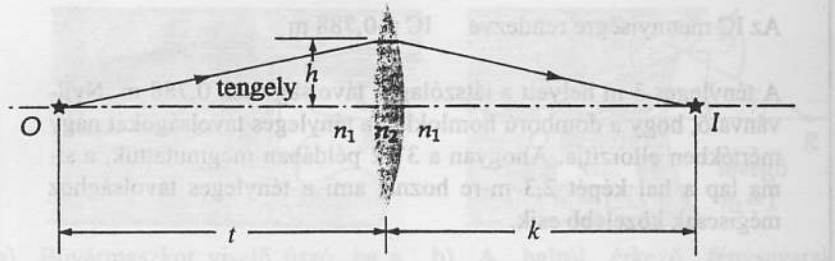


(a) Bikonvex gyűjtőlencse. (b) Plankonvex gyűjtőlencse. (c) Meniszkusz gyűjtőlencse.

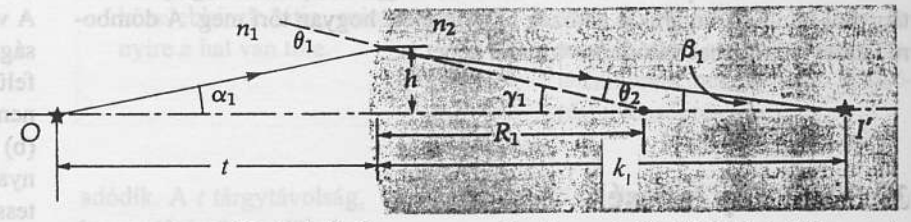


(d) Bikonkáv szórólencse. (e) Meniszkusz szórólencse. (f) Vékony üveglemez párhuzamos lapokkal virtuális képet hoz létre

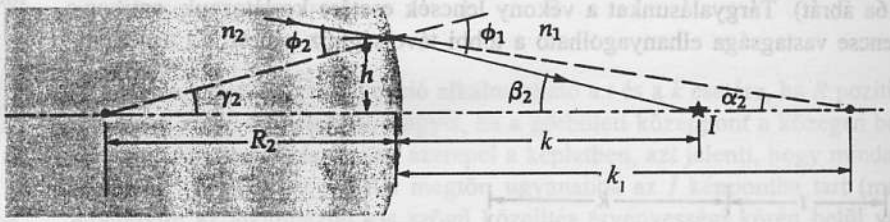
37-17 ábra
A lencséket aszerint nevezzük el, hogy milyen felületek határolják őket. A szaggatott vonalak a fénysugár meghosszabbításai a virtuális kép helyének megállapításához. A gyűjtőlencsék mindig vastagabbak a közepüknél, mint a széleiken. A szórólencsék mindig vékonyabbak a közepüknél, mint a széleiken. (Ez persze feltételezi, hogy a lencse anyagának a törésmutatója nagyobb, mint a környező anyagé.)



(a) Az O tárgy I képét hozza létre a lencse. A lencse törésmutatója n_2 és $n_2 > n_1$.



(b) Az O tárgyból kiinduló fénysugarat először az első határfelület töri meg. A szaggatott vonal a felület normálisa. Ha a fénysugár a közegben maradna, akkor a tengelyt az I' pontban metszené.



(c) A fénysugár a lencse anyagából kilépve ismét megtörik, a tengelyt a felülettől a k végső képtávolságban metszi.

37-18 ábra
A lencse hatásának megállapításához azt kell figyelembe venni, hogy a lencse a fénysugarat általában kétszer is megtöri, egyszer az első, s aztán még egyszer a második felületén.

lencse-közelítés azt jelenti, hogy nincsen különbség aközött, hogy a lencse elő- vagy hátlapjától mérjük a tárgy-, ill. képtávolságot. A sugármenet felrajzolásának megkönnyítése érdekében feltesszük, hogy a fénysugarak a lencse középpontján átmenő síkon törnek meg és minden távolságot ettől a síktól mérünk. Ugyanazt a jelölést használjuk, mint a tükröknél, a t a tárgytávolságot, a k a képtávolságot jelenti, f a fókusztávolság és R a felület görbületi sugara. Amellett, hogy a vékony lencsékre korlátozódunk, a kis szög közelítést is alkalmazzuk, ami nagymértékben megkönnyíti majd az elemzést.

A 37-17 ábra a különböző lencsetípusokat mutatja. A környező közegnél nagyobb törésmutatójú lencsék közül *azokat, amelyek a közepükön vastagabbak, mint a szélükön, gyűjtő vagy pozitív lencséknek nevezzük, ezekre az f pozitív érték. Azokat a lencséket, amelyek a közepükön vékonyabbak, mint a szélükön, szóró vagy negatív lencséknek nevezzük, ezekre f negatív érték.* A görbületi középpont mindig az optikai tengelyen helyezkedik el.

A lencsék fénytörésének elemzése háromlépéses folyamat: a) meghatározzuk a fény törését azon a lencsefelületen, amelyikkel a fénysugár először találkozik; b) meghatározzuk a fénytörést azon a felületen, amelyen keresztül a fény a lencsét elhagyja; c) kombináljuk az a) és a b) eredményeket, hogy meghatározzuk a t és k tárgy-, ill. képtávolság és a lencse paraméterei közötti összefüggést. Szerencse, hogy a vékonylencse-közelítésben a végeredmény egyszerű kifejezés.

Az első felület

Tekintsük a 37-18a ábrán bemutatott esetet. Az első felület, amit a fénysugár metszeni fog, a 37-18b ábrán látható, ahol t a tárgytávolság, és k_1 az a képtávolság, ami úgy jön létre, mintha a második felület nem is létezne. Az elemzésnek ez a lépése pontosan azonos azzal, amit az egyetlen törő felület esetére az előzőekben ismertettünk. – Az eredmény a (37-13) egyenlet –. Ennek a mostani esetnek a jelöléseivel ez az eredmény az

$$\frac{n_1}{t}+\frac{n_2}{k_1}=\frac{n_2-n_1}{R_1} \tag{37-14}$$

alakot ölti.

A második felület

A fénysugár, amint a második felületen át a levegőbe kilép, ismételten megtörik, ahogyan a 37-18c ábra mutatja. Ahelyett, hogy a valódi kép a k_1 távolságban keletkezne, már a k távolságban létrejön. Minthogy egy háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, fennáll, hogy $\phi_1=\gamma_2+\beta_2$ és $\phi_2=\gamma_2+\alpha_2$. Ezeket a Snellius-törvénybe behelyettesítve és a kis-szög-közelítést alkalmazva, $n_1\phi_1=n_2\phi_2$, miatt azt kapjuk, hogy

$$n_1\beta_2-n_2\alpha_2=(n_2-n_1)\gamma_2$$

Ismét felhasználva a kis-szög-közelítést, $\alpha_2\approx \operatorname{tg}\alpha_2=h/k_1$, $\beta_2\approx \operatorname{tg}\beta_2=h/k$ és $\gamma_2\approx \operatorname{tg}\gamma_2=h/R_2$, adódik, hogy

$$\frac{n_1}{k}-\frac{n_2}{k_1}=\frac{n_2-n_1}{R_2} \tag{37-15}$$

Az egyesített eredmény

Ha a (37-14) és a (37-15) egyenletekből összeadással kiküszöböljük a n_2/k_1 mennyiséget, az

$$\frac{n_1}{t}+\frac{n_1}{k}=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{37-16}$$

összefüggést kapjuk, amit a lencsére jellemző n **relatív törésmutató** bevezetésével még egyszerűsíthetünk. Legyen n a lencse anyagának a környező anyag n_1 törésmutatójához viszonyított, relatív törésmutatója:

RELATÍV TÖRÉSMUTATÓ

$$n\equiv\frac{n_2}{n_1} \tag{37-17}$$

Ezáltal

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{37-18}$$

Az R konvex külső felületek esetén pozitív, a konkáv külső felületek esetén negatív (feltéve, hogy a lencse törésmutatója nagyobb, mint a környezeté).

Amint a tükrök esetében, a lencséknél is az *f fókusztávolság* definíció szerint az a képtávolság, ami a lencsére eső párhuzamos fénynyaláb esetén alakul ki ($t=\infty$). Ezt az értéket a (37-18) egyenletbe helyettesítve kapjuk a fókusztávolság és a lencse geometriai adatai közötti összefüggést:

VÉKONY LENCSÉK FÓKUSZTÁVOLSÁGA

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (37\text{-}19)$$

Végül a (37-18) és (37-19) képletek egybevetésével a *vékony lencsék leképezési törvényéhez*, vagy *lencsetörvényhez* jutunk[5]:

VÉKONYLENCSÉK LEKÉPEZÉSI TÖRVÉNYE

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \qquad (37\text{-}20)$$

A lencsetörvény általunk bemutatott levezetése a bikonvex lencse képalkotásának az elemzésén alapult. Ha a 37-17 ábrán bemutatott más eseteket elemeztünk volna, akkor is hasonló eredményhez jutottunk volna, azonban egyes tagok előjele megváltozott volna. De tapasztalhatjuk, hogy ha az alábbi előjelkonvenciót elfogadjuk, akkor a leképezési törvény érvényes marad az összes esetre.[6]

ELŐJELKONVENCIÓ VÉKONY LENCSÉKNÉL

(1) A *t* számértékének előjele pozitív, ha a lencséhez *közeledő* sugarak *széttartóak*. Egyéb esetekben *t* negatív.

(2) A *k* számértékének előjele pozitív, ha a lencsét *elhagyó* sugarak összetartóak. Egyéb esetekben *k* negatív.

(3) Feltéve, hogy a lencse anyagának a törésmutatója nagyobb, mint a környező közegé, a lencse külső felületének *R* görbületi sugara pozitív, ha a felület kívülről nézve konvex és negatív, ha konkáv.*

Figyeljük meg, hogy az első két szabály azonos a tükrökével. Ami az *R*-et illeti, a mi előjelkonvenciónk mind a tükrök, mind a lencsék felületére az alábbi módon konzisztens: *ha egy beeső síkhullám konvergáló hullámmá válik, akkor az* R *erre a felületre pozitív és megfordítva.*** Ajánlatos az előjelkonvenciót memorizálni, mert lényeges a vékony lencsék egyenletének a használatakor.

37.6 A dioptria

A lencse *erőssége* azt mutatja meg, hogy a lencse mennyire tudja megváltoztatni a fénysugár irányát; ezt **dioptriában** adjuk meg. A dioptria definíció szerint a *méterben mért fókusztávolság reciprok értéke*:

---

[5] A vékony lencsék leképzési törvényében *t* és *k* felcserélhető. Ez vezette Helmholtz német fizikust arra a felismerésre, hogy a *fénysugár útja megfordítható*.

[6] Több más előjelkonvenció is használatos. A tükrökre vonatkozóan a 36. fejezet 6. lábjegyzetében említett megállapodás párja a következő: A *t*, a *k* és *f* mindegyike pozitív, ha egy gyűjtőlencse valódi tárgyról valódi képet alkot. Ettől a szabványesettől való minden egyes eltérést egy minusz előjellel kell figyelembe venni. Eltérésnek számít az is ha *t* kisebb, mint a lencse *f* fokusztávolsága. Mivel a fény áthalad a lencsén, a valódi kép a lencse túloldalán alakul ki. Az *R* előjelét a fenti (3) szabály határozza meg.

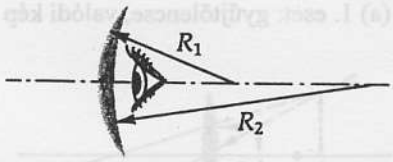
* A (3) megállapodás szokatlan. Az általánosan elfogadott szabály szerint függetlenül a törésmutatótól a lencse bármely felületének görbületi sugara pozitív, ha a lencsén belülről nézve a határfelület homorú. *(A fordító megjegyzése.)*

** Ez a megállapítás is kissé félreérthető, ezt az előjelkonvenciót a lencsék esetén a fókusztávolság fogalmára érdemes alapozni, ahol az előjelet az $n_2 - n_1$ és a sugarakra vonatkozó megállapítás együtt szabja meg. *(A fordító megjegyzése.)*

$$\text{D} = \text{a lencse erőssége (dioptriában)} = \frac{1}{f\ (\text{méterben})}. \qquad (37\text{-}21)$$

37-5 PÉLDA

Gyűjtő szemüveglencse koronaüvegből készült ($n = 1{,}5$). Ahogy a 37-19 ábra mutatja, a görbületi sugarak $R_1 = 15$ cm és $R_2 = -30$ cm. (A negatív előjel azért jelenik meg, mert a külső felület konkáv). Adjuk meg a lencse (a) fókusztávolságát és (b) erősségét. (c) Határozzuk meg, hogy hol lesz a lencse előtt 20 cm-re lévő könyv képe.



37-19 ábra
37-5 feladat

MEGOLDÁS

(a) A levegőben lévő lencsére a relatív törésmutató egyenlő a koronaüveg törésmutatójával. A számértékek behelyettesítése a (37-19) egyenletbe adja, hogy

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = (1{,}50-1)\left(\frac{1}{15\,\text{cm}} + \frac{1}{(-30\,\text{cm})}\right)$$

Ezt f-re megoldva: $f = +60{,}0$ cm

A pozitív előjel azt jelenti, hogy gyűjtőlencséről van szó, amely a közepén vastagabb, mint a szélén.

(b) A lencse erőssége pedig

$$\text{erősség} = \frac{1}{f\,(\text{méterben})} = \frac{1}{0{,}60\ \text{m}} = 1{,}67\ \text{dioptria}$$

(c) A kép helyének megállapításához induljunk ki a leképezési törvényből:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{20\,\text{cm}} + \frac{1}{k} = \frac{1}{60\,\text{cm}}$$

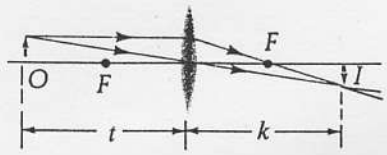
A t képtávolság számértékének előjele pozitív, mert a tárgytól kiinduló sugarak a a lencsét széttartóan érik el. Az egyenletet k-ra megoldva

$$k = -30{,}0\ \text{cm}$$

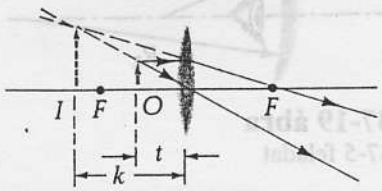
A negatív előjel azt jelenti, hogy a sugarak a lencsét széttartóan hagyják el, azaz a kép *virtuális* és a lencsének ugyanazon az oldalán lesz, mint a tárgy, a lencsétől 30 cm távolságban. Ha a lencsén átnézünk, akkor látni fogjuk a képet.

37.7 A vékony lencse sugármenetei és a kép nagysága

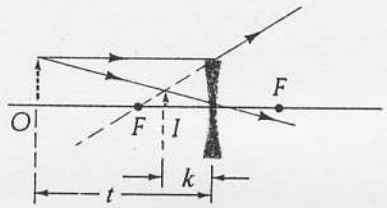
Most rátérünk a sugármenetek megszerkesztésének módszerére, amit a vékony lencsék által alkotott kép helyének meghatározására használhatunk. Ez a módszer hasonló ahhoz, amit a tükrök esetében alkalmaztunk. A vékony lencsék esetén azonban többnyire két fókuszpontot is bejelölünk, amelyek a lencse két oldalán azonos távolságban helyezkednek el. Ez azt jelenti, hogy a gyűjtőlencsére bármelyik oldalról is essék paraxiális – a tengellyel közel párhuzamosan haladó – sugárnyaláb, az a másik oldalon a fókuszpontban egyesül. (Szórólencsék esetén pedig a megtört sugarak visszafelé való meghosszabításai metszik egymást a lencse innenső oldalán levő fókuszpontban.)



(a) 1. eset: gyűjtőlencse, valódi kép



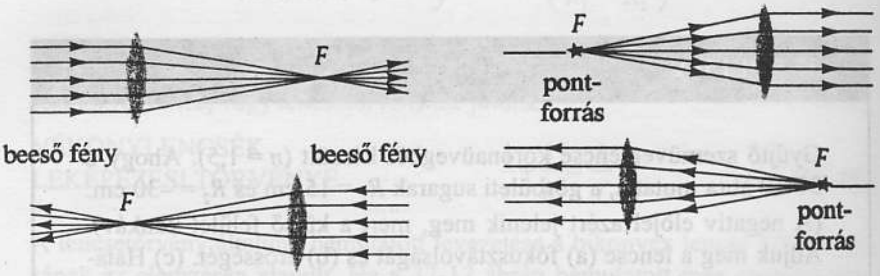
(b) 2. eset: gyűjtőlencse, virtuális kép



(c) 3. eset: szórólencse, virtuális kép

37-21 ábra

Képalkotás vizsgálata a sugármenet követésével. Ha a lencsét elhagyó fénysugarak nem metszik egymást, a virtuális kép a tényleges sugár visszafelé történő meghosszabbításával – amit szaggatott vonalakkal jelöltünk – tűzhető ki.



(a) A lencse két oldalára eső párhuzamos fénynyaláb. Ha a lencse vékony, az f fókusztávolság mindkét oldalon ugyanakkora lesz.

(b) A lencse egyik, illetve másik oldali F fókuszpontjából, érkező fénysugarak. Ezek a lencse másik oldalán párhuzamos nyalábként távoznak.

37-20 ábra

A vékony lencse ugyanúgy téríti el a fényt függetlenül attól, hogy a fény a lencse melyik oldalára érkezik. Ez nem lesz igaz a vastag lencsék esetében!

Továbbá: gyűjtőlencse bármelyik oldalán lévő fókuszpontjából kiinduló sugarak a lencse másik oldalán a tengellyel párhuzamosan haladnak tovább. Ahogy a 37-20 ábra mutatja, a helyzet szimmetrikus abból a szempontból, hogy milyen irányból érkezik be a fény és halad át a lencsén. (Ez vastag lencsék esetén már nem igaz!)

Mint a tükörnél is, az F fókuszpont általában nem a kép helyét adja, kivéve azt az esetet, amikor a beeső fény párhuzamos az optikai tengellyel. Hasznos, ha úgy gondolunk a fókuszpontra, mint a lencséhez tartozó pontra, mely megkönnyíti a sugármenet megszerkesztését.

A sugármenet ábrázolásához két nevezetes sugarat húzhatunk meg[7], melyeket bármikor könnyű megszerkeszteni.

A VÉKONY LENCSÉK NEVEZETES SUGARAI

(1) A lencse középpontján áthaladó sugár irányváltoztatás nélkül halad tovább. (A középpont közelében a lencse úgy viselkedik, mint kicsiny planparalell lemez. Azt a kis oldalirányú sugáreltolódást, amit a tengellyel nem párhuzamosan haladó sugarakon ez okozna, a vékony-lencse-közelítésben bízvást elhanyagolhatjuk.)

(2) A tengellyel párhuzamos sugár úgy törik meg, hogy vagy maga a sugár, vagy meghosszabbítása az F fókuszponton halad át.

A 37-21 ábra a vékony lencsék által okozott fénytörés három különböző esetét mutatja be (feltéve, hogy a lencse törésmutatója nagyobb, mint a környező anyagé).

[7] Egy harmadik sugár is megrajzolható:

(3) Az a sugár, amelyik az F fókuszponton való áthaladás után esik a lencsére, a tengellyel párhuzamos irányban hagyja el a lencsét. (Ide tartozik az a nyaláb is, melynek meghosszabbítása halad át a fókuszponton!)

Ez a sugár azonban nem mindig kezelhető könnyen. (pl. a fókuszpont közelében lévő nagy méretű tárgyak esetében.)

1. eset. Gyűjtőlencse, valódi kép

A 37-21a ábrán a tárgy az O pontba helyezett nyíl, amely a fókusztávolságnál messzebb van a lencsétől. (Olyan tárgyat vizsgálunk, amelynek másik végpontja a tengelyen van, ez elegendő, mert a tárgyaknak az optikai tengely alatti része – a tengelyre vonatkozó szimmetria miatt – ugyanazt az eredményt adná.) Meghúzzuk a nyíl hegyéből azt a két sugarat, amit könnyű követni. Az egyik sugár a lencse középpontján halad át és nem változtatja az irányát. A másik a lencsét a tengellyel párhuzamosan közelíti meg, majd úgy törik meg, hogy a lencse F fókuszpontja felé tartson. E két sugár metszéspontja tűzi ki I-ben a nyílhegy képét. (A nyíl többi részét hasonló módon képezzük le, így létrejön az egész nyíl képe.) Minthogy a fénysugarak ténylegesen konvergálnak, a kép valódi, azaz a kép helyére tett ernyőn felfogható. A kép fordított állású, ahogyan ezt a sugármenet-ábráról le is lehet olvasni.

Az N **nagyítás** definíció szerint a képnagyság és tárgynagyság hányadosa:

$$\text{NAGYÍTÁS} \qquad N = \frac{\text{Képnagyság}}{\text{Tárgynagyság}} = -\frac{k}{t} \qquad \textbf{(37-22)}$$

A negatív előjelet azért vezettük be, hogy az N negatív előjele a fordított állású, pozitív előjele pedig az egyenes állású képre utaljon. Vagyis, ha t és k mindketten pozitívak, N negatív – ez tehát fordított állású képre utal. Ugyanez az előjelkonvenció igaz tetszőleges lencse és a tükör esetén is. A nagyítás elnevezés azonban kissé félrevezető, mert a kép lehet a tárgynál kisebb is – ekkor az N abszolút értéke egynél kisebb.

2. eset Gyűjtőlencse, virtuális kép

A 37-21b ábrán a tárgy a lencsétől a fókusztávolságnál kisebb távolságban van. Most is két sugarat követünk a nyíl hegyétől. Az egyik sugár irányváltozás nélkül halad át a lencse középpontján. A másik a lencsét a tengellyel párhuzamosan közelíti meg és a törés után a lencse fókuszpontján halad át. Meghatározzuk e két sugár metszéspontját úgy, hogy a sugarakat visszafelé meghosszabbítjuk a metszésig, ez kitűzi az I kép helyét. Minthogy a sugarak meghosszabbításain nem halad valódi fénysugár, ezért ezeket a vonalakat szaggatottan rajzoltuk. Ha a kép helyén nincs tényleges fénysugár, akkor a kép látszólagos, virtuális. (Az oda helyezett ernyő nem fogna fel semmiféle képet!) A kép egyébként egyenes állású, amit a sugármenet ábrája is mutat (s amit az N nagyítás pozitív értékéből is kiolvashatunk). Belátható, hogy mindazokban az esetekben, amikor a tárgy a fókusztávolságnál közelebb kerül a lencséhez, a kép a tárgynál nagyobb, mindig virtuális, egyenes állású, és a lencsének mindig ugyanazon az oldalán van, ahol a tárgy is.

3. eset Szórólencse, virtuális kép

Miként a 37-21c ábrán látszik, a nyíl hegyéből induló sugarak a lencsén való áthaladás után széttartóak, függetlenül attól, hogy milyen távol van a tárgy a lencsétől. Ennek következtében virtuális kép jön létre, ami mindig kisebb a tárgynál, és ugyanazon az oldalon van, ahol a tárgy is.

A sugármeneteket mutató ábrák nagy segítséget nyújtanak a képjellemzők meghatározásában, mert már maga a sugármenet-ábra is feltárja ezeket a tulajdonságokat. Ezért aztán nem szükséges memorizálni a plusz és mínusz jeleket a valódi és virtuális egyenes állású vagy fordított képekhez.

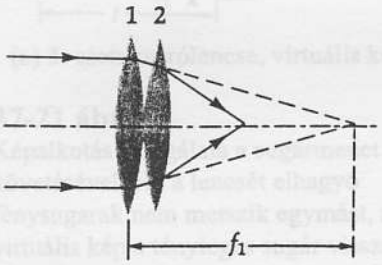
A képalkotás egy tulajdonságát azonban kiemeljük. Ha, mondjuk, a lencse felét eltakarjuk, akkor is mindig megmarad a teljes kép, csakhogy fele olyan fényesen. Valójában a lencse bármely kicsiny darabja is teljes képet hoz létre. Ennek oka nyilvánvaló, hiszen, emlékezzünk vissza, a lencse a beeső *hullámfrontra* hat (vagyis a tárgy *minden* egyes pontjából kiinduló minden egyes sugárra), nem pedig arra a néhány sugárra, amit a képszerkesztéshez rendszerint megrajzolunk.

37.8 Lencserendszerek

A legtöbb optikai berendezésben több lencséből álló lencserendszert alkalmaznak. A leggyakrabban a több lencséből álló rendszer segít abban, hogy bizonyos képalkotási hibákat korrigálni lehessen. Más esetekben, ha a végső kép több lépésben alakul ki, akkor a berendezés hossza tetemesen lecsökken ahhoz képest, mintha egyetlen lencsét használtunk volna. A tárgyalást egyszerű, két lencséből álló rendszerekre korlátozzuk.

Tekintsünk két vékony lencsét, melyek érintkeznek egymással, ez sok optikai berendezésben gyakorta előforduló eset. A 37-22 ábra két ilyen lencsét mutat, amelyek fókusztávolsága rendre f_1 és f_2. Balról párhuzamos fénynyaláb érkezik az ① lencsére, a sugarak a lencsétől f_1 távolságra találkoznának, ha a másik lencse nem volna jelen. A fény a ① lencsét elhagyva konvergál, összetartó nyaláb éri a ② lencsét. Ezért az előjelkonvenció miatt a második lencse számára a t_2 tárgytávolság $-f_1$. A lencse-törvény alkalmazásával

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{f_2}$$



37-22 ábra
Két vékony gyűjtőlencse, egymást érintő helyzetbe állítva.

Megjegyezve, hogy k_2 éppen a lencserendszer f fókusztávolságával egyenlő, adódik, hogy

$$\frac{1}{-f_1}+\frac{1}{f}=\frac{1}{f_2}$$

Átrendezés után

VÉKONY LENCSÉK EREDŐ FÓKUSZTÁVOLSÁGA (egymással érintkező helyzet)

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \qquad \textbf{(37-23)}$$

vagy D dioptriában kifejezve

$$D=D_1+D_2 \qquad \textbf{(37-24)}$$

A dioptria használata különösen hasznos a lencserendszerek esetén, mert az egymással érintkező két vékony lencse erőssége egyszerűen az összetevő lencsék erősségeinek az összege. Ezek olyan általános összefüggések, amelyek az egymással érintkező, gyűjtő és szóró lencsék tetszőleges kombinációira is érvényesek.

37-6 PÉLDA

Két vékony lencsét, melyek fókusztávolságai rendre $f_1 = 20$ cm és $f_2 = 60$ cm, egymást érintő helyzetbe hozunk. (a) Mekkora az összetett lencse f' fókusztávolsága? (b) Milyen f_3 fókusztávolságú vé-

kony lencsét illesszünk szorosan az előző kettő mellé ahhoz, hogy a lencse-hármas eredő fókusztávolsága $f'' = -40$ cm legyen?

MEGOLDÁS

(a) A számértékeket az eredő fókusztávolság képletébe helyettesítve a következőket kapjuk.

Fókusztávolságot használva

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{20\,\text{cm}} + \frac{1}{60\,\text{cm}}$$

$$f' = 15{,}0\ \text{cm}$$

Dioptriát használva

$$D_1 = \frac{1}{0{,}2\ \text{m}} = 5\ \textit{dioptria}$$

$$D_2 = \frac{1}{0{,}6\ \text{m}} = 1{,}67\ \textit{dioptria}$$

$$D' = D_1 + D_2$$

$$= (5 + 1{,}67)\ \text{dioptria}$$

$$D' = 6{,}67\ \text{dioptria}.$$

(b) Még egy további lencsét adva a kombinációhoz

$$\frac{1}{f''} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f_3}$$

$$\frac{1}{-40\,\text{cm}} = \frac{1}{15\,\text{cm}} + \frac{1}{f_3}$$

$$f_3 = -10{,}9\ \text{cm}$$

$$D'' = \frac{1}{-0{,}4\ \text{m}}$$

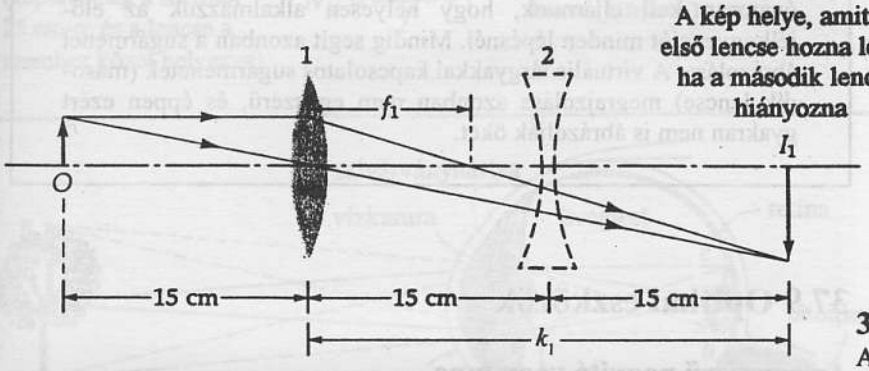
$$= -2{,}5\ \text{dioptria}$$

$$D'' = D' + D_3$$

$$-2{,}5\ \text{dioptria} = 6{,}67\ \text{dioptria} + D_3$$

$$D_3 = 9{,}17\ \text{dioptria}.$$

Ha pozitív és negatív fókusztávolságú lencsékből készítünk rendszert, akkor, amint azt a későbbiek során látni fogjuk, a kép bizonyos hibái kiküszöbölhetők.



37-23 ábra
A 37-7 példához

37-7 PÉLDA

Tekintsünk két lencsét, lásd a 37-23 ábrát. Egy tárgyat tegyünk a gyűjtőlencsétől 15 cm-re, a gyűjtőlencse fókusztávolsága $f_1 = 10$ cm. Helyezzünk $f_2 = -20$ cm fókusztávolságú szórólencsét a gyűjtőlencsétől 15 cm-re a lencse másik oldalán. Határozzuk meg a két lencse együttese által alkotott végső kép helyét és írjuk le a tulajdonságait!

MEGOLDÁS

Minthogy ez a két lencse *nem érintkezik* egymással, az eredő fókusztávolságra levezetett képletet nem használhatjuk. Ehelyett egyenként megvizsgáljuk az egyes lencsék képalkotását. Első lépésként az első lencse által alkotott kép helyét határozzuk meg úgy, mintha a második lencse ott sem volna. A leképezési törvényt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{15\,\text{cm}}+\frac{1}{k_1}=\frac{1}{10\,\text{cm}}$$

Ezt a k_1-re megoldva adódik, hogy $k_1 = 30$ cm

Így a kép 30 cm-re lenne az első lencsétől, a lencse másik oldalán (ha a másik lencse nem lenne ott). De mert a másik lencse az elsőtől jobbra van 15 cm-re, a fénysugarak még konvergálnak, mielőtt a másik lencsét elérnék (ezáltal virtuális tárgyat hoznak létre a számára). Így a második lencse számára a tárgytávolság $t_2 = -15$ cm. Akkor

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-15\,\text{cm}}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{-20\,\text{cm}}.$$

Ezt k_2-re megoldva adódik, hogy $k_2 = 60$ cm

A végső kép, 60 cm-re van a második lencsétől jobbra. Ez a kép fordított állású, mert az első lencse valódi fordított állású képet alkotott, míg a második lencse – szórólencse lévén – nem képes további képfordításra. Bár a lencse szórólencse, erőssége nem elegendő ahhoz, hogy a beeső összetartó sugarakat széttartóvá tegye; t_2 *pozitív* előjele *konvergáló* sugarakat jelent, amelyek a végső képet valódivá teszik.

A kétlencsés rendszer eredő nagyítása az

$$N = N_1 N_2 = \left(-\frac{k_1}{t_1}\right)\left(-\frac{k_2}{t_2}\right) = \left(-\frac{30\,\text{cm}}{15\,\text{cm}}\right)\left(-\frac{60\,\text{cm}}{-15\,\text{cm}}\right) = -8{,}00$$

szorzat. Ellenőrzésképpen megjegyezzük, hogy a negatív előjel fordított állású képet jelent.

De legyen szabad óvatosságra inteni az Olvasót! Mint ez a példa is megvilágítja, a több lencséből összetett rendszereknél óvatosan kell eljárnunk, hogy helyesen alkalmazzuk az előjelkonvenciót minden lépésnél. Mindig segít azonban a sugármenet ábrázolása. A virtuális tárgyakkal kapcsolatos sugármenetek (második lencse) megrajzolása azonban nem egyszerű, és éppen ezért gyakran nem is ábrázolják őket.

37.9 Optikai eszközök

Az egyszerű nagyító vagy lupe

A legegyszerűbb optikai eszköz a nagyítóként használt egyetlen lencse, vagy lupe. Az apróbetűs szöveg vagy parányi tárgy fölé gyűjtőlencsét helyezünk és addig mozgatjuk fel-le, míg a legjobb nagyított képet kapjuk. Minthogy a tárgy a lencse fókusztávolságánál közelebb van a lencséhez, a kép egyenes állású, ahogy ezt a 37-24b ábra is mutatja. Mennyire nagyítja fel a tárgyat a lencse és hogyan függ a nagyítás a lencse fókusztávolságától? A felelet bonyolult, mert a képtávolság igencsak rövid is lehet, de lehet a kép végtelen távolban is, attól függően, hogy a megfigyelő mekkora távolságot tart a látás

szempontjából a legkényelmesebbnek. A megfigyelő szeme tehát különböző távolságokban lehet a lencsétől, így a szem által látott kép látószöge változhat. A lehetőségek számának csökkentése érdekében csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor a megfigyelő szeme a lencséhez közel van.

Amikor nagyítót használunk, az érdekel bennünket, hogy a nagyító használatával mennyivel nagyobb képet látunk ahhoz az esethez képest, amikor a tárgyat szabad szemmel nézzük. Az úgynevezett normális látású ember tisztán képes látni azokat a tárgyakat, amelyek 25 cm-nél messzebb vannak. Egy tárgy akkor látszik a legnagyobb szög alatt, ha szemünkhöz a lehető legközelebb van. Definíció szerint a kényelmes látás legkisebb távolságát (az ún. tisztalátás távolságot) 25 cm-nek vesszük. Természetesen vannak olyan emberek, akik ennél közelebbről is jól látják a tárgyakat, míg vannak olyanok is, akik már ennyire közelről sem látnak tisztán. A 25 cm átlagos értéknek tekintendő.

Az N_{sz} **szögnagyítást** a következő hányadossal definiáljuk:

SZÖGNAGYÍTÁS

$$N_{sz} \equiv \frac{\left[\begin{array}{c}\text{a tárgy látószöge}\\ \text{a nagyítón keresztül nézve}\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}\text{a tárgy látószöge}\\ \text{szabad szemmel 25 cm távolságból nézve}\end{array}\right]} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \textbf{(37-25)}$$

A szabad szemmel 25 cm-ről nézett tárgy látószöge: $\beta \approx h/25$ cm, lásd a 37-24a ábrát. A nagyító használata esetén, amikor a lencse a szemhez közel van és a kép a szemtől 25 cm távolságban keletkezik (37-24b ábra), a $k = -25$ cm miatt a látószög: $\alpha \approx h/t$. Ha a leképezési törvényt az $1/t$ mennyiségre megoldjuk és behelyettesítjük a $k = -25$ cm értéket, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{-25\,\text{cm}}\right) = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{25\,\text{cm}}\right)$$

Tehát nagyító használata esetén a látószög

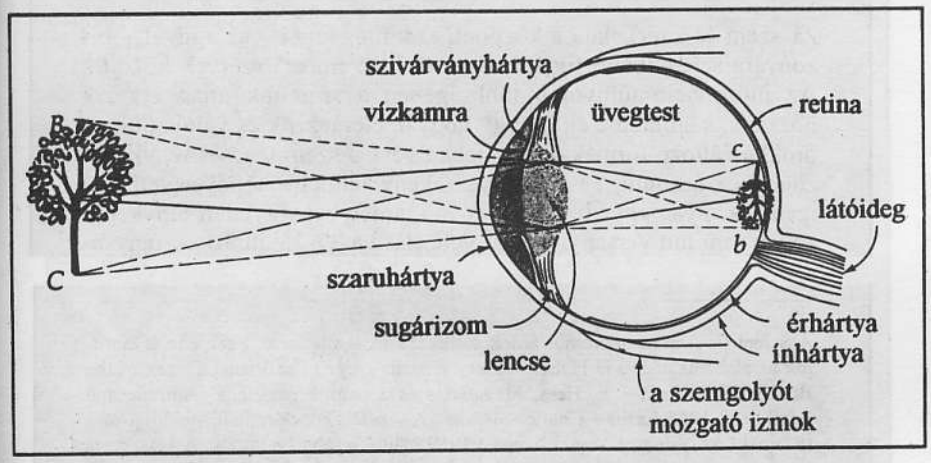
$$\alpha = \frac{h}{t} = h\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{25\,\text{cm}}\right).$$

Behelyettesítve a (37-25) képletbe, a szögnagyításra az alábbi eredményt kapjuk:

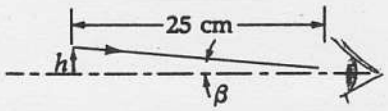
A NAGYÍTÓ SZÖGNAGYÍTÁSA (képtávolság a szemtől 25 cm-re és a lencse a szemhez közel helyezve)

$$N_{sz} = \frac{25\,\text{cm}}{f} + 1 \qquad \textbf{(37-26)}$$

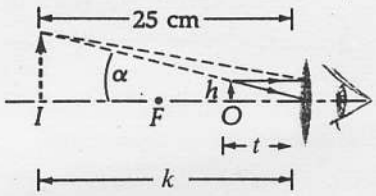
(Itt f centiméterekben van kifejezve.)



37-25 ábra
Az emberi szem egyszerűsített vázlata. A látóideg valójában a szem középpontján átmenő függőleges sík egyik oldalán van.



(a) A tárgyat szabad szemmel nézzük a tisztalátás számára legkényelmesebb távolságból. Ez átlagosan 25 cm. A tárgy $\beta = h/25$ cm szögben látszik.



(b) A szemhez közel helyezett nagyítólencsén keresztül nézzük a tárgyat, a kép a tisztánlátás kényelmes ($k = -25$ cm) távolságában alakul ki, a kép az $\alpha = h/t$ szögben látszik.

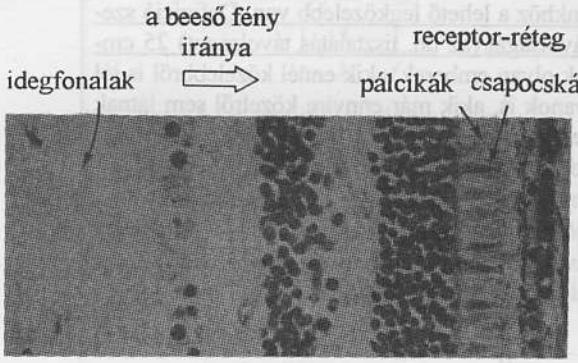
37-24 ábra
Az egyszerű nagyító.

Hasonló elemzést végezve el a végtelenben kialakuló kép esetére (37C-59 probléma), azt találjuk, hogy

A NAGYÍTÓ SZÖGNAGYÍTÁSA (kép a végtelenben)

$$N_{sz} = \frac{25\text{ cm}}{f}$$

(Itt f centiméterekben van kifejezve.) (37-27)





(a) Az emberi szem retinájának keresztmetszete idegszálak, véredények és más szövetek bonyolult rendszerét mutatja, amin keresztül kell haladnia a beeső fénynek, hogy elérhesse a pálcikákat és a csapocskákat. Ez a fedőréteg láthatóvá válik, ha becsukott szemünkhöz kicsiny fényforrást közelítünk. Kellő gyakorlattal észrevehető, hogy a véredények árnyékmintázatot vetítenek a pálcikákra és a csapocskákra, sőt még az is meglátható, ahogyan a vérsejtek minden egyes szívverésre átpréselődnek a szűk véredényeken.

(b) Pálcikák és csapocskák szalamandra szemében, a kép pásztázó elektronmikroszkóppal készült, a nagyítás 1600-szoros.

37-26 ábra
(a) Az emberi retina keresztmetszete. (b) Szalamandra retinájából származó pálcikák és csapocskák.

Ekkor a képet ún. végtelenre akkomodált szemmel nézzük.

A szem

A szem és kapcsolata a központi számítógéppel – az aggyal – bizonyára a leginkább figyelemre méltó az emberi szervek között.* Az információ túlnyomó többségében a szemünk útján érkezik hozzánk, s ámulatba ejtő, hogy hogyan elemezzük és válogatjuk az örökké változó formákat. Alapjában véve a szem lencsés fényképezőgéphez hasonlít, amely fényérzékeny felületre képeket vetít, de igen sok olyan egyedi vonása is van, amelyben egyetlen fényképezőgép sem tud versenyre kelni vele (lásd a 37-25 ábrát). A fénysu-

* A Scientific American számos érdekes cikket közölt a látásról. Ezek között említjük az alábbiakat: David Hubel: Az agy vizuális kérge (The Visual Cortex of the Brain), 1963 Nov., – E. Hess; Magatartás és a pupilla nagysága (Attitude and Pupil Size) 1965 április – Charles Michael: A vizuális képek retinális feldolgozása (Retinal Processing of Visual Images) 1969 május – John Pettigrew: A kétszemes látás neurofiziológiája (The Neurophysiology of Binocular Vision) 1972 aug. – W. Rushton: A látópigmentek és a színvakság (Visual Pigments and Color Blindness) 1975 márc. – John Ross: A kétszemes észlelés forrásai (The Resources of Binocular Perception) 1976 márc.

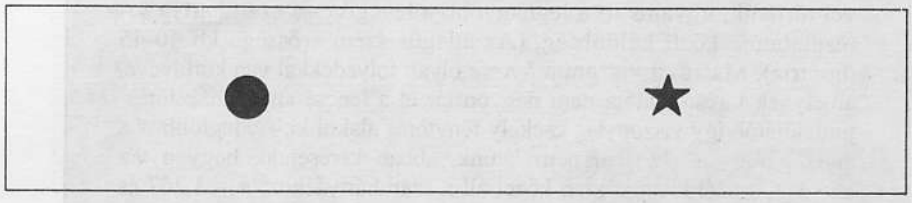
garak fókuszálása főként a *cornea*-val, a szaruhártya külső felületével történik, ugyanis itt a legnagyobb a levegő és a szaruhártya törésmutatója közti különbség. (Az átlagos szem erőssége kb 40-45 dioptria). Másrészt viszont a *lencse* olyan folyadékkal van körülvéve, amelynek törésmutatója nem nagyon tér el a lencse anyagának törésmutatójától, így viszonylag csekély fénytörés alakul ki. (A legfőbb oka annak, hogy a víz alatt nem látunk, abban keresendő, hogy a víz $n_v = 1{,}33$ törésmutatója igen közel áll a szaruhártyáéhoz: $n_{sz} = 1{,}367$ és így nem okoz elég nagy fénytörést. A buvármaszk abban is segít, hogy fenntartja a szem levegővel való érintkezését.)

A szemlencse eléggé hajlékony, s így a *ciliáris izmok* kb 20–24 dioptria között szabályozhatják az erősségét. Ezáltal – még akkor is, ha a lencse a fényérzékeny felülettől állandóan ugyanakkora távolságra van – éles képet lehet kialakítani változó tárgytávolság mellett is. A szaruhártya és a lencse együttes erőssége akár 60-65 dioptria is lehet. A szemnek azt a képességét, hogy a fókusztávolságát változtatni képes, *akkomodációnak* nevezzük. Az idősödő embernél a lencse anyaga keményedik, az akkomodáció foka ezért a kor előrehaladtával csökken. Annak a legközelebbi tárgynak a távolságát, amelyről még éles képet alkot a szem, *közelpontnak* nevezik. Egy átlagos 10 éves gyermeknél ez kb 7 cm, a középkorú embernél kb 22 cm, 60 éves korban eléri a 100 cm-t, ami gyakorta „olvasószemüveg" használatát teszi szükségessé ahhoz, hogy kis távolságokon is tisztán, élesen lehessen látni.

A retina, vagy recehártya kb. 125 millió fotoreceptor-sejtet tartalmaz, melyeket pálcikáknak és csapocskáknak nevezünk. Ezeket az optikai vagy látóidegen keresztül neuronok és idegszálak bonyolult rendszere köti össze az aggyal (lásd a 37-26 ábrát). Amikor pl. Ön ezeket a szavakat olvassa, a szeme pontról pontra ugrik úgy, hogy a látómező közepe a foveára (látógödörre) essék. Ez kb. 0,3 mm átmérőjű terület, amely csak sűrűn egymás mellett elhelyezkedő csapocskákat tartalmaz. (Hogy fogalmat lehessen alkotni a látómezőről, ami a foveát fedi, megemlítjük, hogy a telihold képe a retinán kb. 0,2 mm átmérőjű. A szemnek az a képessége, hogy a finom részleteket érzékelje (felbontóképesség), a foveában a legnagyobb. A színekre csak a csapocskák érzékenyek. A foveától távolodva a pálcikák száma viszonylag nagyobb lesz, s bár nem érzékenyek a színekre, mégis igen kis fényintenzitást is észlelni tudnak. A pálcikák fényérzékenysége pl. egy halvány csillag megfigyelésével próbálható ki. A csillagot esetleg nem is látjuk, ha egyenesen ránézünk, azonban ha kissé oldalra fordítjuk tekintetünket, hogy a csillag képe a pálcikákra essék, észrevehetjük a csillag halvány fényét.

A kutatók szerint a kép adatainak a feldolgozása, kiváltképpen egyes speciális fotoreceptorokkal rendelkező állatok esetében, már a retinán megkezdődik. Ezek a receptorok az agyba speciális irányítójeleket továbbítanak a sötét tartományokat a világosaktól elválasztó határfelületekről vagy bizonyos irányú mozgásokról.

Az *írisz*, vagy szivárványhártya nem más, mint egy állítható diafragma, nyílás, amely a szembe jutó fény mennyiségét szabályozza. Az írisz nyílásának nagyságát, a pupillát, nemcsak a beeső fény szabályozza, hanem egyes gyógyszerek vagy az élőlény érzelmei, emóciói is. Ha tetszik nekünk valami, a pupillák tágulnak, ha valamivel elégedetlenek vagyunk, a pupillák összehúzódnak. Rafinált pókerjátékosok, akik ennek a hatásnak jó ismerői, azt állítják, hogy néha meg lehet állapítani a játékos kezében lévő lap pontértékét a pupillanagyság változásából. Jóllehet, a szivárványhártya a fényintenzitást csak kb 16-os szorzó erejéig befolyásolja, a retinának magának igen nagy az érzékenysége. A fény kémiai változásokat okoz a pálcikákban és a csapocskákban, ami csökkenti az érzékenységet. Ha kb fél órát eltöltöttünk a sötétben, a szemünk *sötétre adaptálódik*, és ekkor éri el a legnagyobb érzékenységet. A színes látás teljesen kielégítő elmélete, mely az összes jelenséget képes lenne



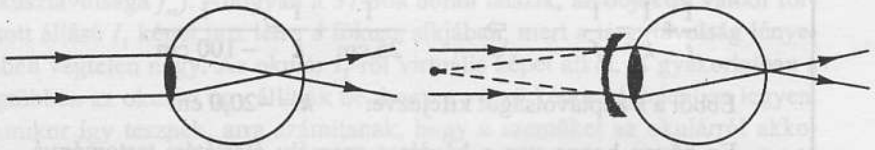
37-27 ábra
A vakfolt feltárásához. Behunyt bal szemmel nézzünk a körre és közelítsük a lapot szemünkhöz. Amikor az ábra kb. 20 cm-re van tőlünk, a csillag eltűnik. (Hasonló jelenség figyelhető meg, ha jobb szemünket behunyva a csillagot nézzük.). Az agy a látómező hiányzó részét, a környezethez hasonló színnel és mintázattal „igyekszik" betölteni. Így például, ha a mintázat csíkos, akkor az „üres" látómezőben csíkok látszanak.

megmagyarázni, még nincs meg, bár meglehetősen bizonyos, hogy a csapocskák három típusba oszthatók, amelyek színérzékenysége valamennyire átfedi egymást, egyik fajtájuk a kék színre, másik a zöldre, a harmadik a sárgára (és nem a vörösre, mint korábban gondolták) legérzékenyebb. A férfiak kb 8%-a, a nőknek kb 1%-a szenved valamilyen színlátási hibában, ami örökletes betegség és valahogyan a nemhez kapcsolódik.
A foveában, ahol a felbontóképesség a legnagyobb, mindegyik csapocskának külön összeköttetése van a látóideggel, de a retina széle felé már több receptort is összeköthet egy-egy idegpálya. Abban a tartományban, ahol a látóideg elhagyja a retinát, vakfolt képződik a látótérben (lásd a 37-27 ábrát). Az idegpályák egy része egymást keresztezve jut el a két szemből az agy *vizuális cortex*-ébe, erről a keresztezett „huzalozásról „ azt sejtik, hogy a mélységérzékeléssel, valamint azzal kapcsolatos, hogy a két szemmel való látás abban az esetben is fenntartható legyen, ha az egyik agyfélteke megsérül.
A szem-plusz-agy kombináció meglepően hatásos vizuális rendszer, mely lehetővé teszi, hogy egy jelenetet gyorsan átpásztázva az érdekes helyeket a nagy feloldóképességű fovea segítségével tanulmányozzuk, a változó képek közül válogathassunk és kiválaszthassuk azt a fontos információt, amit az intenzitás, az alak, a mozgás és a szín hordoz, és hogy ezeket ideiglenesen elraktározzuk a memóriában, végül mindebből egyetlen háromdimenziós képet alkossunk környezetünkről.

A szemüveg

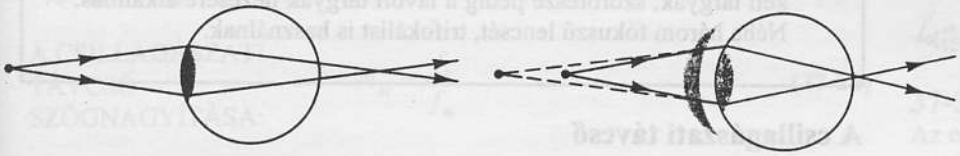
A normális szemlencse fókusztávolsága csekély mértékben változtatható (ez az *akkomodáció*). Így, bár a retina a lencsétől állandó távolságra van, a lencse a retinán éles képet tud kialakítani mind közeli, mind távoli tárgyakról. Néha a szemlencsék nem szimmetrikusak és a pontszerű fényforrásokról megnyújtott képet hoznak létre, ezt az abnormális működést asztigmatizmusnak hívjuk. Mind az akkomodáció hiánya, mind az asztigmatizmus szemüveggel korrigálható.

Tekintsük a 37-28 ábrát. A *rövidlátó* szem távoli tárgyakról nem tud éles képet alkotni, a szemüveg azonban a tárgyról megfelelően közeli virtuális képet ad, amit a szemlencse már képes a retinára leképezni. Fordítva, *távollátó* szemmel a közeli tárgyak látszanak életlennek, a megfelelő szemüveg itt a közeli tárgyról hoz létre a szemtől távolabb eső virtuális képet, amit a szem már élesen le tud képezni a retinára. *Mindkét esetben a legegyszerűbb ha a szemüveget alkalmas képtávolságú virtuális kép létrehozására szolgáló eszköznek tekintjük.* Erre a távolságra a szem már képes akkomodálni, és a virtuális képet élesen le tudja képezni a retinára. Az alábbi példa megvilágítja ezeket az eljárásokat.



(a) A *közellátás* (*myopia*). A távoli tárgyak nem láthatók élesen, mert a szem a beeső fénysugarakat túl erősen fókuszálja és így a kép már a retina előtt létrejön.

(b) A közellátást negatív lencse korrigálja azáltal, hogy a távoli tárgyról a szemhez közelebb hoz létre virtuális képet. Maga a szem aztán erről hoz létre képet a retinán.



(c) A *távollátás* (*hyperopia*). A közeli tárgyak nem láthatók élesen, mert a szem nem töri meg eléggé a sugarakat és így a kép a retina mögött jön létre.

(d) A távollátás pozitív lencsével korrigálható, mert ez a lencse a közeli tárgyról virtuális képet hoz létre, mely a szemtől távolabb van, mint a tárgy. Ezt a virtuális képet a szem aztán leképezi a retinára.

37-28 ábra
A szemüveggel kijavíthatók azok a hibák amiket az okoz, hogy a szem nem a retinán alkot képet.

37-8 PÉLDA

A rövidlátó személy a tárgyakat 15 cm és 100 cm közötti tartományban képes élesen látni (ahogyan a 37-29a ábra mutatja). Milyen az a szemüveg, amely a normális éleslátási tartományt biztosítja 25 cm és a végtelen között? (b) Keressük meg azt a képtávolságot, ahová ez a szemüveg a 25 cm-es normális kényelmes olvasási távolságba helyezett tárgyat leképezi.

MEGOLDÁS

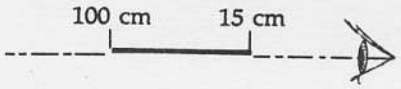
(a) Míg ez a személy szemüveg nélkül könnyedén tud olvasni, a távoli tárgyakról érkező fénysugarakat nem tudja megfelelően fókuszálni a szeme. A szemüvegnek ezért a távoli tárgyat 15 cm és 100 cm közötti távolságba kell leképeznie. A gyakorlatban a végtelen távolban lévő tárgyak képeinek a éleslátási tartomány legtávolabbi részén kell lenniük, vagyis a normális közellátást a szemüvegnek sem kellene érintenie. Így, a végtelen távoli tárgy képének $k = -100$ cm képtávolságnál kell lennie (a negatív előjel a virtuális képre utal). A leképezési törvényből indulva

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\infty}+\frac{1}{-100\text{ cm}}=\frac{1}{f}$$

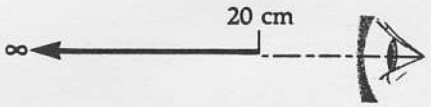
Ezt a szemüveg fókusztávolságára megoldva azt kapjuk, hogy

$f = -100$ cm vagy $-1{,}00$ dioptria.

b) Ismét a lencsetörvényt alkalmazva



(a) Közellátó személy éleslátási tartománya szemüveg nélkül



(b) Az éleslátás tartománya – szemüveggel

37-29 ábra
A 37-8 példához

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{25\text{ cm}}+\frac{1}{k}=\frac{1}{-100\text{ cm}}$$

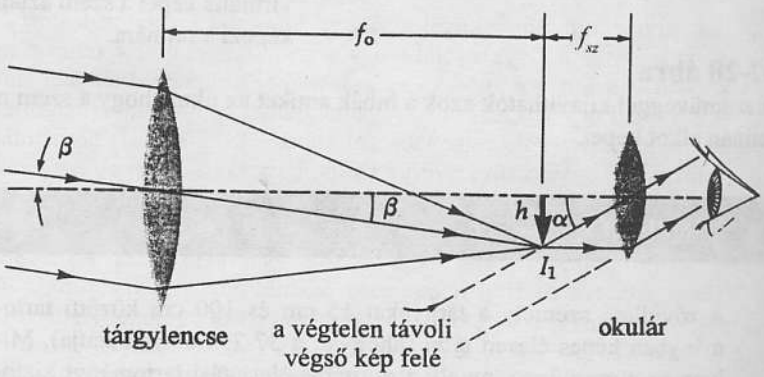
Ebből a k képtávolságot kifejezve: $k = -20{,}0$ cm

Ez bőven benne van a kérdéses személy éleslátási tartományában. A szemüveg így a éleslátási tartománynak a 37-29b ábrán mutatott kiterjesztésére képes.

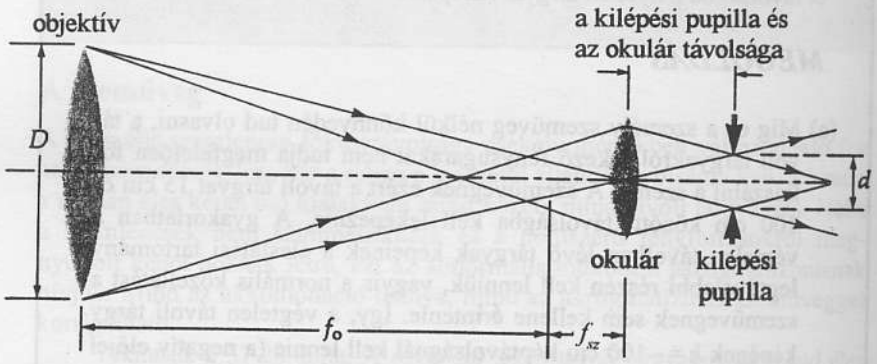
Középkorú emberek gyakran elvesztik akkomodációs képességüket, vagyis az éleslátási tartományuk megrövidül. (Ez a *presbyopia*.) Az az ember, akinek az éleslátási tartománya 100 cm körüli kis szakaszra korlátozódik, a legjobban bifokális szemüveggel segíthet problémáján: a szemüveg gyűjtőrésze a közeli tárgyak, szórórésze pedig a távoli tárgyak nézésére alkalmas. Néha három fókuszú lencsét, trifokálist is használnak.

A csillagászati távcső

A csillagászati távcső, a teleszkóp (eredeti jelentés szerint: messzelátó) a legegyszerűbb esetben két gyűjtőlencséből áll: az objektív vagy tárgylencséből, (melynek fókusztávolsága f_o) és az okulárból vagy szemlencséből (melynek



(a) A tárgylencse valódi, fordított állású I_1 képet alkot a távoli tárgyról. Az okulár az I_1 képről távoli virtuális képet hoz létre.



(b) Az okulárlencse képet alkot az objektívről is, ezt kilépő pupillának nevezik. A megfigyelő szemének pupilláját a kilépő pupillára kell illeszteni, hogy maximális fényerő jusson a szembe. Az okulár és a kilépő pupilla távolságát szemreliefnek nevezik, ennek elég nagynak kell lennie, hogy akár szemüveges megfigyelőnek is megfeleljen.

37-30 ábra
A csillagászati távcső.

fókusztávolsága f_{sz}). Ahogyan a 37-30a ábrán látszik, az objektív valódi fordított állású I_1 képet hoz létre a fókusz síkjában, mert a tárgytávolság lényegében végtelen nagy. Az okulár I_1-ről virtuális képet alkot. A gyakorlatban a legtöbben az okulárt úgy állítják be, hogy a végső kép a végtelenben legyen. (Amikor így tesznek, arra számítanak, hogy a szemüket az okulárról akkomodáció nélkül irányíthatják a tárgyra is.) A végtelenben lévő végső kép esetében az I_1 képnek az okulár fókuszpontjában kell lennie.

A csillagászati távcső N_{sz} szögnagyítása az okulárban látható kép látószögének és a tárgy látószögének hányadosa. Így $N_{sz} = \alpha/\beta$, ahol α és β a 37-30a ábrán látható szögek. Általában az objektív által készített kép kicsi mind az objektív f_o fókusztávolságához, mind az okulár f_{sz} fókusztávolságához képest. Ekkor, minthogy $h << f_{sz}$, és $\alpha = \text{arctg}\,(h/f_{sz}) \approx h/f_{sz}$ Hasonlóképpen $\beta \approx h/f_o$. Így az $N_{sz} = \alpha/\beta$ képlet alapján;

A CSILLAGÁSZATI TÁVCSŐ SZÖGNAGYÍTÁSA:

$$N_{sz} = \frac{f_o}{f_{sz}} \qquad (37\text{-}28)$$

A távcső fontos jellemzője a fénygyűjtő képessége. Ideális esetben, amikor távcsövön keresztül nézünk, az objektív lencsén át bejutó minden fénynek a szem pupilláján kellene keresztül mennie. Ahogyan a 37-30b ábra mutatja, az okulárból kilépő fénynyaláb beszűkül, majd kitágul. A beszűkült keresztmetszet területe, amit kilépő pupillának neveznek, tulajdonképpen az objektív lencse képe, amit az okulár lencse alkot. Ha a kilépő pupilla átmérője kisebb, mint a megfigyelő szemének pupillája, a szem a távcsövön áthaladó összes fényt észlelni képes.

Az egyszerű mikroszkóp

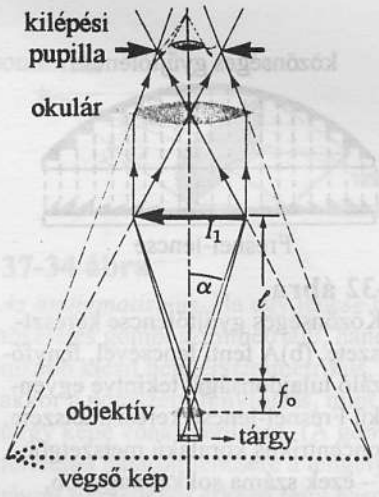
Az egyszerű kétlencsés mikroszkópban, amit a 37-31 ábra mutat, a tárgy éppen az objektív (tárgylencse) f_o (az f_o igen rövid) fókusztávolságán kívülre van elhelyezve. Ezáltal az objektív erősen nagyított I_1 képet alkot. Ezt a képet azután az okulár (melynek fókusztávolsága f_{sz}) tovább nagyítja úgy, ahogyan azt már az egyszerű nagyítónál tárgyaltuk. A végső virtuális képet a megfigyelő a kényelmes tisztalátás legkisebb távolságából szemléli. Az okulárlencse N_{sz} szögnagyítása (lásd a 37-27 egyenletet) közelítőleg 25 cm/f_{sz}. (A képletből elhagytuk az *1* összeadandót, mert a gyakorlatban az f_{sz} sokkal rövidebb 25 cm-nél). Az objektív lencse nagyítása N, ennélfogva a mikroszkóp teljes nagyítása: $NN_{sz} = N/(25\text{ cm}/f)$. Az objektív nagyítása l/f_o, ahol l a mikroszkóp tubushossza. Ennek tipikus értéke 18 cm. Ezeket az értékeket behelyettesítve, a nagyításra az adódik, hogy

A MIKROSZKÓP NAGYÍTÁSA

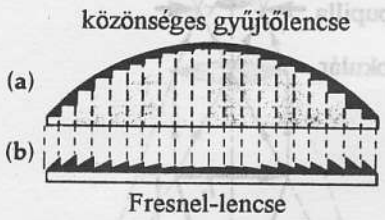
$$NN_{sz} = \left(\frac{l}{f_o}\right)\left(\frac{25\text{cm}}{f_{sz}}\right) = \frac{450\text{cm}^2}{f_o f_{sz}} \qquad (37\text{-}29)$$

ahol az f_o és f_{sz} centiméterekben van kifejezve

Annak érdekében, hogy megfelelő kilépési pupilla és okulárkilépési pupilla valósuljon meg, (lásd a 37-30b ábrát), az f_{sz}-nek 1 cm nagyságrendűnek kell lennie. Így a (37-29) egyenlet miatt az f_o-nak is igen kicsinek kell lennie. Kb. 2000-szeres nagyításhoz az f_o 2 mm nagyságrendű kell, hogy legyen.



37-31 ábra
Az egyszerű mikroszkóp. A tárgylencse a tárgyról erősen nagyított valódi egyenes állású képet alkot (I_1). Az okulár egyszerű nagyító, amely az I_1-ről virtuális képet hoz létre. A végső képet általában úgy tervezik meg, hogy a tisztalátás legkisebb távolságban jöjjön létre.



37-32 ábra
(a) Közönséges gyűjtőlencse keresztmetszete. (b)A fenti lencsével, fényfókuszáló tulajdonságát tekintve egyenértékű Fresnel-lencse keresztmetszete. A koncentrikus köralakú metszetgörbék – ezek száma sokkal nagyobb, mint amit az ábrán mutatunk – képviselik a közönséges lencse fénytörő felületét, az (a) ábrán halványan vonalkázott rész ennél a lencsénél megtakarítható. Negatív Fresnel-lencséket is használnak néha, pl. üdülőkocsik hátsó ablakánál, hogy szélesebb látószögű kitekintést adjanak, mint amekkorát az ablak lehetővé tenne.

A Fresnel-lencsék

Gyakran kívánatos a fényenergia összegyűjtése. Ez fordul elő a világítótornyok lámpáinál, a napenergia bizonyos kollektortípusai esetén és pl. az írásvetítőknél. A nagy átmérőjű egyszerű gyűjtőlencsék helyett, amelyeket nehéz és drága előállítani, ugyanaz a fénykoncentráció elérhető a *Fresnel-lencsével.* A 37-32a ábrán látható közönséges lencsének a nem árnyékolt részei nem vesznek részt a fókuszáló hatásban és tulajdonképpen kiküszöbölhetőek. A Fresnel-lencse igen sok koncentrikus köralakú vájatával a lencsének csak a fénytörő felületét tartja meg, s ezáltal tetemes súlycsökkenés érhető el. A Fresnel-lencséket gyakorta műanyagból öntik. Mivel többnyire nem a kép jó minősége az elsődleges cél, a felület pontos megmunkálása gyakran nem fontos. A Fresnel-lencsék jól használhatók a közlekedési lámpákban, ahol a fényt csak a kívánt irányban kell látni. Felhasználási lehetőségeihez járul még, hogy a kb. 1/4 m^2 területű Fresnel-lencse napfényben 3000 K hőmérsékletet is képes a fókuszában előállítani, ami már számos fémfajta megolvasztásához elegendő. Ennek kisebb változatai használatosak a kirándulók könnyű camping-tűzhelyében.

A fényképezőgép és a fényrekesz

A lencsék fénygyűjtő képessége, „fényereje", felületükkel arányos. A legtöbb fényképezőgépben a lencse hatásos felületét az ún. *íriszrekesz* vagy fényrekesz változtatásával állítják be: ez köralakú lyuk, melynek átmérője változtatható. A fényrekesz állását a *fókusztávolság és a rekesz átmérőjének hányadosával* (a nyílásviszonnyal vagy relatív apertúrával) jellemezzük. A fényképezőgépek objektívjén beállítható rekesz-állások egymástól általában közelítőleg $\sqrt{2}$ -es tényezővel különböznek (például, jellegzetes rekesz-állások: 2; 2,8; 3,5; 4,5; 5,6; 8; 11; 16). Így az egymást követő rekesz-állásokhoz közelítőleg kétszer akkora fényerő tartozik. Nagyra nyitott fényrekesszel rövid expozíciós idővel lehet fényképet készíteni.

37-9 PÉLDA

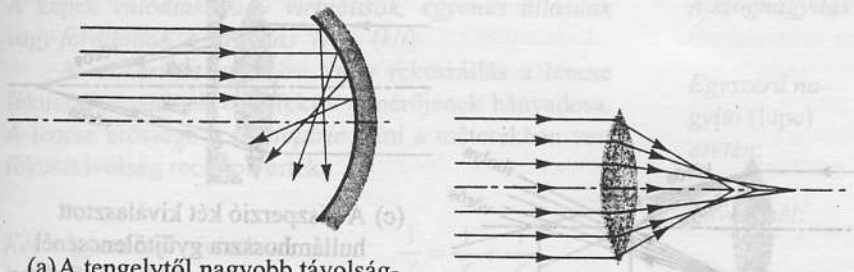
Fényképezőgép lencséjének fókusztávolsága 50 mm, maximális fényereje 2. (a) Adjuk meg a lencse átmérőjét. (b) Ha egy felvétel helyes expozíciós ideje 2,8-as fényrekesz esetén 1/400 s, mi a helyes expozíciós idő 8-as rekeszállás mellett?

MEGOLDÁS

(a) $$\text{Átmérő} = \frac{\text{Fókusztávolság}}{\text{relatívapertúra}} = \frac{50\text{ mm}}{2} = 25{,}0\text{ mm}$$

(b) Az apertúrabeállítás a növekvő rekeszállás skálán a harmadik lépésnél áll, ezért az objektív hatásos keresztmetszete háromszor csökken kettes faktorral. Így az expozíciós időnek $2^3 = 8$ szorzóval kell hosszabbnak lennie, vagyis

$$(8)(1/400)\,\text{s} = \tfrac{1}{50}\,\text{s}$$

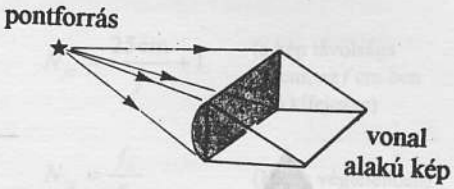


(a) A tengelytől nagyobb távolságban haladó párhuzamos sugarak a gömbtükörhöz közelebb fókuszálódnak, mint a tengely mentén haladók.

(b) Vékony lencse széléhez közel haladó sugarakra a fókusztávolság kisebb, mint a tengely mentén haladó sugarakra.

37-33 ábra

A *szférikus aberráció*. Minthogy a szférikus (gömbi) felületeket a legkönnyebb elkészíteni, a tükrök és a lencsék felülete általában szférikus. Így a paraxiális – tengellyel párhuzamosan haladó, de a lencse szélére érkező – sugaraknak szükségképpen más lesz a fókuszpontjuk, fókusztávolságuk, mint a tengely mentén haladóknak. Ennélfogva a kép „elkenődik" és kinyúlik a fókuszból. Ennek a jelenségnek a csökkentése érdekében a kamerákat gyakran irisszel, vagy állítható apertúra nyílással látják el, ami „bezárható" úgy, hogy a fénynyalábnak csak a lencse tengelye mentén haladó részét hasznosítsa a fényképezőgép. (Ez fényszegénységet okoz, amit hosszabb expozíciós idővel kell kompenzálni.) Parabolatükör a párhuzamos sugarakat valóban ugyanabba a fókuszpontba gyűjti és itt nincs szférikus aberráció. Lencséket is lehet úgy csiszolni, hogy speciális felületük legyen (az előállítási költségek nagyok), hogy így korlátozzuk a szférikus aberrációt.

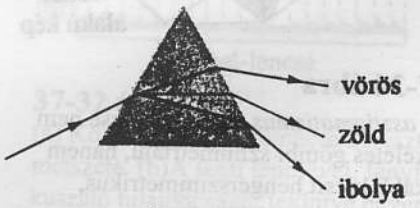


37-34 ábra

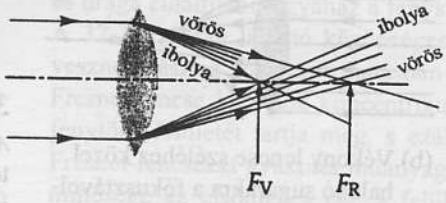
Az asztigmatizmus. Ha egy lencse nem tökéletes gömbi szimmetriájú, hanem inkább kicsit hengerszimmetrikus, akkor a pontszerű fényforrás, mint tárgy képe vonalszerű lesz. (A gömbfelülettel határolt lencsére a tengelytől távoli forrásokból érkező fény hasonló hatást vált ki.) Az asztigmatikus látást korrigálni lehet olyan szemüvegekkel, amelyek kompenzáló hengerességének (cilindritásának) tengelye a szemlencsére merőleges.

37.10 Lencsehibák

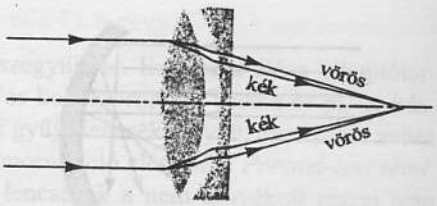
A lencsetörvény levezetésében több egyszerűsítő feltevést alkalmaztunk. Így például a kis szögekre vonatkozó közelítéssel éltünk, figyelmen kívül hagyva azokat a tárgyakat és sugarakat, amelyek a tengelytől távolabb vannak, továbbá elhanyagoltuk azt a tényt is, hogy a törésmutató különböző színű fényre nem ugyanaz (fellép a diszperzió). Következésképpen minden konkrét lencse mutat valamilyen *lencsehibát*, a törvényektől eltérő viselkedést, aberrációt a képalkotásában. Néhány általában előforduló példát mutatnak be erre a 37-33 – 37-35 ábrák. Ezek legtöbbjét minimálisra lehet csökkenteni több lencséből álló összetett rendszer alkalmazásával, ahol az egyik lencse által okozott hibát részben közömbösítik a többi lencsék aberrációi. A speciális törésmutatójú optikai üveganyagok terén végbement legújabbkori fejlődés, valamint a nagysebességű számítástechnika használata a nem gömbfelületekkel határolt (aszférikus) lencsék fénytörő tulajdonságainak leírásában jelentősen tökéletesítette az optikai rendszerek tervezését. Tökéletes lencse nincsen, de (megfelelő költségráfordítással) a legtöbb kellemetlen hiba minimalizálható.



(a) A prizma (a diszperzió mérete eltúlzott).



(b) Gyűjtőlencsének a fókusztávolsága a vörös színű fény számára hosszabb, mint az ibolyaszínűre.



(c) A diszperzió két kiválasztott hullámhosszra gyűjtőlencsénél „meg nem történtté" tehető olyan szórólencse alkalmazásával, amelynek a gyűjtőlencséénél nagyobb a diszperziója. (A többi hullámhosszú fény azonban továbbra is különböző pontokban fókuszálódik.)

37-35 ábra

Lencsék kromatikus aberrációja. **Minthogy az üveg törésmutatója a kis hullámhosszakra nő, a kék és az ibolya színű fény jobban törik, mint a vörös. Ennélfogva a lencse a fehér fényű képet színekre bontja, ugyanúgy, ahogy a prizma. Így egy egyszerű lencsének különböző lesz a fókusztávolsága a különböző színű fényekre, ezt a lencsehibát szín okozta eltérésnek, kromatikus aberrációnak nevezzük. A színszétszórás, a diszperzió mérete itt erősen túlzott. Több lencséből álló rendszer tervezhető úgy, hogy ezt a jelenséget korlátozza, de valamennyi hullámhosszra teljesen nem lehet kiküszöbölni. (Tükrök esetében – természetesen – a kromatikus aberráció nem lép fel.)**

Összefoglalás

A (hullámhossztól függő) *n törésmutató* definíció szerint

$$n \equiv \frac{c}{v}$$

Snellius törvénye két különböző közeg közti határfelületen bekövetkező fénytörésre (ahol θ a sugár és a felület normálisa által bezárt szög):

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

A *teljes visszaverődés:* a θ_c kritikus szöget a

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad (n_2 < n_1)$$

képlet adja meg.

A vékony lencsék leképezési törvénye:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

ahol t a tárgy, k a kép távolsága, f a fókusztávolság. Az egyenletet az alábbi előjelkonvencióval együtt kell használni:

(1) A t értéke pozitív, ha a lencsére beeső sugarak *divergálnak* (széttartóak).

(2) A k értéke pozitív, ha a lencsét elhagyó sugarak *konvergálnak* (összetartóak).

(3) Az f fókusztávolság *gyűjtőlencsékre pozitív, szórólencsékre negatív.*

A vékony lencse fókusztávolsága:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

ahol n a lencse anyagának törésmutatója a környező anyaghoz viszonyítva, R_1 és R_2 a lencsét határoló felületek görbületi sugara. Az R_1 és R_2 pozitív, ha a megfelelő külső határfelületek konvexek és negatív, ha konkávok (feltéve, hogy a lencse n törésmutatója nagyobb, mint a környező anyagoké).*

Nevezetes sugarak ábrázolásával sok információhoz juthatunk a képpel kapcsolatban. A képet az alábbi három nevezetes sugár közül kettő segítségével szerkesztjük meg:

(1) A lencse középpontján átmenő sugár eltérítés nélkül folytatja útját.

(2) A tengellyel párhuzamosan haladó sugár (vagy meghosszabbítása) a fókuszponton halad át.

(3) A fókuszponton áthaladó sugár (vagy meghosszabbítása) a lencsén áthaladva a tengellyel párhuzamosan folytatja útját.

* (Ez utóbbi megkötés nem szükséges, lásd a 882. oldal fordítói lábjegyzetét)

A képek *valódiak vagy virtuálisak, egyenes állásúak vagy fordítottak, a nagyítás* $N = -(k/t)$.

A *numerikus apertúra* vagy rekeszállás a lencse fókusztávolságának és effektív átmérőjének hányadosa. A lencse erőssége a *D dioptria*, ami a méterekben vett fókusztávolság reciprok értéke.

Két, egymással érintkező lencsére

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

vagy a megfelelő dioptriákkal

$$D = D_1 + D_2$$

Két egymástól távol álló lencse esetében a keletkező kép úgy jön létre, hogy az egyik által alkotott kép a másik lencse számára a tárgy.

A szögnagyítás:

Egyszerű nagyító (lupe) *esetén:*

$$N_{sz} = \frac{25\,\text{cm}}{f} + 1$$

(a kép távolsága 25 cm, az f cm-ben van kifejezve)

Távcsőnél:

$$N_{sz} = \frac{f_o}{f_{sz}}$$

(Kép a végtelenben)

A mikroszkóp nagyítása

$$NN_{sz} = \left(\frac{l}{f_o}\right)\left(\frac{25\text{ cm}}{f_{sz}}\right)$$

(itt az l a *tubushossz*, (általában 18 cm), az f_O és f_{SZ} centiméterekben mérendő).

Gyakori *lencsehibák*: szférikus (gömbi) aberráció, asztigmatizmus, kromatikus aberráció.

Kérdések

1) Megváltoztatjuk-e egy gömbtükör fókusztávolságát azáltal, hogy a tükröt vízbe merítjük?

2) Egy megfigyelő úszómedence felé tart. Miért függ az úszómedence látszólagos mélysége attól, hogy a megfigyelő a medence szélétől milyen távolságra van?

3) Vajon miért látszik megtörtnek a medence vízébe merülő rúd abban a pontban, ahol a vízbe ér?

4) Ha a halász láthatja a hal szemét egy nyugodtvízű tóban, vajon a hal is mindig láthatja-e a halász szemét? Vagyis vannak-e olyan helyzetek, amikor a teljes visszaverődés megakadályozza, hogy az egyik partner a másikat lássa?

5) Mit lát a úszó, amikor a vízből a medence nyugodt felszíne felé néz? Vegyük tekintetbe a teljes visszaverődést is.

6) Mik az optikai tulajdonságai az üvegbe zárt légbuboréknak?

7) Amikor egy navigátor késő délutáni időpontban szextánssal megméri a Nap és a horizont szögét, a leolvasott szögértéket korrigálnia kell. Miért szükséges ez a korrekció és milyen előjelű?

8) Lehetséges-e, hogy egy lencse a levegőben gyűjtőlencse, míg a vízben szórólencse?

9) Hogyan függ a gyűjtőlencsék fókusztávolsága a fény színétől? Ez ugyanolyan jellegű-e szórólencsénél is?

10) Vékony lencse két fókuszpontja a lencse két oldalán ugyanakkora távolságban van. Meg tudnánk-e mutatni a sugármenetek felvázolásával, hogy vastag lencséknél a két fókusztávolság nem szükségképpen egyenlő, azaz a fókuszpontok a lencse két oldalán a lencse középpontjától nem ugyanakkora távolságban vannak?

11) Milyen eljárással határozhatjuk meg (a) egy szórólencse és (b) egy domború tükör fókusztávolságát?

12) Ha valakinek a szemei kisebbnek látszanak, amikor viseli a szemüvegét, mint amikor nem viseli, vajon rövidlátó vagy távollátó az illető?

13) Amikor az úszó buvármaszk nélkül úszik a víz alatt, akkor rövidlátó vagy távollátó lesz-e inkább? Tudja-e ezt korrigálni szemüveggel? Ha igen, milyen lencsét használjon?

14) Egyszerű kétlencsés csillagászati távcsövet (két gyűjtőlencsével) használunk távoli jel megfigyelésére. Vajon a kép csak egyszerűen fordított állású, vagy a jelben lévő betűk is fordítottak, mint a síktükör alkotta képen?

15) Vajon a normális látású emberek miért igazítják gyakran úgy a csillagászati távcső okulárlencséjét, hogy a kép a végtelenben jöjjön létre?

16) Egy szemüveges ember megengedi, hogy szemüvegével kísérletezzünk. Hogyan lehetne megállapítani a tulajdonos megkérdezése nélkül, hogy a lencsét korrigálták-e asztigmatizmus ellen?

17) Két különböző megfigyelő ugyanazt a szivárványt pontosan ugyanazon a helyen látja? Magyarázzuk meg a választ.

18) Egy lencse felső felét eltakarjuk. Hogyan változik a képalkotás? A teljes kép látható még? Van-e más változás? Magyarázzuk meg a választ.

19) A *camera obscurának* is nevezettt *lyukkamerának* nincsen lencséje. Ehelyett a parányi lyuk elegendő arra, hogy a lyuk túloldalán elhelyezett filmen kép keletkezzék. Magyarázzuk meg, hogyan jön létre a kép. Hogyan lehetséges, hogy mind a közeli, mind a távoli tárgyak esetében éles képet kapunk?

20) Fizikai laboratóriumban egy diák gyűjtőlencsével éppen valódi képet alkot az ablakkeretről egy papírlapon. Vajon a papírlapot a lencséhez közelítse vagy a lencsétől távolítsa ahhoz, hogy egy távoli fa éles képét létrehozza?

21) A 37-5 ábrán vajon miért látszik a folyadékba merített szalmaszál vékonyabbnak, mint a levegőben maradó része?

Feladatok

37.2 Fénytörés sík felületen

37 A-1 Mikroszkóppal megmérhető egy sík üveglemez törésmutatója. Az üveglemez felső lapjára állított mikroszkópot 2,50 mm-rel lejjebb kell állítani, hogy az alsó felület képe legyen éles. Az üveglap vastagsága 3,800 mm. Számítsuk ki az üveg törésmutatóját.

37 B-2 Ha keskeny lézernyaláb vastag üveglemezről verődik vissza, akkor két párhuzamos nyaláb keletkezik. Az egyik a lemez előlapjáról, a másik a lemez hátlapjáról verődik vissza. Tegyük fel, hogy a beesési szög θ, a lemez vastagsága D, a lemez üvegének törésmutatója n. Adjuk meg a két visszavert sugár merőleges d távolságát θ, D és n függvényében.

37 B-3 Legyen t_0 az az időtartam, amíg a fényjel üres edény fenekétől a tetejéig függőlegesen felér. Mutassuk meg, hogy ha ugyanezt az edényt n ($n > 1$) törésmutatójú folyadékkal töltjük meg, a fény számára a látszólagos mélység megtételéhez függőlegesen ugyancsak t_0 idő kell!

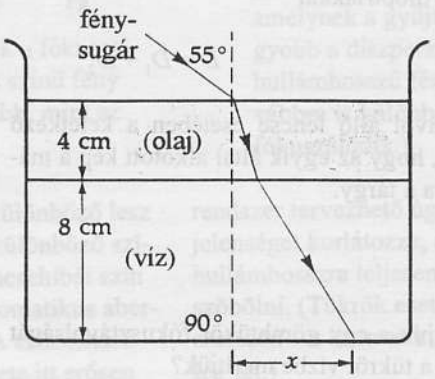
37B-4 Egy 12 cm mély edényben $n = 1{,}33$ törésmutatójú vízből 5 cm vastag réteg van, majd erre 7 cm vastagon olajat ($n = 1{,}48$) rétegezünk, ami a vízen úszik. Számítsuk ki, mekkora az edény látszólagos mélysége, ha az edényt közvetlenül az edény feletti pontból nézzük? (Útmutatás: használjuk fel a 37B-3 probléma eredményét!)

37 B-5 Fénynyaláb sík üveglapra 40°-os szöget bezáró irányból érkezik. Az üveg 1,5 cm vastag és törésmutatója $n = 1{,}60$. Az üveglap másik oldalán megjelenő fénynyaláb párhuzamos a beeső fénynyalábbal, de oldalirányban kissé eltolódott. Számítsuk ki, mekkora távolságra tolódott el a kijövő nyaláb a beeső nyaláb irányától!

37 B-6 Lapos fenekű tartályban 8 cm magasan víz van ($n = 1{,}33$), rajta 4 cm vastag olaj úszik ($n = 1{,}47$). Az olajhoz $\theta = 55°$ szögben fénysugár érkezik. Adjuk meg a 37-36 ábrán látható x vízszintes távolság nagyságát!

37 B-7 Egy 20 cm magas és 15 cm átmérőjű konzervdoboz fedőlapját kiemeljük, az aljára pedig középen kis lyukat fúrunk. Amikor a lyukon átnézünk, látómezőnket a doboz belső széle egy kúpra korlátozza. (a) Számítsuk ki, mekkora a maximális látószög a doboz tengelyétől mérve. (b) Számítsuk ki a látás térszögét szteradiánokban. (Lásd az E függeléket a térszög definíciójára vonatkozóan.) (c) Töltsük meg a dobozt átlátszó műanyaggal, aminek a törésmutatója $n = 1{,}65$. Mekkora a maximális látószög a konzervdoboz tengelyétől mérve, ha most nézünk át a lyukon!

22) Milyen közel lehet helyezni a tárgyat egy gyűjtőlencséhez, hogy a lencse még mindig valódi képet alkosson? Hol van ez a kép?



37-36 ábra
A 37B-6 feladathoz

37.3 A teljes visszaverődés

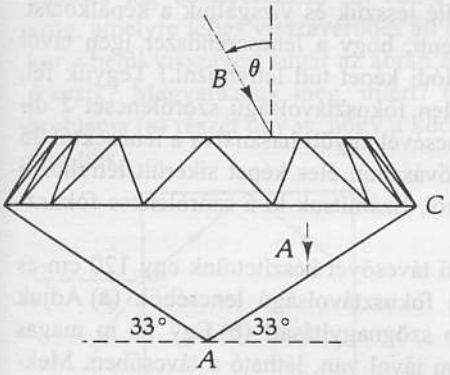
37A-8 Egy fénysugár érkezik a 45°-os prizmára (37-11a ábráin látható módon). (a) Adjuk meg azt a minimális törésmutatót a prizma anyagára, amely mellett az ábrán mutatott teljes visszaverődés létrejön. (b) A prizmát vízbe tesszük. Határozzuk meg erre az esetre vonatkozóan a prizma minimális törésmutatóját, mellyel ugyanezt az erdeményt érhetjük el.

37B-9 Sík üveglemezeket, melyek lapjai párhuzamosak, arra használunk fel, hogy olyan üreges prizmát készítsünk, amelynek a keresztmetszete egyenlő oldalú háromszög. A prizmát rézszulfátoldattal töltjük meg ($n = 1{,}74$). A 37-37 ábra szerint, a prizma egyik határlapjára merőlegesen (nem a határlap felezővonalánál) fény esik. Adjuk meg az üveg maximális törésmutatóját, amelynél a folyadék-üveg határfelületen még létrejön a teljes visszaverődés!



37-37 ábra
A 37B-9 feladathoz

37B-10 A gyémánt tüze ragyogóbb, mint az ugyanolyan alakú üvegmásolat, mert a gyémánt nagyobb törésmutatója miatt több beeső sugár kényszerül a felső felületeken kilépni a belső teljes visszaverődés miatt, ahelyett, hogy a drágakő alsó oldalain menne keresztül. A gyémántban a fény diszperziója is nagyobb a visszaverődésnél, s ez hozzájárul ahhoz, hogy a visszavert fény színárnyalatokban gazdagabb. (Lásd a 37-38 ábrát.) A fénysugár függőleges irányból esik a gyémántra ($n = 2{,}42$). (a) Mutassuk meg, hogy ez a sugár teljes visszaverődést szenved és a gyémánt felső oldalán fog távozni, míg egy hasonló fénysugár a flint-üveg másolatban ($n = 1{,}65$) a visszaverődés után egy oldallapon távozik. (b) Adjuk meg a B beeső fénysugár maximális θ beeső szögét, amely mellett a felső lapra érkező sugár az AC oldalon még teljes visszaverődést szenved. Csak olyan sugarakkal foglalkozzunk, amelyek a centrális szimmetriatengelyt tartalmazó síkban vannak.



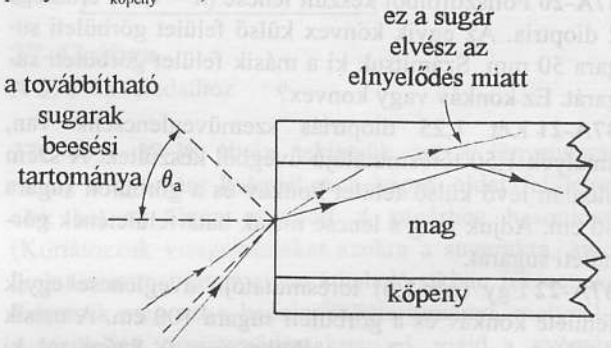
37-38 ábra
A 37B-10 és 37C-40 feladathoz

37B-11 Nyugodt vízű tó fenekén lévő hal a vízfelszín felett a tájnak, a haltól induló, függőleges tengelyű körkúpba eső részét láthatja. Számítsuk ki azt a térszöget (szteradiánokban), amelyet a hal szeme befog. (Lásd az E függeléket a szteradiánra vonatkozóan!)

37B-12 Víz ($n = 1{,}33$) felszínén benzolréteg ($n = 1{,}501$) úszik. (a) Adjuk meg a teljes visszaverődés kritikus szögét a két folyadék határfelületére. (b) Lehetséges-e, hogy egy fénysugár a levegőből úgy essék be a felső rétegre, hogy a két közeg határfelületét a kritikus szögben érje majd? Ha igen, adjuk meg felső benzolrétegre ezt a beesési szöget. Ha nem, magyarázzuk meg, miért nem!

37B-13 Pontszerű fényforrást, amely minden irányba egyformán világít, tó vízének ($n = 1{,}33$) felszíne alá helyezünk. Minden fény, ami a felszínt elérte, vagy teljesen visszaverődik, vagy teljesen kilép. Adjuk meg, hogy a pontszerű fényforrás által kibocsátott teljes sugárzás hányad része hagyja el a tó felszínét. (Útmutatás: lapozzuk fel az E függeléket a sztreradián definiciójáért.)

37B-14 Tekintsük meg a 37-39 (és a 37-12) ábrát. Vizsgáljuk azt a fénysugarat, amely egy optikai szál egyik végén lép be. Ha a beesési szög a θ_a kritikus „továbbítási" szögnél kisebb, a fénysugár a szál magjában a teljes visszaverődés mechanizmusával terjed tova. A kritikus szögnél nagyobb beesési szög esetén a fénysugár a köpenyig verődhet vissza, ahol esetleg hamarosan elnyelődik. Határozzuk meg a szál végére érkező fénysugárra a teljes visszaverődés határszögét, ha az üvegszál törésmutatója a magnál $n_{\text{mag}} = 1{,}54$ és a köpenynél $n_{\text{köpeny}} = 1{,}47$.



37-39 ábra
A 37B-14 és 37C-43 feladathoz

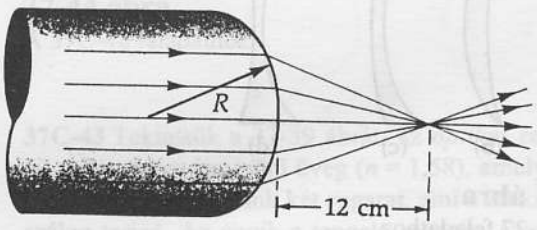
37.4 Visszaverődés gömbfelületen

37A-15 Nagy üveggömb közepén kis levegőbuborék van. Az üveggömb törésmutatója n és a nagy gömb sugara R. Határozzuk meg, hogy milyen távolinak látszik a buborék a gömb felszínétől?

37A-16 Egy 8 cm sugarú merev polisztirol gömb ($n = 1{,}59$) belsejében dísztárgy van. Milyen távol lévőnek tűnik a gömb felszínétől egy külső megfigyelő számára a tárgynak a gömb középpontjától 3 cm-re lévő pontja?

37B-17 Kis keresztmetszetű, párhuzamos fénynyalábot irányítunk egy nagy, tömör, átlátszó műanyagból készült gömb középpontja felé. A fénynyaláb a gömb túloldalán fókuszálódik. Mekkora a műanyag törésmutatója?

37B-18 Üvegrúdban ($n = 1{,}63$), melynek keresztmetszete körlap, fénynyaláb terjed a rúd tengelyével párhuzamosan haladva, ahogyan a 37-40 ábra mutatja. Adjuk meg a rúd végén lévő felület R görbületi sugarát úgy, hogy a kilépő fénynyaláb a rúd végétől 12 cm távolságban fókuszálódjék, amikor a rudat vízbe tesszük.



37-40 ábra
A 37B-18 feladathoz

37.5 Vékony lencsék
37.6 A dioptria

37A-19 Fényképezőgép (vékonynak tekinthető) lencséjének fókusztávolsága 50 mm. Határozzuk meg, hogy milyen messzire és mely irányba kell a lencsét elmozdítani a filmtől, hogy a végtelen tárgytávolságot 75 cm-re változtassuk.

37A-20 Polisztirolból készült lencse ($n = 1{,}59$) erőssége 2 dioptria. Az egyik konvex külső felület görbületi sugara 50 mm. Számítsuk ki a másik felület görbületi sugarát. Ez konkáv vagy konvex?

37A-21 Két 1,25 dioptriás szemüveglencsénk van, amelyek 1,50 törésmutatójú üvegből készültek. A szem oldalán lévő külső felület konkáv és a görbületi sugara 80 cm. Adjuk meg a lencse másik határfelületének görbületi sugarát.

37A-22 Egy ($n = 1{,}6$) törésmutatójú üveglencse egyik felülete konkáv és a görbületi sugara 100 cm. A másik felület konvex és 40 cm görbületi sugarú. Számítsuk ki a lencse fókusztávolságát.

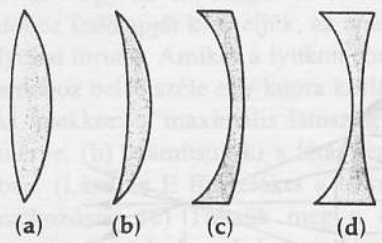
37B-23 Bikonvex gyűjtőlencse mindkét felületének ugyanakkora a görbületi sugara. A lencse fókusztávolsága f. A lencsét két egyenlő félre vágjuk a középpontján áthaladó, tengelyére merőleges síkban, s így két síkdomború lencse jön létre. Adjuk meg az új lencsék f' fókusztávolságát az f függvényében.

37B-24 Egy n törésmutatójú anyagból készült lencse fókusztávolsága f a levegőben. Ha n_1 törésmutatójú folyadékba merítjük, a lencse fókusztávolsága f' lesz. Adjuk meg az f' kifejezését f, n és n_1 segítségével.

37.7 Vékony lencsék: képszerkesztés és képnagyság

37A-25 Amikor a teliholdat a Földről nézzük, az átmérője kb 0,5° szögben látszik. A teliholdat 50 mm fókusztávolságú lencsével ellátott fényképezőgéppel lefényképezzük. (a) Adjuk meg a Hold képének átmérőjét a filmen. (b) Ha a film szélessége 35 mm, a film szélességének hányadrészét foglalja el a Hold képe?

37A-26 Egy 6 dioptriás nagyítóüveget nyomtatott oldal felett 10 cm-re tartunk. Mekkora egy 4 mm-es betű képének mérete? Szerkesszük meg a képet.



37-41 ábra
A 37B-27 feladathoz

37B-27 A 37-41 ábrán négy üveglencsét látunk ($n = 1{,}58$). Mindegyik lencsénél a külső felületek görbületi sugarai rendre 15 cm, ill. 30 cm. Számítsuk ki a lencsék fókusztávolságát.

37B-28 Diavetítő az 5,8 m távol lévő ernyőn olyan képet alkot, amelynek méretei 80-szor akkorák, mint a diafilmé. Adjuk meg (a) a diafilm és a vetítőlencse közti távolságot, (b) a lencse fókusztávolságát.

37B-29 Gyűjtőlencse fókusztávolsága 28 cm. (a) Adjuk meg azt a tárgytávolságot, amelyben álló tárgyról a lencse kétszer akkora valódi képet alkot, mint a tárgy. (b) Ismételjük meg a számítást kétszer akkora virtuális képre. Mindkét esetre szerkesszük meg a képet.

37.8 Lencserendszerek
37.9 Optikai eszközök

37A-30 Vékony szórólencse fókusztávolságának a meghatározása céljából a lencsét szorosan egy erős gyűjtőlencse mellé tesszük és vizsgáljuk a képalkotást. (Az erős azt jelenti, hogy a lencserendszer igen távol lévő tárgyról valódi képet tud létrehozni.) Tegyük fel, hogy az ismeretlen fókusztávolságú szórólencsét 2 dioptriás gyűjtőlencsével együtt használva a lencséktől 75 cm-re lévő vetítővásznon éles képet sikerült létrehozni egy távoli tárgyról. Számítsuk ki a szórólencse fókusztávolságát.

37A-31 Egyszerű távcsövet készítettünk egy 120 cm-es és egy 5 cm-es fókusztávolságú lencséből. (a) Adjuk meg a teleszkóp szögnagyítását! (b) Egy 70 m magas torony, ami 2 km távol van, látható a távcsőben. Mekkora a (végtelenben lévő) képnek a látószöge, ha az okuláron keresztül nézzük?

37A-32 Mikroszkóp optikai tubushossza 18 cm. A nagyítás 800-szoros. Ha az okulárlencse 1,2 cm-es fókusztávolságú, számítsuk ki az objektív lencse fókusztávolságát.

37B-33 Távollátó személy kényelmesen szemléli azokat a tárgyakat, amelyek 2 m-nél távolabbra vannak tőle és a nagyon távoli dolgokat is élesen látja. (a) Számítsuk ki, milyen erős lencsére van szüksége ahhoz, hogy a tőle 25 cm távol tartott könyvet olvashassa. (b) Határozzuk meg, milyen távol vannak azok a tárgyak, amelyeket ez a személy ezzel a szemüveggel még kényelmesen láthat, feltéve, hogy a szem akkomodációs képessége szemüveggel és anélkül ugyanakkora.

37B-34 (a) Számítsuk ki, mekkora a két vékony gyűjtőlencséből álló lencserendszer eredő fókusztávolsága, ha mindkét lencsének 50 cm a fókusztávolsága és a lencséket egymástól 5 cm távolságra helyezzük el. (b) Hasonlítsuk össze az eredményt azzal, amit az egymással érintkező lencsék esetében kapunk.

37B-35 Rövidlátó személy, aki –1,5 dioptriás szemüveget visel, tisztán látja a tőle 25 cm-re lévő és az igen távoli tárgyakat is. Határozzuk meg ennek a személynek az éleslátási tartományát szemüveg nélkül, feltéve, hogy

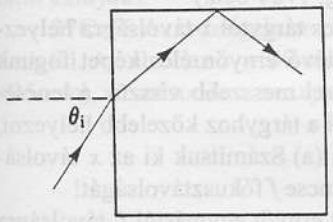
az illető ennél jobban már nem tud akkomodálni a távollátásra.

37B-36 Egy tárgy az x-tengely origójában van. Egy 10 cm és egy 20 cm fókusztávolságú gyűjtőlencsét helyezünk el a tengelyre, rendre az $x = 15$ cm és $x = 35$ cm pontokban. (a) Hol és milyen képet alkot a rendszer? (b) Vázoljuk fel a sugármeneteket arra az esetre, amikor csupán az első lencse van jelen.

További feladatok

37C-37 Vezessük le a Snellius fénytörési törvényt a Fermat elvből kiindulva. Használjunk fel a 36. fejezet 36C-15 problémájánál alkalmazott feltevésekhez hasonlókat.

37C-38 Üvegkockára fénysugár esik ($n = 1{,}68$), a 37-42 ábra szerint. A sugár az ábra síkjával párhuzamos síkban halad. (a) Adjuk meg azt a legnagyobb θ beesési szöget, amelyre a kocka fedőlapjánál teljes visszaverődés fog bekövetkezni. (b) Van-e olyan θ_i beesési szög, amelyre teljes visszaverődés áll elő akkor is, amikor a belül visszavert sugár az ábrán a jobb oldali lapra érkezik? Magyarázzuk meg, miért? (c) Oldjuk meg a probléma (a) részét úgy is, hogy a kockát teljesen vízbe merítjük.

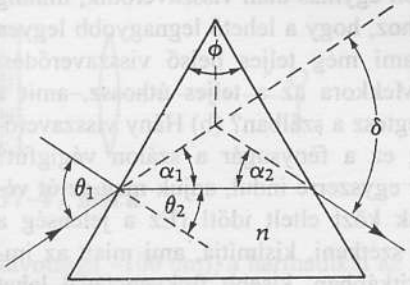


37-42 ábra
A 37C-38 feladathoz

37C-39 Átlátszó anyag törésmutatójának kényelmes mérési módszere az, hogy az anyagból prizmát készítünk, mint a 37-43 ábrán látható. A prizmára eső fénysugár δ teljes eltérítési szöge annak a két eltérítési szögnek az összege, amit a fénysugár a prizmába belépéskor (α_1), ill. kilépéskor (α_2) elszenved. Megmutatható, hogy az eltérítés δ_m szöge akkor minimális, ha a fénysugár szimmetrikusan halad át a prizmán ($\alpha_1 = \alpha_2$). Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben a prizma anyagának n törésmutatóját az

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\phi + \delta_m)}{\sin\frac{1}{2}\phi}$$

összefüggés adja meg, ahol ϕ a prizma törőszöge. (Útmutató: bizonyítsuk be, hogy $\theta_2 = \phi/2$, úgyhogy $\theta_1 = \theta_2 + \alpha$ és alkalmazzuk Snellius fénytörési törvényét.)

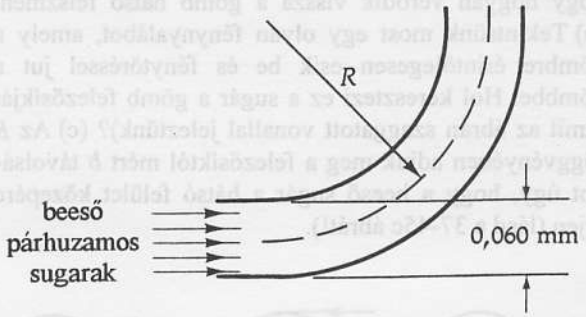


37-43 ábra
A 37C-3a feladathoz

37C-40 A 37-38 ábrán tekintsük azt a fénysugarat, amely a gyémánt belsejében a kúpos oldal felületére esik be, az ábrán mutatott A sugárhoz hasonlóan. (Korlátozzuk vizsgálatainkat azokra a sugarakra, amelyek a szimmetriatengelyen áthaladó síkban fekszenek.) Keressük meg azt a beesési szögtartományt, melynél a sugár teljes visszaverődést szenved, majd a gyémánt túlsó oldalán ismét teljes belső visszaverődésen megy át. (Az ilyen sugarak általában a felső felületeken át távoznak a fénytörés után, és ezzel a gyémánt színes ragyogásához, tüzéhez jelentősen hozzájárulnak.)

37C-41 Térjünk vissza a 37C-39 problémához. Folyadék törésmutatóját is meghatározhatjuk, ha vékonyfalú prizmába öntjük, feltéve, hogy a prizma falai plánparallel üveglemezek. Mutassuk meg, hogy az üveglemezek nem változtatnak az eltérítés δ szögén.

37C-42 A 37-44 ábrán látható optikai szál üvegből készült ($n = 1{,}63$) és 0,060 mm átmérőjű. Adjuk meg annak az R sugárnak a legkisebb értékét, mellyel a szálat még el lehet hajlítani úgy, hogy a fonal tengelyével párhuzamosan beeső és a szál egész keresztmetszeti területén eloszló sugarakra még mindig fennálljon a teljes visszaverődés feltétele.



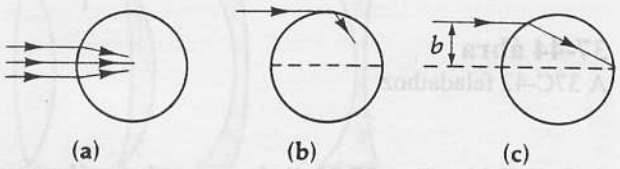
37-44 ábra
A 37C-42 feladathoz

37C-43 Tekintsük a 37-39 ábrát; az *optikai szál* magja 50 mikrométer átmérőjű üveg ($n = 1{,}58$), amelyet védőréteg borít. Vizsgáljunk két sugarat, ami a 20 km hosszú szálon terjed. Az egyik a tengely mentén, azzal párhuzamosan (lényegében) visszaverődésmentesen halad. A

másik az oldalfalon egymás után visszaverődik, mindig úgy érkezve a falhoz, hogy a lehető legnagyobb legyen a beesési szög, ami még teljes belső visszaverődést eredményez. (a) Mekkora az a teljes úthossz, amit a második sugár megtesz a szálban? (b) Hány visszaverődés történik, míg ez a fénysugár a szálon végigfut? (c) Ha a két sugár egyszerre indul, adjuk meg az út végén a beérkezésük közt eltelt időt! (Ez a jelenség a fényimpulzusokat szétkeni, kisimítja, ami miatt az impulzusokat csak ritkábban, kisebb frekvenciával lehet indítani, vagyis a jelátvitel sebessége csökken. Az ilyen hiba korrigálására olyan szálakat használnak, amelyek csak kb. 2 mikrométer átmérőjűek, ezekben ugyanis a szélsőségesebb cikk-cakkok kiküszöbölhetők. Az ilyen vékony szálakban, amelyek átmérője már összemérhető az alkalmazott fény hullámhosszával, a fényt olyan hullámként kell kezelni, ami hullámvezetőben terjed; ez olyan állóhullámalakzatokra vezet, amelyek bizonyos modusok terjedését kizárják.)

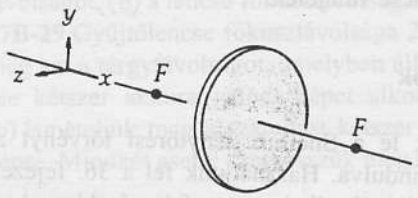
37C-44 Készítsünk a 37-6b ábrához hasonló vázlatot arról, hogy milyen a vörös és ibolya színű fény sugármenete mellékszivárványt adó esőcseppben. Miért ellentétes a színek sorrendje a főszivárványhoz képest?

37C-45 Amikor gyöngyvászon vetítőernyőre képeket vetítünk, akkor a rajta lévő parányi üveggömbök – amik a vetítővászon fehér festékanyagába vannak beágyazva – a néző felé több fényt vernek vissza (a vetítés tengelyétől mérve kb 30°-ig) mintha csak sima fehér felületet használnának. A kis gömbök a rájuk eső fényt a hátfaluk viszonylag kis területére fókuszálják. Erről a nagyon fényes területről érkező fényt a gömb közelítőleg a néző felé töri meg. Tekintsünk most egy igen keskeny lézernyalábot, amely az átmérője mentén üveggömbre esik ($n = 1{,}60$) (lásd a 37-45a ábrát). (a) Csak a frontfelületen véve tekintetbe a fénytörést, adjuk meg a fókuszpontot erre a sugárra a gömb R sugarának függvényében. Vázoljunk fel egy sugárnyalábot és mutassuk meg, hogy hogyan verődik vissza a gömb hátsó felszínén. (b) Tekintsünk most egy olyan fénynyalábot, amely a gömbre érintőlegesen esik be és fénytöréssel jut a gömbbe. Hol keresztezi ez a sugár a gömb felezősíkját (amit az ábrán szaggatott vonallal jeleztünk)? (c) Az R függvényében adjuk meg a felezősíktól mért b távolságot úgy, hogy a beeső sugár a hátsó felület közepére érjen (lásd a 37-45c ábrát!).



37-45 ábra
A 37C-45 feladathoz

37C-46 A 37-46 ábrán a kis tengelyhármas háromdimenziós tárgyat jelképez. (a) Vázoljuk fel hogy milyen képet alkot róla egy gyűjtőlencse, megjelölve a megfelelő tengelyek irányát. A keletkező kép jobbsodrású vagy balsodrású koordinátarendszer lesz? (b) Ismételjük meg az elemzést, de most a tárgyat az F és a lencse közé helyezve.



37-46 ábra
A 37C-46 feladathoz

37C-47 Mutassuk meg hogy a vékony lencsék $1/t + 1/k = 1/f$ leképezési törvénye az ún. Newton-féle alakban is felírható: $xx' = f^2$, gyűjtőlencse esetén x a tárgy és a közelebbi fókuszpont távolsága, x' pedig a másik fókuszpont és a valódi kép közti távolság. Mind x, mind x' pozitív mennyiség. Írjuk le, hogyan kell x és x' definícióját megadni a szórólencsére. (A vékony lencsék leképezési törvényének ez az alakja először Newton Optika című művében jelent meg, 1704-ben.)

37C-48 Egy lencsét fényes tárgytól x távolságra helyezve a lencsétől 30 cm-re lévő ernyőn éles képet fogunk fel. Ha az ernyőt 10 cm-rel messzebb visszük a lencsétől, a lencsét 1 cm-rel kell a tárgyhoz közelebb helyezni, hogy éles képet kapjunk. (a) Számítsuk ki az x távolságot! (b) Számítsuk ki a lencse f fókusztávolságát!

37C-49 Fényes tárgyat és ernyőt egymástól L távolságra helyezünk el. Egy gyűjtőlencsét – amelynek fókusztávolsága f- két helyre is elhelyezhetünk úgy az ernyő és a tárgy közé, hogy a tárgyról az ernyőn éles kép jöjjön létre. Határozzuk meg, hogy mekkora a távolság e két hely között!

37C-50 Az alábbi táblázatban adjuk meg a hiányzó adatokat. Minden esetben tegyük fel, hogy a lencse átmérője kicsi a lencsét határoló felületek görbületi sugarához képest. Minden számadatot centiméterben kell kifejezni. Tüntessük fel az értékek megfelelő előjelét is az előjelkonvenció értelmében.

Lencse típus	Fókusz távolság	Tárgy távolság	A kép			Nagyítás
			Távolsága	Valódi?	Fordított állású?	
Összetartó	+60	+20	–30	Nem	Nem	+3/2
	–40	+120				
		+50				–4
		+?	200 (előjel?)		Nem	+5
		+40				–5
Széttartó	200 (előjel?)		–30			
		+30	–30			

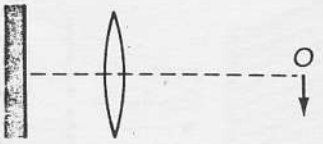
37C-51 Vázoljuk fel a sugármeneteket is a 37-50 probléma eseteire.

37C-52 Ahogyan a 37-2 ábrán látható, az üveg törésmutatója különböző hullámhosszakra más és más. Tekintsünk egy flintüvegből készült lencsét, amelynek fókusztávolsága f (a kék fényre). Adjuk meg a $\Delta f/f$ relatív fókusztávolságváltozást a 434 nm hullámhosszúságú (kék, $n = 1{,}675$) és a 656 nm hullámhosszúságú (vörös, $n = 1{,}644$) sugarak között.

37C-53 A tárgytávolság kis Δt változása megfelel egy vékony tárgy tengelymenti vastagságának. Mutassuk meg, hogy a tárgyról alkotott kép látszólagos vastagsága $N^2\Delta t$ akár tükör, akár lencse hozza létre. (N a lencse vagy tükör nagyítása.)

37C-54 Vékony, bikonvex lencse határoló felületei 40 cm, ill. 50 cm görbületi sugarúak. A lencse anyagának törésmutatója 1,50. Az 50 cm sugarú felület ezüstözött, ez a felület tehát homorú tükörként működik. A lencsétől 60 cm-re a nem ezüstözött oldalon kis tárgyat helyezünk el. Hol és milyen kép keletkezik?

37C-55 Tárgyat helyezünk egy 20 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse elé 40 cm-rel. A lencse mögé 25 cm távolságra síktükröt teszünk. (lásd a 37-47 ábrát). (a) Adjuk meg a végső kép helyét és írjuk le jellemzőit! (b) Hova kell a szemünket helyezni, ha ezt a képet látni akarjuk?



37-47 ábra

37C-56 Az x-tengely mentén 3 lencsét sorakoztatunk fel. Az elsőt az $x_1 = 40$ cm pontba (fókusztávolsága +25 cm), a másodikat az $x_2 = 55$ cm pontba (fókusztávolsága –100 cm), a harmadikat az $x_3 = 70$ cm pontba (fókusztávolsága +40 cm). Adjuk meg, hogy az $x = 0$ helyre tett tárgy képe hol és milyen lesz!

37C-57 Tekintsük a 37-23 ábrán látható lencsekombinációt, de most a gyűjtőlencse ($f_1 = 0{,}1$ m) és a szórólencse ($f_2 = 0{,}2$ m) felcserélésével. Adjuk meg, hogy hol lesz a végső kép és írjuk le tulajdonságait! Hasonlítsuk össze eredményeinket a 37-7 példa megoldásával.

37C-58 Tekintsük az A gyűjtőlencsét. Tegyük fel, hogy a másik, B lencsét is ugyanabból az üvegből készítették, de a lencse kétszer akkora átmérőjű és görbületi sugarai az A lencse görbületi sugarainál kétszer nagyobbak. (a) Adjuk meg a B lencse fókusztávolságát az A lencse fókusztávolságával. (b) Az A lencsét maximális apertúrával használva helyes, 1/100 s-os expozíciós idővel egy jelenetet fényképezünk le. Ha a B lencsét is maximális apertúrával használjuk fényképezésre ugyanazzal a filmtípussal, ugyanannál a jelenetnél, mekkora lesz a helyes expozíciós idő?

37C-59 Határozzuk meg az egyszerű nagyító szögnagyítását, ha a kép a végtelenben van. (Ez a (37-27) egyenlet.)

34C-43 A válasz adott.
34C-45 A válasz adott.
34C-47 2000 A/s
34C-49 A válasz adott.
34C-51 A válasz adott.
34C-53 $i = 40{,}8\ \sin(\omega t + 25{,}6°)$
34C-55 239 mH
34C-57 a) 100 μF b) 632 rad/s c) 125 W
d) 39,5 V f) 150 μF g)párhuzamosan
34C-59 A válasz adott.

XXXV. Fejezet

35A-1 30,0 cm
35B-3 A válasz adott.
35B-7 ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$;
ha $r > R$: $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$
35A-9 A válasz adott.
35B-11 377 Ω
35A-13 a) $1{,}67 \times 10^{13}$ T b) $3{,}32 \times 10^{12}$ W/m^2
35B-15 a) $(2\times10^{-8})\sin(kx - 10^{16}t)\hat{z}$
b) $1{,}88 \times 10^{-7}$ m c) $1{,}59 \times 10^{-10}$ J/m^3
35B-17 a) 1,20 m b) $u = 2{,}36 \times 10^{5}$ J/m^3
c) $E_o = 2{,}31 \times 10^{8}$ V/m
35B-19 A válasz adott.
35A-21 $8{,}97 \times 10^{-3}$ N
35A-23 $5{,}60 \times 10^{-6}$ N/m^2
35B-25 a) 1900 V/m b) $5{,}00 \times 10^{-11}$ J
c) $1{,}67 \times 10^{-19}$ kg·m/s
35C-27 a) $1{,}88 \times 10^{-10} \cos 377t$
b) $1{,}00 \times 10^{-4} \cos[(3{,}77 \times 10^{-8})t]$
35C-29 A válasz adott.
35C-31 A válasz adott.
35C-33 21,9 V/m
35C-35 a) 292 nm
35C-37 A válasz adott.
35C-39 A válasz adott.
35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

XXXVI. Fejezet

36A-1 A válasz adott.
36B-3 A válasz adott.
36B-5 (30, –40), (–30, 40), (–30, –40), (cm-ben)
36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép egyenesállású, virtuális, $N = 0{,}273$
36A-9 a) 7,50 cm b) ∞
36B-11 9,23 cm
36B-13 8,00 cm
36C-15 A válasz adott.
36C-17 40,0 cm
36C-19 A válasz adott.
36C-21 ha $t = 228$ cm, a kép fordított állású, valódi és $N = -0{,}123$
ha $t = 21{,}9$ cm, a kép egyenes állású, virtuális és N = 8,12
36C-23 A válasz adott.
36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67
36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

XXXVII. Fejezet

37A-1 $n = 1{,}52$
37B-3 A válasz adott.
37B-5 0,624 cm
37B-7 a) 20,6° b) 0,400 szteradián c) 35,4°
37B-9 1,51
37B-11 2,14 szteradián
37B-13 17,0%
37A-15 R
37B-17 2,00
37A-19 3,57 mm kifelé
37A-21 26,7 cm
37B-23 $2f$
37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125
37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) –51,7 cm
d) –17,24 cm
37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm
37A-31 a) 24,0 b) 48,1°
37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm
37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig
37C-37 A válasz adott.
37C-39 A válasz adott.
37C-41 A válasz adott.
37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c) 2,63 μs
37C-45 a gömbfelülettől számítva: a) $2{,}67R$ b) $1{,}80R$
c) $0{,}960R$
37C-47 A válasz adott.
37C-49 $(L^2 - 4fL)^{1/2}$
37C-51 A válasz adott.
37C-53 A válasz adott.
37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított állású kép $N = -2$ b) a lencse tárgyoldalán
37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a gyújtólencsén túl, $N = -0{,}42$
37C-59 A válasz adott.

XXXVIII. Fejezet

38A-1 5,00 mm
38A-3 1,33 mm
38B-5 A válasz adott.
38B-7 a) 1034,4827 b) 62,1°
38B-9 6
38B-11 sötét
38B-13 a) $2{,}73E_o$, 30° b) $2E_o$, 60°
c) 0, definiálatlan
38A-15 a) 105 nm b) 1,30
38A-17 199 nm

FIZIKAI OPTIKA I. – AZ INTERFERENCIA

Az alaptudományokkal sokféle okból foglalkozunk; a puszta izgalom érzéséért, az emberi kultúra gazdagításának örömééért, a nagy mesterek generációinak munkássága iránti tiszteletből, valamint abból a belső kényszerből, hogy elsőként publikáljunk, s híresek legyünk.

LEON M LEDERMAN az 1988 évi Nobel díjas (Melvin Schwartzcal és Jack Steinberggel)
Az alaptudomány értéke („The Value of Fundamental Science" *Scientific American* 251, 40. (Nov 1984))

38.1 Bevezetés

Maxwell elektromágneses elmélete a fényt geometriai (üres) térben terjedő elektromos és mágneses térerősségek hullámaiként írja le. A következő néhány fejezetben azokat a jelenségeket tárgyaljuk, amelyek ezeket a *hullámszerű* tulajdonságokat bizonyítják.[1] Jóllehet a fény visszaverődésének és törésének a törvényeit a fény hullámmodelljével értelmeztük, ezek a törvények ugyanilyen könnyedén levezethetők a fény részecskemodelljével is. Newton volt az első, aki a részecskemodellt aránylag részletesen kidolgozta, megmagyarázva a fényvisszaverődés és a fénytörés részleteit ezen az alapon. Most azonban, amikor a fény interferencia-, elhajlási és polarizációs jelenségeit tárgyaljuk, Newton részecskemodellje nyilvánvalóan működésképtelennek bizonyul. Csak a hullámmodell látszik alkalmasnak e jelenségek magyarázatára.

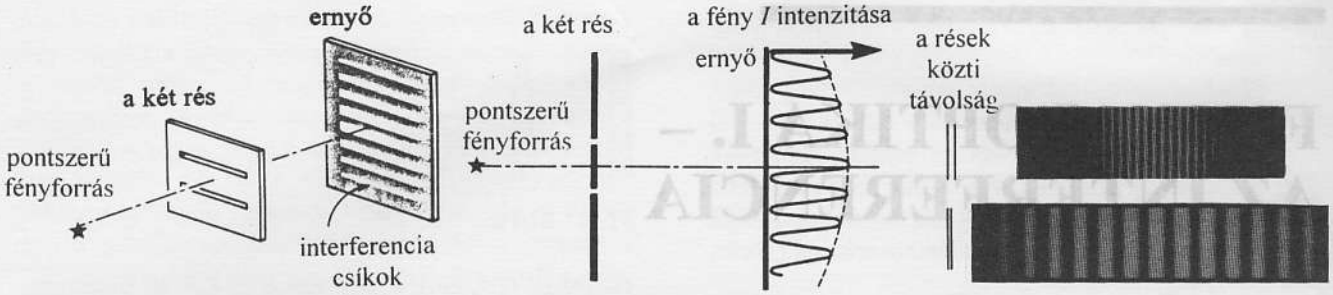
38.2 Kétréses interferencia

1802-ben és 1803-ban Thomas Young[2] az angol Királyi Társaságban (Royal Society) tartott előadásaiban a fény természetének értelmezésére hullámmodellt javasolt. Ez a Newton-féle részecskeelmélet elvetését jelentette. Young átlátszatlan ernyőn lévő két kicsiny lyukon áthaladó fényt megfigyelve meg-

---

1 Meg kell említeni, hogy a látható fény, csakúgy, mint az elektromágneses sugárzás minden formája kettős természetű, s e kettő látszólag ellentmond egymásnak. A fény, terjedése során hullámként, ahogyan azt a 41. fejezetben fogjuk bemutatni, míg az anyag által elnyelt sugárzás mindig részecskeként viselkedik. A fény duális (kettős) természete – az, hogy a fényjelenségeket bizonyos körülmények között hullámok, más esetekben a részecskék segítségével magyarázhatjuk – a sugárzás és az anyag tulajdonságainak megértésében központi jelentőségű.

2 Thomas Young (1773–1829) kimagasló tehetségű angol orvos-természetbúvár volt, aki nemcsak a fény hullámelméletéhez és a fényérzékelés három-szín-elméletéhez járult hozzá, hanem maradandóan jelentőset alkotott az egyiptológia területén is. Nagyrészt az ő erőfeszítésein múlott, hogy a Rosetta-kő szövegét, mely az egyiptomi hieroglifák megfejtése szempontjából kulcsfontosságú volt, meg lehetett fejteni.



(a) Vázlatos elrendezés; a pontszerű fényforrással, a résekkel és az ernyővel.

(b) A fényintenzitás eloszlása az ernyőn.

(c) Ha a rések közötti távolság *csökken*, akkor a csíkok közötti távolság nő.

38-1 ábra
A kétréses interferencia-kísérlet

állapította, hogy a kettős lyuk mögé helyezett érzékelő ernyőn világos és sötét gyűrűk jelennek meg. Később, nagyobb fényintenzitás biztosítására a jelenséget két réssel is bemutatta, (lásd a 38-1 ábrát). (Az ábra nem méretarányos. Tipikus esetben a rések távolsága kb. 0,5 mm, az ernyő a résektől kb. 2 m távolságra van, amelyen kb. 2 mm távolságú vonalsereg keletkezik.)

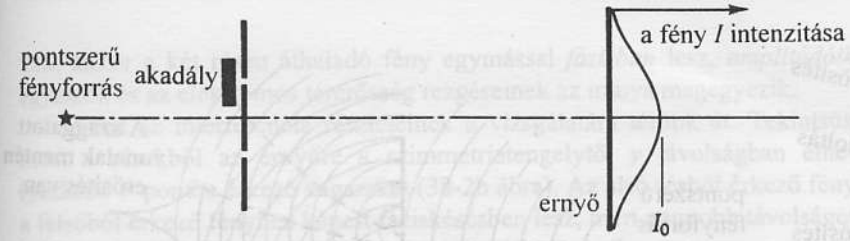
A geometriai optika jelenségeivel ellentétben ez a gyűrűs-(csíkos)-mintázat nem magyarázható meg a fény egyszerű részecskeelméletével. Ennek oka a következő: Ha az egyik rést lefedjük, az eredmény az egész ernyő megvilágítása, ahogyan a 38-2a ábra mutatja. Mindegy, hogy melyik rést fedjük le, az ernyő megvilágítása egyetlen nyitott rés esetén mindig ugyanaz a széles folt. Tegyük fel, hogy most mindkét rést kinyitjuk. Ha a fény egyszerűen csak részecskék áramából állna, ahogyan Newton javasolta, akkor két nyitott rés esetén a két egyedi megvilágításnak össze kellene adódnia, azaz csupán az eredeti megvilágítás kétszeresét kellene elvárnunk. Ehelyett fényes és sötét csíkokból álló mintázat áll elő. Sőt, ami még meglepőbb, a két rés szimmetriatengelye mentén az intenzitás most *négyszer* akkora, mint amikor csak egy rés volt nyitva (ahelyett, hogy csak kétszer akkora lenne). Ebből nyilvánvaló, hogy a két résen áthaladó fény intenzitása nem egyszerűen a két intenzitás összegezéséből adódik.

A csíkos mintázatot az magyarázza, hogy az ernyőn az egyes résekből érkező fényhullámok szuperponálódnak. Az ernyő adott pontjában a két hullám *azonos fázisban* találkozhat, ekkor erősítik egymást, s ezáltal különösen erős fényfoltot hoznak létre. Más helyen a hullámok egymáshoz képest *fáziseltéréssel* érkezhetnek és így leronthatják egymást (lásd a 38-3 ábrát). A fényhullámok *interferenciája* hozza létre a világos és sötét csíkokból álló *interferenciaképnek* nevezett mintázatot.

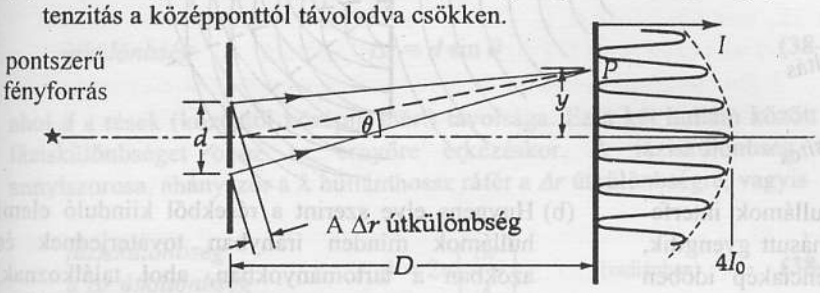
Az interferenciakép létrejöttének az a feltétele, hogy a két résből érkező fény **koherens** legyen:

KOHERENCIA: **Két fényforrásból (vagy bármely más hullámtípus forrásából) jövő hullám akkor koherens, ha hullámhosszuk egyenlő és fáziskülönbségük bármely időpontban ugyanakkora.**

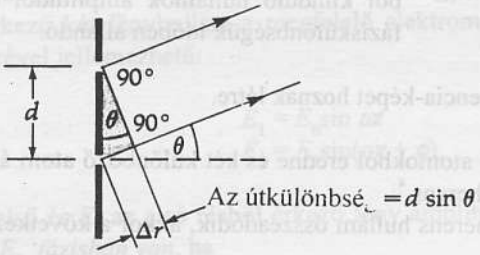
Ha a két fényforrásból különböző hullámhosszúságú fény érkezik, akkor a fáziskülönbségük nem maradhat állandó. Így csak a *monokromatikus* –



(a) Ha csak egy rés van nyitva, az ernyő megvilágítása szórt jellegű, az intenzitás a középponttól távolodva csökken.



(b) Ha mindkét rés nyitva van, az ernyőn egymástól egyenlő távolságban fényes és sötét csíkok jelennek meg.



(c) Ha az ernyő az y-hoz és a d-hez képest nagyon nagy távolságra van a résektől, akkor a két sugarat lényegében párhuzamosnak tekinthetjük. Ezzel a közelítéssel az árnyékolt háromszög derékszögű és a sugarak közötti útkülönbség $\Delta r = d \sin \theta$.

38-2 ábra

Ha az ernyőt két résen át koherens fénnyel világítjuk meg, interferencia jön létre.

a csak egyetlen frekvenciával, színnel, hullámhosszal jellemezhető – fény lehet koherens.[3]

Amint majd a 44. fejezetben látni fogjuk, a fény az atomokban végbemenő energiaátmenet során jön létre. Minden energiaátmenet véges hosszúságú *hullámvonulatot* hoz létre, lásd a 38-3b ábrát. Ha egyetlen hullámvonulat világítja meg *mindkét* rést, akkor a két rés pontjaiból kiinduló elemi hullámok szükségképpen koherensek lesznek, mert ezeket ugyanaz a hullámvonulat hozta létre. A 38-2 ábrán vázolt kísérleti összeállítás geometriája olyan, hogy a pontszerű fényforrás *egyes atomjai* által kibocsátott hullámvonulatok a két rést azonos fázisban érik, tehát a résekből kiinduló elemi hullámok közötti fáziskülönbség *mindenkor* zérus. (Más geometriai elrendezésben ez a fáziskülönbség egy másik, de ugyancsak állandó érték lehet.) *Ez az állandó fáziskülönbség és az összeállítás geometriai elrendezése az, ami az ernyőn tapasztalt interferenciaképet meghatározza.*

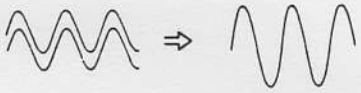
Ezzel szemben, ha az egyes réseket nem ugyanazzal a fényforrással világítanánk meg, akkor nem jönne létre interferencia, mert a két résből kiin-



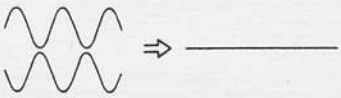
(a) Végtelen hullámvonulat részlete



(b) Véges hosszúságú hullámvonulat. A kis nyomású gázkisülési csőből érkező látható fényhullám-vonulat kb. egy méter hosszúságú, azaz több millió hullámhossznyi.



(c) Két fényhullám azonos fázisban szuperponálódva különösen erős fényt hoz létre. Ez az erősítő interferencia.

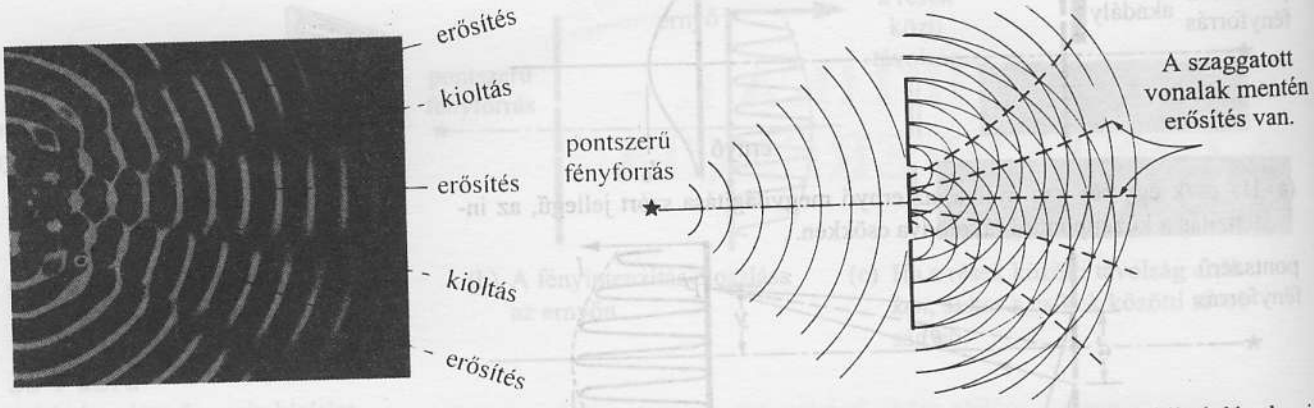


(d) Ha két fényhullám 180°-os fáziskülönbséggel találkozik, akkor (egyenlő amplitúdók esetén) a szuperpozíciójuk sötétséget (zérus intenzitást) hoz létre. Ez a kioltó interferencia.

38-3 ábra

Két koherens fény szuperpozíciójának eredménye erősen függ a két hullám közötti fáziskülönbségtől. A fáziskülönbség nem csak úgy lehet állandó, hogy maximális erősítés (c ábra), vagy kioltás (d ábra) jöjjön létre, hanem egyéb esetekben is. Ekkor az eredő fényesség a zérus és a maximális között lesz.

[3] A gyakorlatban egyetlen fényforrás sem szigorúan monokromatikus. De ilyen forrás közelítőleg előállítható a kis nyomású gázkisülési csövekkel, melyek igen szűk hullámhossz-intervallumban bocsátanak ki fényt. Így például, a higany színképében az 546,075 nm hullámhosszúságú zöld vonal kb. ± 0,001 nm szélességű. A hélium-neon-lézer által kibocsátott 632,8165 nm-es vörös fény 632,8165 nm relatív vonalszélessége mindössze kb. $1:10^9$.



(a) Két koherens forrásból származó vízhullámok interferencia révén egyes helyeken erősítik, másutt gyengítik, esetleg kioltják egymást. Az interferenciakép időben nem változik.

(b) Huygens elve szerint a résekből kiinduló elemi hullámok minden irányban tovaterjednek és azokban a tartományokban, ahol találkoznak, interferálnak egymással. Ha a rések a forráshoz képest szimmetrikusan helyezkednek el, a résekből kiinduló hullámok amplitúdói egyenlők, és fáziskülönbségük időben állandó.

38-4 ábra
A koherens forrásokból származó hullámok állandósult interferencia-képet hoznak létre.

duló fény különböző atomokból eredne és két különböző atom által kibocsátott fény sohasem koherens.[4]

Amikor két koherens hullám összeadódik, akkor a következő fontos elvet illusztrálják:

A LINEÁRIS SZUPERPOZÍCIÓ ELVE[5]

Amikor két hullám szuperponálódik, akkor az eredő hullám pillanatnyi értéke minden pontban az összetevő hullámok pillanatnyi értékének az összege.

A lineáris szuperpozíció elve a fizikai optika egyik legfontosabb alapelve, de az a fizika más területein is fennáll.

Összefoglaljuk a fényhullámok állandósult interferenciaképének létrejöttéhez szükséges feltételeket. A Young-féle kétréses interferenciakísérletben két hullám szuperpozícióját vizsgáljuk.

TRANSZVERZÁLIS HULLÁMOK INTERFERENCIÁJÁNAK FELTÉTELEI

(1) A két résből kiinduló hullámoknak *koherenseknek* kell lenniük. Vagyis: a hullámhosszuk megegyezik és a fáziskülönbségük az időben állandó.

(2) Az elektromos térerősség rezgéseinek a síkja meg kell, hogy egyezzék, hogy a lineáris szuperpozíció elve érvényes legyen.*

Az alábbi tárgyalás során mindig feltesszük, hogy ezek a feltételek fennállnak. Ha a réseket pontszerű fényforrással világítjuk meg, akkor ezek a feltételek teljesülnek (38-4 ábra). Ha a fényforrás a két réstől egyenlő távolságra

---

[4] A lézer-fény nem ilyen. Mint azt a 44.10 pontban látni fogjuk, a lézerben az összes atom fázisban és frekvenciában „össze van kapcsolva", s így a fény a nyaláb minden részében koherens.

[5] Nem foglalkozunk olyan hullámokkal, amelyek nemlineáris módon adódnak össze. Az ilyen nemlineáris esetek többnyire nagyon nagy amplitúdójú hullámokkal kapcsolatosak.

* Ez a feltétel a szuperpozíció elv teljesüléséhez nem szükséges. A világos és sötét csíkokból álló interferenciakép létrejöttéhez azonban igen. *(A fordító megjegyzése)*

van, akkor a két résen áthaladó fény egymással *fázisban* lesz, *amplitúdóik egyenlők* és az elektromos térerősség rezgéseinek az iránya megegyezik.

Most az interferencia részleteinek a vizsgálatára térünk át. Tekintsük most a résekből az ernyőre a szimmetriatengelytől y távolságban elhelyezkedő P pontba érkező sugarakat (38-2b ábra). Az alsó résből érkező fény a felsőből érkező fényhez képest fáziskésésben lesz, mert nagyobb távolságot kell megtennie. A 38-2c ábra szerint ez a Δr útkülönbség:

útkülönbség $$\Delta r = d \sin \theta \qquad \textbf{(38-1)}$$

ahol d a rések (középtől középig mért) távolsága. Ez a két hullám között Φ fáziskülönbséget okoz az ernyőre érkezéskor. A fáziskülönbség 2π annyiszorosa, ahányszor a λ hullámhossz ráfér a Δr útkülönbségre, vagyis

fáziskülönbség a Δr útkülönbség miatt $$\phi = 2\pi\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right) \quad \text{(radiánban)} \qquad \textbf{(38-2)}$$

Jegyezzük meg, hogy Φ nagyobb mint 2π, ha Δr nagyobb mint λ. Az ernyő P pontjába érkező két fényhullám a megfelelő elektromos térerősségek pillanatnyi értékével jellemezhető:

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \qquad \textbf{(38-3)}$$

és

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi), \qquad \textbf{(38-4)}$$

ahol E_1 a felső és E_2 az alsó résből érkező fény amplitúdója. Megjegyezzük, hogy E_1 és E_2 *fázisban van*, ha

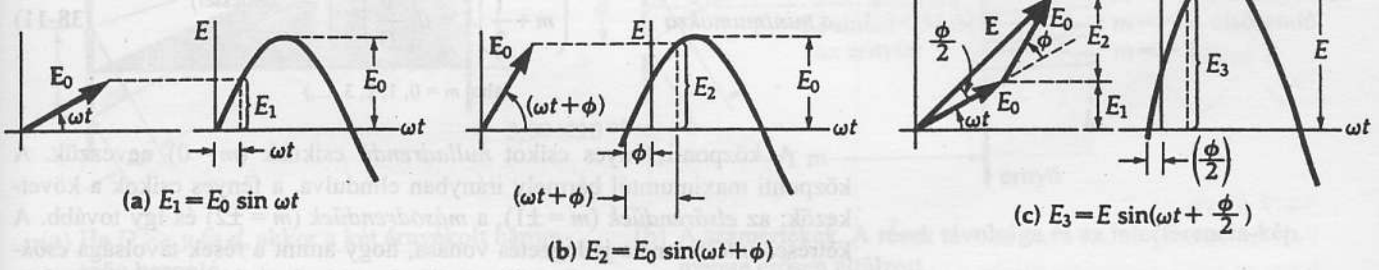
$$\phi = m2\pi, \qquad \textbf{(38-5)}$$

ahol $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ami az $E = 2\,E_0 \sin \omega t$ eredő hullámhoz vezet.

A Φ fáziskülönbség közbeeső értékeire a legkönnyebben a *fázisvektorok* segítségével kaphatjuk meg az eredő hullámot. (A fázisvektorokat a 34. fejezetben alkalmaztuk pl. az AC-körök csomópontjaiba befutó váltakozó áramok összeadásakor). A (38-3) egyenlet azt mutatja, hogy az E_1 pillanatnyi térerősség az ω szögsebességgel forgó $\mathbf{E}_0$ vektor függőleges vetülete (38-5a ábra). Hasonlóképpen E_2 az ugyancsak ω szögsebességgel forgó $\mathbf{E}_0$ fázisvektor függőleges vetülete, de ez ϕ szöggel az (a)-beli fázisvektor előtt jár. Ezt a 38-5b ábra mutatja. Az E_3 eredő az E_1 és E_2 *függőleges vetületének* összege.

$$E_3 = E_1 + E_2 = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$E_3 = E_1 + E_2 = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin(\omega t + \phi)$$



38-5 ábra
Fázisvektordiagram az E_1 és E_2 hullámokra, valamint az $E_3 = E_1 + E_2$ összegükre.

A 38-5c ábra azt mutatja, hogy az (a) és a (b) képen látható forgó $\mathbf{E}_0$ fázisvektorok összegének függőleges vetülete E_3 amit egyszerű trigonometriai szabályok alkalmazásával (lásd a D Függeléket) a következő alakban írhatunk fel:

$$E_3 = \underbrace{2E_0 \cos\frac{\phi}{2}}_{\text{amplitúdó}} \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right), \qquad \textbf{(38-6)}$$

Itt $2E_0 \cos(\phi/2)$ mindkét $\mathbf{E}_0$ fázisvektornak az $\mathbf{E}$ irányába eső vetülete és $\omega t + \phi/2$ az a szög, amit $\mathbf{E}$ a vízszintes tengellyel bezár.

A fény intenzitása arányos az eredő hullám amplitúdójának négyzetével

$$I \propto \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2 = 4E_0^{\,2} \cos^2\frac{\phi}{2}$$

Fejezzük ki az I intenzitást a két résből álló rendszer $\phi = 0$ szimmetriatengelyén kialakuló maximális I_0 intenzitással:

$$I = I_0 \cos^2\frac{\phi}{2} \qquad \textbf{(38-7)}$$

Így a maximum a $(\phi/2) = m\pi$, azaz a $\phi = m2\pi$ helyeken lép fel, ami összhangban van a tapasztalatoknak megfelelő korábbi megállapításainkkal (lásd a (38-5) egyenletet).

Összefoglalva ennek a relációnak a tartalmát, látható, hogy az intenzitáseloszlás *maximumainak* helye (vagyis a fényes gyűrűk/csíkok centrumának helye) ott van, ahol a Δr útkülönbség a hullámhossz *egész* számú többszöröse:

KÉTRÉSES INTERFERENCIAKÉP FELTÉTELE — a *maximumok* (fényes csíkok): $m\lambda = d\sin\theta$ **(38-8)**

(ahol $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

Hasonlóan a *minimumoknak* (a sötét csíkok középvonalának) a helyét az határozza meg, hogy ott az útkülönbség a hullámhossz felének *páratlanszámú* többszöröse:

a minimumok (sötét csíkok): $\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = d\sin\theta$ **(38-9)**

(ahol $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

A gyakorlatban a $D >> y$ és így $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \theta$. A tangens függvény közelítésének felhasználásával a fenti egyenletet felírhatjuk így is:

a maximumokra, $m\lambda = d\left(\frac{y}{D}\right)$ **(38-10)**

a minimumokra, $\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = d\left(\frac{y}{D}\right)$ **(38-11)**

(a kis szögekre vonatkozó közelítéssel)

(ahol $m = 0, 1, 2, 3, \ldots,$)

A központi fényes csíkot *nulladrendű* csíknak ($m = 0$) nevezzük. A központi maximumtól bármely irányban elindulva, a fényes csíkok a következők: az *elsőrendűek* ($m = \pm 1$), a *másodrendűek* ($m = \pm 2$) és így tovább. A kétréses interferencia jellegzetes vonása, hogy amint a rések távolsága *csökken*, a csíkok távolsága *nő*. A fény hullámhosszának első kísérleti meghatározását ezzel a kétréses módszerrel még maga Young végezte el.

38-1 PÉLDA

Kétréses kísérletben 486 nm hullámhosszúságú fényt használunk és a rések távolsága 0,60 mm, az ernyő 2 m-re van a réstől. Mekkora a szomszédos fényes csíkok közötti távolság?

MEGOLDÁS

A kis szögekre vonatkozó közelítést alkalmazva a (38-10) egyenlet az m-edik maximum y helyét így adja meg:

$$m\lambda = d\left(\frac{y}{D}\right)$$

A szomszédos maximumok közti távolság ezért

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}[(m+1)-m]$$

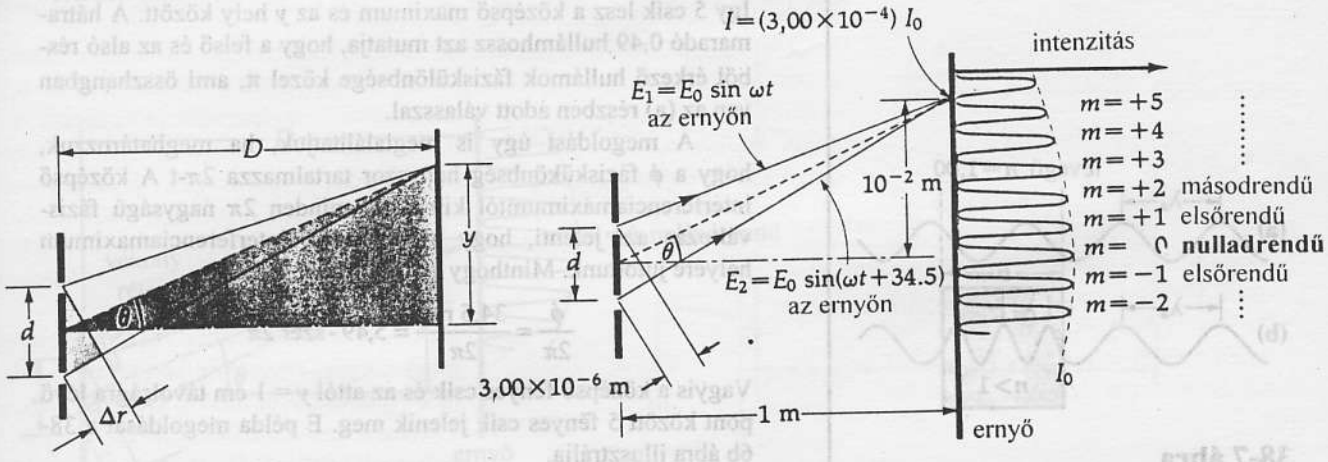
$$y_{m+1} - y_m = \frac{(486\times10^{-9}\ \text{m})(2\ \text{m})}{(0{,}60\times10^{-3}\ \text{m})}[1] = 1{,}62\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$= 1{,}62\ \text{mm}$$

Minthogy ez a távolság a résnek az ernyőtől való távolságához képest kicsiny, a kis szögekre vonatkozó közelítés jogos volt.

38-2 PÉLDA

Vizsgáljuk a 38-6 ábrán bemutatott kísérleti elrendezést. A réseket higanygőzlámpa ($\lambda = 546$ nm) világítja meg. Az ernyő $D = 1$ m távolságban van a résektől és a rések távolsága egymástól 0,30 mm. (a) Mekkora az I fényintenzitás az interferenciakép közepétől



(a) Ha $D >> y$ és d, akkor a két árnyékolt háromszög hasonló.

(b) A számértékek. A rések távolsága és az interferencia-kép mérete erősen eltúlzott.

38-6 ábra
A 38-2 példához

$y = 1$ cm-re, a középső csík I_0 intenzitásához képest? (b) Határozzuk meg, hogy a középső csík és y között hány fényes csík van.

MEGOLDÁS

(a) A felső és az alsó résből kiinduló hullámok közti fáziskülönbség meghatározása érdekében a 38-6 ábrán bemutatott elrendezésnél először meghatározzuk a Δr útkülönbséget. A 38-2c ábrában használt közelítéssel élve és elfogadva, hogy $\sin\Theta \approx \operatorname{tg}\Theta$, megállapíthatjuk, hogy az ábra beárnyékolt háromszögei hasonlók. Ezért a két háromszög megfelelő oldalai arányosak. Így $\Delta r/y = d/D$, vagyis

$$\Delta r = \frac{d}{D}y = \left(\frac{0{,}30\times10^{-3}\,\text{m}}{1\,\text{m}}\right)\left(1\times10^{-2}\,\text{m}\right) = 3{,}00\times10^{-6}\,\text{m}$$

A (38-2) egyenlet a fáziskülönbséget a Δr útkülönbség és a hullámhossz függvényében adja meg:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{3\times10^{-6}\,\text{m}}{5{,}46\times10^{-7}\,\text{m}}\right) = 34{,}523\ \text{rad}$$

A (38-7) egyenlet alkalmazásával

$$I = I_0\cos^2\frac{\phi}{2} = \left(2{,}98\times10^{-4}\right)I_0$$

Eszerint az y pont igen közel fekszik egy minimális intenzitású helyhez.

(b) Ha az ernyő mentén a centrális csíktól eltávolodunk, a Δr útkülönbség nő. Ha Δr teljes hullámhossznyit nő, a két hullám, ami a két résből érkezik, újra fázisban lesz, vagyis elérkezünk a második fényes csíkhoz, és így tovább. Hány hullámhossz fér rá a $\Delta r = 3{,}00\times10^{-6}$m teljes útkülönbségre?

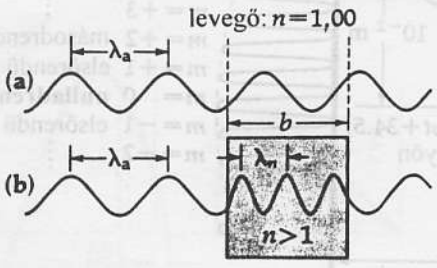
$$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{3{,}00\times10^{-6}\,\text{m}}{5{,}46\times10^{-7}\,\text{m}} = 5{,}49\ \text{hullámhossz}$$

Így 5 csík lesz a középső maximum és az y hely között. A hátramaradó 0,49 hullámhossz azt mutatja, hogy a felső és az alsó résből érkező hullámok fáziskülönbsége közel π, ami összhangban van az (a) részben adott válasszal.

A megoldást úgy is megtalálhatjuk, ha meghatározzuk, hogy a ϕ fáziskükönbség hányszor tartalmazza 2π-t A középső interferenciamaximumtól kiindulva minden 2π nagyságú fázisváltozás azt jelenti, hogy a következő interferenciamaximum helyére jutottunk. Minthogy $\phi = 34{,}5$ rad,

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{34{,}5\ \text{rad}}{2\pi} = 5{,}49\text{-szer}\ 2\pi$$

Vagyis a középső fényes csík és az attól $y = 1$ cm távolságra lévő pont között 5 fényes csík jelenik meg. E példa megoldását a 38-6b ábra illusztrálja.



38-7 ábra
Fáziskülönbség előállítható azáltal is, hogy az egyik fénysugár útjába n törésmutatójú fénytörő közeget helyezünk.

Két fénysugár között, amit a két rés bocsát ki, úgy is előidézhetünk fáziskülönbséget, hogy az egyik fénysugár útjába az adott közegétől eltérő tö-

résmutatójú átlátszó anyagot helyezünk (lásd a 38-7 ábrát). Egy b vastagságú és n törésmutatójú fénytörő közeg használata megváltoztatja az arra az úthosszra eső hullámok számát. Ha a hullámhossz a levegőben λ_a, a levegőben a b úthossz b/λ_a számú hullámhosszat tartalmaz. Az n törésmutatójú anyagban a hullámhosszak rövidebbek $\lambda_n = \lambda_a / n$. Így a b távolság b/λ_n hullámhosszat fog tartalmazni, ami

$$\frac{b}{\left(\frac{\lambda_a}{n}\right)} = n\left(\frac{b}{\lambda_a}\right)$$

alakban is felírható. A hullámhosszak számának *növekedése* ezért

$$\left(\frac{nb}{\lambda_a} - \frac{b}{\lambda_a}\right) = \frac{b}{\lambda_a}(n-1) \qquad \textbf{(38-12)}$$

Minthogy a 2π fáziskülönbség egy teljes hullámhossznyi útkülönbségnek felel meg, a ϕ fáziskülönbség a következő alakban adódik:

Fáziskülönbség, amit az egyik fénysugár útjába tett b szélességű n törésmutatójú anyag okoz,

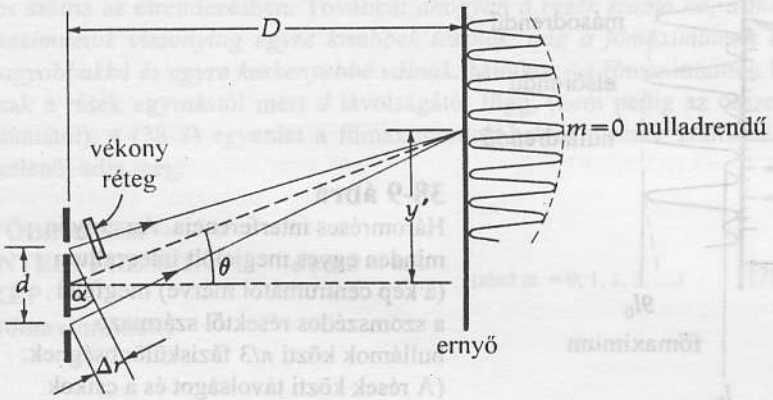
$$\phi = 2\pi\left(\frac{b}{\lambda_a}\right)(n-1) \qquad \textbf{(38-13)}$$

(ahol λ_a a hullámhossz a levegőben)

A következő példa azt világítja meg, hogy az interferenciakép mennyire érzékeny a törésmutatónak az egyik fénysugár útjában bekövetkező kis változására.

38-3 FELADAT

Vizsgáljuk a 38-8 ábrán bemutatott kétréses elrendezést, ahol a rések távolsága 0,30 mm és az ernyő $D = 1$ m távol van. Helyezzünk el egy igen vékony $b = 0{,}050$ mm vastagságú és $n = 150$ törésmutatójú átlátszó műanyagfóliát csupán a felső rés elé, (ez kb. e papírlap vastagságának felel meg). Ennek eredménye az, hogy az interferenciakép y' távolsággal felfelé elmozdul. Adjuk meg ennek az értékét!



38-8 ábra
A 38-3 példához

MEGOLDÁS

A középső maximum a zérus fáziskülönbségnek felel meg. Így a Δr távolságtöbbletnek, amit az alsó résből induló fénysugárnak kell megtennie, azt a fázistöbbletet kell kiegyenlítenie, amit a felső résből induló fénysugáron a műanyagfólia okoz. Ezért a ϕ *fáziskülönbséget* a (38-13) egyenlet adja meg;

$$\phi = 2\pi\left(\frac{b}{\lambda_a}\right)(n-1)$$

A megfelelő Δr *útkülönbség* pedig a (38-2) egyenlet szerint

$$\Delta r = \phi\left(\frac{\lambda_a}{2\pi}\right) = 2\pi\left(\frac{b}{\lambda_a}\right)(n-1)\left(\frac{\lambda_a}{2\pi}\right) = b(n-1)$$

Jegyezzük meg, hogy a fény hullámhossza ebben az egyenletben nem szerepel. A 38-8 ábrán a két résből származó fénysugarak közel párhuzamosak, így a θ szög kifejezhető a

$$\text{tg}\theta = \frac{\Delta r}{d} = \frac{y'}{D}$$

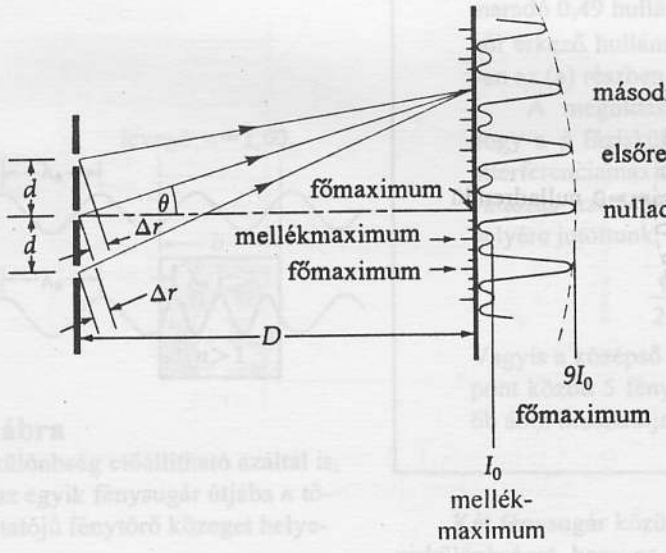
alakban is. Ezeket a kifejezéseket egyenlővé téve és y'-re megoldva adódik, hogy

$$y' = \Delta r\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{b(n-1)D}{d}$$

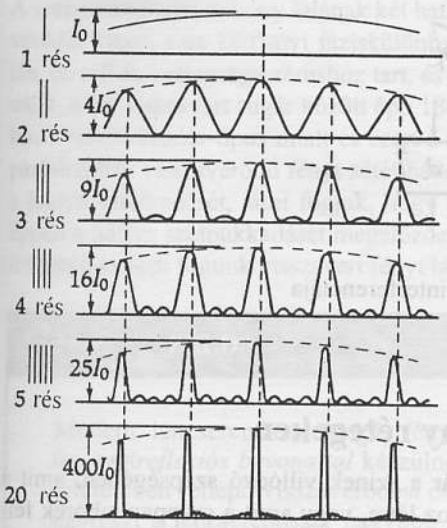
$$y' = \frac{(5\times10^{-3}\,\text{m})(1{,}5-1)(1\,\text{m})}{(3\times10^{-4}\,\text{m})} = 0{,}0833\,\text{m} = 8{,}33\,\text{cm}$$

38.3 Többréses interferencia

A fázisvektorok technikája, amit az előző pontban a kétréses interferenciakép leírására alkalmaztunk, könnyen általánosítható három- vagy többréses fényinterferencia tárgyalására is. A rések fizikai elrendezése hasonló a



38-9 ábra
Háromréses interferencia. Az ernyőn minden egyes megjelölt intervallum (a kép centrumától mérve) megfelel a szomszédos résektől származó hullámok közti $\pi/3$ fáziskülönbségnek. (A rések közti távolságot és a csíkok távolságát az áttekinthetőség kedvéért eltúloztuk.)



38-11 ábra
A többréses interferencia. A rések számának növekedésével (ha a nyílások közti távolság azonos marad) a főmaximumok ugyanazon a helyen maradnak, de egyre keskenyebbek és egyre nagyobb intenzitásúak lesznek. Az éles csúcsok intenzitása a rések számának négyzetével arányosan nő. Vegyük észre a függőleges tengely skálájának változását.

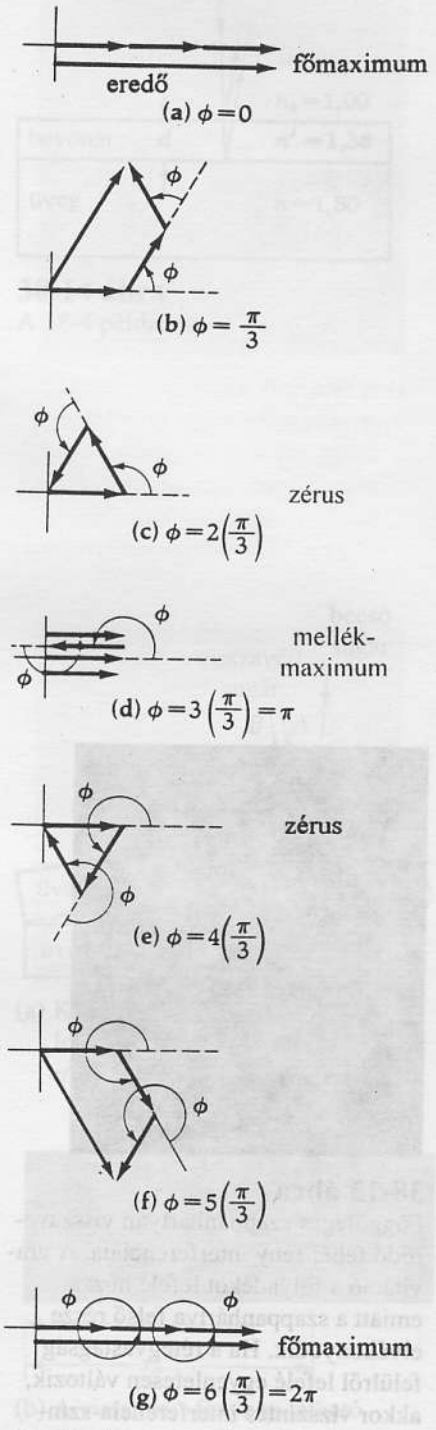
kétréses esetéhez. Azonban, ahogyan a 38-9 ábra mutatja, a mintázat egészen más lesz; egymást követő nagy(obb) és kis(ebb) maximumok sorozatát kapjuk. (Ezeket rendre *primér* és *szekundér* maximumoknak is nevezik.) A nagy maximumok (főmaximumok) ugyanazon törvényszerűség szerint követik egymást, mint a kétréses esetben, ha a rések d távolsága (a rések középvonalai között) ugyanakkora.

A három résen áthaladó fény inteferenciaképének jellegzetességeit a fázisvektorok segítségével érthetjük meg (38-10 ábra). A középső maximumban a három térerősség-fázisvektor azonos fázisban van; innen bármely irányban a szomszédos résekből származó hullámok fázisvektorainak ϕ fázisszöge növekszik. Intenzitásmaximum $\phi = \pi/3$ szögenként alakul ki. Vegyük észre, hogy a nagyobb vagy fő [(a) és (g)] és kisebb vagy mellékmaximumok (d) felváltva követik egymást.

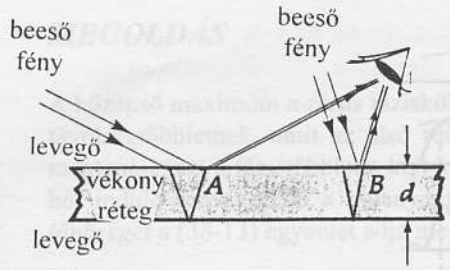
Ha a rések száma nő, ezzel együtt nő a mellékmaximumok száma is a főmaximumok között, ahogyan a 38-11 ábra mutatja. A két főmaximum közé eső mellékmaximumoknak a száma mindig *kettővel kevesebb,* mint az összes rés száma az elrendezésben. Továbbá: *ahogyan a rések száma nő, a mellékmaximumok viszonylag egyre kisebbek lesznek, míg a főmaximumok egyre nagyobbakká és egyre keskenyebbé válnak.* Minthogy a főmaximumok helye csak a rések egymástól mért d távolságától függ, (nem pedig az összes rés számától), a (38-8) egyenlet a főmaximumok helyét a rések számától függetlenül adja meg:

TÖBBRÉSES INTERFERENCIA KÉP (főmaximumok)

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \text{(ahol m = 0, 1, 2, 3, ...,)} \qquad \textbf{(38-14)}$$



38-10 ábra
Fázisvektor-diagram sorozat a háromréses interferencia értelmezéséhez. Az egymásra következő diagramok egy-egy további $\phi = \pi/3$ fáziskülönbséget képviselnek a szomszédos fázisvektorkomponensek között.



38-12 ábra
Vékony rétegről visszaverődő fény interferenciája

38.4 Interferencia vékony rétegeken

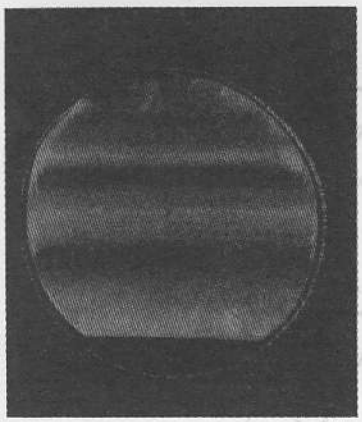
Valamennyien gyönyörködtünk már a színek villódzó szépségében, amit a szabad vízfelszínen úszó olajfilm hoz létre, vagy amit a szappanbuborék felszínén visszaverődő fény kelt. Mindkét jelenség a fény interferenciájának eredménye. Tekintsünk egy fénytörő anyagú vékony réteget. A ráeső fény mind a felső, mind az alsó felületéről visszaverődhet. A 38-12 ábra a két helyről visszaverődő fehér fény sugármenetét mutatja. A visszavert fénysugarak mindkét helyről a megfigyelő szemébe jutnak, és interferálnak egymással. Bizonyos hullámhosszakra az erősítés, másokra a gyengítés feltétele teljesül. Példaként foglalkozzunk azzal az esettel, amikor a vörös fény teljesen kioltódik. Ekkor a megfigyelő túlnyomóan kék-zöld színű hullámok visszaverődését fogja látni azon a helyen. Másrészt ha a B pontban az útkülönbség rövidebb, a megfigyelő túlnyomó részben a vöröses fény visszaverődését látja. Ilyen módon gyakran a szivárvány minden színe megjelenik a vékony réteg (film) különböző részeiről visszaverődve.

Az igen vékony szappanhártyáról visszaverődő fény egy másik érdekes jelenséget is mutat. Általában a frissen fújt szappanbuborékon vagy vékony huzalhurokkal készített szappanhártyán sötét háttér előtt, ráeső fényben a színek kavarognak. Ennek az az oka, hogy sem a szappanoldat koncentrációja és így törésmutatója, sem pedig a hártya rétegvastagsága nem egyenletes. Idővel a függőlegesen tartott hártyán a színek szivárványsorozatokba rendeződnek, amelyek a hártya alsó részén sűrűbben helyezkednek el, mint felül, és egyre sűrűbbek lesznek. Ez érthető, ha meggondoljuk, hogy egyrészt a hártyában lévő folyadéknak súlya van; emiatt alul a hártya vastagabb, mint felül, másrészt a folyadék lassan lefelé áramlik. Egyszercsak meglepő dolgot vehetünk észre. Amint a hártya felső része a látható fény hullámhosszánál vékonyabb lesz, *a filmről egyáltalán nem verődik vissza fény*. A réteg láthatatlanná válik. Ennek az az oka, hogy az első és a hátsó felületekről visszaverődő fény kioltja egymást, mert az egyik felületen történő visszaverődés során a fázis π-vel (180°-kal) ugrik, míg a másikon nem. A fénytörő anyagokon visszaverődő fény részletes tanulmányozása azt mutatja, hogy

A FÉNY VISSZAVERŐDÉSEKOR

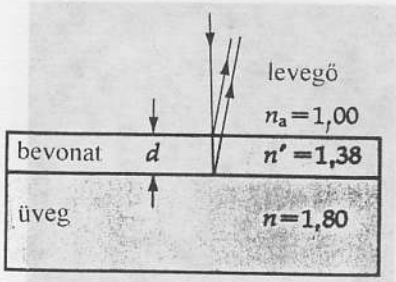
(1) Amikor az egyik közegben haladó fény nagyobb törésmutatójú közeg határáról visszaverődik, fázisa π radiánnal ugrásszerűen megváltozik.

(2) Ha egy közegben haladó fény nála kisebb törésmutatójú közeg határáról verődik vissza, *akkor fázisugrás nem lép fel.*



38-13 ábra
Függőleges szappanhártyán visszaverődő fehér fény interferenciája. A gravitáció a folyadékot lefelé húzza, emiatt a szappanhártya felső része elvékonyodik. Ha a rétegvastagság felülről lefelé egyenletesen változik, akkor vízszintes interferencia-színsávok jönnek létre, ezt mutatja az ábra. Minthogy a hártya első felületéről visszaverődő sugár 180°-os fáziseltolást szenved, (a hátsó felületről való visszaverődéskor fáziseltolódás nincs) ha a hártya nagyon vékony, akkor a két felületen visszavert sugarak interferencia révén kioltják egymást. Ez a jelenség hullámhossztól függetlenül a teljes látható hullámhossztartományban fellép ezért a hártya felső része feketévé válik.

A szappanbuborék vékony falának két határfelületén tehát a fény kétféle módon verődik vissza s ez 180°-nyi fáziskülönbséget eredményez közöttük. Ezért aztán, ha a film vastagsága zérushoz tart, és így az útkülönbség elhanyagolhatóvá válik, a két visszavert sugár között épp 180°-nyi fáziskülönbség áll elő a különböző visszaverődés-típus miatt és ezért a sugarak kioltják egymást. Ha a szappanhártyáról visszaverődő fényt sötét háttér előtt nézzük és gondosan figyeljük a hártya viselkedését, látni fogjuk, hogy a szinkontrasztok csökkennek; majd, éppen a hártya szétpukkadását megelőzően ahol a hártya elszakad abban a tartományban nem fogunk visszavert fényt látni.



38-14 ábra
A 38-4 példához

38-4 PÉLDA

Modern lencserendszerek (pl. fényképezőgép-objektívek) lencséi ún. *antireflexiós bevonattal* készülnek, mely az üveg-levegő határfelületeken fellépő visszaverődést csökkenti. Ennek eredményeként egyrészt a lencserendszer nagyobb fényerejű lesz; másrészt a lencserendszerben ide-oda verődő fény nem zavarja a képalkotást. Számítsuk ki, hogy a flintüveg lencsére ($n = 1{,}80$) milyen vastag magnézium-fluorid ($n' = 1{,}38$) réteget kell felvinni, hogy a merőlegesen beeső fény visszaverődését teljesen meggátolja. Legyen a fény a látható spektrum közepére jellemző hullámhosszúságú, $\lambda = 550$ nm.

MEGOLDÁS

A 38-14 ábrán mindkét sugár nagyobb törésmutatójú közeg határán verődik vissza, mint amilyenben odáig terjedt, ezért a visszaverődéskor *mindkettő* π radián fázisváltozást szenved. Így az egyetlen fáziskülönbséget okozó tényező az egyik sugár extra optikai útja. Kioltás eléréséhez az $a = 2d$ minimális összes úthossz $\lambda_n/2$ kell, hogy legyen, ahol $\lambda_n = \lambda_a/n$, a hullámhossz a *bevonatban*. Így $2d = \lambda_a/2n'$. Ha ezt d-re megoldjuk, adódik a

$$d = \frac{\lambda_a}{4n'} = \frac{(5{,}50\times10^{-7}\,\text{m})}{4(1{,}38)} = 99{,}6\ \text{nm}$$

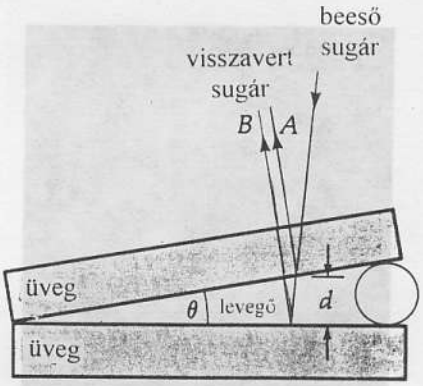
összefüggés. Bár az ilyen bevonatok nagyon vékonyak (közelítőleg 500 atomátmérőnyi vastagságúak), mégis viszonylag egyszerűen készíthető magnézium fluorid elpárologtatásával és az üvegfelületre való lecsapatásával. A teljes kioltás eléréséhez a két sugár *amplitúdójának* egyenlőnek kell lennie. Megmutathatjuk, hogy ez csak akkor teljesül, ha a *bevonat n' törésmutatója a bevonat két oldalán lévő közegek törésmutatójának éppen a mértani közepe*. Levegőre $n_a = 1$, és így

VISSZAVERŐDÉSMENTES BEVONAT TÖRÉSMUTATÓJA

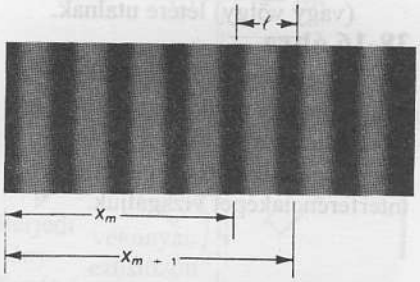
$$n' = \sqrt{nn_a} = \sqrt{n} \qquad \textbf{(38-15)}$$

Vékony levegőékek

Tekintsünk két üveglemezt, amelyek egyik élüknél érintkeznek, átellenes élük pedig egy hajszál vagy vékony drót miatt nem fekszik fel egymásra. A lemezek közötti légrés tehát ék alakú (38-15 ábra). A lemezeket felülről mo-

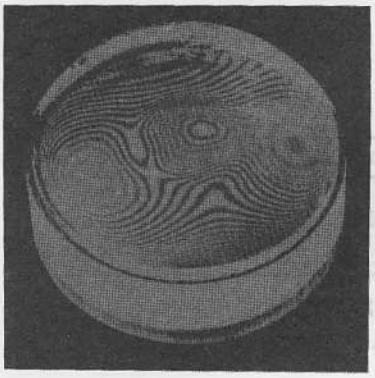


(a) Két üveglemezt az egyik oldalon drótszál választ el. Ennek méretét a rajzon eltúloztuk.

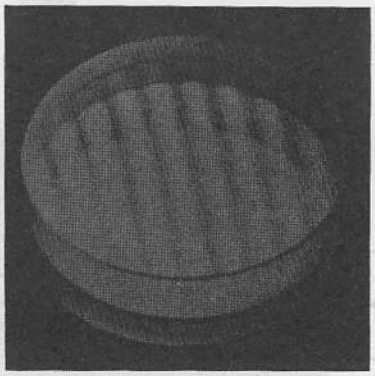


(b) A visszavert fényben látható interferenciacsíkok. Az első sötét csík (balra) a két lemez érintkezési pontjánál lép fel, mert ott az egyik visszaverődéskor 180°-os fázisugrás keletkezik.

38-15 ábra
Két üveglemez közti levegőéken kialakuló interferenciakép. Az üveglemezek közti θ szög nagyságát erősen eltúloztuk, hogy érzékeltessük az ék mentén a levegőréteg vastagságának a változását.



(a) A felületek az egyik oldalon érintkeznek, míg a szemközti másik oldalon kis hézag van. A szabályosan elhelyezkedő fényes és sötét csíkok azt mutatják, hogy a felület egyenletesen sima.



(b) A hullámos mintázat egyenetlen felületre utal. Itt a körkörös mintázatok három „magaslat" (vagy völgy) létére utalnak.

38-16 ábra
Egy üvegfelület simaságát ellenőrizhetjük, ha egy optikailag sima üveglemezt helyezünk rá és a visszavert monokromatikus fényben létrejövő interferenciaképet vizsgáljuk.

nokromatikus, párhuzamos fénnyalábbal világítjuk meg. A levegőékről[6] visszavert fénynyaláb a felső lemez alsó felületéről fázisváltozás nélkül visszaverődött A fénysugárból és az alsó lemez felső felületéről π fázisugrással visszatükrözött B sugárból áll. A kétféle visszavert fénysugár interferenciaképében sötét csíkok ott jelennek meg, ahol a B sugár által megtett úttöbblet a λ hullámhossz egész számú többszöröse. (Figyelembe kell venni azt is, hogy a fénysugarak a két lemez közötti d távolságot oda-vissza megteszik.)

Sötét sávok (levegőék esetén) $\quad 2d = m\lambda \quad$ (ahol $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ és d = lemez távolság) **(38-16)**

Hangsúlyozzuk, hogy ez az egyenlet a kioltás feltételét adja meg és azt is magában foglalja, hogy az egyik határfelületen való visszaverődéskor a fázis fordul.

Ha az üveglemezek simák (felületeik ideális síknak tekinthetők), az interferenciakép azonos távolságokban lévő sötét és világos csíkok sorozatából áll. Két sáv között az üveglemezek távolsága éppen $\lambda/2$-nyit változik (ugyanis így a fénynek oda-vissza éppen λ úttöbbletet kell megtennie). A szomszédos sötét sávok ℓ távolságát az adja meg, hogy ekkora távolságban a levegőék $\lambda/2$-vel vastagabb; a θ ékszög tangense tehát $\operatorname{tg}\theta = (\lambda/2)/\ell$. Minthogy θ rendszerint igen kis szög, a $\operatorname{tg}\theta = \theta$ közelítés alkalmaztató, és így a csíkok ℓ távolságára az adódik, hogy:

$$\ell = \frac{\lambda}{2\theta} \qquad \textbf{(38-17)}$$

Az, hogy egy üvegfelület ténylegesen sík-e vagy egyenetlen, úgy ellenőrizhető, hogy optikailag sík üveglemezt helyezünk rá. (Ez utóbbi olyan, hogy felületének az ideális síktól való eltérése legfeljebb a hullámhossz töredéke.) Egyenetlen felület esetén interferenciasávok jelennek meg. Ahol a két felület felfekszik egymáson, ott *sötét* folt (vagy sáv) jelenik meg a kioltás miatt (38-16 ábra).

38-5 PÉLDA

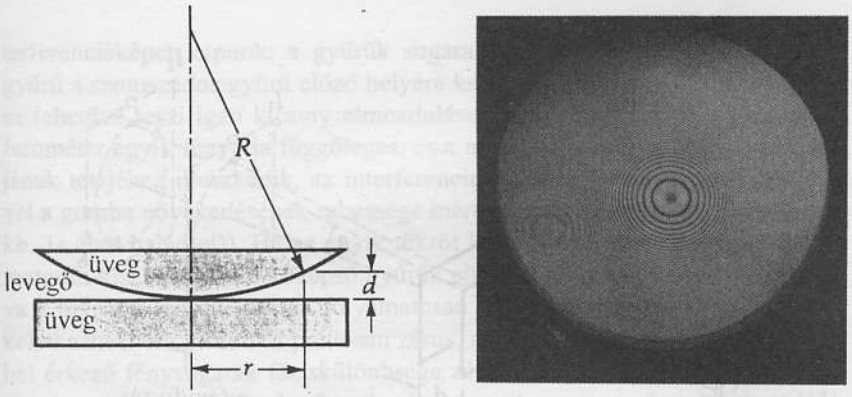
A 30 cm hosszú üveglemezek egyik végükön érintkeznek de a másik végükön egy emberi hajszál miatt nem érnek össze. (lásd a 38-15 ábrát). Mekkora az interferenciacsíkok távolsága, ha a hajszál átmérője 50 mikrométer és a lemezeket zöld fénnyel világítjuk meg ($\lambda = 546$ nm)?

MEGOLDÁS

A lemezek közti levegőék szöge $\theta = D/L$ (radiánban), ahol D a hajszál átmérője és L a lemez hossza. Ezt a kifejezést a θ szög helyére helyettesítve a (38-17) egyenletben, kapjuk, hogy

$$\ell = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{L\lambda}{2D} = \frac{(0{,}3\ \text{m})(5{,}46\times10^{-7}\ \text{m})}{2(5{,}0\times10^{-5}\ \text{m})} = 1{,}64\times10^{-3}\ \text{m} = 1{,}64\ \text{mm}$$

[6] A másik felületpárról való visszaverődések elhanyagolhatók. Ha a felületek viszonylag távol vannak egymástól, vagy ha a szög naggyá válik, akkor az interferencia-csíkok olyan közel kerülnek egymáshoz, hogy az emberi szem nem képes felbontani őket. (Kivétel: nagy koherenciájú párhuzamos lézerfény csaknem párhuzamos felületekről visszaverődve vastag lemezeken is létrehoz látható interferenciacsíkokat. A fénynek azonban koherensnek kell maradnia még akkor is, ha a két sugár útkülönbsége nagy.



(a) A Newton gyűrűk konvex lencse és sima üveglap közötti visszaverődések következtében keletkeznek.

(b) Newton gyűrű monokromatikus fényben fényképezve

38-17 ábra
Newton gyűrűk (Megjegyzés: a (b) képen a lencse szélén látható halvány foltok és gyűrűk nem a Newton gyűrűk részei)

A Newton gyűrűk

Ha sík-domború lencsét domború felületével tükröző síkfelületre (pl. üveglapra) helyezünk, és felülről megvilágítjuk, koncentrikus körökből álló interferenciaképet, ún. Newton gyűrűket észlelhetünk (38-17 ábra). A lencse és az üveglap közötti légrés vastagsága adott pontban a lencsefelület R görbületi sugarának és az érintkezés pontjától való távolságnak a függvénye: A Pitagorasz tétel szerint ugyanis $R^2 = r^2 + (R-d)^2 = r^2 + R^2 - 2Rd + d^2$. Ha az R görbületi sugár sokkal nagyobb a légrés d vastagságánál, a d^2 tag elhanyagolható, és így $2d \approx r^2/R$. A kioltás feltétele az, hogy az alsó felületen visszaverődő fénysugár által (oda-vissza) megtett $2d$ úttöbblet a hullámhossz egész számú többszöröse legyen. (Figyelembe kell venni az alsó lencse felületén bekövetkező fázisugrást is.)

Sötét csíkok (levegőék)

$$2d = m\lambda \qquad \text{(ahol } m = 0, 1, 2, 3, \ldots\text{)}$$

A két összefüggésből az m-edik gyűrű r_m sugarára azt kapjuk, hogy:

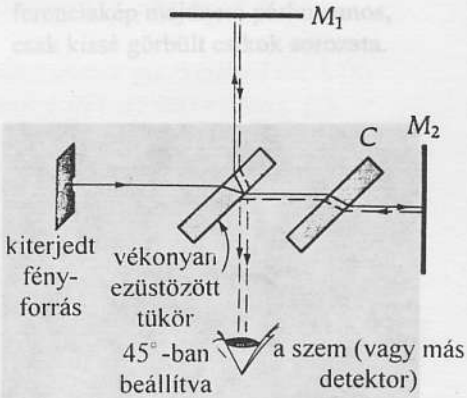
A NEWTON GYŰRŰK SUGARA

$$r_m = \sqrt{Rm\lambda} \qquad \textbf{(38-18)}$$

Kifelé haladva a gyűrűk sugara tehát $\sqrt{m}$ szerint nő, vagyis egyre sűrűbben helyezkednek el. Az interferenciakép egyik legérdekesebb vonása az, hogy az egymást követő körgyűrűk területe állandó.

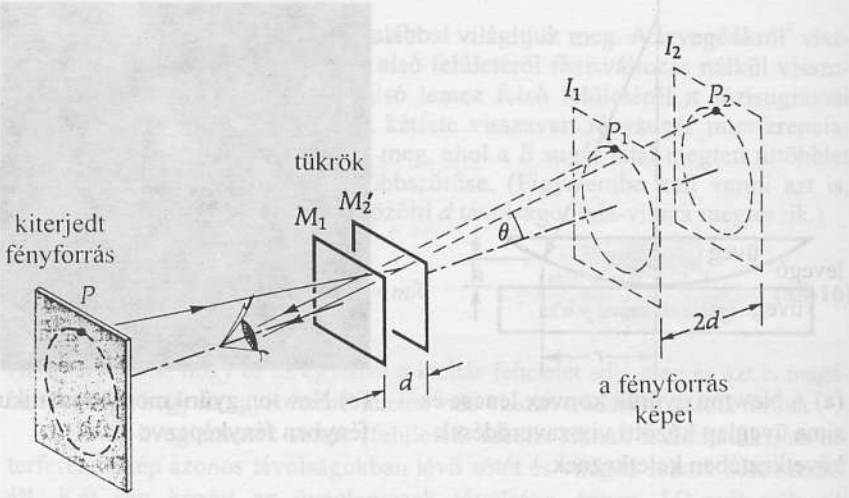
38.5 A Michelson-féle interferométer

A Michelson-féle[7] interferométer zseniális eszköz, mellyel távolságokat, távolságváltozásokat lehet nagy pontossággal mérni fényinterferencia alkalma-



38-18 ábra
A Michelson interferométer alkotó elemei. A C átlátszó üveglemezt *kompenzáló lemeznek* nevezik. Ez ugyanakkora és ugyanolyan orientációjú, mint a 45°-os tükör. Azt a célt szolgálja, hogy a két ágban a fény üvegben megtett útja egyenlő legyen egymással. Ez ugyanis fehér fényforrás esetén szükséges feltétele a készülék működésének.

[7] Albert Michelson (1852–1931) lengyel emigráns szülők gyermeke. A család igen szegény volt, gyermekük taníttatása a középiskolán túl már meghaladta a család lehetőségeit. Amikor az Egyesült Államok Tengerészeti Akadémiája elutasította jelentkezését, ügyesen megszervezte, hogy „véletlenül" találkozzék Grant elnökkel, amikor az elnök a kutyáját sétáltatta a Fehér Ház parkjában. Michelson elhivatottsága olyan mély benyomást tett az elnökre, hogy külön ösztöndíjjal küldte őt Annapolisba tanulni. Miután Michelson 1873-ban diplomát szerzett, a fizika és a kémia előadója lett az Akadémián, ahol elkezdte egész életpályáján át tartó erőfeszítéseit a fény sebességének pontos meghatározására. Később a Case Institute of Technology fizikaprofesszora lett, ahol korábbi, az éterszél kimutatására szolgáló interferometriás kísérleteit finomította Edward Morley-val, a közeli Western Reserve vegyészével együttműködve. Michelsont nagyon elkeserítette az éterszél kimutatásának negatíveredménye, sokkal inkább kedvére lett volna, ha az éterhez viszonyított kicsi véges



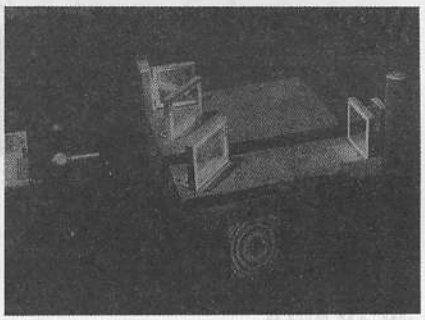
38-19 ábra
Körgyűrűk képződése a Michelson-féle interferométeren. Ezen az ábrán a félig áteresztő és 45°-os szögben álló tükör által merőlegesen eltérített sugarat kiegyenesítettük. Az M_1 tükör (a féligáteresztő tükrön keresztül) közvetlenül látható, míg M_2' az M_2 tükör virtuális képe (amit a 45°-os tükrön való visszaverődés hoz létre). Ezek a tükrök hozzák létre a kiterjedt fényforrás I_1 ill. I_2 képét. Ezeknek a képeknek a megfelelő pontjaiból kiinduló fényhullámok koherensek.

zásával. Az interferométer felépítése a 38-18 ábrán látható. A fényforrás hátulról monokromatikus fénnyel megvilágított mattüveg, vagyis nem pontforrás (ennek jelentősége az interferenciakép elemzése után nyilvánvaló lesz). A fény innen 45°-os szögben elhelyezett vékonyan ezüstözött, féligáteresztő tükörre jut, amely a fényt „kettéosztja": fele az M_1 tükörre verődik vissza, a másik fele az M_2 tükörre jut. E két tükörről visszaverődő fény végül a féligáteresztő tükör hátoldaláról visszaverődve egyesül és a megfigyelő szemébe vagy valamilyen más detektorba jut. Az interferenciakép kialakulásának megértése végett, gondolatban „egyenesítsük ki" a fényutakat, vagyis tekintsünk el a féligáteresztő tükrön való derékszögű visszaverődésektől (38-19 ábra). A kiterjedt fényforrásból jövő fény az M_1 és M_2 tükrön visszaverődve jut szemünkbe, a fényforrás két képe I_1 és I_2, melyek egymástól $2d$ távolságnyira látszanak, ahol d a két tükör távolsága. (Minthogy a két tükör állítható, a fényforrás két képe párhuzamossá tehető.)

A továbbiakban úgy tekinthetjük, mintha a fény nem a fényforrás P pontjából, hanem a P_1 és P_2 képpontokból indulna; az ezekből a pontokból kiinduló fény szükségszerűen koherens, hiszen mindkét sugár végső soron azonos, a P pontban lévő egyetlen atomból származik. Vagyis a P_1 és P_2 képpontokból a szembe érkező fénysugarak interferálnak. A két fényút különbsége $2d\cos\theta$; az interferenciamaximum ott van, ahol

$$2d\cos\theta = m\lambda$$

Ha a két kép, I_1 és I_2 síkja párhuzamos, az interferenciamaximumok a Newton gyűrűkhöz hasonló koncetrikus körök mentén helyezkednek el, ugyanis a tengely körül szimmetrikusan elhelyezkedő P_1 és P_2 képpontokból „kiinduló" fénysugarak fáziskülönbsége állandó. Ha az egyik tükröt $\lambda/2$-nyivel elmozdítjuk, a fénysugarak útkülönbsége λ-nyit változik, és ismét ugyanolyan in-



38-20 ábra
A bal oldali lézer fénye kis Michelson-féle interferométeren halad át és létrehozza az előtérben lévő homályos üveglemezen a céltáblaszerű mintázatot.

sebesség megméréséről számolhatott volna be. Azt hitte, hogy a pozitív eredmény elmaradása valahogyan módszerének rejtett hibájára utal. 1907-ben a fényre vonatkozó kutatásaiért Nobel-díjat kapott. Michelson volt az első amerikai Nobel-díjas.

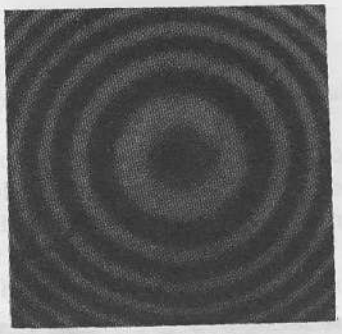
terferenciaképet kapunk: a gyűrűk sugara megváltozik, ám minden egyes gyűrű a szomszédos gyűrű előző helyére kerül. Az interferenciakép eltolódása lehetővé teszi igen kicsiny elmozdulások mérését. (Például, ha az interferométer egyik fényútja függőleges, és a megfelelő tükör egy gomba kalapjának tetejéhez illeszkedik, az interferenciasávok elmozdulásának követésével a gomba növekedésének sebessége mérhető meg (a detektor előtt egy sáv kb. 1s alatt halad el)). Ha az egyik tükröt lassan mozgatjuk, a gyűrűk folyamatosan kisebbednek, a középső gyűrűk eltűnnek; a másik irányban mozgatva a tükröt a gyűrűk sugara folyamatosan nő és középen mindig új gyűrűk keletkeznek. Ha viszont d pontosan zérus, a képek bármely P_1, ill. P_2 pontjából érkező fénysugarak fáziskülönbsége zérus, és így a teljes látómező világos (vagy sötét is lehet, ha figyelembe vesszük az egyes üveglapokon való visszaverődés, illetve azokon való áthaladás során történt fázisváltozásokat is). Ha az egyik tükröt kissé megdöntjük, a képsíkok levegő-éket alkotnak. Ennek hatásaként az interferenciagyűrűk középpontja jelentősen eltolódhat; így teljes gyűrűk helyett csak köríveket látunk, azaz az interferenciakép enyhén görbült, majdnem párhuzamos csíkokból áll (38-21 ábra).

Monokromatikus fényben az interferenciakép még 10 cm vagy annál nagyobb útkülönbségek esetén is éles marad. Az interferométer azonban *fehér* fénnyel is használható, feltéve, hogy a $2d$ útkülönbség nem nagyobb, mint a hullámhossz néhányszorosa és a látótér az interferenciakép közepének tájékára korlátozódik. A 400 nm és 700 nm közötti hullámhossztartományban a csíkok távolsága a különböző színek esetén különböző, a monokromatikus megvilágítás esetén tapasztalt minden egyes fényes csík a fehér fénynél kiterjedt szivárványszerű sávvá bomlik fel. Körülbelül egy tucatnyi gyűrűvel a középponttól az interferenciakép már annyira összefolyik, hogy lényegében fehér megvilágítás hatását kelti, bár az interferencia még mindig fennáll az egyes színekre, amint azt igazolhatjuk is, ha az interferenciaképet szűrőn keresztül szemléljük, ami természetesen csak egy színt enged át. Az interferométer egyes alkalmazásaiban szükség van egy referenciahelyzetre, ami ismételten és jól reprodukálhatóan beállítható még akkor is, ha a tükröt közben elmozdítottuk. Ez elérhető a fehérfényű megvilágítás gyűrűivel, mert ilyenkor van olyan helyzet, amelynél a teljes látótér fényes vagy sötét. Ez a helyzet referenciahelyzetként használható, mert ide ismételten és nagy pontossággal (a látható fény hullámhosszúságánál sokkal kisebb eltéréssel) visszalehet állni.

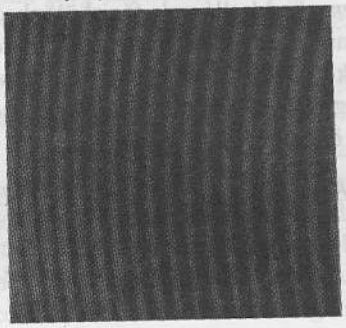
A Michelson-féle interferométer egyik fontos első felhasználása a méteretalon Párizsban őrzött példányának pontos hosszmeghatározása volt a kadmium adott színképvonalának hullámhosszúságával kifejezve. Megszámolták ugyanis, hogy hány csíkeltolódás történt, miközben az egyik tükör végighaladt a méterrúdon. A legfrissebb pontosításokat figyelembe véve, amelyek a fénysebesség mérésében addig megjelentek, 1983 október 20-án a 17. Általános Súly és Mértékügyi Konferencia elfogadta a méter új definícióját:

MÉTER **A méter az a hossz, amit a fény légüres térben a másodperc 1/299 792 458 tört része alatt megtesz.**

A Michelson-Morley-féle interferenciakísérlet másik történeti fontosságú alkalmazása 1887-ben volt, amikor megkísérelték meghatározni a Föld mozgását az *éterben,* egy hipotétikus közegben, amelynek létezését abban az időben a fényhullámok terjedéséhez szükségesnek hitték. Ilyen mozgás észlelésének a lehetetlensége – ez a híres *nulleredmény* – nemcsak hogy rendkívüli mértékben paradoxnak tűnt, hanem végül is az éterelméletre mért halálos csapásnak bizonyult. Ezeknek a kísérleti eredményeknek a következtében felmerült dilemmákat csak akkor sikerült feloldani, amikor Einstein 1905-ben közrebocsátotta speciális relativitáselméletét (lásd a 41. fejezetet)



(a)



(b)

38-21 ábra
A Michelson-interferométerben látható interferencia-kép a Newton-gyűrűkhöz hasonló. Az (a) képen a képsíkok párhuzamosak egymással (38-19 ábra), és a kép koncentrikus körök sorozata, melyek sugarai a képsíkok közti távolságtól függenek. A (b) képen a képsíkok nem párhuzamosak egymással, az interferenciakép majdnem párhuzamos, csak kissé görbült csíkok sorozata.

Csaknem vég nélkül sorolhatnánk a Michelson-féle interferométer alkalmazásait, különösen azokat, amelyekben a lézersugarat használják fényforrásként. De építettek már olyan berendezéseket is, amelyek a mikrohullámokat, illetve az elektromágneses színkép más tartományait használták fel. Az interferométer sokféle feladatra alkalmazható és rendkívül pontos mérőműszernek bizonyult, amely a tudomány és a technika minden területén nagy segítségünkre van.

Összefoglalás

Koherens fényhullámok fáziskülönbsége időben állandó. Amikor egyetlen atom által kibocsátott hullámvonulat két különböző része szuperponálódik, akkor, minthogy ezek koherensek, interferencia jön létre. Két hullám összege:

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \qquad \text{és} \qquad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

A ϕ *fáziskülönbség* három különböző ok következménye lehet:

(1) A Δr útkülönbség a hullámok között:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right) \text{ (radiánokban)}$$

(2) Az egyik hullám útjába b vastagságú n törésmutatójú anyag került:

$$\phi = \frac{2\pi b}{\lambda_a}(n-1) \text{ (radiánokban)}$$

(3) A két hullám (vagy valamelyike) visszaverődik.

(a) π radián (vagyis 180°) fázisugrás lép fel, ha valamely közegben haladó hullám egy *nagyobb* törésmutatójú anyagról verődik vissza.

(b) nincsen fázisváltozás, amikor a hullám egy kisebb anyagról verődik vissza.

Kétréses interferencia

d = a rések középvonalának távolsága
D = a rések és az ernyő távolsága
y = távolság az ernyő mentén a középső maximumtól mérve
m = az interferencia rendje.

A *maximumok* feltétele:

$$m\lambda = d\sin\theta \text{ , (ahol } m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Kis szögek esetén: $m\lambda = d\dfrac{y}{D}$

A *minimumok* a fényes csíkok között félúton helyezkednek el, feltételük:

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda = d\sin\theta \text{ , (ahol } m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Kis szögek esetén $\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda = d\left(\dfrac{y}{D}\right)$

Többréses interferencia: Egymástól egyenlő távolságra lévő rések esetén a főmaximumok ugyanott vannak, ahol a kétréses esetben, feltételük:

$$m\lambda = d\sin\theta \text{ (ahol } m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Kis szögek esetén: $m\lambda = d\left(\dfrac{y}{D}\right)$

A többréses interferencia főbb jellegzetességei az alábbiakban foglalhatók össze:

(1) A főmaximumok irányát a szomszédos rések közti távolság határozza meg, nem pedig a rések száma.

(2) A főmaximumok közti mellékmaximumok száma kettővel kevesebb mint a rések száma.

(3) A főmaximumok élessége és intenzitása a rések számával nő.

A vékony rétegek és levegőékek által létrehozott interferenciajelenségek a két felületen visszaverődő (majd szuperponálódó) fényhullámok fáziskülönbségétől függenek. A fáziskülönbségeket az egyik hullám úthossz többlete és a két felületen bekövetkező visszaverődés határozza meg.

A *Michelson-féle interferométer* zseniális és sokoldalú műszer, amellyel a fény hullámhosszúságánál sokkal kisebb eltéréssel mérhetünk meg távolságokat.

Kérdések

1. Miért nem lehetséges, hogy a kétréses interferenciaképen minden csík intenzitása ugyanakkora legyen?
2. A longitudinális hullámok – pl. hanghullámok – is létrehozhatnák kétréses interferenciajelenséget?
3. Két, egymáshoz közel, párhuzamosan elhelyezett fénycső, amelyeket zöld szűrővel vontak be, falat világít meg. Létrejöhet-e interferencia?
4. A kétréses interferenciát annak a feltételezésével tárgyaltuk, hogy a fény a réseket tartalmazó síkra merőlegesen esik be. Hogyan változik meg az interferencia, ha a rések síkját megdöntjük? Döntsük a réseket a) a résekkel párhuzamos, b) a résekre merőleges tengely körül.
5. Milyen interferenciakép alakul ki két, egymáshoz közeli kicsiny lyuk mögött?
6. Ha egy tiszta hang hallatszik egy szobában, a hallgató jelentős intenzitásváltozásokat észlel, amikor fejét egyik oldalról a másikra fordítja. Vajon ez interferenciajelenség? Miért kevésbé kifejezett ez a jelenség zenehallgatás közben?
7. Tegyük fel, hogy a kétréses kísérletet víz alá merítve végezzük. Milyen változások tapasztalhatók, ha egyáltalán lesznek, az ernyőn megjelenő interferenciaképben?
8. Young kétréses kísérletében a két függőleges rés alsó felét kék színű szűrővel, a felső felüket pedig vörös szűrővel fedjük be. (a) Milyennek látjuk az így kialakuló interferenciaképet? (b) Tegyük fel, hogy az egyik rést kék, a másik rést vörös szűrővel fedjük be. Írjuk le az interferenciaképet és magyarázzuk meg érvelésünket, amellyel a következtetéseinkhez jutottunk.
9. Hogyan változtatná meg a háromréses interferenciaképet, ha a középső rést szürke szűrővel fednénk be, hogy csökkentsük a belőle kiinduló fény intenzitását?
10. A vízen lévő olajfolt fényesebbnek látszik azokon a helyeken, ahol az olajréteg sokkal vékonyabb a látható fény hullámhosszánál. Az olaj törésmutatója nagyobb vagy kisebb mint a vízé?
11. Egy lencsét bevonattal látnak el a visszaverődés csökkentése érdekében. Mi történik azzal a fényenergiával, ami a bevonat nélkül visszaverődik?
12. Amikor ablaküvegről visszavert fényt látunk, miért nem figyelhetünk meg interferenciaképet? Végül is a fény mind az első mind a hátsó üvegfelületen visszaverődik.
13. Miért barnásvörösek a bevonattal ellátott fényképezőgéplencsék visszavert fényben nézve?
14. Üvegfelületen vákuumpárologtatással átlátszó, vékony bevonat készül. Hogyan változik a rétegről visszavert fény színe a bevonat vastagodása alatt?
15. Tekintsünk két üveglemezt, melyek egyik szélükön érintkeznek, míg a másikon az érintkezés valami okból nem tökéletes. A lemezek közti levegőék következtében létrejött interferenciakép leírásakor miért hagyhatjuk figyelmen kívül a felső lemez felső és az alsó lemez alsó lapja által visszavert hullámok interferenciáját, még akkor is, ha a lemezek tökéletesen párhuzamos felületűek?
16. Hogyan változnának meg a Newton-gyűrűk, ha a lemez és a lencse közti tartományt vízzel töltenénk ki?
17. Lehetne-e akusztikai Michelson-féle interferométert arra használni, hogy ultrahang hullámhosszát megmérjük? Ha igen, akkor hogyan kellene ilyen interferométert megszerkeszteni és mi lenne a mérés módja?

Feladatok

38.2 A két-réses interferencia

38A-1 Kettős rést 600 nm hullámhosszúságú fényhullámmal világítunk meg. A rések 0,33 mm-re vannak egymástól. A résektől 2,5 m távolságban lévő ernyőn interferenciakép alakul ki. Számítsuk ki az interferenciacsíkok távolságát az ernyőn, a középső maximum közelében!

38A-2 Tervezzünk meg olyan kétréses rendszert, amely a résektől 3 m távol lévő ernyőn egymástól 2 mm távolságban lévő interferenciacsíkokat hoz létre, ha 550 nm hullámhosszúságú fénnyel világítjuk meg.

38A-3 Kétréses kísérletben a nátriumlámpa fénye ($\lambda = 589$ nm) egymástól 1,8 mm-re lévő csíkokat hoz létre az ernyőn. Mekkora lesz a csíkok közti távolság, ha higanygőz-lámpával ($\lambda = 436$ nm) világítjuk meg a réseket?

38B-4 Kettős rést olyan fény világít meg, amely két különböző hullámhosszúságú fény keveréke. A rések mögötti ernyőn két interferenciakép rakódik egymásra. Az egyik interferenciakép ötödrendű maximuma a másik kép harmadrendű maximumával esik azonos helyre. Mekkora a két hullámhossz aránya?

38B-5 Két egymástól csak fázisában különböző fényhullám a következő képletekkel jellemezhető: $E_1 = E_0 \sin(kx-\omega t)$ és $E_2 = E_0 \sin(kx-\omega t + \phi)$. Mutassuk meg, hogy a két hullám lineáris kombinációjának eredménye: $E_3 = E_1+E_2 = 2E_0 \cos(\phi/2) \sin(kx-\omega t + \phi/2)$. (Útmutatás: tekintsük meg a 38-5 ábrát.)

38B-6 Kétréses interferenciakép maximumai között a távolság y_0. (a) Vázoljuk fel a fázisvektorábrát a hullám E amplitúdójának a meghatározásához a középső maximumtól $y_0/4$ távolságban. (b) Mekkora ebben a pontban az I intenzitás a főmaximum I_0 intenzitásához viszonyítva?

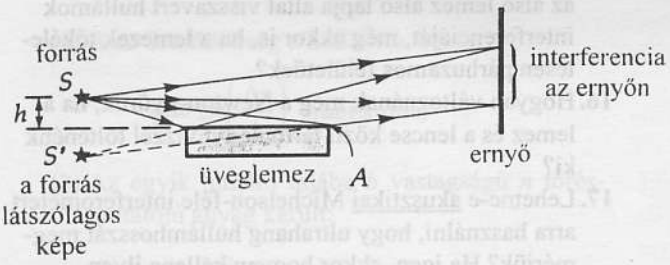
38B-7 Egy 0,4 mm vastag üveglemezre, melynek törésmutatója 1,50, $\lambda = 580$ nm hullámhosszúságú fénnyaláb esik úgy, hogy a lemez síkja merőleges a fénynyalábra.

(a) Számítsuk ki nyolc értékes jegyre, hogy az üveglemezben hány fényhullám lesz. (b) Adjuk meg, hogy az üveglemez mekkora eredő fáziseltolódást hoz létre a fénynyalábban.

38B-8 A hélium-neon lézer ($\lambda = 633$ nm) sugárnyalábját egy ernyőre irányítjuk. Hány hullámhossznyival nő meg az optikai úthossz, ha a nyaláb útjába merőlegesen 0,11 mm vastag, 1,55 törésmutatójú üveglapot helyezünk?

38B-9 Az 500 nm hullámhosszúságú fénnyel kétréses interferenciaképet hozunk létre az egymástól 0,50 mm távolságú függőleges réspártól 1,5 m-re. Adjuk meg az interferenciamaximumok számát a főmaximum és a tőle balra 1,00 cm-re lévő hely között.

38B-10 Lloyd tükörrel a 38-22 ábra szerint interferenciacsíkokat hozhatunk létre, ha az S_0 monokromatikus fényforrással világítjuk meg. A fényforrásnak a tükör által alkotott S' képe jelenti a második koherens fényforrást, amelynek fénye az S_0 fényével interferál. Az interferenciacsíkok az S_0-tól 2 m-re elhelyezett ernyőn 1,2 mm-re vannak egymástól. A fény 606 nm hullámhosszúságú. Határozzuk meg, mekkora h függőleges távolságban van S_0 a visszaverő felülettől?



38-22 ábra
A 38B-10 és a 38B-11 problémához

38B-11 Az előző feladat Lloyd tükrös elrendezésében a fényhullámok csak ott interferálnak egymással, ahol a két fényhullám keresztezi egymást. Tegyük fel, hogy nagy nagyítású lencsét használunk a tükör A széle felett a függőleges síkban kialakuló interferencia vizsgálatára. Vajon a tükör széléhez legközelebbi csík világos vagy sötét lesz? Magyarázzuk meg állításunkat.

38B-12 Kettős rést 600 nm hullámhosszúságú fénnyel világítunk meg és ezzel egy ernyőn interferenciát hozunk létre. Ezután igen vékony flintüvegből ($n = 1{,}65$) készült lemezt helyezünk csak az egyik résre. Ennek következtében az interferenciakép főmaximuma pontosan oda tolódik el, ahol az eredeti elrendezésben a tizedrendű maximum volt. Számítsuk ki ebből, hogy milyen vastag volt az üveglemez!

38.3 Többréses interferencia

38B-13 Három koherens forrásból származó következő sugárzások találkoznak a P pontban úgy, hogy elektromos térerősségvektoraik párhuzamosak (vagy antiparalel helyzetűek): $E_1 = E_0 \sin\omega t$, $E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi)$, és $E_3 = E_0 \sin(\omega t + 2\phi)$. Az eredő térerősség: $E_p = E_r \sin(\omega t + \alpha)$. A fázisdiagramok alkalmazásával számítsuk ki E_r és az α értékét (a) $\phi = 30°$, (b) $\phi = 60°$, és (c) $\phi = 120°$ esetére.

38B -14 Ismételjük meg a 38-10 ábra szerkesztését, de most négyréses interferenciára vonatkozóan. Vázoljuk fel a fázisvektorokat a főmaximumoknál, a minimumoknál és a mellékmaximumok közelében.

38.4 Interferencia vékony rétegeken

38A-15 Lencsét olyan üvegből készítettek, aminek a törésmutatója 1,70 az 550 nm hullámhosszon mérve. Adjuk meg annak az antireflexiós bevonatnak (a) a vastagságát és (b) a törésmutatóját, amit ezen a hullámhosszon lehet használni. (Útmutatás: alkalmazzuk a (38-15) képletet.)

38A-16 Adjuk meg annak a legvékonyabb szappanhártyának ($n = 1{,}33$) a vastagságát, amely a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza.

38A-17 A 38-4 példában visszaverődésmentes bevonat minimális vastagságát 99,6 nm-nek találtuk. Adjuk meg a következő vastagabb bevonat vastagságát, amely ugyanezt a hatást váltja ki.

38A-18 Két üveglemez között, amelyeket egyik oldalon igen vékony drótszál választ el, a 38-15 ábrán látható módon, levegőék jön létre. Amikor ezt az éket felülről 600 nm hullámhosszú fény világítja meg, 30 sötét csík válik láthatóvá. Számítsuk ki a drót sugarát!

38B-19 Víz felszínén úszó olajréteg ($n = 1{,}45$) merőlegesen beeső fehér fénnyel van megvilágítva. A folt 280 nm vastag. Adjuk meg, hogy melyik szín dominál (a) a visszavert fényben és (b) az átmenő fényben! Magyarázzuk el a gondolatmenetet.

38B-20 Üveglemezen ($n = 1{,}62$) egy vékony átlátszó réteg van ($n = 1{,}27$). A lemezre merőlegesen eső fény hullámhosszát folyamatosan változtatva megfigyeljük a lemezről visszavert fényt. Azt tapasztaljuk, hogy 680 nm-nél erősítés, 544 nm hullámhossznál pedig kioltás lép fel. (a két hullámhossz között ilyesmi nem volt megfigyelhető). Adjuk meg a réteg vastagságát.

38B-21 Szappanhártyát merőlegesen beeső fehér fénnyel világítunk meg és színes visszavert sávokat figyelünk meg, ahogyan a 38-13 ábra mutatja. Számítsuk ki a réteg vastagságát a réteg teljesen átlátszó része alatti első zöld sáv helyén ($\lambda = 530$ nm). A szappanoldat törésmutatója: 1,33.

38B-22 Legyen az m-ik Newton-gyűrű sugara r_m. Bizonyítsuk be, hogy ha $m >> 1$, akkor az egymásra következő gyűrűk területe minden esetben közelítőleg állandó és $R\pi\lambda$ nagyságú, ahol R a sík-domború lencse görbületi sugara, λ a fény hullámhossza.

38B-23 Két üveglemez között levegőék alakul ki, ha az egyik végüknél érintkeznek és a másik végük között

valami ezt megakadályozza. Amikor a lemezt monokromatikus fényhullámmal felülről megvilágítjuk, a visszavert fény összesen 85 sötét csíkot mutat. Számítsuk ki a sötét csíkok számát, ha a lemezek közti levegő helyét víz ($n = 1{,}33$) foglalja el.

38B-24 A Newton-gyűrűk előállítására szolgáló eszköz síklapból és 4 m görbületi sugarú sík-domború lencséből áll. Ha a berendezést közvetlenül felülről monokromatikus fénnyel világítjuk meg, a tizedik és a harmincadik sötét gyűrű 3,50 mm távolságban van egymástól. Mekkora a megvilágító fény hullámhossza?

38B-25 Ha Newton-gyűrűs készülékben a levegő helyére a lencse és a lemez közé folyadékot öntünk, akkor a tizedik gyűrű átmérője 1,50 cm-ről 1,31 cm-re változik. Adjuk meg a folyadék törésmutatóját.

38.5 A Michelson-féle interferométer

38A-26 Ha a Michelson-féle interferométer (38-18 ábra) M_1 tükrét 0,163 mm-rel elmozdítjuk, a látómezőn 500 fényes csík vonul át. Számítsuk ki az interferométer tükreit megvilágító fény hullámhosszát.

38B-27 A Michelson-féle interferométer egyik tükrét bambuszág növekvő hajtásának végéhez illesztjük. Ha 550 nm hullámhosszúságú fényt használunk, akkor a gyűrűk elektronikus számlálására szolgáló fotocellán percenként 473 fényes csík halad át a látótér egy pontján. Mennyit nő a bambuszhajtás egy nap alatt?

Vegyes feladatok

38C-28 A Hg-színkép sárga vonalának fényével ($\lambda = 579$ nm) megvilágítunk két függőleges rést, amelyek 0,20 mm-re vannak egymástól. A tőlük 2,5 m-re lévő ernyőn interferenciakép alakul ki. Adjuk meg a fény intenzitását a középső maximumtól 1,5 cm-rel jobbra, a középső maximum intenzitásával kifejezve.

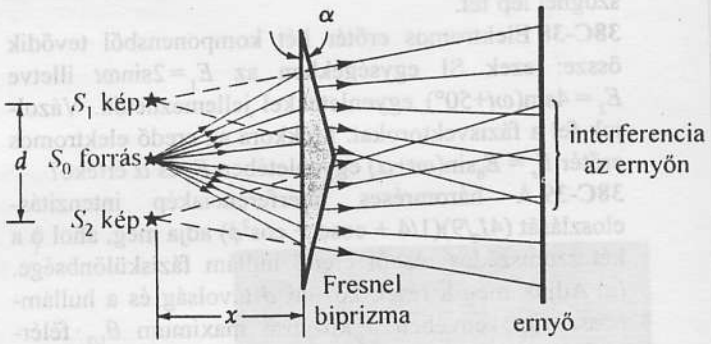
38C-29 Mutassuk meg, hogy a 38-4b ábrán az állandó fáziskülönbségnek megfelelő szaggatott görbék hiperbolák. A hiperbolák egyenlete derékszögű koordinátákban $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$.

38C-30 Monokromatikus λ hullámhosszúságú fény merőlegesen esik két keskeny résre, melyek egymástól d távolságban vannak. Az m-edrendű interferenciamaximum (a beesési iránnyal) θ szöget zár be, ami a $\sin\theta = m\lambda/d$ összefüggéssel van meghatározva. Adjuk meg az m-edrendű interferenciamaximum szöghelyzetét, ha a réseket tartalmazó síkot a résekkel párhuzamos tengely körül egy ϕ kis szöggel elfordítjuk.

38C-31 A 38-23 ábra Fresnel-biprizmát mutat, amelylyel egyetlen S_0 monokromatikus fényforrással is elő lehet állítani interferenciacsíkokat. A biprizma két egyforma üvegprizma, amelyek alapjaikkal érintkeznek egymással és a törőszögük (α) igen kicsi. A prizmák az S_D fényforrásról az S_1, illetve S_2 virtuális képet alkotják, amelyek távolsága d. Ha az üveg törésmutatója n, mutassuk meg, hogy $d = 2\pi(n-1)\alpha$.

38C-32 Tekintsünk két koherens, pontszerű fényforrást, amelyek egymástól négy hullámhossznyi távolságban vannak. A két pontforrást is tartalmazó síkban összesen hány interferenciamaximum irány van?

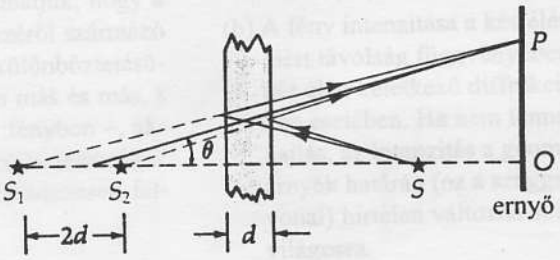
38C-33 Vizsgáljuk a kétréses interferenciakép középső maximumát! A maximum félszélessége kétszer akkora, mint az a távolság, amelyiknél az I intenzitás az $I_0/2$ értékre esik. Bizonyítsuk be, hogy a félszélesség a $\theta = \lambda/2d$ irányba esik. Használjuk a kis szögekre vonatkozó közelítéseket $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$.



38-23 ábra
A 38C-31 problémához

38C-34 A 0,45 mm távolságú kettős rést λ_1 hullámhosszúságú fénnyel megvilágítva interferenciaképet kapunk a 3 m távol lévő ernyőn. A tizedrendű interferenciamaximum 4 cm-re van a középső maximumtól. Ha egy másik λ_2 hullámhosszúságú fénnyel is megvilágítjuk a réseket, a két csíkrendszer úgy fedi egymást, hogy a tizedik csík elkülönült marad, míg a szomszédosak elmosódnak, nem lesznek olyan élesek. (a) Számítsuk ki λ_1 értékét! (b) Adjuk meg a két legközelebbi értéket λ_2 számára!

38C-35 Két rés közül a szélesebb háromszor akkora amplitúdójú fényt bocsát át, mint a másik. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a (38-7) képlet az $I = (I_0/4)(1 - 3\cos^2\phi/2)$ alakot öltené!



38-24 ábra
A 38C-36 problémához

38C-36 *A Pohl-féle interferométer.* Az S pontforrás fénye átlátszó vékony rétegen visszaverődve két, S_1 és S_2 virtuális forrást hoz létre, melyek az ernyőre merőle-

ges egyenesen fekszenek, ahogy a 38-24 ábra mutatja. Határozzuk meg a függőleges vonal mentén megjelenő interferenciamaximumok ϕ szöghelyzetét. Alkalmazzunk a ϕ szögre a kis szögekre vonatkozó közelítő formulát. (Megjegyzés: Meglepően jó interferenciaképek jöhetnek létre ily módon, ha széttartó lézernyaláb fénye mikroszkóptárgylemezéről, vagy műanyagfóliáról, vagy bármely vékony átlátszó lapról verődik vissza..)

38C-37 (a) Mutassuk meg, hogy a háromréses interferencia esetén a (38-7) képlet helyett a $I = (4I_0/9)(1/4 + \cos\phi + \cos^2\phi)$ érvényes. (b) Igazoljuk az (a) részben levezetett képlettel, hogy az első minimum a $\phi = 2\pi/3$ szögnél lép fel.

38C-38 Elektromos erőtér két komponensből tevődik össze: ezek SI egységekben az $E_1 = 2\sin\omega t$ illetve $E_2 = 4\sin(\omega t+50°)$ egyenletekkel jellemezhetők. Vázoljuk fel a fázisvektorokat. Mekkora az eredő elektromos erőtér $E_r = E_0\sin(\omega t+\alpha)$ egyenletében E_0 és α értéke?

38C-39 A háromréses interferenciakép intenzitáseloszlását $(4I_0/9)(1/4 + \cos\phi + \cos^2\phi)$ adja meg, ahol ϕ a két szomszédos résből eredő hullám fáziskülönbsége. (a) Adjuk meg a rések közötti d távolság és a hullámhossz függvényében a középső maximum $\theta_{1/2}$ félértékszélességét, ahol $\theta_{1/2}$ az a szög, amit az I_0 intenzitású középső maximum iránya és az $I = I_0/2$ intenzitású hely iránya bezár. (b) Hasonlítsuk össze az eredményt a kétréses interferenciára nyert eredménnyel (lásd a 38C-33 problémát).

38C-40 Határozzuk meg a d réstávolság és a λ hullámhossz függvényében a középső maximum teljes $\Delta\theta$ szögszélességét (a) a háromréses interferencia, (b) a négyréses interferencia és (c) az N-réses interferencia esetére!

38C-41 Egy 1,90 törésmutatójú lencse felületére 1,38 törésmutatójú visszaverődésmentes réteget vittek fel. Ez a réteg az 500 nm és a 600 nm hullámhossznál egyaránt visszaverődésmentes. Feltéve, hogy az n értéke ugyanakkora mindkét hullámhosszon, számítsuk ki a réteg vastagságát.

38C-42 A Newton gyűrűk visszavert fényben általában sokkal jobban észlelhetők, kontrasztosabbak, mint átmenőben. (a) Miért? (b) Vezessük le az átmenő fényben kialakuló m-edik sötét Newton gyűrű sugarára vonatkozó, a (38-19) egyenlettel analóg kifejezést.

38C-43 A Newton gyűrűk sugarára az $r_m = (Rm\lambda)^{1/2}$ kifejezés egy közelítés eredménye. Mutassuk meg, hogy a pontos képlet: $r_m = (Rm\lambda - m^2\lambda^2/4)^{1/2}$.

38C-44 A Na-lámpából emittált sárga fénynek két hullámhossza van, az egyik 589,0 nm, a másik 5896 nm. Tekintsünk egy Michelson-féle interferométert, amely ezt a fényt használja. Amikor az egyik kar végén lévő tükröt az egyik irányban folyamatosan elmozdítjuk, a megfigyelt csíkok „elmosódnak", majd újra élesen jelennek meg, majd megint elmosódnak és így tovább. (a) Magyarázzuk meg ezt a jelenséget! (b) Számítsuk ki a tükör két szomszédos helyzetének a távolságát, amelyekben a csíkok élesek.

38C-45 Légmentesen zárt tubus két végén egymással párhuzamos, 6,00 cm távolságban lévő ablakokkal ellátott cső Michelson-féle interferométer egyik karjában van elhelyezve úgy, hogy mind a ráeső (570 nm hullámhosszúságú), mind a tükrön visszaverődő fény áthaladhasson rajta. Ha a csőből a levegőt egy szivattyúval leszívják, akkor az interferométer látóterének adott pontján 63 csík vonul át. Számítsuk ki ebből a levegő törésmutatóját hat értékes jegyre!

34C-43 A válasz adott.
34C-45 A válasz adott.
34C-47 2000 A/s
34C-49 A válasz adott.
34C-51 A válasz adott.
34C-53 $i = 40{,}8\ \sin(\omega t + 25{,}6°)$
34C-55 239 mH
34C-57 a) 100 μF b) 632 rad/s c) 125 W d) 39,5 V f) 150 μF g)párhuzamosan
34C-59 A válasz adott.

XXXV. Fejezet

35A-1 30,0 cm
35B-3 A válasz adott.
35B-7 ha $r < R$: $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$; ha $r > R$: $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$
35A-9 A válasz adott.
35B-11 377 Ω
35A-13 a) $1{,}67 \times 10^{13}$ T b) $3{,}32 \times 10^{12}$ W/m^2
35B-15 a) $(2\times10^{-8})\sin(kx - 10^{16}t)\hat{z}$ b) $1{,}88 \times 10^{-7}$ m c) $1{,}59 \times 10^{-10}$ J/m^3
35B-17 a) 1,20 m b) $u = 2{,}36 \times 10^5$ J/m^3 c) $E_o = 2{,}31 \times 10^8$ V/m
35B-19 A válasz adott.
35A-21 $8{,}97 \times 10^{-3}$ N
35A-23 $5{,}60 \times 10^{-6}$ N/m^2
35B-25 a) 1900 V/m b) $5{,}00 \times 10^{-11}$ J c) $1{,}67 \times 10^{-19}$ kg·m/s
35C-27 a) $1{,}88 \times 10^{-10} \cos 377t$ b) $1{,}00 \times 10^{-4} \cos[(3{,}77 \times 10^{-8})t]$
35C-29 A válasz adott.
35C-31 A válasz adott.
35C-33 21,9 V/m
35C-35 a) 292 nm
35C-37 A válasz adott.
35C-39 A válasz adott.
35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

XXXVI. Fejezet

36A-1 A válasz adott.
36B-3 A válasz adott.
36B-5 (30, –40), (–30, 40), (–30, –40), (cm-ben)
36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép egyenesállású, virtuális, $N = 0{,}273$
36A-9 a) 7,50 cm b) ∞
36B-11 9,23 cm
36B-13 8,00 cm
36C-15 A válasz adott.
36C-17 40,0 cm
36C-19 A válasz adott.
36C-21 ha $t = 228$ cm, a kép fordított állású, valódi és $N = -0{,}123$ ha $t = 21{,}9$ cm, a kép egyenes állású, virtuális és N = 8,12
36C-23 A válasz adott.
36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67
36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

XXXVII. Fejezet

37A-1 $n = 1{,}52$
37B-3 A válasz adott.
37B-5 0,624 cm
37B-7 a) 20,6° b) 0,400 szteradián c) 35,4°
37B-9 1,51
37B-11 2,14 szteradián
37B-13 17,0%
37A-15 R
37B-17 2,00
37A-19 3,57 mm kifelé
37A-21 26,7 cm
37B-23 $2f$
37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125
37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) –51,7 cm d) –17,24 cm
37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm
37A-31 a) 24,0 b) 48,1°
37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm
37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig
37C-37 A válasz adott.
37C-39 A válasz adott.
37C-41 A válasz adott.
37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c) 2,63 μs
37C-45 a gömbfelülettől számítva: a) $2{,}67R$ b) $1{,}80R$ c) $0{,}960R$
37C-47 A válasz adott.
37C-49 $(L^2 - 4fL)^{1/2}$
37C-51 A válasz adott.
37C-53 A válasz adott.
37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított állású kép $N = -2$ b) a lencse tárgyoldalán
37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a gyújtólencsén túl, $N = -0{,}42$
37C-59 A válasz adott.

XXXVIII. Fejezet

38A-1 5,00 mm
38A-3 1,33 mm
38B-5 A válasz adott.
38B-7 a) 1034,4827 b) 62,1°
38B-9 6
38B-11 sötét
38B-13 a) $2{,}73E_o$, 30° b) $2E_o$, 60° c) 0, definiálatlan
38A-15 a) 105 nm b) 1,30
38A-17 199 nm

38B-19 a) zöld b) piros
38B-21 99,6 nm
38B-23 113
38B-25 1,31
38B-27 18,7 cm
38C-29 A válasz adott.
38C-31 A válasz adott.
38C-33 A válasz adott.
38C-35 A válasz adott.
38C-37 A válasz adott.
38C-39 a) $0{,}155\lambda/d$ b) $0.500\lambda/d$
38C-41 543 nm
38C-43 A válasz adott.
38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

39A-1 0,396 mm
39B-3 18,0 mm
39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
39B-7 0,684
39B-9 a) 120 b) 60
39A-11 11,5 km
39A-13 15,4
39B-15 420 m
39B-17 $1{,}07 \times 10^{-5}$ m b) $1{,}97 \times 10^{-5}$ m
39A-19 36,9°
39A-21 $7{,}16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
39B-23 688 nm
39B-25 $1{,}375 \times 10^{-3}$ fok
39A-27 0,300 nm
39A-29 A válasz adott.
39B-31 17,0
39C-33 0,1233 rad
39C-35 lásd 2. lábj.
39C-37 A válasz adott.
39C-39 A válasz adott.
39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

40A-1 $\frac{7}{8}$
40B-3 $\frac{1}{8}$
40A-5 32,0°
40A-7 49,2°
40B-9 $\text{tg}\,\theta_p = 1/\sin\theta_c$
40B-11 16,4 μm
40B-13 A válasz adott.
40B-15 68,4 mg/cm^3
40C-17 0° és 90°
40C-19 78,1%
40C-21 A válasz adott.
40C-23 A válasz adott.
40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
40C-27 A válasz adott.
40C-29 118°

XLI. Fejezet

41B-1 1,5 cm/s
41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
41A-5 a) $1 - \beta \approx 2{,}35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
41B-7 $22{,}5m/c$ vagy $\frac{7}{5} \times 10^{-8}$ s
41B-9 6,17 ns
41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c d) 36 m e) 45 m/c
41A-13 0,946c és –0,385c
41A-15 $v_x = 0{,}994c$
41B-17 1,78
41A-19 $v = 0{,}866c$
41A-21 889 kg
41B-23 $4{,}28 \times 10^9$ kg/s
41B-25 A válasz adott.
41B-27 A válasz adott.
41B-29 A válasz adott.
41B-31 A válasz adott.
41B-33 a) 270 m/c vagy $9{,}00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
41B-35 b) 80 m/c
41C-37 a) 1,33c·s b) 3,00 s
41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
41C-41 A válasz adott.
41C-43 A válasz adott.
41C-45 $5{,}55 \times 10^{-17}$ s
41C-47 $V = v\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\right)$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24}E_o/c$ c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
41C-51 A válasz adott.
41C-53 A válasz adott.
41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

42A-1 1,51 cm^2
42B-3 0,646%
42A-5 9660 nm
42A-7 5222 K
42A-9 $2{,}43 \times 10^{-12}$ m
42A-11 A válasz adott.
42B-13 $3{,}54 \times 10^6$ m
42A-15 451 nm
42B-17 a) $3{,}56 \times 10^5$ m/s b) 432 nm
42A-19 4,85 pm

FIZIKAI OPTIKA II. – A DIFFRAKCIÓ

Ahol a távcső világa végződik, ott kezdődik a mikroszkópé.
Vajon melyik nyújt nagyszerűbb panorámát?

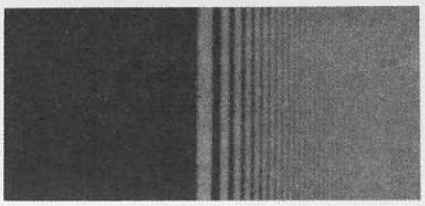
VICTOR HUGO
(*Saint Dennis*)

39.1 Bevezetés

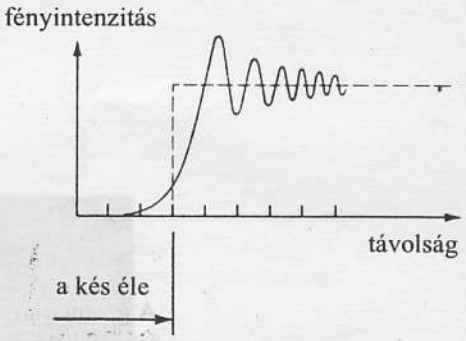
E fejezet tárgyalása során egyre világosabbá válik, hogy a diffrakció tulajdonképpen az interferencia egyik esete; fizikai különbség diffrakció és interferencia között nincsen. Mindkét esetben a fényhullámok interferenciája hozza létre a fényes és sötét tartományokat. Mindazonáltal különbséget teszünk a két jelenségkör között: *interferenciáról* rendszerint akkor beszélünk, ha az interferálódó hullámok véges számú pontszerű forrásból (pl. néhány résből), míg *diffrakcióról*, ha egyetlen, térben folytonos fényforrásból (lényegében végtelen sok szomszédos pontforrásból) indulnak ki.

Ha a fény csak egyenes vonalban terjedne, a nem átlátszó testek árnyékának éles szélei lennének, a fényes terület hirtelen váltana át a sötét területre. Valójában azonban a fény kissé elhajlik a tárgy határán és az árnyékzónában gyakran fényes és sötét csíkok keletkeznek a fényhullámok interferenciája következtében. *Ha a fény egy tárgy mellett elhaladva eltér az egyenesvonalú pályától, akkor fényelhajlásról (diffrakcióról) beszélünk* (39-1 ábra).

Hétköznapi tapasztalataink között diffrakciós jelenségek nem szerepelnek, ugyanis ezek (geometriai értelemben) kicsinyek, és ezért észrevétlenek maradnak.[1] Másik oldalról közelítve a jelenséghez meggondolhatjuk, hogy a legtöbb fényforrás nem pontszerű, s így a fényforrás egyik részéről származó elhajlási kép átfedi a többi részről származót, s ezáltal a megkülönböztetésüket nehezíti. Továbbá, az elhajlási kép minden hullámhosszon más és más, s így amikor egyszerre sok hullámhossz van jelen – pl. a fehér fényben –, akkor a különböző diffrakciós képek átfedik egymást. A diffrakciós jelenségek megértése azért fontos, mert ezek szabják meg az optikai berendezések fel-



(a) A bal oldali sötét árnyéktartományból a jobb oldali fényes tartományba való átmenet nagyított képe.



(b) A fény intenzitása a kés élétől mért távolság függvényében a kés élén keletkező diffrakciós kép esetében. Ha nem lenne elhajlás, az intenzitás a geometriai árnyék határán (ez a szaggatott vonal) hirtelen változna sötétről világosra.

39-1 ábra
Éles késpengén létrejövő elhajlási kép. Vegyük észre, hogy a geometriai árnyék mellett lévő fényes sávok valóban fényesebbek, mint a jobb oldalon látható egyenletes megvilágítás.

[1] Diffrakciós jelenséget észlelhetünk pl. ha kezünket az egyik szemünk elé tesszük úgy, hogy a fényforrást az éppen csak összeérintett ujjaink közti résen keresztül lássuk. (Két szomszédos ujjunkat esetleg kissé össze kell szorítani.) A kísérlethez vonalszerű fényforrás, pl. távol lévő neoncső is megfelelő lehet, ha egyvonalban fekszik az ujjunk között lévő réssel. Ha a rés elég szűk, megfigyelhető a sötét és fényes csíkok sorából álló kép. Az elhajlási csíkok kifejezetten jól észlelhetőek, ha távoli higanygőzlámpa fényét nézzük, mert annak színképe csak kevés különböző hullámhosszúságú fényből áll.

bontóképességének felső határát. Ez bizonyos mérések pontosságát is korlátozza.

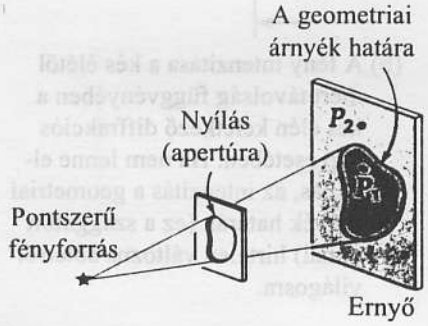
Az elhajlási jelenségeket már Newton és Huygens is ismerte, de magyarázatukat csak a XIX. században dolgozta ki Augustin J. Fresnel (1788–1827) a kiváló francia fizikus. Az ő munkássága és Thomas Young (1773–1929) brit fizikus kutatási eredményei képezik a fény hullámelméletének alapjait.

Általában a diffrakciós jelenségeket vagy tetszőleges alakú nyílással (*apertúrával*) vagy, a fényforrás és ernyő közé helyezett akadállyal lehet előállítani, ahogyan a 39-2 ábrán látható. Hogy kitaláljuk, mi történik, elfogadjuk Huygens elvét és azt gondoljuk, hogy a *fényhullám frontjának minden pontja új, pontszerű fényforrásként viselkedik.* Így az ernyő bármely pontjára (például az ernyő közvetlenül megvilágított részén lévő P_1 pontra, vagy az árnyékolt helyen lévő P_2 pontra) eső fény a résen áthaladó teljes fényhullám minden egyes pontjából kiinduló fénysugarak hatásának az összege. Az ábrán bemutatott eset két okból is bonyolult. (1) A hullámfront a nyílásban nem sík, hanem domború felület, ami azt jelenti, hogy a hullámfront különböző pontjaiban, a hullámfront normálisa és a P ponthoz húzott egyenes közti szög nem ugyanakkora. (2) A hullámfront különböző pontjaitól az adott P pont távolsága különböző.

Hasonló optikai viszonyokat másként, a 39-3a ábrán vázoltak szerint is előállíthatunk: egy közeli, pontszerű fényforrásból széttartó fény jut a réshez. Az ernyőt érő fény a rés pontjaiból kiinduló elemi hullámok szuperpozíciója. Ezt az általános esetet, **Fresnel-féle diffrakciónak** nevezzük és pontos leírása bonyolult. Ennek az esetnek csak néhány egyszerű példáját említjük meg a fejezet végén.

A 39-3b ábra sokkal könnyebben elemezhető esetet mutat. A nyíláshoz (fényrekeszhez) érkező sugarak *párhuzamosak* (a hullámfront *sík*) és az apertúrából távozóak is (amelyek az ernyő egy adott P pontjára esnek) *párhuzamosak* (vagy lényegében párhuzamosak), mert az ernyő nagyon távol van elhelyezve. Ezt az esetet Fraunhofer-féle diffrakciónak nevezik. A Fraunhofer-féle diffrakció feltételei akkor is megvalósíthatók, ha a fényforrás és az ernyő nem helyezhető nagy távolságba. Ekkor az egymáshoz közeli fényforrás és ernyő közé lencséket kell a 39-3c ábra szerint közbeiktatni.[2] A Fraunhofer-diffrakció könnyen leírható, mert nem szerepelnek benne a Fresnel-diffrakcióra jellemző változó nagyságú szögek.

A Fresnel- és a Fraunhofer-féle diffrakció néha nem különíthető el élesen. Például, ha a réshez közeli fényforrásból és ernyőből indulunk ki és fokozatosan egyre távolítjuk őket az apertúrától, a Fresnel-féle elhajlási kép fokozatosan Fraunhofer-elhajlássá alakul. Így a Fraunhofer-diffrakció valójában csak a sokkal általánosabb Fresnel-diffrakció *határesete.*

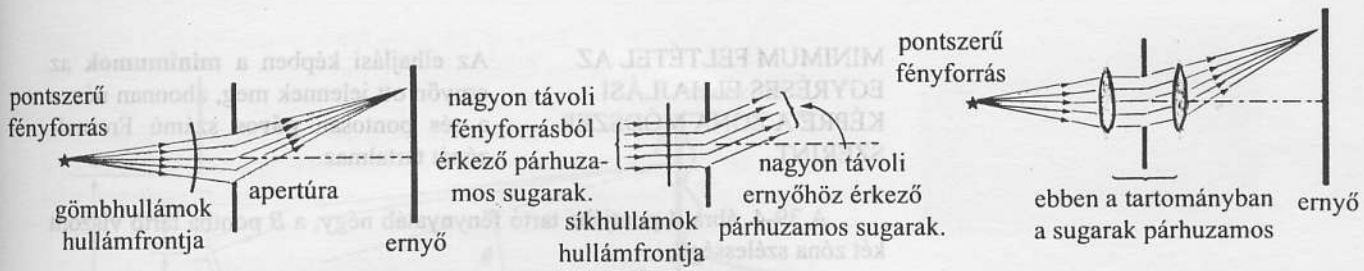


39-2 ábra
Elhajlás: általános eset. Az ernyőhöz érő fény a nyíláson átlépő fényhullámfront egyes pontjaiból induló elemi hullámok egymásrarakódása.

39.2 Elhajlás résen

Az egyréses Fraunhofer-diffrakciót kétféleképpen tárgyaljuk. Az első ún. Fresnel-féle zónamódszer egyszerű, de rendkívül hasznos közelítő eljárás a rés mögött nagy távolságban elhelyezett ernyőn a kioltás és maximális erősítések helyének meghatározására. A második, pontosabb és részletesebb leírást adó eljárás a *fázisvektorok (fazorok) használatával* az elhajlási kép intenzitáseloszlásának kvantitatív meghatározására is alkalmas a diffrakciós képben.

[2] A 39-3 és későbbi ábrákon a fényrekesznél lévő hullámfrontból csak azokat a sugarakat rajzoljuk meg, amelyek elérik a P pontot. Természetesen ugyanekkor vannak olyan más szögben induló sugarak, amelyek az ernyő más pontjai felé tartanak.



(a) A **Fresnel-diffrakció**. Mind a fényforrás, mind az ernyő közel van az apertúrához. Sem a fényforrásból induló sugarakat, sem az ernyőre érkezőket nem lehet párhuzamosnak tekinteni.

(b) A **Fraunhofer-diffrakció**. Mind a fényforrás, mind az ernyő a nyílástól nagyon távol van, a nyílásra beeső és onnan az ernyő felé tartó sugarak párhuzamosak.

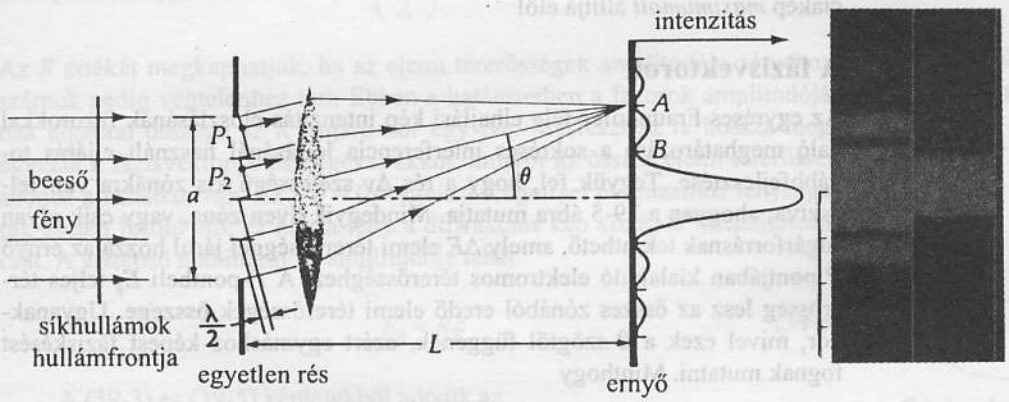
(c) Két lencse közbeiktatásával a **Fraunhofer-diffrakció** feltételeit közeli fényforrással, illetve ernyővel is megvalósíthatjuk.

39-3 ábra
A *Fresnel-* és a *Fraunhofer*-féle diffrakció közti különbség. A Fraunhofer diffrakciónál mind az apertúrára érkező, mind az azt elhagyó fénysugarak párhuzamosak.

A Fresnel zónák

Tekintsük a 39-4 ábrán bemutatott Fraunhofer-diffrakciós berendezést. Hogy a problémát két dimenzióra korlátozzuk, az ábra síkjára merőlegesen álló a szélességű rés elhajlási képét elemezzük. A rést *zónákra* osztjuk úgy, hogy egy zóna széléről induló fénysugár úthossza pontosan fél hullámhosszal legyen nagyobb, mint a szomszédos zóna széléről indulóé. Ezeket a zónákat *Fresnel zónáknak* nevezzük. A 39-4 ábrán a rés elég széles ahhoz, hogy az adott irányban elhajló fényre pontosan négy ilyen zóna legyen benne.

Mi történik a szomszédos zónákhoz tartozó sugarakkal? Az egymásnak megfelelő P_1, ill. P_2 pontokból induló sugarak úthossza éppen fél hullámhosszal különbözik egymástól, amikor az ernyőre érnek. A zónákból induló elemi hullámok azonban mind ilyen sugárpárokba rendezhetők, s ez azt jelenti, hogy a két szomszédos zóna esetén az egyik zónából érkező fény a szomszédos másik zónából érkező fényt interferencia révén kioltja.



39-4 ábra
A Fraunhofer-diffrakció. Az ernyő egy pontjában a kioltás feltételét úgy állapítjuk meg, hogy a rést Fresnel-zónákra osztjuk fel. (Az áttekinthetőség kedvéért a rés szélességét nagyon eltúloztuk az ernyő L távolságához képest.) A beeső fénysugarak párhuzamosak, és a nyílásnál sík hullámfrontot alkotnak.

MINIMUM FELTÉTEL AZ EGYRÉSES ELHAJLÁSI KÉPRE A ZÓNA MÓDSZER SZERINT

Az elhajlási képben a **minimumok** az ernyőn ott jelennek meg, ahonnan nézve a rés pontosan **páros** számú Fresnel-zónát tartalmaz.

A 39-4. ábra *A* pontjába tartó fénynyaláb négy, a *B* pontba tartó viszont két zóna szélességű.

Az egyréses diffrakciós kép intenzitásminimumainak helyét így az alábbi módon is kifejezhetjük:

KIOLTÁS FELTÉTELE (ALTERNATÍV MEGFOGALMAZÁS)

A diffrakciós képben **intenzitásminimum** (kioltás) ott jelentkezik, ahol a rés egyik szélétől érkező fénysugár a **hullámhossz egész számú többszörösével** hosszabb utat tesz meg, mint a másik szélről érkező fénysugár.

Így a 39-4 ábrán az elhajlási minimumok ott vannak, ahol

EGYRÉSES FRAUNHOFER-ELHAJLÁS MINIMUM-HELYEI

$$m\lambda = a \sin\theta \quad \text{(minimumhely esetén } m = 1, 2, 3, \ldots\text{)} \qquad \textbf{(39-1)}$$

Vegyük észre, hogy a középső *maximum* az $m = 0$ esetnek felel meg, míg az összes többi egész értékre minimum adódik. A legtöbb esetben a θ szög elég kicsi ahhoz, hogy a kis szögekre vonatkozó $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ közelítés érvényes legyen. Ha ez fennáll, *akkor a középső maximum és az összes minimum egyenlő távolságra vannak egymástól.* Így a centrális maximum teljes szélessége pontosan kétszer akkora, mint a szomszédos minimumok közötti távolság.

Ne tévesszük össze ezt a képletet a 38. fejezet (38-8) képletével:

$$m\lambda = d \sin\theta \quad \text{(maximumok: } m = 0, 1, 2, \ldots \text{ esetén).}$$

A két képletnek ugyanaz az alakja, de a (39-1) képlet az egyréses elhajlási kép *minimumait*, míg a kétrésre vonatkozó (38-8) összefüggés az interferenciakép *maximumait* állítja elő!

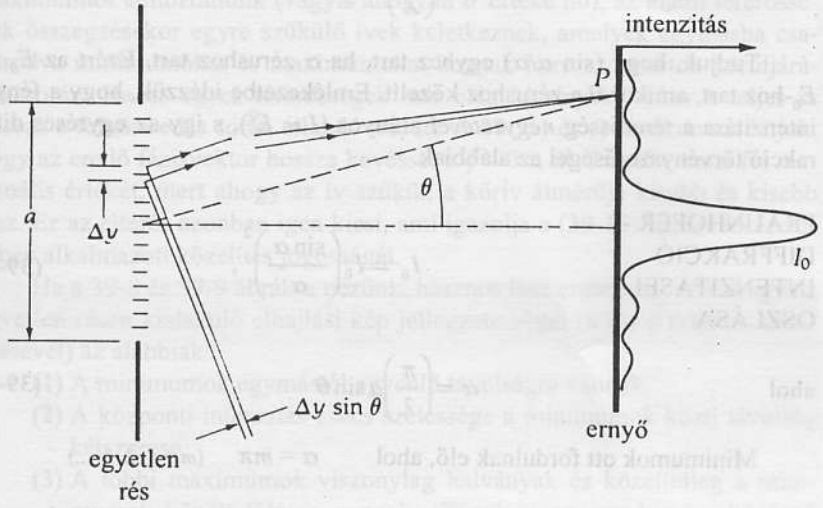
A fázisvektorok

Az egyréses Fraunhofer-féle elhajlási kép intenzitás-eloszlásának fazorokkal való meghatározása a sokréses interferencia leírásánál használt eljárás továbbfejlesztése. Tegyük fel, hogy a rés Δy szélességű kis zónákra van felosztva, ahogyan a 39-5 ábra mutatja. Mindegyik ilyen zóna, vagy csík olyan sugárforrásnak tekinthető, amely ΔE elemi térerősséggel járul hozzá az ernyő P pontjában kialakuló elektromos térerősséghez. A P-pontbeli E_θ teljes térerősség lesz az összes zónából eredő elemi térerősségek összege. Ugyanakkor, mivel ezek a θ szögtől függenek, ezért egymáshoz képest fáziskésést fognak mutatni. Minthogy

$$\frac{\text{Útkülönbség}}{\lambda} = \frac{\text{Fáziskülönbség}}{2\pi}$$

ezért

$$\frac{\Delta y \sin\theta}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi}$$



39-5 ábra
A Fraunhofer-diffrakció. A P pontban az elektromos térerősség az apertúra Δy szélességű zónákból származó elemi térerősségek összege.

ahol λ a hullámhossz és $\Delta\phi$ a szomszédos zónákból eredő elemi térerősség közötti fáziskülönbség. Átrendezéssel:

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\Delta y \sin\theta \qquad (39\text{-}2)$$

A 39-6b ábra a 39-5 ábrán látható rés felső szélén elhelyezkedő három szomszédosan fekvő zóna elemi térerősségeinek a fáziskülönbségét mutatja. Ha a θ szög kicsi, akkor az elemi térerősségek nagysága azonosnak tekinthető. A rés felső szélén elhelyezkedő első és az alsó szélén lévő utolsó zóna elemi térerőssége közti θ fázisszöget a 39-6a ábra mutatja. A fázisvektorok E_θ összege olyan egyenlőszárú háromszög alapja, melynek szára R. A trigonometriából ismeretes, hogy

$$E_\theta = 2R\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad (39\text{-}3)$$

ahol (39-2) alapján

$$\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)a\sin\theta \qquad (39\text{-}4)$$

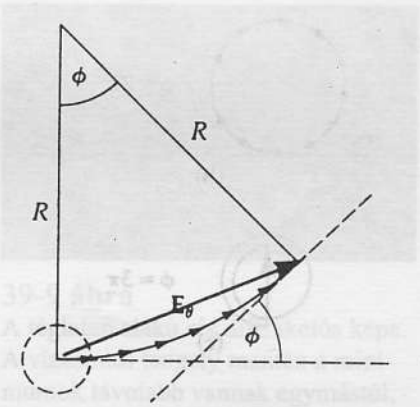
Az R értékét megkaphatjuk, ha az elemi térerősségek amplitúdója zérushoz, számuk pedig végtelenhez tart. Ebben a határesetben a fazorok amplitúdójának algebrai összege az R sugarú kör egy íve. Másrészt az ív hossza megegyezik a fázisvektorok összegével akkor, amikor az összes elemi térerősség azonos a fázisban van. Ez a $\theta = 0$, vagyis a tengellyel párhuzamos fénysugarak esetén fordul elő, ez hozza létre a diffrakciós kép középső intenzitáscsúcsát. A középső maximum E_0 amplitúdója tehát

$$E_0 = R\phi \qquad (39\text{-}5)$$

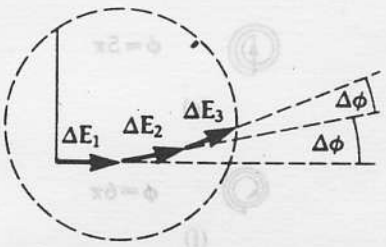
A (39-3) és (39-5) képletekből adódik az

$$E_\theta = \frac{2E_0\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\phi} = E_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right), \qquad (39\text{-}6)$$

összefüggés, ahol $\alpha \equiv \phi/2$. A (39-4) képletből



(a) A ΔE_θ elemi térerősség-járulékok fazor-összeadása a teljes E_θ térerősség meghatározására.



(b) Az első három elemi térerősség felnagyított képe.

39-6 ábra
A teljes E_θ elektromos térerősség-amplitúdó meghatározása az ernyő P pontjában a fázisvektor-összeadás segítségével.

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) a \sin\theta \qquad \textbf{(39-7)}$$

Tudjuk, hogy (sin α/α) egyhez tart, ha α zérushoz tart. Ezért az E_θ az E_0-hoz tart, amikor θ a zérushoz közelít. Emlékezetbe idézzük, hogy a fény I intenzitása a térerősség *négyzetével* arányos ($I \propto E^2$), s így az egyréses diffrakció törvényszerűségei az alábbiak.

FRAUNHOFER - DIFFRAKCIÓ INTENZITÁSELOSZLÁSA

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad \textbf{(39-8)}$$

ahol

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) a \sin\theta \qquad \textbf{(39-9)}$$

Minimumok ott fordulnak elő, ahol $\alpha = m\pi$ $(m = 1, 2, 3, ...)$

Ha ezt a (31-7) képlettel összevetjük, akkor vagyis $(\pi/\lambda)a \sin\theta = m\pi$, vagy

EGYRÉSES FRAUNHOFER-DIFFRAKCIÓ MINIMUMAI

$$m\lambda = a \sin\theta \qquad \textbf{(39-10)}$$

adódik, ahol a *minimumok* $m = 1, 2, 3, ...$ esetén állnak elő. Megállapíthatjuk, hogy ez ugyanaz az eredmény, amihez a Fresnel-féle zóna-módszerrel jutottunk.

A (39-8) képletből látható, hogy nem egyszerű a *maximumok* helyének és relatív amplitúdóinak egzakt meghatározása. Közelítő kifejezéseket azonban előállíthatunk a relatív amplitúdókra, ha feltesszük, hogy a maximumok éppen félúton vannak a minimumok között. Vagyis, ha tudjuk, hogy a minimumok akkor lépnek fel, amikor $\alpha = m\pi$, akkor maximum közelítőleg[3] akkor következik be, amikor

$$\alpha = (m + \tfrac{1}{2})\pi \qquad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, ...) \qquad \textbf{(39-11)}$$

Ezt a (39-8) képletbe behelyettesítve adódik, hogy

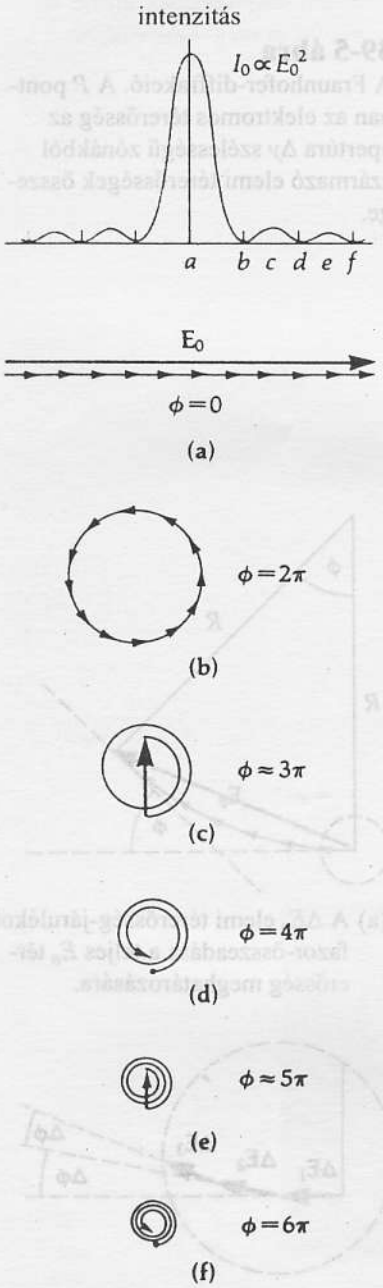
$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left[\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi}\right]^2 \qquad (\text{ahol } m = 1, 2, 3, ...)$$

vagy

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2} \qquad \begin{matrix}(\text{közelítő maximumok az} \\ m = 1, 2, 3, ... \text{ esetén})\end{matrix}$$

Így, ha I_0 a középső csúcs intenzitása, akkor $m = 1$ esetén $I_\theta = 0{,}045I_0$, m = 2-re, $I_\theta = 0{,}016I_0$, és m = 3-ra, $I_\theta = 0{,}0083I_0$. Világosan látszik, hogy az elhajlási kép csaknem teljes fényintenzitását a középső csúcs hordozza.

Az elhajlási kép geometriai értelmezése az intenzitás-viszonyok megértésében sokat segíthet. A 39-7a ábrán a középső maximumban a (ΔE_i fázis-



39-7 ábra
Az egyréses diffrakciókép fazorösszegezési ábrája. Az áttekinthetőség kedvéért a (c)-től az (f)-ig az íveket nem körökkel, hanem spirálokkal ábrázoltuk.

[3] Az I_θ maximum pontos helyét a $dI_\theta/d\alpha = 0$ alapján számíthatjuk ki, ami a tg $\alpha = \alpha$ egyenlethez vezet. Az egyenletet kielégítő első négy α-érték: 4,4934, 7,7253, 10,9041, és 14,0662. Lásd a 39C-32 feladatot.

vektorok egy egyenesbe esnek és eredőjük az E_0 fazor. Ahogyan a centrális maximumtól elmozdulunk (vagyis ahogyan θ értéke nő), az elemi térerősségek összegzésekor egyre szűkülő ívek keletkeznek, amelyek egymásba csavarodva minimumokat és maximumokat hoznak létre az ismételt körüljárások során. Ha az egyes térerősségek már elég kicsinyek, akkor a teljes ív hossza a feltekeredés során állandó marad. A 39-7c) és e) ábrákon azt látjuk, hogy az eredő fázisvektor hossza kevéssel a $\phi = 3\pi$, ill. 5π előtt veszi fel maximális értékét, mert ahogy az ív szűkül, a körív átmérője kisebb és kisebb lesz. Ez az eltérés azonban igen kicsi, ami igazolja a (39-10) képlet levezetésében alkalmazott közelítés jogosságát.

Ha a 39-8 és 39-9 ábrákra nézünk, hasznos lesz emlékezni arra, hogy az egyetlen résen kialakuló elhajlási kép jellegzetességei (a kis θ értékek közelítésével) az alábbiak:

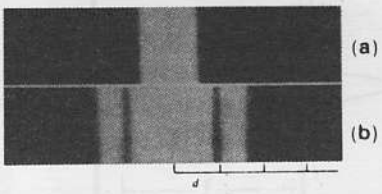
(1) A minimumok egymástól egyenlő távolságra vannak.

(2) A központi intenzitás-csúcs szélessége a minimumok közti távolság kétszerese.

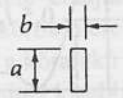
(3) A többi maximumok viszonylag halványak és közelítőleg a minimumok között félúton vannak. (Ténylegesen egy kissé a középső csúcs felé tolódnak.)

(4) Amikor a rés szélességét csökkentjük, az elhajlási kép nagyobb lesz.

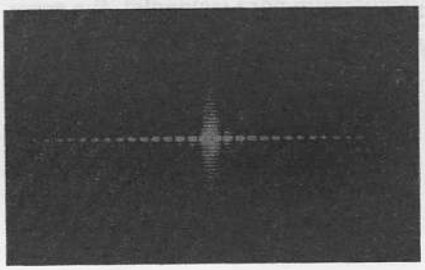
(5) Ha a hullámhosszat csökkentjük, az elhajlási kép kisebb lesz.



39-8 ábra
Két fénykép ugyanarról az egyréses elhajlási képről. A résen áthaladó fény 90%-a a központi csúcsra koncentrálódik. A (b) esetben az expozíciós időt jelentősen megnöveltük, hogy a két oldalon megjelenő halvány maximumokat is kihozza a felvétel. (Emiatt a központi csúcs túlexponált.) Az alsó skála a minimum helyeket jelzi.



az apertúra méretarányai



39-9 ábra
A téglalap alakú rés diffrakciós képe. A vízszintes tengely mentén a minimumok távolabb vannak egymástól, mint a függőlegesen, mert a rés vízszintes oldala kisebb a függőlegesnél.

39-1 PÉLDA

A diffrakciós képen a középső maximum szélessége gyakran különösen fontos. Tegyük fel, hogy a rés 3×10^{-4} szélességű és hogy sárgászöld, $\lambda = 500$ nm hullámhosszúságú fénnyel van megvilágítva. Határozzuk meg, milyen széles a centrális maximum a réstől 2 m távol lévő ernyőn.

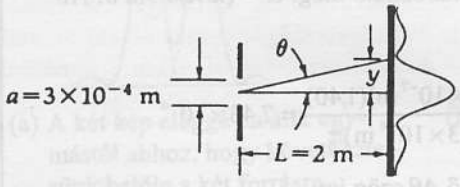
MEGOLDÁS

A centrális maximum teljes szélessége egyenlő a két oldalán lévő első minimumok közti távolsággal. A 39-10 ábrán látható θ szög értékét a (39-1) képlettel kaphatjuk meg:

$$a \sin\theta = m\lambda$$

ahol, $m = 1$ tűzi ki az első minimumot. Az a és a λ értékeit behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sin\theta = \frac{(1)\lambda}{a} = \frac{5{,}00\times10^{-7}\,\text{m}}{3\times10^{-4}\,\text{m}} = \tfrac{4}{3}\times10^{-3}$$



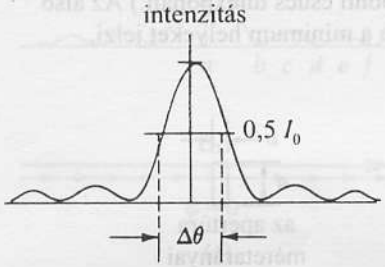
39-10 ábra
A 39-1 példához

Az y távolság a centrális maximum félszélessége: $y = L \operatorname{tg} \theta$. Minthogy $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta$, a kis szögek esetében, ezért

$$y = (2\ \text{m})(\tfrac{4}{3} \times 10^{-3}) = 3{,}33 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

Így a centrális maximum $2y$ szélessége:

$$2y = 6{,}67\ \text{mm}$$



39-11 ábra
A 39-2 példához.

39-2 PÉLDA

(a) Határozzuk meg a centrális maximumon belül a maximális intenzitás értékének feléhez tartozó szélesség $\Delta\theta$ szögét arra a helyzetre, melyet a 39-1 példában írtunk le. (b) Határozzuk meg az ernyőn a középső csúcs szélességét a maximális intenzitás felénél (lásd 39-11 ábrát).

MEGOLDÁS

(a) Az intenzitáseloszlást a (39-8) képlet adja meg:

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$$

A $I_\theta / I_0 = 0{,}5$ esetére ebből $\left(\dfrac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 = 0{,}5$

adódik. Minthogy ezt az egyenletet *algebrailag* nem lehet megoldani, az optikai szakkönyvek sin α/α értékét α függvényében táblázatokban is megadják. Ugyanakkor azonban alkalmazhatjuk a fokozatos megközelítés, a szukcesszív approximáció módszerét az α meghatározására. Mivel a formulákban szereplő szögeket, mindig *radiánban* kell kifejezni, így egy jó első közelítés lehet $\alpha = \pi/2$ (hiszen az első minimum az $\alpha = \pi$ helyen van). Ekkor

$$\left[\frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)}\right] = 0{,}405$$

Mivel ez a mennyiség nő, ha az α csökken, jobb közelítéssel is próbálkozhatunk: $\alpha \approx 1{,}40$ rad ($\approx 80°$). Ezzel:

$$\left(\frac{\sin 80°}{1{,}40}\right) \approx 0{,}500$$

A θ szög a (39-7) képletből határozható meg: $\alpha = (\pi/\lambda) a \sin \theta$. Átrendezéssel

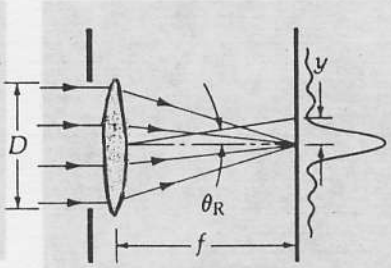
$$\sin\theta = \left(\frac{\lambda}{a\pi}\right)\alpha = \frac{(5 \times 10^{-7}\ \text{m})(1{,}40)}{(3 \times 10^{-4}\ \text{m})\pi} = 7{,}43 \times 10^{-4}$$

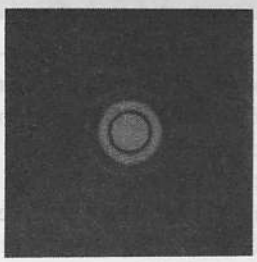
A teljes szélességnek megfelelő $\Delta\theta$ szög így

$$\Delta\theta = 2\sin^{-1}(7{,}43 \times 10^{-4}) = 1{,}49 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

(b) Az ernyőn a középső csúcs szélessége a maximális intenzitás értékének felénél:

$$\text{Szélesség} = L\Delta\theta = (2\,\text{m})(1{,}49\times10^{-3}\,\text{rad}) = 2{,}98\times10^{-3}\,\text{m} = 2{,}98\,\text{mm}$$





39-12 ábra
Fraunhofer-féle elhajlás, köralakú nyíláson. A körök mérete mindig nagyobb, mint a köralakú lyuk D átmérője. Ezért minél kisebb a lyuk, annál szélesebb az elhajlási kép. Az első diffrakciós minimum helye meghatározza a θ_R felbontási szög minimumát. (A fénykép kissé túlexponált, hogy a centrális fényes foltot körülvevő halványabb gyűrűk is láthatóvá váljanak.)

39.3 Elhajlás köralakú nyíláson

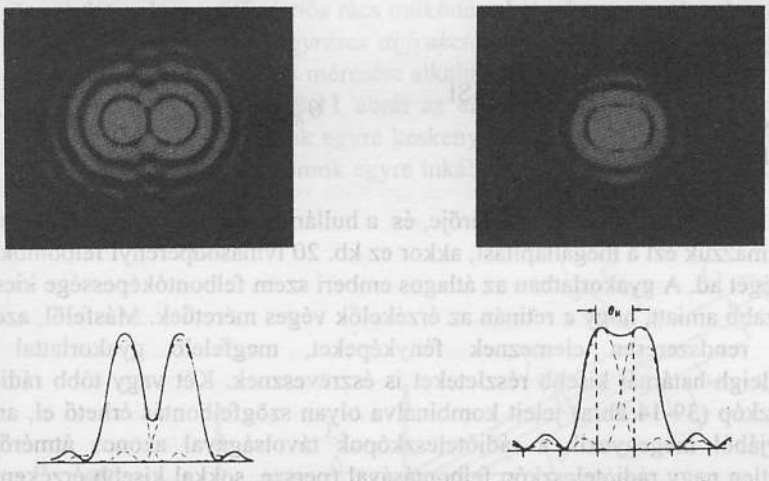
Az elhajlási jelenségek súlyos korlátokat szabnak a mikroszkópok, teleszkópok, de más, az elektromágneses színkép egyéb tartományaiban felhasznált berendezések felbontóképességére is. A legtöbb berendezésben köralakú fényrekeszt, apertúrát alkalmaznak, ilyen pl. a lencsék vagy a rádióantennák köralakú korongja. Az elhajlási kép elemzése ekkor jóval bonyolultabb, mint az egyszerű rés esetén, jóllehet az eredmény hasonlít az egyetlen rés elhajlási minimumaira vonatkozó összefüggéshez. ($a \sin\theta = m\lambda$). A D átmérőjű köralakú apertúra esetén a minimumok helye:

A FRAUNHOFER-DIFFRAKCIÓ MINIMUMAI KÖRALAKÚ NYÍLÁS ESETÉN

$$D\sin\theta = p_m\,\lambda \qquad \textbf{(39-12)}$$

ahol $p_1 = 1{,}220$, $p_2 = 2{,}233$, $p_3 = 3{,}238$, $p_4 = 4{,}241$, $p_5 = 5{,}243$ stb. A 39-12 ábra az elhajlási képet mutatja. A középső világos foltot *Airy-korongnak* nevezik Sir George Airy emlékére, aki először írta le ezt az elhajlási képet 1835-ben. Az Airy-korong az apertúrán áthaladó fényintezitás 84%-át tartalmazza, míg a centrális foltra és az első diffrakciós gyűrűre együtt az intenzitás 91%-a jut.

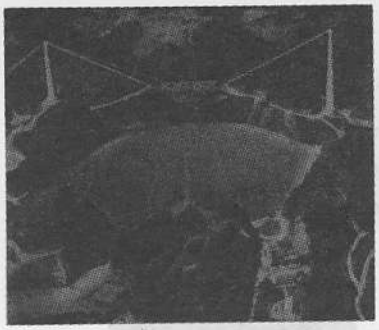
Rayleigh kritériuma két egyenlő intenzitású pontforrás megkülönböztethetőségére (felbonthatóságára) vonatkozik. Eszerint a fényforrások megkülönböztetéséhez az szükséges, hogy *az egyik elhajlási képének középső csúcsa a másik elhajlási képében a maximális értékhez ne essen közelebb az első minimumnál.* Tekintsük a 39-13 ábrát. Minthogy a szögek kicsik, $\sin\theta_R \approx \theta_R$ ebből adódik Rayleigh kritériuma:



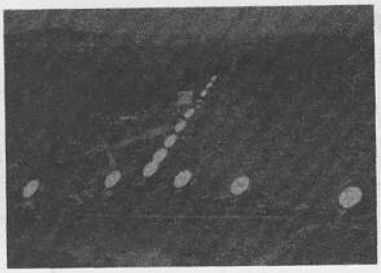
(a) A két kép eléggé elválik egymástól ahhoz, hogy következtessünk belőle a két forrásra.

(b) A képek átfedik egymást. A Rayleigh kritérium szerint az eredő kép alapján aligha különböztethető meg egymástól a két forrás.

39-13 ábra
Két, nem koherens pontszerű fényforrással létrehozott Fraunhofer-féle elhajlási kép egymásrarakódása.



(a) A világ legnagyobb rádióteleszkópja a kb. 300 m átmérőjű, rögzített tányérú reflektor Arecibo-ban (Puerto Rico). Mozgatható felső antennája – a fókuszhoz közel – a függőlegestől ±20° irányon belül érkező jelek vételére alkalmas. Az építés idején az antenna 8 hektárnyi felülete nagyobb volt, mint az addig valaha is megépített más rádióteleszkópok felületeinek összege.



(b) Az „Igen Nagy Rendszer" (Very Large Array) (New Mexico) 27 db 26 m átmérőjű irányítható korongot tartalmaz, amelyek Y alakú, több mint 27 km hosszú vonalon helyezkednek el. A jeleket az apertúraszintézis elnevezésű interferometrikus technikával elemzik az Y elágazási pontjában elhelyezkedő nagy számítógépen. A rendszer szögfelbontása a vonal hosszától függ és összemérhető a nagy teleszkópok látható fényben végzett 1 ívmásodpercnyi pontosságú méréseivel.



(c) Az „Igen Hosszú Alapvonalú Rendszer" (Very Long Baseline Array, VLBA), aminek befejezését 1992-re tervezték, 10 db 25 m átmérőjű antennából áll. A rendszer kb 8000 km hosszúságban az Északi Félgömbön húzódik végig. A fénykép a Los Alamos-ban (New Mexico, USA) épült antennát mutatja. A berendezést a Soccoro-ban (New Mexico) elhelyezett központ irányítja. Az egyes antennákról származó információt mágnesszalagon rögzítik és a központ 10^{12} művelet/másodperc sebességű számítógépen dolgozzák fel. Ennek a rendszernek a felbontóképessége olyan lesz, mint egyetlen 8000 km átmérőjű rádióteleszkópé. Az ilyen szögfelbontás egyenértékű azzal, mintha New Yorkban ülnénk, és egy San Fransiscoban felfüggesztett újságot olvasnánk.

39-14 ábra
Rádióteleszkópok

RAYLEIGH KRITÉRIUMA: A θ_R MINIMÁLIS FELBONTÁSI SZÖG KÖRALAKÚ APERTÚRÁNÁL

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D} \qquad \textbf{(39-13)}$$

ahol D a köralakú apertúra átmérője, és a hullámhossz. Ha az emberi szemre alkalmazzuk ezt a megállapítást, akkor ez kb. 20 ívmásodpercnyi felbontóképességet ad. A gyakorlatban az átlagos emberi szem felbontóképessége kicsit rosszabb amiatt, hogy a retinán az érzékelők véges méretűek. Másfelől, azok akik rendszeresen elemeznek fényképeket, megfelelő gyakorlattal a Ralyleigh-határnál kisebb részleteket is észrevesznek. Két vagy több rádióteleszkóp (39-14 ábra) jeleit kombinálva olyan szögfelbontás érhető el, ami nagyjából megegyezik a rádióteleszkópok távolságával azonos átmérőjű egyetlen nagy rádióteleszkóp felbontásával (persze, sokkal kisebb érzékenységgel).

39-3 PÉLDA

A világ legnagyobb működő refraktora (lencsés távcsöve) a Yerkes teleszkóp (Chicago Egyetem), amelynek objektív lencséje 1,02 m átmérőjű, fókusztávolsága 18,9 m. Adjuk meg a centrális csúcs teljes szélességét (az Airy-korong átmérőjét) egy csillag képénél kialakuló elhajlási képen, feltéve, hogy az átlagos hullámhossz 500 nm.

MEGOLDÁS

A centrális csúcs teljes szögszélessége $2\theta_R$, ahol θ_R a (39-13) képlet szerint veendő:

$$2\theta_R = \frac{(2)(1{,}22)\lambda}{D} = \frac{(2)(1{,}22)(500\times10^{-9}\,\text{m})}{(1{,}02\,\text{m})}$$
$$= 1{,}20\times10^{-6}\,\text{rad}$$

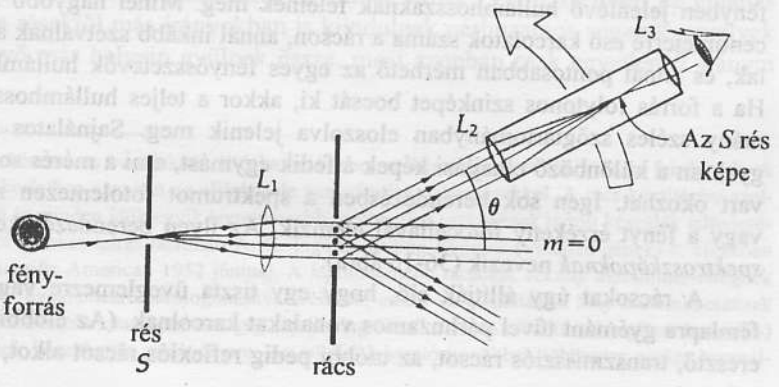
Egy f fókusztávolságú objektív lencse esetén ennek a kis szögszélességnek megfelelő y szélességet (39-12 ábra) az alábbi kifejezés adja meg:

$$y = (f)(2\theta_R) = (18{,}9\,\text{m})(1{,}20\times10^{-6}\,\text{rad}) = 2{,}27\times10^{-5}\,\text{m}$$

39.4 Elhajlás rácson

A *diffrakciós rács* sok egymáshoz igen közeli keskeny résből áll. Az első rács, amit Fraunhofer készített, egyszerűen egymás mellett igen közel elhelyezett vékony párhuzamos huzalok vagy fonalak sorozatából állt. Tipikus modern rácsot készíthetünk úgy, hogy üveg vagy fémlapon keskeny párhuzamos karcolatokat hozunk létre. Ezek a rácsok gyakran több, mint 5000 vagy 10 000 csíkot is tartalmazhatnak centiméterenként. Minthogy kívánatos, hogy oly sok csík legyen egy centiméter hosszon, amennyi csak lehetséges, az egyes csíkok szélessége igen kicsi. Emiatt nagyszögű elhajlási jelenségek jönnek létre. Így a diffrakciós rács működése két jelenségen alapul: a *többréses interferencián és az egyréses diffrakción*. A diffrakciós rácsokat a fényhullámhosszak igen pontos mérésére alkalmazzák.

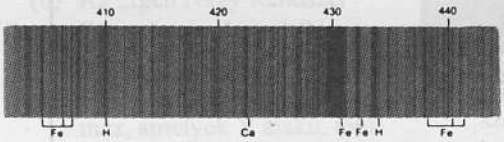
Tekintsük ismét a 38-11 ábrát az előző fejezetből. Ahogyan a rések száma nő, a fő maximumok egyre keskenyebbek és az egyre kisebb intenzitású köztes mellékmaximumok egyre inkább elhanyagolhatók lesznek. A 39-



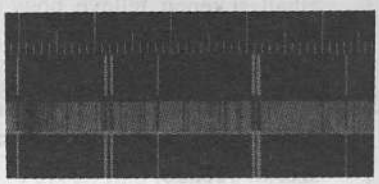
39-15 ábra
A fény hullámhosszának meghatározására szolgáló egyszerű rácsspektroszkóp.



(a) R. S. Richardson csillagász a rácsspektroszkóppal készített, kb. 12 m hosszú spektrogrammal.



(b) A Nap látható színképének részlete. A hullámhosszak (nanométerben) a spektrum felett, míg az egyes erős vonalaknak megfelelő kémiai elemek vegyjele alul látható.



(c) A Nap abszorpciós színképe fölé és alá a vas laboratóriumban felvett (fényes fehér) spektrumát helyeztük el összehasonlításul, hogy megmutassuk hogy a Nap anyaga vasat is tartalmaz.

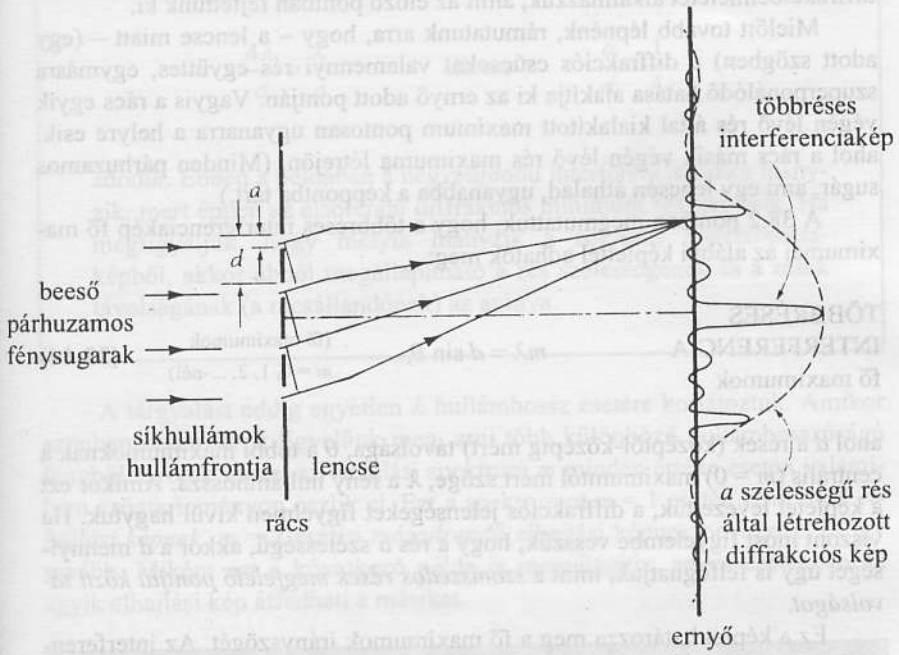
39-16 ábra

Fraunhofer volt az első, aki a Nap fényét diffrakciós ráccsal tanulmányozta. E vizsgálat során sötét vonalak ezreit figyelte meg (az ún. Fraunhofer-vonalakat). Megállapította, hogy e vonalak közül egyesek ugyanoda esnek, ahol egyes kémiai elemek színképének laboratóriumi vizsgálatok alapján ismert vonalai lennének. Nem tudta azonban megmagyarázni hogy miért keletkeznek a sötét vonalak. Több, mint fél évszázaddal később Kirchhoff adta meg a helyes magyarázatot, mely szerint a Nap fényes felszíne fölötti viszonylag hideg, különböző gázatomokat tartalmazó légkör a Nap folytonos színképéből az adott atomra jellemző hullámhosszokat elnyeli (abszorbeálja). A hélium elemet (Heliosz görögül Nap) a Nap fényének Fraunhofer-vonalai alapján fedezték fel, amit aztán még sok más elem azonosítása követett.

15 ábra monokromatikus fényforrásból érkező, az S résen áthaladó majd rácsra eső fényt mutat (a rés párhuzamos a rács réseivel). Az L_1 gyűjtő lencse a diffrakciós rácsra érkező fényt párhuzamosítja (hogy biztosítsa a Fraunhofer-féle feltételeket). A fény elhajlási képei különböző θ_m irányokból érkeznek a megfigyelőhöz ($m = 0, \pm1, \pm2, ...$), aki mozgatható távcsővel gyűjti össze a fényt. Ez a távcső tengely körül forgatható úgy, hogy a szöget pontosan be lehessen állítani. Az L_2 lencse a párhuzamos sugarakat egy vonallá gyűjti össze (valójában az S rés képét hozza létre), és ezt az L_3 lencse tovább nagyítja, hogy szemmel vizsgálható legyen. Ha a berendezést kalibrálták és a d rácstávolság ismert, akkor a θ szög mérése lehetővé teszi a λ hullámhossz meghatározását.

Ha a fényforrás több különböző, diszkrét hullámhosszon bocsát ki fényt, akkor minden elhajlási rendben egyetlen vonal helyett a vonalak egész sokasága jelenik meg különböző irányokra szétoszolva. Az egyes vonalak a fényben jelenlévő hullámhosszaknak felelnek meg. Minél nagyobb az egy centiméterre eső karcolatok száma a rácson, annál inkább szétválnak a vonalak, és annál pontosabban mérhető az egyes fényösszetevők hullámhossza. Ha a forrás folytonos színképet bocsát ki, akkor a teljes hullámhossztartomány széles szögtartományban eloszolva jelenik meg. Sajnálatos módon gyakran a különböző elhajlási képek átfedik egymást, ami a mérés során zavart okozhat. Igen sok berendezésben a spektrumot fotolemezen rögzítik vagy a fényt érzékeny fotocellával elemzik. Az ilyen berendezéseket *rács-spektroszkópoknak* nevezik (36-16 ábra).

A rácsokat úgy állítják elő, hogy egy tiszta üveglemezre vagy sima fémlapra gyémánt tűvel párhuzamos vonalakat karcolnak. (Az előbbi ún. áteresztő, transzmissziós rácsot, az utóbbi pedig reflexiós rácsot alkot, amely-

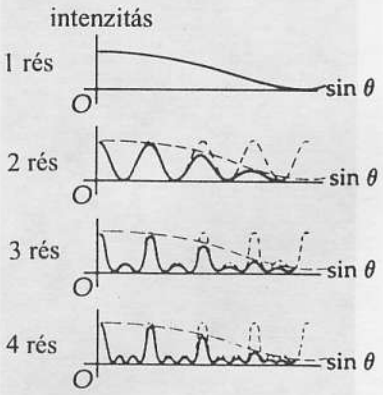


39-17 ábra
Négyréses rács. Ahogyan a rések egyre szűkebbek lesznek és a rések száma is eléri a tipikus diffrakciós rácsra jellemző értéket, az interferencia fő maximumai egyre élesebbekké és egyre nagyobb intenzitásúakká válnak, míg a diffrakciós burkoló egyre szélesebb lesz.

nél az interferenciajelenségeket visszavert fényben szemlélik.)[4]. Minthogy jó rácsot nagyon nehéz készíteni, a legtöbb használatban lévő rács ún. replikatechnikával készül. Ennek során átlátszó kollodium-oldatot öntenek egy rácsra, hagyják megkeményedni, majd óvatosan leválasztják a sablonról. Így transzmissziós rácsot kapnak. A kollodium lemezt ezután üveglemezre rögzítik vagy merev keretbe foglalják. Ezen az átlátszó műanyag replikán egy sor barázda van, ott, ahol a karcolások voltak, a barázdák között pedig tiszta, zavartalan, világos csíkok láthatók. Kissé túlegyszerűsített képet használva, a transzmissziós rácsot úgy foghatjuk fel, hogy a fény a világos csíkokon megy át, amik ezáltal a rések szerepét játsszák, míg a kissé szabálytalan barázdák a fényt minden irányban szórják, s ezáltal tulajdonképpen matt üvegnek tekinthetők.

A rácsok elméletének tárgyalását olyan transzmissziós rács elemzésével kezdjük, amelynek csak négy rése van, ahogyan a 39-17 ábrán látszik. A rácsra párhuzamos fény esik úgy, hogy a rácson síkhullámfront halad át, és a rések koherens fényforrásként viselkednek. A kétréses interferencia tárgyalásával szemben (a 38. fejezetben), ahol figyelmen kívül hagytuk az egyes réseken fellépő diffrakciós jelenségeket, most az elhajlást is számításba vesszük. Vegyük észre, hogy a rések szélessége összemérhető a rések közötti távolsággal. A réseket θ szögben elhagyó párhuzamos fénysugarak az ábra síkjára merőleges vonal mentén gyűlnek össze. (Természetesen az elhajlás miatt a résektől más irányokban is kiindulnak párhuzamos sugarak, amelyek az ernyő más helyein gyűlnek össze, most azonban csak egyetlen θ irányra

[4] A párhuzamos vonalakból álló karcolás-sorozat készítése nem tűnik nagy feladatnak. A gyakorlatban azonban az eljárás tele van váratlan nehézségekkel. A rács készítésére szolgáló és minden idők egyik legpontosabb mechanikai eszközének tartott készülék felfedezéséről érdekes leírás található A. G. Ingalls: Ruling Engines (Vonalzó-gépek) c. cikkében (Scientific American 1952 június). A legmodernebb rácsokat vékony alumínium-rétegnek olyan üveglemezre párologtatásával készítik, amely az alkalmazott fény hullámhosszának töredék részét kitevő pontosságig „optikailag sima". Olcsón előállítható replica- (másolat-) rácsok készíthetők acetát-filmre. Az iskolai laboratóriumokban többnyire ezeket használjuk.



39-18 ábra
Az elhajlási és interferencia-képek 1, 2, 3 és 4 rés esetére. Az eredő intenzitást a folytonos vonal mutatja.

illusztráljuk ezt.) A lencse lehetővé teszi, hogy a Fraunhofer-féle egyréses diffrakcióelméletet alkalmazzuk, amit az előző pontban fejtettünk ki.

Mielőtt tovább lépnénk, rámutatunk arra, hogy – a lencse miatt – (egy adott szögben) a diffrakciós csúcsokat valamennyi rés együttes, egymásra szuperponálódó hatása alakítja ki az ernyő adott pontján. Vagyis a rács egyik végén lévő rés által kialakított maximum pontosan ugyanarra a helyre esik, ahol a rács másik végén lévő rés maximuma létrejön. (Minden párhuzamos sugár, ami egy lencsén áthalad, ugyanabba a képpontba tart.)

A 38.2 pontban megmutattuk, hogy a többréses interferenciakép fő maximumai az alábbi képlettel adhatók meg:

TÖBBRÉSES INTERFERENCIA fő maximumok

$$m\lambda = d \sin\theta, \qquad \begin{matrix}(\text{fő maximumok}\\ m = 0, 1, 2, \ldots\text{-nél})\end{matrix} \qquad \textbf{(39-14)}$$

ahol d a rések (középtől-középig mért) távolsága, θ a többi maximumoknak a centrális ($m = 0$) maximumtól mért szöge, λ a fény hullámhossza. Amikor ezt a képletet levezettük, a diffrakciós jelenségeket figyelmen kívül hagytuk. Ha viszont most figyelembe vesszük, hogy a rés a szélességű, akkor a d mennyiséget úgy is felfoghatjuk, mint a *szomszédos rések megfelelő pontjai közti távolságot.*

Ez a képlet határozza meg a fő maximumok irányszögét. Az interferenciakép intenzitáseloszlását azonban befolyásolják a (39-8) képlettel leírt egyréses elhajlásból eredő hatások:

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

ahol $\alpha = (\pi/\lambda)a \sin\theta$ és a a rés szélessége. A 39-18 ábra mutatja az egyréses és a többréses hatások szuperpozícióját. Az a szélességű résen bekövetkező (szaggatott vonallal ábrázolt) elhajlás kitűzi a teljes interferenciakép intenzitásának felső határát. E képen belül a d rácsállandójú rács „többréses hatásai" tovább korlátozzák az intenzitást.

39-4 PÉLDA

A 39-18 ábrán felvázolt többréses interferenciakép esetére határozzuk meg a d rácsállandó, és az a résszélesség arányát.

MEGOLDÁS

Figyeljük meg, hogy az első elhajlási minimum helye megegyezik a negyedik interferencia-maximum helyével. A többréses interferencia fő maximumainak helyét megadó $m\lambda = d \sin\theta$ alakú (39-14) egyenletet átrendezve és az $m = 4$ esetre alkalmazva adódik, hogy:

$$\sin\theta = \frac{4\lambda}{d} \qquad \textbf{(39-15)}$$

A (39-10) összefüggés viszont megadja az egyréses diffrakciós minimumok helyét: $a \sin\theta = m\lambda$. Innen $m = 1$ helyettesítésével azt kapjuk, hogy

$$\sin q = \frac{l}{a} \qquad \textbf{(39-16)}$$

A (39-15) és a (39-16) egyenletetből

$$\frac{4\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{a}{d} = \frac{1}{4}$$

adódik. Ebben a példában a negyedrendű interferencia-csúcs hiányzik, mert éppen az elsőrendű diffrakciós minimum helyére esik. Ha megfigyeljük, hogy melyik hiányzik a sokréses interferenciaképből, akkor abból megállapítható a rés szélességének és a rések távolságának (a rácsállandónak) az aránya.

A tárgyalást eddig egyetlen λ hullámhossz esetére korlátoztuk. Amikor azonban olyan fényt figyelünk meg, ami több különböző hullámhosszúságú fényből tevődik össze, az elhajlási spektrum m minden értéke esetén valamilyen szögtartományon oszlik el. Ezt a spektrumot $m = 1$ esetén *elsőrendű elhajlási képnek*, $m = 2$ esetén *másodrendű* elhajlási képnek nevezzük, és így tovább. Miként azt a következő példa is megvilágítja, egyes esetekben az egyik elhajlási kép átfedheti a másikat.

39-5 PÉLDA

Diffrakciós rács a fehér fényt úgy szórja szét, hogy a $\lambda = 650$ nm hullámhosszúságú vörös fény a másodrendű elhajlási képben $\theta = 20°$-nál jelenik meg. (a) Határozzuk meg a *rács vonalsűrűségét*, vagyis azt, hogy egy centiméter hosszra hány rés esik. (b) Határozzuk meg, hogy lesz-e látható fény a harmadrendű elhajlási képben $\theta = 20°$-nál, vagy sem.

MEGOLDÁS

(a) A (38-14) képletből megkapjuk a többréses interferencia-maximumok helyét: $m\lambda = d \sin\theta$. Ezt átrendezve adódik:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{(2)(650\,\text{nm})}{(\sin 20°)} = 3800\,\text{nm}$$

Az egy centiméterre eső rések száma:

$$N = \frac{1}{d} = \frac{1\,\text{rés}}{3800\times10^{-9}\,\text{m}}\underbrace{\left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)}_{\substack{\text{(konverziós}\\ \text{arány)}}} = 2630\,\text{rés/cm}$$

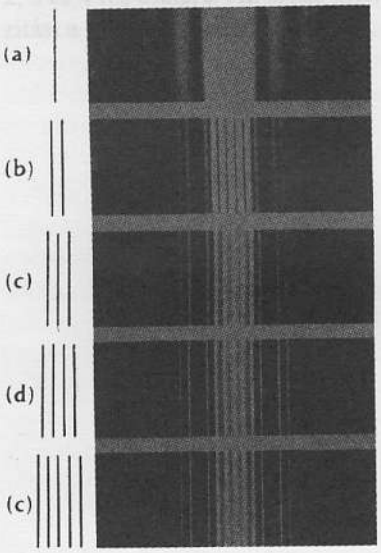
(b) Ismét a (38-14) összefüggés a megfelelő: $m\lambda = d \sin\theta$. Ha ezt λ-ra megoldjuk és az adott értékeket behelyettesítjük, akkor

$$\lambda = \frac{d\sin\theta}{m} = \frac{(3800\,\text{nm})(\sin 20°)}{3} = 433\,\text{nm}$$

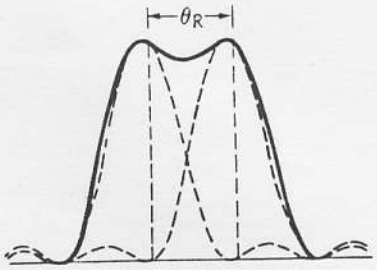
A 433 nm alig látható ibolya színnek felel meg. Így ezen a helyen a másodrendű és a harmadrendű spektrum látható részei fedik át egymást.

39-1 táblázat Prizma és diffrakciós rács szórásának összehasonlítása

λ(nm)	60°-os Flint-üveg prizma		4500 rés/cm-es rács			
			m = 1		m= 3	
670,8	50,51°		17,57°		64,90°	
656,3	50,61°		17,18°		62,38°	
589,3	51,17°	$\Delta\theta = 4{,}32°$	15,38°	$\Delta\theta = 7{,}08°$	52,71°	$\Delta\theta = 31{,}78°$
546,1	51,64°		14,26°		47,50°	
486,1	52,58°		12,64°		41,01°	
404,7	54,83°		10,49°		33,12°	



39-19 ábra
a) Egyetlen résen létrejövő Fraunhofer diffrakció. A b)-e) ábrák a bal oldali több résből álló rendszereken keletkező elhajlási képeket mutatják.



39-20 ábra
Két elhajlási maximum feloldhatóságára vonatkozó Rayleigh féle kritérium. Az egyik elhajlási kép maximumhelye a másik első minimum helyére esik.

A diszperzió

A diffrakciós rácsokat gyakran alkalmazzák prizmák helyett a színképelemzésben, mert a rácsok a spektrumot szélesebb szögtartományra szórják szét, és ezáltal λ sokkal pontosabb meghatározását teszik lehetővé. A *D* **diszperzió** *a rácsoknak vagy prizmáknak azt a tulajdonságát méri, hogy a dλ hullámhossztartományt milyen széles dθ szögtartományra szórja szét:*

DISZPERZIÓ
$$D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} \tag{39-17}$$

Minél nagyobb a diszperzió, annál nagyobb a hullámhossz szempontjából egymáshoz közel fekvő két színképvonal szögkülönbsége. Ahogyan a 39-1 táblázat mutatja, a rács diszperziója nagyobb, mint a prizmáé, és annál nagyobb, minél nagyobb *m* értéke.

Minthogy a θ és λ közti kapcsolat a diffrakciós rácsnál $d \sin\theta = m\lambda$, fennáll a

$$\sin\theta = \left(\frac{m}{d}\right)\lambda$$

összefüggés. Ebből λ szerinti differenciálással kapjuk, hogy

$$\cos\theta \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d}$$

majd átrendezve:
$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}, \tag{39-18}$$

amiből

A RÁCS DISZPERZIÓJA
$$D = \frac{m}{d\cos\theta}. \tag{39-19}$$

A *D* mértékegysége radián per méter (vagy a közönséges gyakorlatban fok per nanométer).

A felbontóképesség

A diszperzió mellett a diffrakciós rácsok tervezésének fontos szempontja az is, hogy a rács mennyire közeli hullámhosszúságú színeket tud szétválasztani, milyen a *felbontóképessége*. Az *R* **felbontóképesség** diffrakciós rács vagy prizma esetén definíció szerint:

FELBONTÓKÉPESSÉG $$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad (30\text{-}20)$$

ahol λ a két színképvonal átlagos hullámhossza, $\Delta\lambda$ pedig a hullámhosszkülönbség. Hivatkozva a 39-19 és 39-20 ábrákra, emlékeztetünk arra, hogy a fő maximumok egyre élesèbbek lesznek, ha nő a rések N száma. Megmutatható, hogy egy fő maximum (nem a centrális maximum) élessége és a rések N száma között a következő kapcsolat:

$$\theta_R = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \qquad (39\text{-}21)$$

A centrális csúcs „élességét" a csúcs közepe és az első minimum közötti θ_R szögtávolság jellemzi; d a rések távolsága, θ a csúcs diffrakciós szöge. A θ_R jelölést Lord Rayleigh használta az egymást átfedő diffrakciós képek legkisebb felbontható szögtávolságára. **Rayleigh kritériuma** szerint, *két egymáshoz közel lévő, azonos intenzitású elhajlási képet akkor lehet „elfogadhatóan" felbontani* (vagyis eldönteni, hogy *nem egy, hanem két pontforrástól származnak*) ha

RAYLEIGH KRITÉRIUMA KÉT EGYENLŐ INTENZITÁSÚ ELHAJLÁSI KÉP LEGKISEBB FELBONTÁSÁRA

Az egyik diffrakciós kép középső maximuma a másik első minimumára esik.

A kritériumot a 39-20 ábra világítja meg. A diffrakciós rácsnál θ_R rendkívül kicsi, a $\Delta\lambda$ hullámhosszkülönbségnek megfelelően a (39-18) képletből adódik, hogy:

$$\theta_R = \frac{m}{d\cos\theta}\Delta\lambda \qquad (39\text{-}22)$$

Ha a (39-21) és (39-22) képleteket összevetjük, nyerhető az

$$\frac{m}{d\cos\theta}\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

összefüggés, vagyis

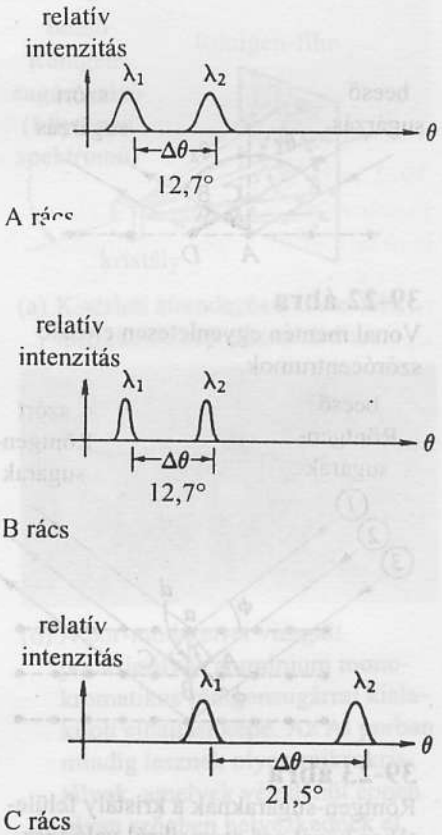
A RÁCS FELBONTÓKÉPESSÉGE $$R = Nm \qquad (39\text{-}23)$$

ahol N az összes rések száma, m pedig az elhajlási kép (diffrakciós) rendszáma.

39-2 táblázat A λ = 550 nm körüli hullámhosszúságú fény elsőrendű (m = 1) diszperziós színképe.

Rács	N_t (nm)	d	θ	R	D (10^{-2} fok/nm)
A	10000	2500	12,7°	10000	2,35
B	20000	2500	12,7°	20000	2,35
C	10000	1500	21,5°	10000	4,11

A *diszperzió* és a *felbontóképesség* közti különbséget jól megvilágítja a 39-2 táblázat, amely összehasonlítja három különböző rács adatait. Miként a 39-21 ábra mutatja, az *A* és a *B* rács *D* diszperziója megegyezik (vagyis ezek két adott hullámhosszat ugyanakkora szögben választanak el), míg az *A* és a



39-21 ábra
A 39-2 táblázatban szereplő rácsok által az 550 nm hullámhossz környezetében lévő λ_1 és λ_2 hullámhosszúságra szolgáltatott relatív intenzitások.

C rácsnak az *R* felbontóképessége egyenlő, (az a képességük, hogy két, egymáshoz nagyon közeli hullámhosszúságú vonalat meg tudnak különböztetni, ha a diffrakciós csúcsok *szélessége* különbözik). Figyeljük meg, hogy a *B* rács a legnagyobb felbontóképességű, míg a *C* rácsnak a legnagyobb a diszperziója.

39-6 PÉLDA

A Na-gőzlámpa sárga fényt bocsát ki, amely két hullámhossznak felel meg: 589,00 és 589,59 nm-nek. Hány résből kell állnia annak a rácsnak, amely $m = 1$ esetén éppen felbontja ezt a Na-dublettet?

MEGOLDÁS

A kívánt felbontóképességet a (39-20) képlet adja meg,

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

ahol $$\lambda = \frac{589{,}00\ \text{nm} + 589{,}59\ \text{nm}}{2} = 589{,}30\ \text{nm}$$

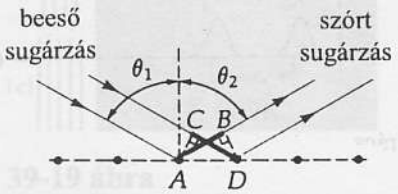
és $$\Delta\lambda = 589{,}59\ \text{nm} - 589{,}00\ \text{nm} = 0{,}59\ \text{nm}$$

Ekkor $$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589{,}3\ \text{nm}}{0{,}59\ \text{nm}} = 1000$$

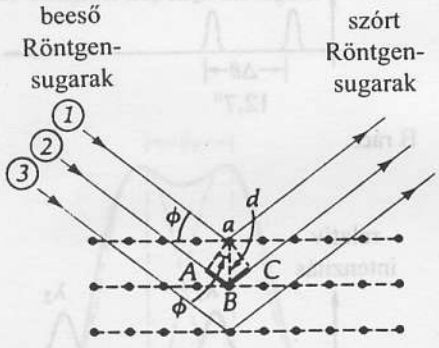
A diffrakciós rács felbontóképessége a (39-23) képlet szerint: $R = Nm$, így $m = 1$ esetén a vonalak száma éppen egyenlő magával az *R* felbontóképességgel

$$N = 1000 \text{ vonal}$$

Minthogy a tipikus diffrakciós rácsoknak közel 5000 vonaluk van centiméterenként, a Na-dublettet már anélkül is felbonthatjuk, hogy túl finom (kicsiny rácsállandójú) vagy túlságosan nagy méretű rácsot kellene felhasználni.



39-22 ábra
Vonal mentén egyenletesen eloszló szórócentrumok.



39-23 ábra
Röntgen-sugaraknak a kristály felületéhez közel eső atomsíkról való visszaverődése Bragg szerint. A röntgenszórási vizsgálatokban szokás szerint inkább a síkhoz, mint annak normálisához viszonyítva mérik a beeső sugarak szögét.

39.5 A röntgen-diffrakció

1912-ben Max von Laue (1879–1960) német fizikus ismerte fel elsőként, hogy a röntgensugárzás számára, amelynek hullámhossza összemérhető az atomok távolságával a kristályban (0,1 nm), a kristályszerkezetbe rendeződött atomok „*háromdimenziós* diffrakciós rácsként" viselkednek. A beeső sugárzást elnyelik az elektronok, majd, a Huygens-elvnek megfelelően, minden elektron új, elemi hullámokat sugároz ki. Ezt a folyamatot *szórásnak* nevezzük. Így aztán, pontosan úgy, ahogyan a diffrakciós rács rései koherens sugárforrásokként viselkednek, a szórócentrumok háromdimenziós elrendeződése is koherens hullámforrások sokaságaként fog viselkedni. Tekintettel arra, hogy az elektronok az atomok közelében koncentrálódnak, ezért lényegében az atomok lesznek a szórócentrumok. Bizonyos irányokban a szórt hullámok azonos fázisban lesznek, s ezekben az irányokban nagy intenzitású szórt sugárzás jön létre. Más irányokban a hullámok nem lesznek azonos fázisban, ami gyengítéshez, vagy kioltáshoz vezet, így ezekben az irányokban nem érzékelhető szórás.

Tekintsük a 39-22 ábráinak megfelelő vonalban sorakozó szórócentrumokat. A θ_1 szögből érkező sugarakkal, ahogyan az ábra mutatja, a szórt hullámok akkor azonos fázisúak, ha az AB és a CD távolságok egyenlők. Szimmetriaokokból ez akkor áll fenn, ha a θ_2 szórási szög egyenlő a θ_1 beesési szöggel. Sir William Bragg[5] vette észre az analógiát az optikai visszaverődéssel („a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel"), s ő javasolta a szórási folyamatnak az atomsíkokon végbemenő „Bragg-féle visszaverődésre" alapozott magyarázatát. Bár ez a visszaverődéses magyarázat a szórási folyamatnak nem teljesen helyes képe, mégis egyszerű és hasznos módja annak, hogy a jelenségről beszéljünk. Ezt az egyszerű képet elfogadva tekintsünk most a 39-23 ábrára, amelyen a bejövő sugárzás köbös rácsba rendezett atomokra esik. A rácsban az atomsíkok d távolságban vannak egymástól. Tekintsük az ① és a ② sugarakat. Az aA és az aC vonalak rendre merőlegesek a ② sugármenet beeső és a visszavert részére, így az ABC távolság éppen az az úttöbblet, amivel a ② sugár hosszabb az ①-nél. Ezért az atomsíkhoz képest ϕ szögben beeső (és nem a sík normálisától mért szögben, mint az optikai visszaverődésnél) sugárra a többletút hossza:

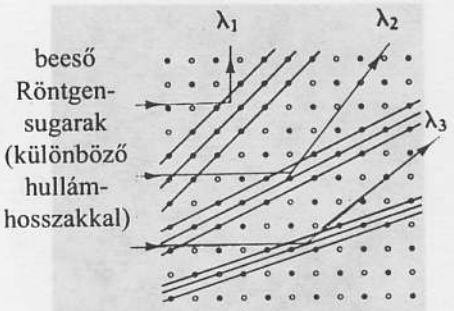
$$\text{az útkülönbség} = 2(d \sin \phi).$$

Ha ez az útkülönbség a λ hullámhossz egész számú többszöröse: $m\lambda$, akkor a szórt sugarak azonos fázisban lesznek. (Hasonló megállapítások alkalmazhatók más sugarakra is, pl. a ③ sugárra, ami mélyebb tartományból szóródik.) Az erősítés feltételét *Bragg-féle szórási feltételnek* nevezzük:

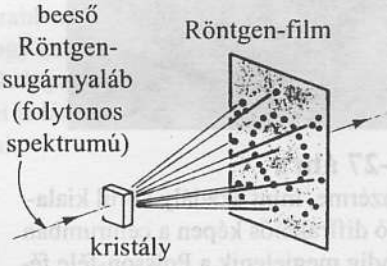
BRAGG-FÉLE SZÓRÁSI FELTÉTEL

$$m\lambda = 2d \sin \phi, \qquad \textbf{(39-24)}$$

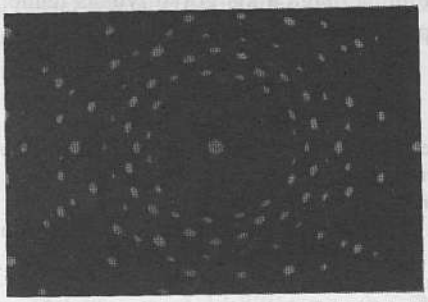
ahol $m = 1, 2, 3, \ldots$(a szórás *rendszáma*)
ϕ = a beeső sugárs iránya az atomsíkhoz (s nem, mint az optikában, a normálisukhoz) képest,
d = az atomsíkok távolsága



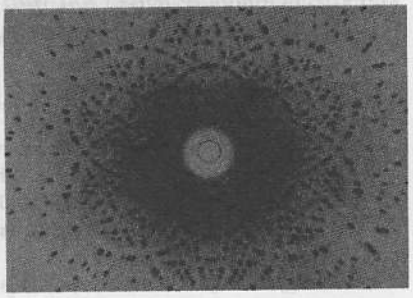
39-24 ábra
A kristályban az atomok különböző szögekben álló párhuzamos síkok mentén helyezkednek el. Az egyes síkseregekben a rácssíkok egyenlő távolságban követik egymást. Ez az állandó azonban síkseregenként más és más. Az egyes síkseregekről pontosan olyan hosszúságú sugárzás verődik vissza, amely éppen megfelel a Bragg-feltételnek. Az ábrán három különböző síkot mutatunk be.



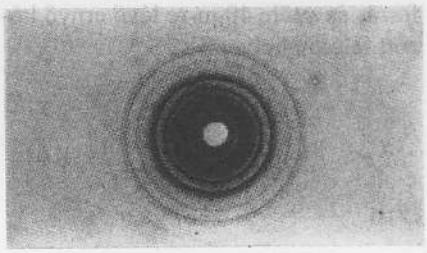
(a) Kísérleti elrendezés a Laue-féle diffrakciós kép elkészítéséhez.



(b) A Laue-elhajlás kvarckristályon.



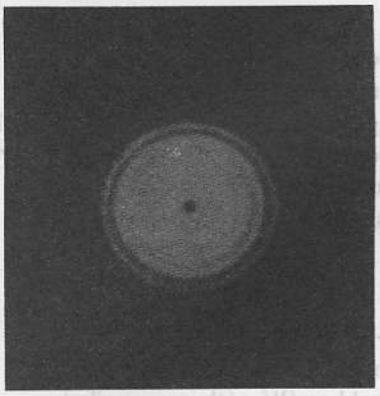
(c) Bonyolult kristályban meglepően látványos, szép Laue-elhajlási kép alakul ki.



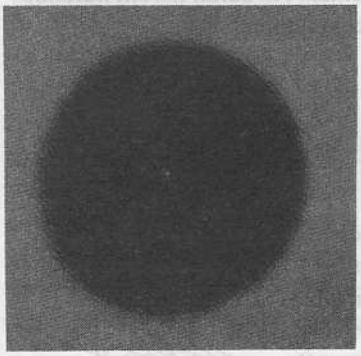
(d) A por-módszerrel vizsgált polikristályos alumínium monokromatikus röntgensugárral kialakított elhajlási képe. Az Al porban mindig lesznek olyan mikrokristályok, amelyek véletlenül éppen olyan szögben helyezkednek el, hogy kristálysíkjaikról a Röntgensugarak éppen visszaverődjenek; ezek a visszavert sugarak koncentrikus körök mentén érik a fényképezőlemezt.

39-25 ábra
Röntgen-diffrakciós kép. A fényes foltok helyzete a kristályban lévő atomok elrendezésétől függ. Ismeretlen kristály. esetén, az elhajlási képből „visszakövetkeztetve" meghatározható a rácsszerkezet.

[5] W. H. Bragg és W. L. Bragg angol kutatók (apa és fiú) 1915-ben kaptak Nobel-díjat a kristályszerkezetek röntgensugárzással való tanulmányozásáért. Ez éppen egy évvel azután történt, hogy Max von Laue Nobel-díjat megkapta a röntgensugarak diffrakciójának felfedezéséért.



39-26 ábra
Fresnel-féle elhajlás köralakú nyíláson, monokromatikus fényben. Ha az ernyőt a nyílástól különböző távolságokban helyezzük el, a középső folt váltakozva hol fényes, hol sötét lesz, és a diffrakciós gyűrűk száma is változik.



39-27 ábra
Pénzérme, mint akadály körül kialakuló diffrakciós képen a centrumban mindig megjelenik a Poisson-féle fényes folt. A felvétel úgy készült, hogy a pénzérmét a monokromatikus fényforrás és a tőle 40 m-re lévő ernyő között félúton helyezték el.

A szórt sugárzás igen éles csúcsokat mutat ezeknél a szögeknél. Az igen sok résből álló síkrácshoz hasonlóan a háromdimenziós „rács" rendkívül sok szórócentrumból áll, ami a főmaximumokat rendkívül élessé és intenzívvé teszi, míg a mellékmaximumokat gyakorlatilag elnyomja. Ha folytonos színképű sugárzás esik a kristályra, amelyben minden hullámhossz szerepel (ezt „fehér" sugárzásnak nevezik), akkor a kristály különböző atomsíkseregein bekövetkező Bragg-féle visszaverődést egyszerre vizsgálhatjuk (39-24 ábra). A egyes párhuzamos síkseregek síkjai közötti távolság más és más lehet az atomok geometriai helyzetétől függően. Minthogy a beeső sugárzás minden hullámhosszat tartalmaz, mindig lesznek köztük olyanok, amelyekre $m\lambda$ kielégíti a Bragg-féle feltételt. A szórt foltok fényképét (39-25 ábra) *Laue-féle diffrakciós képnek* nevezzük. A világos foltok helye az anyagminta atomi elrendeződésétől függ. Az ismeretlen atomszerkezetű kristályokról készült Laue-féle felvétel alapján következtethetünk a kristály szerkezetére. Például 1962-ben James Watson, Francis Crick és Maurie Wilkins[6] biológiai Nobel-díjat kaptak a DNS kettős spirális szerkezetének felfedezéséért. A szerkezetet röntgendiffrakciós módszerekkel határozták meg.

39.6 A Fresnel-féle diffrakció – Köralakú nyílások és akadályok

Amikor átlátszatlan lemezen készített kicsiny köralakú lyukon párhuzamos fény halad át és közeli ernyőre esik[7], meglepő kép látható. Az elhajlási kép nemcsak hogy nagyobb lesz, mint a lyuk, és nemcsak hogy megjelennek a diffrakciós gyűrűk, hanem még az is előfordulhat, hogy a lyuk mögött pontosan középen sötét folt keletkezik (39-26 ábra). Ez teljességgel váratlan, hiszen azt hinnénk, hogy a nyílás közepén átfutó iránynak megfelelő pont az ernyőn fényes lesz, nem pedig sötét!

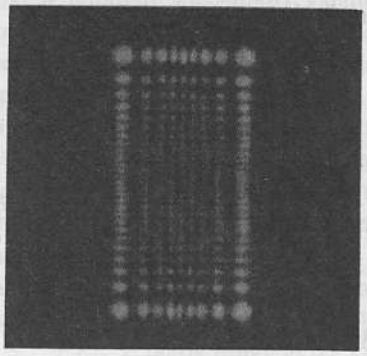
A másik meglepő eredmény a diffrakciós képeken akkor jelenik meg, amikor kicsiny köralakú akadályt, pld. csapágygolyót világítunk meg, amely körül a tér szabad. Gondos vizsgálat ugyanis azt mutatja, hogy az elhajlási kép közepén *mindig fényes folt van*,[8] mintha maga a kis golyó lyukas lenne! A 39-27 ábra pénzdarab árnyéka közepén megjelenő fényes foltot mutat.

---

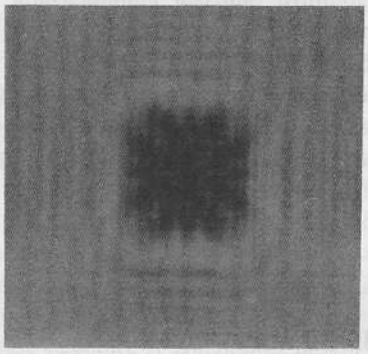
[6] Ennek a tudományos felfedezésnek az érdekfeszítő történetét lásd D. Watson: The Double Helix (A kettős spirál) Angol kiadás: Atheneum Press, New York, (1968), Magyar kiadás: Watson, James Dewey: A kettős spirál, Gondolat 1970, 1972.
Lásd még: Horace Judson: The eighth day of creation (A teremtés nyolcadik napja) Simon & Schuster 1979.

[7] Minthogy az ernyő közel van, az ernyő adott pontjára eső fénysugarak különböző irányokból érkeznek, az így keletkező elhajlást Fresnel-féle diffrakciónak nevezzük – ellentétben a Fraunhofer-féle diffrakcióval, amikor az ernyőre csak párhuzamos fénynyalábok esnek.

[8] A foltról érdekes anekdota szól. Az elhajlás hullámelméletének leírását Fresnel egy tanulmánykészítési pályázat felhívására küldte be a Francia Akadémiához 1818-ban. Poisson, a bíráló bizottság egyik tagja, aki a fény korpuszkuláris elméletének megrögzött híve volt, igyekezett Fresnel elméletét nevetségessé tenni. Hogy végső alakra hozza ellenvetéseit és ezzel remélhetőleg halálos csapást mérjen a fény hullámelméletére, Poisson elmondta Aragonak, egy másik bírálóbizottsági tagnak, hogy a hullámelmélet szerint köralakú akadály esetén az árnyék közepén mindig világos foltnak kell lennie (ehhez a következtetéshez egyébként Fresnel nem jutott el), s ez micsoda badar jóslat! Erre Arago azonnal elvégezte a kísérletet és újra felfedezte a világos foltot, amit tulajdonképpen már 85 évvel azelőtt felfedezett Miraldi, csakhogy azt már rég elfelejtették. A fényes folt léte nagy lendületet adott Fresnel hullámelméletének. Poisson azonban haláláig csökönyösen ragaszkodott a fény Newton-féle részecske-modelljéhez. A sors iróniája, hogy az árnyéktérben keletkező fényes foltot éppen Poissonról nevezték el, s a valódi felfedezők Miraldi, Fresnel és Arago háttérbe szorulnak. Csak megjegyezzük, hogy Fresnel a kitűzött díjat nem nyerte el dolgozatával.



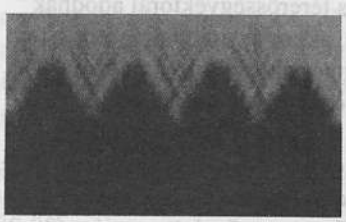
(a) Téglalap alakú rés.



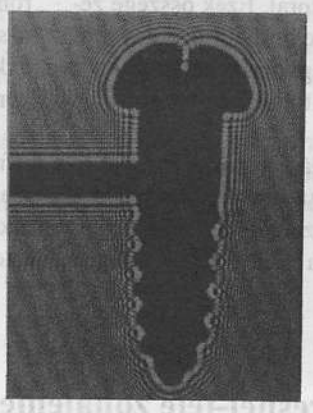
(b) Átlátszatlan négyzet.



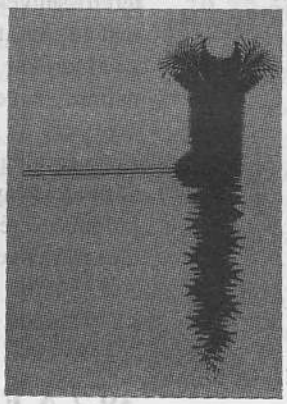
(c) Átlátszatlan korongon létrejövő elhajlási kép. A fényforrás Woodrow Wilson megvilágított átlátszó portréja. Az átlátszatlan korong lencseként viselkedik, mert a képen a fényforrás minden pontjához tartozik egy Poisson-féle fényes folt.



(d) Három átlátszatlan köralakú korong. Figyeljük meg a korongok középpontjaiban a fényes foltot!



(e) Egy huzalra erősített kis csavar árnyéka.

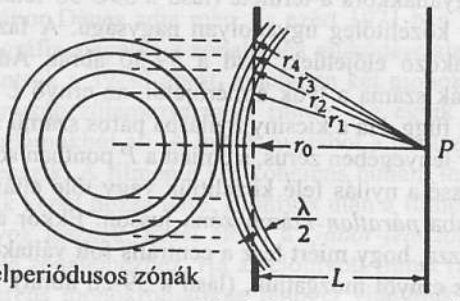


(f) Az (e) kép hosszabb expozíciós idővel, hogy az árnyéktérben a halványabb diffrakciós képet is láthatóvá lehessen tenni.

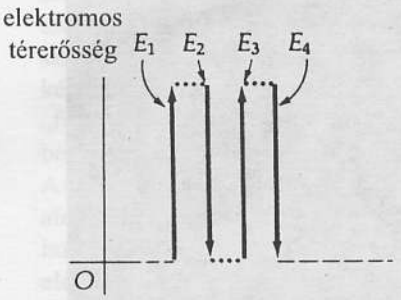


(g) Az (f) kép kinagyítva, a csavar fejének diffrakciós mintázata.

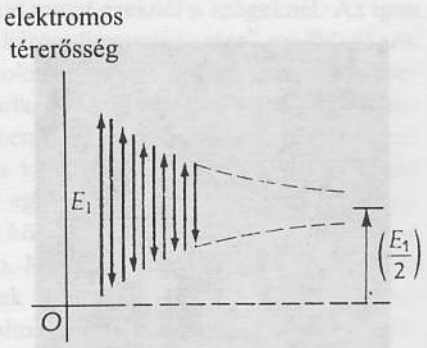
39-28 ábra
Fresnel-féle elhajlási képek. Egy átlátszatlan tárgy árnyékának éppen a szélénél megjelenő világos sávok fényesebbek az árnyéktól távolabbi zavartalan háttérmegvilágításnál.



39-29 ábra
A Fresnel-féle zónák geometriai szerkesztése. A nyílásban a P középpontú körök sugarai rendre r_0, $r_0 + \lambda/2$, $r_0 + 2\lambda/2$, $r_0 + 3\lambda/2$, stb. A gömbökből a nyílás síkja metszi ki a körkörös Fresnel zónákat.



39-30 ábra
A négy zóna átlagos elektromos térerősségvektorai. Ezek összege zérust ad. Az áttekinthetőség kedvéért a vektorokat egymáshoz képest oldalirányban eltoltuk.



39-31 ábra
Amikor igen nagy számú zóna elektromos térerősségvektorai adódnak össze, akkor az eredő amplitúdó fele akkora értékhez tart, mint ha az első zóna csak egyedül szerepelne.

Ezek az elhajlási képek a Fresnel-féle diffrakció eredményeként jönnek létre, amikor a fény a lyukon áthaladó, vagy az akadályt éppen elkerülő hullámfront különböző részeiből *különböző* szögben érkezik az ernyő adott pontjára (39-28 ábra). Az ilyen jelenségek eredetét a következő pontban fogjuk tárgyalni.

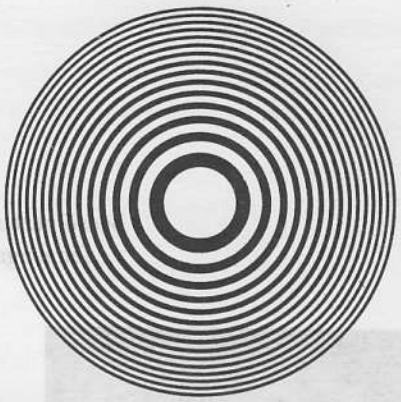
39.7 A Fresnel-féle zónalemez

Tekintsünk egy párhuzamos fénynyalábot, ami a köralakú lyukon áthaladva esik egy ernyőre. A diffrakciós kép centrumában lévő *P* pontba a lyukon áthaladó hullámfront minden részéből érkezik fény (Huygens-féle elv). Osszuk fel a hullámfrontot köralakú *zónákra* a 39-29 ábrán bemutatott módszerrel. A központi köralakú *Fresnel-zónából* a *P* pontba érkező elemi hullámok fáziskülönbsége 0 és π radián közé esik. A következő Fresnel-zónából π és 2π közé, a következő zónáé 2π és 3π közé esik, és így tovább. Bármely két szomszédos zónából a *P* pontba érkező fények között fél hullámhossznyi útkülönbségnek megfelelő fáziskülönbség van, ezért a *P* pontban az interferencia révén egymást gyengítik. Ha $+\mathbf{E}_1$ az első zóna fényének elektromos térerősségvektora, akkor a második zónáé $-\mathbf{E}_2$, a harmadiké $+\mathbf{E}_3$, és így tovább. Minden zónának közel ugyanakkora a területe (lásd a 39C-38 feladatot), ezért mindegyik $\mathbf{E}_n$ vektor közelítőleg ugyanolyan nagyságú. A fáziskülönbség miatt[9] azonban váltakozó előjelűek, lásd a 39-30 ábrát. Adott geometriai elrendezésben a zónák száma a lyuk átmérőjétől, az ernyő *L* távolságától és a λ hullámhossztól függ. Ha a kicsiny nyílásba páros számú zóna esik, akkor az eredő **E** vektor lényegében zérus, s emiatt a *P* pontban sötét folt keletkezik. Ha az ernyőt kissé a nyílás felé közelítjük vagy tőle eltávolítjuk, elérhetjük, hogy a nyílásba *páratlan* számú zóna jusson. Ekkor a *P* pont kivilágosodik. Ez magyarázza, hogy miért lesz a centrális folt váltakozva fényes vagy sötét, amikor az ernyőt mozgatjuk, (lásd a 39-26 ábrát). Ha azonban egy akadállyal a középső zónákból takarunk ki néhányat, akkor a többi, még megmaradó zónából mindig jut fény a *P* pontba. Ez magyarázza a Poisson-féle fényes foltot, amit egy pénzdarab árnyékában fedezhetünk fel, (lásd a 39-27 ábrát).

[9] Minthogy a nagyobb rendszámú zónából jövő fény útja hosszabb, az inverz négyzetes törvény miatt, továbbá egy szögtényező miatt, intenzitása kisebb. Az eredőt a 39-31 ábrán láthatjuk.

Tegyük fel, hogy most minden második zónát (akár minden páros, akár minden páratlan sorszámút) valahogyan átlátszatlanná teszünk. Minthogy most minden átlátszó zónából érkező fény fázisban lesz, az elektromos térerősségvektorok mind összeadódnak, mert ugyanolyan irányúak. Emiatt a P pontba sokkal több fény érkezik. Ha egy átlátszó filmen minden második zónát átlátszatlanná teszünk, az ún. **Fresnel-féle zónalemezhez** jutunk, (lásd a 39-32 ábrát). Nemde igazán érdekes, hogy egy nyílás területének felét letakarva rendkívüli módon tudjuk növelni a kép közepére jutó fény erősségét!? Mint a 8. lábjegyzetben megmutattuk, a teljes fény, ami a hullámfrontból akadálytalanul érkezhet, körülbelül a fele annak, ami az első zónából származik: $E_1/2$. Ha olyan zónalemezt készítünk, amely az első 20 páratlan zónát engedi át, akkor a P pontban az elektromos térerősség eredője $E = E_1 + E_3 + E_5 + ... + E_{39}$. E tagok mindegyike közelítőleg egyenlő. A zónalemez nélkül a P pontban a térerősség közelítőleg $E_1/2$, a zónalemezzel azonban $20E_1$! Ezért a zónalemez használata megnöveli az intenzitást (s mert az intenzitás E^2-tel arányos) kb. egy 1600-as szorzóval! *A zónalemez tehát lencseként működik, hiszen a beeső párhuzamos fénynyalábot egy L távolságban lévő képpontban gyűjti össze.*[10]

A Fresnel-féle zónalemez nem lenne más, mint egy szórakoztató játékszer, ha nem szólna mellette az a tény, hogy egyszerű magyarázatot kínál a hologram által készített furcsa háromdimenziós kép keletkezésére vonatkozóan.



39-32 ábra
Ha a zónákat felváltva átlátszóvá, illetve átlátszatlanná tesszük, úgynevezett Fresnel-féle zónalamezeket kapunk. E lemez negatívja (ahol a centrális zóna átlátszatlan) szintén Fresnel-féle zónalemez. A legtöbb esetben az egyes zónák területe $\pi\lambda L$ egészen kicsi. Például $L = 1$ m esetén $\lambda = 500$ nm hullámhossznál mindegyik zóna kb. 1,6 mm^2.

39.8 A holográfia

Mindenki ismeri a holografikus képeket, ezeket az érdekes, szellemszerű, háromdimenziós kísérteties képeket, amelyek lencse használata nélkül egyszerűen, koherens fény sík filmen való átbocsátásával készülnek. A régimódi térhatású képben két, csaknem azonos képet kell nézni, egyiket az egyik, másikat a másik szemünkkel, s ez azt a hatást váltja ki bennünk, hogy háromdimenziós képet vizsgálunk egy *rögzített perspektívából*. Ezzel szemben, amikor a holografikus képet szabad szemmel nézzük, s a hologramon, mint ablakon át nézünk, a képnek valóban háromdimenziós jellege van, és elölnézetből is könnyedén tekinthetünk a tárgy mögé, pusztán azáltal, hogy megváltoztatjuk helyünket. Azok a 360°-os hologramok, amiket hengeres formában készítettek, lehetővé teszik, hogy a néző tökéletesen körül tudja járni a képet, s így minden oldalról megnézhesse.

A *holográfia* (a szó görög eredetű, teljes írást jelent) alapelvét 1948-ban Gábor Dénes adta meg, és ezért 1971-ben fizikai Nobel-díjat kapott. A holográfia alapelve a zónalemez működése alapján egyszerűen megérthető. Tekintsük a 39-33 ábrát, amelyben két monokromatikus, koherens hullám esik fényképezőlemezre vagy filmre. Az egyik nyaláb, a *referencianyaláb*, síkhullámokból áll. A másik nyalábot a pontszerű tárgyon szóródó fénysugarak képezik. A filmen e két koherens hullám interferenciája fényes és sötét gyűrűk képét hozza létre. Előhívás után a filmen átlátszó és átlátszatlan tartományok lesznek, ezzel előáll a *Gábor-féle zónalemez*, ami hasonlít a Fresnel-féle zónalemezhez. Ha az előhívott filmet (amit *hologramnak* nevezünk) koherens monokromatikus fénnyel világítjuk meg, akkor a megfelelő helyen ülő megfigyelő a hologramon elhajló fényt nézve virtuális képet lát, amint ez a 39-34 ábrából megérthető. (A hologramnak a megfigyelő felőli oldalán valódi kép is megjelenik.)

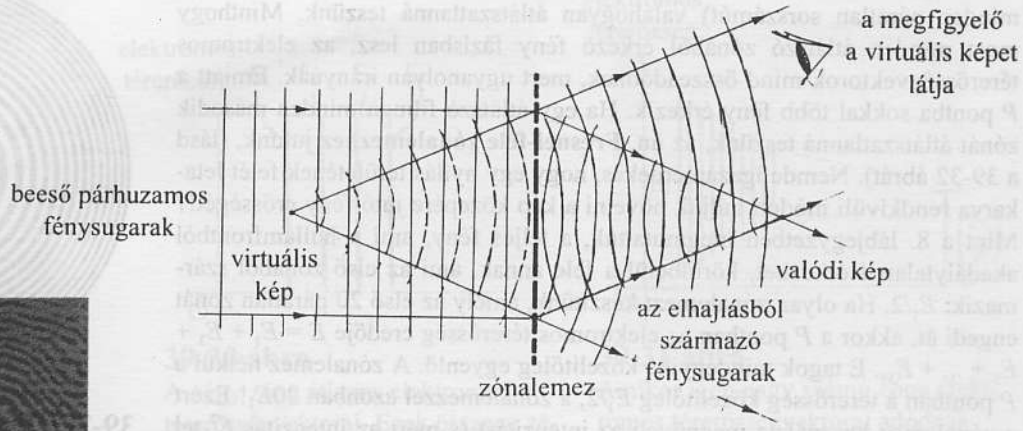


39-33 ábra
A monokromatikus síkhullámok és a pontszerű tárgyról koherensen szórt hullámok a fényképezőfilmen interferenciaképet hoznak létre. Amikor ezt a filmet előhívjuk, a keletkező hologram a Fresnel-féle zónalemezhez hasonló koncentrikus világos és sötét körök sorozata.

[10] A tengely mentén további – mind valódi, mind virtuális – képek is vannak. Az L távolságban kialakuló kép azonban, amit itt taglalunk, a legfényesebb valódi kép.

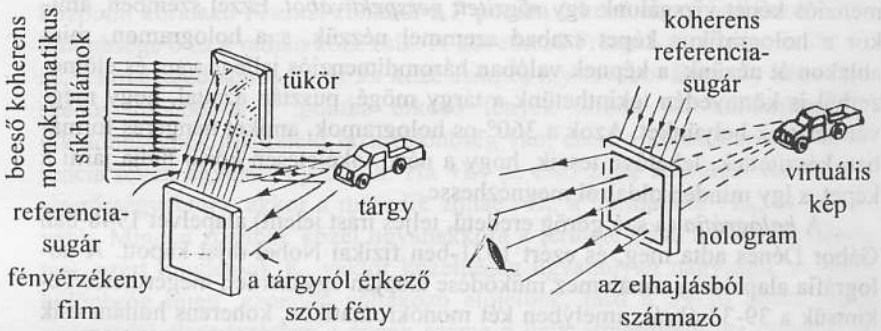


39-35 ábra
Hologram erősen felnagyított részlete, ami az interferencia-kép bonyolult szerkezetét mutatja.



39-34 ábra
Amikor a zónalemezre párhuzamos fény esik, a lemez két oldalán egy valódi és egy virtuális kép keletkezik. (A diffrakció más rendjei miatt a tengelyen további valódi és virtuális képek is keletkeznek, de ezeket az ábrán nem tüntettük fel.)

Tekintsünk most a pontszerű tárgy helyett kicsiny kiterjedésű tárgyat. Ekkor a tárgy minden pontja kialakítja a maga zónalemez-képét. Az így előálló hologram sötét és világos csíkok egészen bonyolult rendszere (lásd a 39-35 ábrát), ami a tárgy minden pontjára vonatkozó teljes információt tartalmazza. Amikor a hologramot koherens monokromatikus fénnyel világítjuk meg, akkor a hologramon elhajolt fényben a tárgy összes tulajdonságait hordozó virtuális kép látható. A gyakorlatban, annak érdekében, hogy az elhajló és a referencianyaláb egyenlő intenzitású legyen, és így az interferenciaképen



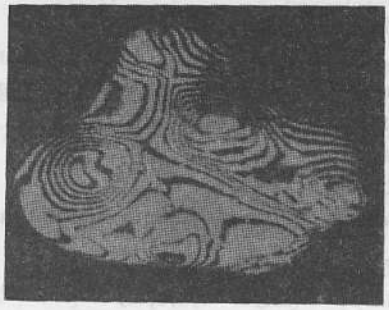
(a) A hologram készítésének egy lehetséges elrendezése. A referencianyalábból érkező fény és a tárgyról szóródó fény szuperponálódik és a filmen interferencia-képet alakít ki. A film előhívásával rögzített képet <u>hologramnak</u> nevezik.

(b) A hologramot úgy nézhetjük meg, hogy koherens referencia-fénnyel világítjuk meg, amely a hologram lemezt ugyanolyan szögben éri, mint a hologram készítésekor használt referencianyaláb. A elhajló fényben a tárgy virtuális képe ott keletkezik, ahol eredetileg a tárgy volt. A kép <u>valódi háromdimenziós kép</u>, amelyen az eltakart részleteket is megláthatjuk, ha más szögből nézünk a lemezre.

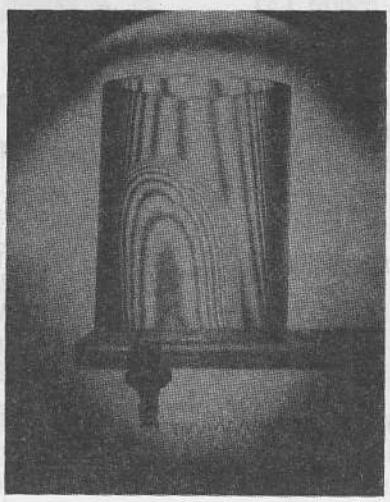
39-36 ábra
A hologram készítésére és megtekintésére szolgáló elrendezések.

a maximális kontraszthatást lehessen elérni, gyakran a 39-36 ábrán bemutatott elrendezést alkalmazzák.[11]

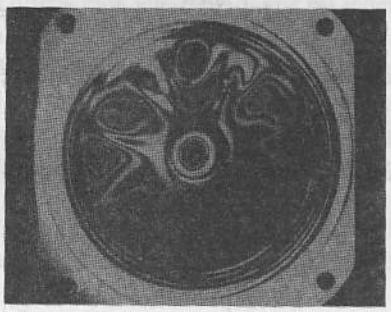
Minthogy az eljárás során sehol sem használnak lencséket, a sok gondot okozó Rayleigh-féle felbontóképesség-korlátok elkerülhetők. A rekonstruált kép élesebb, felbontása jobb mint amit lencsék segítségével a hagyományos fotográfiai eljárásokkal elérhetünk. A hologram bármely töredék része az egész tárgyról tartalmaz információt (ha megfelelő pontból nézzük) és belőle az egész kép rekonstruálható.



(a) Fosszilis (8 mm hosszú) borz-fog holografikus kontúrtérképe. A fotolemezen két kissé különböző hullámhosszuságú fénnyel felvett hologram van rögzítve. Amikor az így előálló hologramot csak az egyik hullámhosszot tartalmazó fénnyel világítjuk meg, akkor, a két kép közti interferencia miatt magassági kontúrokat ábrázoló csíkrendszer jön létre.



(b) Szikra hatására felrobbanó acetilén-gáz. A robbanás részletei átlátszó hengerben kétszeri expozícióval láthatóvá tehetők, ha a hengert hátulról matt üvegen keresztül impulzusüzemű rubinlézerrel világítjuk meg. Az első expozíciót a gyújtás előtt, a másodikat 10 ms-mal a gyújtás után készítették. A rekonstrukció során háromdimenziós képek jönnek létre a két holografikus kép interferenciájából.



(c) Másodpercenként 3000 rezgést végző hangszóró „időátlagolt holografikus interferogramjának" fényképe. A hologramot több ezer rezgési cikluson keresztül tartó expozícióval készítették. Csak a csomóvonalak és a rendszer stacionárius részeinek a rekonstrukciói fényesek.

39-37 ábra
A holográfia néhány alkalmazása

A holográfia alkalmazási lehetőségei lenyűgözőek (lásd a 39-37 ábrát). A hologramkészítés egyik korlátja az, hogy a filmhez érkező beeső referencianyaláb és az ugyanazon hullámvonulathoz tartozó szórt fény optikai út hossza – a filmhez érkezve –, nem különbözhet többel, mint a felhasznált fény koherenciahossza. A közönséges lézerek fényének koherenciahossza néhány méter nagyságrendű, bár speciális technikával a lézerfény koherenciahosszának ezt a felső határát egészen 10^5 m-ig lehet növelni.

[11] A körbejárható hologram készítésének módszerére vonatkozóan lásd W. R. Schubert és C. R. Throckmorton cikkét: „Making a 360° hologram" (Hogyan készül a 360°-os hologram) The Physics Teacher 13, 310. (1975)

Összefoglalás

A Fraunhofer-féle elhajlás egyetlen résen

a = a rés szélessége,
θ = a középvonaltól mért szög,
λ = hullámhossz,
m = a diffrakció rendszáma
A diffrakciós minimum akkor lép fel, ha

$$m\lambda = a \sin\theta \qquad \text{(ahol } m = 1, 2, 3, \ldots\text{)}$$

Az I_θ intenzitás eloszlása (W/m^2 egységekben)

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad \text{ahol } \alpha = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)a\sin\theta$$

Az elhajlási *maximumok* közelítőleg *félúton* találhatók a minimumok között.

A diffrakciós rács

d = rácsállandó (a rések közötti középtől középig mért távolság)
θ = a középvonaltól mért szög,
λ = hullámhossz,
m = a diffrakció rendszáma.
Elhajlási *maximum* ott lép fel, ahol

$$m\lambda = d\sin\theta \qquad \text{(ahol } m = 1, 2, 3, \ldots\text{)}$$

A diffrakciós rács D *diszperziójának* definíciója:

$$D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

A diffrakciós rács R *felbontóképességének* definíciója:

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

ahol N a rács összes vonalainak száma.

A *köralakú nyíláson fellépő Fraunhofer-diffrakcióban* θ_R a diffrakciós kép közepe és az első minimum iránya közötti szög (az apertúra közepétől mérve):

$$\sin\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$$

ahol D az apertúra átmérője és λ a hullámhossz.

Rayleigh kritériuma a θ_R *minimális felbontási szögre:* két szomszédos pontot akkor lehet megkülönböztetni, ha az egyik elhajlási kép *centrális csúcsa* a másik *első minimumára* esik. Így egy D átmérőjű (vagy bármely más köralakú apertúrával rendelkező) optikai berendezés esetén

$$\theta_R = \frac{(1{,}22)\lambda}{D}$$

Röntgen-diffrakció

d = az atomsíkok távolsága,
ϕ = a beeső sugár és az atomsíkok által bezárt szög (a sugár és a sík normálisa közötti szög, mint az optikai visszaverődésnél),
λ = a hullámhossz
m = a diffrakció rendszáma.
A *Bragg-féle szórási feltétel*: a diffrakció maximuma ott van, ahol

$$m\lambda = 2d\sin\phi \qquad \text{(ahol } m = 1, 2, 3, \ldots\text{)}$$

A **Fresnel-féle diffrakcióról** akkor beszélünk, ha vagy a fényforrás, vagy az ernyő (vagy mindkettő) véges távolságban van az elhajlást okozó nyílástól vagy akadálytól. Ez a jelenség a Fresnel-féle zónamódszerrel elemezhető, amelyben a hullámfrontot olyan zónákra osztjuk, hogy bármely két szomszédos zónából származó fénysugarak között félhullámhossznyi útkülönbség legyen.
A *Fresnel-féle zónalemez* olyan speciálisan kiképzett lemez, melyen minden második Fresnel-zóna átlátszatlan. A zónalemeznek lencseszerű fókuszáló tulajdonságai vannak (a zónalemeznek több fókusztávolsága is van).

A **holográfia** kétlépéses eljárás. Az első lépésben koherens fénnyel megvilágított tárgy bonyolult elhajlási képét vesszük fel speciális fotolemezen. Az előhívott filmet, a hologramot koherens fénnyel világítjuk meg. A hologramon elhajló fény háromdimenziós képet állít elő, amelyen valódi perspektíva-különbségek figyelhetők meg, ha a szemlélő változtatja a helyét. Minthogy a hologramkészítés és képalkotás során lencséket nem használunk, a felbontóképességet a szokásos Rayleigh-féle határ nem korlátozza (bár egyéb korlátozó tényezők fennállnak).

Kérdések

1.) kicsiny lyukat monokromatikus fény világít meg, s ezáltal diffrakciós kép alakul ki egy ernyőn. A lyuk széle a képen nem elég éles. Ha a lyuk és az ernyő közé megfelelő helyre lencsét teszünk, a diffrakciós jelenségek eltűnnek és a lyuk széle élesen látszik. Magyarázzuk ezt meg.

2.) Hogyan változik a rés Fraunhofer-féle diffrakciós képe, ha a rés és az ernyő közötti teret levegő helyett víz tölti ki?

3.) Az interferencia és az elhajlási jelenségek az elektromágneses hullámok elektromos térerősségeinek összegétől függenek. Miért nem szükséges

mégsem olyan fényforrást használni, amelyben az elektromos erőtér minden változása azonos irányban polarizált?

4.) Ahelyett, hogy hosszú, keskeny réssel alakíttatnánk ki elhajlási képet, tegyük fel, hogy inkább olyan rést használunk, ami kétszer olyan hosszú, mint amilyen széles. Kvalitative milyen lesz a diffrakciós kép?

5.) Két diffrakciós rács ugyanolyan minőségű, és centiméterenként ugyanannyi karcolatot tartalmaz, de az egyik rácson ezek nagyobbak, mint a másikon. Mi lehet az előnye a nagyobb rács használatának?

6.) Egy rés fényét lencsével párhuzamosítjuk, majd a réssel párhuzamos karcolatú diffrakciós rácsra bocsátjuk. Mi történik a távoli ernyőn megjelenő elhajlási képpel, ha a rácsot a karcolataival párhuzamos tengely körül kissé elforgatjuk?

7.) Tegyük fel, hogy a több hullámhossz keverékéből álló fény színképének elemzésére rácsot vagy prizmát használunk. Mikor fontosabb a nagy felbontóképesség, mint a nagy diszperzió, illetve mikor fontosabb a nagy diszperzió?

8.) Írjuk le azt az elhajlási képet, amit két keresztben elhelyezett diffrakciós rács hoz létre.

9.) Mik az előnyei – ha vannak egyáltalán – a diffrakciós rácsnak a prizmával szemben, amikor egy fényforrás színképét kell meghatározni? Mik a hátrányok – ha vannak ilyenek?

10.) Éjszaka a távoli közúti jeleket könnyebb elolvasni, ha zölddel vannak fehér táblára festve, mintha pirossal lennének festve. Miért?

11.) Diffrakciós rács folytonos színképet hoz létre, ha fehér fénnyel világítjuk meg. Ha egy kristályt „fehér", azaz nem monokormatikus röntgenfénynyel világítunk meg, akkor diszkrét pontokból álló Laue-féle elhajlási kép jön létre. Miért?

12.) Miben hasonló és miben különbözik a Fraunhofer-féle és a Fresnel-féle diffrakció?

13.) A tárgyak árnyékának határa napfényben gyakran nem éles. Vajon ezt az okozza, hogy a napfény összetett (sokféle hullámhosszat tartalmaz), s emiatt diffrakciós csíkjai elmosódnak? Ha a jelenség oka nem diffrakciós jelenség, akkor mi lehet a magyarázata?

14.) Ha az ujjaink között kialakított kis hézagokon keresztül távoli fényforrásra nézünk, akkor világos és sötét csíkokat látunk. Vajon ez diffrakciós jelenség? Ha igen, akkor Fresnel- vagy Fraunhofer-típusú?

15.) Miért szükséges a Poisson-féle fényes folt megfigyeléséhez az, hogy az akadály igen jó közelítéssel köralakú legyen?

16.) A hanghullámok diffrakciójának leírásához hogyan kellene a fényelhajlásra kidolgozott eljárást módosítani? Emlékezetbe idézzük, hogy a hanghullámok longitudinális nyomáshullámok.

17.) Miben hasonló a Fresnel-féle zónalemez egy gyűjtőlencséhez? Miben különbözik tőle?

Feladatok

39.2. Elhajlás résen

39-A1 Résen elhajló 550 nm hullámhosszúságú fény diffrakciós képét a réstől 3 m távolságra lévő ernyőn fogjuk fel. A centrális maximum két oldalán lévő harmadrendű minimumok távolsága 25 mm. Mekkora a rés szélessége?

39-A2 Egy rést az 550 nm hullámhosszúságú fény világít meg és a réstől 3 m-re lévő ernyőn elhajlási kép alakul ki. Határozzuk meg a centrális maximum teljes szélességét, ha a rés (a) 0,2 mm és (b) 0,4 mm szélességű.

39B-3 Egy 0,20 mm széles rést 600 nm hullámhosszúságú monokromatikus fény világít meg és a réstől 1,5 m-re lévő ernyőn elhajlási képet hoz létre. Határozzuk meg az első és az ötödik diffrakciós minimum közti távolságot!

39B-4 Young féle kétréses kísérletben a zöld (520 nm) fény az 1,8 m távol lévő ernyőn egymástól 1,5 mm-re lévő csíkokat hoz létre. (a) Mekkora a két szomszédos rés középvonalának a távolsága? (b) Ha a csíkokat a centrális ($m = 0$) fényes csíktól számláljuk, akkor minden hatodik csík hiányzik. Számítsuk ki a rések szélességét!

39B-5 Egy rést λ_1 és λ_2 hullámhosszúságú fény keverékével világítunk meg. A kialakult elhajlási képek úgy fedik át egymást, hogy a λ_1 hullámhosszúságú fény által keltett kép első elhajlási minimuma éppen a λ_2 hullámhosszúságú fény által keltett kép második minimumára esik. (a) Számítsuk ki a hullámhosszak arányát! (b) Az egymásra rakódó elhajlási képeken még hol esnek egybe minimumok?

39B-6 Tegyük fel, hogy a 39-8 ábrán közölt fényképek a 0,150 mm széles réssel, a tőle 1,25 m távol lévő ernyőn létrehozott diffrakciós kép mérethű reprodukciói. A fényképen végrehajtott mérésből határozzuk meg az elhajló fény hullámhosszát!

39B-7 Kétréses elhajlási képet hoztunk létre olyan résekkel, amelyek egyharmad olyan szélesek, mint amilyen távol van egymástól a közepük. Számítsuk ki az elsőrendű maximum intenzitását az elhajlási képben a centrális maximuméhoz képest.

39B-8 Függőleges 0,25 mm széles rést 600 nm hullámhosszúságú fénnyel világítunk meg, és a réstől 2,5 m távol lévő ernyőn elhajlási képet hozunk létre. (a) Adjuk meg a centrális maximum I_0 intenzitásához mérve a középső maximumtól balra 2 cm-re lévő helyen az

intenzitást (b) Milyen messze van ez a hely a legközelebbi minimumoktól?

39B-9 Két egyaránt 0,150 mm széles rést 9 mm távolság választ el. Számítsuk ki, hogy hány interferenciacsíkot figyelhetünk meg (a) a centrális diffrakciós maximumon belül, (b) az egyik elsőrendű diffrakciós maximumon belül.

39A-10 Számítsuk ki egy tükrös távcső tükrének az átmérőjét, ha a Rayleigh-féle kritérium értelmében két pontszerű fényforrás szögfelbontása 0,25 ívmásodperc. Tegyük fel, hogy a hullámhossz 550 mm.

39A-11 Egy bizonyos távolságra eltávolodott autó két hátsó lámpája éjszaka alig különböztethető meg egymástól, mint két különálló fényforrás. Becsüljük meg az autótól való távolságunkat, feltéve, hogy a lámpák közötti távolság 1,5 m és átlagosan 640 nm hullámhosszúságú fénysugarat bocsátanak ki, a megfigyelő szemének a pupillája pedig 6 mm átmérőjű. (Megjegyzés: különböző sűrűségű levegőrétegekben a fénytörés hatására a kép homályossá válik, így a távolság valójában kisebb a számítottnál.)

39A-12 Egy mikrohullámú parabolaantenna átmérője 1,5 m és úgy van megtervezve, hogy a $\lambda = 3$ cm hullámhosszúságú röntgensugarak tartományába eső mikrohullámú jeleket képes legyen venni. Számítsuk ki két mikrohullámú sugárforrás minimális szögfelbontását (fokokban), amelyet ez az antenna észlelni képes.

39A-13 Egy amerikai szabványos televíziós kép kb. 485 változó fényerősségű vízszintes sorból van összeállítva. Tegyük fel, hogy a sorfelbontást csak a Rayleigh-féle kritérium korlátozza, a szemünk pupillája pedig 5 mm átmérőjű. Számítsuk ki a minimális mérési távolságnak és a kép függőleges méretének az arányát abból a feltételből, hogy a sorokat éppen ne lehessen felbontani. Tegyük fel, hogy a képcsőről érkező fény átlagos hullámhossza 550 mm.

39A-14 A Rayleigh-féle kritérium alkalmazásával adjuk meg azt a minimális felbontási szöget (fokokban), amely az alábbi két csillagászati berendezést jellemzi. (a) a Palomar-hegyi 5 m átmérőjű teleszkópot 550 nm hullámhosszon, (b) a 900 m átmérőjű Arecibo-i rádióteleszkópot Puerto Ricoban 80 nm-es hullámhosszon.

39B-15 He-Cd-lézer két hullámhosszúságú fényt bocsát ki, egyik 325 nm (az ultraibolya tartományban), a másik 442 nm (kék) hullámhosszúságú. A nyaláb 3 mm átmérőjű köralakú nyíláson jön ki, ennek eredményeként egy igen távoli ernyőn két egymásra szuperponálódott elhajlási kép keletkezik. Milyen távol kell lennie az ernyőnek ahhoz, hogy a két hullámhossz első diffrakciós minimumának távolsága 2 cm legyen?

39B-16 George Seurat, posztimpresszionista festő, az ún. „pointillizmus" technikát fejlesztette ki, vagyis a festményeit egymáshoz közel helyezett tiszta színű, kb. 2 mm átmérőjű pontokból állította elő. A színkeverés illúziója a szemlélő szemében keletkezik. Becsüljük meg azt a minimális távolságot, ahol a szemlélőnek állnia kell, hogy számára a színes pontok a színek folytonos átmenetű változásává alakuljanak. Tegyük fel, hogy az alkalmazott megvilágítás mellett a szemlélő pupillanyílása kb. 2 mm átmérőjű.

39B-17 Egy 10 cm átmérőjű objektív lencsével készült teleszkóp fókusztávolsága 80 cm. Az 550 nm hullámhosszúságú sugárzást kibocsátó távoli fényforrás elhajlási képet alakít ki a teleszkóp fókuszsíkjában. Számítsuk ki annak a gyűrűnek az átmérőjét, amit (a) az első diffrakciós minimum, (b) a második diffrakciós minimum hoz létre.

39B-18 Hadihajó köralakú radar-antennájának az átmérője 2,1 m és 15 GHz frekvencián sugároz. Két kis csónak van kb. 2 km-re a hajótól. Milyen közel lehetnek a csónakok egymáshoz, hogy még mindig két objektumként lehessen őket detektálni?

39.4 Diffrakciós rács

39A-19 Sebességellenőrző radar-rendszer 3 cm hullámhosszúságú mikrohullámokat sugároz. Ennek a sugárzásnak egy széles nyalábja egymástól 5 cm távolságban elhelyezett függőleges rudakból készült kerítésbe ütközik. Adjuk meg a beeső sugár és az első diffrakciós minimum közti szöget a kerítés mögött!

39A-20 Monokromatikus fénnyel megvilágított diffrakciós rács olyan elhajlási képet hoz létre, amelyen a harmadrendű, a hatodrendű, a kilencedrendű stb. elhajlási kép hiányzik! Határozzuk meg a résszélesség és réstávolság arányát erre a rácsra!

39A-21 Egy diffrakciós rács 2,5 cm^2 területű és rácsállandója 5000 vonal/cm. Számítsuk ki (a) a másodrendű diszperziót és (b) a felbontóképességet másodrendű 600 nm hullámhossz esetére.

39B-22 Diffrakciós rácsot (2500 vonal/cm) a Na-színkép vizsgálatára használunk. Számítsuk ki a sárga Na-dublett vonalak (588,955 nm és 589,592 nm) szögelválasztását az első három rendszám esetén.

39B-23 Egy rácsnak 20000 vonala van 5,5 cm-en. Adjuk meg azt a fényhullámhosszat, amire a két másodrendű maximum között a szögtávolság 60°.

39B-24 Egy diffrakciós rácsnál a réstávolság és résszélesség aránya 10:1. Számítsuk ki az elsőrendű intenzitásmaximum és a centrális ($m = 0$) maximum intenzitás-arányát!

39B-25 Egy diffrakciós rácsnak elsőrendű diszperziója $2{,}5\times10^{-2}$ fok/nm, felbontóképessége 10^4. Határozzuk meg, mekkora a szögelválasztás két színképvonal között az 550 nm hullámhosszúság közelében, ha azokat átfedés nélkül fel lehet bontani a Rayleigh-féle kritériumnak megfelelően.

39.5 Röntgen-diffrakció
39.7 A Fresnel-féle zónalemez

39A-26 Monokromatikus röntgensugár esik egy kristályra és 20°-os szög mellett elsőrendű Bragg-féle visz-

szaverődést hoz létre. Számítsuk ki, hogy a másodrendű visszaverődés mekkora szög mellett várható!

39A-27 A 0,30 nm hullámhosszúságú röntgensugarak NaCl kristályon elsőrendű visszaverődést hoznak létre 30°-os szögben érkezve. Számítsuk ki, mekkora az a rácsállandó, ami ennek a visszaverődésnek felel meg.

39A-28 A 0,188 nm hullámhosszúságú röntgensugarak köbös LiF kristályra esnek. Az elsőrendű szórási maximum 27,9° szögnél van. (a) Adjuk meg a LiF kristályrács síkjainak távolságát. (b) Mekkora szögnél tapasztalható a másodrendű szórás?

39A-29 Legyen egy köbös kristályban az atomok közti távolság d. Mutassuk meg, hogy a $d\sqrt{2}$ hullámhosszúságú röntgensugarak nem elégíthetik ki a Bragg-féle feltételt a 39-24 ábrán bemutatott egyik szórósíkra vonatkozóan sem.

39B-30 A 39-27 ábra egy pénzérme diffrakciós képét mutatja. Az érme átmérője 19 mm. Az ábra adatait használva és feltéve, hogy a hullámhossz 546 nm, becsüljük meg azoknak a Fresnel-féle zónáknak a számát, amelyeket az érme eltakar, ha az ernyőn lévő kép középpontjából nézzük az elrendezést.

39B-31 A 490 nm hullámhosszúságú fény merőlegesen halad át az 1 cm átmérőjű, köralakú nyíláson. A 6 m távol lévő ernyő középpontjában hány Fresnel-féle zóna lesz a nyíláson belül?

További problémák

39C-32 Egyréses diffrakciós maximum θ szögét $\text{tg}\alpha = \alpha$ adja meg, ahol $\alpha = (\pi/\lambda)\, a \sin\theta$ ahol a a rés szélessége. Ezt az egyenletet legkönnyebb szukcesszív approximációval megoldani zsebszámítógép segítségével. Tegyük fel, hogy $a = 20\lambda$ (a) Mutassuk meg, hogy az elsőrendű maximum nem pontosan középen fekszik az első és második minimum között. (b) Határozzuk meg a helyét! (Útmutatás: α első közelítésének válasszuk a $\theta_{\text{átl}}$ értéket, ami θ_1 és θ_2, az első két minimumhoz tartozó szög átlaga. Majd próbálkozzunk egy kicsit kisebb α értékkel, amíg α és $\text{tg}\alpha$ különbsége elhanyagolhatóan kicsivé nem válik) (lásd a 904. oldal 3 lábjegyzetét).

39C-33 Az előző feladat adatait felhasználva adjuk meg a másodrendű diffrakciós maximum irányát arra az esetre, amikor $a = 20\lambda$.

39C-34 Két függőleges, 0,150 mm széles, (középtől-középig) 0,9 mm távolságú rést merőlegesen beeső, 550 nm hullámhosszúságú fénnyel világítunk meg. A rések mögötti ernyőn létrejövő elhajlási-interferenciaképen a résekből adódó interferenciamaximumok távolsága 1 mm. (a) Vázoljuk fel az ernyőn látható képet. (c) Adjuk meg az $m = 3$ interferenciacsúcs intenzitását a centrális csúcs I_0 intenzitásához képest.

39C-35 Az egyréses elhajlási kép maximumhelyeit a $dI/d\alpha = 0$ egyenletből határozhatjuk meg (lásd a 39-8. összefüggést). Mutassuk meg, hogy ez a $\text{tg}\alpha = \alpha$ relációhoz vezet! (b) Szukcesszív approximációval (öt értékes jegyre) határozzuk meg az ennek a relációnak megfelelő első három α értéket és hasonlítsuk össze a (39-11) képlettel közelítőleg meghatározott értékekkel.

39C-36 Egy diffrakciós rácsot merőleges irányból λ hullámhosszúságú fénnyel megvilágítva, a ráccsal párhuzamos síkban lévő nagy ernyőn interferencia-képet kapunk. Számítsuk ki, mekkora a rács maximális résszélességének és a hullámhossznak az aránya, ha tudjuk, hogy elhajlási minimumok nem figyelhetők meg, bármilyen közel is van a rácshoz az ernyő.

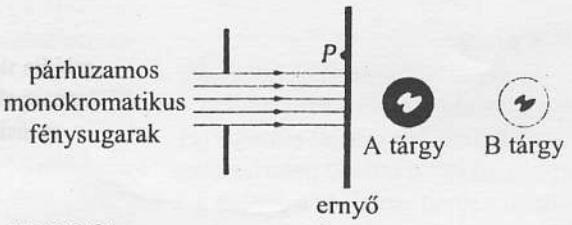
39C-37 Mutassuk meg, hogy egy ráccsal két Δf frekvenciakülönbségű vonalat tudunk felbontani: $\Delta f = c/Nm\lambda$, ahol c a fénysebesség, N a rács vonalainak a száma, m a rendszám és λ a hullámhossz!

39C-38 A diffrakciós rács D diszperziója a diffrakció m rendszámtól, a rések d távolságától és a λ hullámhossztól függ. Vezessünk le képletet a D-re, amely az m, d és λ mennyiségeket tartalmazza!

39C-39 Tekintsük a Bragg-féle síkokat azon a kétdimenziós rácson, amit a 39-24 ábra mutat be. (a) Mutassuk meg, hogy e síkok közti távolságot $d = a(n^2 + 1)^{-1/2}$ fejezi ki, ahol $n = 1, 2, 3,...$ és a a rácsban az atomok közti távolság. (b) Általában igaz, hogy $d = a(n^2 + m^2)^{-1/2}$, ahol mind n mind m egész számok. Készítsünk a 39-24 ábrán láthatóhoz hasonló ábrát, mely mutatja, hogy a síkokat $d = a(13)^{-1/2}$ távolság választja el.

39C-40 Bizonyítsuk be, hogy a zónalemezen mindegyik zóna területe közelítőleg $\pi\lambda L$, ahol L a zónalemez legkisebb fókusztávolsága.

39C-41 Miként a 39-38 ábra mutatja, egy párhuzamos monokromatikus fénynyaláb nagy köralakú nyílás mögött az ernyőn fényfoltot hoz létre. Vizsgáljuk azt a P pontot, amely kissé távolabb van az egyenes nyaláb beérkezési helyétől, már ott, ahol nem éri fény az ernyőt. Tegyük fel, hogy egy átlátszatlan korongon tetszőleges nyílást vágunk (ez az A tárgy), a korongot a nyílás elé rakva, P-be diffraktált fény érkezését figyelhetjük meg. Ezután az A tárgyat olyan B tárggyal helyettesítjük, amely ott sötét, ahol A világos, és megfordítva. (Ha mindkét tárgy a nyílás előtt lenne egyszerre, a nyílás sötét lenne.) Babinet elve szerint *a P pontba jutó diffraktált fény mindkét esetben pontosan ugyanannyi*. Bizonyítsuk be ezt az állítást a szuperpozíció elvének felhasználásával!



39-38 ábra
A 39C-41 problémához

38B-19 a) zöld b) piros
38B-21 99,6 nm
38B-23 113
38B-25 1,31
38B-27 18,7 cm
38C-29 A válasz adott.
38C-31 A válasz adott.
38C-33 A válasz adott.
38C-35 A válasz adott.
38C-37 A válasz adott.
38C-39 a) $0{,}155\lambda/d$ b) $0.500\lambda/d$
38C-41 543 nm
38C-43 A válasz adott.
38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

39A-1 0,396 mm
39B-3 18,0 mm
39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
39B-7 0,684
39B-9 a) 120 b) 60
39A-11 11,5 km
39A-13 15,4
39B-15 420 m
39B-17 $1{,}07 \times 10^{-5}$ m b) $1{,}97 \times 10^{-5}$ m
39A-19 36,9°
39A-21 $7{,}16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
39B-23 688 nm
39B-25 $1{,}375 \times 10^{-3}$ fok
39A-27 0,300 nm
39A-29 A válasz adott.
39B-31 17,0
39C-33 0,1233 rad
39C-35 lásd 2. lábj.
39C-37 A válasz adott.
39C-39 A válasz adott.
39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

40A-1 $\frac{7}{8}$
40B-3 $\frac{1}{8}$
40A-5 32,0°
40A-7 49,2°
40B-9 $\text{tg}\,\theta_p = 1/\sin\theta_c$
40B-11 16,4 μm
40B-13 A válasz adott.
40B-15 68,4 mg/cm^3
40C-17 0° és 90°
40C-19 78,1%
40C-21 A válasz adott.
40C-23 A válasz adott.
40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
40C-27 A válasz adott.
40C-29 118°

XLI. Fejezet

41B-1 1,5 cm/s
41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
41A-5 a) $1 - \beta \approx 2{,}35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
41B-7 $22{,}5m/c$ vagy $\frac{7}{5} \times 10^{-8}$ s
41B-9 6,17 ns
41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c d) 36 m e) 45 m/c
41A-13 0,946c és –0,385c
41A-15 $v_x = 0{,}994c$
41B-17 1,78
41A-19 $v = 0{,}866c$
41A-21 889 kg
41B-23 $4{,}28 \times 10^9$ kg/s
41B-25 A válasz adott.
41B-27 A válasz adott.
41B-29 A válasz adott.
41B-31 A válasz adott.
41B-33 a) 270 m/c vagy $9{,}00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
41B-35 b) 80 m/c
41C-37 a) 1,33c·s b) 3,00 s
41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
41C-41 A válasz adott.
41C-43 A válasz adott.
41C-45 $5{,}55 \times 10^{-17}$ s
41C-47 $V = v\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\right)$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24}E_o/c$ c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
41C-51 A válasz adott.
41C-53 A válasz adott.
41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

42A-1 1,51 cm^2
42B-3 0,646%
42A-5 9660 nm
42A-7 5222 K
42A-9 $2{,}43 \times 10^{-12}$ m
42A-11 A válasz adott.
42B-13 $3{,}54 \times 10^6$ m
42A-15 451 nm
42B-17 a) $3{,}56 \times 10^5$ m/s b) 432 nm
42A-19 4,85 pm

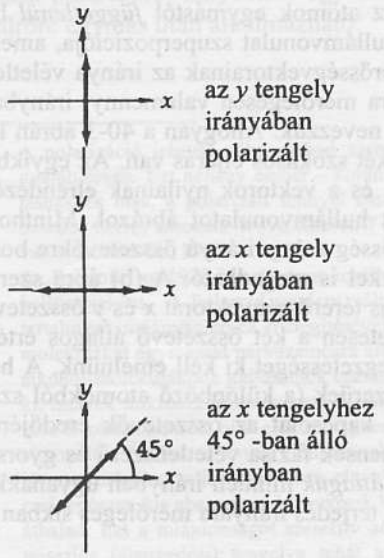
A POLÁROS FÉNY

Aligha kerülhetjük el azt a következtetést, hogy a fény annak a közegnek a transzverzális hullámzása, amely az elektromos és mágneses jelenségek okozója.

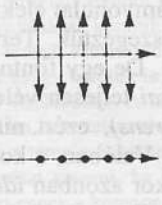
J. C. MAXWELL

40.1 Bevezetés

A Maxwell-egyenletek az elektromágneses sugárzást a rezgő elektromos és mágneses erőtér transzverzális hullámaiként írják le. A hullám azért *transzverzális*, mert az **E** és a **B** erőterek olyan vektorokkal jellemezhetők, amelyek a terjedés irányára merőleges síkban fekszenek. Megegyezés szerint *lineárisan poláros* hullámnál az *elektromos* rezgés irányát tekintjük a polarizáció irányának. A 40-1 ábra a lineárisan polarizált (vagy poláros) fénysugarak ábrázolási módját mutatja be. A rövid nyilak sorozata a polarizációs irányt mutatja. De tekinthetjük ezeket a nyilakat, rezgéseket végző elektromos térerősségvektoroknak is. A polarizált hullámok leírására használatosak a **„polarizáció síkja"** vagy **„síkban polarizált** hullámok" kifejezés is. Ezek azonban kissé

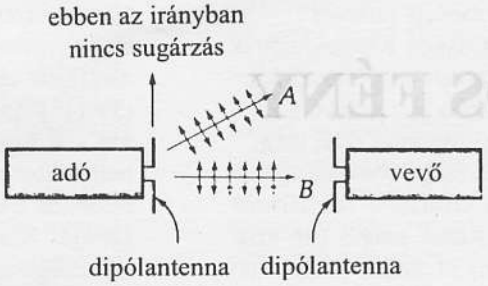


(a) A lineárisan polarizált fény a szemlélőhöz közeledik (vagyis a sugarak a papír síkjára merőlegesek)



(b) Lineárisan polarizált sugarak, amelyek a papír síkjában terjednek. A polarizáció irányát vagy nyílsorozat, vagy pontsorozat jelzi.

40-1 ábra
Módszerek az elektromos térpolarizáció irányának ábrázolására *lineárisan polarizált* fény esetén.



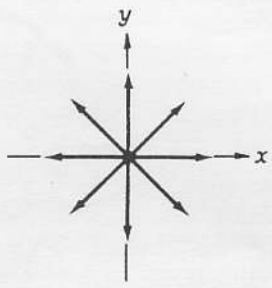
40-2 ábra
A dipólantennából érkező sugárzás polarizált. A polarizáció iránya merőleges a terjedés irányára és a dipólantenna síkjában fekszik.

pontatlanok. Például, a 40-2 ábrán az *A* és a *B* sugarak polarizációs síkja ugyanaz (a papír síkja), de a polarizációjuk iránya mégis különböző.*

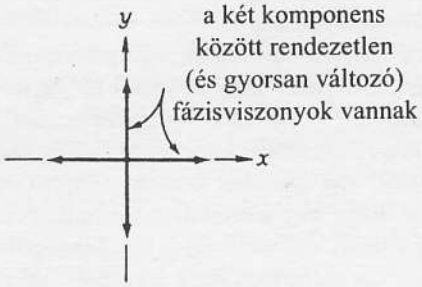
Az antennából kibocsátott rádió- és mikrohullámok abban az irányban vannak polarizálva, amelyben az antenna huzalában a töltések gyorsulnak (40-2 ábra). A vevő dipólantenna, a polarizáció irányával párhuzamosra állítva, energiát vesz fel a hullámokból, mert a váltakozó elektromos erőtér a vevő dipólantennában az elektronokat előre-hátra mozgatja, s ezáltal a dipólban váltakozó elektromos feszültség jön létre. Amennyiben a vevődipólust a polarizáció irányára merőlegesen állítjuk, a dipólus két fele ugyanazon a feszültségen marad és a vevő nem érzékeli a hullámokat.

Az a tény, hogy az elektromágneses hullámok polarizálhatók, döntő bizonyítékot jelent arra nézve, hogy *transzverzális hullámok*. Az interferencia és az elhajlás azt bizonyítja, hogy a sugárzási tér hullámtermészetű, azt azonban nem döntik el, hogy a hullámok longitudinálisak vagy transzverzálisak. A hanghullámok például interferálhatnak, de mert longitudonálisak, nem polarizálhatók. Csak a transzverzális hullámok polarizálhatók.

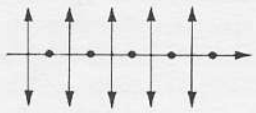
A látható fény, amit közönséges fényforrások, pl. izzólámpák és izzó testek bocsátanak ki, gerjesztett atomokból vagy molekulákból ered. A klaszszikus szemlélet szerint az atomok vagy molekulák rövid elektromágneses hullámcsomagokat bocsátanak ki, amik kb. 10^{-8}s ideig tartanak, és néhány millió rezgést tartalmaznak. Így a kibocsátott *hullámvonulat* hossza a terjedés irányában kb. egy méter. Minthogy az atomok egymástól *függetlenül* bocsátják ki a fényt, az eredő fény sok hullámvonulat szuperpozíciója, amelyben a hullámvonulatok elektromos térerősségvektorainak az iránya véletlenszerű eloszlást mutat a terjedés irányára merőlegesen valamennyi irányban. Az ilyen fényt **polarizálatlan** fénynek nevezzük. Ahogyan a 40-3 ábrán látható, a nem poláros fény ábrázolására két szokásos eljárás van. Az egyikben (a) a fénysugár a szemlélő felé halad, és a vektorok nyilainak elrendezése sok, véletlen irányú, síkban polarizált hullámvonulatot ábrázol. Minthogy tetszőleges *xy* síkbeli elektromos térerősség *x* és *y* irányú összetevőkre bontható fel, a fény ezekkel az összetevőkkel is megadható. A (b) ábra szerint minden egyes hullámvonulat elektromos térerősségvektorát *x* és *y* összetevőre bontottuk és összegeztük. Természetesen a két összetevő átlagos értéke egyenlő egymással. De egy fontos jellegzetességet ki kell emelnünk. A hullámvonulatok *fázisai* teljesen véletlenszerűek (a különböző atomokból származó fény *inkoherens),* ezért nincsen kapcsolat az összetevők eredőjének fázisai között sem. Valóban, a komponensek fázisa véletlenszerű és gyorsan változik. Ugyanakkor azonban *időbeli átlaguk* minden irányban ugyanakkora. Ennek következtében annak, hogy a terjedés irányára merőleges síkban az



(a)



(b)



(c)

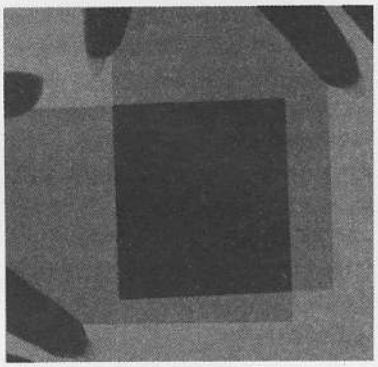
40-3 ábra
Az (a) és (b) a szemlélőhöz közeledő nempolarizált transzverzális hullám ábrázolásának két módját mutatja. (c) A papír síkjában terjedő polarizálatlan hullám; a rövid nyilak és a pontok a térben elválasztva vannak elhelyezve, ami azt kívánja hangsúlyozni, hogy nincs rögzített kapcsolat az inkoherens rezgést végző két komponens fázisa között.

* A fénytani irodalomban más megállapodások is elterjedtek. Polarizációs síknak történeti okokból gyakran a fény terjedési iránya és a mágneses térerősség rezgési iránya által meghatározott síkot szokás nevezni. (A fordító megjegyzése.)

x és y irányt hogyan választjuk meg, a polarizálatlan fény esetében nincs semmilyen jelentősége. Tetszőleges választás mellett a (terjedés irányára merőleges) két komponens időátlaga ugyanakkora.

40.2 A polárszűrő

Az emberi szem nem nagyon érzékeny a polarizáció irányára[1]. A *Polaroid* nevű, kereskedelemben is kapható eszközzel[2] azonban könnyen létrehozhatunk poláros fényt, ill. megvizsgálhatjuk egy fénynyaláb polárosságát. Ideális esetben egy „tökéletes" polárszűrő a beeső polarizálatlan sugár intenzitásának 50%-át elnyeli, 50%-át átengedi. A gyakorlatban azonban az átengedett hányad csak 40% vagy még annál is kevesebb, a felületeken bekövetkező visszaverődések és a nem kívánatos abszorpció következtében. Mint a 40-4 ábra mutatja, ha két polárszűrőt „keresztezünk", azaz úgy állítjuk be, hogy az ún. transzmissziós tengelyeik (ilyen irányú rezgéseket enged át a szűrő) egymással derékszöget zárjanak be, akkor a fényintenzitásnak kb. 90%-a elnyelődik.



40-4 ábra
A „keresztezett" polarizátorok transzmissziós tengelye derékszöget zár be egymással. Mindkét lemez különkülön szürke, mert a beeső nem poláros fény intenzitásának mintegy felét elnyelik.

Ha két polárszűrőt együtt használunk, akkor az elsőt *polarizátornak*, a másodikat pedig, amit az elsőből érkező sugárzás polarizációjának meghatározására alkalmazunk, *analizátornak* nevezzük.

Tekintsünk most két polárszűrőt, melyek áteresztési irányai egymással θ szöget zárnak be, ahogyan a 40-5 ábra mutatja. Ha a polarizátorból érkező fény elektromos térerősségének amplitúdója E_0, akkor az („ideálisnak" feltételezett) analizátor csak az $E_0\cos\theta$ komponenst fogja átengedni, azt, amelyik párhuzamos az ő transzmissziós tengelyével. Minthogy az I intenzitás arányos az amplitúdó *négyzetével*, az átengedett intenzitás a θ szög függvénye lesz:

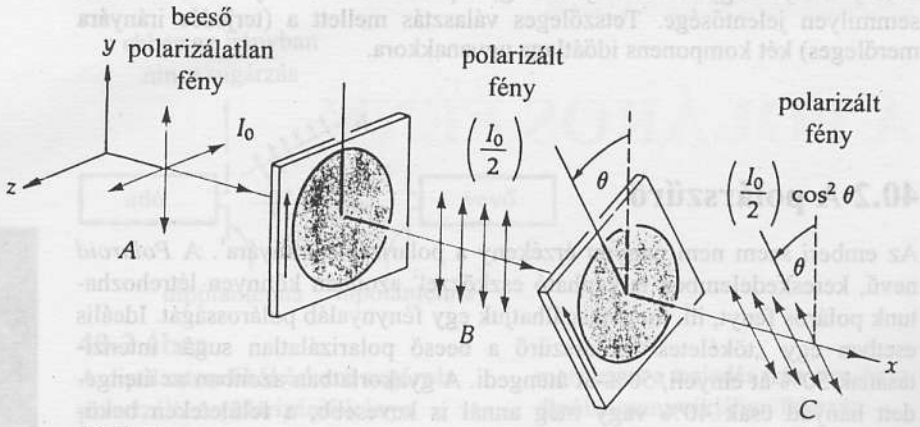
MALUS TÖRVÉNYE $$I = I_0 \cos^2\theta\,, \qquad (\mathrm{W/m^2\text{-}ben}) \qquad \textbf{(40-1)}$$

ahol I_0 az analizátorra eső *polarizált* fénynek az intenzitása, θ pedig az analizátor transmissziós tengelyének a polarizátor tengelyével bezárt szöge. A (40-1) képletet felfedezőjéről, Étienne Malus kapitányról, Napoléon hadseregének egyik hadmérnökéről nevezték el. Amikor több, különböző tengelyállású polárszűrőt helyezünk egymás mögé, akkor a (40-1) képlet szűrőről-szűrőre egymás után alkalmazható.

---

[1] A polarizáció irányát néha szabad szemmel is felismerhetjük a halvány Haidinger-féle nyaláb révén. Ezt néhány ember – korántsem mindenki – képes megfigyelni. Ennek a hatásnak és más, a polarizált fénnyel összefüggő, érdekes jelenségek leírása található a Science Series sorozata W. A. Shurcliff és S. S. Ballard: Polarized Light c. kötetében (D. van Nostrand Co, 1965)

[2] A „Polaroid"-ot 1928-ban 19 éves korában fedezte fel Edwin H. Land, a Harvard egyetem hallgatójaként.. A Polaroid modern változatát polivinil-alkohol hosszú láncú molekuláit tartalmazó műanyaglemez melegítésével és nyújtásával készítik. A nyújtási folyamat a molekulákat egymással párhuzamosra állítja. A lemezt ezután jód-oldatba merítik, ahol az alkohol-molekulákhoz jód-atomok csatlakoznak és így belőlük is hosszú láncok alakulnak ki, melyek mikroszkópikus vezető huzalokként viselkednek. A láncok irányával párhuzamos E-komponenssel bíró elektromágneses hullám, a vezetési elektronokat a lánc mentén elmozdítja. Ezáltal az anyag a hullámnak ebben a térerősségkomponensében lévő energiáját gyakorlatilag teljes egészében elnyeli. Másrészt viszont, ha E merőleges a láncokra, csak egészen kis abszorpció következik be, ezért ennek a komponensnek legnagyobb része áthalad. Ezt a tulajdonságot *szelektív abszorpciónak* nevezzük. A Polaroid-lemez transzmissziós (átengedési) tengelye tehát az az irány, amely merőleges a lemez nyújtási irányára. Ma már 1 m széles és 30 m, vagy még ennél is hosszabb lemezek is előállíthatók. Az anyag megóvása, ill. megerősítése érdekében a szűrőt vékony üveg vagy műanyag lemezek közé helyezik (laminálják). A polaroid lemez és a fény kölcsönhatása éppen olyan, mint ahogyan a párhuzamos drótháló hat a polarizálatlan rádió- vagy mikrohullám-nyalábra. A háló csak azt a komponenst *engedi át*, amelynek térerősségvektora *merőleges* a huzalok irányára, feltéve, hogy a huzalok közti távolság kisebb, mint a sugárzás hullámhossza.



40-5 ábra
Két párhuzamos polarárszűrő lemez közül az egyiket úgy fordítjuk, hogy transzmissziós tengelye a másikéval θ szöget zárjon be. Az A-nál az x-tengely mentén terjedő polarizálatlan fény az y-tengely irányában lineárisan polarizálttá válik B-ben, majd polarizációjának iránya C-ben az y-tengelyhez képest θ szögbe fordul. Ha a B-nél az intenzitása I_0, akkor a C-nél $I_0 \cos^2 \theta$ lesz az intenzitás („ideális" polarizáló anyagok esetében).

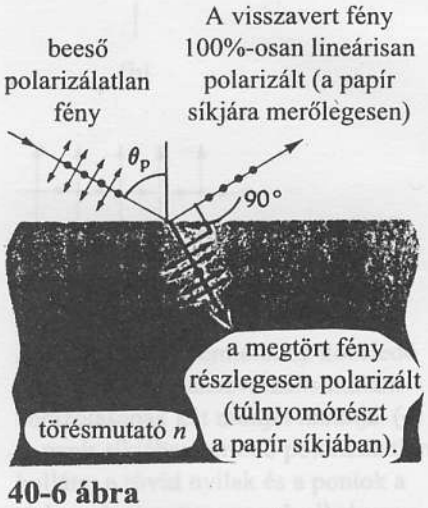
40-1 PÉLDA

I_0 intenzitású polarizálatlan fény esik két (ideális) polárszűrőre, amelyeknek transzmissziós tengelyei 35°-os szöget zárnak be egymással. Adjuk meg a második szűrőt elhagyó fény I intenzitását a beeső I_0 intenzitás függvényében!

MEGOLDÁS

Miután a fény áthaladt az első polárszűrőn, intenzitása $I_0/2$-re csökkent. A második szűrő ezt az intenzitást tovább csökkenti a $\cos^2\theta$ tényezővel. Így a kilépő fénynyaláb intenzitása

$$I = \left(\frac{I_0}{2}\right)\cos^2\theta = \left(\frac{I_0}{2}\right)\cos^2 35° = 0{,}336 I_0$$



40-6 ábra
Ha a fény éppen a θ_p *polarizációs szögben* esik be, akkor a visszavert és a megtört sugarak egymásra merőlegesek.

40.3 Polarizáció visszaverődéskor és szóráskor

A polarizált fény előállításának másik módszere az, hogy a fény útjába valamilyen sík felületű szigetelő anyagot pl. üveget, vizet vagy egyéb fényes, festett felületet helyezünk. A visszavert nyaláb részben, esetleg teljesen polarizált lehet attól függően, hogy mekkora a beesési szög. Sir David Brewster skót fizikus 1812-ben tanulmányozta az üvegről visszaverődött fény polarizációját és azt találta, hogy a visszavert hullám 100%-ban polarizált volt akkor, amikor egy üvegfelületen áthaladó megtört és róla visszavert sugarak iránya éppen merőleges egymásra. Ez az összefüggés érthetővé válik, ha arra gondolunk, hogy a beeső nempolarizált fény két (inkoherens) térerősségkomponensből tevődik össze, amelyek merőlegesek egymásra (lásd a 40-6 ábrát). Amikor a fény az anyagba behatol, ott az elektronokat e két egymásra

merőleges irányban készteti rezgésre. Minthogy azonban a felgyorsított elektronok nem sugározhatnak a gyorsulás irányában, az elektronrezgéseknek az ábra síkjába eső komponense nem sugározhat a visszavert sugár irányába. Csak az a rezgéskomponens kelt sugárzást a visszaverődési irányba, amelyiknek a rezgése a papír síkjára merőleges. Ezáltal viszont olyan visszavert sugár keletkezik, amelyik 100%-ig a mondott módon polarizált.

Jelölje θ_p azt a beesési szöget, melynél a visszavert és a megtört sugár merőleges egymásra: $\theta_p+\theta_2=90°$. Ha a Snellius-féle $n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_2$ visszaverődési törvényt, ezzel a feltétellel összevetjük, levezethetjük az alábbi összefüggést, amelyet Sir David Brewster 1812-ben állított fel:

BREWSTER TÖRVÉNYE
dielektrikum határán visszaverődő fény 100%-os polarizáltságának feltétele

$$\operatorname{tg} \theta_p = n, \qquad \textbf{(40-2)}$$

ahol $n = n_2/n_1$, a fénytörő anyag relatív törésmutatója (a környező anyaghoz képest). A (40-2) egyenlettel definiált szöget Brewster-szögnek nevezzük (Lásd a 40B-10 problémát). A törvény azonban *csak dielektrikumok esetén* érvényes. (A *vezető* felületeken a visszaverődés folyamata sokkal összetettebb jelenség, ebbe nem mélyedünk bele. Általában a fémfelületek tetszőlegesen polarizált komponenst visszavernek, bár a beesési iránytól függő intenzitással.)

A polárszűrős napszemüvegek azt a jelenséget használják fel, hogy a vízfelszínről, úttestről és más vízszintes felületekről visszavert sugarak (legalább részlegesen) lineárisan polarizáltak, így az ilyen visszavert sugarak hatását nagy mértékben gyengíteni lehet megfelelően beállított tengelyű polárszűrős szemüveggel. (Mi a helyes irány?)

40-2 PÉLDA

Milyen szögben beeső fény verődik vissza vízfelszínről tökéletesen polárosan? (törésmutató = 1,33)

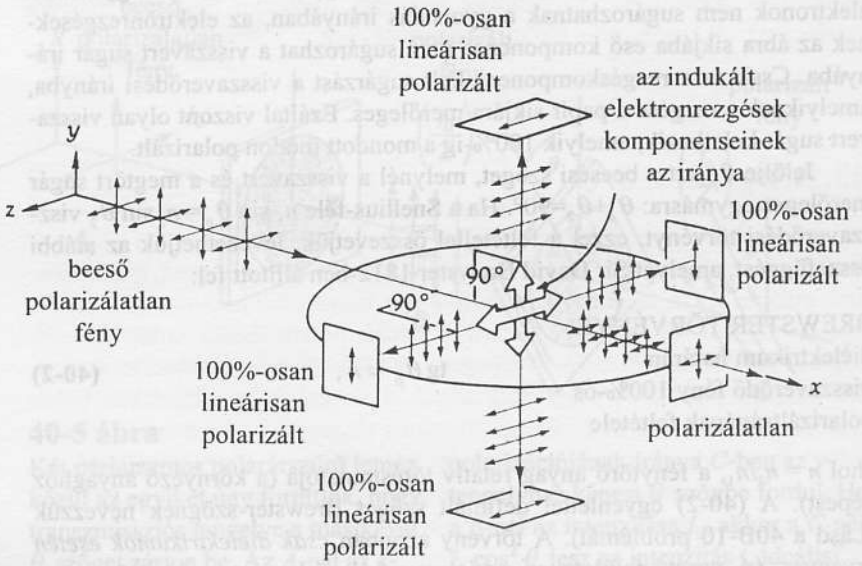
MEGOLDÁS

A (40-2) képletből: $\operatorname{tg} \theta_p = 1{,}33$. Így

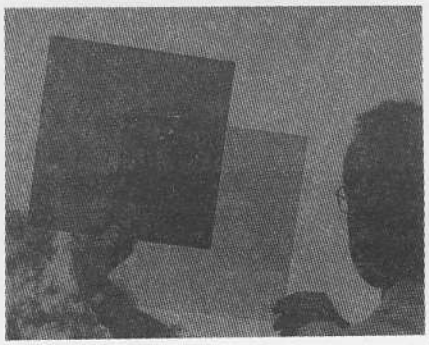
$$\theta_p = \operatorname{arctg} 1{,}33 = 53{,}1°$$

A szórt fény polarizációja

A tiszta égboltról érkező szórt napfény részben polarizált. A beeső (nempolarizált) napfény a levegőben lévő molekulák elektronjait rezgésbe hozza úgy, hogy a rezgés merőleges lesz a napsugár irányára. Ahogyan a 40-7 ábrán megmutatjuk, ezek a rezgő elektronok a fényt újra kisugározzák a gyorsuló töltéseknek megfelelő polarizációs iránnyal. *A megfigyelt szórt fény intenzitásához csak a megfigyelés irányára merőleges rezgéskomponensek járulnak hozzá;* a megfigyelés irányában rezgő töltések ugyanis mozgásuk irányában energiát nem sugároznak ki. Ha napkeltekor vagy napnyugtakor függőlegesen felfelé nézünk (és az égbolt tiszta) a napsugarak tekintetünk irányára merőlegesek. Ha polaroid lemezen vagy ilyen napszemüvegen keresztül nézzük az eget, az áteresztési tengely elforgatásával észrevehetjük, hogy a szórt napsugár részben poláros (azért csak részben, mert a fény egy része többször is szóródik, mielőtt a szemünkbe kerülne). A fényképészek az égbolt fényerősségének csökkentésére, a köd okozta fényszórás gyengítésére,



40-7 ábra
Polarizálatlan fény szóródása molekulákon. A beeső hullám transzverzális rezgést végző elektromos térerőssége az elektronokat az *yz*-sík minden irányában rezgésbe hozza.
Itt az *y* és *z* komponensek iránya felbontva látszik. Mindegyik elektron dipólantennaként sugároz (lásd a 35-14 ábrát). A $\pm y$ tengely irányába csak a $\pm z$ irányú elektronmozgásból eredhet sugárzás, így a szórt sugárzás 100%-ban polarizált. (Az antenna saját irányába nem sugároz!) Hasonlóképpen csak az elektronok $\pm y$ irányú mozgása szolgáltathat $\pm z$ irányú sugárzást, tehát ez a sugárzás is 100%-ban polarizált. Az előre és a hátra szórt sugárzás polarizálatlan, más szögeknél a szórt sugárzás részben polarizált.



40-8 ábra
Keresztezett polárszűrők. A bal oldali lemez sötétebb, jelezve, hogy az égbolt szórt fénye részben poláros.

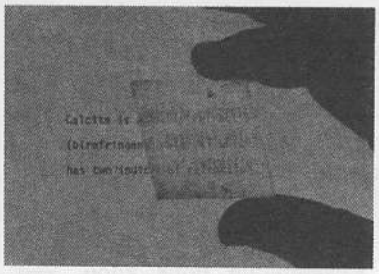
vagy nemkívánatos tükröződések kiküszöbölésére néha polárszűrőt használnak. A méhek, a hangyák és egyes más rovarok összetett szeme érzékeli a fény polarizáltságát. Egyes biológusok szerint ezek a rovarok az égbolt fényének polarizáltságát tájékozódás céljára használják.

40.4 A kettőstörés

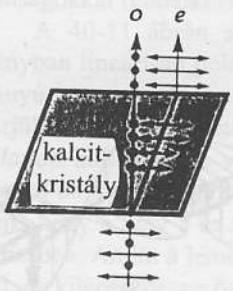
Néhány kristályos anyagban az atomok úgy rendeződnek, hogy a rendszernek nagyfokú szimmetriája van. Ennek eredményeként ezek egyetlen törésmutatóval jellemezhetők, amely a beeső fény polarizációjától független. A legtöbb gáz, folyadék és amorf szilárd anyagok, mint pl. a feszültségmentes üveg vagy a műanyagok így viselkednek. Ezeket az anyagokat *optikailag izotrópoknak* nevezik. Van azonban jó néhány kristályos, ill. feszültséges amorf anyag, amelynek molekuláris szerkezete jelentős aszimmetriát mutat. Ez az aszimmetria ezeknek az anyagoknak az optikai tulajdonságaiban úgy jelentkezik, hogy a beeső fény polarizációjának irányától függően két törésmutatójuk van. Ezeket *kettősen törő*, vagy *optikailag anizotróp* anyagoknak nevezzük. A két törésmutató megjelenésének az oka nyilvánvaló. Ha a kristályrácsban az atomok elrendeződése nem szimmetrikus, akkor az elektronokra ható kötőerők sem szimmetrikusak. Így az egyensúlyi helyzetükből kimozdított elektronokra az egyik irányban nagyobb effektív visszahúzó erő („rugóerő") hat, mint egy másik irányban. Minthogy az elektromágneses hullámok terjedése az anyagokon keresztül olyan folyamat, amelynek során a

hullámokat az elektronok elnyelik, majd az energiát újra kisugározzák, az a tény, hogy az elektronok az egyik irányból érkező hatásra másként reagálnak, mint a másik irányból érkezőre, azt eredményezi, hogy a hullámok a különböző irányokban különböző sebességgel terjednek tova.

A kalcit, a kvarc és a jég jó példa a kettősen törő anyagokra. A 40-9 ábra mutatja, hogy a kalcitra eső polarizálatlan fény két polarizált összetevőre bomlik fel, egy *ordinárius* (vagy *rendes*) sugárra, (melyet „*o*"-sugárnak is nevezünk), és amely követi a Snellius-Descartes-törvényt, és egy olyan sugárra, amely nem követi e törvényt, ezt *rendellenes* vagy *extraordinárius* sugárnak, (ill. *e* sugárnak) nevezzük. A kristályon belül a rendellenes sugár általában nem is ugyanabban az irányban terjed, mint a rendes sugár. Ezt a jelenséget úgy figyelhetjük meg, hogy kalcitkristály-darabot helyezünk egy papírdarabra, amelyre előbb egy fekete pontot rajzoltunk. Ekkor a képen két fekete pontot fogunk látni. A kristály elforgatása az egyik képet változatlan helyzetben hagyja, míg a másik kép ezt körbejárja. Továbbá megállapítható, hogy a két képet egymásra merőlegesen különbözőképpen polarizált fény

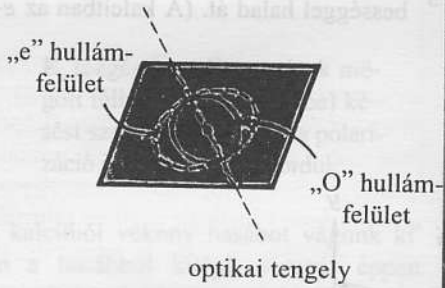


(a) A kalcitkristály kettős képet alkot



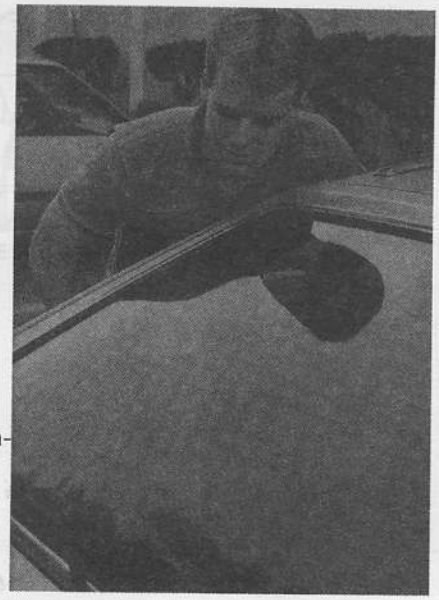
beeső polarizálatlan fény

(b) A kalcitkristály a felületére merőlegesen beeső polarizálatlan fényt két különbözőképpen polarizált sugárra bontja. Az „*o*" sugár változatlanul folytatja egyenes-vonalú útját, az „*e*" sugár a kristályban ferdén halad tovább, majd az „*o*" sugárral párhuzamosan kissé eltolódva lép ki a kristályból. (Ebben az esetben a sugár terjedési iránya nem merőleges a hullámfrontra.)



(c) A kalcitkristály belsejébe helyezett pontszerű fényforrás két különböző Huygens-féle elemi hullámfelületet hoz létre. Az „*o*" hullámfelület (folytonos vonal) gömb. Az „*e*" hullámfelület (szaggatott vonal) forgási elipszoid, ami egy ellipszis forgatásából keletkezik. A forgástengely azon a két ponton megy át, ahol a gömb és az ellipszis metszete érintkezik. Ezt a tengelyt optikai tengelynek nevezzük. E mentén mind az „*o*", mind az „*e*" sugár ugyanazzal a sebességgel terjed. Az optikai tengelyre merőleges síkban az „e" hullám is ugyanabban az irányban terjed, mint az „*o*" hullám, de nagyobb sebességgel.
(Emlékezzünk arra, hogy az optikai „tengely" egy *irány*, nem pedig meghatározott vonal!)

40-9 ábra
A kettősen törő kalcitkristály néhány optikai tulajdonsága



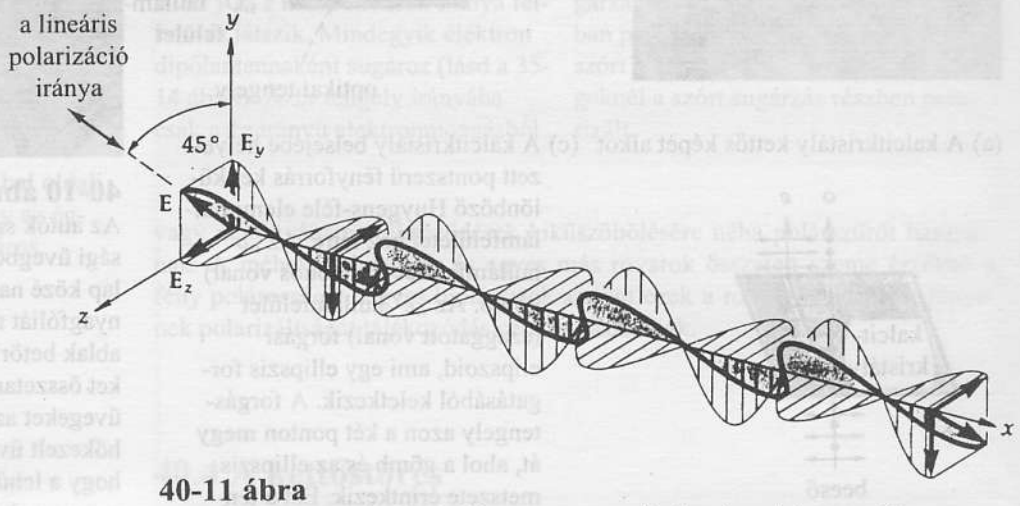
40-10 ábra
Az autók szélvédő üvegét ún. biztonsági üvegből készítik, azaz két üveglap közé nagyon erős átlátszó műanyagfóliát ragasztanak, ami, ha az ablak betörik, akkor az üvegcserepeket összetartja. A hátsó és az oldalüvegeket azonban gyakran egyetlen hőkezelt üveglapból állítják elő úgy, hogy a lehűlés során szándékosan nagy mechanikai feszültségek keletkezzenek bennük. Ha az ablaküveg eltörik, akkor az egész ablak viszonylag biztonságos, kicsiny szemcsékre, és nem nagy cserepekre törik, mint a közönséges üveg. A feszültségek az üveget kettősen törővé teszik. Az ábra egy autó hátsó ablakán feszültségi kettőstörés miatt létrejövő képet mutatja, amikor a részben polarizált napfény éppen a Brewster-szögben esik be az üvegre. Jóllehet, ehhez a fényképfelvételhez nem használtak polár szűrőt, a visszavert fényt polarizációs napszemüvegen keresztül szemlélve, a feszültségeloszlást még kifejezettebbé teszi.

alkotja[3]. Mágnesezett plazmák is mutatják a kettőstörés jelenségét, s ez hasznos segédeszköz a távoli ionizált gázok mágneses terének csillagászati vizsgálatában.

Néhány kristályos anyag természetes polarizátorként viselkedik, mert a polarizáció egyik komponensét elnyeli és csak a másikat engedi át. A turmalin nevű féldrágakő, amit gyakran használnak az ékszerészek is, példa erre. Ezt a tulajdonságot szelektív abszorpciónak nevezik, de néha *dichroizmusnak* is (a görög *di* – kettő – és a *chros* – *bőr* és *szín* – jelentésű szavak kombinációjából), mert amikor az ezeken a kristályokon átmenő fényt különböző irányból nézzük, akkor rendszerint két különböző színt látunk. Sajnos, a természetes dichroizmust mutató kristályok általában igen kicsik.

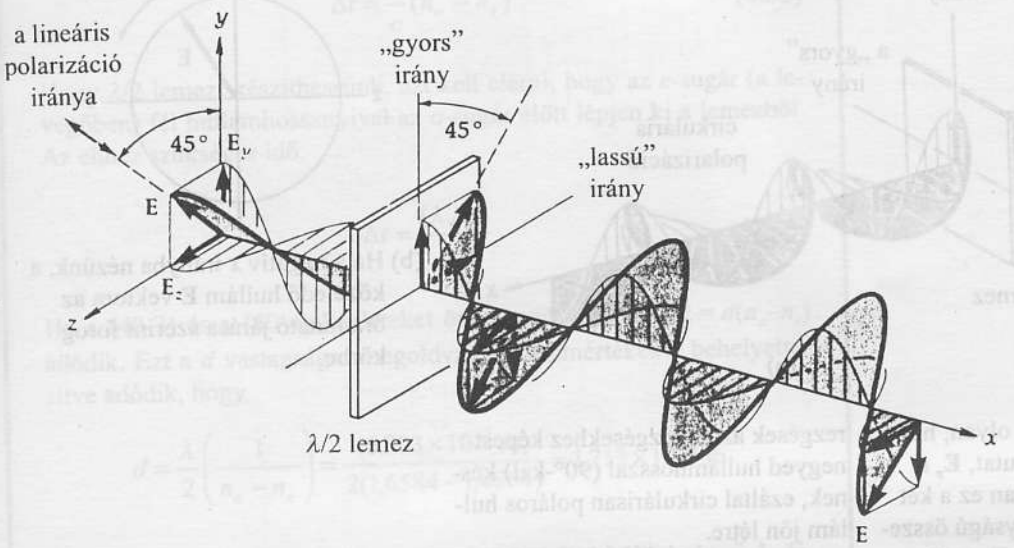
40.5 A fázistoló lemezek és a cirkuláris polarizáció

Mint fentebb említettük, a kettősen törő anyagoknak két törésmutatójuk van, az egyik az „*o*"-sugárra, a másik az „*e*"-sugárra vonatkozik. Ezért a fény ezeken az anyagokon, polarizációjától függően, két különböző terjedési sebességgel halad át. (A kalcitban az *e*-sugár, de egyes más anyagokban az *o*-



40-11 ábra
A lineárisan polarizált fényhullám az *x*-tengely mentén terjed, polarizációs iránya az *y*-tengellyel 45° -os szöget zár be. Az **E** elektromos térerősségvektor két egyenlő amplitúdójú összetevőre bontottuk fel az *y*- és a *z*-tengelyek irányában.

[3] Ennek a két képnek a polarizáltsága vezette Malus-t arra a felfedezésre, hogy a visszavert fény polarizált lehet. A Párizsi Akadémia díjat tűzött ki a kettőstörés elméletének megalkotására. Malus 1808-ban, házának ablakánál állva vizsgálta a kalcit-kristályt, abban a reményben, hogy rájön valamire a kettőstöréssel kapcsolatban. A kristályon keresztül véletlenül éppen a lenyugvó Nap képét nézte, ahogyan az a közeli LuxembourgPalota ablakain visszaverődik. Meglepetéssel látta, hogy a két kép közül az egyik eltűnik, amikor a kalcitot forgatja. Malus kapitánynak nemcsak jó szerencséje volt, hogy felfedezte: egy természetes polarizátort tart a kezében, hanem elég szerencsés volt ahhoz is, hogy a palota ablakaihoz képest éppen a Brewster-szögben állt, s jó helyzetben! Az éjszakát szorgalmas kísérletezéssel töltötte, a gyertya különböző víz- és üvegfelületeken visszavert képét vizsgálta. Mindez



40-12 ábra
A $\lambda/2$ lemez irányítása olyan, hogy $\mathbf{E}_y$ mutat a „gyors" irányba, $\mathbf{E}_z$ pedig a „lassú" irányba. Amikor a hullám kilép a $\lambda/2$ lemezből, az $\mathbf{E}_z$ rezgések az $\mathbf{E}_y$ rezgések mögött félhullámnyi (180°-os) késést szenvedtek, ezáltal a polarizáció iránya 90°-kal elfordul.

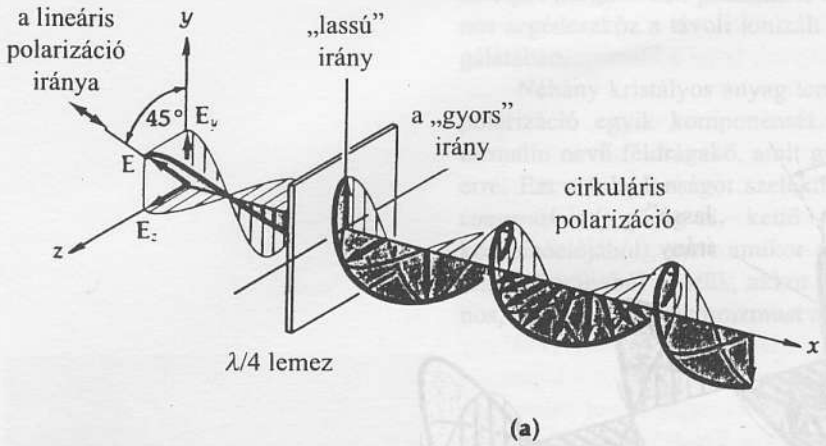
sugár a gyorsabb.) Tegyük fel, hogy kalcitból vékony hasábot vágunk ki[4] úgy, hogy adott hullámhossz esetén a hasábból kilépő *o*-sugár éppen félhullámhosszal maradjon le az *e*-sugár mögött. A két sugár fáziskülönbsége ekkor 180°. Az ilyen hasábot $\lambda/2$-es *lemeznek* nevezzük, amely érdekes tulajdonságokkal rendelkezik.

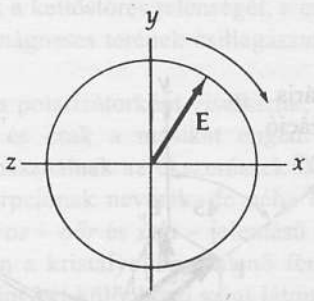
A 40-11 ábrán az *x*-tengely mentén az *y*-tengelyhez 45°-ban hajló irányban lineárisan poláros hullám látható. Az elektromos térerősséget *y* és *z* irányú, egymással *azonos fázisban* rezgő összetevőkre bonthatjuk. (Ne keverjük össze ezt az esetet azzal, ami a 40-3b ábrán szerepel, és amin a *polarizálatlan* hullámnak a véletlenszerű és változó fázisviszonyait mutattuk be.) Lépjen be most az így polarizált fény egy $\lambda/2$-es lemezbe, amelyet úgy irányítunk, hogy a fény *y* és *z* összetevői rendre éppen az „*e*", ill. az „*o*"-sugarak a lemezben. Amint a lemezen áthaladnak, az *o*-sugár az *e*-sugárhoz képest lemarad, és kilépéskor, az összetevők között 180°-os fáziskülönbség lesz. Emiatt a polarizáció irányát 90°-kal elforgatja, ahogyan a 40-12 ábrán látszik.

A 40-13 ábra az ún. $\lambda/4$-es lemezt mutatja, (ez a lemez a gyorsabban és lassabban haladó összetevők között 90°-os a fáziskülönbséget hoz létre). 90° fáziskülönbséggel találkozó elektromos térerősségkomponensek egymáshoz képest **cirkulárisan polarizált fényt** hoznak létre. Ha a fényforrás felé nézünk úgy, hogy a hullám felénk közeledik, akkor az **E** elektromos térerősségvektor $\omega = 2\pi f$ szögsebességgel forog (ahol *f* a fény frekvenciája). Attól függően, hogy melyik összetevő marad le a másik mögött, a forgás iránya az

40 évvel azelőtt történt, hogy a fényről kiderült volna: lényegében transzverzális elektromágneses hullám. Ekkor még a polarizációs effektusok rejtélyszámba mentek.

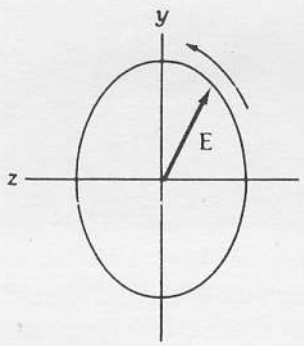
[4] Általában a kettősen törő anyagra eső fénysugár két, egymással szöget bezáró különböző irányú fénysugárra bomlik. Vannak azonban bizonyos irányok, amelyekben a két sugár együtt halad, de különböző sebességgel, ezek az optikai tengelyek. A hasábot úgy készítették, hogy ez az irány merőleges legyen a hasáb elölapjára és hátlapjára, ezáltal a két nyaláb ne váljék el egymástól a hasábon áthaladva.





(b) Ha a negatív x irányba nézünk, a közeledő hullám **E** vektora az óramutató járása szerint forog körbe.

40-13 ábra
A $\lambda/4$ lemez irányítása olyan, hogy $\mathbf{E}_y$ a „gyors" irányba mutat, $\mathbf{E}_z$ a „lassú" irányba. Ahogyan ez a két egymással egyenlő nagyságú összetevő kilép a $\lambda/4$ lemezből, az $\mathbf{E}_z$ rezgések az $\mathbf{E}_y$ rezgésekhez képest negyed hullámhosszal (90°-kal) késnek, ezáltal cirkulárisan poláros hullám jön létre.



40-14 ábra
Ha egy $\lambda/4$ lemezt a beeső hullám polarizációjának irányához képest tetszőleges irányba állítunk be, az elektromos térerősség komponensei *nem lesznek egyenlő nagyságúak,* (de 90° lesz a fáziskülönbségük) és így a kilépő hullám *elliptikusan polarizált* lesz.

óramutató járásával megegyező vagy *ellenkező,* s ez a cirkulárisan polarizált fény két lehetséges polarizációs állapotának felel meg.[5] Ha a polarizáció iránya nem a gyors és lassú fénykomponensek szögfelezőjébe esik, akkor a térerősség y és z komponense nem egyenlő, bár a fáziskülönbség közöttük még mindig 90°. Ebben az esetben **elliptikusan polarizált** fény jön létre (40-14 ábra). A $\lambda/2$-es és a $\lambda/4$-es lemez stb. gyűjtőneve: *fázistoló lemez.*[6]

40-3 PÉLDA

Mekkora annak a kalcitlemeznek a minimális vastagsága, amely a sárga λ =589,3 nm hullámhosszra nézve $\lambda/2$-es lemez. Az *o*- és az *e*-sugarak számára a törésmutatók rendre: n_o= 1,6584 és n_e=1,4864

MEGOLDÁS

Az *o*- és az *e*-sugaraknak a d vastagságú lemezen való áthaladásához szükséges t_o és t_e idők rendre: $t_o = d/v_o$ és $t_e = d/v_e$. A lemezben a terjedési sebesség rendre: $v_o = c/n_o$ és $v_e = c/n_e$. Ezért a $\Delta t = (t_o - t_e)$ időkülönbség így

[5] Ahogyan a 35. fejezetben már megtárgyaltuk, a fénynyaláb impulzust hordoz, ezért, ha elnyelő anyagba ütközik, annak impulzust ad át, arra erőt gyakorol. Kísérletileg igazolható, hogy ehhez az erőhöz még az is hozzájárul, hogy a cirkulárisan poláros fénynek impulzusnyomatéka is van, és ezáltal elnyelődése az abszorbensre forgatónyomatékot gyakorol. Érdekes, hogy a fény részecske-, vagy fotonmodelljében minden egyes foton cirkulárisan poláros és meghatározott impulzusnyomatékot hordoz, melynek nagysága $L = h/2\pi$, ahol h a Planck-féle állandó. Az impulzusnyomaték megmaradásának elve megkívánja, hogy az az atom, amelyik a fotont kibocsátja, maga is megváltoztassa ennyivel az impulzusnyomatékát, de természetesen a kibocsátott fotonéval ellentétes forgás értelmében. A síkban polarizált fény valójában olyan keverék, amelyben egyenlő arányban keverednek az óramutató járása szerinti és vele ellentétes cirkulárisan poláros fotonok.

[6] Amatőr kísérletezés céljaira elég jó fázistoló lemezek készíthetők egyes celofánszalagokból, vagy pedig az átlátszó ételcsomagoló műanyagfóliák megnyújtásával. Ezekkel a lemezekkel végezhető érdekes kísérletekről lásd a Scientific American 1977 évi decemberi számában az „Amateur Scientist" rovatot.

$$\Delta t = \frac{d}{c}(n_o - n_e) \qquad \textbf{(40-3)}$$

Hogy $\lambda/2$ lemezt készíthessünk, azt kell elérni, hogy az *e*-sugár (a levegőben) fél hullámhossznyival az *o*-sugár előtt lépjen ki a lemezből. Az ehhez szükséges idő:

$$\Delta t = \frac{(\lambda / 2)}{c} \qquad \textbf{(40-4)}$$

Ha a (40-3) és a (40-4) képleteket összevetjük, ebből $\lambda/2 = d(n_o - n_e)$ adódik. Ezt a d vastagságra megoldva és a számértékeket behelyettesítve adódik, hogy

$$d = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{n_o - n_e}\right) = \frac{(5{,}893\times10^{-7}\ \text{m})}{2(1{,}6584 - 1{,}4864)} = 1{,}713\times10^{-6}\ \text{m}$$

Vegyük észre, hogy az *o*- és az *e*-sugár közti fáziskülönbség $\frac{3}{2}\lambda$ értéke is $\lambda/2$ lemezt eredményezne. Ebben az esetben a kalcit-lemez háromszor olyan vastag lenne, vagyis $5{,}139\times10^{-6}$. Hasonlóképpen a $5\lambda/2$, $7\lambda/2$ lemezek is $\lambda/2$ lemezként viselkednének.

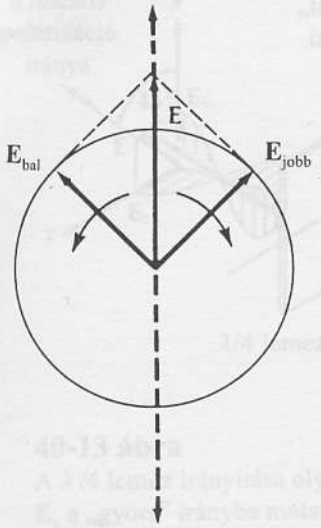
40.6 Az optikai aktivitás

Ahogyan bizonyos anyagok a két különböző, egymásra merőlegesen lineárisan polarizált fényt két különböző terjedési sebességgel bocsátják át, úgy bizonyos anyagok a különböző forgási irányú, *cirkulárisan* polarizált fényt engedik át két különböző sebességgel. Ahogyan majd megmutatjuk, ennek az az érdekes hatása van, hogy a *lineárisan* polarizált fény polarizációs iránya elfordul. Például, ha cukoroldatot helyezünk a polarizátor és az analizátor közé, akkor a cukoroldatban a fény polarizációjának iránya elfordul, ahogyan a 40-15 ábrán látható. Az ilyen anyagokat *optikailag aktívnak* nevezzük. Az elforgatás mértéke arányos az oldatban megtett úthosszal, de természetesen arányos az optikailag aktív anyag koncentrációjával is.

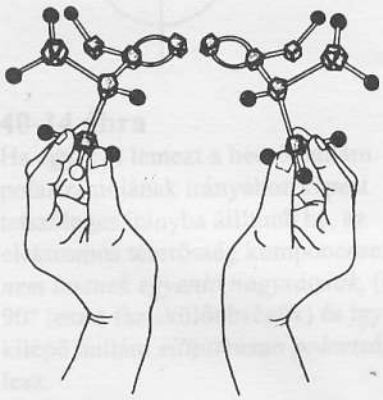
Az optikai forgatóképességet azzal magyarázhatjuk, hogy a lineárisan polarizált fény felfogható két, egymással szemben forgó cirkulárisan polarizált fény eredőjeként (lásd a 40-16 ábrát) és az optikailag aktív anyagokban az egyik cirkulárisan polarizált fény gyorsabban terjed, mint a másik. Ennek az lesz az eredménye, hogy a két forgó komponens állandóan változtatja a fázisát egymáshoz képest, így aztán az eredő vektor iránya helyről helyre változik. Ennek pedig az a következménye, hogy a lineárisan polarizált fény az anyagon való áthaladás során megváltoztatja polarizációs irányát.

Az irányváltozás lehet az óramutató járásával egyező, de lehet azzal ellentétes is, attól függően, hogy az anyag molekuláiban az atomok hogyan helyezkednek el. Például a cukor ugyanolyan kémiai összetétel mellett két különböző alakban létezik, az atomok elrendeződése az egyik fajta molekulában éppen tükörképe a másik fajta molekulában található elrendezésnek. Az ilyen párokat *sztereoizoméreknek* nevezzük (40-17 ábra).

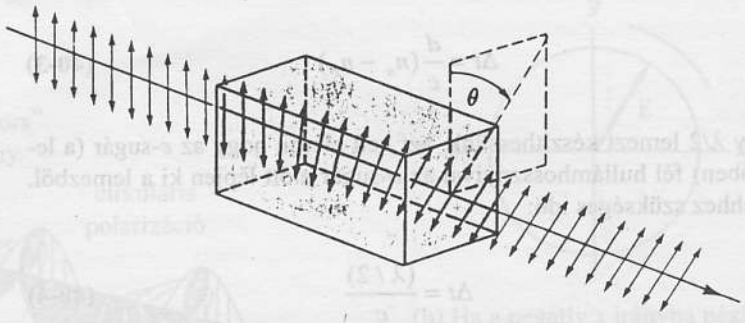
Az egyik molekulatípusban az atomok hosszú, az óramutató járását követő tekeredésű láncokban helyezkednek el, míg a másikban a láncok az óramutató járásával ellentétes irányban tekerednek. A *dextróz* nevű cukor (a latin *dexter* = jobb jelentésű szóból) a lineáris polarizáció irányát az óramutató járásával egyező irányban forgatja el, legalábbis így látja az a megfi-



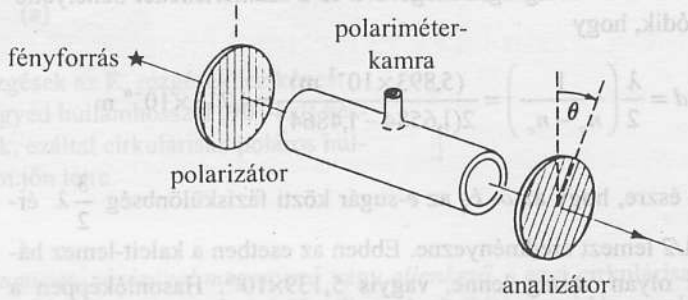
40-16 ábra
A papír síkjából kifelé terjedő lineárisan polarizált hullám. Az **E** elektromos térerősségvektor a szaggatott vonal mentén le- és felfelé rezeg. (Ez a vonal a polarizáció irányát jelképezi.) Az **E** vektort két cirkulárisan polarizált, $\mathbf{E}_{bal}$ és $\mathbf{E}_{jobb}$ összetevőből állíthatjuk elő, amelyek a mutatott irányban egymással szemben forognak. A forgó vektorok összege éppen kiadja a lineáris rezgést végző **E** vektort.



40-17 ábra
A *sztereoizométerek* olyan anyagok, amelyeknek a kémiai összetétele megegyezik, de atomjaik térbeli elhelyezkedése egymásnak tükörképe.



(a) Amikor a lineárisan polarizált fény optikailag aktív anyagon halad át, polarizációs síkja fokozatosan elfordul a haladás iránya, mint tengely körül.



(b) A *polariméter* azt a θ szöget méri, amennyivel a fény polarizációs síkja elfordul. Gyakran előfordul, hogy különböző hullámhosszúságú fénysugarak polarizációs síkját ugyanaz az anyag különböző mértékben forgatja el, ezáltal – amikor az analizátort elforgatjuk – színváltozást észlelhetünk. A mérés szabványosítása érdekében a méréskor csak meghatározott hullámhosszúságú fényt használnak.

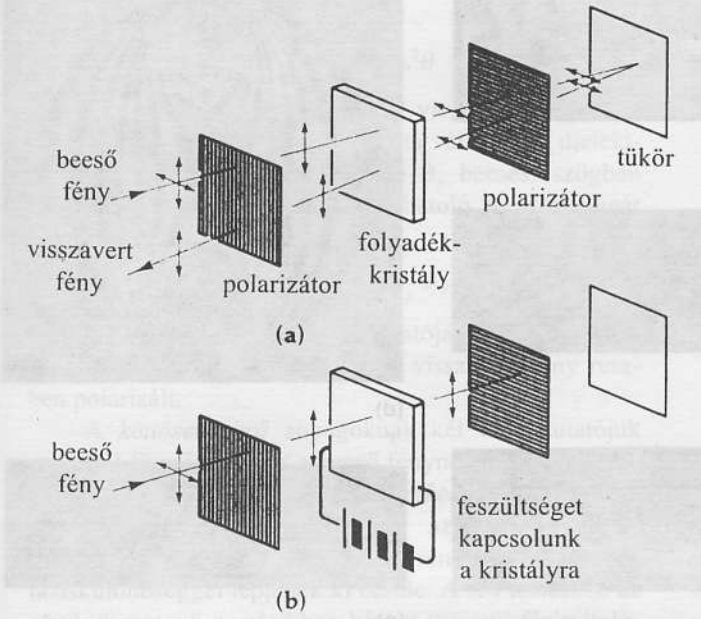
45-15 ábra
Az optikai aktivitást mutató anyagok a lineárisan polarizált fény polarizációs irányát elforgatják.

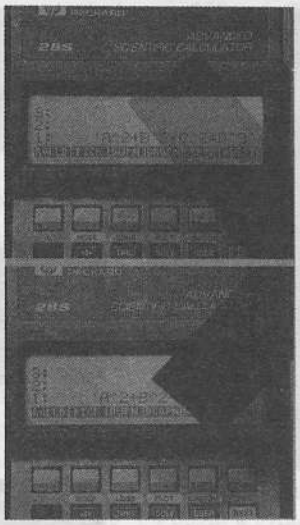
gyelő, aki felé a polarizált fény terjed. Az ilyen anyagokat *jobbra forgatóknak* nevezzük. A *levulóz* nevű cukor (a latin *laevus* = bal szóból) az óramutató járásával ellentétesen, vagyis *balra forgatja* el a fény polarizációs irányát[7]. A *szacchariméter* nevű berendezés az optikai forgatás alapján méri a kereskedelmi forgalomban kapható cukorszirupok cukorkoncentrációját, de alkalmazzák a borok esetében is, sőt a cukorbetegség diagnosztikájában is felhasználható az eljárás a vizelet cukortartalmának vizsgálatánál.

40.7 Interferenciaszínek és a feszültségoptika

Ha egy kettősen törő celofánlapot néhányszor – véletlenszerű irányokban – összehajtogatunk és két polárszűrő közé helyezünk, akkor az átmenő fény különböző élénk színben ragyogó tartományokat mutat. Ezek a színek azért

[7] Figyeljük, meg, hogy egy csavarvonalnak, függetlenül attól, hogy melyik irányban mozgunk a tengely mentén, ugyanaz a forgásiránya. Így nem számít, hogy a molekulák az oldatban hogyan vannak irányítva. Az optikai aktivitást könnyű megfigyelni vizes cukoroldatokban (répacukor -szacharóz- 10%-os oldata 13°/cm forgatóképességű) A terpentin az óramutató járásával ellentétes irányú –3,7°/cm elforgatást okoz. A folyadékkristályok olyan szerves vegyületek, amelyek folyékony állapotban is megőrzik a molekulák irányítottságát. A kristályok olyan spirális alakú molekulákból állnak, amelyek rendkívül nagy (akár 40.000°/mm) optikai forgatóképességűek.





(c) Egy Polaroid csík megmutatja a zsebszámológép kijelzőjén a visszaverődő fény polarizációs irányát.

40-18 ábra

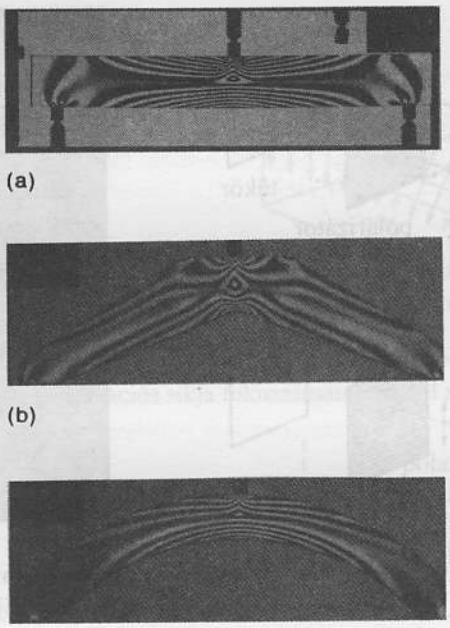
Folyadékkristály kijelzők. Az optikai aktivitás érdekes alkalmazásai a *folyadékkristály kijelzők* (Liquid Crystal Displays, LCD), amiket karórákban, hordozható számítógépek monitorain, benzinkutak mérőműszerein és zsebszámológépeken, stb... láthatunk. A folyadékkristály molekulái rendezettebbek, mint a folyadékoké, de mégsem annyira, mint a kristályoké. Tulajdonságaik érdekesek. Egyes folyadékkristályok a fény polarizációs síkját elforgatják, de ezt a képességüket kis elektromos térerősség hatására elveszítik. A 40-18a ábra keresztezett polarizátorok közé helyezett vékony, 90°-os elforgatást okozó folyadékkristálylemezt mutat. Az eszköz mögött tükör van. Amikor kívülről fény érkezik az eszközre, a folyadékkristályra eső fény polarizált síkja 90°-kal elfordul, visszaverődik, majd ismét 90°-kal elfordul, és áthalad az első polarizátoron. Az eszköz visszavert fényben világosnak látszik. Amikor viszont elektromos feszültséget adunk a kristályra, – 40-18b ábra – a fény polarizációs síkja nem fordul el, nem jut fény a tükörre, ezért az eszköz sötétnek hat. Ha az elektromos tér csak a kristály egyes zónáira hat, akkor a visszavert fény csak ezeken a területeken tűnik el. Az elektromos teret vákuumpárologtatással készült átlátszó elektródokkal hozzák létre. Az elektródok sűrűn elhelyezett sorokból és oszlopokból álló hálózatot alkotnak; így az igen kis méretű pontokból képeket lehet kialakítani. Az LCD-k igen kis elektromos teljesítményt igényelnek, mert a környező világítást használják fényforrásként.

jöttek létre, mert a különböző vastagságú celofánrétegek egyes részei pl. a vörös fény számára $\lambda/4$ lemezként viselkednek, míg mások esetleg a kék fényre alkotnak $\lambda/2$ lemezt, stb. Ennélfogva a celofán a ráeső fény polarizációs irányát a különböző színekre különbözőképpen forgatja el, s ennek megfelelően az analizátor egyes színeket átenged, másokat pedig nem. A kilépő fényből ezért a színkép bizonyos tartományai hiányoznak, ez okozza a szembetűnő színhatásokat. Ha a celofánt, vagy a két polarizátor-lemezt elforgatjuk, akkor a színek szép látványt nyújtva változnak.

Ennek a tetszetős esztétikai látványnak vannak azonban gyakorlati alkalmazási lehetőségei is. Mechanikai szerkezetek kicsinyített modelljeit elkészítik speciális átlátszó, ún. *fotoelasztikus* műanyagból. Amikor a modelleket polárszűrők közé helyezve terhelik – vagyis erők hatásának teszik ki –, akkor ez a műanyag a rá gyakorolt feszültségek nagyságának függvényében kettősen törővé válik. A kialakuló fényes és sötét (vagy színes) mintázat mintegy feltérképezi a modellben a feszültségeloszlást (lásd a 40-19 ábrát). Hasonló feszültségoptikai (feszültségi kettős törés miatt keletkező) eredetű színeket lehet megfigyelni, ha polárszűrő napszemüvegen keresztül nézzük a műanyag dobozokról, műanyag fejesvonalzóról és más átlátszó rajzeszközről visszavert fényt (pl. 40-20 ábra). Egyes műanyagokban nem túl erős a fe-



40-20 ábra
A polárszűrők közé tett műanyag vonalzó szivárványszínű mintázatot mutat. Amikor a görbe vonalzó készült, a benne maradt feszültségek miatt kettősen törővé vált.



40-19 ábra
A mechanikai szerkezetek modelljeit speciális feszültségoptikai műanyagokból készítik és keresztezett polárszűrők között vizsgálják. A modellek terhelés hatására kettősen törőkké válnak, s az átmenő fényben olyan mintázat válik láthatóvá, amely a feszültség-eloszlást mutatja a modellben.

szültség hatására létrejövő kettőstörés, előfordulhat, hogy az Olvasónak igencsak keresnie kell azt a műanyag eszközt, amellyel a jelenséget jól láthatóan megfigyelheti.

A polarizált fény számos más alkalmazásban is hasznos. Így például: az atomok a mágneses tér jelenlétében polarizált fényt bocsátanak ki (Zeeman-effektus), ezt a polarizációt pl. a napfoltok környékén a mágneses tér mérésére, vagy távolabbi csillagok mágneses terének mérésére használják. Ugyancsak a mágneses tér, adott esetben a Tejútrendszerünk távoli vidékein uralkodó mágneses tér okozza azt, hogy a csillagközi gáz és por hosszúkás szemcsei egymással párhuzamosan igyekeznek beállni. Amikor a csillagok fénye ezeken a por- és gázfelhőkön szóródik, akkor a csillagfény részlegesen polarizálttá válik. Így a polarizációs irányoknak a szórt csillagfényben megjelenő eloszlását elemezve információ nyerhető a távoli mágneses terekről. A kristályszerkezetekre, biológiai anyagmintákra és más anyagok természetére vonatkozóan is sok információhoz jutottak a polarizált fény elemzése során.

Összefoglalás

A transzverzális hullámok *lineárisan polarizáltak*, ha a hullámmal kapcsolatos rezgések egy, a térben rögzített iránnyal párhuzamosan mennek végbe. Az elektromágneses hullám polarizációjának irányát az *elektromos térerősség* vektorának irányával vesszük azonosnak. (Lásd a 296. oldal fordítói lábjegyzetét.)

Amikor egy (szabad) atom nagyobb energiájú állapotból kisebb energiájú állapotba megy át, akkor egy *hullámvonulatot* bocsát ki, ami a látható fény esetében kb. 1-3 méter hosszú, a terjedés irányában mérve. A *polarizálatlan* fény sok hullámvonulat eredője, amelyben az elektromos térerősségvektorok véletlenszerű eloszlást mutatnak a térbeli irányok szerint.

Egyes átlátszó anyagok, mint pl. a polaroid, szelektív módon nyelik el, abszorbeálják a különböző polarizációs irányú fénysugarakat (az egyiket jobban, mint a másikat) és így a rajtuk átmenő fény részben vagy egészben, lineárisan polarizálttá válik. Ha a beeső I_0 intenzitású *polarizált* fény polarizációs síkja az ideális polarizátor áteresztési (transzmissziós) irányával θ szö-

get zár be, akkor az átengedett I intenzitás (ami E^2-tel arányos):

MALUS TÖRVÉNYE: $I = I_0 \cos^2\theta$

A dielektrikumok felületéről visszaverődő polarizálatlan fény 100%-ban polarizálttá válik, ha a dielektrikum felületére a **Brewster-féle θ_p** beesési szögben esik, ekkor a visszavert és a behatoló megtört sugár egymásra merőlegesek:

A θ_p BREWSTER-SZÖG: $\operatorname{tg}\theta_p = n$,

ahol n a kérdéses anyag törésmutatója a környezetéhez viszonyítva. Más szögek esetén a visszavert fény részben polarizált.

A *kettősen törő* anyagoknak két törésmutatójuk van attól függően, hogy a beeső fénynek milyen a polarizációs iránya. A *fázistoló lemezeket* a kettősen törő anyagokból úgy készítik, hogy az (*o*) *ordinárius* (rendes) és az (*e*) *extraordinárius* (rendellenes) sugarak fáziskülönbséggel lépjenek ki belőle. A *$\lambda/4$ lemezben* az egyik összetevő a másikhoz képest 90°-nyi fáziseltolódást szenved. Ha a polarizált hullám *$\lambda/2$ lemezen* halad át, akkor az egyik összetevő a másikhoz képest 180°-nyi fáziskésést szenved. A *cirkulárisan polarizált* fény egyenlő amplitúdójú *o*- és *e*-komponensből tevődik össze, amelyek éppen 90°-nyi fáziskülönbséget mutatnak egymáshoz képest. Az *optikailag aktív* anyagokban (cukoroldat pl.) az eltérő cirkuláris polarizációjú fénysugarak különböző sebességgel terjednek, emiatt a beeső *lineárisan* polarizált fény polarizációs iránya elfordul.

A fehér fényből *interferenciaszínek* jönnek létre, ha a polarizáló lemezek (a *polarizátor* és az *analizátor)* közé különböző vastagságú kettősen törő rétegeket helyezünk. A színek azért jelennek meg, mert az anyag egyes rétegei, mondjuk, a kék színű fényre $\lambda/2$-es, más színű fényre pedig pl. negyedhullám-lemezként viselkednek és ennek megfelelően a polarizáció irányát a különböző hullámhosszakra másképpen változtatják meg. Ezáltal egyes hullámhosszak nem jutnak át az analizátoron és a spektrum egyes szakaszai az átmenő fényből hiányozni fognak. Ez vezet a színek keletkezéséhez.

Mechanikai szerkezetek statikai sajátságainak tanulmányozása elvégezhető *fotoelasztikus* (feszültségoptikai) anyagokból készített modelleken. Ha a modelleket polárszűrők közé helyezzük és terhelve őket mechanikai feszültségeket hozunk létre bennük, akkor az anyag kettősen törővé válik, s emiatt olyan ábra alakul ki, amely a modellben a feszültség eloszlására jellemző.

Kérdések

1. Lehet-e polarizálni longitudinális hullámokat, pl. a hanghullámokat? Ha igen, hogyan?
2. A polarizáció vagy az interferencia jelenségei szolgáltatják-e a meggyőzőbb bizonyítékokat a fény hullámtermészete mellett?
3. A fény hullámtermészetének milyen, az interferencia alapján nem vizsgálható sajátságára mutatnak rá a polarizációs jelenségek?
4. A gépkocsiban használt rádiótelefon antennája egyenes és függőleges helyzetű. Az ilyen antennából származó elektromágneses hullám függőlegesen vagy vízszintesen polarizált? Magyarázzuk meg a választ.
5. Egymáshoz közel elhelyezett függőleges fémhuzalok a függőleges polarizációjú mikrohullámok számára átlátszatlanok. Miért?
6. A fény nem hatol át a keresztezett polarizátorokon. De ha egy harmadik polarizátort teszünk a keresztezett polarizátorok közé, valamekkora fényintenzitás mégis átjut. Magyarázzuk meg ezt.
7. Hogyan lehetne felhasználni egy köteg polárszűrőt arra, hogy a polarizált fény polarizációs síkját elforgassuk?
8. A változtatható elnyelésű fényszűrő egyik formája két polárszűrőből áll, amelyeket úgy helyeznek egymásra, hogy transzmissziós (áteresztési) tengelyeiket egymáshoz képest el lehessen forgatni. Vajon a tengelynek kis elforgatása mikor eredményez nagyobb változást az áteresztett fényintenzitásban, akkor-e, amikor a transzmissziós tengelyek közel párhuzamosak, vagy közel merőlegesek (keresztezettek)? Esetleg egy másik, közbülső esetben?
9. Egy köteg véletlenszerűen orientált polárszűrő közül egyet kihúzunk. Ennek az az eredménye, hogy a kötegen átengedett fény intenzitása lecsökken. Hogyan történhet meg ez?
10. Az ideális polárszűrő a nempolarizált fénynek csak a felét engedi át. Hová lesz a másik fele?
11. Sok halász polárszűrő napszemüveget használ halászat közben. Miért?
12. Lehet-e polarizálni a fényt két átlátszó közeg közti határfelületen való visszaverődéssel, ha a fény a határfelületen át a nagyobb törésmutatójú közeg felé halad?
13. Hogyan határozhatnánk meg, hogy egy fénynyaláb polarizálatlan, síkban polarizált vagy cirkulárisan polarizált-e?
14. Bizonyos helyzetekben a fényképészek a fényképezőgép lencséjére polárszűrőt tesznek. Soroljunk fel néhányat ezek közül a helyzetek közül.
15. Síkban polarizált fénynyaláb két, ellenkező forgási irányú cirkulárisan polarizált nyaláb szuperpozíciójaként is előállítható. Mi lesz az eredménye annak, ha az egyik nyalábnak a másikhoz képest vett fázisát megváltoztatjuk?

16. Egy érdekes berendezés két polárszűrőből áll, amelyek mindegyikére $\lambda/4$ lemez van felerősítve. Az eszközön a fény áthalad, ha az egyik szűrőt a másikra helyezzük, ha azonban a szűrők sorrendjét megváltoztatjuk, akkor nem. Mi lehet a lemezpár készítésének titka és miért viselkednek így?
17. Kialakulhat-e interferenciakép, ha kétréses interferenciaberendezés egyik rését a résre merőleges tengelyű polárszűrővel, míg a másik rést vele párhuzamos tengelyű polárszűrővel fedjük be? Magyarázzuk meg a választ.
18. Mechanikai szerkezetek fotoelasztikus modelljeit polárszűrők közé helyezve színes sávokat látunk, amelyekből a szerkezetben ébredő feszültségekre következtethetünk, (lásd 40-16 ábrát). A sávok közti távolságokat hogyan lehet értelmezni?

Feladatok

40.2 A polárszűrő

40A-1 Polarizálatlan fény halad át két (ideális) polarizáló lemezen. Adjuk meg, hogy a beeső fény intenzitásának mekkora hányadát nyelik el a lemezek, ha transzmissziós áteresztési tengelyeik szöge 60°?

40A-2 Két ideális polárszűrő lemez úgy van egymásra helyezve, hogy a transzmissziós tengelyeik közötti szög θ. Adjuk meg a lemezek közötti szöget úgy, hogy a beeső polarizálatlan fény intenzitásának 45%-a átjusson.

40B-3 Két polárszűrőt keresztezett állásban helyeztünk egymásra, a szűrők nem eresztenek át fényt. Egy harmadik polárszűrő lemezt teszünk közéjük, melynek transzmissziós tengelye az előbbiek mindegyikének tengelyével 45°-os szöget zár be. Adjuk meg, hogy a beeső fény intenzitásának hányadrészét ereszti át a három szűrő együttese (feltéve, hogy mindhárom lemez ideális polarizátor)!

40B-4 Polarizálatlan fény esik három, egymás mögé helyezett ideális polárszűrő lemezre. A második lemez transzmissziós tengelyét az elsőéhez, a harmadikét a másodikéhoz képest 30°-kal elfordítjuk. Számítsuk ki, hogy a beeső fény intenzitásának hányadrészét engedi át az együttes?

40.3. Polarizáció fény visszaverődésekor és szóródásakor

40A-5 Üveglemezre polarizálatlan fénynyaláb esik 58°-os szögben. Adjuk meg az üvegben megtört sugár irányának szögét.

40A-6 Egy adott hullámhosszra az üvegminta törésmutatója 1,50. Számítsuk ki a θ_p Brewster-szöget erre a törésmutatóra. Általában nő vagy csökken a Brewster-szög, amikor a beeső fény hullámhossza nő?

40A-7 Üveglemez Brewster-szöge 57°, ha a lemez a levegőben van. Számítsuk ki a lemez Brewster-szögét, ha vízbe helyezzük ($n = 1{,}33$).

40A-8 Egy polarizálatlan fénynyaláb visszaverődik a víz felszínén és 53° visszaverődési szög mellett síkban polarizálttá válik. (a) Számítsuk ki a víz törésmutatóját. (b) Mutassuk meg, hogy az a szög, amit a visszavert nyaláb iránya a felület normálisával bezár, az 53° pótszöge.

40B-9 Dielektrikum teljes visszaverődésének kritikus szöge θ_c. Adjuk meg a θ_p Brewster-szöget θ_c függvényében!

40B-10 Vezessük le a visszaverődési polarizáció Brewster-törvényét, a (40-2) képletet.

40.4 A kettős törés
40.5 A fázistoló lemezek és a cirkuláris polarizáció
40.6 Az optikai aktivitás

40B-11 A kvarc kettősen törő anyag, az 589 nm hullámhosszú fényre a törésmutatója 1,553, ill. 1,544. Adjuk meg annak a kvarcrétegnek a minimális vastagságát, amely az adott hullámhosszon $\lambda/4$ lemezként viselkedik.

40B-12 Cirkulárisan poláros fénynyaláb polarizáló lemezre esik. Miért nem függ a kilépő fény intenzitása a polarizátor tengelyének irányától?

40B-13 (a) Mutassuk meg, hogy ha cirkulárisan polarizált fénynyaláb $\lambda/4$ lemezre esik, akkor a kilépő fény síkban polarizált lesz. (b) Mutassuk meg, hogy ha a cirkulárisan polarizált fény forgási iránya megfordul, akkor a kilépő fény polarizációs síkja 90°-kal változik!

40B-14 Kvarcból (n_e=1,544, n_o=1,553) készült fázistoló lemez úgy van kivágva, hogy optikai tengelye a lemez síkjában fekszik. Számítsuk ki, hogy legalább mekkora legyen a lemez vastagsága, hogy az 500 nm-es fényhullám számára λ lemezként, a 600 nm-es hullámhosszra pedig $\lambda/2$ lemezként viselkedjék.

40B-15 Egy köbcentiméter vízben oldott egy gramm szacharóz koncentráció a lineárisan polározott hullám síkját 66,8°-kal forgatja el 10 cm úthosszon! Egy ismeretlen szacharóz-oldat a 35 cm hosszú szachariméterben 16°-nyi forgatást okoz. Adjuk meg az ismeretlen oldat koncentrációját.

40B-16 Egy $\lambda/2$ lemezt két polárszűrő közé helyezünk, a szűrők polarizációs irányai párhuzamosak. A $\lambda/4$ lemez és az első polárszűrő helyzete a 40-11 ábrán látható. (a) Magyarázzuk meg, miért *nem* halad át a fény a berendezésen! (b) Ha – ezzel szemben – a két polárszűrő keresztezett állású (áteresztési tengelyeik merőlegesek), akkor a berndezés a fényt gyengítetlenül átengedi. Miért? (c) Magyarázzuk meg kvalitatív módon, hogy az (a) feladatrészben milyen fény lép ki a berendezésből, ha a $\lambda/2$ lemezt lassan 360°-kal elforgatjuk!

Vegyes feladatok

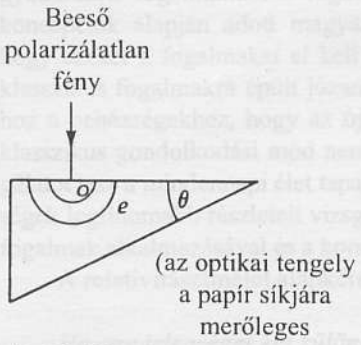
40C-17 Változtatható áteresztésű fényszűrő két polárszűrő lemezből készül, az egyik lemezt a másikhoz képest el lehet forgatni. Határozzuk meg a transzmissziós tengelyek közti szöget úgy, hogy a további $d\theta$ szögelfordulás az átengedett fény dI intenzitásváltozásával a lehető legnagyobb dI/I_0 relatív intenzitásváltozást eredményezze.

40C-18 Két ideális polárszűrő lemezt egymásra helyezünk transzmissziós tengelyeikkel egymásra merőlegesen. Egy hamadik lemezt is elhelyezünk közéjük úgy, hogy transzmissziós tengelye θ szöget zárjon be annak a lemeznek a tengelyével, amelyik a beeső polarizálatlan fénynyalábhoz közelebb van. Adjuk meg az I/I_0 relatív intenzitást (I_0 a beeső fényintenzitás) a θ szög függvényében.

40C-19 Egy köteg polárszűrő lemez a beeső lineárisan polarizált fény polarizációs irányát elfordítja. Az egymást követő lemezek polarizációs tengelye rendre θ szöggel van elfordítva az előzőhöz képest (a kívánt irányban). Ha 10 ideális szűrőt használunk 90°-os elforgatás létrehozásához, akkor a beeső I_0 intenzításnak mekkora az a maximális hányada, amely a tizedik lemezen át fog haladni.

40C-20 Lineárisan polarizált, és polarizálatlan fény keveréke ideális polárszűrőn halad át. Amikor a lemezt elforgatjuk, az áteresztett fény intenzitása egy maximális értékről az egyharmad akkora értékre változik. Számítsuk ki, hogy a beeső keverék intenzitásának hányadrésze a lineárisan polarizált fényé.

40C-21 A 40-8b ábra mutatja, hogy a rendellenes sugár nem követi Snellius fénytörési törvényét. Huygens-elvének felhasználásával, – a Huygens-féle elemi hullámokat felvázolva a kalcitban – mutassuk meg, hogy az ábrán bemutatott fénytörés lehetséges.



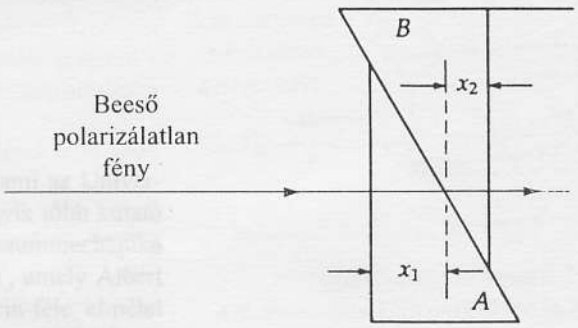
40-21 ábra
A 40C-22 feladathoz

40C-22 A 40-21 ábrán kalcitprizma látható oldalnézetből, amelynek optikai tengelye merőleges a papír síkjára. A prizma felső lapjára merőlegesen sárga nátriumfény (λ=589 nm) esik. Erre a hullámhosszra a törésmutatók: n_o=1,638, n_e=1,486. (a) Adjuk meg a prizma minimális θ törőszögét, amelynél a rendes sugár teljes visszaverődést szenved. (b) Mutassuk meg, hogy a rendellenes sugár a ferde lapról lép ki, így 100%-ban lineárisan polarizált lesz. (c) Adjuk meg a kilépő rendellenes sugár irányát a kilépés után!

40C-23 A Babinet-kompenzátorban két, egymáson elcsúsztatható kvarcék (A és B) van, ahogyan a 40-22 ábra mutatja. Az A ék optikai tengelye a papír síkjában függőleges irányú, míg a B éké a papír síkjára merőleges. Így a rendellenes sugár (melyre a törésmutató n_2) az A ékben átmegy a B ék rendes sugarába (melynek n_1 a törésmutatója) és megfordítva. Amikor a B éket az A éken elcsúsztatjuk, az x_1 és az x_2 utak közti különbséget változtatjuk. Mutassuk meg, hogy a két kilépő sugár közti $\Delta\phi$ fáziskülönbség

$$\Delta\Phi = ((2\pi)/\lambda)(n_2-n_1)(x_1-x_2)$$

szerint változik.



40-22 ábra
A 40C-23 feladathoz

40C-24 Vékony kettősen törő hasábra λ hullámhosszúságú polarizálatlan fény esik. A hasáb vastagsága b, és a törésmutató n_o és n_e a rendes és a rendellenes sugarakra. A megadott paraméterek felhasználásával határozzuk meg a hasábból kilépő két sugár közti ϕ fáziskülönbséget.

40C-25 A 40-3 példában leírt $\lambda/2$ lemez minimális vastagsága túl kicsi ahhoz, hogy gyakorlatilag használható lehessen. Határozzunk meg a 0,1 mm környékén olyan vastagság értéket, ami ugyanazt a hatást váltja ki, mint a minimális vastagság.

40C-26 Egy 0,610 mm vastagságú kvarclemez úgy van kivágva, hogy optikai tengelye a lemez síkjában fekszik. A lemezre eső polarizált fénynek a polarizációs iránya a lemez optikai tengelyével 45°-os szöget zár be. Számítsuk ki azokat a hullámhosszakat 600 nm és 700 nm között, amelyeknél a kilépő fény lineárisan polarizált lesz. (Tegyük fel, hogy n_e=1,544 és n_o=1,553 minden hullámhosszra.)

40C-27 Mutassuk meg, hogy optikailag aktív közegen áthaladó polarizált fény síkjának elfordulása pontosan fele akkora, mint a jobbra és a balra cirkulárisan polarizált komponensek közötti fáziskülönbség.

40C-28 Ahogyan a 40-16 ábrán látszik, a lineárisan polarizált fény felfogható két egymással ellentétes irányban forgó cirkulárisan polarizált összetevő eredőjeként. Az optikailag aktív közegekben a cirkulárisan polarizált hullámok két különböző, v_L és v_R sebességgel terjednek. Következésképpen ilyen anyagból készült hasábra beeső lineárisan polarizált fény polarizációs síkja kilépéskor θ szöggel elfordul. Adjuk meg ezt a szöget a hasáb d vastagsága, az n_L és n_R törésmutatók, valamint a λ hullámhossz függvényében.

40C-29 Cukorszirupot vízzel háromszoros térfogatára hígítottunk fel. Ez az oldat a 20 cm úthosszon átbocsátott fény lineáris polarizáció síkját 59°-kal forgatta el. Adjuk meg, hogy mennyi lenne az elfordulás 10 cm-es úthosszon a nem hígított szirupban.

40C-30 Milyen az a folyadékkristályos kijelző (40-18 ábra), amelyben a polárszűrők tengelyei párhuzamosak egymással?

38B-19 a) zöld b) piros
38B-21 99,6 nm
38B-23 113
38B-25 1,31
38B-27 18,7 cm
38C-29 A válasz adott.
38C-31 A válasz adott.
38C-33 A válasz adott.
38C-35 A válasz adott.
38C-37 A válasz adott.
38C-39 a) $0{,}155\lambda/d$ b) $0.500\lambda/d$
38C-41 543 nm
38C-43 A válasz adott.
38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

39A-1 0,396 mm
39B-3 18,0 mm
39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
39B-7 0,684
39B-9 a) 120 b) 60
39A-11 11,5 km
39A-13 15,4
39B-15 420 m
39B-17 $1{,}07 \times 10^{-5}$ m b) $1{,}97 \times 10^{-5}$ m
39A-19 36,9°
39A-21 $7{,}16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
39B-23 688 nm
39B-25 $1{,}375 \times 10^{-3}$ fok
39A-27 0,300 nm
39A-29 A válasz adott.
39B-31 17,0
39C-33 0,1233 rad
39C-35 lásd 2. lábj.
39C-37 A válasz adott.
39C-39 A válasz adott.
39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

40A-1 $\frac{7}{8}$
40B-3 $\frac{1}{8}$
40A-5 32,0°
40A-7 49,2°
40B-9 $\text{tg}\,\theta_p = 1/\sin\theta_c$
40B-11 16,4 μm
40B-13 A válasz adott.
40B-15 68,4 mg/cm^3
40C-17 0° és 90°
40C-19 78,1%
40C-21 A válasz adott.
40C-23 A válasz adott.
40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
40C-27 A válasz adott.
40C-29 118°

XLI. Fejezet

41B-1 1,5 cm/s
41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
41A-5 a) $1 - \beta \approx 2{,}35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
41B-7 $22{,}5m/c$ vagy $\frac{7}{5} \times 10^{-8}$ s
41B-9 6,17 ns
41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c d) 36 m e) 45 m/c
41A-13 0,946c és –0,385c
41A-15 $v_x = 0{,}994c$
41B-17 1,78
41A-19 $v = 0{,}866c$
41A-21 889 kg
41B-23 $4{,}28 \times 10^9$ kg/s
41B-25 A válasz adott.
41B-27 A válasz adott.
41B-29 A válasz adott.
41B-31 A válasz adott.
41B-33 a) 270 m/c vagy $9{,}00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
41B-35 b) 80 m/c
41C-37 a) 1,33c·s b) 3,00 s
41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
41C-41 A válasz adott.
41C-43 A válasz adott.
41C-45 $5{,}55 \times 10^{-17}$ s
41C-47 $V = v\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\right)$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24}E_o/c$ c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
41C-51 A válasz adott.
41C-53 A válasz adott.
41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

42A-1 1,51 cm^2
42B-3 0,646%
42A-5 9660 nm
42A-7 5222 K
42A-9 $2{,}43 \times 10^{-12}$ m
42A-11 A válasz adott.
42B-13 $3{,}54 \times 10^6$ m
42A-15 451 nm
42B-17 a) $3{,}56 \times 10^5$ m/s b) 432 nm
42A-19 4,85 pm

A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET

Az igazi bajt Einstein okozta. 1905-ben bejelentette, hogy semmi sem lehet abszolút nyugalomban. Nos azóta nincs is.

STEPHEN LEACOCK

Newton, bocsáss meg nekem!

ALBERT EINSTEIN

41.1 Bevezetés

A fizikában a 20. század elején két forradalom is végbement, ami az Univerzumról alkotott fogalmainkat gyökeresen megváltoztatta. Az egyik több kutató sok évtizedre nyúló munkájának az eredménye volt, ez a kvantummechanika kialakulása. A másik a speciális relativitáselmélet megszületése[1], amely Albert Einstein 1905-ben közzé tett cikkétől számítható. Az Einstein-féle elmélet nemcsak látszólagos paradoxonokhoz vezetett, amelyekről úgy tűnik, hogy súlyosan ütköznek a józan ésszel, hanem a térrel és az idővel kapcsolatos alapvető fogalmainkat változtatta meg. Mai ismereteink szerint vitán felül áll, hogy mégis a speciális relativitáselmélet írja le azt, hogy milyen a világ.

A speciális relativitás megértési nehézségei nem matematikai természetűek. Sokkal inkább arról van szó, hogy a térről és az időről alkotott, mélyen begyökerezett fogalmainkhoz ragaszkodunk. A fizikai jelenségekre a newtoni koncepciók alapján adott magyarázatokkal nőttünk fel és zavar bennünket, hogy ezeket a fogalmakat el kell hagyni. Továbbá: a nyelvi fordulataink is a klasszikus fogalmakra épült józan észjárást tükrözik, és ez is hozzájárul azokhoz a nehézségekhez, hogy az új összefüggéseket átlássuk. Természetesen, a klasszikus gondolkodási mód nem lehet teljesen rossz, hiszen csodálatos szolgálatot tesz a mindennapi élet tapasztalatainak leírásában. De a természeti jelenségek legfinomabb részleteit vizsgáló kutatóknak fel kell hagyniuk a klasszikus fogalmak alkalmazásával és a korszerű elmélethez kell fordulniuk.

A relativitáselmélet alapkérdése a következő:

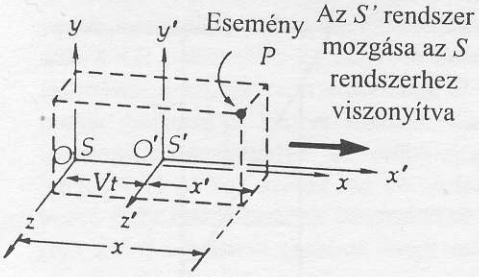
Ha egy jelenséget két különböző vonatkoztatási rendszerben vizsgálunk, amelyek egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek, akkor hogyan kell a két rendszerben végzett mérések eredményeit összehasonlítani?

[1] A speciális relativitáselmélet olyan vonatkoztatási rendszerekkel foglalkozik, amelyek egymáshoz képest egyenesvonalú állandó sebességű mozgást végeznek. Az általános relativitáselmélet, amit Einstein 1916-ban publikált, már gyorsuló vonatkoztatási rendszerekkel is foglalkozik. (lásd a 41. 16 pontot).

Einstein arra mutat rá, hogy a mérés végrehajtásában mindig arról van szó, *hol* és *mikor* történik valami a *térben* és az *időben*. Ezért a tér adott pontjában és adott időpontban végbemenő eseményre vonatkozóan négy mennyiséget keresünk:

Egy pontszerű esemény (x, y, z, t)

Ezt az (x, y, z, t) koordináta-négyest egy S-sel jelölt inerciarendszerben mérjük, melyről feltételezzük, hogy nyugalomban van. Egy másik S' vonatkoztatási rendszer, az előbbi S-rendszerhez képest állandó V sebességgel mozog a $+x$ irányban. Az egyszerűség kedvéért a két vonatkoztatási rendszert úgy választottuk, hogy a $t = 0$ időpontban az origóik és a tengelyeik egybeessenek (lásd a 41-1 ábrát). Az S-ben végrehajtott mérések jelölésére vesszőtlen, míg az S'-ben végrehajtottak jelölésére vesszővel (') ellátott betűket használunk. Mindkét vonatkoztatási rendszer használata egyformán jogos és érvényes, bármelyikükben végzett mérések korrekt módon tükrözik a tér- és az időviszonyokat az adott vonatkoztatási rendszerben. Mindkét vonatkoztatási rendszer *inerciarendszer*, nem gyorsul egyikük sem. A relativitás elve szerint a vonatkoztatási rendszereknek csak a *relatív* sebessége fontos, nem pedig az, hogy melyik rendszert tekintjük nyugalomban lévőnek. Ugyanolyan jól el lehet képzelni, hogy nem az S, hanem az S' rendszer van nyugalomban. Ekkor az S' rendszerhez képest az S rendszer mozog $-V$ sebességgel (a negatív x' tengely irányában). Bármelyik inerciarendszert tekintjük is nyugvónak, a relativitáselmélet alapvető következtetései pontosan ugyanazok.



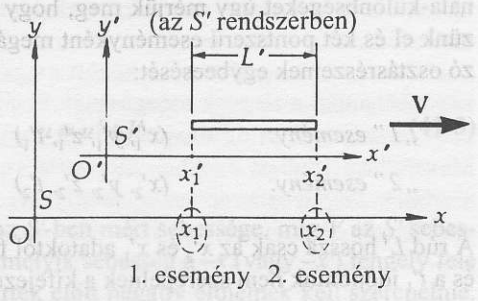
41-1 ábra
Az S és az S' koordinátarendszer. Az S' az S x-tengelye mentén $+V$ sebességgel mozog. A koordinátarendszerek a $t = t' = 0$ időpontban egybeestek: közös volt az origójuk. Későbbi t időpontban az O és az O' origók Vt távolságra vannak egymástól akkor, amikor a P esemény bekövetkezett.

Hogyan kell a méréseket elvégezni?

Alapvetően minden mérés pontszerű és pillanatszerű események négy adatának, az (x, y, z, t) koordináta-négyeseknek a meghatározására vezethető vissza. Einstein szerint gondolatban az egész vonatkoztatási rendszerre méterrúd-hálózatot kell fektetni, amelynek minden pontján egy „megfigyelő" helyezkedik el. Mindegyik megfigyelőnek saját, a rendszer többi órájával szinkronizált órája van. *Minden eseményt annak a helyi (lokális) megfigyelőnek kell észlelnie, aki ott helyezkedik el, ahol az esemény végbemegy.* Az esemény (x, y, z) térbeli koordinátáit a szomszédos méterrúdhálózati elemekkel való összehasonlítással lehet meghatározni, míg a t idő a helyi megfigyelő óráján olvasható le. Minthogy minden mérés lokális esemény, ezért szóba sem jön, hogy egy távoli eseménytől a megfigyelőig eljutó jel terjedési idejét figyelembe kellene venni. A relativitási elv következményei azonban még akkor is ugyanazok lennének, ha ilyen eseteket megengednénk.

41.2 A Galilei-transzformáció

A klasszikus szemlélet szerint feltesszük, hogy a térbeli távolságok és az időintervallumok mérése minden inerciarendszerben ugyanarra az eredményre vezet. Valójában ez az az alapfeltevés, amelyen a newtoni mechanika alapul. Ez a 'józan ésszel' összhangban van. A newtoni mechanika minden inerciarendszerben kielégítő mértékben érvényes (ezt bárki, aki utazott már simán mozgó repülőgépen, tanúsíthatja is). Másképpen fogalmazva, nincs mechanikai hatás, amellyel az S-ben, ill. S'-ben lévő megfigyelők el tudnák dönteni, melyik vonatkoztatási rendszer van „igazán nyugalomban", melyik „mozog igazán". Ezt a tényt fogalmazza meg **Galilei relativitási elve**: *Newton mechanikájának törvényei minden inercia-rendszerben ugyanolyanok.*



41-2 ábra
Az S vonatkoztatási rendszerben az a két esemény, amely meghatározza a mozgó rúd két végpontjának a helyzetét (x_1-ben, ill. x_2-ben), egyidejűleg bekövetkező események.

Ha ezek a feltevések igazak, akkor hogyan lehet egy eseménynek az S rendszerben és az S' rendszerben mért adatai között kapcsolatot teremteni[2]? A 41-1 ábrán ábrázolt P eseményre, egyszerű geometriai megfontolások alapján meg lehet határozni a két adategyüttes közti kapcsolatot. Ezeket a kapcsolatokat **Galilei-transzformációnak** nevezzük.

A GALILEI - TRANSZFORMÁCIÓ

$$x = x' + Vt' \qquad x' = x - Vt$$

$$y = y' \qquad y' = y \qquad \textbf{(41-1)}$$

$$z = z' \qquad z' = z$$

$$t = t' \qquad t' = t$$

A transzformációsképletek körülbelül olyan szolgálatot teljesítenek, mint az idegen nyelv szótára, ezek fordítják le az eseménynek az egyik rendszerben megmért (x', z', z', t') adatait ugyanazon eseménynek a másik rendszerben megmért (x, y, z, t) adataira, és megfordítva. Vegyük észre, hogy a bal oldali képletsorban vesszős mennyiségek csak az egyenlőségjel jobb oldalán, a jobb oldali képletsorban pedig csak az egyenlőségjel bal oldalán szerepelnek. Ezek a transzformációs képletek sokat tartalmaznak a térről és időről alkotott alapfeltevéseinkből. Így például az a tény, hogy a $t = t'$ egyenlőséget felírjuk, azt vonja maga után, hogy minden inerciarendszerre univerzális (vagy abszolút) időskála van érvényben. Hasonlóképpen a képletekből az is következik, hogy az a tér, amelyben az események végbemennek, ugyanaz mindkét vonatkoztatási rendszer számára. Az x-koordináták képletében megjelenő eltérés világosan mutatja, hogy ennek eredete a vonatkoztatási rendszerek relatív (viszonylagos) mozgásában van, és nem következik belőle az, hogy maga a tér lenne különböző a két vonatkoztatási rendszer számára. Ezek a klasszikus elgondolások a térről és az időről szorosan összefüggenek, és annyira a tapasztalatban gyökereznek, hogy lehetetlennek látszik azt képzelni, hogy nem lennének helyesek. Valóban, a filozófusok két évszázadon át vita nélkül elfogadták őket. Annál inkább figyelemre méltó az a forradalmi változás, amit Einstein okozott, amikor relativitáselméletében megmutatta, hogy a klasszikus elgondolások nem helyesek.

A transzformációs képletek használatának bemutatása érdekében vizsgáljunk egy rudat az S' rendszerben és határozzuk meg a hosszát mind az S', mind az S rendszerben![3] A rúd feküdjék az x'-tengely mentén, ahogyan a 41-2

---

[2] Vegyük észre, hogy *az események a térben és az időben történnek,* nem pedig egyik, vagy másik vonatkoztatási rendszerben. *Bármely* vonatkoztatási rendszer felhasználható arra, hogy – erre a rendszerre vonatkoztatva – meghatározzuk az esemény négy adatát.

[3] Amikor a relativitásról olvasunk, lényeges mindenkor észben tartani, hogy melyik vonatkoztatási rendszert használjuk. A vesszőknek rendkívüli fontosságuk van!

ábrán látszik. A rúd hosszát $L' = x'_2 - x'_1$ alakban definiáljuk. Minthogy a rúd végpontjainak helye időben nem változik, szokásos módon ezeket a koordináta-különbségeket úgy mérjük meg, hogy a rúd mellé mérővonalzót helyezünk el és két pontszerű eseményként megállapítjuk a végpontok és a vonalzó osztásrészeinek egybeesését:

„1" esemény: (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)

„2" esemény: (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)

A rúd L' hossza csak az x'_2 és x'_1 adatoktól függ. Figyelemre méltó, hogy a t'_2 és a t'_1 időpontok nem szerepelnek a kifejezésben.

Az S rendszerben azonban a rúd mozog. Vizsgáljuk meg az $x'_2 - x'_1$ mennyiséget az S-ben mért adatok segítségével kifejezve. A Galilei-transzformáció (41-1) képleteit alkalmazva adódik:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - Vt_2) - (x_1 - Vt_1)$$

vagy a jobb oldali kifejezés átrendezésével

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1) \qquad \textbf{(41-2)}$$

Itt az $(x_2 - x_1)$ mennyiség a rúdnak az S rendszerben mért hossza. Nyilvánvalóan nem volna sok értelme annak, hogy a rúd egyik végének helyét a t_1 időpontban határozzuk meg, a másik végéét pedig a t_2 időpontban, a rúd elmozdulása után. Ezért az S-rendszerben elfogadjuk a végpontok egyidejű helymeghatározásának eljárását, amikor is $t_2 = t_1$. Ennélfogva (41-2)-ből adódik, hogy

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$$

vagy

$$L' = L$$

Mozgó tárgy végpontjait egyidejűleg kell összevetni a mérőrúddal, ezért az S-ben mért hosszúságok (ahol a tárgyak mozognak) megfelelnek az S'-ben mért hosszúságoknak, (ahol a tárgyak nyugalomban vannak). A Galilei-féle relativitás szerint ezek a hosszmérések ugyanazt az eredményt szolgáltatják. Einstein arra mutatott rá, hogy ez a következtetés helytelen.

Sebességösszeadás a Galilei-féle relativitás szerint

Tegyük fel, hogy abban a $t = t' = 0$ időpontban, amikor az S és az S' vonatkoztatási rendszerek egybeesnek, egy részecske halad át az origón, és a $+x$ (ill. $+x'$) tengely mentén állandó u' sebességgel mozog tovább (az S'-ben mérve). A sebességösszeadás képletét megkaphatjuk, ha a következő két eseményt tekintjük:

		S-ben	*S'-ben*
ELSŐ ESEMÉNY	*Részecske az origóban*	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
MÁSODIK ESEMÉNY	*Részecske az origón túl*	$(x,0,0,t)$	$(x', 0,0,t')$

Az S' rendszerben a t' idő alatt a részecske x' utat tesz meg állandó u' sebességgel, így $u' = x'/t'$. Az S' rendszer azonban maga is mozog az S rendszerhez viszonyítva a $+x$ irányban állandó V sebességgel. Ez a mozgás adja azt a második sebességet, amit a részecske első u' sebességéhez hozzá kell adnunk, hogy megkapjuk a részecske S-ben mért u sebességét. Az S-ben a részecske sebessége $u = x/t$. Felhasználjuk a Galilei-transzformációt, hogy kifejezzük ezt a sebességet a vesszős mérési adatokkal:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + Vt'}{t'} = \frac{x'}{t'} + V$$

De mert $x'/t' = u'$, adódik

GALILEI FÉLE SEBESSÉG-ÖSSZEADÁS ($\pm x$ tengelymenti sebességekre)

$$u = u' + V \qquad \textbf{(41-3)}$$

Itt u a részecskének az S-ben, u' az S'-ben mért sebessége, míg V az S' sebessége az S-hez viszonyítva. Ha bármelyik sebesség a $-x$ (vagy $-x'$) tengely felé irányul, akkor a megfelelő számérték előtt negatív előjelnek kell szerepelnie. Ez ugyanaz az összefüggés, mint amit a 9.4 pontban már levezettünk.

41-1 PÉLDA

Egy gyerek a mozgó vonat folyosóján 2 m/s sebességgel labdát gurít a vonat eleje felé. a) Mekkora a labda sebessége a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve, ha a vonat egyenes pályán állandó 5 km/s sebességgel halad? b) Mekorra a labda sebessége a talajhoz rögzített rendszerben, ha a gyerek a labdát a vonat vége felé gurítja?

MEGOLDÁS

a) A vonatot választjuk S' vonatkoztatási rendszernek, a talajt S rendszernek, a $+x$, ill, $+x'$ tengelyek a vonat haladási irányába esnek. Az S'-ben a labda sebessége $u' = 2$ m/s. Így

$$u = u' + V = 2\,\text{m/s} + 5\,\text{m/s} = 7\,\text{m/s}$$

b) Ebben az esetben $u' = -2$ m/s, így

$$u = u' + V = -2\,\text{m/s} + 5\,\text{m/s} = 3\,\text{m/s}$$

A számérték pozitív, így a labda sebessége a $+x$ irányába mutat.

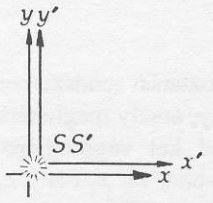
A gyorsulások transzformációs képleteinek meghatározásához a (41-3) összefüggést differenciálni kell az idő szerint:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

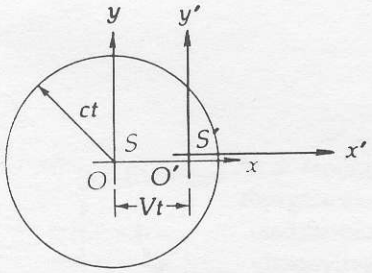
Minthogy V állandó, adódik, hogy

$$a = a' \qquad \textbf{(41-4)}$$

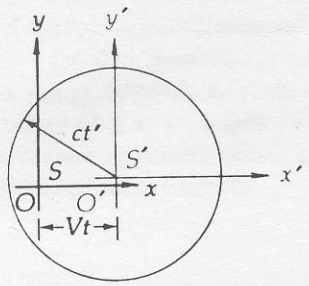
Így a részecske gyorsulása minden inerciarendszerben (melyek egymáshoz képest mozoghatnak is) ugyanaz az érték. A klasszikus fizikában a részecske m tömegét nem befolyásolja a mozgás, így $ma = ma'$, s ez a $\Sigma F = ma$ összefüggéshez vezet. A newtoni fizika további kijelentései tehát mind S-ben, mind S'-ben, azaz minden inerciarendszerben érvényesek lesznek. Ahogyan azt már a korábbi fejezetekben megmutattuk, az energia és az impulzus megmaradására vonatkozó alapvető tételek a Newton-féle mozgástörvények közvetlen következményei, így arra a következtetésre jutunk, hogy a mechanika minden törvénye minden inerciarendszerben érvényes. Ezt a megállapítást szokás **Galilei-féle relativitási elvként** idézni. Bár a sebesség, az impulzus és a mozgási energia értékei a különböző – egymáshoz képest egyenlete-



a) $t = t' = 0$ időpontban felvillan egy lámpa, amikor az O és O' origók egybeesnek.



b) Egy későbbi t időpontban az S vonatkoztatási rendszerben a táguló, kifutó hullámfront középpontja az O origó. Az S' vonatkoztatási rendszer a $+x$ irányban Vt távolságra jutott.



c) Az S' vonatkoztatási rendszerben a későbbi t' időpontban a táguló gömbszerű hullámfront középpontja az O' origó. Az S vonatkoztatási rendszer origója a $-x$ irányban Vt' távolságot tett meg.

41-3 ábra
Az un. táguló fénygömb „paradoxon". Az egyes vonatkoztatási rendszerekben ülő megfigyelők ugyanazt a kifelé terjedő hullámfrontot mérik, és mindnyájan úgy találják, mintha a fénygömb saját vonatkoztatási rendszerük origójukból indult volna ki. Ez azonban nem paradoxon a speciális relativitás új tér és időfelfogása tükrében.

sen mozgó – inerciarendszerekben különbözőek lesznek, a mechanika törvényei azonban minden inerciarendszerben ugyanolyanok. Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki, hogy a „mechanika alapvető törvényei invariánsak a Galilei-transzformációval szemben".

A normális körülmények között megkívánt pontosság erejéig a klasszikus mechanika a tárgyak mozgásának kiváló leírását adta. Mérnökök és kutatók évszázadokon át alkalmazták és fogják is alkalmazni. Mióta azonban Maxwell az 1860-as években kiépítette az elektromágnesség elméletét, felmerültek bizonyos problémák, amelyekre addig nem is tudtak megoldást találni, míg Einstein egy merészen új megközelítéssel nem próbálkozott. A nehézség főként abból származott, hogy a Maxwell-egyenletekből meghatározott sebesség adódott a fényhullámok terjedési sebességére: $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3 \times 10^8$ m/s. A 19. század végén a fényt elektromágneses hullámnak tekintették, ami az éternek nevezett közegben terjed. Ha ez helyes elképzelés lett volna, akkor a fény nem terjedhetett volna minden inerciarendszerben (amelyek közül számosan mozognak az éterhez képest) ugyanazzal a sebességgel[4]. Einsteint aggasztotta, hogy a Maxwell-egyenletek nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. Einstein, filozófiai okokból meg volt győződve arról, hogy a relativitás elve nemcsak a mechanikára, hanem szükségképpen minden fizikai törvényre érvényes. Valóban furcsa lenne, ha a mechanika ebből a szempontból a fizika többi részétől elkülönülne.

41.3 A speciális relativitáselmélet alapposztulátumai

Einstein a relativitáselméletet a következő két feltevésre alapozta:

A SPECIÁLIS RELATIVITÁS ALAPPOSZTULÁTUMAI

(1) **A fizika minden törvényének ugyanaz a matematikai alakja minden inerciarendszerben.** *(A relativitás elve)*

(2) **A vákuumbeli fénysebesség értéke ugyanaz minden inerciarendszerben.** *(A fénysebesség állandóságának elve)*

Ebből a két alapfeltevésből a teljes speciális relativitáselmélet levezethető. Az alapfeltevések egyszerűsége és általánossága jellemző Einstein zsenialitására. Ezen feltevések következményeként mutatta ki Einstein, hogy a newtoni mechanika csak közelítőleg helyes, csak azokban az esetekben használható, amikor a sebességek a fény sebességéhez képest kicsik. Ténylegesen az Einstein-féle relativisztikus mechanika határesetben (ha $v << c$) visszaadja a newtoni mechanikát.

Az első posztulátum nagyon ésszerű és minden aggály nélkül elfogadható. Ezzel szemben a második posztulátum következményei olykor abszurdnak látszanak. Így például tegyük fel, hogy abban a pillanatban, amikor a két vonatkoztatási rendszer origója O és O' egybeesik, az origóban felvillan egy lámpa (41-3 ábra). Ha a fény sebessége minden vonatkoztatási rendszerben ugyanakkora (c), akkor egy későbbi időpontban mindkét rendszerbeli megfigyelő azt állapítaná meg, hogy a táguló gömbhullámfront középpontja saját rendszerének origója. *Bár mindkét megfigyelő ugyanazt a táguló hullámfrontot észleli, mégis mindketten úgy találják, hogy az saját rendszerük origójából, mint középpontból indul ki.*

[4] Az éteren keresztül végbemenő mozgás (vagy ami ezzel egyenértékű: a megfigyelő mellett fújó „éterszél"), végeredményben két, egymásra merőleges út mentén különböző fénysebességekhez kell, hogy vezessen (a mozgás irányában más értékre, mint arra merőlegesen).

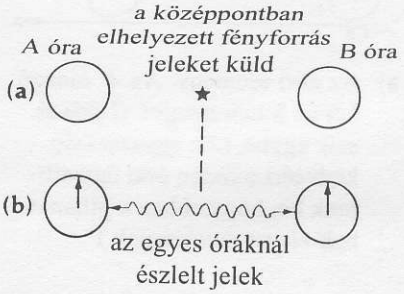
Ebben a fejezetben meggyőzzük az olvasót, hogy ténylegesen ez a valódi helyzet és a megállapítás nem paradoxon.

Most pedig megvizsgáljuk a relativitáselmélet néhány fontos következtetését, különösen a tér és az idő tekintetében. Önmagukban véve ezek a következtetések paradox jellegűek és a józan észnek ellentmondanak. De ha a speciális relativitáselmélet összes következményét együtt vesszük tekintetbe és képesek vagyunk a newtoni abszolút idő fogalmat feladni, akkor olyan *összefüggő és kielégítő elméletet kapunk, amelyet a kísérleti bizonyítékok elsöprő sokasága igazol. S természetesen bármely elmélet végső próbája a* kísérlet. Einstein egyszer így kommentálta azt, hogy a relativitás ellentétben áll mindazzal, amit a józan ész diktál, „A józan ész az előítéleteknek az a rétege, ami 18 éves korunk előtt rakódott le tudatunkban."

41.4 Az órák szinkronizálása

Einstein rámutatott arra, hogy az események mérések során az $(x, y, z,)$ koordinátákat helyi megfigyelő, aki ott helyezkedik el, ahol az esemény történik, határozza meg a méterrúd hálózattal, ugyancsak ő méri a t időt a helyi órával (ami a rendszer összes órájával szinkronizálva van) való összehasonlítással. Elvben *az összes mérésnek ezen a módon kell végbemennie.* Most a vonatkoztatási rendszer különböző helyein lévő órák szinkronizálását vizsgáljuk. Ennek a szinkronizálásnak sokkal nagyobb a jelentősége, mint első pillantásra gondolnánk, mert ez a forrása a relativitás sok „paradoxonának".

Nem szinkronizálhatjuk ugyanis az órákat oly módon, hogy azonos helyen egyszerre elindítjuk, majd végleges helyükre visszük őket, mert az időtágulásnak nevezett jelenség miatt, amit hamarosan tárgyalni fogunk, az órák szállításuk során elveszthetik szinkronitásukat. Ehelyett – Einstein javaslata szerint – a 40-4 ábrán bemutatott eljárást alkalmazzuk, ami a c fénysebesség állandóságát használja. Miután az órákat a megfelelő helyen elhelyeztük, egy villanólámpa – az órák között középen – felvillan és jeleket küld a két irányba. A fényjeleknek ugyanakkora időre van szükségük az egyenlő utak megtételére. Az órákat úgy kell beállítani, hogy a fényjelek beérkezésekor ugyanazt az időt mutassák. Ezt az alapvető szinkronizációs módszert elvben ki lehet terjeszteni egymás után az adott vonatkoztatási rendszer valamennyi órájára. A szinkronizált órák egész rendszere olyan időskálát valósít meg, melynek segítségével egymástól távol végbemenő események egyidejűségét a választott vonatkoztatási rendszerben el lehet dönteni. Ily módon a fény sebessége sokkal alapvetőbb annál, hogy csak egy legyen a természeti állandók közül. Pontosabban fogalmazva: a fénysebesség szoros összefüggésben van az idővel és az egyidejűséggel kapcsolatos fogalmainkkal.



41-4 ábra
Két, egymástól távol levő óra szinkronizálása. A középpontban lévő villanólámpa felvillanása fényjelet küld mindkét óra felé. Ha az órák úgy vannak beállítva, hogy a jelek beérkezésekor ugyanazt az időt mutatják, akkor helyesen vannak szinkronizálva.

41.5 A Lorentz-transzformáció

Einstein a Galilei transzformáció helyett új transzformációs képletrendszert vezetett le. Ennek a transzformációnak ugyanaz az alakja, mint a korábban H. A. Lorentz által levezetett összefüggésnek, ezért **Lorentz-transzformációnak** nevezzük.[5] Einstein azonban ezt a transzformációt egészen más gondolatmenettel vezette le, s ezeknek a transzformációs képleteknek az értelmezése is lényegesen eltér attól, amit Lorentz fűzött hozzájuk. A levezetés

[5] Az 1. FÜGGELÉK a Lorentz-transzformáció egyszerűsített levezetését ismerteti.

a relativitás második alapfeltevésére épít és a tér és az idő homogenitására vonatkozóan néhány egyéb feltevést használ fel, nevezetesen azt, hogy a tér valamennyi pontja egyenértékű. A matematikai alak egyszerűsítése érdekében bevezetjük a $\beta \equiv V/c$ jelölést, ahol V a két vonatkoztatási rendszer relatív sebessége az x-tengely mentén.

A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ (ahol $\beta \equiv V/c$)

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y' \qquad y' = y \qquad (41\text{-}5)$$

$$z = z' \qquad z' = z$$

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Figyeljük meg, hogy a transzformációs képletek két oszlopa a műveleteket éppen fordítva hajtja végre. Bármelyik képletcsoportot a másikból úgy kapjuk meg, hogy a vesszős és a vesszőtlen mennyiségeket egymással felcseréljük és egyidejűleg V és β előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. (Az S-ben lévő megfigyelők számára a másik mozgó vonatkoztatási rendszer sebessége $+V$, az S'-ben levők szerint az S sebessége $-V$. Ebből adódik az előjelváltás.)

A Lorentz-transzformációnak van egy érdekes tulajdonsága. Ha a mozgó vonatkoztatási rendszer V sebessége sokkal kisebb, mint c, akkor a β szorzó zérushoz tart, és a Lorentz-transzformáció a Galilei-transzformációval azonossá válik. Így a klasszikus relativitás csak speciális esete a sokkal átfogóbb jellegű, Einstein-féle speciális relativitáselméletnek.

Most néhány speciális részletkérdést tárgyalunk. Figyeljük meg, hogy a levezetések pusztán Einstein két szokatlan posztulátumát (ill. az ezeket kifejező Lorentz-transzformációs összefüggést) használják új elemként. Minden meglepő következtetés, amire jutunk, már implicite benne foglaltatik ebben a két alapfeltevésben. Ezek igazolása kapcsolatos azzal a hatalmas sikerrel, amelyet a speciális relativitáselmélet a fizikai jelenségek magyarázatában aratott.



41-5 ábra
Einstein, amint éppen egy új vonatkoztatási rendszert élvez 1936-ban.

Albert Einstein

1900 és 1927 között két nagy forradalom ment végbe a fizikában: a kvantummechanika és a relativitáselmélet megszületése. Az előbbi sok fizikus (közöttük Einstein) eredményeiből nőtt ki, míg a relativitáselmélet egyedül Einstein alkotása volt, olyan kimagasló szellemi teljesítmény, amely csak Newton művével mérhető össze.

Albert Einstein Ulmban született 1879-ben, Maxwell halálának évében. Édesapjának kis elektrokémiai műhelye volt. Einstein három éves korában kezdett, és csak kilenc éves korára tanult meg folyamatosan beszélni. Nagyon idegenkedett a német iskolákban oly általános vasfegyelemtől és a tekintélyelvű tanítási módszerektől. Rokonai azt mondták, sohasem fogja sokra vinni az életben, középiskolai tanárai jelenlétét „káros hatásúak" tekintették és eltanácsolták az iskolából. A nyilvános iskolát 15 éves korában el is hagyta. Mégis ez alatt az idő alatt mélyen érdeklődött a geometria, az algebra és az analízis iránt, e tárgyakat önszántából szorgalmasan tanulta. Egy éves észak-olaszországi barangolás után 16 éves korában (az átlagos jelentkezőknél két évvel fiatalabb korban) felvételi vizsgát tett a zürichi Szövetségi Műszaki Főiskolán, (ETH) mely európai hírű műegyetem volt. A vizsga nem sikerült a modern nyelvekben, zoológiában és biológiában mutatkozó hiányosságai miatt. Visszatérve a középiskolai tanulmányaihoz, hogy megszerezze az érettségi bizonyítványt és egy barátja segítségével elmélyüljön egyes tantárgyakban, kis idő múlva

megismételte a felvételi vizsgát, most már sikerrel, mert felvették. Látszólag közömbös tanuló volt, akit nem lelkesítettek a tanmenet régi vágású tantárgyai, az órákra nem járt rendszeresen, ehelyett sok időt töltött a környék kávéházaiban. Viszont sokat gondolkodott a fizikáról és ezalatt az idő alatt önerőből megtanulta Maxwell elektromágneses elméletét. 1900-ban szerzett oklevelet, minden különösebb dicséret nélkül.

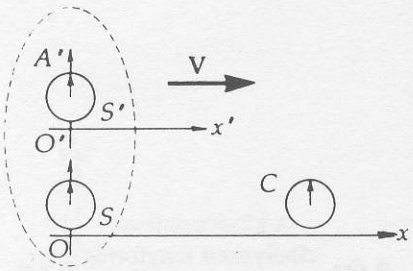
Talán Einstein közepes egyetemi bizonyítványának köszönhető, hogy nem került azonnal oktatói állásba, amit pedig kívánt. Miután sikertelenül próbálkozott abból megélni, hogy gyenge diákokat korrepetált, egy barátja segítségével Bernben a Szabadalmi Hivatalban jutott álláshoz. Ez igénytelen állás volt szerény fizetéssel, viszont bőségesen hagyott számára szabadidőt, ami saját intellektuális kedvteléseinek szentelhetett. A következő nyolc év során Einstein igen figyelemreméltó fizikai eredményekkel jelentkezett. Bár a szakmai környezet gondolatébresztő és serkentő hatásaitól el volt szigetelve, elkészítette doktori értekezését és több tanulmányt tett közzé a statisztikus mechanika, valamint a molekuláris mozgás tárgykörében. Az 1905-ös esztendő valóban határkő volt, ebben az évben jelentette meg négy korszakalkotó értekezését a fényelektromos jelenségről, a Brown-mozgásról és a speciális relativitáselméletről. Kétséges háttere ellenére a tudományos világ kezdte értékelni Einstein tudományos tevékenységét. Hamarosan számos egyetemre hívták professzori állás betöltésére, ezek közül a zürichi, majd a prágai megbízásnak tett eleget. Végül a Berlini Egyetemmel kötött rendkívül előnyös szerződést, ami nem járt rendszeres kötelezettségekkel.

1916-ban Einstein nyilvánosságra hozta általános relativitáselméletét. Ennek az elméletnek az elfogadását, az elvont matematikai megfogalmazás egészen addig késleltette, amíg az egyik jóslatát – a fénysugár elhajlását a Nap erős gravitációs erőterében – egy angol fizikusokból álló kutatócsoport 1919-ben ténylegesen meg nem figyelte. Ezután Einstein tekintélye nagyon megnőtt a szakmai körök és a nagyközönség előtt is (a közönség számára Einstein volt a szórakozott professzor tökéletes mintaképe, akinek az elméleteit – mint írták róla akkor – az egész világon csak hét ember képes megérteni). 1921-ben fizikai Nobel-díjjal tüntették ki – nem a relativitás elméletért (!), hanem a fényelektromos hatás értelmezésében szerzett érdemeiért.

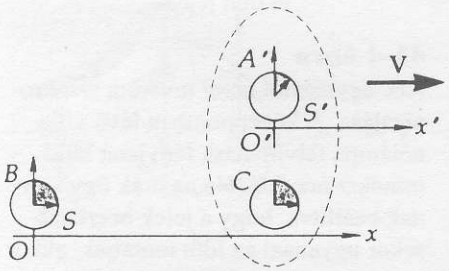
Einstein közismert volt meleg, nagylelkű személyiségéről és szelíd humoráról. Kitűnő muzsikus volt, gyakran játszott hegedűn és zongorán. Mozart és Bach volt kedvenc zeneszerzője. Ugyanakkor intellektuális kérdésekben egy bulldog szívósságával állhatatosan kereste a természet leírásában az egyszerűséget és az egységet. Vonzalma az egyszerűség iránt, a csak a lényegre való koncentrálás tekintetében a magánéletben is következetes volt, ruházatában és viselkedésében is.

Sajnos a politikai események, – az I. Világháború, a nacionalizmus megerősödése, a nácik megjelenése – jelentős hatással voltak Einstein életére. Amikor Franciaországban és Angliában a meghívásoknak eleget téve előadókörútra indult, sok esetben bojkottálták előadásait azok a professzorok, akiknek nacionalista érzelmei elnyomták a tudományos érdeklődést. Minthogy Einstein zsidó volt és meggyőződéses pacifista, aki megtagadta a német háborús erőfeszítések támogatását, céltáblájává vált a nácik antiszemitizmusának. Hírneve egy ideig még védte őt, de 1933-ban elhatározta, hogy az Egyesült Államokba emigrál. Néhány év múlva Princetonban az Institute for Advanced Study professzoraként telepedett le. Itt folytatta kutatómunkáját az egyesített térelmélet kidolgozásán, melynek során (sikertelenül) próbálkozott a gravitációt és az elektromágnességet egységes (geometriai) elméletté kovácsolni.

Késői éveiben Einstein nagy figyelmet szentelt pacifista eszméknek és a cionista mozgalomnak, foglalkozott a világ-kormány gondo-



a) Az első esemény. Az A' mozgó óra az S-ben nyugvó B órával esik egybe. (Az egyszerűség kedvéért minden órát úgy állítunk be, hogy ebben a pillanatban zérust mutassanak.)



b) A második esemény. Az A' mozgó óra az S-ben nyugvó C órával esik egybe.

41-6 ábra
Két esemény, melyet az S-ben figyelünk meg, s amelyekkel az A' mozgó óra ütemét mérjük meg, az S-ben nyugvó, szinkronizált B és C órákkal való összehasonlítás során.

latával, szociális és politikai kérdésekkel is. Az emberi szabadság ügyének szenvedélyes és félelmet nem ismerő szószólója volt. Sokan naivnak látták, de őszinteségében mindenki hitt. Gyakran zavarba hozták és elszomorították az emberek és a politikai élet ellentmondásai. 1939-ben az európai agresszió növekedésekor és a német uránhasadási kísérletek eredményeiről értesülve nevét adta ahhoz a levélhez, melyet Roosevelt elnökhöz intéztek az atombombát előkészítő kutatások sürgős megkezdése érdekében. A háború után, amikor egy japán újságban szemére vetették, hogy ebben az ügyben elkötelezte magát, ezeket írta: „Vannak olyan körülmények, amikor, azt hiszem, helyén való az erő alkalmazása, nevezetesen olyan ellenséggel szemben, aki az én elpusztításomra és népem elpusztítására törekszik."

Einstein 1955-ben hunyt el. Legnevezetesebb hagyatéka, a relativitáselmélet fogalomalkotása, új egységes szempontokat adott az Univerzum megértéséhez.

41.6 Az órák összeigazítása

Hogyan határozzuk meg a mozgó óra járást? A mozgó órát nem hasonlíthatjuk össze egy adott pillanatban csak úgy egyszerűen egy olyan másik órával, amely nyugszik; az összehasonlítás szükségképpen két esemény közti időintervallum mérését kívánja meg. A 41-6 ábra mutatja, hogy ez mit jelent a „mi" vonatkoztatási rendszerünkben, az S rendszerben. A méréshez három órát kell alkalmazni. Az A' óra az S' rendszerben nyugalomban van. Adott pillanatban ez az óra az S rendszerben nyugalomban levő B óra mellett halad el. Ez az egybeesés az első esemény. Mindkét vonatkoztatási rendszerben az órák mellett lévő megfigyelők olvassák le az órák által mutatott t_1, ill. t'_1 időpontot. A második esemény később következik be, amikor a mozgó A' óra egy másik, az S rendszerben szintén nyugalomban levő C órával esik egybe. Itt ismét az események bekövetkezésének helyén lévő megfigyelők olvassák le az órák által mutatott t_2, ill. t'_2 időpontokat. A két esemény közti időintervallum

$$T = t_2 - t_1 \qquad \text{(az } S \text{ rendszerben)}$$

illetve

$$T = t'_2 - t'_1 \qquad \text{(az } S' \text{ rendszerben)}$$

A két időintervallum nem ugyanaz! A Lorentz-transzformáció (41-5) képleteit használva megállapíthatjuk, hogy a két intervallum közti kapcsolat:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\left(t'_2 + \frac{Vx'_2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\left(t'_1 + \frac{Vx'_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Az S'-rendszerben a két esemény ugyanazon az $x'_2 = x'_1$ helyen ment végbe, ezért a fenti kifejezés átalakul:

$$T = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A $T' = t'_2 - t'_1$ időintervallumot az S'-ben *egyetlen* óra mérte (ellentétben a T időintervallummal, amit az S-ben *két különböző* óra mért meg). Miként azt a 41.9 pontban majd megmutatjuk, ennek különleges jelentősége van. Minthogy az egyetlen órán leolvasott időintervallumokkal mindkét rendszerben találkozhatunk, az ilyen méréseket vessző helyett zérus indexszel jelöljük.

IDŐ-DILATÁCIÓ

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(41-6)}$$

(ahol T_0 *egyetlen* órán leolvasott időintervallum)

Minthogy a $\sqrt{1-\beta^2}$ szorzó mindig kisebb, mint egy, a T időintervallum mindig hosszabb mint T_0. Ebből arra következtetünk, hogy a *mozgó órák lassabban járnak, mint a nyugalomban lévők.* Ezt a jelenséget nevezzük **idődilatációnak**. A mozgó órák nem azért járnak lassabban, mert a mozgás valahogyan megváltoztatta a szerkezetüket, s így rosszul működnének, hanem maga az idő viselkedik másképpen, amikor mozgó vonatkoztatási rendszer, „időskáláját" egy stacionárius vonatkoztatási rendszerével hasonlítjuk össze. Egy vonatkoztatási rendszer minden órája az ott helyes időpontot mutatja.

Az idődilatáció még meglepőbb tulajdonsága az, hogy – mivel mindkét vonatkoztatási rendszer egyenlő joggal tekinthető nyugalomban lévőnek – az S' megfigyelői a fent leírt eljárással úgy találják, hogy az S rendszer órái járnak lassabban, mint az S'-rendszeréi. A jelenség teljes mértékben szimmetrikus: *az egyes vonatkoztatási rendszerek megfigyelői azt találják, hogy a hozzájuk képest „mozgó" órák lassabban járnak, mint az ő nyugvó óráik.* Minden mérési eredmény a megfigyelő vonatkoztatási rendszerétől függ, minden rendszernek megvan a maga időskálája, ami általában nem egyezik meg a másik rendszer időskálájával. Pontos választ adhatunk a kérdésre: „Valóban lassabban járnak a mozgó órák"? – azáltal, hogy rámutatunk, a mozgó órákon végzett mérések tanusága szerint igen, a mozgó órák ténylegesen lassabban járnak, mint azok, amelyek a mi rendszerünkben nyugalomban vannak. Ez nem illúzió.

Minden óra a maga vonatkoztatási rendszerében a helyes időt mutatja. Csakhogy egyszerűen nincsen abszolút időskála, mely minden vonatkoztatási rendszerben érvényes volna. Önmagában ez a következtetés még paradoxnak is tűnhet. De amikor majd a speciális relativitáselmélet minden vonatkozását együtt tekintjük, kiderül, hogy rendkívül logikus és mély benyomást keltő struktúrát látunk, amely tökéletes egyezést mutat a tapasztalati tényekkel. Ez a szokatlan viselkedés a Világegyetem alapvető tulajdonsága.

41-2 PÉLDA

Az S' rendszerben nyugvó óra másodpercenként ad egy „tikk" jelet. Ezért, az S' rendszerben mérve az óra T_0 üteme T_0 = 1s. Mekkora lesz az óra 'tikkjei' közt eltelt idő az S-hez képest 0,80 c sebességgel mozgó S' rendszerben.

MEGOLDÁS

Minthogy T_0 = 1s, és $\beta = 0{,}80\ c$, írhatjuk, hogy

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(1\text{ s})}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{(1\text{ s})}{\sqrt{0{,}36}} = 1{,}67\text{ s}$$

A mozgó óra tehát lassabban jár, mint a mi nyugalomban lévő óránk.

41.7 A mozgás irányával párhuzamos hosszmérések eredményeinek összehasonlítása

A 41.2 pontban összehasonlítottuk az S' rendszerben nyugalomban lévő rúd L' hosszát azzal az L mérési eredménnyel, amit az S-ben határoztunk meg (abban a rendszerben, ahol a rúd az x-tengely mentén V sebességgel mozog). Most ugyanezt az eljárást folytatjuk, csak a Galilei-transzformáció helyett a Lorentz-transzformáció képleteit fogjuk használni. Tekintsünk egy méterrudat, ami az S' rendszerben nyugalomban van és az x'-tengely mentén helyezkedik el. A $+x'$ egyben a két rendszer relatív sebességének is az iránya. Tekintsünk a 41-7 ábrára! Az S'-ben végzett mérés szerint a rúd hossza $L' = x'_2 - x'_1$. Erre a Lorentz-transzformációt alkalmazva adódik, hogy

$$L' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Az S rendszerben az a két esemény, amely a méterrúd két végének a helyét meghatározza, egyidejű kell, hogy legyen, ezért $t_1 = t_2$, és így a fenti kifejezés az

$$L' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

alakra redukálódik. Az L' hosszat az S'-ben állapították meg (ott, ahol a tárgy nyugalomban volt), (ezzel szemben az L hosszat S-ben mérték meg, ahol a tárgy mozgott). Minthogy nyugvó tárgy hosszméretét bármelyik rendszerben meg kell tudnunk határozni, az ilyen mérések eredményeinek jelölésére a zérus indexet fogjuk használni.

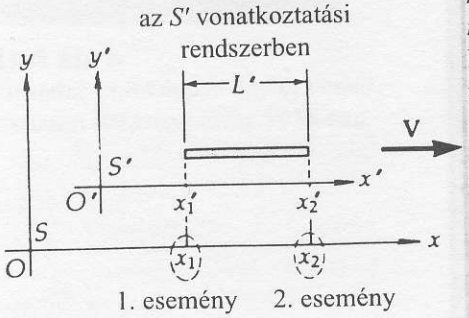
A HOSSZÚSÁG KONTRAKCIÓ

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad \text{(41-7)}$$

(az L_0-t abban a rendszerben kell meghatározni, ahol a rúd nyugalomban van)

Minthogy a $\sqrt{1-\beta^2}$ szorzó mindig kisebb, mint egy, az L hossz mindig rövidebb, mint az L_0. Ennek következtében megállapítható, hogy a mozgó testek hossza a mozgás irányában kisebb, mintha a nyugvó test hosszát mértük volna meg. (A mozgás irányára merőleges távolságok mozgó rendszerből mérve is változatlanok maradnak.) Ezt a jelenséget *hosszúságkontrakciónak* nevezzük.

Az időtágulációhoz hasonlóan ez is szimmetrikus jelenség. *Minden rendszer megfigyelői rövidebbnek mérik a másik – hozzájuk képest mozgó – rendszer méterrúdjait.* Ebben nincsen semmi paradoxon, mert a méréseket két különböző vonatkoztatási rendszerben hajtották végre. Egy tárgy hossza nem a tárgy tulajdonsága, hanem egy mérés eredménye. Most már világos választ adhatunk a következő kérdésre: „A mozgó rudak hossza *valóban* ki-



41-7 ábra
Az S rendszerben két esemény, amely a mozgó rúd végpontjainak az x_1, ill. x_2 helyét határozza meg, egyidejű esemény.

sebb lesz?" – a mozgó rúddal kapcsolatos mérések tanúsága szerint igen: a mozgó méterrúd valóban rövidebb, mint az, amelyik a mi vonatkoztatási rendszerünkben áll. De mivel nincsen abszolút tér, sem abszolút idő, az egyik vonatkoztatási rendszerben végzett mérések eredményei nem szükségképpen azonosak a másik vonatkoztatási rendszerben végzett mérések eredményeivel. Mindamellett bármely vonatkoztatási rendszer mérési eredményei egyaránt érvényesek. Martin Gardner[6] érdekes analógiával szemlélteti a helyzetet: ha két ember nagyméretű kicsinyítő lencse két oldalán áll, akkor a másikat mindketten kicsinyítve látják. De ez csak annyit jelent, hogy mindenki a maga vonatkoztatási rendszerében látja a másikat kisebbnek. Ez nem azonos azzal a paradox állítással, hogy a másik ember ténylegesen kisebb.

41-3 PÉLDA

Méterrúd 0,60 c sebességgel mozog a hossztengelyének az irányában. Adjuk meg a méterrúd hosszát olyan megfigyelő szerint, aki nyugalomban van.

MEGOLDÁS

Minthogy $L_0 = 1$ m és $\beta = 0{,}60$, így

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = (1\text{ m})\sqrt{1-0{,}36} = (1\text{ m})\sqrt{0{,}64} = 0{,}800\text{ m}$$

Ezért a mozgó méterrúd a nyugalomban lévő méterrúdnál rövidebb.

41.8 A sajátidő és a nyugalmi hossz

Különböző vonatkoztatási rendszerek megfigyelői a hosszúság és időintervallum-mérések során különböző eredményekhez juthatnak. Ezért szokásossá vált, hogy a következő speciális mérésfajtákat külön névvel lássák el.

Nyugalmi hossz (sajáthossz): hosszmeghatározás eredménye olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a tárgy nyugalomban van.

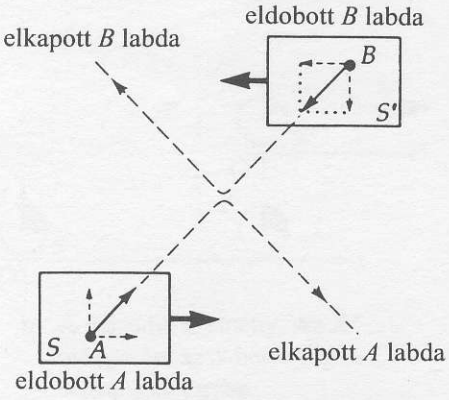
Sajátidő (intervallum): két esemény közti időtartam mérésének eredménye olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a két esemény azonos helyen ment végbe. Ennek eredménye a sajátidő (tartam), melyet mindig egyetlen órával mérünk. Minden óra a saját helyén a sajátidőt méri.

A „saját" (ill. nyugalmi) szónak a használatából nem következik, hogy más mérések valahogyan helytelenek vagy rosszak lennének. Ezt a jelzőt csak abban az értelemben használjuk, hogy „valamihez tartozik", valaminek a jellegzetes, jellemző tulajdonsága. Míg a tárgyak sajáthosszát mindig meg lehet határozni, vannak olyan helyzetek, amelyekben a saját-időintervallum fogalma nem alkalmazható. Vegyük észre, hogy a sajátidő-intervallumot egyetlen egy órával kell mérni. Ezért ha két esemény a térben egymástól távol, de időben elegendően közel következik be, akkor előfordulhat, hogy

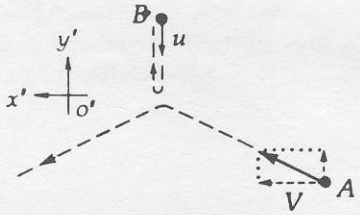
[6] Martin Gardner: The Relativity Explosion, Vintage Books (1976)

semmilyen vonatkoztatási rendszer nem mozoghat eléggé gyorsan ahhoz, hogy az egyetlen órát a bekövetkező események helyére juttassa (anélkül, hogy a fény sebességével vagy még annál is gyorsabban kellene mozognia). Fontos emlékezni arra, hogy a T_0 és az L_0 jelek az időtágulás és a hosszkontrakció képleteiben a sajátidőt, ill. nyugalmi hosszat jelölik, tekintet nélkül arra, hogy melyik vonatkoztatási rendszert jelöltük vesszővel.

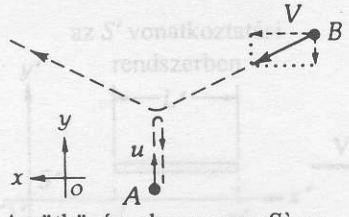
Minthogy a térre és az időre vonatkozó klasszikus elképzelések igen mélyen gyökereznek gondolkodásunkban, meglepően könnyű relativitáselméleti problémák megoldása során félrevinni a gondolatmenetet. Ezért mindig nagyon bölcs dolog pontszerű eseményekben gondolkodni és gondos vázlatot készíteni arról, ahogyan ezeket az eseményeket a megfelelő vonatkoztatási rendszerben méréssel vizsgáljuk.



a) A földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben a rugalmas ütközés teljes mértékben szimmetrikus.



b) Az ütközés, ahogyan az S vonatkoztatási rendszerben (az A megfigyelő által) látható.



c) Az ütközés, ahogyan az S` vonatkoztatási rendszerben (a B megfigyelő által) látható.

41-8 ábra
Gondolatkísérlet, amelyben két azonos labda rugalmasan ütközik. A földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben a rugalmas ütközés teljes mértékben szimmetrikus.

41.9 A relativisztikus impulzus

A speciális relativitáselmélet tárgyalásában mindeddig a kinematikára szorítkoztunk. Most a relativisztikus dinamika felépítéséhez fogunk hozzá, és ugyanazt az alapvető elképzelést használjuk, amire a newtoni mechanika is építi az *impulzusmegmaradás elvét*. Ha egy testre állandó erő hat, akkor Newton második törvénye ($F = dp/dt$ ahol $p = mv$) nem ró korlátot arra a sebességre, amit a test elérhet. Kísérletileg azonban bebizonyosodott, hogy egy test impulzusa a végtelenhez közeledik, ha sebessége a fénysebességhez tart. Így relativisztikusan a maximálisan elérhető sebességnek van felső határa.

A jelenség vizsgálatára tanulmányozzuk először két egyforma részecske rugalmas ütközését és az Einstein féle első alapfeltevéssel követeljük meg, hogy az impulzusmegmaradás tétele minden inerciarendszerben fennálljon. Tegyük fel, hogy két vasúti kocsi, (az S, ill. az S' vonatkoztatási rendszer), egymással párhuzamos vágányokon, azonos, de ellenkező irányú sebességgel közeledik egymáshoz. A 41-8a ábra mutatja a viszonyokat a földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Mindkét rendszerben a megfigyelőknek azonos m tömegű labdáik vannak. A két megfigyelő a labdáját a mozgás irányára merőlegesen dobja el egyenlő nagy u sebességgel (amely értéket mindegyik a maga vonatkoztatási rendszerében méri meg). Miután a labdák ugyanazt az y távolságot tették meg a vagonok mozgási irányára merőlegesen, összeütköznek, és visszapattanva megteszik újra az y távolságot, ahol a megfigyelők a labdákat elkapják. A következő jelöléseket fogjuk használni: az S-ben az A labda tömege m és összesen $2y$ utat tesz meg u sebességgel. Az S'-ben a B labdának a tömege m és $2y'$ távolságot tesz meg összesen, u sebességgel. Minthogy az y irányú távolságok nem szenvednek kontrakciót ezért $y = y'$. A helyzet szimmetrikus.

Szokatlan körülmény merül azonban fel, amikor az ütközést az egyik mozgó rendszerből elemezzük. (41-8b ábra) A B labda sebességének y-komponense a $2y$ (= $2y'$) távolság osztva a B labda eldobásához, ill. elkapásához tartozó két esemény közt eltelt időintervallummal. Az S'-ben ez az időintervallum maga a T_0 sajátidőintervallum, mert a két esemény (az eldobás és elkapás), S-ben ugyanazon a helyen történt és így ugyanazzal az egyetlen órával mérhető. De S-ben ugyanez a két esemény (a B labda eldobása és elkapása) két különböző helyen történik. Az S-ben mért T időtartam a T_0-lal a $T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}$ időtágulációs képlettel hozható kapcsolatba. Következésképpen, bár $y = y'$, az időtartamok különbözőek és a B labda sebességének y-komponense (az S-ben mérve) nem ugyanaz, mint az A labda sebességének az y-komponense (az S-ben mérve):

A és B sebessége S-ben mérve

$$(u_B)_y = \frac{2y}{T} = \frac{2y}{T_0}\sqrt{1-\beta^2} = u\sqrt{1-\beta^2} \qquad (41\text{-}8)$$

$$(u_A)_y = \frac{2y}{T_0} = u \qquad (41\text{-}9)$$

Az impulzusmegmaradás törvénye megköveteli, hogy az egyik labda impulzusának az y-komponensében beálló változást a másik labda impulzusának y-komponensében beálló változás kompenzálja. De ha az impulzust (tömeg) × (sebesség) alakjában definiáltuk, ezek a változások nem lesznek egyenlők:

S-ben $\quad (\Delta p_A)_y = -2mu \quad$ és $\quad (\Delta p_B)_y = 2mu\sqrt{1-\beta^2}$

(Az előjelkülönbség abból adódik, hogy a pozitív y-tengelyt felfelé irányítottuk a 41-8 ábrán.) Így arra a következtetésre jutottunk, hogy a (tömeg) × (sebesség) alakban definiált impulzus, úgy látszik, a relativitáselmélet szerint nem megmaradó mennyiség.

Az impulzusmegmaradás olyan fontos a fizikában, hogy lehetőséget kell találnunk érvényben tartására. Az elemzésből látható, hogy a probléma azért merül fel, mert az impulzus y-komponense a mozgó vonatkoztatási rendszer sebességének z-komponensétől függött. Tekintsük a következő lehetséges módosítást. Definiáljuk a sebességet *magának a mozgó testnek a* $\Delta\tau$ *sajátidejével*, vagyis azzal az idővel, amit a testhez rögzített óra mér. Ekkor a $\Delta y/\Delta\tau$ mennyiség minden megfigyelő számára ugyanaz lesz. Ez a sajátidő a megfigyelő Δt idejével a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad (41\text{-}10)$$

Így a sebesség

$$= \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad (41\text{-}11)$$

Ezért minden, a $\pm x$-tengely irányában állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a részecskék sebességének y-komponense ugyanaz lesz:

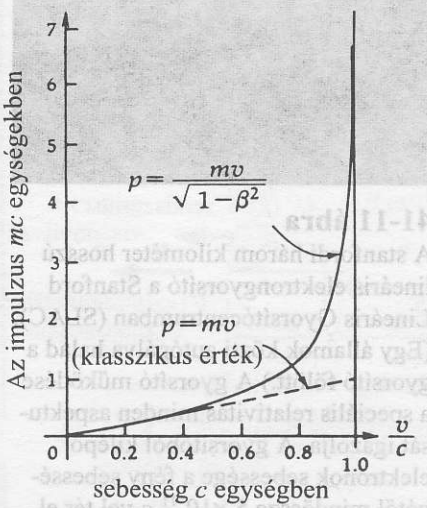
$$\text{(a sebesség y-komponense)} = \frac{u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

Ezt az egyenletet általánosítva a relativisztikus impulzust a következőképpen definiáljuk:

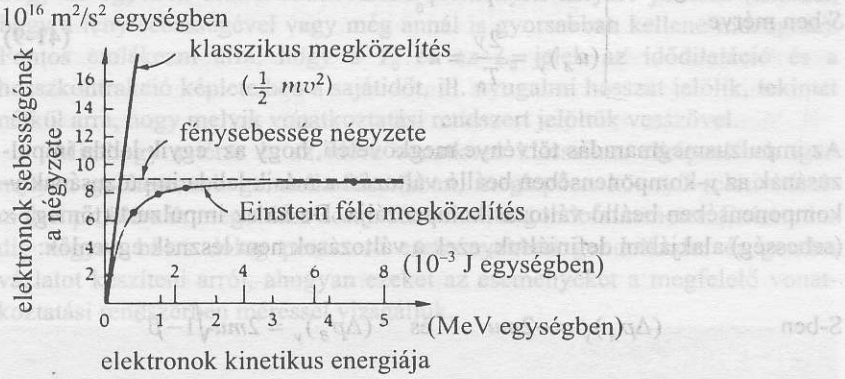
RELATIVISZTIKUS IMPULZUS

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad (41\text{-}12)$$

Vegyük észre, hogy ebben a definícióban nem szerepel a vonatkoztatási rendszerek viszonylagos sebessége. Ehelyett viszont szerepel a részecske u sebessége az adott vonatkoztatási rendszerben. Ezzel a definícióval az impulzusmegmaradás tétele érvényes marad a relativisztikus esetben is. Ugyanakkor $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ a közismert klasszikus alakra redukálódik, amikor $u << c$. A 41-9 ábra bemutatja, hogyan változik a relativisztikus impulzus a sebességfüggvényében.

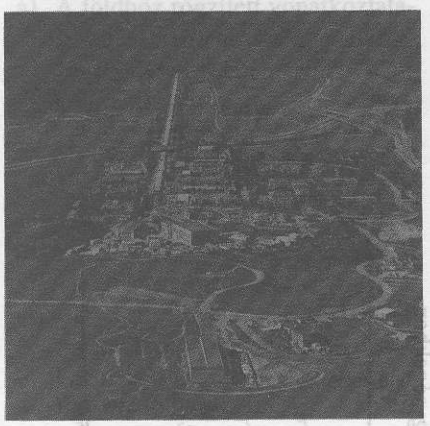


41-9 ábra
Ahogyan a sebesség nő, a relativisztikus impulzus egyre jobban eltér a klasszikus mv értékétől. Amikor a sebesség megközelíti c értékét, az impulzus a végtelenhez tart.



41-10 ábra
A kísérleti pontok azt bizonyítják, hogy a fény sebessége határsebesség valamennyi tömeggel rendelkező részecskére vonatkozóan. (W. Bertozzi: American Journal of Physics, 32 (1964), 555, az American Journal of Physics engedélyével átvéve).

A relativisztikus impulzus növekedése miatt c felső határt jelent bármely olyan részecske által elérhető sebességre, amely részecskének nyugalmi állapotban tömege van. Az impulzus növekedésével egyre nagyobb erő szükséges ahhoz, hogy a részecskét még tovább gyorsítsuk. Végtelen energiára lenne szükség ahhoz, hogy a részecske elérje a c sebességet. Így aztán a fénysebesség valóban a sebesség felső határa.[7] A 41-10 ábrán látható kísérleti eredmények meggyőzően igazolják a határsebesség létezését. A grafikonon az elektron sebességének négyzetét ábrázoltuk az elektron mozgási energiájának a függvényében. Ennek az ábrának a skáláján mérve a stanfordi 3 km-es gyorsítóból (41-11 ábra) kilépő elektronok energiáját ábrázoló pont kb. 188 méterrel (két football-pálya hosszával) jobbra lenne. Ezeknek az elektronoknak a sebessége a mérések szerint lényegében c, de természetesen még mindig nem érték el a c értékét pontosan. Ez a sebesség jócskán eltér a klasszikus elmélet által erre az energiára vonatkozóan megállapított értéktől.



41-11 ábra
A stanfordi három kilométer hosszú lineáris elektrongyorsító a Stanford Lineáris Gyorsítócentrumban (SLAC). (Egy államok közti autópálya halad a gyorsító fölött.) A gyorsító működése a speciális relativitás minden aspektusát igazolja. A gyorsítóból kilépő elektronok sebessége a fény sebességétől mindössze 5×10^{-11} c-vel tér el. Ha a klasszikus Galilei-féle relativitás lenne helyes, és a relativisztikus tömegnövekedés nem lenne, akkor ennek a gyorsítónak mindössze egy arasznyi hosszúnak kellene lennie, hogy ezt a sebességet elérjék.

41-4 PÉLDA

A stanfordi három kilométer hosszú lineáris gyorsítóból kilépő elektronok elérik a fénysebesség értékének 99,99999997 %-át. Adjuk meg ezeknek az elektronoknak az impulzusát mc-egységekben!

MEGOLDÁS

Az elektronok impulzusa nem $mv \approx mc$, mint a klasszikus elmélet szerint lenne, hanem a (41-12) képlet szerinti. Minthogy β igen közel van az 1-hez, használhatunk közelítő képletet (lásd az E függeléket):

$$1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta)$$

Ha β = 0,999 999 999 7, akkor a $(1 - \beta)$ tényező egyenlő 3×10^{-10}-nel. Ezért

$$\sqrt{1-\beta^2} \approx \sqrt{2(1-\beta)} = \sqrt{6 \times 10^{-10}}$$

[7] Felmerült az az ötlet, hogy talán léteznek *tachyonok* is, olyan részecskék, amelyek mindig c-nél nagyobb sebességgel mozognak. Számukra a fénysebesség alsó határsebességet jelentene. Az ilyen részecskék létezése összeegyeztethető a speciális relativitáselmélettel, hiszen a c sebesség továbbra is mindkét oldalról áthághatatlan korlát marad. Mind ez ideig a kimutatásukra irányuló kísérletek nem jártak sikerrel, talán nem is léteznek. Továbbá információkért lásd G. Feinberg: „Particles that Go Faster than Light" (Részecskék, amelyek a fénynél gyorsabban haladnak) Scientific American 223.2. (1970 febr) p 69.

és így $$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{mv}{\sqrt{6\times10^{-10}}} \approx 4{,}08\times10^4\, mc$$

Ez megegyezik az elektronok kísérletileg meghatározott impulzusával (amit a gyorsítóból kilépő elektronok mágneses erőtérben tapasztalt eltérítésével vizsgálnak). Bár közhelyszámba megy ezekről az elektronokról úgy beszélni, mint amely részecskéknek nyugalmi tömegük 4×10^4-szeresét kitevő relativisztikus tömegük van, ismételten hangsúlyozzuk, hogy ez a változás azért jelenik meg, mert a térnek és az időnek szokatlan tulajdonságai vannak, nem pedig azért, mert valami speciális dolog történik magával a tömeggel. (lásd a következő pontot).

41-5 PÉLDA

Baseball-labda 30 m/s sebességgel mozog. Mennyi a valódi (relativisztikus) impulzus és az mv klasszikus értéknek a relatív eltérése?

MEGOLDÁS

Ebben az esetben a sebesség igen kicsi a c-hez képest, ezért a $\beta^2 << 1$ esetén érvényes közelítő kifejezést fogjuk használni (lásd az E függeléket);

$$(1\pm\beta^2)^n \approx 1\pm n\beta^2 \qquad \text{ha } \beta << 1$$

Ezért $$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1+\frac{\beta^2}{2}$$

A keresett hányados tehát

$$\frac{\text{különbség}}{mv} = \frac{p-mv}{mv} = \frac{p}{mv} - 1 = \frac{mv(1-\beta^2)^{-1/2}}{mv} - 1 \approx 1+\frac{\beta^2}{2} - 1 \approx \frac{\beta^2}{2}$$

A β számértéke $$\beta = \frac{v}{c} = \frac{30\,\text{m/s}}{3\times10^8\,\text{m/s}} = 1\times10^{-7}$$

s így $$\frac{\beta^2}{2} = \frac{1\times10^{-14}}{2} = 5\times10^{-15}$$

Megállapítható, hogy a relativisztikus korrekció elhanyagolható azoknál a sebességeknél, amelyek a mindennapi gyakorlatban szerepelnek.

Figyeljük meg, hogy a 41-4 és 41-5 példában szereplőhöz hasonló problémáknál, ahol a $v << c$ klasszikus, ill. a $v \approx c$ ún. ultrarelativisztikus határesetekről van szó, közelítő képletekkel elkerülhetjük azokat a hosszadalmas eljárásokat, amelyeket pl. a $\sqrt{1-(0{,}999\,999\,999\,7)^2}$ közvetlen kiszámítása igényel. Ráadásul az ilyen számítások gyakran meghaladják a zsebszámítógépek teljesítőképességét. Ha az olvasó ilyen műveletekbe bonyolódik, nem érdemes a számértékeket a közelítő képletek alkalmazása előtt behelyettesíteni.

41.10 Jegyzet a nyugalmi tömegről

Néha a (41-12) képletet úgy értelmezzük, mintha azt jelentené, hogy a részecske sebességének növekedésével tömege is növekszik. Az alábbiakban m_0 jelöli a nyugalmi tömeget és m_{rel} az úgynevezett *relativisztikus tömeget.*

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$m_{rel} u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

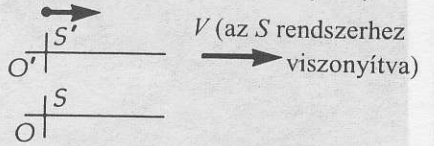
Ha u-val osztunk, adódik az

$$m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \textbf{(41-13)}$$

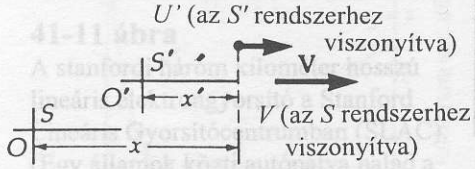
összefüggés.

Egyes szerzők ezt definícióként tekintik, mert olyan képletek felírását teszi lehetővé, amelyek hasonlítanak a klasszikus képletekhez, így pl. a relativisztikus impulzus $p = m_{rel}v$, vagy a teljes energia $\mathbf{E} = m_{rel}\,c^2$ kifejezése esetében. Ugyanakkor más klasszikus képletek értelmetlenné válnak, ha m helyére az m_{rel} mennyiséget írjuk.

Így F nem egyenlő $(m_{rel}a)$-val és a relativisztikus kinetikus energia sem egyezik meg $1/2\ m_{rel}v^2$-tel. További félreértés merül fel, amikor azt állítjuk hogy a „tömeg nő a sebességgel" – mert szem elől tévesztjük azt a tényt, hogy a (41-9) képletben a négyzetgyökös kifejezés a sebesség mérése miatt jelent meg (ami tehát a tér és az idő fogalmával kapcsolatos) az impulzus definíciójában. *Így a négyzetgyökös kifejezés a tér és az idő, és nem a tömeg transzformációs tulajdonságainak a következménye.* A relativitás elmélete megváltoztatta a térre és az időre vonatkozó fogalmainkat és érinti az olyan dinamikai mennyiségeket is, mint az impulzus és a tömeg. **Ebben a szövegben *m* mindig az invariáns nyugalmi tömeget jelölte.** Ezt a jelölést a relativitáselmélet szakkönyvei is gyakorta alkalmazzák.



a) Abban a pillanatban, amikor az S és az S' origói egybeesnek ($t = t' = 0$), a részecske áthalad az origón a $+x$-($+x'$) irányban mozgva.



b) Egy későbbi időpontban a részecske az S rendszerben az x helyen, az S' rendszerben az x' helyen van, a részecske sebessége $u = x/t$ az S-ben, ill. $u' = x'/t'$ az S'-ben.

41-12 ábra
Gondolatkísérlet a sebességösszetétel vizsgálatára. Az S' rendszernek V a sebessége az S-hez képest.

41.11 A relativisztikus sebességösszeadás

Tegyük fel, hogy egy részecske sebessége u' az S' vonatkoztatási rendszer x'-tengelye mentén. Maga az S' rendszer az S rendszerhez képest V sebességgel mozog az x irányában. Nézzük a 41-12 ábrát! A $t = t' = 0$ időpontban egy pillanatra a két vonatkoztatási rendszer egybeesik, és a részecske akkor halad át az O (és az O') origón. A relativisztikus sebességösszeadás szabályát ugyanazzal az eljárással kaphatjuk meg, amit a klasszikus sebességösszetétel megállapítására használtunk (a (41-3) képlet), az egyedüli változtatás az, hogy a Galilei-transzformáció helyett a Lorentz-transzformációt használjuk. Tekintsük megint a következő két eseményt:

		S-ben	S'-ben
ELSŐ ESEMÉMY	*Részecske az origóban*	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
MÁSODIK ESEMÉNY	*Részecske az origón túl*	$(x,0,0,t)$	$(x',0,0,t')$

Az S' rendszerben a részecske sebessége $u' = x'/t'$. Az S' maga is mozog a $+x$ irányában állandó V sebességgel az S-hez képest. Ez a mozgás adja a második V sebességet, amit a részecske u' sebességéhez kell úgy hozzáadni, hogy

a részecskének az S-ben mért u sebességét kapjuk meg. Az S rendszerben $u = x/t$. A Lorentz-transzformáció (41-5) képleteinek alkalmazásával

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\dfrac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{t'(u' + V)}{t'(1 + u'V/c^2)}$$

A RELATIVISZTIKUS SEBESSÉGÖSSZEADÁS (x-irányú sebességek esetére)

$$u = \frac{u' + V}{1 + \left(\dfrac{u'V}{c^2}\right)} \qquad \textbf{(41-14)}$$

A c-nél sokkal kisebb sebességek esetére ez a kifejezés a $u = u' + V$ klasszikus sebességösszeadási törvényre redukálódik. Ha bármelyik sebesség $-x$ (ill. $-x'$) irányba mutat, akkor a megfelelő számértékek előtt negatív előjelet használunk.

Mi történik, ha mind u', mind V a fény sebességéhez közeli értékűek? Lehet-e az eredmény nagyobb, mint c? Nem. Ha egymás után tetszőleges számú c-nél kisebb sebességet adunk össze, ugyanabban az irányban akkor, a végső eredő sebesség minden esetben kisebb marad c-nél.

41-6 PÉLDA

Tegyük fel, hogy két csillag, az A és a B egymással ellentétes irányban távolodik a Földtől a 41-13a ábrán bemutatott elrendezésben és sebességgel. Adjuk meg a B csillag sebességét az A csillagon lévő megfigyelők szempontjából!

MEGOLDÁS

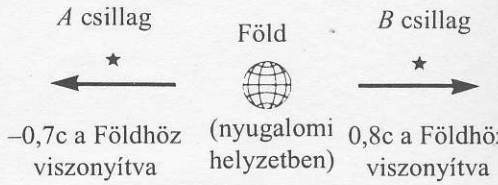
A fent bevezetett jelölésekkel az A csillag a nyugvó S rendszer, míg a Föld (az S' rendszer) a mozgó ($V = 0{,}7c$), és ebben a megfigyelések szerint a B csillag sebessége $u' = 0{,}8c$. A relativisztikus sebességösszetétel (41-14) képletét alkalmazva:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \left(\dfrac{u'V}{c^2}\right)} = \frac{(0{,}8c + 0{,}7c)}{1 + \left[\dfrac{(0{,}8)(0{,}7)c^2}{c^2}\right]} = 0{,}962c$$

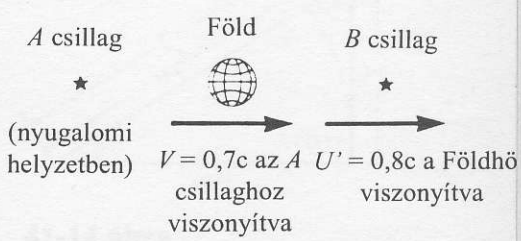
Vegyük észre, hogy ez kisebb, mint a fénysebesség. [A Galilei-féle sebességösszeadás helytelen eredményhez, az $u = u' + V = (0{,}8c + 0{,}7c) = 1{,}5c$ értékhez vezetett volna.]

41-7 PÉLDA

Hogy a sebességösszetétel szabályát a $V \to c$ határeset közelében is megvizsgáljuk, tegyük fel, hogy egy űrhajó (S' rendszer) a Föld (S rendszer) mellett rendkívül nagy, mondjuk, $V = 0{,}9999c$ sebességgel halad el. Az űrhajó utasa az űrhajó végén villanólámpát kapcsol be és



a) A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből (S' rendszerből) nézve.



b) Az A csillag vonatkoztatási rendszeréből nézve.

41-13 ábra
A 41-6 példához. Két csillag, A és B, ellenkező irányú relativisztikus sebességgel távolodik a Földtől. Mekkora sebességgel látják az A megfigyelői a B csillagot távolodni?

ezzel egy fényimpulzust küld az űrhajó orra felé. Megmérve a fényjel sebességét (az S'-ben) c-nek találja azt. A relativisztikus sebességösszetétel alapján adjuk meg ugyanennek a fényimpulzusnak a sebességét a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben!

MEGOLDÁS

A két sebesség: $u' = c$ és $V = 0{,}9999c$. Behelyettesítve a (41-14) képletbe, azt kapjuk, hogy

$$u = \frac{u'+V}{\left(1+\frac{u'V}{c^2}\right)} = \frac{c+v}{\left(1+\frac{cV}{c^2}\right)} = \frac{(c+V)c}{(c+V)} = c$$

Nem kell meglepődni ezen az eredményen! A V numerikus értékétől függetlenül a Lorentz-transzformációt éppen úgy vezettük le, hogy a fénysebesség értéke minden inerciális vonatkoztatási rendszerben garantáltan ugyanaz legyen.

41.12 A relativisztikus energia

A 6.6 pontban levezettük a munkatételt, ami azt mondja ki, hogy egy részecskére ható F erő által végzett munka egyenlő a részecske mozgási energiájának ΔK növekedésével. A tételt most a relativisztikus fogalmak alkalmazásával is megvizsgáljuk. Feltesszük, hogy a részecske nyugalomból indul, tehát $K_0 = 0$. Egydimenziós mozgás esetén:

$$K = \int_0^x F dx \qquad \textbf{(41-15)}$$

Az integrál kiszámítása egyszerűbb lesz, ha integrálási változónak a p relativisztikus impulzust tekintjük. Így az $F = dp/dt$ és a $dx = v\,dt$ helyettesítést kell alkalmazni. A (41-9) összefüggésből.

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Ebből v-t kifejezve adódik, hogy $$v = \frac{p/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} \qquad \textbf{(41-16)}$$

Ezeket az összefüggéseket a (41-15) képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$K = \int_0^t \frac{dp}{dt} v dt = \int_0^p v dp = \int_0^p \frac{p/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} dp \qquad \textbf{(41-17)}$$

Átrendezés után az eredmény:

$$K = mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1\right]$$

Beírva ide a $p = mv/\sqrt{1-\beta^2}$ relativisztikus impulzust, a következő eredményre jutunk:

41-1 táblázat Egyes elemi részecskék tömeg-energiája (1986-ban a CODATA által megállapított kerekített értékek).

Részecske	Jel	mc^2(MeV-ban)	m(kg)
Elektron (vagy pozitron)	e vagy e^- (e^+)	0,511	$9{,}109\,390 \times 10^{-31}$
Müon	$\mu^{\pm}$	105,658	$1{,}883\,533 \times 10^{-28}$
(semleges) Pi -mezon	π^0	134,964	$2{,}405\,95 \times 10^{-28}$
(töltött) Pi -mezon	$\pi^{\pm}$	139,569	$2{,}488\,05 \times 10^{-28}$
Atomi tömegegység	u	931,494	$1{,}660\,540 \times 10^{-27}$
Proton	p	938,272	$1{,}672\,623 \times 10^{-27}$
Neutron	n	939,565	$1{,}674\,929 \times 10^{-27}$
Deuteron	d vagy ^{2}H	1875,613	$3{,}343\,586 \times 10^{-27}$
Alfa-részecske	α vagy ^{4}He	3727,380	$6{,}644\,653 \times 10^{-27}$

A RELATIVISZTIKUS KINETIKUS ENERGIA

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \qquad \textbf{(41-18)}$$

ahol m a nyugalmi tömeg. Kis sebességek esetén ez a kifejezés a közismert Newton-féle $K = 1/2mv^2$ kinetikus energiára redukálódik. Hogy ezt bebizonyítsuk, a négyzetgyökös tagot Taylor-sorba fejtjük (lásd az E függeléket):

$$K = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c2}\right)^2+\cdots-1\right]$$

Kis sebességek esetén a v^4/c^4 tag elhanyagolható a v^2/c^2 mellett, így a kifejezés újból átalakul:

$$K_{\text{klasszikus}} = 1/2\ mv^2 \qquad \text{ha } v/c << 1$$

A (41-18) képletben az mc^2 tagot **nyugalmi energiának** nevezik és E_0-lal jelölik:

NYUGALMI ENERGIA: $E_0 = mc^2$ **(41-19)**

Ez az m *tömeg* és az E_0 *energia* egyenértékűségét vonja maga után. A c fénysebesség nagy numerikus értéke miatt már kicsiny tömeg energiaegyenértéke is óriási. Példa erre az elektromos energia előállítása a nukleáris reaktorokban, ahol a hasadó uránium-atommag általában két könnyebb atommaggá és még két vagy három neutronná bomlik el. A keletkező termékek összes tömege kisebb, mint a kezdeti uránium-magé, a különbség Δm. Az összes hasadási termék mozgási energiája egyenlő $(\Delta m)c^2$-tel. Ezt a mozgási energiát használják vízgőz felhevítésére és a gőzzel elektromos áram szokásos módon való előállítására. Egy olyan nagyváros, mint San Francisco, napi energiaszükséglete egy 5 Ft-osnyi tömeg felének átalakításával kielégíthető lenne. A fordított folyamat, – amikor a sugárzó energia „tömegenergiává" alakul – szintén lehetséges. Például a *párkeltési* folyamatban (42-6 pont) egy „fényrészecske" *(foton)* energiája egy elektron és egy pozitron keltéséhez szükséges nyugalmi energiává plusz a két részecske mozgási energiájává alakul át.

Általános gyakorlat, hogy a részecskék tömegét elektronvoltban (eV) fejezzük ki, ez sokszor igen kényelmes a gyakorlatban[8] (lásd a 41-1 táblázatot.) Hasonlóképpen az impulzust is előnyös MeV/c egységekben megadni. Meg-

[8] Természetesen a tömeg nem egyenlő, hanem csak egyenértékű az energiával. Ezek a mennyiségek a c^2 szorzón keresztül állnak kapcsolatban.

jegyzendő, hogy amikor azt mondjuk, hogy „egy részecske energiája 2 MeV", általában arra gondolunk, hogy a részecske mozgási energiája 2 MeV.

41-8 PÉLDA

Az ötcentes pénzdarab tömege kb. 3 gramm. Számítsuk ki, hogy ez mennyi energiának felel meg.

MEGOLDÁS

$$E = mc^2 = (0{,}003\ \text{kg})(3\times10^8\ \text{m/s})^2 = 2{,}70\times10^{14}\ \text{J}$$

Ez körülbelül annyi energia, amennyit a Hoover Dam vizierőmű 2,5 nap, a paksi atomerőmű pedig kb. 2 nap alatt termel meg.

Az mc^2 nyugalmi energia és a K mozgási energia összege a rendszer E teljes energiáját adja:

A TELJES RELATIVISZTIKUS ENERGIA

$$E = mc^2 + K \qquad \textbf{(41-20)}$$

és

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \textbf{(41-21)}$$

Ez a megállapítás új megmaradási törvényhez vezet, a tömegenergia megmaradási törvényéhez, amely a klasszikus fizika két megmaradási elvét egyesíti, az energia megmaradásának elvét, és a „klasszikus" tömeg megmaradásának elvét (mely a kémiai reakciók leírásában játszott fontos szerepet).

Egy részecskerendszer U belső energiája a rendszer $E_0 = mc^2$ nyugalmi energiájának része. Ha például egy rugót megnyújtunk és ezáltal pozitív U_{sp} potenciális energiát adunk neki, akkor a rendszer nyugalmi energiája is megnő egy kevéssel (bár a növekedés olyan kicsiny, hogy közvetlenül megmérni lehetetlen). A protonból és neutronból álló kötött rendszer, a deuteron nevű stabilis részecske (a ^{2}H hidrogén-izotóp atommagja) példa arra, hogy egy rendszer belső energiája negatív is lehet. A proton és a neutron szétválasztásához az őket összetartó erőkkel szemben munkát kell végezni a rendszeren. Ez azt jelenti, hogy a deuteron belső kötési energiája (a zérus potenciális energiát képviselő nyugvó szabad protonból és neutronból álló rendszerhez képest) negatív és a deuteron nyugalmi energiája kicsit kisebb, mint a szabad proton és a szabad neutron nyugalmi energiájának az összege.

41-9 PÉLDA

A deuteron egy neutron és egy proton kötött állapota. A 41-1 táblázat alapján számítsuk ki, mekkora energia kell ahhoz, hogy a deuteront neutronra és protonra bontsuk fel.

MEGOLDÁS

A proton és a neutron együttes nyugalmi energiája 938,280 MeV + 939,573 MeV = 1877,853 MeV. A deuteron nyugalmi energiája 1875,628 MeV, amit az előző összegből levonva 2,2 MeV adódik. Ez a deuteron kötési energiája.

A fenti példában, a deuteron felbontásához szükséges energiát úgy is betáplálhatnánk, hogy a deuteront egy másik részecskével vagy elegendően nagy energiájú fotonnal (melynek a jele γ a gamma sugárból) bombáznánk. Ezt az ún. *foto-indukált reakciót* a

$$\gamma + d \rightarrow n + p$$

alakban szokás felírni. A fordított reakció a proton és a neutron egyesítése deuteronná, melynek során egy 2,22 MeV energiájú foton szabadul fel. Ez viszi el a beépülő részecskék nyugalmi energia változásának megfelelő energiát. A reakció

$$n + p \rightarrow d + \gamma$$

Lásd a 45. fejezetet a magreakciók részletesebb tárgyalását illetően.

Általában úgy gondoljuk, hogy a részecskéknek zérusnál nagyobb nyugalmi tömegük van. Vannak azonban más típusú részecskék is, amelyekről úgy hisszük, hogy nyugalmi tömegük zérus. Ilyenek a fotonok, a neutrinók és az (eddig még nem észlelt) gravitonok[9]. Az $E\sqrt{1-\beta^2} = mc^2$ összefüggésből arra következtetünk, hogy ezek a zérus nyugalmi tömegű részecskék szükségszerűen csak a fény $v = c$ sebességével mozoghatnak, hogy a relativisztikus impulzus képletében szereplő négyzetgyökös tényező is zérus legyen.

Az E-re, K-ra és p-re vonatkozó képleteket kombinálva az alábbi hasznos összefüggéseket kaphatjuk:

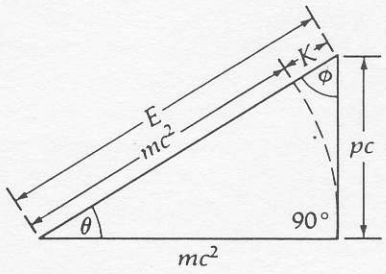
TOVÁBBI ÖSSZEFÜGGÉ-SEK A RELATIVISZTIKUS ENERGIA ÉS IMPULZUS KÖZÖTT

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \qquad \textbf{(41-22)}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2mc^2K} = \sqrt{2mK\left(1 + \underbrace{\frac{K}{2mc^2}}_{\text{Relativisztikus korrekció}}\right)} \qquad \textbf{(41-23)}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{(pc)^2}{2mc^2} = K\left(1 + \underbrace{\frac{K}{2mc^2}}_{\text{Relativisztikus korrekció}}\right) \qquad \textbf{(41-24)}$$

$$v = \frac{pc^2}{E} = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \qquad \textbf{(41-25)}$$



41-14 ábra
Az E, K és a p mennyiségek közötti kapcsolat emlékezetben tartását elősegíti a derékszögű háromszög és a Pitagorasz-tétel, amely szerint $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Jegyezzük meg azt is, hogy $E = mc^2 + K$. Azt is könnyű megmutatni, hogy $\sin\theta = \beta$ és $\sin\phi = \sqrt{1-\beta^2}$.

[9] Az 1987A szupernova értékelésekor a neutrínókitörésnek a fényfelvillanáshoz képest mért késése esetleg azzal magyarázható, hogy a neutrínó egyik formájának – az elektron-antineutrínónak – kicsiny, 14 eV/c^2-nél nem nagyobb nyugalmi tömege van. Ez a következtetés azonban a szupernova-robbanás lefolyásáról alkotott (igencsak vitatható) képünkön alapul, így az sem kizárt, hogy minden neutrínó tömege valóban zérus. A graviton egy feltételezett zérus tömegű részecske, melyet a gravitációval kapcsolatos modern elméletekben használunk.

Amikor az E energia sokkal nagyobb, mint az mc^2 nyugalmi energia, a (41-22) képlet első tagját el lehet hanyagolni, amivel egy új hasznos összefüggéshez jutunk.

NAGY ENERGIÁS KÖZELÍTÉS

$$E \approx pc \qquad (ha\ E >> mc^2) \qquad \textbf{(41-26)}$$

41-10 PÉLDA

Adjuk meg annak a protonnak a) az impulzusát, b) a sebességét, amelynek a mozgási energiája egyenlő a nyugalmi energiájával!

MEGOLDÁS

a) A (41-23) képletből

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2mc^2K} = \frac{K}{c}\sqrt{1 + 2\frac{mc^2}{K}}$$

Mivel $K = mc^2$, ekkor

$$p = \frac{mc^2}{c}\sqrt{1+2} = \frac{(938\,\text{MeV})}{c}\sqrt{3} = 1625\frac{\text{MeV}}{c}$$

b) Mivel $K = mc^2$, ezért $E = mc^2 + K = 2mc^2$. Így a (41-24) képletből

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{\left(1625\frac{\text{MeV}}{c}\right)(c^2)}{(2)(938\ \text{MeV})} = 0{,}866c \quad \text{vagy} \quad 2{,}60\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

41-11 PÉLDA

Adjuk meg a) az E teljes energia, b), a K mozgási energia és c) a p impulzus értékét egy $v = 0{,}6c$ sebességű elektron esetére!

MEGOLDÁS

a)
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Minthogy $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-(0{,}6)^2} = 0{,}8$ és $mc^2 = 0{,}511$ MeV, kapjuk, hogy

$$E = \frac{0{,}511\,\text{MeV}}{0{,}8} = 0{,}639\ \text{MeV}$$

b) A mozgási energia:

$$K = E - mc^2 = 0{,}639\ \text{MeV} - 0{,}511\ \text{MeVm} = 0{,}128\ \text{MeV}$$

c) Az impulzus: $p = mv/\sqrt{1-\beta^2}$. Ha a számlálót és a nevezőt c^2-tel megszorozzuk, azt kapjuk, hogy

$$p = \frac{mc^2 v}{\sqrt{1-\beta^2 c^2}} = \frac{(0{,}511\,\text{MeV})(0{,}6c)}{(0{,}8)(c^2)} = 0{,}383\frac{\text{MeV}}{c}$$

41-12 PÉLDA

Egy gyorsítóból protonok lépnek ki 500 GeV (5×10^5 MeV) mozgási energiával. a) Mennyivel tér el β az egységtől ezekre a protonokra? b) Mekkora az impulzusuk GeV/c egységekben?

MEGOLDÁS

a) Minthogy a protonok mozgási energiája 500-szor nagyobb a nyugalmi energiájuknál, alkalmazhatjuk az extrém-relativisztikus esetre vonatkozó közelítést (lásd a 41-4 példát):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong \frac{mc^2}{\sqrt{2(1-\beta)}}$$

Átrendezéssel:

$$\sqrt{2(1-\beta)} = \frac{mc^2}{E} = \frac{938\,\text{MeV}}{5\times10^5\,\text{MeV}} = 1{,}876\times10^{-3}$$

$$(1-\beta) = \frac{(1{,}876\times10^{-3})^2}{2} = 1{,}76\times10^{-6}$$

b) A (41-26) képletből adódik, hogy

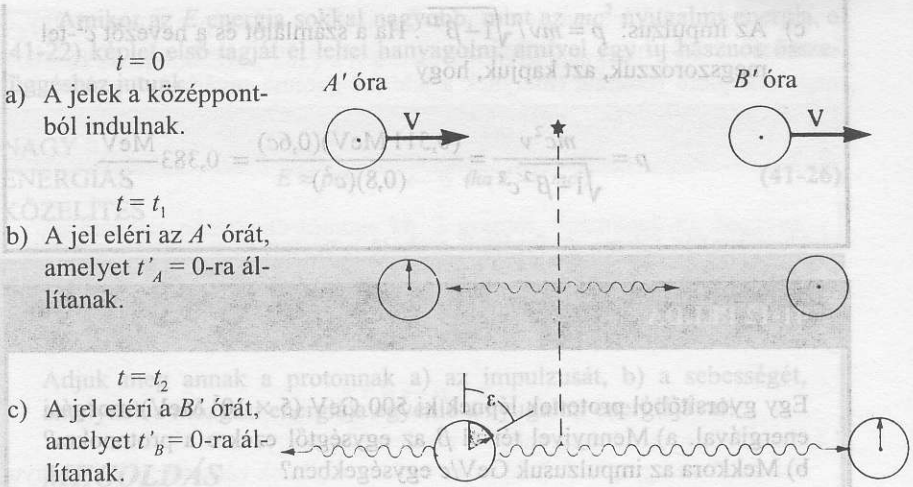
$$p = \frac{E}{c} = \frac{500\,\text{GeV}}{c}$$

Figyeljük meg, hogy milyen nyilvánvaló előnyökkel jár az impulzus GeV/c egységekben való kifejezése.

41.13 A mozgó órák aszinkronitása

Az S' rendszerben előírás szerint szinkronizált órák rendszere az S vonatkoztatási rendszerből nem látszik megfelelően szinkronizáltnak. Az időtágulás mellett ez a jelenség talán a legnagyobb próbatétele a józan észre épülő elgondolásainknak. Ez a jelenség a forrása a speciális relativitás legtöbb – úgynevezett – „paradoxonának".

Idézzük fel az A' és a B' óra szinkronizálásának a módszerét. Ezek az órák az S' rendszerben nyugalomban vannak (41.3 pont). Az S' rendszerből nézve az órák között félúton lévő villanólámpa az ellenkező irányban lévő órák felé fényjelet küld. Amikor a fényimpulzus az órákhoz érkezik, az órákat a $t' = 0$ időpontra állítják. Ezzel az eljárással az A' és B' helyesen van szinkronizálva az S' rendszerben.



41-15 ábra

Az S rendszerben mérve úgy tűnik, hogy az *S'*-ben előírás szerint szinkronizált órák ε-nal kiestek a szinkronitásból. Természetesen *az S' rendszerben* az órákat helyesen szinkronizálták, mert a 41-4 ábrán bemutatott eljárást követték. Az egyidejűségnek nincs abszolút, vonatkoztatási rendszertől független jellege.

Most vizsgáljuk meg ezt az eljárást az *S* vonatkoztatási rendszerből (lásd a 41-15 ábrát). Minthogy az *A'* óra a fényjel felé mozog, a fényimpulzussal előbb találkozik, ezért ezt az órát előbb állítják a $t'_A = 0$ értékre. A (fényjellel egy irányban mozgó) *B'* óra a fényjelet (az *S* rendszer szerint) egy későbbi időpontban fogja fel, és csak akkor állítják a *B'* órát a $t'_B = 0$ időpontra. Így az *S* megfigyelői szerint a hátsó óra későbbi időpontot fog mutatni, mint az elülső óra. Vagyis: az *S* rendszerben egy adott időpontban az órák nem lesznek szinkronban.

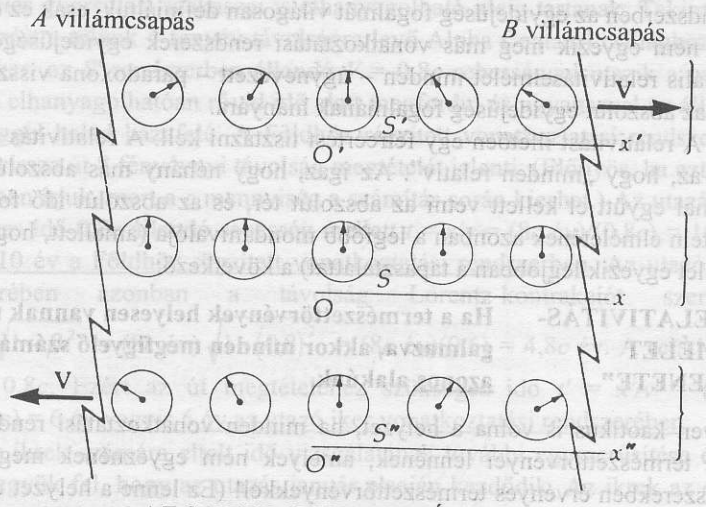
Természetesen a helyzet szimmetrikus. Az *S'* megfigyelői ehhez hasonló módon azt állapítják meg, hogy az *S* órái nincsenek megfelelően szinkronizálva. Mégis: az órák szinkronizálása olyan időskálát állapít meg, *amellyel az események egyidejűsége egy-egy vonatkoztatási rendszerben megállapítható*. Viszont nincs értelme annak, hogy az egyik rendszer szerinti egyidejűséget a másiknál többre értékeljük. Ezért a (térben egymástól távol végbemenő) egy vonatkoztatási rendszerben egyidejűnek tűnő események nem szükségszerűen egyidejűek egy másik vonatkoztatási rendszerben. Az aszinkronitás mértéke közvetlenül kapcsolatos a Lorentz-transzformáció időre vonatkozó képletének (Vx'/c^2) tagjával. Következésképpen a t' idő nemcsak a t és a V, hanem az x helykoordináta értékétől is függ. A relativitáselméletben a hely és időkoordináták különböző rendszerekben kölcsönösen függnek egymástól. Megmutatható, hogy két, egymáshoz képest mozgó óra által mért idő közti különbség a következő:

MOZGÓ ÓRA-RENDSZEREK ASZINKRONITÁSA

Az S' rendszerben helyesen szinkronizált két óra, melynek távolsága $\Delta x'$, az S rendszer megfigyelői számára helytelenül szinkronizáltnak látszik, az eltérés

$$|\varepsilon| = \frac{V\Delta x'}{c^2} \qquad \textbf{(41-27)}$$

A hátulsó óra **<u>későbbi</u>** *időpontot mutat, mint az elülső óra.*



Helyesen szinkronizált órák az S' rendszerben, jobb felé mozognak.

Helyesen szinkronizált órák S-ben nyugalomban vannak.

Helyesen szinkronizált órák az S'' rendszerben, bal felé mozognak.

AZ S RENDSZERBEN MÉRVE

41-16 ábra
Három vonatkoztatási rendszer óráinak összehangolása adott időpontban az S rendszerből mérve. Mindegyik órarendszert a maga vonatkoztatási rendszerében helyesen szinkronizálták. Ugyanakkor azonban az S rendszerből mérve a mozgó órarendszer nem látszik szinkronizáltnak. Az összehasonlítás megkönnyítése végett feltesszük, hogy a rendszerek origójában lévő órák zérus időpontot mutatnak az egybeeséskor.

Az S-beli megfigyelők számára azonban csak az x' tengely iránya mentén elhelyezett órák szinkronizmusa sérül ilyen módon; az y', ill. a z'-tengely irányában (az S'-ben) lévő órák mindkét vonatkoztatási rendszerből nézve helyesen szinkronizáltak maradnak.

A szinkronitás sérülésének egy másik vonása tárul fel, ha három vonatkoztatási rendszert veszünk tekintetbe, amelyek mindegyikében egy sor óra helyezkedik el a mozgás irányában (lásd a 41-16 ábrát). Tekintsük nyugvónak az S rendszert, mozogjon, az S' rendszer a $+x$ irányban, az S'' rendszer pedig a $-x$ irányban. Az egyszerűség kedvéért feltesszük továbbá, hogy a centrumokban lévő órák mindegyike zérust mutat egy, az S-ben kijelölt pillanatban. A mozgó órasor esetén minden egyes óra *későbbi* időpontot mutat, mint a sorban előtte lévő. Tegyük most fel, hogy az adott időpontban egy-egy villámcsapás, A és B éri rendre a bal és a jobb oldali óracsoportot. Ezt a két eseményt az S megfigyelői egyidejűeknek észlelik, mert a becsapódások helyén az órák ugyanazt az időpontot mutatják. Ellenben az S' rendszer óráit leolvasva a B esemény az A esemény előtt következett be, míg az S'' megfigyelői szerint az A esemény következett be B előtt. Ennélfogva nincsen abszolút egyidejűség!

Vajon nem jelenti-e az események sorrendjének ez a megfordulása azt, hogy valamelyik vonatkoztatási rendszerben az „okozat" megelőzheti az „okot"? Előfordulhat-e, hogy a nyíl előbb csapódjon a céltáblába, mint ahogyan az íj húrját elhagyta volna? Nem! Gondos elemzés feltárja, hogy csak azoknak az eseményeknek a sorrendje fordulhat meg a vonatkoztatási rendszer megváltoztatásával, amelyeket sehogyan sem lehet oksági kapcsolatba hozni. Így a relativitáselmélet fenntartja az okság fontos elvét.

Hangsúlyozni kell, hogy az események sorrendjére vonatkozó eltérő eredmények nem abból adódnak, hogy egy távoli eseménytől származó fényjelnek véges időre van szüksége, míg a megfigyelőhöz elér (és így a megfigyelő az egyik eseményt a másik után látja). Még akkor is fennmaradnak az egyidejűség (vagy a nem-egyidejűség), különleges tulajdonságai, ha a véges jelátfutási időt figyelembe vesszük. Természetesen adott vonatkoztatá-

si rendszerben az egyidejűség fogalmát világosan definiáltuk, csak ez egyszerűen nem egyezik meg más vonatkoztatási rendszerek egyidejűségével. A speciális relativitáselmélet minden – úgynevezett – paradoxona visszavezethető az abszolút egyidejűség fogalmának hiányára.

A relativitást illetően egy félreértést tisztázni kell. A relativitás üzenete nem az, hogy „minden relatív". Az igaz, hogy néhány más abszolút fogalommal együtt el kellett vetni az abszolút tér, és az abszolút idő fogalmát. Einstein elméletének azonban a legfőbb mondanivalója (amellett, hogy ez az elmélet egyezik legjobban a tapasztalattal) a következő:

A RELATIVITÁS-ELMÉLET „ÜZENETE" **Ha a természettörvények helyesen vannak megfogalmazva, akkor minden megfigyelő számára azonos alakúak.**

Milyen kaotikus is volna a helyzet, ha minden vonatkoztatási rendszernek saját természettörvényei lennének, amelyek nem egyeznének meg a más rendszerekben érvényes természettörvényekkel! (Ez lenne a helyzet ugyanis, ha valaki a newtoni fogalmakhoz ragaszkodna.) Einstein azáltal, hogy olyan modellt adott, amelyben a természet minden vonatkoztatási rendszerben ugyanolyan módon viselkedik, nagy egyszerűsítő lépést tett az Univerzum megértésében.

41.14 Az ikerparadoxon

Az úgynevezett ikerparadoxon egymaga több vitát okozott, mint bármely más kérdés a relativitáselméletben. [10] Röviden kifejtve az ikerparadoxon a következő: két iker él a Földön. Az egyik elhatározza, hogy relativisztikus utazást tesz egy távoli csillaghoz, majd visszatér. A relativitás elmélet szerint, amikor az utazó iker visszatér, fiatalabb lesz, mint a Földön maradó testvére. A paradoxon akkor adódik, ha felvetjük, hogy vajon: az utazó iker miért nem állíthatja, hogy mivel ő vonatkoztatási rendszeréből nézve a Földön maradt testvére mozgott hozzá képest nem ő, hanem a földi testvér maradt fiatalabb az újratalálkozáskor? Végtére is nem éppen a relativitás elmélet állítja, hogy az abszolút mozgás csupán fikció?! Nem lehet az ikertestvérek közül bármelyiket mozgónak vagy nyugvónak tekinteni, és így a helyzetet szimmetrikusnak felfogni? Nem bizony! Mert az utazó testvérnek valamiképpen gyorsulnia kell, hogy a visszatéréshez megváltoztassa a sebességét, a gyorsulás pedig csak az utazó iker vonatkoztatási rendszerével kapcsolatos! A gyorsulás abszolút, nem pedig relatív dolog, ezért az esemény nem szimmetrikus. A következmények részletezése fáradságos, de a következtetés elkerülhetetlen: az utazó iker valóban fiatalabb lesz visszatértekor, mint a Földön maradt testvére.

Az ikerparadoxont a speciális relativitáselmélet keretei között is elemezhetjük, ha az utazást egyenes vonal mentén lezajló mozgásként képzeljük el, melynél a fordulással járó gyorsulási szakaszok elhanyagolhatóan rövidek a többi időintervallumhoz képest,[11] valamint feltételezzük, hogy az indulás és

---

[10] A relativitáselméletről kitűnő információforrás a Resource Letter SRT-1 (Selected Reprints: Special Relativity Theory), amit az American Institute of Physics adott ki (335 East 45th Street, New york, NY:10017) A relativitáselmélet történeti előzményeinek érdekes diszkussziója található G. Holton cikkében: American Journal of Physics 28. 627 (1960). Az ikerparadoxon átfogó ismertetésének kérdésében lásd L. Marder: Time and the Space Traveller (University of Pennsylvania Press 1971).

[11] Kísérletileg (a Mössbauer effektus segítségével) bebizonyították, hogy gyorsulások egészen a 10^{16} g értékig nem befolyásolják az órák járását. Csak a relatív sebességek teszik ezt. Lásd C. W. Sherwin, Physical Review 120. 17 (1960).

a megállás gyorsulási szakaszai is elhanyagolható ideig tartanak. Tekintsünk egy utazást a tőlünk 4 fényév távolságra levő Alpha Centauri csillaghoz! Az egyik iker, az S' rendszerben állandó $V = 0{,}8c$ sebességgel utazik a csillag felé, ott elhanyagolhatóan rövid idő alatt megfordul és ugyanazzal az állandó sebességgel halad hazafelé. A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben az oda-vissza út 8 fényévnyi távolság megtételét jelenti. (Előnyös, ha ezt a $8c$ év alakban írjuk, mert a c mennyiség a számítás során kieshet.) Az utazáshoz szükséges idő 0,8c állandó sebesség mellett $t = x/v = (8c \text{ év})/(0{,}8c) = 10$ év, vagyis 10 év a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Az utazó iker rendszerében azonban a távolság Lorentz-kontrakciót szenved: $L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = (8c \text{ év})\sqrt{1-(0{,}8)^2} = (8c \text{ év})(0{,}6) = 4{,}8c$ év. A relatív sebesség 0,8c. Ezért az út megtételéhez szükséges idő $t' = x'/v = (4{,}8c \text{ év})/(0{,}8c) = 6$ év vagyis 6 év az utazó iker vonatkoztatási rendszerében.

Az ikrek számára eltelt idő vizsgálatának további egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy az utazás január elsején kezdődik. Az ikrek az eltelt időről értesítik egymást, megegyeznek abban, hogy minden január elsején rádió jelekkel újévi köszöntést küldenek egymásnak. Ezek a rádiójelek c sebességgel terjednek, és gyakoriságuk 1 impulzus/év (helyi időskála szerint). A 41-17 ábra az utazás diagramját mutatja a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Itt a távolságot a vízszintes tengelyen (fényév egységekben), a függőleges tengelyen pedig az időt (években) ábrázoltuk.

Most pedig a fény *relativisztikus Doppler-eltolódásának* ismert és jól igazolt effektusát fogjuk felhasználni (ami hasonlít a hang Doppler-effektusához, lásd a 18.10 pontot). A relativisztikus Doppler-összefüggés mozgó forrásból érkező fényjel (vagy bármilyen más elektromágneses jel) frekvenciájának eltolódását írja le. (Emlékezzünk azonban arra, hogy a mozgó forrásból érkező fény sebessége is mindig c.) Amikor a fényforrás a megfigyelőtől $V = \beta c$ sebességgel távolodik, a felfogott sugárzás f frekvenciája kisebb, mint a forrás által kibocsátott f_0 frekvencia. Amikor a forrás a megfigyelőhöz közeledik, akkor a felfogott frekvencia nagyobb mint f_0.[12]

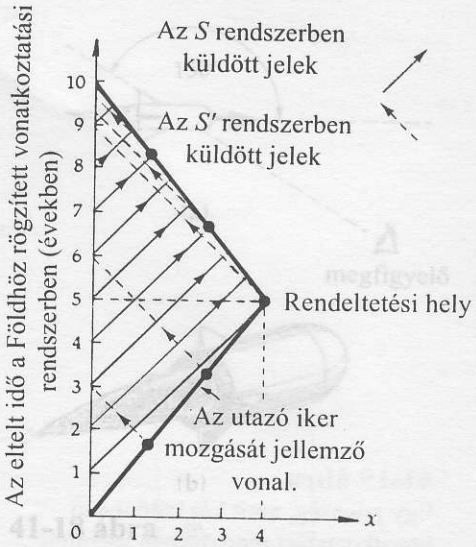
RELATIVISZTIKUS DOPPLER-ELTOLÓDÁS FÉNYNÉL

Távolodó fényforrás	Közeledő fényforrás	
$f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$	$f = f_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$	**(41-28)**

Az ikerparadoxon példájában a rádiójeleket f_0=1 impulzus per év frekvenciával küldik. A fényforrás sebessége $\beta = 0{,}8$. Ha ezeket az értékeket behelyettesítjük a Doppler-eltolódás képletébe, megkapjuk az észlelt frekvenciákat, (az észlelt jelgyakoriságot):

távolodáskor $$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \tfrac{1}{3}f_0$$

közeledéskor $$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f_0\sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}} = 3f_0$$



Távolság a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben (fényévekben)

A FÖLDHÖZ RÖGZITETT S VONATKOZTATÁSI RENDSZERBEN RAJZOLVA

41-17 ábra

Az ikerparadoxon diagramja a földi vonatkoztatási rendszerben. Az utazó iker egyenes mentén $v = 0{,}8c$ sebességgel mozog. (Az indulás, a fékezés, a megfordulás időintervallumai a feltevés szerint elhanyagolhatóan kicsik.) A helyi idő szerint mindegyik iker a másiknak minden január elsején rádiójelet küld. Ezek a rádiójelek a fény c sebességével haladnak és ezért az x-tengelyhez képest 45°-os egyenesekkel ábrázoltuk a jelek útját.

[12] Ha a látóvonal és a forrás mozgásának iránya által bezárt szög θ, akkor az összefüggés

$$f = f_0\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}\right)$$

Amikor $\theta = 90°$, akkor a frekvenciaeltolódás éppen az idődilatáció effektusával egyezik meg.



Világos, hogy az utazás tartama alatt a Földön (az S rendszerben) 10 esztendő telik el. A legmeglepőbb dolog az, hogy ezalatt az S'-ben csak 6 esztendő telik el. Ez utóbbi időtartamot az ikerpár bármely tagja saját vonatkoztatási rendszerében is kiszámolhatja, felhasználva a relativisztikus Doppler-összefüggéseket, és figyelembe véve a testvérétől érkező rádiójelek gyakoriságát. A számolás menete a következő:

Az S'-ben számolva:

Az S'-ben lévő iker 3 évente fog fel jelet az utazás első felében, és 3 jelet észlel évente az utazás második felében. A jelészlelés átlagos gyakorisága az egész utazás alatt így

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)(3)=\tfrac{5}{3} \text{ évente.}$$

Összesen tíz jel érkezett, így a teljes idő: $10/(5/3) = 6$ év!

Az S-ben számolva:

Az S-ben lévő iker évente 1/3 gyakorisággal fog fel jeleket az utazás első 9 éve alatt és 3 jel/év gyakorisággal az utazás utolsó évében. A felfogott jelek száma az S-ben így $(1/3)(9) + (3)(1) = 6$, ami azt jelenti, hogy hat év telt el S'-ben.

Így mindkét iker arra a következtetésre jut, hogy S'-ben 6 év telt el az utazás alatt. Jóllehet mindkét iker öregedett az utazás során, a találkozáskor az űrutazó iker 4 évvel fiatalabb, mint testvére, aki a Földön maradt.

A részletesebb elemzés azt mutatja, hogy a jelenség döntő mozzanata az S' rendszer mozgásának a fordulópontja. Ez a gyorsulás ugyan nem változtatja meg az órák *járásának ütemét*, de drámaian megváltoztatja az *egyidejűség skáláját* az S' számára (lásd pl. a 41-15 ábrát). Csábítást érezhet az Olvasó a részletek kidolgozására. (Ötlet: vázoljuk fel az órák rendszerét a két vonatkoztatási rendszerben a fordulás különböző pillanataira, de gondosan csak *pontszerű eseményeket* rajzoljunk, amelyeket adott pillanatban az adott vonatkoztatási rendszerben mérnek. Emlékezzünk arra, hogy események, amelyek egy vonatkoztatási rendszerben egyidejűek, nem szükségképpen egyidejűek egy másik vonatkoztatási rendszerben)[13]

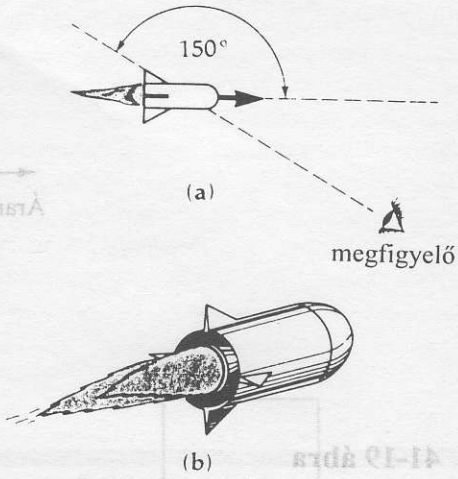
Az ikerparadoxon-effektust bőséges kísérleti eredmény igazolja. Az egyik kísérletben például igen rövid felezési idejű radioaktív részecskéket vezetnek nagy energiájú részecskegyorsítók „tárológyűrűjébe", és nagy sebesség mellett vizsgálják a részecskék bomlását. E részecskékből több éli túl az egy körbefutást, mint amennyire számítanánk hasonló, de a laboratóriumhoz lépest nyugalomban levő részecskék bomlása esetén egyszerűen azért, mert az „utazó" vonatkoztatási rendszerében kevesebb idő telik el. Az egyik kísérletben az eltérés egy 30-as tényező volt, pontos egyezésben a relativitáselmélet megállapításával. Az első olyan kísérletet, amit makroszkópikus órákkal hajtottak végre, 1971-ben végezték, mikoris négy cézium-órát vittek körbe repülőgépen a Föld körül, kettőt keleti, kettőt nyugati irányban[14]. Az eredmények igazolták az ikerpardoxon-effektust. Persze különösnek látszik, hogy két eredetileg szinkronizált óra, amelyek *mindegyike a helyes sajátidőt mutatja*, az utazás során egymástól eltávolodva majd újra találkozva, eltérő

[13] Ennek a következményeit egy tanulmányban E. S. Lowry magyarázza, *American Journal of Physics*, 31, 59 (1963). Az ikerparadoxon jó tárgyalása található G. David Scott cikkében: *American Journal of Physics* 27. 580 (1959) és A. Schild tanulmányában: *American Mathematical Monthly*, 66. 1 (1959).

[14] Lásd még J. C. Hafele-R. E. Keating: „Around the World Atomic Clocks", *Science*, 177. 166-170 (1972 júl. 14.) című két egymást követő cikkét. Későbbi kísérletek az effektust 1%-nál nagyobb pontossággal igazolták.

időt mutat. Pedig ez az ikerparadoxon effektusának lényege. S ez csupán a következménye annak a ténynek, hogy nincsen abszolút idő, nincsen abszolút egyidejűség.

Utolsó megjegyzésként egy meglepő példával illusztráljuk az ikerparadoxont: egy elképzelt egyenesvonalú utazással, amelyben egy űrhajó mindvégig állandó g gyorsulással halad mégpedig úgy, hogy kifelé félútig gyorsul, az út másik felén pedig lassul, és a célállomásnál megáll. A visszautazást hasonló módon hajtják végre. Az ilyen állandó g gyorsulásos utazás kényelmesen elviselhető az utazók számára, hiszen ez a megszokott földi feltételeket szimulálja. A 2 millió fényév távolságra levő Andromeda-galaxishoz utazva az űrhajón csak 59 év telne el, míg a Föld több mint 4 millió évvel lenne idősebb az űrhajó visszaérkezésekor. Egy hasonló, de az űrhajó vonatkoztatási rendszerében 78 évig tartó oda-vissza út során 500 millió fényév távolságra juthatnánk el és visszaérve, a Földet több, mint egy milliárd évvel látnánk idősebbnek. Az ilyen utazások, bár semmiféle természeti törvény nem tiltja őket, a felmerülő műszaki nehézségek miatt gyakorlatilag lehetetlenek.[15]



41-18 ábra
A Terrell-jelenség. James Terrell megmutatta (elég meglepő módon), hogy ha gyorsan mozgó objektumról elég nagy távolságból fényképet készítünk, akkor az objektum látszólag elfordul nem pedig megrövidül. Miként az alább idézett cikkben említi, Terrell relativisztikus űrhajót vizsgál, ami a megfigyelőhöz $v/c = 0{,}98974$ sebességgel közeledik, és a tárgyat a megfigyelő a mozgás irányához képest 150°-os irányból nézi, ahogyan az (a) vázlat mutatja. A (b) vázlat szerint, a fénykép, illetve a tárgy vizuális megjelenése a megfigyelő számára azt mutatja, hogy a tárgy csaknem a végével közeledik a megfigyelőhöz. Ez a szokatlan jelenség részben abból a tényből származik, hogy a fényképezőgép a számára egyidejűleg beérkező fényeket regisztrálja. Így az objektum távolabbi részeiről korábban kellett elindulniuk a fényjeleknek, mint a közelebbi részeiről, hiszen az előbbieknek több utat kellett megtenniük. További váratlan nyíró-jellegű torzulást okoz az, ha véges térszögből szemléljük a tárgyat, illetve ha térhatású képeket kapunk. A példa azt támasztja alá, hogy a kísérletekben nyert adatok az alkalmazott mérési módszerektől milyen döntő mértékben függenek. (Lásd James Terrell „The Terrell Effect", *American Journal of Physics* 57. 9 (1989))

41.15 A relativitáselmélet és az elektromágnesesség

Tekintsünk egyetlen q töltést, ami az S' vonatkoztatási rendszerben nyugalomban van. Az S'-ben lévő megfigyelők a töltés körül elektromos erőteret észlelnek. Az S-ben lévő megfigyelők számára ez a töltés mozog, ezért nemcsak elektromos, hanem mágneses erőtere is van, a mozgó elektromos töltés ugyanis elektromos áramot képvisel, már pedig az áramok mágneses erőteret keltenek. Így tehát az elektromos és a mágneses erőtér a két – egymáshoz képest mozgó – vonatkoztatási rendszerből különbözőnek látszik. Érdekes, hogy ez volt az a jelenség, ami Einstein speciális relativitásról írt tanulmányának eredetileg a témája volt: „A mozgó testek elektrodinamikája „(*Annalen der Physik* 17. 891-921. (1905)). A tér és az idő új, meglepő fogalmainak mindegyike, amiről a relativitáselmélet híres lett, egyetlen embernek az elméjéből pattant ki, aki a mozgó töltések problémáján gondolkodott.*

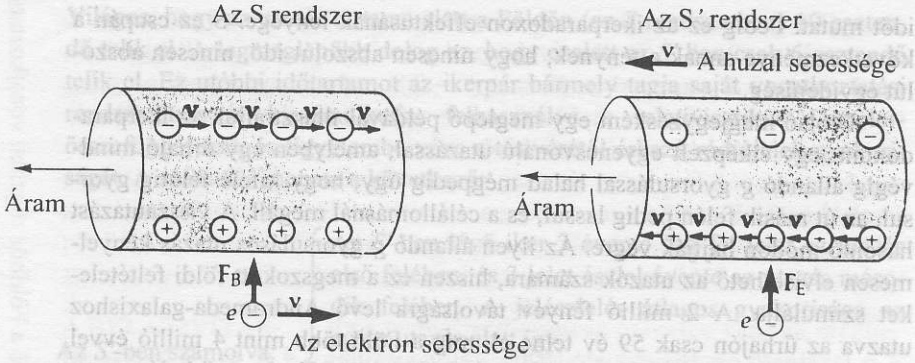
Most olyan helyzetet írunk le, ami világosan mutatja, hogyan lehet az, hogy az egyik vonatkoztatási rendszer elektromos erőterét a másik vonatkoztatási rendszerbeli mágneses erőtérként látjuk. Ez az elrendezés ugyan kissé mesterkélt, de világosan mutatja az elektromágnesség és a relativitáselmélet érdekes kapcsolatát.

Tegyük fel, hogy egy e elektron áramtól átjárt huzal mentén azzal párhuzamosan mozog (41-19a ábra). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az elektronokat a huzalban a pozitív ionoktól elkülönítve ábrázolhatjuk, és az elektronok $\mathbf{v}$ áramlási sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. A huzalon kívüli e elektront is $\mathbf{v}$ sebességgel mozgatjuk és feltesszük, hogy a huzalnak nincsen eredő töltése. A huzalban folyó áram mágneses erőteret hoz létre, amely a mozgó elektron helyén az ábra síkjából kifelé mutat. Emiatt az elektronra a huzal felé mutató $\mathbf{F}_B$ mágneses Lorentz erő hat. Az elektron a huzal felé gyorsul.

Most pedig vizsgáljuk meg ugyanezt a helyzetet a 41-19b ábrán a mozgó töltés szempontjából. Itt a huzal mozog bal felé és az e elektron áll. Az

[15] A hosszútávú űrutazás gyakorlati nehézségeinek érdekes áttekintése található S. von Hoerner tanulmányában, „The General Limits of Space Travel" (Az űrutazás általános korlátai) *Science* 137. (1962) 18-23.

* Ez a megállapítás kissé túlzó, a relativitáselmélet fogalmai mások, pl. Lorentz és Poincaré munkásságához is kapcsolódnak (a fordító megjegyzése.)



Feltételek:

1. A pozitív töltések nyugalomban vannak
2. A negatív töltések jobb felé mozognak v sebességgel. Ezért a negatív töltések közti távolság Lorentz-kontrakcióban látszik.
3. Az eredő lineáris töltéssűrűség a huzal mentén zérus, (mert a Lorentz-kontrakcióban látszó távolság a mozgó negatív töltések között ugyanakkora, mint a nyugalomban lévő negatív töltések közti távolság.)
4. **Az *e* elektronra ható erő teljes egészében mágneses.**

a)

Feltételek:

1. A negatív töltések nyugalomban vannak
2. A pozitív töltések bal felé mozognak v sebességgel. Ezért a pozitív töltések közti távolság Lorentz-kontrakcióban látszik.
3. A huzal mentén az eredő töltéssűrűség pozitív (mert a nyugvó negatív töltések között a távolság nagyobb, mint a mozgó pozitív töltések közti Lorentz-kontrakcióban látszó távolság.)
4. **Az *e* elektronra ható erő teljes egészében elektrosztatikus.**

b)

41-19 ábra
Egy jelenség, amit két különböző vonatkoztatási rendszerben szemlélhetünk. Az, hogy az elektronra ható erő mágneses vagy elektrosztatikus vagy éppen a kettő kombinációja, az a vonatkoztatási rendszer megválasztásától függ. Az S rendszerben az e elektron jobb felé mozog v sebességgel, a huzal pedig nyugalomban van. Az elektronra ható erő *teljes egészében mágneses*. Az S'-ben a huzal mozog balra v sebességgel és az e elektron van nyugalomban. Ekkor az elektronra ható erő *teljes egészében elektrosztatikus*.

elektron rendszerében történő megfigyelés szerint a huzal áramot visz, mert bár az elektronok nyugalomban vannak, a fém pozitív töltései balra mozognak. Mivel az elektron nem mozog, az $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ mágneses Lorentz erő zérus. Nyilvánvaló azonban, hogy ha az elektron az egyik vonatkoztatási rendszerben gyorsul a huzal felé, akkor minden más rendszerből nézve is gyorsulnia kell. Mi lehetne hát (ha nem a *mágneses* erőtér) annak az erőnek a forrása, ami a gyorsulást létrehozza?

Erre a speciális relativitáselmélet adja meg a választ. Az S rendszerből (41-19a ábra) nézve a pozitív ionok nyugalomban vannak, míg a huzal elektronjai v sebességgel mozognak jobb felé. Az elektronok a huzal mentén a $\sqrt{1-v^2/c^2}$ nagyságú Lorentz-kontrakció miatt közelebb látszanak egymáshoz, mint nyugalmi (saját) távolságuk. Ez a Lorentz-kontrakciót szenvedett távolság azonban éppen akkora, mint a mozdulatlan pozitív ionok közti távolság, hiszen a huzalnak nincsen eredő töltése. Az S' rendszerből nézve (ami az e töltés sebességével mozog) a helyzet egészen más. A huzal elektronjai nyugalomban vannak és így nagyobb távolságban látszanak egymástól, mint amennyire az S rendszerben voltak. Ugyanakkor a pozitív ionok a $\sqrt{1-v^2/c^2}$ Lorentz-kontrakciós tényező miatt közelebb látszanak egymáshoz. Összességében az S' megfigyelő, a *huzalnak pozitív töltést tulajdonít*. Ezért S'-ből szemlélve, az elektronra a huzal irányába mutató elektrosztatikus erő hat. A részletes elemzés azt mutatja, hogy *az S rendszerben a mágneses erő pontosan ugyanakkora, mint az S' rendszerben vizsgálva kapott elektrosztatikus erő.*

Ennek az elemzésnek az érvényessége azon a feltevésen alapul, hogy az elemi töltés nem függ a töltés és a megfigyelő relatív mozgásától. Kísérletek egész sora mutatja e feltevés igazságát. Így például amikor egy fémdarabot melegítünk, az elektronok hőmozgása sokkal jobban növekszik, mint a pozitív ionoké. Mégsem tapasztaljuk, hogy a fémdarab eredő töltése megváltozna.

Idézzük fel újra a 28-1 példát, amely azt mutatta, hogy az elektronok vándorlási sebessége egy huzalban, amelyben áram van csak kb. 0,1 mm/s nagyságrendű. Milyen meglepő, hogy az ilyen kicsiny sebesség mellett fellépő mágneses erőtérről a relativisztikus Lorentz-kontrakciós effektus ad számot.

41.16 Az általános relativitáselmélet

Mindezideig elkerültünk egy különös rejtélyt. A tömegnek két, látszólag különböző tulajdonsága van: gravitációs vonzóképessége és tehetetlensége a gyorsítással szemben. Ez a két tulajdonság látszólag különböző. Hogy ezt a különbséget kifejezzük, a gravitációs tulajdonság és a tehetetlenségi tulajdonság jelölésében g és t indexet használunk.

Gravitációs tulajdonság $W = m_g g$

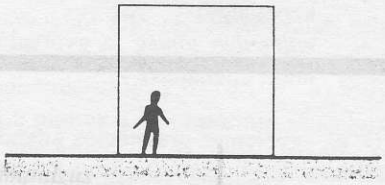
Tehetetlenségi tulajdonság $F = m_t a$

A G gravitációs állandó értékét úgy választottuk meg, hogy m_g és az m_t számértékre egyenlő legyen. Tekintet nélkül azonban a G érték rögzítésére, m_g és m_t szigorú *arányosságát* kísérletileg rendkívüli nagy pontossággal megállapították,* a relatív eltérés kevesebb, mint 10^{-12}. Ennélfogva úgy látszik, a gravitációs és a tehetetlen tömeget pontosan arányosnak tekinthetjük.

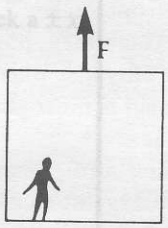
De miért? Mikor úgy látszik, hogy az anyag két teljesen különböző tulajdonságát fejezik ki: a tömegek közti kölcsönös gravitációs vonzást és tömeg reakcióját a gyorsítással szemben. Ez a körülmény már Newton és más fizikusok érdeklődését is felkeltette, mígnem aztán Einstein 1916-ban nyilvánosságra hozta gravitációs elméletét, amit *általános relativitáselmélet* néven ismerünk. Az elmélet matematikai szempontból bonyolult, így csak utalhatunk arra az eleganciára és mélységre, amely Einsteinnek ezt az alkotását jellemzi.

Einstein nézete szerint az a figyelemreméltó tény, hogy m_g és m_t szigorúan arányos egymással, a két fogalom igen mély belső kapcsolatának a megnyilvánulása. Rámutatott arra, hogy *mechanikai* kísérlettel (pl. testek ejtésével) nem lehet megkülönböztetni a 41-20 (a és b) ábrán felvázolt két különböző helyzetet. A megfigyelő által elengedett test mindkét esetben g gyorsulással mozog lefelé, a kabin padlója felé.

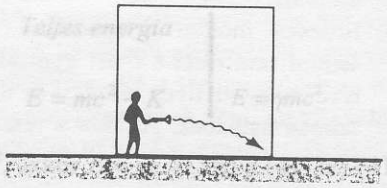
Einstein ezt az elgondolást tovább folytatva elmélete egyik alapposztulátumaként azt a feltevést javasolta, hogy nincs olyan mechanikai, vagy bármely más jellegű fizikai kísérlet, amelynek alapján a fent vizsgált két eset között különbséget lehetne tenni. A gyorsuló, ill. gravitációs térbe helyezett rendszerek egyenértékűségének ez a fajta általános, bármely jelenségkörre való kiterjesztése igen érdekes következményekkel jár. Tegyük fel például, hogy egy fényimpulzust küldünk a kabinon keresztül vízszintes irányban, ahogy a 41-20 (c) ábra mutatja. A felfelé gyorsuló kabinban a fényimpulzusnak lefelé, a kabin padlója felé görbülő pályája lenne. Einstein elgondolása



a) Homogén gravitációs erőtérben nyugvó megfigyelő, a g gyorsulás a gravitáció következménye.



b) Megfigyelő – elhanyagolható gravitációjú térrészben. A vonatkoztatási rendszert külső F erő a térben állandó g gyorsulással mozgatja.



c) Ha az (a) és (b) igazán egyenértékűek, ahogyan Einstein elképzelte, akkor a fénysugárnak a gravitációs erőtérben el kellene görbülnie. Ilyen effektus létét kísérletileg igazolták olyan fény-, illetve rádiójelek vizsgálatával, amelyek a Nap erős gravitációs terén haladtak át.

41-20 ábra
Einstein szerint ez a két vonatkoztatási rendszer, az (a) és a (b) minden tekintetben egyenértékű. Semmiféle fizikai kísérlettel sem lehet köztük különbséget tenni.

* (Ezt az arányosságot először Eötvös Loránd mutatta ki nagy pontossággal, kísérleti alapot szolgáltatva ezzel az általános relativitáselmélet megalkotásához (a fordító megjegyzése))

szerint így az (a) esetben is a fénysugárnak a gravitációs erőtérben lefelé (a gravitációs tér irányában) el kell görbülnie. (Ilyen fénysugárelgörbülés nem szerepelt Newton gravitációelméletében.)

Einstein **általános relativitáselméletének** két alapposztulátuma:

AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁS-ELMÉLET ALAP-POSZTULÁTUMAI

1. **A természet törvényei megfogalmazhatóak úgy, hogy tetszőleges tér-idő-vonatkoztatási rendszerben bármely megfigyelő szerint azonos matematikai alakúak legyenek, akár gyorsul a vonatkoztatási rendszer, akár nem.** (Ez a *kovariancia-elve.*[16])

2. **Tetszőleges pont közelében a gravitációs tér minden tekintetben egyenértékű egy olyan gyorsuló vonatkoztatási rendszerrel, amelyben nincs gravitáció.** (Ez az *ekvivalencia-elv.*)

A második posztulátumnak az a következménye, hogy a gravitációs és tehetetlen tömeg nemcsak arányos, hanem teljesen egyenértékű is egymással. Amit eddig két különböző tömegnek gondoltunk, az most ténylegesen, alapvetően azonos.

Az általános relativitáselmélet által megjósolt érdekes hatások egyike, hogy az idő múlásának ütemét a gravitáció megváltoztatja. A gravitációs térbe helyezett óra lassabban jár, mint az olyan, melynek helyén a gravitáció elhanyagolható. Ennek következtében az erős gravitációs erőtérben lévő atomok által kibocsátott fény színképvonalai a kis frekvenciák felé tolódnak el, vagyis *vöröseltolódást* mutatnak az ugyanolyan atomok gyenge gravitációs térben kibocsátott fényének színképvonalaival összehasonlítva. Ezt a gravitációs vöröseltolódást a nagy tömegű csillagok által kibocsátott fény színképvonalainál ki is mutatták. A Földön is megfigyelték ezt az effektust, összehasonlítva egymástól 20 méteres szintkülönbségben elhelyezett azonos atommagok gammasugárzásának frekvenciáit[17].

A második posztulátum azt a benyomást kelti, hogy a „gravitációs erőtér kitranszformálható" bármely pontban, ha megfelelően gyorsuló – szabadon eső – vonatkoztatási rendszert választunk és arra térünk át. Einstein szellemes módszert dolgozott ki a szükséges gyorsulás egzakt jellemzésére. Speciális mennyiséget vezetett be, a *téridő görbületét*, amellyel a gravitációs hatás a téridő minden pontjában leírható. A görbült téridő ténylegesen helyettesíti Newton gravitációelméletét.[18] Einstein szerint nincs olyasmi, mint gravitációs erő. Ehelyett a nagy tömegek, mint pl. a Nap közelében a tömeg a téridőben görbületet okoz, ez a görbület kialakítja a téridőben azokat a pályákat, amelyeket a szabadon eső testek követnek. Ahogyan egy fizikus kifejezte: „A tömeg megmondja a téridőnek, hogy hogyan görbüljön, a görbült téridő pedig megmondja a tömegnek, hogy hogyan mozogjon".

Ha a tömegkoncentráció nagyon naggyá válik, – ami elképzeléseink szerint akkor következik be, pl., amikor egy nagy csillag elhasználta nukleá-

---

[16] Azt az egyenletet, amely a koordinátarendszerek közötti transzformáció alkalmazása után is ugyanolyan alakú marad, erre a transzformációra nézve *kovariánsnak* nevezzük.

[17] Lásd R. V. Pound – J. L. Snider: „Effects of Gravity on Gamma Radiation" (A gravitáció hatása a gamma-sugárzásra) *Physical Review* B. 140. 788 (1965) – Egy további kísérletről R. F. C. Vessot et al: „Test of Relativistic Gravitation with Space-Borne Hydrogen Maser" (A relativisztikus gravitáció ellenőrzése űrhajón elhelyezett hidrogén-mézerrel) *Physical Review Letters*, 45. 2081 (1980)

[18] A görbült téridő elméletébe bevezetés található pl. J. J. Callahan: „The Curvature of Space in a Finite Universe" (A térgörbület véges Univerzumban) *Scientific American*, (1970 aug) 90-100

ris üzemanyagát és igen kis térfogatúra omlik össze – akkor kialakulhat egy **fekete lyuk**. Itt a téridő görbülete már olyan nagy, hogy a centrumtól bizonyos távolságig, az összes anyag, beleértve a fényt is, csapdába kerül.

Ebben a fejezetben a relativitáselméletnek azokra a vonásaira irányítottuk a figyelmet, amelyek a térrel, az idővel, az energiával és az impulzussal kapcsolatosak. A relativitáselmélet igazán nagy jelentőségűvé az atomfizikai és a magfizikai alkalmazásokban, az elektromos és mágneses erőterek tárgyalásában, asztrofizikai és kozmológiai vizsgálatokban válik. Ez a rövid bevezetés csak felkeltheti az Olvasó étvágyát ennek az érdekes tárgykörnek a további részletes tanulmányozására. A relativitáselmélet minden bizonnyal az emberi elme legkimagaslóbb alkotásainak egyike.

Összefoglalás

A **speciális relativitáselmélet** két különböző (S és S') vonatkoztatási rendszerben vizsgált események mérési adatait hasonlítja össze, amikor a rendszerek egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek V sebességgel.

Pontszerű esemény

(x, y, z, t) (Az S rendszerben)

(x', y', z', t') (Az S' rendszerben)

Mindegyik eseményt az esemény helyén lévő helyi megfigyelő regisztrálja, akit a vonatkoztatási rendszer többi órájával szinkronizált órával láttak el..

A speciális relativitáselmélet posztulátumai

1. *A fizika minden törvényének ugyanaz az alakja bármely speciális vonatkoztatási rendszerben* (ez a relativitás elve).
2. *A fény sebessége (vákuumban) minden inerciarendszerben ugyanaz a c érték* (ez a fénysebesség állandóságának elve).

Ezekből a posztulátumokból a következő összefüggéseket lehet levezetni. (Megjegyezzük, hogy $\beta \equiv V/c$ és $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$.)

Az időtágulás

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad T = \gamma T_0$$

ahol a T_0 olyan időintervallum kell, hogy legyen, amit egyetlen órával kell megmérni

A hosszkontrakció

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad L = \frac{L_0}{\gamma}$$

ahol L_0 olyan távolság kell, hogy legyen, amelyet olyan vonatkoztatási rendszerben kell megmérni, ahol az objektum nyugalomban van

A relativisztikus impulzus

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$$

Relativisztikus sebességösszeadás (olyan sebességekre, amelyek a $\pm x$ irányban mutatnak):

$$v = \frac{v' + V}{1 + \left(\frac{v'V}{c^2}\right)}$$

A mozgási energia

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 \qquad K = mc^2(\gamma - 1)$$

A nyugalmi energia	*Teljes energia*	
$E_0 = mc^2$	$E = mc^2 + K$	$E = \gamma mc^2$

Amikor a $E >> mc^2$, akkor $E \approx pc$. (Lásd a (41-22)-(41-25) képleteket is.)

Ha egy Δm mennyiségű tömeg eltűnik, amikor részecskék kötött rendszerré egyesülnek, akkor ehhez $\Delta E = (\Delta m)c^2$ nagyságú energia is társul, ami a rendszer kötési energiája.

Az *ikerparadoxon*. Amikor egy ikerpár egyik tagja relativisztikus oda-vissza úton vesz részt, akkor visszatértekor fiatalabb lesz, mint otthon maradó testvére.

A *mozgó órák aszinkronitása*. Két óra, melynek távolsága $\Delta x'$, s amelyek az S' rendszerben helyesen voltak szinkronizálva, az S megfigyelői számára helytelenül szinkronizáltnak bizonyulnak, az eltérés $|\varepsilon| = V\Delta x'/c^2$.

Az „üldöző" óra későbbi időt mutat, mint a „vezető" óra.

A relativitás üzenete: *Ha a természettörvényeket helyesen fogalmazzuk meg, azok minden megfigyelő számára **azonosak**.*

Az általános relativitáselmélet. Kísérletek mutatják, hogy a tömeg két különböző tulajdonsága arányos egymással:

m_g = *gravitációs tömeg* (más tömegek vonzásának képessége)
m_t = *tehetetlen tömeg* (a gyorsulással szemben mutatott ellenállás)

A G, az egyetemes gravitációs állandója, úgy van meghatározva, hogy számszerinti egyezés álljon fenn m_g és m_t között. Einstein oly módon általánosította relativitáselméletét, hogy az magába foglalja a gyorsuló vonatkoztatási rendszereket és a speciális relativitáselmélet inerciarendszereit.

Az általános relativitáselméletelmélet posztulátumai

1. *A természettörvények minden vonatkoztatási rendszerben ugyanolyan alakúak, akár gyorsul a rendszer, akár nem* (ez a kovariancia elve).
2. *Tetszőleges gravitációs erőtér bármely pontja minden tekintetben egyenértékű egy gravitáció nélküli gyorsuló vonatkoztatási rendszerrel,* (ez az ekvivalencia elve).

A newtoni gravitációs erő helyére lépő görbült téridő határozza meg a szabadon eső testek által követett pályákat.

Kérdések

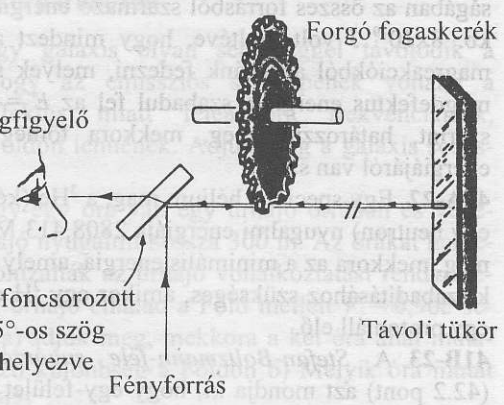
1. Miben járult hozzá Galilei a speciális relativitáselmélet felismeréséhez?
2. Magyarázzuk meg, hogyan lehet az, hogy az oszcilloszkóp ernyőjén mozgó pont a fény sebességénél gyorsabban is mozoghat anélkül, hogy megsértené a relativitás elvét.
3. Beszéljünk arról, hogy milyen lenne az élet, ha a fénysebesség, mondjuk, 100 km/óra lenne.
4. Soroljunk fel mennyiségeket, amelyek értékei két, egymáshoz viszonyítva mozgó inerciarendszerben különbözőek lennének. A fény sebességén kívül, mely mennyiségeknek lenne ugyanaz az értéke a két rendszerben?
5. Milyen körülmények között lehetne valaki idősebb a szüleinél?
6. Érdekes módon a speciális relativitáselméletben semmi sem tiltja a c-nél gyorsabb mozgásokat, feltéve, hogy az ilyen részecskék mindig a c-nél gyorsabban haladnak. Amikor a részecske a fény sebességét egyik vagy másik oldalról megközelíti, a c olyan korlát, amin egyik oldalról sem lehet áthatolni. Van olyan javaslat, hogy léteznek c-nél gyorsabban mozgó részecskék, amiket tachyonoknak neveznek, (a tachos (sebesség) görög szó alapján). Kísérleteket végeztek kimutatásukra, de eddig siker nélkül. Lehetne-e ezeknek nyugalmi tömegük? Mik lennének a kauzalitásban ennek a következményei? (Lásd Bilaniuk és Sudarshan: Particles beyond the Light Barrier" (Részecskék a fénykorláton túl) *Physics Today*, 1969 május, 43.)
7. Magyarázzuk meg, miért mondták azt, hogy a „relativitáselméletet" az „abszolutizmus elméletének" is lehetne nevezni.
8. Egy híres sci-fi-történetben idegenek több embert elrabolnak és egy űrhajón elviszik őket. Az egyik megjegyzi: „A fény sebességével utazunk – nézz az órádra!" Valaki más ránéz az órájára, majd felkiált: „Istenem megállt az órám!" Ennek a jelenetnek a leírásában hol tévedett a szerző?

Feladatok

41.6 Az órák összeigazítása
41.7 Hosszmérések összehasonlítása
41.8 A sajátidő és nyugalmi hossz

41B-1 A stanfordi lineáris elektrongyorsítóból kilépő elektronok sebessége a fénysebességtől $5\times10^{-11}c$-vel tér el. Adjuk meg ezt az eltérést cm/s egységekben.

41B-2 1849-ben H. L. Fizeau kísérletileg meghatározta a fény sebességét úgy, hogy fénysugarat bocsátott át forgó fogaskerék fogai között, miközben a fogaskeréktől 8633 m-re tükör volt elhelyezve, lásd a 41-21 ábrát. Amikor a fényimpulzus visszatért a tükörtől, csak akkor tudott ismét áthaladni a fogaskerék fogai között, ha annak a forgási sebessége éppen megfelelő volt, a fény csak így juthatott el a megfigyelő szeméhez. Így a fogaskerék felgyorsulásakor a megfigyelő folyamatosan a világos-sötét, majd újra világos és így tovább, átmeneteket láthatott attól függően, hogy a visszatérő fényimpulzus a forgó fogaskeréken fogba ütközött-e vagy a fogai között, ha annak a forgási sebessége éppen megfelelő volt, a fény csak így juthatott el a megfigyelő szeméhez. Így a fogaskerék felgyorsulásakor a megfi-



41-21 ábra
A 41B-2 feladathoz

gyelő fokozatosan átmeneteket láthatott, váltakozva a fénysebességből a sötétségbe, majd újra a fénysebességbe, attól függően, hogy a visszatérő fényimpulzus a forgó fogaskeréken fogba ütközött-e vagy a fogak közti résen át tudott-e haladni. Fizeau megfigyelte, hogy a kerékforgás felgyorsulása közben a visszatérő impulzus első takarása a 12,6 fordulat/másodperc esetén következett be. A fogaskeréken 720 fog és 720 köz volt, mind egyenlő szélességűek. Ezeknek az adatoknak a felhasználásával adjuk meg a fény terjedési sebességének Fizeau által is kiszámított értékét! (A Fizeau-féle érték kicsit nagyobb volt, mint a későbbi, pontosabb mérések eredménye.)

41A-3 Egy űrhajósnak a karórája szerint 2 percre van szüksége, hogy egy csokoládérudat elfogyasszon. a) Ha az űrhajós $0{,}5c$ sebességgel utazik a Földhöz képest, határozzuk meg, mekkora időtartam telik el ezalatt a Föld vonatkoztatási rendszerében. b) Adjuk a Föld vonatkoztatási rendszerében, hogy ez alatt az idő alatt mekkora távolságot tesz meg az űrhajó.

41A-4 Bár a Shinkansen „expressvonat" (Japánban) biztonságosan tud haladni 260 km/óra sebességgel, utazósebességét mégis 210 km/óra értékre korlátozták, hogy a zajszintet 75 fon értéken lehessen tartani. Ezen a kisebb sebességen mennyivel rövidebb a vonat a földi megfigyelő számára, mint a nyugalmi hossza, ami 230 m?

41A-5 Az Alpha Centauri csillag 4 fényévnyi távolságra van tőlünk. Egy rakétával hajtott űrhajó a Földről egy nap alatt ér el ehhez a csillaghoz (az űrhajó utasai szerint mérve). Adjuk meg az űrhajó sebességét a Földhöz viszonyítva. Adjuk meg, hogy a β mennyivel tér el az egységtől? [Útmutatás: minthogy β annyira közel van az 1-hez, használjuk a következő alkalmas közelítést: $1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta)$] b) Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében milyen messzire van a csillag az utazás kezdetekor?

41B-6 Két űrhajó A és a B egymáshoz közel halad el, miközben ellenkező irányba tartanak. Mindkettő sajáthossza 300 m. Az A űrhajó vonatkoztatási rendszerében 2×10^{-6} s-ig tart, míg a B orra A űrhajó mentén elhalad. Az A űrhajó orrában elhelyezett óra pontosan zérust mutat, amikor ott a B orra elhalad. Adjuk meg, mit mutat ez az óra, amikor a B fara előtte elhalad!

41B-7 A radioaktív részecskeminták felezési ideje az az idő, mely alatt az anyagmintában lévő részecskék fele elbomlik. Egy bizonyos mennyiségű radioaktív részecske a laboratóriumban $0{,}8c$ sebességgel 30 m utat tesz meg. Ezalatt a részecskék fele elbomlik. Adjuk meg a részecskék felezési idejét a saját vonatkoztatási rendszerükben!

41B-8 Pozitív pionokból álló részecskenyaláb sebessége $0{,}7c$. Az együttmozgó rendszerben a pionok átlagos élettartama elbomlásukig $2{,}6\times10^{-8}$ s. a) Milyen hosszú ideig élnek a pionok a laboratórium vonatkoztatási rendszerében átlagosan? b) A laboratóriumban ez alatt az idő alatt milyen távolságra jutnak el?

41B-9 Ha egy sugárhajtású repülőgépen New Yorkból Los Angelesbe utazunk (4000 km légvonalban a távolság) 1000 km/óra átlag sebességgel, mennyivel fiatalabbak vagyunk megérkezéskor, mintha New Yorkban maradtunk volna a repülés ideje alatt? (Útmutatás: Vegyük észre, hogy a T idő, amit New Yorkban töltöttünk volna, igen közel áll T_0-hoz, a repülőgépen töltött időhöz!)

41B-10 Egy űrhajós az 2 millió fényévnyi távolságban lévő Andromeda-galaxist olyan űrhajón akarja meglátogatni, amelynek a vonatkoztatási rendszerében az uton is 30 évig tart. Feltéve, hogy az űrhajó sebessége állandó, mekkora a sebessége a Földhöz viszonyítva? Fejezzük ki a választ úgy, hogy β mennyivel tér el az egytől.

41B-11 Egy űrhajó nyugalmi hossza 100 m. A földfelszínhez közel halad 0,8 c állandó sebességgel. A földi megfigyelők elhatározzák, hogy megmérik az űrhajó hosszát úgy, hogy két tornyot építenek, A-t és B-t, melyek éppen egybeesnek az űrhajó elejével, ill. végével, amikor az elhalad mellettük. Az A torony az űrhajó orránál, a B űrhajó a végénél van. a) A földi megfigyelők milyen messzire építik a tornyokat egymástól? b) Mit mondanak a földi megfigyelők, mennyi idő telik el, míg az űrhajó orra az A-tól a B-ig elmegy? c) Milyen hosszú Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében végzett mérések szerint, mennyi ideig tart, míg az űrhajó orra az A toronytól a B-ig elmegy? d) Az űrhajósok szerint milyen messzire vannak egymástól a tornyok? e) Adjuk meg azt a sajátidő-intervallumot, mely az 1 eseménytől (az űrhajó orra az A toronnyal esik egybe), a 2 eseményig tart (az űrhajó orra a B toronnyal esik egybe)!

42B-12 Térjünk vissza az előző problémához! a) Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében mennyi ideig tart, míg egy fénysugár az űrhajó orrából a végébe eljut? b) A földi lakosok szerint mennyi időre van szüksége a fénynek, hogy az űrhajó elejétől a végéig elérjen? c) Egy lövedéket lőnek ki az űrhajó végénél, az űrhajó orra felé, az űrhajósok mérése szerint $0{,}6c$ sebességgel. Adjuk meg a lövedék sebességét a földi vonatkoztatási

rendszerben. d) Határozzuk meg, hogy mekkora lett volna a lövedék Földhöz viszonyított sebessége, ha az űrhajóhoz viszonyítva ugyanakkora sebességgel, de ellentétes irányban lőtték volna ki.

41.9 A relativisztikus impulzus
41.11 A relativisztikus sebességösszeadás

41A-13 Bizonyos típusú mezon nyugalomban két egyenlő tömegű részecskére bomlik el, amelyek ellenkező irányban távoznak $0{,}8c$-sebességgel. Tegyük fel, hogy a mezon a laboratóriumban $0{,}6c$ sebességgel halad, amikor bomlástermékek a haladás iránya mentén repülnek szét (ellenkező irányban). Adjuk meg a két bomlástermék sebességét a laboratóriumi rendszerben.

41A-14 A mozgás irányával párhuzamosra állított méterrúd és egy 1 kg-os tömegű tárgy van az űrhajó fedélzetén, amely a Földhöz viszonyítva $0{,}6c$ sebességgel mozog. a) Adjuk meg a méterrúd hosszát és b) a tárgy impulzusának nagyságát a földi vonatkoztatási rendszerben! c) Ha egy űrhajós 6 óra alatt készíti el fizikaházifeladatát, számítsuk ki, mennyi időt vesz ez igénybe a földi vonatkoztatási rendszerből megfigyelve! d) A földi megfigyelők szerint (c órában kifejezve), milyen messzire jut az űrhajó ennyi idő alatt?

41A-15 Egy csillagász megfigyeli, hogy két távoli galaxis a Földtől ellenkező irányban távolodik; mindegyik $0{,}9c$ sebességgel. Mekkora volna a másik galaxis távolodási sebessége az egyiken lévő megfigyelő számára?

41A-16 Egy bizonyos kvazár a Földtől $v = 0{,}87c$ sebességgel távolodik. Egy anyagot lövell ki a Föld felé a kvazárhoz képest $0{,}55c$ sebességgel. Adjuk meg a kilövelt anyag sebességét a Földhöz viszonyítva!

41B-17 Egy M tömegű részecske $v_1 = 0{,}6c$ sebességgel frontálisan összeütközik egy másik m tömegű és $v_2 = 0{,}8c$ sebességű, ellenkező irányban mozgó részecskével. Az ütközés után a két részecske egy összetett rendszert képez, amely a laboratóriumhoz viszonyítva nyugalomban van. Adjuk meg a tömegek M/m arányát!

41B-18 Egy m tömeg v_0 kezdeti sebességgel mozog és frontális rugalmas ütközést szenved egy $3m$ tömeggel, ami kezdetben nyugalomban volt. Nemrelativisztikusan az m tömeg visszapattan $v_0/2$ sebességgel, míg a $3m$ tömeg előremegy $v_0/2$ sebességgel. Relativisztikusan azonban a végsebességek nem lehetnek egyenlők. Legyen $v_0 = 0{,}8c$ és mutassuk meg, hogy ha mindkét tömeg végsebességeket $0{,}4c$ lenne, akkor az impulzus nem maradna meg.

41.12 A relativisztikus energia

41A-19 Határozzuk meg mekkora annak a tárgynak a sebessége, amelynek a mozgási energiája egyenlő a nyugalmi energiájával.

41A-20 Egy proton $0{,}8c$ sebességgel mozog. Adjuk meg MeV-ben (a) a proton E teljes energiáját és (b) a K kinetikus energiáját. (c) Adjuk meg az impulzusát MeV/c egységekben!

41A-21 Becslések szerint az Egyesült Államok gazdaságában az összes forrásból származó energia 1987-ben kb. 8×10^{19} J volt. Feltéve, hogy mindezt az energiát magreakciókból akarnánk fedezni, melyek során a tömegdefektus energiája szabadul fel az $E = mc^2$ képlet szerint, határozzuk meg, mekkora tömeg nyugalmi energiájáról van szó!

41A-22 Egy speciális hélium mag, a ^{3}He (két proton és egy neutron) nyugalmi energiája 2808,413 MeV. Adjuk meg, mekkora az a minimális energia, amely egy proton kiszabadításához szükséges, amikor egy ^{2}H deuteron és egy proton áll elő.

41B-23 A *Stefan-Boltzmann-féle sugárzási törvény* (42.2 pont) azt mondja ki, hogy egy felület által négyzetméterenként kisugárzott R teljesítmény T kelvin hőmérsékleten $R = \sigma T^4$, ahol a *Stefan-Boltzmann-állandó* $\sigma = 5{,}672\times10^{-8}$ W/m^{2}K^4. Számítsuk ki a Nap tömegveszteségét, ami a kisugárzott energiával együtt távozó tömegből adódik (hiszen az energia a Nap belsejében zajló magreakciókban a tömegdefektus energiaegyenértékeként szabadul fel) ((lásd a G függeléket a további adatok végett).

41B-24 A földi légkör felső rétegénél normális körülmények között egységnyi területre kb. 1370 W/m^2 teljesítmény érkezik a napsurárzásból. Ebből az információból (és további adatokból az L függelék használatával) adjunk becslést a Nap másodpercenkénti tömegveszteségére.($E = mc^2$)

41B-25 Az E és a p definíciójából kiindulva vezessük le a (41-22) képletet, mely szerint $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$.

41B-26 a) Határozzuk meg mekkora munka szükséges egy elektronnak a nyugalomból a $v = 0{,}8c$ sebességre való felgyorsításához a newtoni mechanika szerint. b) Mekkora ez a munka a relativitáselmélet szerint? A választ az mc^2 egységeiben fejezzük ki. (Útmutatás: emlékeztetünk arra, hogy egy testen végzett munka egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával).

41B-27 Az E és a p alapvető definicióiból kiindulva vezessük le a (41-25) képletben szereplő $v = pc^2/E$ összefüggést:

41B-28 Szabad neutron protonra, elektronra és egy antineutrinóra (egy zérus tömegű részecskére) bomlik. A neutron és a bomlástermékek nyugalmi energiája közti különbségből számítsuk ki az összes mozgási energiát (joule-ban), amivel a bomlástermékek akkor rendelkezhetnének, ha a neutron kezdetben nyugalomban lett volna.

41B-29 A K és a p definíciójából vezessük le a (41-23) képletet: $p = \sqrt{2mK\left[1+\left(k/2mc^2\right)\right]}$.

41B-30 Elektron mozgási energiája háromszor akkora, mint a nyugalmi energiája. Adjuk meg a) az elektron teljes energiáját eV-egységekben, b) a sebességét c-egységekben.

41B-31 Az E_0 és az E definíciójából kiindulva mutassuk meg, hogy a (41-25) képletben szereplő $v = c[1-(E_0/E)^2]^{1/2}$ helytálló.

41.13 Mozgó órák aszinkronitása
41.14 Az ikerparadoxon

41A-32 Egy galaxis olyan sebességgel távolodik a Földtől, hogy az emissziós színképének vonalai a Doppler-effektus miatt feleakkora frekvenciájúak, mintha a Földön lennének. Adjuk meg a galaxis sebességét.

41B-33 Egy-egy óra van egy űrhajó orrában és végénél, az űrhajó nyugalmi hossza 300 m. Az órákat helyesen szinkronizálták az űrhajó vonatkoztatási rendszerében. Ha az űrhajó elhalad a Föld mellett $V = 0{,}90c$ sebességgel, a) adjuk meg, mekkora a két óra által mutatott idő közti különbség a Földön b) Melyik óra mutat korábbi időt?

41B-34 Képzeljük azt, hogy a Nap egy R_g sugarú gömbbé roppan össze, úgy, hogy a gömb felszínéről egy m tömeg eltávolításához mc^2 energia szükséges. Ezt a sugarat a Nap *gravitációs sugarának* nevezzük. Adjuk meg az R_g képletét! (Általános az a nézet, hogy sok csillag végállapotát az jelenti, amikor gravitációs sugaruk által meghatározott gömbre, vagy még annál is kisebbre roppannak össze).

41B-35 Térjünk vissza a 41B-11 problémához. Amikor az űrhajó a tornyok mellett elhalad, a földi vonatkoztatási rendszerben a következő két esemény egyidejű:

az (a) esemény: *az A torony egybeesik az űrhajó végével*

a (b) esemény: *a B torony egybeesik az űrhajó orrával.*

a) Készítsünk szemléletes ábrákat a méretek jelölésével annak megvilágítására, hogy hogyan látszanak ezek az események az űrhajó vonatkoztatási rendszeréből. b) Adjuk meg, mekkora ez az időintervallum az űrhajó vonatkoztatási rendszeréből!

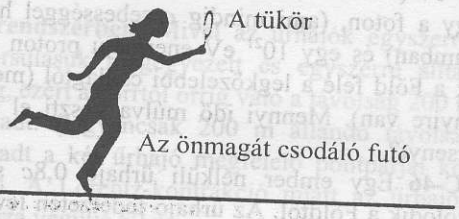
41B-36 Az űrhajó (S'-rendszer) elhalad a Föld (S-rendszer) mellett a $t = t' = 0$ időpontban. Az űrhajó sebessége a Földhöz képest $0{,}9c$. Egy másodperccel később (a Föld rendszerében mérve) rádiójelet küldenek az űrhajóhoz. Adjuk meg, hogy mikor fogják a rádiójelet észlelni az űrhajó rendszerében.

Vegyes feladatok

41C-37 A mi vonatkoztatási rendszerünkben pontosan délben egy $0{,}8c$ sebességgel mozgó óra déli 12,00 időt mutat, amikor az origón áthalad. a) Adjuk meg c függvényében, hogy az óra milyen messze lesz, amikor mutatói 12:00 után egy másodpercet mutatnak. b) Amikor az óra 12,00 után egy másodpercet mutat, az órából fényjelet küldenek vissza a mi vonatkoztatási rendszerünk origójához. A mi vonatkoztatási rendszerünk szerint mikor fog a fényjel az origóba érkezni?

41C-38 Az L nyugalmi hosszúságú űrhajó $v = 4/5c$ sebességgel halad el a Föld mellett. Amikor az űrhajó végénél lévő óra $t' = 0$ időpontot mutat (és a földi óra is $t = 0$ időpontot mutat) egy fényjelet küldenek az űrhajó végéből az eleje felé. Határozzuk meg azt az időpontot, amikor a fényjel eléri az űrhajó elejét a) az űrhajó órái szerint, b) a földi órák szerint. c) Az (a) és (b) kérdésekre adott válaszokat nem kapcsolja össze az idődilatációs képlet. Vajon miért nem? d) A fényjelet az űrhajó elején lévő tükör visszaveri az űrhajó vége felé. Adjuk meg azt az időpontot, amikor a fényjel eléri az űrhajó végét, az űrhajó órái szerint. e) Adjuk meg a (d) kérdésre a választ a földi órák szerint! f) A (d) és az (e) kérdésekre adott válaszokat összekapcsolja az idődilatációs képlet? Magyarázzuk meg, miért (illetve miért nem)?

41C-39 Képzeljük el, hogy egy futó egy tükröt visz, 1 m-re maga előtt (a futó vonatkoztatási rendszerében) és visszavert képét tanulmányozza, ahogy a 41-22 ábra mutatja. A futó pislog egyet. a) A futó vonatkoztatási rendszerében mennyi idő telik el a pislogás után, míg meglátja annak tükörképét? b) Mekkora ez az időtartam a földi vonatkoztatási rendszerben (c függvényében)?



41-22 ábra
A 41C-39 feladathoz

41C-40 A stanfordi 3 km-es lineáris gyorsítóban az elektronok végsebessége 0,999 999 999 $7c$. a) Ezzel a sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben nézve milyen hosszú ez a gyorsítóberendezés? (Alkalmazzuk a megfelelő matematikai közelítéseket!) b) Evvel az állandó sebességgel utazva, az elektron vonatkoztatási rendszerében mennyi ideig tart ezt a gyorsítót befutni? Meddig tart az elektron útja a gyorsítóban a stanfordi fizikusok szerint?

41C-41 A „mozgó rúd hossza" definiálható úgy, mint a sebességének a szorzata azzal az időtartammal, ami alatt a rúd eleje és a vége egy rögzített pont előtt elhalad. Mutassuk meg, hogy ez a definíció is elvezet a hosszkontrakció megállapított képletéhez: $L = L_0(1 - \beta^2)^{1/2}$!

41C-42 Egy golflabda 90 m/s sebességgel halad. A p relativisztikus impulzusa mekkora hányadával tér el a klasszikus mv impulzustól? Más szóval, határozzuk meg a $(p - mv)/mv$ hányados értékét!

41C-43 A relativisztikus impulzus növekedését ki lehet fejezni azzal is, hogy megadjuk azt az f hányadost, ami megmutatja, mennyi p relatív eltérése mv-től, vagyis $f \equiv (p - mv)/mv$. Bizonyítsuk be a $\beta = v/c$ sebességaránra vonatkozó $\beta = \sqrt{f(f+2)}/(f+1)$ összefüggést!

41B-44 Banditák egy robogó vonatot akarnak megállítani úgy, hogy a mozdonyhoz és a szerkocsihoz közel egy-egy robbanó töltetet felrobbantanak. A két robbanás

a földi vonatkoztatási rendszerben egyidejűleg történik. A vonat rendszerében is egyidejű lesz-e a két robbanás, ha nem, melyik következik be előbb? Okoz-e valami különbséget az, hogy a vonat a $+x$ vagy a $-x$ irányban halad?

41C-45 A primér kozmikus sugárzás részecskéi nagy energiájú protonok, amelyek a Földet kívülről érkezve érik. A felső légkörben lévő atommagokkal ütköznek és azokat szétrobbantják, s ezáltal szekundér kozmikus sugárzást hoznak létre, amikben elektronok, pozitronok, neutronok, mezonok, fotonok, stb szerepelnek, és záporszerűen özönlenek a Föld felszíne felé. (A legnagyobb áthatolóképességű részecskék a legmélyebb bányákban is észlelhetőek.) Azzal, hogy a Föld felszínén egy négyzetkilométernyi területen egyidejűleg regisztráljuk a beérkező részecskéket, meg becsülni mekkora volt az energiája annak az egyetlen protonnak, ami az egész záport elindította. Olyan eseményeket is észleltek már, amik kb. 100 millió részecskét eredményeztek, kb. 10^{21} eV (1 eV = $1{,}6\times10^{-19}$ J) összenergiával. Tegyük fel, hogy a foton, (ami mindig c sebességgel halad a vákuumban) és egy 10^{21} eV energiájú proton versenyeznek a Föld felé a legközelebbi csillagtól (mely 4 fényévnyire van). Mennyi idő múlva veszti el a proton a versenyt?

41C-46 Egy ember nélküli űrhajó $0{,}8c$ sebességgel távolodik a Földtől. Az űrhajó fedélzetén lévő rádióadó az űrhajó rendszerében pontosan 1s ideig tartó rádiójelet küld vissza, valahányszor a Földről egy „kérdő" jelet kap. Tegyük fel, hogy két igen rövid kérdő jelet kap, melyeket 10 s választ el a Föld rendszerében mérve. Adjuk meg a Föld rendszerében az űrhajó által küldött jel Δt hosszát. b) Adjuk meg, mekkora a T időintervallum a Földön észlelt válaszjelek között!

41C-47 Egy nagy energiájú proton sebessége v egy a Földön nyugvó protonhoz képest. Határozzuk meg annak a vonatkoztatási rendszernek, a V sebességét a Földhöz képest amelyben a két protonnak egyenlő a sebessége.

41C-48 Egy lézer λ hullámhosszúságú monokromatikus fényt bocsát ki. A lézernyaláb, a lézerhez viszonyítva V sebességgel távolodó tükörre merőlegesen esik. Mutassuk meg, hogy a lebegés frekvenciája a beeső és a visszavert nyaláb között közelítőleg $2V/\lambda$. (Útmutatás: a tükör vonatkoztatási rendszerében a fény egy, a tükörtől távolodó forrásból érkezik. A lézer rendszerében a visszavert hullám olyan, mintha egy távolodó forrás bocsátotta volna ki).

41C-49 Egy nagy energiájú gyorsítóból kilépő protonnak az E összes energiája az $E_0 = mc^2$ nyugalmi energiájának ötszöröse. Az E_0 nyugalmi energia függvényében adjuk meg a) a K mozgási energiáját és b) a p impulzusát. c) Adjuk meg β értékét. Amikor célszerűnek találjuk, hagyjuk meg a c jelet a feleletre adott képletben.

41C-50 Tegyük fel, hogy neves csillagászok szerint a Nap hamarosan egy szupernova robbanási folyamatán megy keresztül. Egy menekülési erőfeszítés során egy űrhajóval űrutazásra indulunk a 12 fényév távolságban lévő Tau Ceti csillag felé. Amikor az űrben az út felét megtettük, látjuk, hogy a Nap tényleg szupernovaképpen felrobbant, de ugyanakkor látjuk, hogy a Tau Ceti is felrobbant. a) Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében vajon arra következtethetünk-e, hogy a két esemény egyidejű? Ha nem, melyik esemény történt korábban? b) Abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a Nap és a Tau Ceti nyugalomban vannak, vajon egyidejűleg robbantak-e fel? Ha nem, akkor melyik esemény történt előbb?

Az alábbi problémák a speciális relativitáselmélet híres „paradoxonai". Itt válasz nélkül mutatjuk be őket. Ha megpróbáljuk magyarázni, hogy valójában miért is nem paradoxonok ezek, akkor közelebb kerülünk a tér és az idő valódi természetének a megértéséhez.

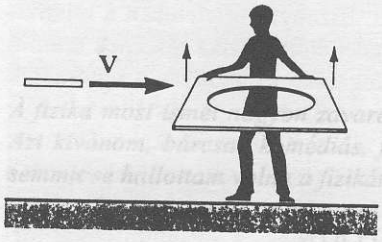
41C-51 Egy űrháború során két azonos űrhajó halad el egymáshoz közel, de ellenkező irányban, a fényéhez közeli sebességgel. Amikor a B űrhajó vége az A űrhajó orra mellett halad el, egy mozsárágyú lövedéket lő ki az A űrhajó a végén lévő ágyúcsőből a mozgás irányára merőlegesen, azzal a szándékkal, hogy eltalálja a B űrhajót (lásd a 41-23 ábrát). Nyilvánvaló, hogy a 41-23 ábra táblázatában foglalt kijelentések nem lehetnek igazak. Vagy eltalálták a B űrhajót, vagy nem. Keressük meg a feladat állításainak ingatag pontjait és vizsgáljuk meg röviden, hogy mi is történik valójában, továbbá miért nem forog fenn paradoxon. Tegyük fel, hogy az űrhajók igen közel haladnak el egymás mellett, továbbá, hogy a lövedék sebessége is igen nagy, és így a lövedék repülési ideje a feladat megoldásánál nem játszik lényeges szerepet.

a) Az A űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve a B hossza kontrahálódott, így a lövedék nem találja el a B űrhajót.	 Az A űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve
b) A B űrhajó rendszeréből nézve az A hossza kontrahálódott, így a lövedék eltalálja a B űrhajót.	 Az B űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve

41-23 ábra
A 41C-51 feladathoz

41C-52 A „bot a lyukban" paradoxon a speciális relativitáselmélet egyik legrejtélyesebb „paradoxona". Egy 100 cm hosszú bot relativisztikus sebességgel mozog vízszintesen úgy, hogy a hossza 50 cm Lorentz-kontrakciót szenved a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben (41-24 ábra). Egy megfigyelő a Föld vonatkoztatási rendszerében vékony táblát tart vízszinte-

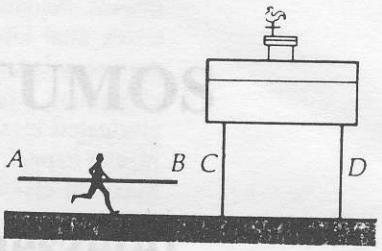
sen a kezében, melyen 70 cm átmérőjű lyuk van. Amikor a bot vége előtte elhalad, hirtelen függőlegesen felemeli a táblát (úgy, hogy a síkja továbbra is vízszintes maradjon) és engedi, hogy a bot a lyukon áthaladjon! Így adott pillanatban a (kontrahálódott) bot teljes egészében belefér a vízszintes lyukba. A paradoxon a következő. „A bot vonatkoztatási rendszerében a bot 100 cm hosszú, és a lyuk csak 35 cm. Hogyan képes egy 35 cm-es nyílás befogadni egy 100 cm-es botot?" (Útmutatás: fordítsuk a figyelmünket a pontszerű eseményekre. Például: vizsgáljunk a bot mentén négy egymástól egyenlő távolságra lévő pontot a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Ez a négy pont egyidejűleg fekszik a tábla síkjában. Hogyan helyezkednek el ezek a pontok a bot vonatkoztatási rendszerében? Egyidejűek-e ezek az események?)



41-24 ábra
A 41C-52 feladathoz

41C-53 A „rúd a pajtában" paradoxon is a speciális relativitáselmélet híres rejtélye. Tekintsünk egy 20 m hosszú rudat, amit valaki olyan gyorsan visz, hogy a földi vonatkoztatási rendszerben csak 10 m hosszú. (Lásd a 41-25 ábrát.) A rudat egy pajtán viszik át, amelynek szemközti falain C és D ajtók vannak. Minthogy a pajta 12 m hosszú, tehát 2 m-rel hosszabb, mint a mozgó rúd, így rövid időre mindkét ajtót be lehet csukni egyszerre, azaz ekkor a rúd a pajtában lesz. (Később a D ajtót kinyitják, hogy a rúd akadály nélkül folytathassa útját. Másrészt viszont a rudat szállító futó szempontjából a pajta csak 6 m hosszú a Lorentz-féle hosszkontrakció miatt. Itt van tehát a látszólagos paradoxon: „ Hogyan képes a futó a 20 m hosszú rúddal a 6 m hosszú pajtában csukott ajtók mellett bent lenni?" Nyilvánvalóan valahol hiba van. Meg tudjuk-e magyarázni ezt a látszólagos paradoxont? (Útmutatás: Mint a relativitáselmélet legtöbb paradoxonja esetében, a probléma gyökere ott van, hogy két esemény, ami egy vonatkoztatási rendszerben egyidejű, nem szükségképpen egyidejű egy másik vonatkoztatási rendszerben.)

41C-54 A híres „kötél-paradoxon". Vizsgáljunk két vonatkoztatási rendszert. Legyen S a „mi rendszerünk" és S' a „mozgó" rendszer, melynek sebessége $0{,}8c$ a $+x$ irányban. Két 100 m saját hosszúságú űrhajó (A és B) a mi rendszerünkben kezdetben nyugalomban van, a $+x$ irány mentén úgy, hogy A B-vel szemben áll, és az orruk 200 m távolságban van egymástól. A és B orrát. (a



41-25 ábra
A 41C-53 feladathoz

mi mérésünk szerint) egy 300 méter hosszú kötél (100 m laza tartalékkal) köti össze. A két űrhajónak a $+x$ irányában állandó gyorsulást adunk, míg el nem érik a $0{,}8c$ sebességet, majd ekkor a gyorsulást egyidejűleg megszüntetjük. Így végül az S'-ben mindkét űrhajó nyugalomban van.

Az S rendszerben: Mivel az űrhajók egyszerre, gyorsulásuk megegyezett és egyszerre álltak meg, ezért az orrtól orrig való a távolság 200 m maradt. (Ugyancsak 200 m állandó távolság maradt a két űrhajó megfelelő pontpárjai között). A Lorentz-kontrakció miatt az űrhajók hossza végülis 60 m.

Az S' mozgó rendszerben: Mindkét űrhajó kezdetben 60 m hosszúra kontrahálódott, a kezdeti orrtól-orrig való távolság 120 m-re kontrahálódott. A végső helyzetben mindkét űrhajó 100 m hosszú.

Mármost itt a probléma: a) Mutassuk meg, hogy az S'' rendszerben a végső orrtól-orrig való távolság (nyugalomban) 333 m *és így a kötél elszakadt.* b) „Az S rendszerben" kezdetű bekezdés következtetései helyesek, bár azt látszanak alátámasztani, hogy a kötél nem szakadt el, mert az orrtól-orrig való távolság csak 200 m. Oldjuk fel ezt a látszólagos paradoxont. Készítsünk a kezdeti és a végső helyzetről mindkét vonatkoztatási rendszerben vázlatot!

41C-55 Tekintsük az ikerparadoxont. Az utazó iker vonatkoztatási rendszerében a földi órák elmennek, majd visszajönnek, ezért ebben a vonatkoztatási rendszerben mérve, a földi órák *lassabban* járnak, mint azok, amelyek ebben a rendszerben nyugalomban vannak. Ez igaz *a Föld mozgásának mind a távolodási, mind a közeledési* szakaszára. Ezért kérdezzük, hogy miért az utazó iker találja úgy, hogy *több* idő telt el a Földön, mint az utazó vonatkoztatási rendszerben?

Megjegyezzük, hogy van egy érdekes példa, melyben az ikrek mindegyike ugyanannyi ideig és ugynúgy gyorsul, mégis különbözőképpen öregszik. Lásd S. P. Brough: „The Case of the Identically Accelerated Twins" (Az azonosan gyorsuló ikrek esete) *American Journal of Physics* **57**. (1989 szept.).

38B-19 a) zöld b) piros
38B-21 99,6 nm
38B-23 113
38B-25 1,31
38B-27 18,7 cm
38C-29 A válasz adott.
38C-31 A válasz adott.
38C-33 A válasz adott.
38C-35 A válasz adott.
38C-37 A válasz adott.
38C-39 a) $0{,}155\lambda/d$ b) $0.500\lambda/d$
38C-41 543 nm
38C-43 A válasz adott.
38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

39A-1 0,396 mm
39B-3 18,0 mm
39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
39B-7 0,684
39B-9 a) 120 b) 60
39A-11 11,5 km
39A-13 15,4
39B-15 420 m
39B-17 $1{,}07 \times 10^{-5}$ m b) $1{,}97 \times 10^{-5}$ m
39A-19 36,9°
39A-21 $7{,}16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
39B-23 688 nm
39B-25 $1{,}375 \times 10^{-3}$ fok
39A-27 0,300 nm
39A-29 A válasz adott.
39B-31 17,0
39C-33 0,1233 rad
39C-35 lásd 2. lábj.
39C-37 A válasz adott.
39C-39 A válasz adott.
39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

40A-1 $\frac{7}{8}$
40B-3 $\frac{1}{8}$
40A-5 32,0°
40A-7 49,2°
40B-9 $\text{tg}\,\theta_p = 1/\sin\theta_c$
40B-11 16,4 μm
40B-13 A válasz adott.
40B-15 68,4 mg/cm^3
40C-17 0° és 90°
40C-19 78,1%
40C-21 A válasz adott.
40C-23 A válasz adott.
40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
40C-27 A válasz adott.
40C-29 118°

XLI. Fejezet

41B-1 1,5 cm/s
41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
41A-5 a) $1 - \beta \approx 2{,}35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
41B-7 $22{,}5m/c$ vagy $\frac{7}{5} \times 10^{-8}$ s
41B-9 6,17 ns
41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c d) 36 m e) 45 m/c
41A-13 0,946c és –0,385c
41A-15 $v_x = 0{,}994c$
41B-17 1,78
41A-19 $v = 0{,}866c$
41A-21 889 kg
41B-23 $4{,}28 \times 10^9$ kg/s
41B-25 A válasz adott.
41B-27 A válasz adott.
41B-29 A válasz adott.
41B-31 A válasz adott.
41B-33 a) 270 m/c vagy $9{,}00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
41B-35 b) 80 m/c
41C-37 a) 1,33c·s b) 3,00 s
41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
41C-41 A válasz adott.
41C-43 A válasz adott.
41C-45 $5{,}55 \times 10^{-17}$ s
41C-47 $V = v\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\right)$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24}E_o/c$ c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
41C-51 A válasz adott.
41C-53 A válasz adott.
41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

42A-1 1,51 cm^2
42B-3 0,646%
42A-5 9660 nm
42A-7 5222 K
42A-9 $2{,}43 \times 10^{-12}$ m
42A-11 A válasz adott.
42B-13 $3{,}54 \times 10^6$ m
42A-15 451 nm
42B-17 a) $3{,}56 \times 10^5$ m/s b) 432 nm
42A-19 4,85 pm

A SUGÁRZÁS KVANTUMOS TERMÉSZETE
(A hullámok részecsketermészete)

Ennek az ötven évnek a töprengései semmivel sem vittek közelebb ahhoz, hogy megválaszoljam a kérdést: mik a fénykvantumok?

EINSTEIN
(Bessohoz 1951-ben írott leveléből)

A fizika most ismét nagyon zavaros, legalábbis számomra túlságosan nehéz. Azt kívánom, bárcsak komédiás, filmszínész vagy valami hasonló lennék és semmit se hallottam volna a fizikáról.

WOLFGANG PAULI
(az R. Kronighoz 1925. május 25-én írott levélből)
[*American Journal of Physics* 43, 208 (1975)]

Nem szeretem, és sajnálom, hogy valaha is foglalkoznom kellett vele.

E. SCHRÖDINGER
(a kvantummechanikáról)

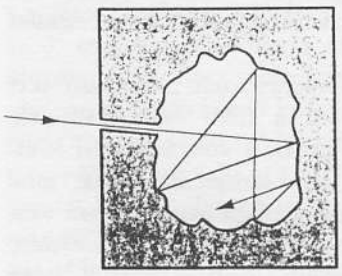
42.1 Bevezetés

A 19. sz. vége felé az a benyomás alakult ki, hogy az akkori fizika, amit ma *klasszikus fizika*ként tartunk számon, a fizikai világról és kölcsönhatásairól csaknem minden ismeretet tartalmaz. Legalább is ez volt a véleménye a kor több jól ismert természettudósának. *Ennél zavarbaejtőbb tévedést talán el sem lehet képzelni.* Mégis, ha arra gondolunk, hogy a newtoni mechanika milyen szerteágazó területeken bizonyult sikeresnek a legkülönbözőbb tárgyak mozgásának magyarázatában, a baseball-labdától a Naprendszerig, továbbá az a tény, hogy a mechanikai fogalmakat felhasználva a hőtani jelenségeket is a mechanika törvényeinek körébe lehetett utalni, értelmesnek látszott az az álláspont, hogy eljutottunk egy egységes elmélet küszöbéig, mely minden jelenségre képes magyarázatot adni. Ismertek voltak már a rádióhullámok, a fény és a hőmérsékleti sugárzás jelenségei is, amelyek nyilvánvalóan elkülönültek a mechanikától, de ezek is összefoglalhatók voltak egy másik nagy egységesítő elméletben, a Maxwell-féle elektrodinamikában. Úgy tűnt, hogy e két elmélet együtt teljessé teszi a természeti jelenségek megértését úgy, hogy *részecskékkel* és *hullámokkal* értelmezzük őket.

Ugyanakkor már megjelent néhány meglepő jelenség is. 1895-ben Wilhelm Konrad Röntgen felfedezte a később róla elnevezett X-sugarakat, a következő évben pedig Antoine Becquerel a radioaktivitást. Ezután egy évvel J. J. Thomson elektronokon végzett e/m-mérései megmutatták, hogy az elektronok az atomok alapvető részei. Így az atommodell is alapos revízióra szo-

rult. Ezen kívül is volt még néhány ismert jelenség, ami továbbra is titokzatos maradt. Például, elméletileg nem volt kielégítő értelmezés a meleg vagy izzó testek által kibocsátott sugárzás hullámhossz szerinti spektrális eloszlására. Az a tény is tartogatott rejtélyeket, hogy ibolyántúli fény hatására a fémekből elektronok lépnek ki. A legtöbb fizikus mégis úgy érezte, hogy ezek csak elszigetelt kicsiny problémák, amelyek előbb vagy utóbb mégiscsak magyarázatot kapnak a kor két „komplett" elméletében, a newtoni mechanikában és Maxwell elektrodinamikájában. Ha ez igaz lett volna, akkor a fizikusok további tevékenysége unalmas foglalkozássá vált volna, hiszen csupán alkalmazni kellett volna a két elméletet a még érthetetlen jelenségekre, és meg kellett volna határozni a következő tizedesjegyet a természeti állandók értékében (pl. az elektron töltésében, a fény terjedési sebességében, az Avogadro-számban és így tovább).

Most annak a történetét mondjuk el, hogy a fizika alapjain talált néhány repedés hogyan szélesedett ki, és hogyan döntötte halomra a 19. század vége önelégültségét. Ebben a forradalmi változásban a fizika gyorsan kiterebélyesedett és bámulatosan megerősödött. A folyamatban, a kvantumelmélet forradalmában, az új fogalmakat még nehezebb volt elfogadni, mint néhány évvel korábban Einstein relativitáselméletét. Bizonyos értelemben a relativitáselmélet a klasszikus (vagyis kvantumelmélet előtti) fizika részének számít, mert a tömeg, energia, impulzus alapvető fogalmai és ahogyan a rendszerek az energiacserében részt vesznek, lényegében változatlanok. Az Einstein-féle forradalom a tér és az idő szerkezetéről alkotott fogalmainkat változtatta meg, szóval azokról a keretekről mondott tökéletesen mást, amelyek között a méréseket végezzük, és ezáltal úgy tágította ki a klasszikus fogalmakat, hogy a nagy sebességek világában is megfelelők legyenek. A kvantumfizikai forradalom a klasszikus fogalmakat úgy változtatta meg, hogy igen kis távolságokra alkalmazhatók legyenek. Mind a relativitáselmélet, mind a kvantummechanika speciális esetként tartalmazza a klasszikus fizikát. A kvantumforradalom azonban talán alaposabb volt, mert a *részecskék* és az *elektromágneses hullámok* alapvető fogalmait változtatta meg, azt a nyersanyagot, amiből az akkori korszak fizikusai szerint az Univerzum felépült. Az új kvantumfizika bebizonyította, hogy a klasszikus fogalmak alkalmatlanok és gyakorta mély ellentmondásokra vezetnek egyrészt azzal, hogy a kísérletekkel ellentmondásba kerülnek, másrészt azzal, hogy az anyag természetét és érzékelését érintő alapvető filozófiai kérdéseket módosítanak.



42-1 ábra
Az ideális fekete test a gyakorlatban egy érdes falú üreg falán fúrt kis lyukkal valósítható meg. Az üreg maga a fekete test, mert lényegében minden, a lyukon behatoló sugárzást elnyel. Az üreg belsejében kialakuló sugárzás az üregsugárzás vagy fekete test sugárzás.

42.2 A feketetest sugárzásának spektruma

A 19. század végének egyik kimagasló jelentőségű és megoldatlan rejtélye az ún. **feketetest-** vagy **üregsugárzás** színképi eloszlásának problémája volt. Kirchhoff kimutatta, hogy az elektromágneses sugárzás legnagyobb hatásfokú kisugárzója (emittere) egyben a leghatásosabb elnyelője (abszorbense) is. A „tökéletes" abszorbens az volna, amely minden rá eső sugárzást elnyelne, s mert nem verődne vissza róla semmi, *fekete testnek* lehetne nevezni.

A sugárzás természetének vizsgálatára a legjobb útnak az kínálkozik, hogy elkészítjük a leghatékonyabban sugárzó testet. De hogyan kell fekete testet készíteni? A tökéletes fekete testet legjobban bizonyára az közelíti meg, hogy ha durva falú üreges testen kisméretű lyukat fúrunk (lásd a 42-1 ábrát). Elenyésző a valószínűsége annak, hogy a lyukon beeső sugárzás a falakon visszaverődve a lyukon keresztül ismét kilépjen, azaz a beeső sugárzás csaknem 100%-ban elnyelődik. Ahogyan az üreg falai elnyelik a beeső sugárzást, a hőmérsékletük emelkedik és egyre erősebben sugároznak. Ez addig folytatódik, míg a *termikus egyensúly* ki nem alakul. Ekkor a falak ugyanannyi energiát sugároznak ki, mint amennyit elnyelnek. Az üregben

kialakuló sugárzást ekkor *feketetest sugárzásnak* vagy *üregsugárzásnak* nevezzük. Sajátságainak vizsgálatára pedig a falon lévő kis lyuk éppen megfelelő. *A lyuk maga a feketetest.*

1879-ben J. Stefan osztrák fizikus elsőként mérte meg a feketetest által az összes hullámhosszon kisugárzott energiát és azt tapasztalta, hogy az arányos az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával. Ezt később elméleti úton magyarázta L. Boltzmann, ezt az eredményt ezért hívják a *Stefan-Boltzmann-törvénynek.*

STEFAN-BOLTZMANN FÉLE SUGÁRZÁSI TÖRVÉNY

$$R = \sigma T^4 , \qquad (42\text{-}1)$$

ahol az R a teljes fajlagos kisugárzás, vagy **emittancia**, vagyis a fekete test által egységnyi idő alatt, egységnyi felületen, valamennyi hullámhosszon[1] kisugárzott energia, T az abszolút hőmérséklet (Kelvin) és σ a *Stefan-Boltzmann-állandó*, amely $5{,}672 \times 10^{-8}\ W/m^2K^4$.

Amikor az üregsugárzás spektrális eloszlását vizsgálták, (vagyis azt, hogy mekkora energia esik a különböző hullámhosszakra), a kutatók meglepő felfedezéseket tettek. *A spektrális eloszlás nem függ az üreg anyagától, hanem csak a T abszolút hőmérséklettől.* Nem számít, hogy milyen anyagban van az üreg, a spektrális eloszlás adott hőmérsékleten mindig ugyanaz. Valahányszor a fizikusok olyan jelenséget fedeznek fel, amely a használt anyagtól független, akkor nagy a valószínűsége annak, hogy igencsak alapvető jelenséggel állunk szemben. Ezért olyan fontos, hogy ezt a jelenséget alaposan megértsük.

42.3 A feketetest sugárzás különböző értelmezései

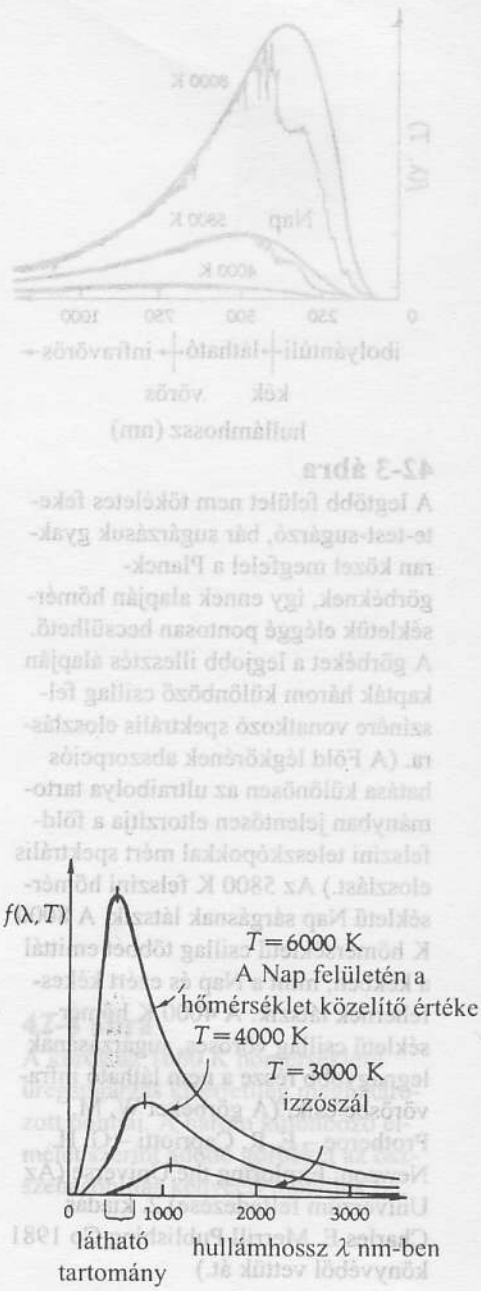
Sok tehetséges fizikus próbálta meg, hogy felépítse a klasszikus fogalmakra azt az elméletet, amely az üregsugárzás spektrális eloszlását megmagyarázza. A cél az volt, hogy levezessék a **spektrális energiasűrűség** (joule/m^3) képletét az üregsugárzásra, ami a λ és a $\lambda + d\lambda$ közti hullámhosszúságra esik. Ezt matematikailag egy $f(\lambda, T)$ függvény fejezi ki, ami mind a λ hullámhossz, mind a T abszolút hőmérséklet függvénye. A 42-2 ábra a kísérletileg meghatározott görbéket mutatja három különböző hőmérsékletnél. Figyeljük meg, hogy a hőmérséklet emelkedésével a görbék a rövidebb hullámok felé tolódnak el. W. Wien német fizikus erre a viselkedésre vonatkozóan empirikus szabályt állapított meg, ami a *Wien-féle eltolódási törvény* nevet kapta:

WIEN-FÉLE ELTOLÓDÁSI TÖRVÉNY

$$\lambda_m T = \text{konstans} \qquad (42\text{-}2)$$

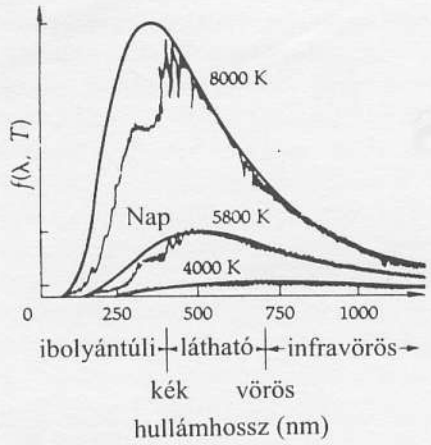
ahol λ_m a spektrális eloszlás maximumához tartozó hullámhossz, T az abszolút hőmérséklet, az állandó a kísérletek szerint $2{,}898 \times 10^{-3}$ m·K.

Az összes energiasűrűség, az összes hullámhosszra, a görbe alatti terület.



42-2 ábra
Az üregsugárzás spektrális eloszlása három különböző egyensúlyi hőmérsékleten. A $f(\lambda,T)$ összefüggés megmutatja, hogy az üreg belsejében a sugárzás intenzitása hogyan függ a hőmérséklettől. A függvény az egységnyi térfogat és a λ és a $\lambda + d\lambda$ közé eső hullámhossz intervallum egységnyi hosszúságú tartományába eső energiát adja meg. A görbék csúcsainál lévő kis függőleges vonalak azt mutatják, hogy amint az üreg hőmérséklete egyre nagyobb lesz, a maximális energia helye egyre inkább a kisebb hullámhosszak felé tolódik el, ez a Wien-féle eltolódási törvény.

[1] Miként a fejezet végén a 4. kérdéssel kapcsolatban kimutatjuk, az anyagok felületének emisszióképessége valamivel kisebb, mint az ideális fekete testé. Az emisszióképesség különböző anyagok esetén különböző, mert függ a felület fizikai állapotától. A kormozott felületek majdnem ideális emitterek, ill. abszorbensek.



42-3 ábra

A legtöbb felület nem tökéletes fekete-test-sugárzó, bár sugárzásuk gyakran közel megfelel a Planck-görbéknek, így ennek alapján hőmérsékletük eléggé pontosan becsülhető. A görbéket a legjobb illesztés alapján kapták három különböző csillag felszínére vonatkozó spektrális eloszlásra. (A Föld légkörének abszorpciós hatása különösen az ultraibolya tartományban jelentősen eltorzítja a földfelszíni teleszkópokkal mért spektrális eloszlást.) Az 5800 K felszíni hőmérsékletű Nap sárgásnak látszik. A 8000 K hőmérsékletű csillag többet emittál a kékben, mint a Nap és ezért kékesfehérnek látszik. A 4000 K hőmérsékletű csillag vöröses, sugárzásának legnagyobb része a nem látható infravörösbe esik. (A görbéket W. M. Protheroe – E. R. Capriotti – G. H. Newson: Exploring the Universe (Az Univerzum felfedezése) 2. kiadás Charles E. Merrill Publishing Co 1981 könyvéből vettük át.)

$$\text{A teljes energiasűrűség (minden hullámhosszra)} = \int_0^\infty f(\lambda, T)\,d\lambda \qquad (42\text{-}3)$$

A Stefan-Boltzmann törvény szerint a teljes spektrumon kisugárzott energia T negyedik hatványával arányos, ezért a $T = 6000$ K-hez tartozó görbe alatti terület 16-szor nagyobb, mint a $T = 3000$ K-hez tartozó terület. Figyeljük meg azt is, hogy az energiaeloszlás a látható tartományban sem egyenletes[2]. Alacsony hőmérsékleteken a kisugárzott energiának viszonylag nagyobb része esik a hosszú hullámokra (a vörös felé), mint a rövidebbekre (a kék felé). Ahogyan nő a hőmérséklet, ez megváltozik, viszonylag több energia esik a kék felé, ami magyarázatot ad arra, hogy a szilárd testek melegítésekor a szín változása tapasztalható. Először mélyvörös, majd narancsszín észlelhető, később az izzó test sárgásfehér, végül – igen magas hőmérsékleteken – kékesfehér lesz.

42-1 PÉLDA

Egy fekete test spektrális energiaeloszlásának a csúcsa 4300 K esetén a 674 nm (vörös) hullámhosszon van. Mekkora hőmérsékleten lenne 420 nm-en (az ibolyában)?

MEGOLDÁS

A Wien-féle eltolódási törvényből (a maximumhoz tartozó hullámhosszra):

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$$

Behelyettesítve a számértékeket, adódik:

$$(674 \times 10^{-9}\ \text{m})(4300\ \text{K}) = (420 \times 10^{-9}\ \text{m})(T_2)$$

Végül $T_2 = 6900$ K

Wien elmélete

A sugárzási képlet elméleti alapjainak keresése a fizika történetének legizgalmasabb fejezetei közé tartozik. Itt csak néhány kimagasló jelentőségű eseményt említünk meg. 1884-ben Boltzmann a termodinamika felől közelítette meg a problémát. Feltette, hogy az üreg sugárzása hengeralakú, mozgó dugattyúval ellátott térfogatban van és a Carnot-féle körfolyamat eredményeit alkalmazta a rendszerre. (A sugárzás a falakra erőt gyakorol, így lépett be a munka fogalma az elemzésbe). 1893-ban Wien továbbfejlesztette ezt a gondolatmenetet és a Doppler-eltolódást a mozgó dugattyú falán való visszaverődésre alkalmazva arra a következtetésre jutott, hogy az energiaeloszlás csak a λT szorzattól függhet. A sugárzás emissziójának és az abszorpciójának a természetére tett bizonyos feltevésekkel élve Wien le is vezetett egy kifejezést a $f(\lambda, T)$ spektrális eloszlási függvényre. Ezt szokás olyan alakban írni, hogy a λ és $\lambda + d\lambda$ hullámhosszak közé eső **spektrális energiasűrűség** (joule/m^3 egységekben):

[2] Érdekes, hogy szemünk érzékenységének maximuma egybeesik a Nap sugárzási eloszlásának a maximumával. Ha egy más hőmérsékletű csillag körüli bolygón léteznek érzékszervekkel rendelkező élőlények, akkor „szemük" a biológiai evolúció során talán úgy alakulhatott ki, hogy az elektromágneses színkép más szakaszán a legérzékenyebb.

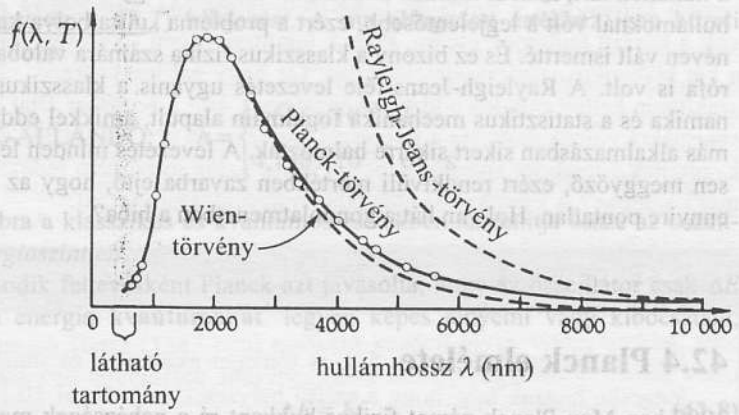
WIEN SUGÁRZÁSI TÖRVÉNYE

$$du_\lambda = f(\lambda,T)d\lambda = \frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{(c_2/\lambda T)}}d\lambda \qquad (42\text{-}4)$$

A c_1 és c_2 ismeretlen állandókat úgy kell megválasztani, hogy a kísérleti adatokhoz a görbe a lehető legjobban illeszkedjék. A görbe a rövid hullámhosszaknál a mérési adatokhoz valóban jól illeszkedik, de amint egyre több olyan adat birtokába jutottak, amelyek a nagy hullámhosszakra vonatkoztak, az eltérés egyre nyilvánvalóbbá vált. A 42-4 ábra mutatja, hogy a Wien-féle görbe egyre inkább alatta marad a nagyobb hullámhosszakon mért adatoknak.

A Rayleigh-Jeans elmélet

A Boltzmann és Wien termodinamikai gondolatmenete hasznos lépés volt, mert kiderült, hogy a problémában λ és T valamilyen függvénye (és semmi egyéb) játszhat csak szerepet. Minthogy azonban a termodinamika igen általános elveken alapszik, amelyek *minden* fizikai rendszerre érvényesek, a termodinamikai érvelés gyakran nem nyújt kellő betekintést az adott rendszer speciális folyamatainak részleteibe. Talán sokkal sikeresebb lett volna, ha valaki az üregsugárzás forrásaira koncentrálta volna figyelmét; azokra a tényleges folyamatokra, amelyek során az elektromágneses hullámok a falban keletkeznek, ill. elnyelődnek.



42-4 ábra
A körök az 1600 K hőmérsékletű üregsugárzás kísérletileg meghatározott pontjai. A három különböző elmélet szerint adódó görbéket az összehasonlítás kedvéért mutatjuk be.

Rayleigh (1900) a problémát ebből a szempontból közelítette meg. Derékszögű üreget vizsgált, amelynek a falai fémből készültek és feltette, hogy a falban lévő elektromos töltésektől származik a sugárzás. A töltések egyszerű harmonikus oszcillátorokként viselkednek és képesek a sugárzás kibocsátására és elnyelésére, mindegyik oszcillátort a rezgés „karakterisztikus" frekvenciája jellemez. Minden elég nagy zárt térfogatban elegendően nagy számú oszcillátor van, ezért a szomszédos frekvenciák közti különbség elhanyagolható lesz, azaz a kialakuló sugárzás minden hullámhossz környékén folytonos eloszlásúnak fog látszani. Adott T hőmérsékleten az oszcillátorok állandó működése állóhullámok kialakulását eredményezi az üregben. Az ilyen állóhullámok száma [3] az egységnyi térfogatban $8\pi\lambda^{-4}$-nek adódott.

[3] Rayleigh egy triviális (8-as szorzónyi faktornyi) hibát követett el a levezetésben. Miután az eredmény nyomtatásban megjelent, Sir James Jeans rámutatott a hibára, így a helyes képlet Rayleigh-Jeans-féle törvényként vált ismertté. A kicsiny javítás túlzottan is jelentős hírnévhez jutatta szerzőjét. Később azonban Jeans is sok értékes eredménnyel járult hozzá a fizika fejlődéséhez.

Az *ekvipartíció tétele* (21. fejezet) azt mondja ki, hogy termikus egyensúlyban lévő T-hőmérsékletű rendszerekben átlagban $\frac{1}{2}kT$ energia jut minden olyan változóra, mely a rendszer energiájának felírásához szükséges. Elektromágneses hullámok esetén[4] két változó van (a két polarizációs irány), így a hullámokkal kT energia jár együtt:

A KLASSZIKUS EGYSZERŰ HARMONIKUS OSZCILLÁTOR ÁTLAGOS ENERGIÁJA (termikus egyensúlyban lévő rendszerek esetén)

$$E_{\text{átl.}} = kT \qquad \textbf{(42-5)}$$

ahol k a Boltzmann-állandó, $1{,}381\times10^{-23}$ J/K. Ha az állóhullámok számát átlagos energiájukkal megszorozzuk, akkor megkapjuk a λ és a $\lambda+d\lambda$ hullámhosszintervallumba eső a spektrális energiasűrűséget (joule/m^3 egységekben) Ez a Rayleigh és Jeans törvény.

RAYLEIGH-JEANS SUGÁRZÁSI TÖRVÉNY

$$du_\lambda = f(\lambda,T)d\lambda = 8\pi kT\lambda^{-4}d\lambda \qquad \textbf{(42-6)}$$

ahol k a Boltzmann-állandó.

Az elmélet jól illeszkedik a nagyon nagy hullámhosszakon végzett mérésekhez, de ahogyan a 42-4 ábrán is látszik, másutt mindenütt drasztikus eltérések mutatkoznak. Ez a görbe sohasem „hajlik le" midőn a hullámhossz a nullához tart, hanem minden határon túl nő. Minthogy ez az eltérés a rövid hullámoknál volt a legjelentősebb, ezért a probléma „ultraibolya-katasztrófa" néven vált ismertté. És ez bizony a klasszikus fizika számára valóban katasztrófa is volt. A Rayleigh-Jeans-féle levezetés ugyanis a klasszikus termodinamika és a statisztikus mechanika fogalmain alapult, amikkel eddig minden más alkalmazásban sikert sikerre halmoztak. A levezetés minden lépése teljesen meggyőző, ezért rendkívüli mértékben zavarba ejtő, hogy az eredmény ennyire pontatlan. Hol van hát a gondolatmenetben a hiba?

42.4 Planck elmélete

1900-ban Max Planck német fizikus bukkant rá a nehézségek megoldására. Először tisztán matematikai okoskodással találta meg a megoldást, majd kiderítette, hogy az alkalmazott matematikai lépések mögött milyen fizikai folyamatok vannak. Bár olyan sugárzási törvényt talált, amely a kísérleti adatokkal fényesen egyezett, a fizikai következtetések oly meglepőek voltak, hogy éveken keresztül még ő maga sem volt hajlandó elfogadni őket, mint a „valódi világ" leírásának elemeit. A kvantumos elképzelések még túl radikálisak voltak.

Planck stratégiája a következő volt. A Rayleigh-Jeans-féle levezetés fontos lépése az egyszerű harmonikus oszcillátorok átlagenergiájának meghatározása az oszcillátor által felvehető összes energiára való integrálás révén. Klasszikusan az ilyen oszcillátor (például rugóra kötött tömeg) a zérustól felfelé tetszőleges amplitúdóval rezeghet. Minthogy az energia a rezgés amplitúdójának négyzetével arányos, az oszcillátor energiája *0* és végtelen

[4] Az ekvipartíció tétel alkalmazható az egyszerű harmonikus mozgás falak közti oszcillációjára is. Az ilyen egyszerű oszcillátor energiája kT, mivel mind a kinetikus mind a potenciális energia leírásához egy-egy változó szükséges.

között folytonosan változva bármekkora lehet. A bajt az okozta, hogy a 0 és a ∞ közti integráláskor a folytonos eloszlású energiák miatt a függvény a $\lambda \to 0$ esetben végtelenhez tartott. Planck elég jó matematikus volt ahhoz, hogy felismerje, ha az integrálás helyett a 0 és a ∞ között diszkrét energiaértékek összegzéséről lett volna szó, akkor ennek eredményeként olyan függvény adódott volna, amely a $\lambda \to 0$ esetében maga is zérushoz tartott volna, mint a kísérletekből ismert sugárzási görbék. Kiderült, hogy a Planck által talált görbe pontosan illeszkedett a kísérleti adatokhoz. Ez Planckot hasonló helyzetbe hozta, mint amibe az a tanuló kerül, aki a tankönyv végére lapozva megnézi a feladat eredményét, s szembekerül azzal a kérdéssel, hogy az adott tényekből hogyan lehet eljutni a megoldáshoz. Mi az a természeti tény, ami miatt a *diszkrét* energiaállapotokra való összegzés valóban a helyes eljárásnak bizonyulhat?

Planck merész lépésre szánta el magát. Feltételezte, bár ez ellentmondott minden klasszikus elméletnek, hogy az f frekvenciájú egyszerű harmonikus oszcillátor számára csak olyan energiaállapotok megengedettek, amelyekben az energia: $0, hf, 2hf, 3hf, \ldots$, ahol h egy állandó.

A KVANTÁLT EGYSZERŰ HARMONIKUS OSZCILLÁTOROK MEGENGEDETT ENERGIAÁLLAPOTA,

$$E_n = nhf \qquad (\text{ahol } n = 0,1,2,3,\ldots) \qquad \textbf{(42-7)}$$

Planck először az állandó értékét határozta meg abból, hogy a kísérleti adatokra illesztette a $f(\lambda,T)$ kifejezést. A ma elfogadott értékhez igen közeli számhoz jutott:

PLANCK-ÁLLANDÓ:

$$h = \begin{cases} 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \\ 4{,}136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s} \end{cases}$$

A 42-5 ábra a klasszikus és kvantumos esetekben hasonlítja össze az oszcillátor *energiaszintjeit*.

Második feltevésként Planck azt javasolta, hogy az oszcillátor csak ΔE nagyságú energia **kvantumokat**[5] legyen képes elnyelni vagy kibocsátani, ahol

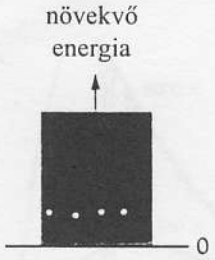
$$\Delta E = hf \qquad \textbf{(42-8)}$$

Ezekkel a feltevésekkel Planck azt állapította meg, hogy a T hőmérsékleten termikus egyensúlyban lévő oszcillátorsokaság átlagos energiája

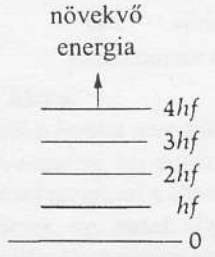
$$E_{\text{átl.}} = \frac{hf}{(e^{hf/kT} - 1)} \qquad \textbf{(42-9)}$$

Ha az f frekvenciáról a λ hullámhosszra térünk át az $f\lambda = c$ alapján, akkor a következő kifejezést kapjuk:

[5] A kvantum szó a latin quantus (mennyi, milyen sok) kifejezésből származik. Planck eredetileg azt javasolta, hogy az energiakvantumok a hf egész számú többszörösei legyenek. Később azonban Einstein és mások megmutatták, hogy csak az egyetlen hf-nyi kvantum engedhető meg.



(a) A klasszikus mechanikában a lehetséges energiaállapotok folytonos eloszlásúak.



(b) A kvantummechanika szerint a lehetséges energiaállapotok diszkrét eloszlásúak.

42-5 ábra
Az egyszerű harmonikus oszcillátor energiaszintjei. Az alap frekvencia *f*.

A KVANTÁLT EGYSZERŰ HARMONIKUS OSZCILLÁTOR ÁTLAGENERGIÁJA (termikus egyensúlyban lévő rendszerben)

$$E_{\text{átl.}} = \frac{\left(h\frac{c}{\lambda}\right)}{\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} \qquad \textbf{(42-10)}$$

Ez teljesen más, mint a $E_{\text{átl.}} = kT$ klasszikus érték (lásd a (42-5) képletet). Bár, ha $h \to 0$, akkor ez a kifejezés a klasszikus értékre redukálódik (lásd a 42C-39 problémát!)

Ha az oszcillátoroknak ennyi az átlagos energiájuk, akkor annyi kell legyen az üregben kialakult állóhullámok átlagos energiája is (mert a falak és a sugárzás termikus egyensúlyban vannak). Ha ezt az átlagenergiát megszorozzuk az állóhullámok számával (amit Rayleigh és Jeans állapítottak meg): a $8\pi\lambda^{-4}$ kifejezéssel, megkapjuk a Planck-féle $f(\lambda, T)$ spektrális eloszlási függvényt. A Planck-féle spektrális eloszlási függvény az energiasűrűségre (joule/m^3 egységekben) az üreg sugárzásának λ és $\lambda + d\lambda$ hullámhosszak közé eső részére:

PLANCK SUGÁRZÁSI TÖRVÉNYE

$$du_\lambda = f(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}d\lambda \qquad \textbf{(42-11)}$$

Mint látható a 42-4 ábrán, a Planck-törvény csodálatosan illeszkedik az összes mérési pontra. Kis hullámhosszaknál a Planck-törvény a Wien-féle kifejezéshez közeledik, ami ott helyes eredményt adott. A Planck-törvény hosszú hullámokra a Rayleigh-Jeans-törvényhez tart, ami helyes eredmény volt a hosszú hullámok esetén. Planck tulajdonképpen sikeresen épített hidat a két klasszikus sugárzáselmélet közé. De hogy ezt megtehesse, radikálisan szakítania kellett minden addigi elképzeléssel, ami a rendszer által felvehető energiákra vonatkozott. Ha a természet ténylegesen így viselkedik, és tényleg kvantáltak a rendszer energiaállapotai, akkor vajon miért nem fedezték fel ezt már korábban? A következő példa talán magyarázatul szolgál.

42-2 PÉLDA

Egy 10 cm hosszú fonalra 5 g-os tömeget akasztunk és ingaként lengésbe hozzuk úgy, hogy a szélső helyzetekben a fonal ±0,1 rad szöget zár be a függőlegessel. A súrlódás miatt a levegőben az amplitúdó fokozatosan csökken. Vajon kimutathatjuk-e az amplitúdó csökkenése során a kvantumugrásokat?

MEGOLDÁS

A (15-21) képletből a rezgés *f* frekvenciája megadható:

$$f \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}1\ \text{m}}} = 1{,}58\ \text{s}^{-1}$$

Az inga összenergiája egyenlő a szélső helyzetbeli gravitációs potenciális energiával:

$$E = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

$$E = (0{,}005\ \text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}1\ \text{m})(1 - \cos 0{,}1) = 2{,}45 \times 10^{-5}\ \text{J}$$

Az energia kvantumugrása

$$\Delta E = hf = \left(6{,}63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\right)\left(1{,}58\ \mathrm{s^{-1}}\right) = 1{,}05\times10^{-33}\ \mathrm{J}$$

lenne. *A* $\Delta E/E$ arány $4{,}28\times10^{-29}$. Ezért az energiaállapot kvantáltságának kimutatása érdekében az energiát legalább 4×10^{-29} relatív pontossággal kellene mérnünk, amely érzékenységi igény minden kísérleti technika teljesítőképességét felülmúlja.

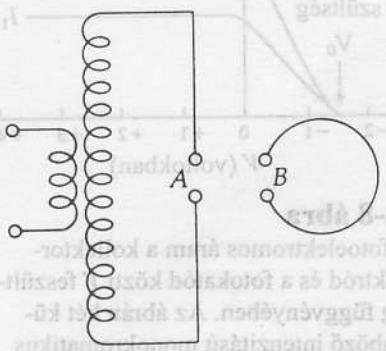
Ahogy a példa is mutatja, *makroszkópikus* mechanikai rendszereknél az energiaállapotok kvantáltsága kimutathatatlan. Az energiacsere kvantáltsága általában a hétköznapi jelenségek körében észrevétlen marad, mert h igen kicsiny. Ha h nagyobb lenne, akkor környezetünkben mindenütt láthatnánk a kvantumos jelenségeket. A kvantumos jelenségek mindenütt jelen vannak, de csak *mikroszópikus* rendszerekben, az atomok skáláján vehetők észre, ahol ΔE az E nagyságrendjébe esik. Ennek a feltételnek a teljesülése teszi – szokatlan módon kimutathatóvá a kvantumos hatást a feketetest sugárzás esetében (nagy frekvencián). Érdekes, hogy ha a $h\to0$ határátmenetet képezzük, a kvantumos képletek a megfelelő klasszikus képletekbe mennek át. Tehát az új kvantummechanika általánosabb elmélet, amely a klasszikus mechanikát speciális esetként magába foglalja.

42.5 A fényelektromos hatás

Ma nehéz felfogni, hogy milyen nagy mértékű volt a klasszikus gondolkodással való szakítás, amit Planck működése indított el. Planck maga elszántan ellenállt annak, hogy a lehetséges energiaállapotok folytonosságát feladja. Sok időt töltött (sikertelenül) azzal, hogy az ultraibolya katasztrófa elkerülését a klasszikus fizika keretei között megoldja. Bár vonakodva, de elfogadta azt, hogy az oszcillátoroknak csak kvantált energiaállapotai lehetnek, fenntartotta azonban azt a klasszikus sugárzási elképzelést, hogy az elektromágneses hullámok nem kvantáltak. Hamarosan elszakadt azonban ez a kapocs is, amivel a klasszikus fizikához kötődött.

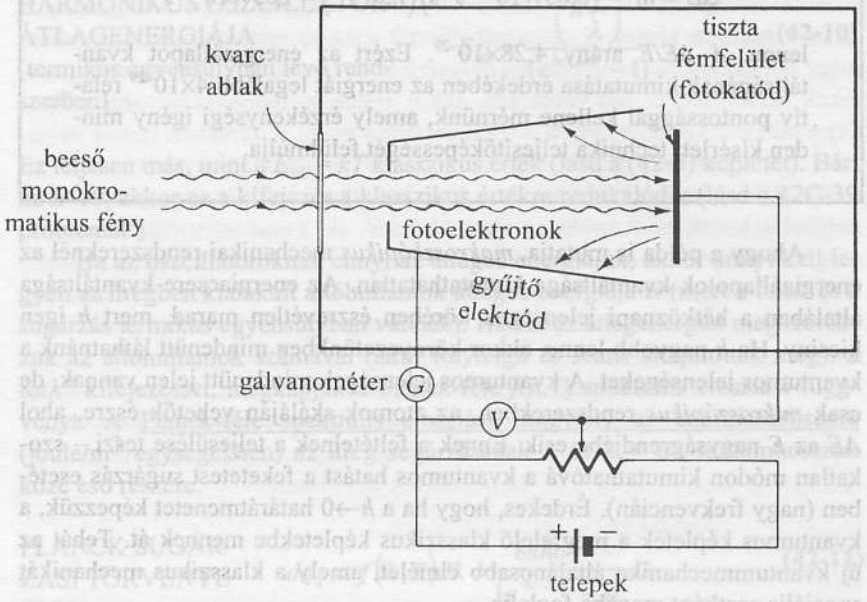
Heinrich Hertz (1887-ben) elsőként kezdett olyan vizsgálatokba, amelyek a Maxwell-egyenletek által megjósolt elektromágneses hullámok kimutatására irányultak. Indukciós tekercset (amelyet igen sok menetes szekundér tekercsével feltranszformálás céljaira használt) két kis fémgömbhöz kapcsolt – ahogyan a 42-6 ábra mutatja – az *A* szikraköz között oszcilláló kisülést hozott létre[6]. Ekkor a közelben elhelyezett kicsiny *B* hasítékú fémgyűrűben a közön is szikra átütését várta, annak jelzéseként hogy elektromágneses energia került át *A*-ról *B*-re. Teljesen véletlenszerűen Hertz felfedezte, hogy a B-nél könnyebb kiváltani a szikrát, ha a *B* szikraközt ultraibolya fénnyel világítja meg. Thomson 10 évvel később felfedezte az elektront és akkor igazolta azt is, hogy az ultraibolya fény elősegítette, hogy az elektródákból elektronok lépjenek ki, ami könnyebbé tette a szikra kialakulását. Az elektron kilépését a fény hatására *fotoelektromos* (fényelektromos) *hatásnak* nevezik.

A 42-7 ábra mutatja azt a kísérleti berendezést, amivel a hatást vizsgálták. (Mindig monokromatikus fényt használtak.) A klasszikus hullámelmélet szerint a beeső fény elektromos erőtere energiát adhat át a fém felszínéhez közel lévő elektronoknak, ami által az elektronok a fémből ki tudnak lépni. Az elmélet szerint a fény intenzitásának növelésekor a fémből kilépő



42-6 ábra
Hertz kísérleti berendezése az elektromágneses hullámok kimutatására.

[6] A kisülés frekvenciáját a gömbök kapacitása és az indukciós tekercs induktivitása szabja meg.



42-7 ábra
Kísérleti berendezés a fényelektromos hatás vizsgálatára. A kvarcablakon áthalad az ultraibolya fény, ami a közönséges üvegben elnyelődne. Az elektródákra kapcsolt változtatható feszültség iránya egy kapcsolóval, ami az ábrán nem látható, megfordítható.

fotoelektronok mozgási energiájának növekednie kellene, a fény elektromos térerőssége növekedésének megfelelően. A fény frekvenciája e szerint nem játszhatott volna semmiféle szerepet. *A klasszikus elméletből adódó mindkét következtetés ellentétben áll a tapasztalattal.*

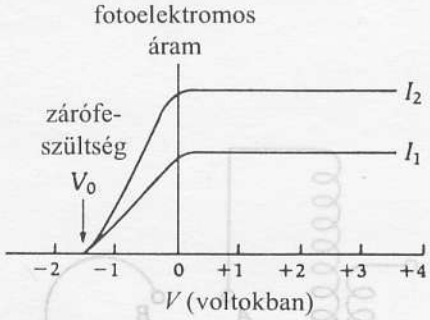
A 42-8 ábra néhány kísérleti úton felvett görbét mutat, amin a fotoáramot ábrázoljuk, amikor a beeső fény (lényegében) monokromatikus. A V_0 zárófeszültség az a negatív feszültség, amit a kollektorra (gyűjtőelektródra) kell kapcsolni azért, hogy a legnagyobb energiájú elektronok mozgási energiája is potenciális energiává alakuljon, mire a kollektort elérik. Vagyis a V_0 feszültség a legnagyobb mozgási energiájú fotoelektronokat is megállítja, mielőtt a kollektorhoz érnének. Fennáll tehát az

$$eV_0 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \qquad \textbf{(42-12)}$$

összefüggés.

A fényelektromos hatás fenti két, a klasszikus elmélet kijelentéseinek ellentmondó tulajdonságát és egy harmadik fontos vonást az alábbi táblázatban összefoglalva adunk meg.

Klasszikus szemlélet szerint:	**A kísérleti tények**
(1) Ha a fény intenzitása nő, az E elektromos térerősség nagyobb lesz. Ezzel nő az elektronra ható eE erő is, ezért a növekvő fényintenzitásnak növelnie kell az elektron mozgási energiáját.	**(1)** A 42-8 ábra azt mutatja, hogy a fotoelektronok maximális[7] kinetikus energiája változatlan marad, még akkor is, ha a fény intenzitása megnő.
(2) A fény frekvenciája nem befolyásolhatja a kibocsátott	**(2)** Ha a megvilágító fény frekvenciája csökken, elérhető



42-8 ábra
A fotoelektromos áram a kollektor-elektród és a fotokatód közti V feszültség függvényében. Az ábrán két különböző intenzitású monokromatikus fényre vonatkozó görbe látható. A V_0 küszöbfeszültség mindkét esetben ugyanakkora.

[7] A kilépő fotoelektronok energiaspektruma zérustól a (42-12) képlettel megadott maximális értékig terjed. Feltehetőleg sok elektron a felület alatti tartományból, különböző mélységből származik. Ezek energiájuk egy részét arra fordítják, hogy keresztülhaladjanak a fémrácson és az összetartó erők vonzását leküzdjék.

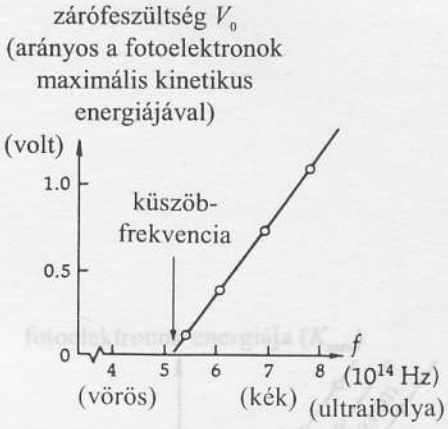
fotoelektron kinetikus energiáját. Ez az energia csak az elektromos térerősség amplitúdójának hatására változhat meg.

(3) Tegyük fel, hogy a fémfelület egyetlen elektronja kb. atomnyi méretű effektív „céltárgyterület"-re eső energiát képes abszorbeálni. Ekkor igen halvány (gyenge) fénnyel való megvilágítás esetén hosszabb időre lenne szükség ahhoz, hogy egy elektron a kilépéséhez szükséges energiát megszerezze.

egy küszöbfrekvencia, mely alatt, tekintet nélkül a fény intenzitására (lásd a 42-9 ábrát), nem jelenik meg fotoelektron.

(3) Nem figyeltek meg értékelhető késési időt (bár azt igen, hogy a *halványabb* fény kevesebb *fotoelektront* vált ki). A késési idő felső határa kisebbnek bizonyult, mint 10^{-9} s a tényleges késési idő bizonyára még ennél is sokkal kisebb.

Világos, hogy a klasszikus fogalmakkal a folyamat helyes leírása egyszerűen lehetetlen. Az alábbi példa a hiányosságok egyikét illusztrálja.



a beeső monokromatikus fény f frekvenciája

42-9 ábra
A belső fény frekvenciája határozza meg a fotoelektronok maximális kinetikus energiáját. Bizonyos küszöb, zárófrekvencia alatt nem lépnek ki fotoelektronok, a beérkezési fény intenzitásától függetlenül. (Az ábra számértékei cézium-felületre vonatkoznak.)

42-3 PÉLDA

Cézium-felület 2 m távolságban van az 1 μW teljesítményű pontszerű fényforrástól. A fényforrás minden irányban egyenletesen sugároz. A cézium-felület merőlegesen áll a beeső fény irányára. Tegyük fel, hogy egyetlen elektron egy atom körlap alakú területére eső energiát képes elnyelni. (Az atom sugara kb 10^{-10} m.) Az elektronnak a felszínről való kilépéséhez minimum 2,14 eV energia szükséges. Becsüljük meg, hogy mennyi időre van szüksége az elektronnak a klasszikus elmélet szerint, hogy ezt az energiát elnyelje.

MEGOLDÁS

Az effektív céltárgy területe $\pi r^2 \approx 3\times10^{-20}\ \text{m}^2$. A klasszikus elmélet szerint a pontforrásból az energia gömbalakú hullámfronton egyenletes eloszlásban érkezik. Ezért a cézium-felületen a teljesítménysűrűség (teljesítmény/négyzetméter)

$$\frac{P}{4\pi R^2} = \frac{10^{-6}\,\text{W}}{16\pi\text{m}^2} \approx 2\times10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Egy atom területére ebből

$$\left(2\times10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)\left(3\times10^{-20}\,\text{m}^2\right) = 6\times10^{-28}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

jut.

A kilépéshez legalább

$$(2{,}14\ \text{eV})\underbrace{\left(\frac{1{,}6\times10^{-19}\,\text{J}}{1\ \text{eV}}\right)}_{\text{Átszámítási arány}} = 3{,}42\times10^{-19}\,\text{J}$$

energia szükséges, ennek elnyeléséhez viszont

$$t = \frac{3{,}42 \times 10^{-19}\,\text{J}}{6 \times 10^{-28}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}} = 5{,}71 \times 10^{8}\,\text{s}$$

idő kell. Ez kb 18 év! Mégis, a kísérletek tanúsága szerint, az esetleges késési idő felső határa kevesebb, mint 10^{-9} s. Ez 10^{17}-s tényezőben tér el a tapasztalattól.

Az elektromágneses elmélet kézenfekvő érvvel szolgál arra, hogy egy elektron nagyobb, kb. λ^2 céltárgy-területről tud energiát elnyelni, ahol λ a beeső sugárzás hullámhossza. A látható fény esetében ($\lambda \approx 500$ nm) ez kb. 10^8-os szorzóval javít az eredményen, de egy kb. 10^9-es szorzó még így is indokolatlan marad. Nem sok olyan kísérletet ismerünk, amely az elmélettől ennyire eltér!

1905-ben Einstein[8] a fényelektromos jelenség dilemmájára megoldást javasolt. Bár Planck húzódozott annak a lehetőségnek elfogadásától, hogy az elektromágneses hullámok kvantáltak, Einstein észrevette, hogy ha feltételezzük, hogy a sugárzás is jól lokalizált „csomagokban", vagy **„kvantumokban"** (ezeket nevezzük **fotonnak**) van jelen, akkor a fényelektromos hatásra egyszerű magyarázat kínálkozik. Einstein a következő javaslattal állt elő:

EINSTEIN FELTEVÉSE A SUGÁRZÁS KVANTÁLTSÁGÁRÓL

Az f frekvenciájú sugárzás emissziója és abszorpciója mindig kvantumok (fotonok) formájában történik, amelyek energiája $E = hf$. A foton a térben lokalizált és a forrástól c sebességgel távolodik.

Ha a fotonok lokalizáltak maradnak, akkor Einstein érvelése szerint a fényelektromos folyamatban a fotont egyetlen elektronnak kell elnyelnie. Miután így az elektron hf nagyságú energiára tett szert, ennek egy része fedezheti a fém felületéről való kilépés energiaszükségletét, míg a maradék mozgási energia formájában tárolódik. A fémfelületből való kilépéshez szükséges *minimális* energia a W_0 **kilépési munka**. (A fémekre ez jellegzetesen 2 és 6 eV közé eső érték. A látható fény fotonjainak energiája kb. 2 eV a vörös és kb. 3 eV a kék tájékán. Ez az oka annak, hogy egyes anyagokon a fényelektromos hatást csak az ultraibolya fény nagyobb energiájú fotonjai képesek kiváltani.)

Az energia megmaradásának tételét alkalmazva a folyamatra, Einstein azt mondta, hogy az elektron K_{max} legnagyobb kinetikus energiája és a foton hf energiája között a következő összefüggés áll fenn:

EINSTEIN FÉNYELEKTROMOS EGYENLETE

$$hf = K_{max} + w_o \qquad \textbf{(42-13)}$$

[8] Ez az esztendő hihetetlen év volt a fiatal Einstein számára. Az Annalen der Physik 1905. évi 17. kötete közölte a speciális relativitásról szóló forradalmi dolgozatát, egy értekezést a Brown-mozgásról, ami lehetővé tette Perrin számára az Avogadro-szám mérését, és a fotoelektromos hatásról szóló említett cikket. Egyébként ez utóbbi alapján nyerte el Einstein a Nobel-díjat 1921-ben. (Lásd a 43. fejezet végén a kvantumelmélet fejlődését bemutató kronológiai összeállítást.)

Ez az egyszerű elgondolás azonnal megmagyarázta a fényelektromos hatás fentebb már említett három zavarba ejtő tulajdonságát:

(1) Minthogy K_{max} csak a fény frekvenciájától, és nem a fény intenzitásától függ, a halvány fényre is ugyanakkora a küszöbfeszültség, mint erős fény esetén, (lásd 42-7 ábrát).

(2) Egyes anyagoknál a foton energiája adott frekvencián kisebb is lehet, mint a kilépési munka értéke. Ezért van egy küszöbfrekvencia, amelynél kisebb frekvenciájú fotonnal nem lehet a fotoelektromos hatást kiváltani.

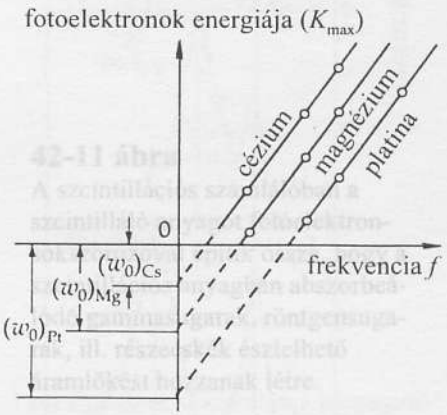
(3) Minthogy a foton a térben lokalizált (nem pedig egy hullámfront mentén egyenletesen eloszló), az elektron a foton energiáját egyetlen lépésben át tudja venni, ezáltal az elektron tetszőleges halvány fény esetén is elhanyagolható időkéséssel lökődik ki a fémből (persze a kilépő fotoelektronok száma függ a fény intenzitásától).

A kísérlettel való szoros egyezés, a feketetest sugárzásától merőben eltérő területen, nagymértékben hozzájárult a foton létének elfogadtatásához. Mégis – mint az alábbiakban látni fogjuk – e tényt elég nehéz volt lenyelni.

A fényelektromos kísérletek a fontos információk egész sorát szolgáltatták. Így például, ha a (42-12) és a (42-13) képleteket összevetjük, adódik, hogy

$$V_o = \left(\frac{h}{e}\right) f - \left(\frac{w_o}{e}\right) \qquad \textbf{(42-14)}$$

Ez lineáris függvénykapcsolatot jelent a V_0 zárófeszültség és az f frekvencia között (lásd a 42-10 ábrát). Az egyenes iránytangense h/e, ami új kísérleti lehetőséget kínál a h Planck-állandó meghatározására. Az így kapott értékek megegyeznek azokkal, amelyeket teljesen eltérő módon, a fekete-test-sugárzás alapján mértek meg. Igen megnyugtató, hogy az átfogó és egységes elképzelést ennyire különböző területekről származó bizonyítékok erősítik meg. A (42-14) képlet egy másik tulajdonsága a 42-10 ábrán látható. Az egyenes vonal metszéspontja a vízszintes tengelyen a küszöbfrekvenciát tűzi ki, míg a függőleges tengelyen a kilépési munkát.



42-10 ábra
A különböző anyagoknál megmért fotoelektromos adatok egy-egy egyenesen helyezkednek el, amelyek iránytangense h/e. Ezek az egyenesek a vízszintes tengelyt a küszöbfrekvenciánál, a függőleges tengelyt a kilépési munkánál metszik.

42-4 PÉLDA

Az 1 μW teljesítményű lámpa – amiről a 42-3 példában beszéltünk – csak monokromatikus fényt sugároz, amelynek hullámhossza λ = 500 nm. (a) Adjuk meg a forrástól R = 2 m távolságban elhelyezett köralakú, 1 cm átmérőjű céltárgyra merőlegesen 1 s alatt beeső fotonok számát. (b) Adjuk meg a fotoelektronok maximális kinetikus energiáját (elektronvoltokban). (c) Adjuk meg a cézium esetére a küszöbfrekvenciát.

MEGOLDÁS

(a) A fényforrás teljesítményének az a hányada, amely a köralakú céltárgyra esik, (r = 5 mm) 2 m távolságban:

$$\frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{\pi(0{,}005\ \text{m})^2}{4\pi(2\ \text{m})^2} = 1{,}56\times10^{-6}$$

A céltárgyra eső teljesítmény tehát

$$\left(1\times10^{-6}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}\right)\left(1{,}56\times10^{-6}\right)=1{,}56\times10^{-12}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Mindenegyes foton energiája ugyanakkora:

$$hf=h\left(\frac{c}{\lambda}\right)=\frac{\left(6{,}63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)\left(3\times10^{8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)}{550\times10^{-9}\,\text{m}}=3{,}62\times10^{-19}\,\text{J}$$

A másodpercenként a céltárgyra eső fotonok száma ezért

$$\frac{\left(1{,}56\times10^{-12}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}\right)}{3{,}62\times10^{-19}\,\text{J}}=4{,}33\times10^{6}\,\frac{\text{foton}}{\text{másodperc}}$$

(b) A foton energiája elektronvoltokban:

$$\left(3{,}62\times10^{-19}\,\text{J}\right)\underbrace{\left(\frac{1\,\text{eV}}{1{,}6\times10^{-19}\,\text{J}}\right)}_{\text{Átszámítási tényező}}=2{,}26\,\text{eV}$$

A w_0 kilépési munka a cézium esetén (a 42-3 példából) 2,14 eV. A fotoelektronok K_{max} maximális kinetikus energiáját a (42-13) képlet adja:

$$hf=K_{max}+W_0$$

Ezt a K_{max}-ra megoldva: $K_{max}=hf-W_0$

$$=2{,}26\,\text{eV}-2{,}14\,\text{eV}=0{,}120\,\text{eV}$$

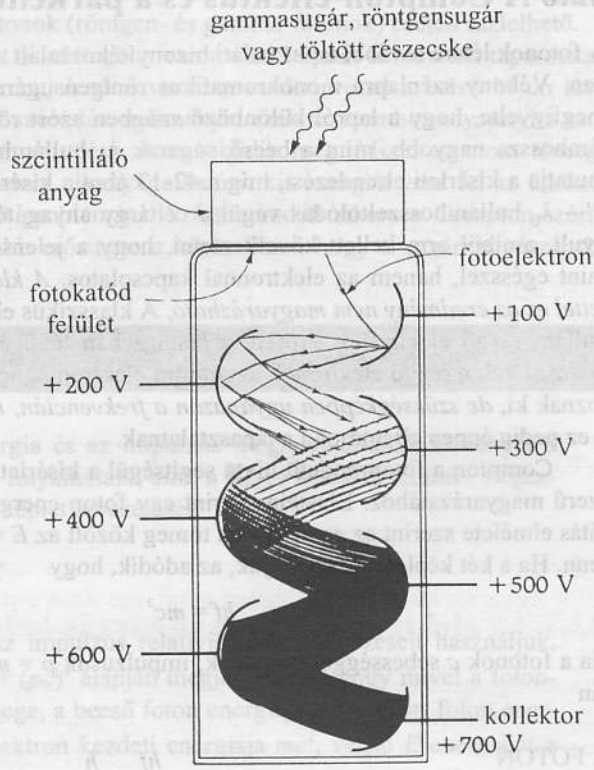
(c) Az f_k küszöbfrekvencián a foton energiája $hf_k\,(=hc/\lambda_k)$ egyenlő a w_0 kilépési munkával. Ezt λ-ra megoldva és a számértékeket behelyettesítve adódik, hogy:

$$\lambda_k=\frac{hc}{W_0}=\frac{\left(4{,}136\times10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s}\right)\left(3\times10^{8}\,\text{m/s}\right)}{2{,}14\,\text{eV}}$$

$$=5{,}80\times10^{-7}\,\text{m}=580\,\text{nm}$$

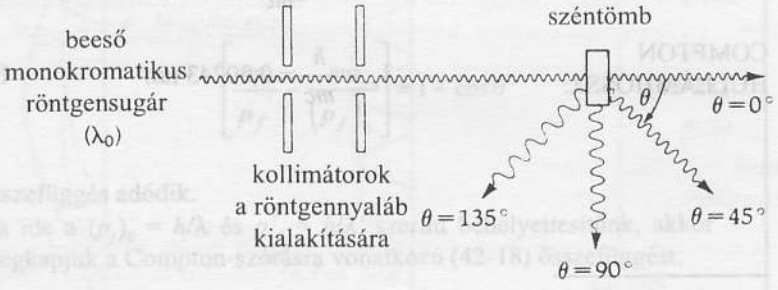
Ez a színkép narancssárga-sárga szakaszára esik, ezért a látható fény rövidebb hullámhosszú (zöld-kék) részéből származó fotonok hatására a céziumból fotoelektronok lépnek ki.

A fényelektromos hatásnak sok gyakorlati alkalmazása van. A fényképezésben használatos fénymérőkben a beeső fény hatására létrejövő fotoáram alapján választjuk ki a megfelelő megvilágítási időt. A *fotocella* az az „elektromos szem", amely az ajtókat kinyitja vagy megszólaltatja a riasztót, amikor egy fénysugár útját elvágja valami. De ezt használhatják arra is, hogy lyukkártyán vagy lyukasztott papírszalagon a lyukak helyét letapogassa. A magfizikában széles körben alkalmazzák a *szcintillációs számlálókat* (lásd a 42-11 ábrát). Egy sajátos detektor fajtában olyan anyagokat alkalmaznak, amelyek parányi fényfelvillanásokkal, szcintillációkkal reagálnak fotonokra vagy töltött részecskékre. A felvillanás fénye *fotokatód-felületre* esik, amely-

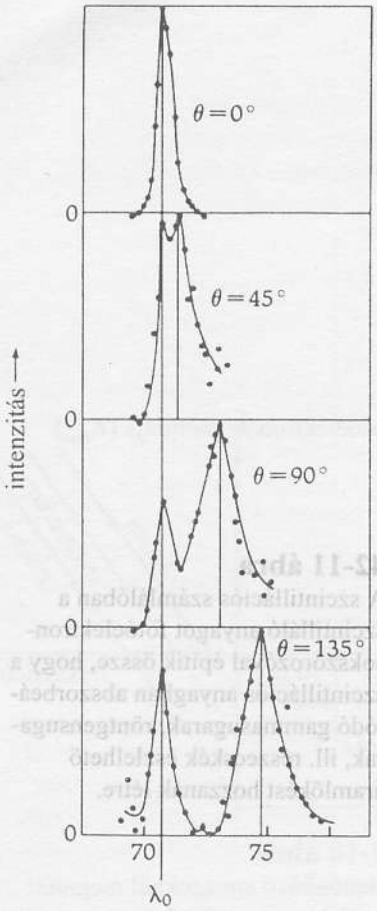


42-11 ábra
A szcintillációs számlálóban a szcintilláló anyagot fotóelektron-sokszorozóval építik össze, hogy a szcintillációs anyagban abszorbeálódó gammasugarak, röntgensugarak, ill. részecskék észlelhető áramlökést hozzanak létre.

ből fotoelektronok lépnek ki és egymás utáni elektródokba ütköznek. Ha az ütközés sebessége elég nagy, az első elektródra eső elektron egy vagy több elektront vált ki, s ezáltal az elektronok száma megsokszorozódik; ez az szekundér-emisszionak nevezett folyamat. A tipikus sokszorozási tényező 2–5, vagy esetleg több is lehet. Egy 10 elektródás, 4-es sokszorosítási tényezőjű fotoelektronsokszorozóban (a magyar szabványban is használatos az angol photomultiplier kifejezés), a kezdeti egyetlen elektronnal kiváltott láncfolyamat végén 4^{10}~10^6 elektron ütközik a kollektor (gyűjtő) elektródába, ami már elegendő nagy elektromos impulzust jelent ahhoz, hogy elektronikusan könnyen fel lehessen erősíteni. Sok fotoelektronsokszorozó esetén az erősítés 10^9 vagy még annál nagyobb is lehet.



42-12 ábra
A különböző szögben szórt röntgensugarak hullámhossza (λ') nagyobb, mint a beeső sugárzás λ_0 hullámhossza.



42-13 ábra
A Compton-szórás kísérleti adatai. A különböző szögekben szórt röntgensugár-nyalábok intenzitását a hullámhossz függvényében ábrázoljuk. A λ_0-nál megjelenő csúcs az atomon, mint egészen való szórásból származik. Ha a (42-18) képletben az atomtömeget használjuk az elektrontömeg helyett, akkor mindössze 10^{-16} m hullámhosszeltolódás adódik, ami ezen a méretskálán elhanyagolható.

42.6 A Compton-effektus és a párkeltés

A fotonok létére további tapasztalati bizonyítékot talált A. H. Compton 1923-ban. Vékony szénlapra monokromatikus röntgensugárnyalábot irányított és megfigyelte, hogy a lapról különböző szögben szórt röntgensugarak λ' hullámhossza nagyobb, mint a beeső sugarak λ_0 hullámhossza. A 42-12 ábra mutatja a kísérleti elrendezést, míg a 42-13 ábra a kísérleti adatokat. A $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0$ hullámhosszeltolódás végül a céltárgy anyagától függetlennek bizonyult, amiből arra kellett következtetni, hogy a jelenség nem az atommal, mint egésszel, hanem az elektronnal kapcsolatos. *A klasszikus hullámelmélettel ez az eredmény nem magyarázható.* A klasszikus elmélet szerint a beeső hullám rezgő elektromos erőtere a céltárgyban lévő elektronokat rezgésbe hozza. Ezek a rezgő elektronok aztán újra elektromágneses hullámokat sugároznak ki, *de szükségképpen ugyanazon a frekvencián, mint a beeső hullámé* – ez pedig éppen ellentmond a tapasztalatnak.

Compton a fotonmodellt hívta segítségül a kísérlet eredményeinek egyszerű magyarázatához. Einstein szerint egy foton energiája $E = hf$. A relativitás elmélete szerint az energia és a tömeg között az $E = mc^2$ összefüggés áll fenn. Ha a két képletet összevetjük, az adódik, hogy

$$hf = mc^2 \qquad \textbf{(42-15)}$$

Ha a fotonok c sebességgel terjednek, impulzusuk $p = mc$, ami (42-15) alapján

A FOTON IMPULZUSA
$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \textbf{(42-16)}$$

Meg kell jegyezni, hogy bár a fotonoknak van impulzusuk, *tömegük azonban zérus.*[*] Ez az E energia és a p impulzus közti relativisztikus összefüggésből is látható (41. fejezet (41-22) képlet).

$$E^2 = c^2p^2 + (mc^2)^2 \qquad \textbf{(42-17)}$$

Minthogy a foton impulzusa $p = hf/c = E/c$, világos, hogy a (42-17) képletben a tömeget tartalmazó tag zérus.

Compton a kölcsönhatást a beeső foton és a (lényegében) *szabad* elektron[9] közötti biliárdgolyó-típusú ütközésnek tekintette. A 42-14 ábra vázolja fel a folyamatot. Az ütközésre mind az energia, mind az impulzus megmaradás törvénye alkalmazható. Minthogy a szórt elektron mozgási energiához jut, a szórt foton energiájának valamivel kisebbnek kell lenni, mint a beeső fotoné. A relativisztikus energia- és impulzus-megmaradási törvényeket alkalmazva Compton a következő hullámhosszeltolódást vezette le:

COMPTON ELTOLÓDÁS:
$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \qquad \textbf{(42-18)}$$

COMPTON HULLÁMHOSSZ:
$$\lambda_c \equiv \frac{h}{mc} = 0{,}00243 \text{ nm} \qquad \textbf{(42-19)}$$

[*] A nyugalmi tömeg zérus (a fordító megj.)

[9] Azok a kötések, amelyek a külső elektronokat az atomok kötelékében tartják, mindössze néhány elektronvolt energiájúak. A Compton által használt röntgensugarak energiája ennek néhány ezerszerese, s emiatt a beeső röntgenfotonokkal való kölcsönhatás szempontjából ezek az elektronok lényegében szabadoknak tekinthetők.

A Compton-eltolódás nagyságrendje miatt az effektus csak viszonylag kis hullámhosszúságú fotonok (röntgen- és gamma-fotonok) esetén észlelhető.

A (42-18) képlet összhangban van a 42-13 ábrán bemutatott tapasztalati adatokkal. A λ_0-nál megjelenő zavartalan eredeti vonal a belső héjon lévő elektronokon létrejött szóródás eredménye, ezek az atomhoz olyannyira szorosan kötődnek, hogy az egész atom lökődik meg. Mivel az atom tömege viszonylag nagy, az atom elhanyagolhatóan kis energiát vesz fel az ütközés során. (Lásd a 9C-50 problémát.) A fotonmodell sikere a Compton-szórás magyarázatában tovább erősítette a hitet abban, hogy a sugárzás részecske természetű.

42-5 PÉLDA

Írjuk fel az energia és az impulzus megmaradásának törvényét a Compton-szórás folyamatára, amit a 42-14 ábrán mutatunk. Végezzük el a (42-18) képlet levezetését!

MEGOLDÁS

Az energia és az impulzus relativisztikus kifejezéseit használjuk. Az $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ alapján megjegyezzük, hogy mivel a fotonnak nincsen tömege, a beeső foton energiája $p_f c$; a szórt foton energiája $p'_f c$. Az elektron kezdeti energiája mc^2, végső E energiáját a fenti képlet adja.

Az energia megmaradása: $E_0 = E$

$$p_f c + mc^2 = p'_f c + E_e$$

Ezt az E-re kifejezve, négyzetre emelve, majd a $E_e^2 = (mc^2)^2 + (p_e c)^2$ formulába behelyettesítve az adódik, hogy:

$$(p_f c - p'_f c + mc^2)^2 = (mc^2)^2 + (p_e c)^2 \qquad \textbf{(42-20)}$$

A 42-14c ábra vektordiagramja segítségével innen kiküszöböljük a p_e értékét. (A diagram a $(\mathbf{p}_f)_0 = \mathbf{p}'_f + \mathbf{p}_e$ *impulzus megmaradását* fejezi ki.) A háromszögre vonatkozó cosinus-tételből adódik, hogy

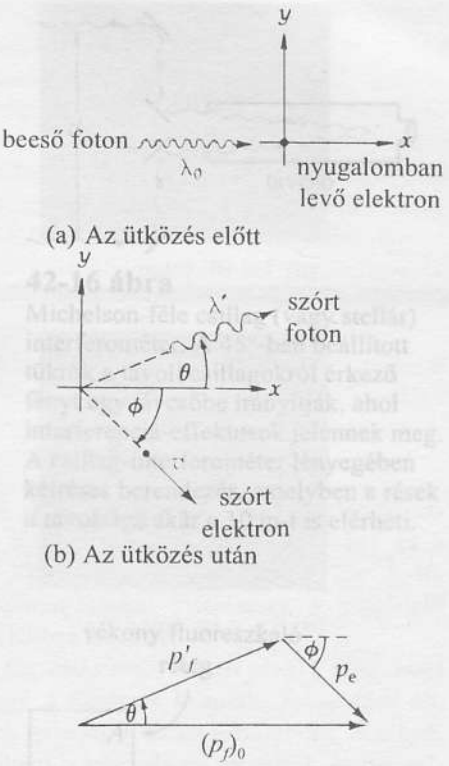
$$p_e^2 = (p_f)_0^2 + p'^2_f - 2(p_f)_0 p'_f \cos\theta \qquad \textbf{(42-21)}$$

A p_e^2 itt nyert értékét a (42-20) képletbe helyettesítjük és elvégezzük a kijelölt műveleteket. Egyszerűsítések után az

$$\left[\frac{mc}{p'_f} - \frac{mc}{(p_f)_0}\right] = 1 - \cos\theta \qquad \textbf{(42-22)}$$

összefüggés adódik.

Ha ide a $(p_f)_0 = h/\lambda$ és $p'_f = h/\lambda'$ szerint behelyettesítünk, akkor megkapjuk a Compton-szórásra vonatkozó (42-18) összefüggést.



42-14 ábra
A Compton-szórás folyamatban a λ_0 hullámhosszúságú foton kezdetben nyugvó elektronnal részecskeszerűen ütközik. A szórt foton λ' hullámhossza nagyobb.

A párkeltés

Egy további kölcsönhatás, amelyben a foton részecskeként viselkedik, a **párkeltés** folyamata. Ha elegendő nagy energiájú foton atommag közelében halad el, a foton eltűnhet és *elektron-pozitron-párt* kelthet, $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. A pár nyugalmi energiája: $2m_ec^2 = 1{,}022$ MeV (ami egy elektron nyugalmi energiájának kétszerese), tehát a fotonnak legalább ekkora energiával kell érkeznie. Ha ennél több a foton energiája, akkor a többlet az elektron és a pozitron mozgási energiáját növeli. Az elektromos töltés a reakció során megmarad, mert a pár tagjainak töltése ellentétesen egyenlő. Az impulzus a mag jelenléte miatt marad meg (ami általában elhanyagolható nagyságú energiát vesz csak fel). A 42C-49 probléma tárgyalása mutatja, hogy a *párkeltés nem mehet végbe* az üres térben, mert ott sem az energia, sem az impulzus megmaradása nem teljesülhet.

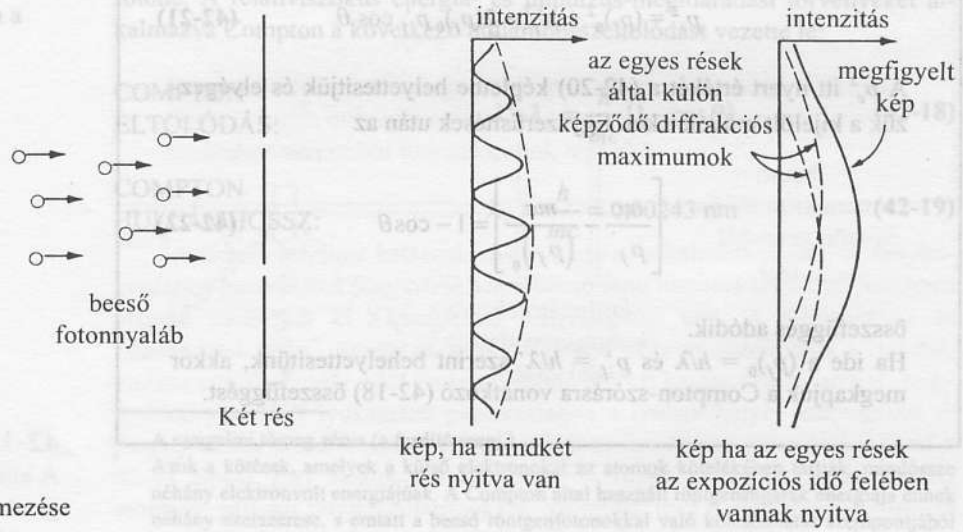
A PÁRKELTÉS $$hf = 2m_ec^2 + K_1 + K_2 \qquad \textbf{(42-23)}$$

42.7 Az elektromágneses sugárzás kettős természete

Mindeddig azokat a kísérleti bizonyítékokat tekintettük át, amelyek a sugárzás részecske-természete mellett szólnak. A fotonmodell kétségkívül logikusnak és közvetlenül alkalmazhatónak látszik. Mindezek ellenére elfogadása a fizikusok számára hosszadalmas és fájdalmas folyamat volt. Robert Millikan ismert amerikai fizikus így fejezte ki aggályait (1916-ban):

> *„Életemből 10 esztendőt töltöttem el azzal, hogy Einstein 1905-ben közölt egyenletét ellenőrizzem, és minden várakozásommal ellentétben, 1915-ben arra kényszerültem, hogy szilárd kísérleti igazolásáról számoljak be, annak ellenére, hogy ez valószínűtlennek tűnt, mert úgy látszott, hogy mindannak ellentmond, amit a fény interferenciájáról megtanultunk."*

Ennek a vonakodásnak az oka a következő. Minden interferencia – és elhajlási jelenség bőségesen ad bizonyítékot arra, hogy a sugárzás *hullám* jellegű. Felvetődik, hogy ha elfogadjuk a foton-modellt, akkor értelmezni tudjuk-e a két-réses interferencia-kísérleteket ezzel a modellel? Emlékezzünk arra, hogy a világos és a sötét csíkokat két koherens hullám interferenciájának követ-



42-15 ábra
A kétréses interferencia értelmezése fotonokkal.

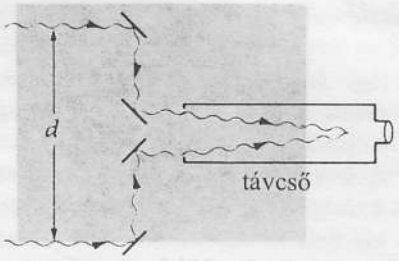
kezményeként értelmeztük, ahol a hullámok a résekből indultak ki. De mi történik, ha azt tételezzük fel, hogy a beeső fény *fotonok* áramlása?

Először is a fényintenzitás-eloszlást az ernyőn a különböző helyekre érkező fotonok számával hozhatjuk kapcsolatba. Minden egyes foton beérkezése *lokalizált*, „pontszerű" esemény, feltehetőleg az, hogy a foton a fotoemulzió egy ezüst-bromid molekulájából kilök egy elektront s emiatt az előhíváskor a filmen egy ezüst szemcse jelenik meg. Ha a foton valóban olyan lokalizált részecske, ami elég kicsiny egy elektronnal való kölcsönhatáshoz, akkor bizonyára egyszerre csak egy résen tud áthaladni. Ezért aztán egyáltalán nem befolyásolhatná az eredményt, ha az egyik rést akár az expozíciós idő fele alatt zárva tartanánk, majd amikor kinyitjuk, akkor a másik rést zárnánk be. *Ha azonban elvégezzük ezt a kísérletet, akkor nem a kétréses interferencia-képet kapjuk.* Ahogyan a 42-15 ábra mutatja, az észlelt kép éppen a két egyréses elhajlás szuperpozíciója lesz. (Mintha a két rés különkülön lenne nyitva.) Úgy tűnik, bármennyire is lokalizált részecske a foton, mégis érzékeli, hogy mindkét rés nyitva van-e vagy sem.

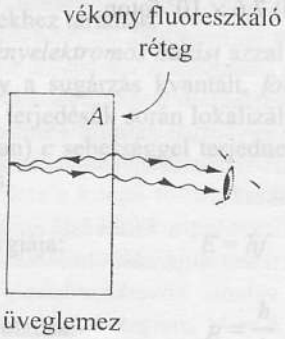
Hogyan hozhatnak létre a fotonok interferenciát? Áthaladhat-e az egyik résen egy foton, és interferálhat-e a másikon áthaladó fotonnal? Nem! Kísérleteket végeztek gyenge intenzitású fénnyel, amelyben biztosították, hogy a berendezésben egyszerre csak egy foton haladt át a forrástól az ernyő felé.* Egyszer megtörtént az, hogy a kísérletező egy interferencia-kísérletben elindította a mérést, majd néhány hónapra vitorlástúrára ment. Amikor visszatérte után előhívta a filmet, a szokásos kétréses interferenciaképet találta, jóllehet, egyszerre csak egyetlen foton tartózkodhatott a berendezésben! **Eszerint: minden foton csak saját magával interferál.**[10]

Vajon következik-e ebből az, hogy a foton „szét van kenődve", úgy, hogy mindkét résen egyszerre tud áthaladni? Ezt nehéz elképzelni, ha az ún. csillag-interferométerre gondolunk, amit a 42-16 ábra mutat be. Ez a berendezés lényegében kétréses készülék, ahol a rések távolsága elérheti a 10 m-t. Ahhoz, hogy a szokásos interferenciaképet megkapjuk, egyszerre mindkét résnek nyitva kell lennie. De, amellett, hogy azt képzeljük, hogy a foton annyira szét van kenődve, hogy mindkét résen egyszerre hatol át, azt is figyelembe kell vennünk, hogy a foton – amennyiben éppen egy fotoelektromos folyamatról lenne szó – összes energiáját egyetlen elektronnak is át kell hogy tudja adni. A két elképzelés nyilván inkonzisztens. Súlyos nehézségekbe ütközünk, ha a fotont térben kiterjedt valaminek próbáljuk elképzelni. A 42-17 ábra egy másik olyan kísérletet mutat be, amely a fotonmodell alkalmazásával nem magyarázható meg.

A fotonok viselkedését ilyen kísérletekben csak valószínűségi alapokon lehet megérteni. Nem tudjuk megmondani azt, hogy egy kiszemelt foton hol éri el az ernyőt, de megadhatjuk a nagy számú foton ütközésekor létrejövő statisztikus eloszlást. A megfigyelt eloszlás ugyanaz lesz, mint amit a fény hullámelméletéből az intenzitás eloszlására kiszámíthatunk. Itt fontos új vonása bontakozik ki annak a szemléletmódnak, ahogyan a fényről gondolkodhatunk, s amit a következő fejezetben bővebben is kifejtünk. *Annak a valószínűsége, hogy egy foton egy adott helyen előfordul, arányos a fényhullám intenzitásával azon a helyen.*



42-16 ábra
Michelson-féle csillag (vagy stellár) interferométer. A 45°-ban beállított tükrök a távoli csillagokról érkező fényt egy távcsőbe irányítják, ahol interferencia-effektusok jelennek meg. A csillag-interferométer lényegében kétréses berendezés, amelyben a rések d távolsága akár a 10 m-t is elérheti.



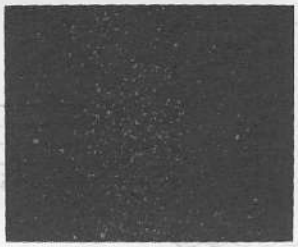
42-17 ábra
Üveglemez egyik falára fluoreszkáló anyagból vékony réteget hordtak fel, amely – ha ultraibolya fénnyel világítják meg – világít. Vizsgáljuk egy, az A pontban lévő egyedülálló atom fényét. (A koherencia követelmények miatt, az egyes atomok által kibocsátott fény csak önmagával interferálhat, nem pedig más atomoktól származó fénnyel.) A fénynek az a része, amely az üveglemez hátsó oldaláról verődik vissza, interferál a közvetlenül a megfigyelő felé haladó fénnyel, ezáltal a megfigyelő fényes és sötét gyűrűk mintázatát látja, amely hasonlít a Newton-gyűrűkéhez (lásd 38-17 ábra). Ez az effektus könnyen érthető a gömbi alakú hullámfrontok fogalmával. A gömbi alakú hullámfrontok az atom-tól kifelé tágulva terjednek és találkozva interferálhatnak, ami az interferencia-mintázat kialakulásához vezet. De a foton-modell szerint az atom egyetlen fotont bocsát ki. Vajon ez a foton egyszerre két irányban indul kifelé? Ebben a kísérletben a foton-fogalomban való gondolkodás nyilvánvalóan nehézségekhez vezet.**

---

* Ezeket a kísérleteket először Jánonsay Lajos és munkatársai végezték el Budapesten a Központi Fizikai Kutató Intézetben. (A ford. megj.)

[10] A foton-foton-kölcsönhatások bizonyos körülmények között valóban végbemennek, de rendkívül ritkák és az itt leírtak szempontjából nincsen jelentőségük.

** Ezt a kísérletet Selényi Pál magyar fizikus végezte el az Einstein-féle ún. „tűsugárzás" elmélet ellenőrzésére. Az interferencia létezése cáfolta az Einstein által javasolt elméletet. (a fordító megjegyzése)



(a) 3×10^3 foton



(b) $1{,}2 \times 10^4$ foton



(c) $9{,}3 \times 10^4$ foton



(d) $7{,}6 \times 10^5$ foton



(e) $3{,}6 \times 10^6$ foton



(f) $2{,}8 \times 10^7$ foton

42-18 ábra
Egy teljes kép létrehozásához nagyon sok foton szükséges. A képalkotásban szereplő fotonok számát feltüntettük az egyes képek alatt.

A fényjelenségek értelmezése során a „kettős gondolkodás" mesterévé kell válnunk. Bizonyos kísérleteknél a fény hullám-modellje enged betekintést a történésbe, míg a kísérletek egy másik osztályában csak a részecske-modellnek van értelme. De létezik-e jótanács arra vonatkozóan, hogy mikor melyik modellt kell választani? Egy lehetőség a következő. Ha a berendezés jellegzetes méretei (rés-szélesség, apertúra, stb.) a λ hullámhossz nagyságrendjébe esnek, akkor a sugárzás hullámtermészete általában fontosabb az interferencia és az elhajlás miatt. Másrészt viszont, ha a jellegzetes méretek sokkal nagyobbak a λ-nál, (mint a 36. és 37. fejezetben a *Geometriai optikában* is láttuk) általában nem érdekesek a hullámtulajdonságok és így feltehetjük, hogy a fénysugarak nem hajlanak el a széleknél és egyenes vonalban terjednek – mint (ha úgy tetszik) a *részecskék*. A választás egy másik kulcsa abban rejlik, hogy ha a foton energiája és impulzusa összemérhető a rendszer más energiáival és impulzusaival, akkor a fotonokat is részecskékként kell kezelni (mint ahogyan pl. a fotoelektromos hatásnál és Compton-effektus esetében tettük). Mindezek azonban csak közelítő ökölszabályként használható meggondolások. Gondosan kell eljárnunk; például a csillag-interferométernél, úgy gondolkodunk, hogy *hullámok* haladnak át a berendezésen, de a fényképezőlemezre *fotonok* érkeznek.

A fizika fejlődésének ezen a szintjén (az 1900-as évek elején) úgy látszott, hogy a fény tudathasadásos jelenség. De még ma is, az alkalmazások legnagyobb részében a fényt *vagy részecskeként, vagy hullámként* kezeljük. Egy lényeges tényt azonban meg kell jegyeznünk. *Valahányszor a fényt kísérletileg kimutatjuk, az mindig részecskejellegű kölcsönhatással, és nem hullámjellegűvel jár.* A hullámmodellre azért van szükségünk, hogy megértsük az interferencia és az elhajlás jelenségeit, *fizikailag azonban sohasem detektáljuk a fényt azokban a régiókban, ahol hullámként kezeljük.* Ha a fény az anyaggal kölcsönhatásba lép, akkor mindig a részecskemodellt kell alkalmazzuk. Az interferenciaképet nagyszámú foton hozza létre, amelyek fokozatosan, *statisztikailag* úgy oszlanak el, hogy a világos és sötét csíkokból álló mintázatot kialakítsák. A fotonok statisztikai viselkedése minden képalkotásban jelen van (lásd a 42-18 ábrát). Elég ironikus helyzet, hogy a hullámmo-

dellt a fény terjedésére azért kellett kidolgoznunk, hogy megértsük a fény terjedését abban a térrészben, ahol nem hagy nyomot! A történet tanulsága talán az, hogy sem a hullám-, sem a részecskemodellt nem szabad szó szerint vennünk. Ezek hasznos, ámde ellentmondásos képek: a részecskék lokalizáltak, a hullámok pedig kiterjedt objektumok. Fogalmilag a két modellt nem tudjuk összeolvasztani. Ennek a paradoxon jellegű kettősségnek modern feloldását a következő fejezetben mutatjuk be.

Összefoglalás

A feketetest- (vagy üreg) sugárzás egyik jellemzője a sugárzás teljes R teljesítménysűrűsége (emittanciája) a teljes spektrumon (*watt/m*^{2}-ben). Az emittancia a T abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos:

Stefan-Boltzmann sugárzási törvény $$R = \sigma T^4$$

ahol $\sigma = 5{,}672 \times 10^{-8}$ W/(m^2 K^4) a Stefan-Boltzmann-állandó. Egy másik jellegzetes tulajdonság az, hogy amikor az abszolút hőmérséklet emelkedik, a spektrális eloszlás maximumához tartozó hullámhossz a rövidebb hullámok felé eltolódik a

Wien-féle eltolódási törvény $\lambda_m T =$ állandó

szerint. A Wien-, ill., Rayleigh-Jeans-féle klasszikus sugárzási törvények rendre csak közelítései a helyes törvénynek a rövid, ill. hosszú hullámok esetére. A helyes sugárzási törvényt Planck vezette le az alábbi feltevések alapján:

Planck-féle kvantumfeltevés

- Az egyszerű harmonikus oszcillátorok (amelyeket az f frekvenciájuk jellemez) csak kvantált energia állapotban létezhetnek, ahol $$E_n = nhf$$
- Itt $n = 0, 1, 2, 3,...$ és $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s a *Planck-állandó* néven ismert mennyiség. Az oszcillátorok csak $\Delta E = hf$ kvantumokban bocsátják ki, illetve nyelik el az energiát. (Planck eredetileg *nhf*-et javasolt, később azonban bebizonyították, hogy csak az $n = 1$ valósul meg.)

Ezek alapján fogalmazható meg Planck sugárzási törvénye,

$$du_\lambda = f(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

ahol a $f(\lambda,T)d\lambda$ a λ és $\lambda+d\lambda$ közé eső hullámhossz-intervallumban lévő sugárzási energia sűrűsége és a $k = 1{,}381\times10^{-23}$ J/K a *Boltzmann-állandó*. Ha $h\to0$, akkor a kvantummechanikai kifejezések a megfelelő klasszikus képletekhez tartanak.

Einstein a *fényelektromos hatást* azzal a feltevéssel magyarázta, hogy a sugárzás kvantált, *fotonokból* áll, amelyek a térben terjedésük során lokalizáltan viselkednek, (a vákuumban) c sebességgel terjednek és nyugalmi tömegük zérus.

A foton energiája: $E = hf$

A foton impulzusa: $$p = \frac{h}{\lambda}$$

Einstein foto-elektromos egyenlete $$hf = K_{max} + W_0,$$

ahol f a megvilágító fény frekvenciája, K_{max} a fotoelektronok maximális kinetikus energiája és W_0 az adott fémfelületről a kilépési munka.

A fotonok a szabad elektronokon szóródva hullámhosszeltolódást szenvednek a Compton-szórás alkalmával, ez

$$\lambda' - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - \cos\theta)$$

ahol m az elektron tömege. A h/mc az ún. Compton-hullámhossz. $\lambda_c = 0{,}00243$ nm

Az elektromágneses sugárzás duális (kettős) természetének következtében a *hullám-* és a *részecskemodellt* egyaránt használjuk. A hullámmodell lehetővé teszi, hogy az interferencia- és elhajlási-effektusokat megmagyarázzuk, de minden olyan esetben, amikor a sugárzás és az anyag közti kölcsönhatást kísérletileg érzékeljük, akkor részecskejellegű kölcsönhatást kell feltételeznünk.

Kérdések

1. Egy izzólámpára adott teljesítményt csökkentjük, akkor fényessége is csökkeni fog. Miért változik meg a kibocsátott fény színe is?
2. A hőkezelő kemencékbe helyezett fémtárgyak az izzásig melegednek. Ha a kemence ajtajára vágott kis lyukon keresztül benézünk, azt látjuk, hogy a tárgyak csaknem teljesen eltűntek. Miért?
3. Mit jelent a fekete szó a „fekete-test-sugárzás" kifejezésben?
4. A melegített testek felülete a módosított Stefan-Boltzmann-törvénynek megfelelően sugároz energiát. A törvény $R = e\sigma T^4$, ahol az e (*emisszióképesség*) értéke a feketetest esetére 1, míg bármely más anyagra egynél kisebb. Két különböző fém, amit ugyanazon a hőmérsékleten tartatunk, különbözőképpen sugározhat. Termodinamikai alapon adjuk meg, hogy hogyan lehet egy anyag emisszióképessége azzal kapcsolatos, ahogyan a sugárzást elnyeli?
5. Van olyan hőmérséklet, ahol a fémek izzanak, és az üveg még csak nem is vörösödik. Miért?
6. Egyes épületekben a gőzfűtés radiátorai fényes felületűek vagy ezüst színűre festettek. Magyarázzuk meg, miért lenne előnyösebb matt fekete festékkel bevonni őket?
7. Fejtsük ki azokat a feltevéseket, amelyeket Planck tett a feketetest sugárzási elméletében.
8. Nincsen valami következetlenség abban, hogy a *fotonnak* $E = hf$ energiát tulajdonítunk, amikor az f egy *hullám* frekvenciája?
9. Látható lehetne-e egy halvány csillag fénye, ha a csillagról érkező fény nem lenne korpuszkuláris természetű?
10. Adjunk durva becslést arra, hogy milyen nagynak kellene lennie a Planck-állandónak ahhoz, hogy az egyszerű mechanikai oszcillátorok kvantumeffektusait szabad szemmel is észlelni lehessen?
11. Diszkutáljuk Einstein feltevéseit, amelyeket a fotoelektromos hatást magyarázó elméletében tett!
12. Miért független a felületre eső fény intenzitásától az a maximális kinetikus energia, amivel a fotoelektronok a fémfelületet elhagyják?
13. A fotocellákban a fényérzékeny katódból kilépő elektronok normális esetben a katódénál nagyobb potenciálú anódhoz jutnak. Hogyan függ a fotocellán átfolyó elektronáram a katódra eső fény intenzitásától és a katód és az anód közti potenciálkülönbségtől?
14. Elszigetelt cinklemezt ibolyántúli fénynek tesszük ki. A lemez először fotoelektronokat bocsát ki, majd ez a folyamat megáll. Miért? (Útmutatás: Töltött lesz-e a cinklemez?)
15. A fotoelektromos hatás gázokban is ugyanúgy megy végbe, mint szilárd anyagokon. Ha céltárgyként gázt használunk, akkor van-e küszöbhullámhossz? Ha igen, ugyanakkora-e ez, mint a szilárd anyagoknál? Magyarázzuk meg!
16. Diszkutáljuk azokat a feltevéseket, amelyeket Compton vetett fel a Compton-effektus magyarázata érdekében!
17. Miért természetes az, hogy a szórt fotonok hullámhosszában tapasztalt Compton-eltolódás független a szóró anyag minőségétől?
18. Miért nem lehet a Compton-effektust látható fénnyel is könnyen megfigyelni?
19. Hogyan támasztja alá a Compton-effektus a fotoelektromos hatásból adódó feltevéseket a sugárzás kvantumelméletének megalapozásában?
20. Hol a hiba a Compton-effektus alábbi magyarázatában: Az elektromágneses sugárzás kizárólagosan hullámjelenség. A hullám az elektronokkal kölcsönhat, az elektronok a hullámok által szállított impulzus hatására visszalökődnek továbbá az elektronokat a beeső hullám az elektromos rezgése ütemében rezgésre készteti. Az oszcilláló elektronok által kibocsátott sugárzás frekvenciájában megfigyelt eltolódás tisztán Doppler eltolódás, hiszen az elektronok is mozognak a visszalökődés miatt.
21. Egy foton és egy elektron impulzusa ugyanakkora. Melyiküknek lesz nagyobb a teljes (a nyugalmi energiát is tartalmazó) energiája?

Feladatok

42.2 A feketetest sugárzásának spektruma

42A-1 Egy 200 W-os wolfram-szálas villanyégő szál hőmérséklete 2200 K. Feltéve, hogy a szál ideális fekete testként sugároz, számítsuk ki a felület nagyságát!

42B-2 (a) Feltéve, hogy a Nap felszíne 5780 K-en ideális sugárzó, adjuk meg a Nap által kisugárzott teljesítményt! (b) Számítsuk ki, a Föld felszínére beeső napsugárzás teljesítményét (a légkör fölött) a beeső sugárzás irányára merőlegesen álló egy négyzetméternyi felületen!

42B-3 Tegyük fel, hogy valakinek a bőrén egy kis felületen a hőmérséklete 37,5°C, fél fokkal magasabb, mint a normális testhőmérséklet. Tegyük fel, hogy a sugárzás feketetest-sugárzással közelíthető. Számítsuk ki, mekkora $\Delta R/R$ a melegebb terület sugárzásának többlete a normális hőmérsékletű felületek sugárzásához viszonyítva. (Az ilyen kis különbségek kimutatására alkalmas eljárás a *termográfia*, ami a tumorok és más, a bőrfelület alatt néhány centiméterrel kialakuló betegsé-

gek kimutatására szolgáló infravörös, ill. mikrohullámú fotográfiai technika.)

42B-4 Hőszigetelt kemencén, amely 500°C hőmérsékleten üzemel, 2 cm átmérőjű lyuk van. Számítsuk ki, mekkora energia halad át másodpercenként ezen a lyukon a 30°C hőmérsékletű szoba felé? (Útmutatás: Tekintsük mind a kemencét, mind a szobát ideális fekete testnek.)

42.3. A feketetest sugárzás különböző magyarázatai

42A-5 Határozzuk meg a szobahőmérsékletű 27°C feketetest sugárzási görbéjének maximumához tartozó hullámhosszat!

42A-6 Az ősrobbanás és az Univerzum tágulása következtében a csillagközi térben kb. 2,7 *K* hőmérsékletnek megfelelő spektrumú háttérsugárzás van. Adjuk meg (a) a hullámhosszát és (b) a rezgésszámát annak a rezgésnek, ahol ez a sugárzás maximális energiájú!

42A-7 Az emberi szem kb. 555 nm hullámhossznál a legnagyobb érzékenységű. Adjuk meg annak a feketetestnek a hőmérsékletét, amely sugárzásának a spektrális teljesítménye ezen a hullámhosszon a maximális!

42B-8 A Nap sugara $6{,}96 \times 10^8$ m és teljes kisugárzott teljesítménye $3{,}86 \times 10^{26}$ W. (a) Feltéve, hogy a Nap felszíne ideális feketetestként sugároz, számítsuk ki felszíni hőmérsékletét! (b) Felhasználva az (a) rész eredményét, adjuk meg a Napból érkező sugárzás spektrális eloszlásában a maximumhoz tartozó hullámhosszat!

42.4 Planck elmélete

42A-9 Adjuk meg annak a fotonnak a hullámhosszát, amelynek energiája az elektron nyugalmi energiájával egyenlő (0,511 MeV)!

42A-10 URH adó 80 kW teljesítménnyel sugároz a 92,4 MHz frekvencián. Hány fotont bocsát ki másodpercenként?

42A-11 A foton E energiája és λ hullámhossza között fennáll a $E\lambda = 1{,}240 \times 10^{-3}$ MeV·nm összefüggés. Vezessük le ezt a képletet!

42A-12 A He-Ne-lézer a 632,8 nm hullámhosszon fényt bocsát ki. (a) Az elektromágneses színkép melyik szakaszára esik ez a fény? (b) Másodpercenként hány fotont bocsát ki a He-Ne-lézer, ha teljesítménye 2 mW?

42B-13 A kísérletek azt mutatják, hogy a sötétre adaptált emberi szem már a látható fény egyetlen fotonját is érzékeli. Tekintsünk egy pontforrást, amely 2 W fényteljesítményt sugároz az 555 nm hullámhosszon minden irányban. Mekkora távolságban kellene lennie ennek a fényforrásnak, hogy átlagosan egy foton érkezzen másodpercenként az emberi szembe, amelynek a pupillája 6 mm átmérőjű?

42B-14 Kis amplitúdók esetén a fonalinga egyszerű harmonikus oszcillátorként viselkedik. Legyen az inga tömege 50 g-os, fonalhossza 40 cm. (a) Planck elméletét alkalmazva mekkora ennek az ingának a legkisebb, nullától különböző lehetséges energiája? Mekkora az ezzel a minimális energiával lengő inga amplitúdója? (A válasz megmutatja, hogy miért nem lehet a kvantáltságot a makroszkópikus mozgásoknál észlelni.)

42-5 A fényelektromos hatás

42A-15 A nátrium kilépési munkája 2,75 eV. Adjuk meg a fotoelektromos hatás küszöbhullámhosszát Na esetére.

42A-16 A bizmutban a fotoelektromos hatás csak 294 nm-nél rövidebb ultraibolya hullámhosszak esetén jelenik meg. Adjuk meg a kilépési munkát (elektronvoltokban) a bizmutra!

42B-17 Tiszta kalcium-felületet ultraibolya fénnyel világítunk meg. A kilépési munka 2,87 eV. Számítsuk ki, mekkora (a) a kilépő fotoelektronok maximális sebessége és (b) mekkora a küszöbhullámhossz?

42B-18 410 nm hullámhosszúságú fény esik egy fémfelületre. A fotoelektromos hatásnál a küszöbfeszültség 0,83 V. (a) Mekkora a kilépő fotoelektronok maximális kinetikus energiája? (b) Mekkora a fém kilépési munkája? (c) Mekkora a küszöbhullámhossz?

42.6 A Compton-effektus és párkeltés
42.7 Az elektromágneses sugárzás kettős természete

42A-19 Adjuk meg a hullámhossszváltozást, ha egy fotont egy kezdetben álló elektron „visszaszór" (vagyis a szórási szög 180°). Függ-e a hullámhosszváltozás a beeső foton hullámhosszától?

42A-20 A Compton-szórás folyamatában egy foton hullámhosszában 0,41% növekedést tapasztalunk. Milyen szögben szórta a fotont az elektron?

42A-21 Nagy energiájú foton proton-antiproton-párt hoz létre párkeltési folyamatban. Egy 2,10 GeV energiájú foton létrehoz egy ilyen párt, a proton kinetikus energiája 95 MeV. Adjuk meg az antiproton kinetikus energiáját!

42B-22 Egy gamma-foton, melynek energiája az elektron nyugalmi energiájával (511 keV) egyenlő, összeütközik egy elektronnal, ami kezdetben nyugalomban volt. Számítsuk ki, mekkora mozgási energiát nyer az elektron az ütközésben, ha a foton az eredeti pályaegyeneséhez képest 30°-os szögben szóródik?

42B-23 Egy $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ párkeltési folyamat csak egy mag közelében tud végbemenni, mert a mag jelenléte szükséges az impulzus megmaradás biztosításához. Mutassuk meg, hogy az atommagnak a kinematikus energiája akkor is nagyon kicsi lenne, ha a foton teljes kezdeti impulzusát fel is venné. (Útmutatás: adjuk meg

a mag végső $\frac{1}{2}Mv^2$ kinetikus energiájának és a foton kezdeti energiájának az arányát, és mutassuk meg, hogy ez az arány igazából elhanyagolhatóan kicsi. Olyan fotonenergiákat tekintsünk, amelyek 10 MeV-nél kisebbek, ezeknél ugyanis a nemrelativisztikus képletek még kielégítően pontosak.)

42B-24 A klór egyik radioaktív izotópja ($^{38\ m}$Cl) egy 600 keV energiájú foton kibocsátásával bomlik. (Az m jel a mag metastabilis állapotára utal. A mag azonban ahelyett, hogy azonnal elbomlana, viszonylag hosszú ideig gerjesztett állapotban van.) Ha a mag kezdetben nyugalomban volt, határozzuk meg a nyert kinetikus energiájának és a kibocsátott foton energiájának a hányadosát. A ^{38m}Cl mag összenergiájának értéke 35,4 GeV. (Ez ekvivalens a tömegével.)

42B-25 Egy 2 W-os He-Ne-lézer fényét (632 nm) a céltárgy teljesen elnyeli. Adjuk meg; (a) A céltárgyba másodpercenként becsapódó fotonok számát, (b) az egyes fotonok impulzusának nagyságát. (c) Ezeknek az adatoknak a felhasználásával számítsuk ki, mekkora erőt gyakorol a lézernyaláb a céltárgyra.

Vegyes feladatok

42C-26 Egy 1,7 m^2 bőrfelületű személy meztelenül ül a 62°C hőmérsékletű szaunában. A bőrének hőmérséklete 37°C. (a) Feltéve, hogy a feketetest sugárzás modellje alkalmazható, becsüljük meg, milyen ütemben veszi fel a hőt az emberi test hősugárzás útján. (b) A verejték párolgási hője lényegében ugyanakkora, mint a 37°C hőmérsékletű vízé: 2427 kJ/kg. Milyen ütemben kell a verejtéknek párolognia ahhoz, hogy a fenti hőfelvételt kompenzálja?

42C-27 Egy T abszolút hőmérsékletű objektum által a T_0 abszolút hőmérsékletű környezetbe kisugárzott eredő teljesítmény arányos a $(T^4 - T_0^4)$ kifejezéssel. Mutassuk meg, hogy ha a hőmérséklet-különbség kicsi, akkor teljesül a Newton-féle lehűlési törvény, vagyis: *a test lehűlésének üteme közelítőleg arányos a test és a környezet hőmérséklete közötti különbséggel.*

42C-28 Mutassuk meg, hogy rövid hullámok esetén Planck (42-11) sugárzási törvénye közelítésként tart Wien (42-4) sugárzási törvényéhez!

42C-29 Mutassuk meg, hogy hosszú hullámokra Planck (42-11) sugárzási törvénye közelítőleg a Rayliegh-Jeans-féle (42-6) sugárzási törvényhez tart! (Útmutatás: az exponenciális tagot fejtsük hatványsorba!)

42C-30 A Planck-féle (42-11) sugárzási törvényt differenciálva határozzuk meg a csúcs helyét, és mutassuk meg, hogy ezzel éppen a Wien-féle (42-2) eltolódási törvényhez jutunk!

42C-31 Pontforrás monokromatikus (λ = 550 nm) hullámok alakjában 2 W fényteljesítményt bocsát ki a térbe egyenletes eloszlásban. Számítsuk ki, hogy a fényforrástól milyen távolságban lesz a fotonok térfogati sűrűsége átlagosan köbcentiméterenként egy.

42C-32 Egy 10 g nagyságú tömeg 3,0 cm-es amplitúdóval rezeg egy 0,01 N/m direkciós tényezőjű rugó hatására. Mennyivel csökken a rezgés amplitúdója egyetlen energiakvantum elvesztése esetén?

42C-33 Egy 546 nm hullámhosszúságú monokromatikus párhuzamos fénynyaláb intenzitása 200 W/m^2. Adjuk meg, hogy hány foton van ebben a sugárzásban köbmilliméterenként.

42C-34 A sötétre adaptált emberi szem még az olyan gyönge zöld fényt is képes észlelni (λ = 500 nm), ami a retinának $1{,}7\cdot10^{-18}$ joule energiát ad át másodpercenként. Tegyük fel, hogy a beeső fény párhuzamos és így egyetlen receptorra fókuszálható. (a) Adjuk meg, hogy átlagosan hány foton érkezik másodpercenként a receptorra. (b) Ha a sötétre adaptált szem pupillája 8 mm átmérőjű, mekkora távolságból lehetne kimutatni egy 10 W teljesítményű 500 nm hullámhosszúságon egyenletesen sugárzó pontforrást? A szemre eső fénynek 20%-a jut el a retina receptoraira, a többi 80% az idegszálak rétegében, a véredényekben és a receptorok felett húzodó más szövetekben abszorbeálódik.

42C-35 Mutassuk meg, hogy az egyszerű kvantált harmonikus oszcillátor $E_{átl.}$ átlagos energiája (42-10) a klasszikus kT értékhez tart, ha λ nagyon naggyá válik.

42C-36 A feketetest sugárzás (42-11) Planck-féle törvényében a λ változót cseréljük f-re. Mutassuk meg, hogy ekkor az energiasűrűség f és $f+df$ frekvenciák közé eső járulékát kapjuk:

$$du_f = f(f,T)df = \frac{8\pi hf^3}{c^3\left(e^{hf/kT}-1\right)}df$$

42C-37 (a) Ha a 42C-36 probléma eredményét az összes frekvenciára integráljuk, megkapjuk az üregsugárzás u energiasűrűségét: $u = \int_0^\infty f(f,T)df$. (Útmutatás: Vezessünk be új változót az $x = hf/kT$ szerint. Az $\int_0^\infty x^3\left(e^x-1\right)^{-1}dx = \pi^4/15$ integrálhoz jutunk.) (b) Találjuk meg T = 300 K (szobahőmérséklet) esetére az u számértéket.

42C-38 Mutassuk meg, hogy ha a (42-11) Planck törvényt az összes hullámhosszra integráljuk, akkor a Stefan-Boltzmann-törvényhez jutunk. Vagyis mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty f(\lambda,T)d\lambda = \alpha T^4$, ahol α egy állandó. (Útmutatás: vezessünk be új változót a $x = hc/\lambda kT$ definícióval és használjuk fel az előző problémában megadott, határozott integrál értékét).

42C-39 Mutassuk meg, hogy a kvantált egyszerű harmonikus oszcillátor (42-10) átlagenergiája a klasszikus (42-5) értékre redukálódik, ha a h Planck-állandóval a nullához tartunk.

42C-40 Kezdetben nyugvó elektron fotonnal ütközik. Mutassuk meg, hogy az elektron által az ütközés során nyert mozgási energiát a $2hf\alpha/(1+2\alpha)$ adja meg, ahol α a foton kezdeti energiájának és az elektron nyugalmi energiájának hányadosa.

42C-41 Fém céltárgyat 662 keV energiájú gamma sugárnyaláb útjába helyezünk. (A nyalábot a ^{137}Cs radio-

aktív cézium-izotóp bocsátotta ki.) Határozzuk meg azoknak a fotonoknak az energiáját, amelyek 90°-os szögben szóródnak. A céltárgyban lévő elektronokat lényegében szabadnak tekinthetjük.

42C-42 Az alábbi táblázat adatait fényelektromos kísérletben nyerték. (a) Ezeknek az adatoknak a felhasználásával készítsünk olyan ábrát, amelyen a pontok egyenes mentén helyezkednek el. (b) Az ábrából határozzuk meg a Planck-állandó értékét (J/s egységekben) és (c) a kilépési munka értékét (elektron-voltokban) az adott felületre vonatkozóan (két értékes jegy elegendő.)

Hullámhossz (nm)	A fotoelektronok maximális kinetikus energiája (eV)
588	0,67
505	0,98
445	1,35
399	1,63

42C-43 Kis energiájú foton (vagyis $E \ll$ az elektron nyugalmi energiája) kezdetben nyugvó szabad elektronnal ütközik. A foton 180°-os szögben szóródik, azaz visszalökődik. Mutassuk meg, hogy a szórt foton energiájának és az elektron által az ütközés során nyert kinetikus energiának a hányadosa közelítőleg c/v, ahol v az elektron sebessége. (Útmutatás: ez a nemrelativisztikus Compton-szórás problémája.)

42C-44 Egy 200 MeV energiájú foton 40°-os irányban szóródik a kezdetben nyugvó protonon. (a) Határozzuk meg (MeV egységekben) a szórt foton energiáját. (b) Mekkora kinetikus energiára tett szert a proton (MeV egységekben).

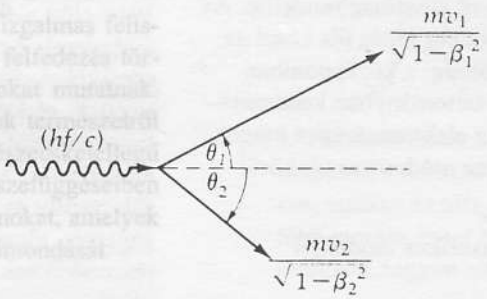
42C-45 A 42-5 példában ajánlott módszerrel vezessük le a Compton-eltolódás $\lambda' - \lambda_0 = (h/mc)(1 - \cos\theta)$ képletét!

42C-46 Mutassuk meg, hogy egy mozgó elektron a relativisztikus megmaradási tételek miatt nem nyelheti el a vele ütköző foton teljes energiáját. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy egydimenziós ütközést.

42C-47 Egy E_0 kezdeti energiájú foton egy szabad elektronon (melynek tömege m) és kezdetben nyugalomban volt, θ szögű Compton-szórást szenved. A relativisztikus energia- és impulzus megmaradási törvényeket felhasználva vezessük le a szórt foton E energiájára a $E = E_0[1 - (E_0/mc^2)(1 - \cos\theta)]^{-1}$ képletet!

42C-48 Egy foton szabad protonnak ütközik, amely kezdetben nyugalomban volt. Az ütközés Compton-típusú volt. Adjuk meg annak a fotonnak a minimális energiáját, amely a protonnak 4 MeV mozgási energiát képes átadni.

42C-49 A 42-19 ábra egy $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ párkeltési folyamat impulzus-viszonyait mutatja. A folyamat üres térben zajlik le. Mutassuk meg, hogy ez lehetetlen, (egy atommag jelenléte nélkül nem megy végbe), mert az energia és az impulzus megmaradása nem teljesülhet. (Útmutatás: az ábra alapján írjuk fel az impulzus megmaradást x- és y-irányú komponensekkel, valamint az energiamegmaradás törvényét. Osszuk el az impulzus-komponensekre vonatkozó egyenleteket c-vel, az energia-egyenletet c^2-tel. Emeljük az impulzus-egyenleteket négyzetre és hasonlítsuk össze az eredményt az energia-egyenlettel. Mutassuk meg, hogy az összefüggések összeegyeztethetetlenek.)



42-19 ábra
A 42C-49 feladathoz

38B-19 a) zöld b) piros
38B-21 99,6 nm
38B-23 113
38B-25 1,31
38B-27 18,7 cm
38C-29 A válasz adott.
38C-31 A válasz adott.
38C-33 A válasz adott.
38C-35 A válasz adott.
38C-37 A válasz adott.
38C-39 a) $0{,}155\lambda/d$ b) $0.500\lambda/d$
38C-41 543 nm
38C-43 A válasz adott.
38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

39A-1 0,396 mm
39B-3 18,0 mm
39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
39B-7 0,684
39B-9 a) 120 b) 60
39A-11 11,5 km
39A-13 15,4
39B-15 420 m
39B-17 $1{,}07 \times 10^{-5}$ m b) $1{,}97 \times 10^{-5}$ m
39A-19 36,9°
39A-21 $7{,}16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
39B-23 688 nm
39B-25 $1{,}375 \times 10^{-3}$ fok
39A-27 0,300 nm
39A-29 A válasz adott.
39B-31 17,0
39C-33 0,1233 rad
39C-35 lásd 2. lábj.
39C-37 A válasz adott.
39C-39 A válasz adott.
39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

40A-1 $\frac{7}{8}$
40B-3 $\frac{1}{8}$
40A-5 32,0°
40A-7 49,2°
40B-9 $\text{tg}\,\theta_p = 1/\sin\theta_c$
40B-11 16,4 μm
40B-13 A válasz adott.
40B-15 68,4 mg/cm^3
40C-17 0° és 90°
40C-19 78,1%
40C-21 A válasz adott.
40C-23 A válasz adott.
40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
40C-27 A válasz adott.
40C-29 118°

XLI. Fejezet

41B-1 1,5 cm/s
41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
41A-5 a) $1 - \beta \approx 2{,}35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
41B-7 $22{,}5m/c$ vagy $\frac{7}{5} \times 10^{-8}$ s
41B-9 6,17 ns
41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c d) 36 m e) 45 m/c
41A-13 0,946c és –0,385c
41A-15 $v_x = 0{,}994c$
41B-17 1,78
41A-19 $v = 0{,}866c$
41A-21 889 kg
41B-23 $4{,}28 \times 10^9$ kg/s
41B-25 A válasz adott.
41B-27 A válasz adott.
41B-29 A válasz adott.
41B-31 A válasz adott.
41B-33 a) 270 m/c vagy $9{,}00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
41B-35 b) 80 m/c
41C-37 a) 1,33c·s b) 3,00 s
41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
41C-41 A válasz adott.
41C-43 A válasz adott.
41C-45 $5{,}55 \times 10^{-17}$ s
41C-47 $V = v\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\right)$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24}E_o/c$ c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
41C-51 A válasz adott.
41C-53 A válasz adott.
41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

42A-1 1,51 cm^2
42B-3 0,646%
42A-5 9660 nm
42A-7 5222 K
42A-9 $2{,}43 \times 10^{-12}$ m
42A-11 A válasz adott.
42B-13 $3{,}54 \times 10^6$ m
42A-15 451 nm
42B-17 a) $3{,}56 \times 10^5$ m/s b) 432 nm
42A-19 4,85 pm

42A-21 128 MeV
42B-23 A válasz adott.
42B-25 A válasz adott.
42C-27 A válasz adott.
42C-29 A válasz adott.
42C-31 38,3 m
42C-33 A válasz adott.
42C-35 A válasz adott.
42C-37 b) $2{,}27 \times 10^{-13}$ J/m^3
42C-39 A válasz adott.
42C-41 288 keV
42C-43 A válasz adott.
42C-45 A válasz adott.
42C-47 A válasz adott.
42C-49 A válasz adott.

XLIII. Fejezet

43A-1 A válasz adott.
43B-3 A válasz adott.
43B-5 A válasz adott.
43B-7 A válasz adott.
43A-9 $1/9{,}12 \times 10^4$
43A-11 0,173 nm
43A-13 10,2 fm
43A-15 $\frac{1}{4}$
43B-17 a) 0,158 nm b) 47,2°
43B-19 5,71 V
43B-21 A válasz adott.
43B-23 $1{,}03 \times 10^{-3}$
43B-25 956 pm
43B-27 a) $5{,}86 \times 10^{-30}$ m b) 5,79 cm
43B-29 A válasz adott.
43C-31 a) $r_n = (4\pi\varepsilon_o\hbar^2 / me^2)n^2$
b) $E_n = -(6{,}80 \text{ eV})/n^2$ c) 243 nm, 182 nm
43C-33 A válasz adott.
43C-35 A válasz adott.
43C-37 A válasz adott.

XLIV. Fejezet

44A-1 7
44B-3 54,7° és 125,3°
44B-5 32,3°, 59,5°, 80,3°, 99,7°, 120,5°, 147,7°
44B-7 32 állapot
44B-9 b) $9{,}42 \times 10^{-25}$ J c) $3{,}34 \times 10^{-49}$ J
44B-11 25,2
44B-13 Ge; $[Zn]3d^{10}4s^24p^2$
44B-15 A válasz adott.
44A-17 22,0 kV
44B-19 A válasz adott.
44B-21 3,04 foton
44B-23 a) 4,20 mm b) $4{,}53 \times 10^{33}$
c) $3{,}81 \times 10^{31}$
44C-25 $d = (\mu \cos\theta)(dB/dz)(x/v)^2(1/M)$
44C-27 a) $E_1 = -15{,}5$ eV, $E_2 = -7{,}75$ eV, $E_3 = -5{,}16$ eV
c) 479 nm
44C-29 a)Kálium b) [ ]$3p^64p^1$,[ ]$3p^54p^2$
44C-31 b) 3; $4d_{5/2} - 3p_{1/2}$
44C-33 A válasz adott.
44C-35 A válasz adott.
44C-37 a) $(1/96\pi a^5)r^2e^{-r/a}$
b) $(1/24a^5)r^4e^{-r/a}$;$4a$
44C-39 a) $1{,}18 \times 10^{-33}$ b) 32 800 K
44C-41 b) -325 000 K

XLV. Fejezet

45A-1 13,7
45A-3 5,68
45A-7 27,9 perc
45B-9 1 curie
45B-11 $1{,}78t_o$
45B-13 0,565 cm
45B-15 $1{,}71 \times 10^{14}$ (!)
45B-17 A válasz adott.
45B-19 1,37 MeV
45B-21 A válasz adott.
45A-23 38,8 keV
45B-25 a) 0,144 MeV b) 0,288 MeV
45C-27 3785 év
45C-29 a) 86 s; $8{,}1 \times 10^{-3}$ s^{-1}
45C-31 A válasz adott.
45C-33 1,61 W
45C-35 A válasz adott.
45C-37 A válasz adott.
45C-39 a) 0,931 MeV, 5,49 MeV, és 12,86 MeV
b) 24,7 MeV c) 27,7 MeV
45C-41 A válasz adott.
45C-43 0,247 GeV mindkét részecske esetén
45C-45 7,8 cm

A RÉSZECSKÉK HULLÁMTERMÉSZETE

„Hajlunk arra, hogy azt mondjuk: Thomson – az apa – 1906-ban azért kapott Nobel díjat mert megmutatta, hogy az elektron részecske, Thomson – a fiú pedig 1937-ben azért, mert megmutatta, hogy az elektron hullám"

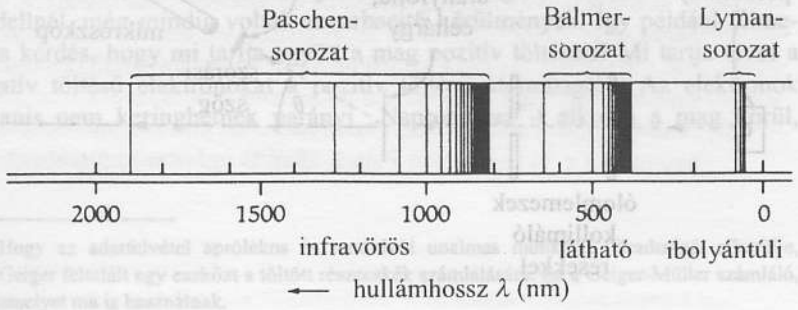
MAX JAMMER
(megjegyzések J. J. Thomson és G. P. Thomson: *A kvantummechanika fogalmi fejlődése* c. könyvéhez McGraw Hill (1966))

43.1 Bevezetés

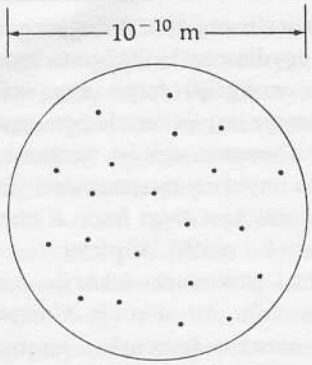
A sugárzás kettős természetének felfedezése már magában is izgalmas felismerés volt, de az 1920-as években újabb hasonlóan izgalmas felfedezés történt, kiderült, hogy az anyagi részecskék hullámtulajdonságokat mutatnak. Ez rendkívül kielégítő módon szimmetrikussá tette a fizikusok természetről alkotott elképzelését. A sugárzás *és* az anyag egyaránt mutat részecskejellegű és hullámjellegű vonásokat. Ahhoz, hogy ezt a felfedezést összefüggéseiben láthassuk, először néhány kiegészítő ismeretet tárgyalunk. Olyanokat, amelyek előkészítették az anyag kettős természetére vonatkozó állítás kimondását.

43.2 Az atommodellek

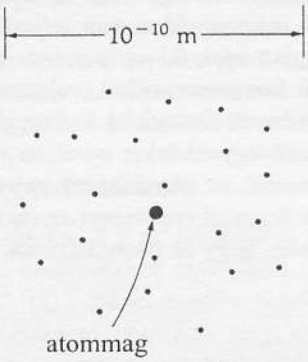
A századforduló táján azt hitték, hogy az atomok csak kétféle összetevőből: pozitív töltésű részecskékből és elektronokból épülnek fel. A kérdés lényege az volt, hogy hogyan állnak össze ezek stabilis atomokká? Vajon a töltött



43-1 ábra
Amikor a hidrogén gázt úgy melegítjük, hogy elektromos áramot bocsátunk át rajta, a gáz *fényes* vonalak sorából álló színképre bontható fényt bocsát ki magából. Ezt *emissziós színképnek* nevezzük (a fényes vonalakat itt sötét vonalakkal ábrázoltuk).



(a) Az atom „mazsolás-puding" modellje Thomson szerint. Az elektronok pozitív töltésű folyadékgömbbe ágyazódnak.



(b) Rutherford atommag modellje. Az összes pozitív töltés (és közel az összes tömeg) a középpontban igen kis tartományban koncentrálódik. Az elektronok ezt a magot ismeretlen módon veszik körül.

43-2 ábra
Az atom klasszikus modelljei

részecskéknek milyen elrendezése hozhatja létre az atomi színképvonalaknak azt a rendkívül bonyolult gazdagságát, ami akkor figyelhető meg, ha a gázok a rajtuk átfolyó áram hatására gerjesztődnek? (43-1 ábra). A színképeket nagy gonddal tanulmányozták és katalogizálták. Megpróbáltak matematikai összefüggéseket keresni a hullámhosszak között, mert azt remélték, hogy így megtalálható az atomszerkezet felépítésének kulcsa. A rejtély megoldásának másik kiindulópontja az elemek kémiai tulajdonságainak megfigyelhető periodikus változása volt. (Erre épül a periódusos rendszer.) Kiindulópontként az atomokat kb 10^{-10} m sugarú gömböknek tekintették. Ezt a sűrűséget, az atomsúly és az Avogadro-szám segítségével lehet kiszámítani.

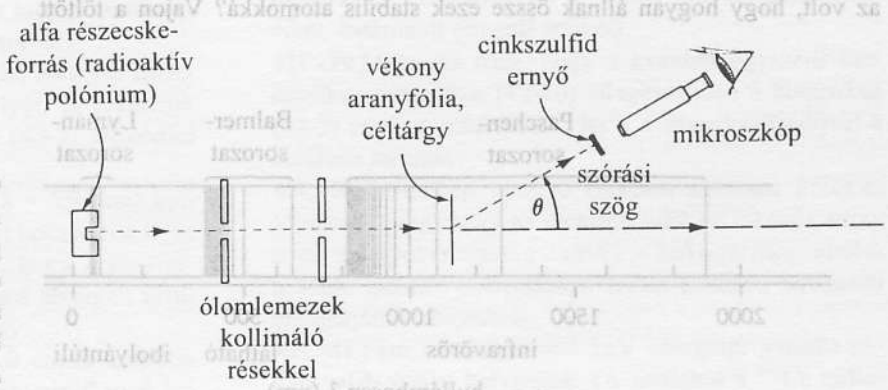
A Thomson-modell

Figyelemre méltó próbálkozást tett az atom modellszerű elképzelésére J. J. Thomson angol fizikus, a Cambridge Egyetem tanára. 1898-ban, hogy az atom tömegének nagy részét lényegében egy Ze (ahol Z az atom rendszáma) pozitív töltésű folyadékgömb tartalmazza. Az elektronok ennek a pozitív folyadéknak a belsejébe vannak beágyazva, nagyjából úgy, ahogyan a mazsolák a mazsolás pudingba. (43-2a ábra) A feltevés szerint az elektronok a pozitív töltésű folyadékban különféle rezgéseket végezhetnek és emiatt (a klasszikus elmélet szerint) az adott frekvenciákon sugárzást bocsáthatnak ki. Sajnos azonban az így számított színképi frekvenciák nem egyeztek a megfigyelt frekvenciákkal.

A Rutherford-modell

1910 előtt a fizikusok az atomszerkezet titkait szóráskísérletekkel próbálták felderíteni. Azt vizsgálták, hogy az atomok hogyan szórják a rájuk eső részecskéket, ill. sugárzást. A bombázó részecskék leggyakrabban röntgensugarak, elektronok és alfa-részek voltak. Ernest Rutherford[1] a Manchester-i Egyetem professzora, Thomson tanítványa az alfa-sugarak szóródását tanulmányozta az anyagokon. Az alfarészecskékről akkor már tudták, hogy töltésük pozitív és az elektron töltésének kétezerszerese, tömegük pedig a hidrogénatom tömegének kb. négyszerese. Az alfa-részek megfelelő bombázó részecskéknek bizonyultak, mert egyes természetes radioaktiv elemek néhány

[1] Rutherford 1908-ban *kémiai* Nobel-díjat kapott azért a felfedezésért, hogy az urániumból származó sugárzás legalább két összetevőből áll, amit ő *alfa-* és *béta*-sugárzásnak nevezett. Később kimutatta, hogy az alfa-„sugárzás" valójában hélium atommagokból álló részecskenyaláb.



43-3 ábra
Rutherford alfa-szórási kísérlete. A cinkszulfid detektor úgy mozgatható, hogy vele a különböző irányokban érkező szórt részecskéket lehessen detektálni. A berendezést légritkított kamrában helyezték el.

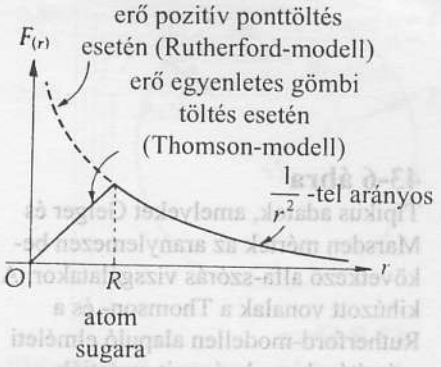
millió elektronvolt energiával bocsátották ki őket. Rutherford igen vékony céltárgy-lemezt alkalmazott azt remélve, hogy ezáltal az *egyes* atomok okozta szórást lesz képes megfigyelni, nem a *sok* atom hatását. A többszörös ütközések ugyanis elmoshatták volna az egyszeri ütközések jellegzetességeit, tehát éppen azt, amit vizsgálni szeretett volna. Jóllehet több különböző kémiai elemet megvizsgált, az arany bizonyult a legmegfelelőbb céltárgynak, ezt ugyanis igen vékony, néhány száz atomnyi vastagságú rétegekké lehet kiverni. Amint a 43-3 ábra mutatja, a szórt alfa-részecskék végül cinkszulfiddal bevont kicsiny ernyőnek ütköznek, aholis parányi fényfelvillanást okoznak, s ez mikroszkóppal észlelhető. Az észlelés fárasztó munka volt, mert a sötétséghez jól adaptált szemet kívánt. Ebben a munkában Rutherford segédei Dr. Hans Geiger és egy egyetemi hallgató, Ernest Marsden voltak [2].

A kis, 1°, 2°, nagyságú szórási szögeknél történő első megfigyelések a Thomson-modellt látszottak megerősíteni. Rutherford azt akarta, hogy Marsden mihamarább saját kutatási programba kezdjen, és azt javasolta, hogy a visszaszórást (a 90°-os eltérítésnél nagyobb szögeket) vizsgálja meg, bár ő maga nem sok esélyt látott arra, hogy a gyors alfa részeket a Thomson típusú atom hátraszórja. Mindenki legnagyobb meglepetésére sok visszaszórt alfarészecskét észleltek. A meglepetés oka a szórási valószínűségek becsléséből nyilvánvaló. Az alfa-részek tömege kb. 8000-szer akkora, mint az elektronoké, így az elektronoknak csak elhanyagolható szerepük lehet a szórásban. A szórás csakis a nagy tömegű pozitív töltés hatásának tudható be. A Thomson-atomban a pozitív töltés az egész gömbszerű atomban egyenletesen oszlik el, így az a maximális erő, amit egyetlen atom az alfa-részecskére ki tud fejteni, korlátozott nagyságú (lásd 43-4 ábra), s ez az α részecske mozgásában legfeljebb néhány századfoknyi eltérést okozhat. Így az α-részecskéknek egymás után atomok ezreiről kellene *szóródnia, és ráadásul mindegyikről azonos irányban,* hogy végezetül 90°-os, vagy nagyobb eltérítést észleljünk. A Thomson-atom okozta visszaszórás valószínűsége a kísérletben alkalmazott fóliára, Rutherford számításai szerint, hihetetlenül kicsinek adódott: 10^{-3500}. Geiger és Marsden viszont kísérletileg 10^{-4} értéket állapított meg. Kétségtelen, hogy ez a $\sim 10^{3496}$ nagyságú szorzótényezőbeli eltérés elnyerheti a „minden idők legnagyobb eltérése a kísérlet és elmélet között" díjat. Rutherford később így írt erről:

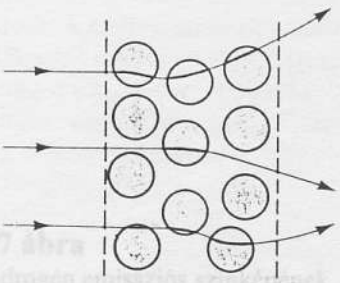
> *„Ez volt a leghihetetlenebb esemény az egész életemben. Csaknem annyira hihetetlen volt, mint az, hogy 15 hüvelykes lövedékkel selyempapírra lövök, s a lövedék visszapattanva engem talál el".*

Felismerve, hogy az egyszeri szórási aktusban bekövetkező nagy szögű szórás csak nagyon nagy erőktől származhat, Rutherford 1911-ben atommagot tartalmazó modellt javasolt. Ebben a nagy tömegű pozitív töltés a központi régióban, az úgynevezett **atommag**ban koncentrálódik, amely semmiképpen nem nagyobb, mint 10^{-14} m, mivel ahhoz, hogy az alfa-rész visszaszóródjék, csak akkor léphet fel elegendően nagy erő, ha az alfa résznek a Ze nagyságú ponttöltést ennyire megközelítik. A 43-5 ábra a kétféle modellt hasonlítja össze. A 43-6 ábrán szóráskísérlet során kapott eredmények láthatók.

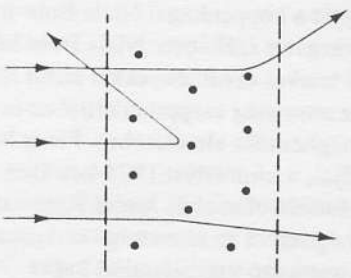
Bár a Rutherford-modell nyilvánvalóan megfelelőbb volt a Thomson-modellnél, még mindig voltak zavarbaejtő körülmények. Így például felmerül a kérdés, hogy mi tartja együtt a mag pozitív töltéseit? Mi tartja távol a negatív töltésű elektronokat a pozitív töltésű atommagtól? Az elektronok ugyanis nem keringhetnek parányi „Naprendszer"-t alkotva a mag körül,



43-4 ábra
Kétféle különböző elrendezésű pozitív töltés által az alfa-részecskére kifejtett erő (ponttöltés és véges méretű, egyenletesen töltött gömb). (lásd a 25-16 ábrát is a 25. fejezetben)



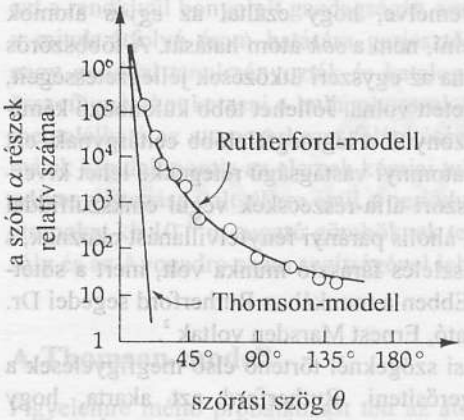
(a) A Thomson-modell szerint többszörös ütközés lép fel akkor, amikor az alfa-rész egynél több atomba hatol be. (A szórás mértékét nagyon eltúloztuk)



(b) A Rutherford-modell szerint a nagy szórási szögek megjelenése egyetlen atommaggal való igen közeli találkozás következménye.

43-5 ábra
Az alfa-részecskék szóródása vékony anyagfólián. A céltárgy fólia általában néhány száz atomnyi vastagságú.

[2] Hogy az adatfelvétel aprólékos és rendkívül unalmas munkáját, fáradtságát elkerülje, Geiger feltalált egy eszközt a töltött részecskék számlálására. Ez a Geiger-Müller számláló, amelyet ma is használnak.



43-6 ábra
Tipikus adatok, amelyeket Geiger és Marsden mértek az aranylemezen bekövetkező alfa-szórás vizsgálatakor. A kihúzott vonalak a Thomson- és a Rutherford-modellen alapuló elméleti számítások eredményeit mutatják.

mert a Maxwell-elmélet szerint a gyorsuló töltések elektromágneses hullámokat bocsájtanak ki. Valóban, ilyen sugárzás keletkezését mindig megfigyelték, valahányszor elektronok gyorsuló mozgásáról volt szó. A klasszikus fizika szerint, ha az elektronok körpályán kezdenének mozogni, akkor energiájukat kevesebb, mint 10^{-8} s alatt kisugároznák és spirális pályán a magba zuhannának. Nyilvánvaló, hogy az atomokban ez nem történik meg. Hol van hát a hiba?

A Bohr-modell

Ahogyan a 43-7 ábra mutatja, már a *H*-atom – valamennyi atom közül a legegyszerűbb – esetében is a színképvonalak rendszerének rendkívül bonyolult és mégis szabályszerű szerkezete van. Milyennek kell lennie egyetlen proton és egyetlen elektron kölcsönhatásának, hogy a színképvonalaknak ezt a sorozatát eredményezze? Egy svájci középiskola ábrázológeometria-tanára, J. Balmer próbálgatással felállított egy *empirikus* képletet, amely csaknem egzaktul reprodukálta a megfigyelt hullámhosszakat:

A HIDROGÉN BALMER SOROZATA

$$\lambda = (364{,}56\ \text{nm})\left(\frac{n^2}{n^2 - 2^2}\right) \quad (\text{ahol } n = 3,4,5,\ldots) \qquad \textbf{(43-1)}$$

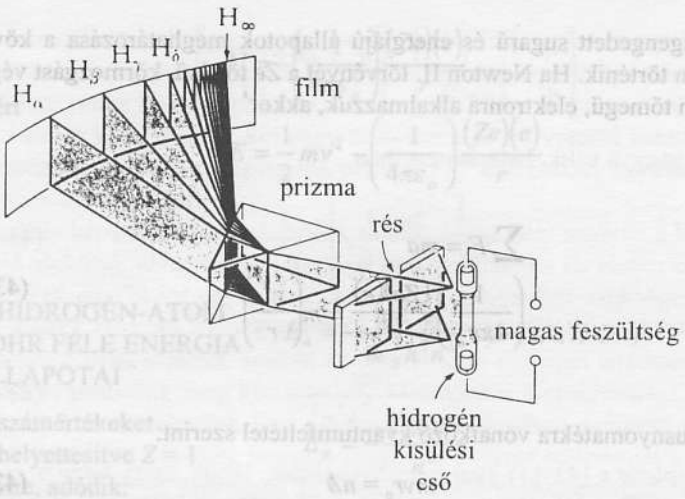
Az azonban, hogy a H-atom hogyan hozza létre ezt a matematikai szempontból egyszerű sorozatot, továbbra is bosszantó rejtély maradt.

1913-ban Niels Bohr dán fizikus megalkotta híres atommodelljét. Bohr akkor fiatal (28 éves) volt és merész. Elmélete a klasszikus fizikának gyökeresen ellentmondó eszmékre épült, a modell alapján azonban szinte minden megfigyelt színképvonal majdnem pontosan adódott. A modell az alábbi, úgynevezett **Bohr-féle pusztulátumokon** alapult:

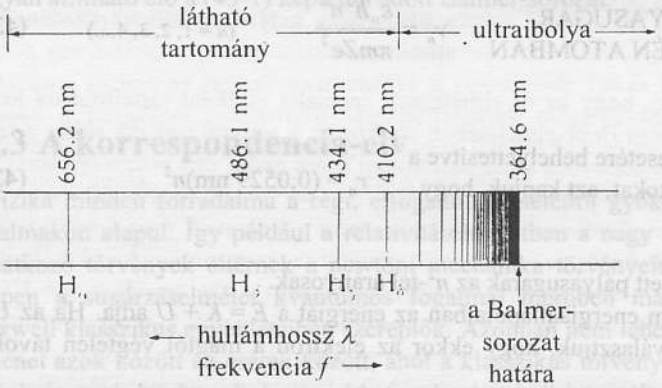
(1) Az elektron a proton körül körpályán mozog a klasszikus mechanika törvényei szerint. (A Coulomb-féle vonzóerő szolgáltatja a centripetális erőt)

(2) A klasszikus elmélettel szemben az elektronok csak bizonyos *megengedett* r_n sugarú pályákon mozoghatnak, s ezeken nem sugároznak. Minthogy ezeken a pályákon az E_n energia állandó, az elektron ezeken a pályákon *stacionárius állapotban* van.

(3) A megengedett pályák azok, amelyeken az elektron *mrv* impulzusnyomatéka a 2π-vel osztott Planck-állandó egész számú többszöröse.



(a) Prizmás spektrométer. A hidrogén töltött kisülési cső fénye prizmára esik, ahol a különböző hullámhosszúságú fények szétválnak és egy fényképezőlemezen vonalas színképet alkotnak.



(b) A Balmer-sorozat végtelen számú színképvonalból áll. A vonalak a 364,6 nm hullámhosszúságnál torlódnak.

43-7 ábra
A hidrogén emissziós színképének Balmer-sorozata

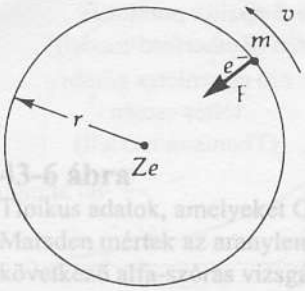
$$mvr = n\hbar \qquad \begin{matrix}(\text{ahol } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \text{ és} \\ \hbar = 1{,}0546\times10^{-34}\,\text{Js})^3\end{matrix} \qquad \textbf{(43-2)}$$

(4) A stacionárius állapotok közti átmenetek úgy mennek végbe, hogy az elektron „valahogyan" átugrik az egyik állapotból a másikba. Ekkor az atom elektromágneses hullámokat bocsát ki vagy nyel el. A két energiaállapot energiája közti különbség egyenlő a kibocsátott (elnyelt) sugárzás energiakvantumával:

$$hf = E_{\text{végső}} - E_{\text{kezdeti}} \qquad \textbf{(43-3)}$$

Bohr hipotézise a klasszikus fizika és a kvantumfizika sajátságos keveréke. A klasszikus Coulomb-erőnek megfelelően, az elektron a klasszikus mechanika szerint mozog. A klasszikus fizikával ellentétben azonban nem sugároz. A Planck-állandó kétféleképpen is színre lép, egyfelől a hf kifejezésben, ami a kisugárzott energiával kapcsolatos, másfelől az impulzusnyomaték teljesen újszerű kvantálása során, egy olyan fizikai mennyiség esetén, amit mindezideig nem kvantáltak.

[3] Az egyszerűség kedvéért $h/2\pi$ helyett a $\hbar$ jelet írjuk, amit há vonásnak olvasunk ki.



43-8 ábra
Az egyelektronos atom Bohr modellje. A($-e$) töltésű elektron nyugvó Ze töltésű mag körül körpályán mozog. Az **F** Coulomb-erő szolgáltatja az elektronra ható centripetális erőt.

A megengedett sugarú és energiájú állapotok meghatározása a következőképpen történik. Ha Newton II. törvényét a Ze töltésű, körmozgást végző e töltésű, m tömegű, elektronra alkalmazzuk, akkor[4]

$$\sum F = ma$$

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\frac{(Ze)(e)}{r^2} = m\left(\frac{v^2}{r}\right) \qquad (43\text{-}4)$$

Az impulzusnyomatékra vonatkozó kvantumfeltétel szerint:

$$mvr_n = n\hbar \qquad (43\text{-}5)$$

Ezeket az egyenleteket kombinálva kiküszöbölhető a v és adódik a megengedett pálya r_n sugara:

BOHR PÁLYASUGÁR A HIDROGÉN ATOMBAN

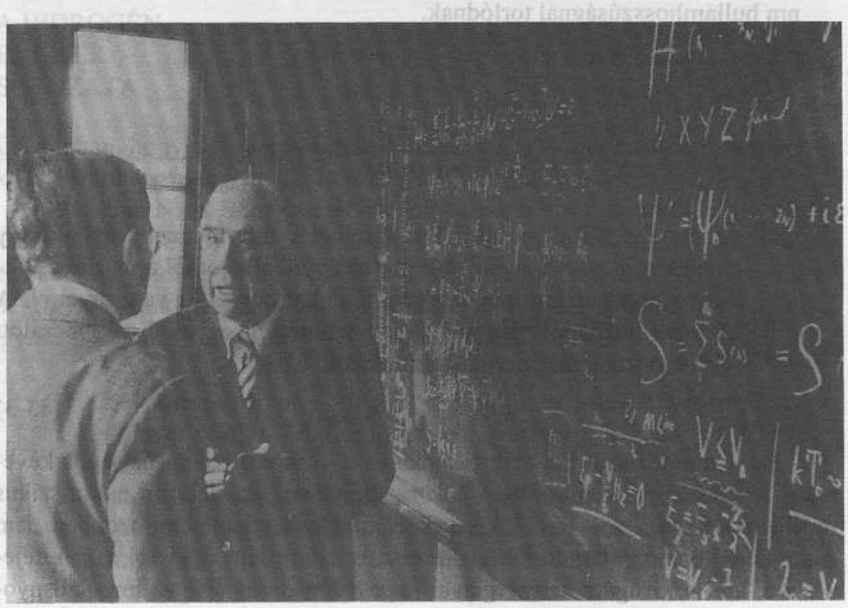
$$r_n = \frac{\varepsilon_o h^2 n^2}{\pi m Ze^2} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots) \qquad (43\text{-}6)$$

A $Z = 1$ esetére behelyettesítve a számadatokat, azt kapjuk, hogy

$$r_n = (0{,}0529\ \text{nm})n^2 \qquad (43\text{-}7)$$

hogy
A megengedett pályasugarak az n^2-tel arányosak.

Az atom energiaállapotaiban az energiát a $E = K + U$ adja. Ha az $U \equiv O$ szintet úgy választjuk, hogy ekkor az elektron a magtól végtelen távol legyen, akkor



43-9 ábra
Niels Bohr (1885–1962) dán fizikus 1922-ben kapott Nobel-díjat a hidrogénatom modelljének kidolgozásáért. Itt fiával Aage Bohr fizikussal beszélget (aki 1922-ben született), és követte apját a koppenhágai Niels Bohr intézet igazgatói székében. Niels Bohr később is értékes eredményekkel járult hozzá az atommag cseppmodelljéhez és a maghasadás elméletéhez. Fia is Nobel-díjas, a kitüntetést 1975-ben Ben Mottelssohnnal és James Rainwaterrel megosztva az atommag szerkezetére vonatkozó vizsgálataiért kapta
(A fényképet a Niels Bohr Intézet Margareth Bohr Gyűjteménye bocsátotta rendelkezésünkre.)

[4] Ha a mag töltése Ze (ahol Z az atom rendszáma), akkor az elemzés alkalmazható az egyszer ionizált héliumra, a kétszer ionizált lítiumra és így tovább. A kapott eredmények ezekben az esetekben igen jól egyeznek a megfigyelt színképekkel.

$$U = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\frac{(Ze)(e)}{r}$$

Ezért

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\frac{(Ze)(e)}{r} \qquad \textbf{(43-8)}$$

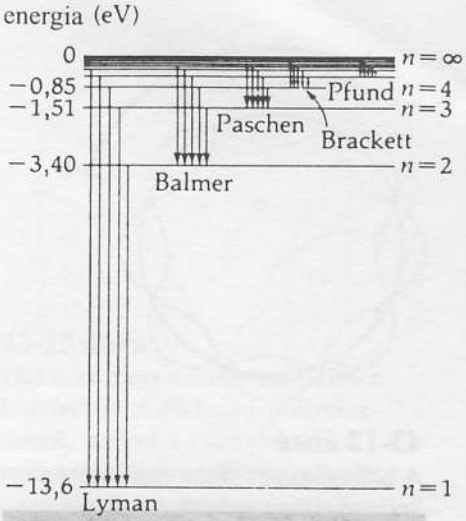
A HIDROGÉN-ATOM BOHR FÉLE ENERGIA ÁLLAPOTAI

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2n^2} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots) \qquad \textbf{(43-9)}$$

A számértékeket behelyettesítve $Z = 1$ esetre, adódik:

$$E_n = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} \qquad \textbf{(43-10)}$$

A hidrogén megengedett energiaállapotai negatívak és $1/n^2$-tel arányosak (lásd a 43-10 ábrát). Az egyes színképvonalsorozatokat a közös *végállapot* jellemzi. A 43C-35 probléma mutatja meg, hogy ebből a kifejezésből hogyan állítható elő a (43-1) képlettel adott Balmer-sorozat.



43-10 ábra
A hidrogén atom energiaállapotai. Az $n = 4$ és $n = \infty$ szintek között végtelen sok energiaszint van. A magasabb energiaszintekről az alacsonyabbakra való átmenet során hf nagyságú energia kibocsátására kerül sor.
A sorozatok mellett azoknak a kísérletezőknek a nevét tüntettük fel, akik a különböző sorozatokat vizsgálták.
A Balmer-sorozatnak csak egy része esik a látható spektrumba.

43.3 A korrespondencia-elv

A fizika minden forradalma a régi, elfogadott elmélettől gyökeresen eltérő fogalmakon alapul. Így például a relativitáselméletben a nagy sebességekre vonatkozó törvények eltérnek a newtoni mechanika törvényeitől. Hasonlóképpen a sugárzáselmélet kvantumos fogalmai merőben mások, mint a Maxwell klasszikus egyenleteiben szereplők. Azonban nem lehet azonnali az átmenet azok között az esetek között, ahol a klasszikus törvények alkalmazhatóak és azok között, ahol az újabb fogalmakat kell használni. Kell, hogy legyen átmeneti tartomány, ahol az egyik elmélet kijelentései „fedik" a másikét.

A kvantumfizikában a klasszikus és az új elmélet közti kapcsolatot Bohr fogalmazta meg a *korrespondencia-elvnek* nevezett megállapításában. A klasszikus elektrodinamika szerint a körpályán mozgó elektron által kibocsátott sugárzás f_o frekvenciája éppen a keringés frekvenciája. A (43-5) és (43-6) összefüggésekből erre a frekvenciára ($Z = 1$) a

$$f_o = \frac{me^4}{4\varepsilon_o^2h^3n^3} \qquad \textbf{(43-11)}$$

formula adódik. A Bohr-elméletben a szomszédos energiaállapotok közti átmenet során kibocsátott sugárzás f frekvenciája a két keringési frekvencia közé esik, ahogy a (43-3) képletből adódik:

$$hf = E_{\text{végző}} - E_{\text{kezdeti}}$$

A (43-9)-ből viszont

$$hf = \frac{me^4}{8\varepsilon_o^2h^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \qquad \textbf{(43-12)}$$

A zárójelben lévő kifejezést átalakítva:

$$\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\left[\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2}\right]$$

Ha n igen naggyá válik, határátmenetben

$$\lim_{n>>1}\left[\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right]=\frac{2}{n^3} \qquad \textbf{(43-13)}$$

adódik. Így nagy n esetén a kisugárzott frekvencia:

$$f\approx\frac{me^4}{4\varepsilon_o{}^2h^3n^3} \qquad \textbf{(43-14)}$$

Ha ezt a képletet a (43-11)-gyel összehasonlítjuk, látjuk, hogy *nagy n esetén a kvantumelméleti kifejezés megegyezik* a klasszikussal. Ez jól illusztrálja Bohr **korrespondencia-elvét.**

A BOHR-FÉLE KORRESPONDENCIA ELV

minden új elméletnek arra a klasszikus elméletre kell redukálódnia, amely megfelel a klasszikus helyzetre illő körülményekre alkalmazva.

Ez azt jelenti, hogy az új elméletnek speciális esetként tartalmaznia kell a régit. A H-atom Bohr-elméletében amikor az n nagyon naggyá válik, a rendszer *makro*-rendszerhez kezd hasonlítani (nem pedig egy *mikro*-rendszerhez) és a fent mondottak értelmében a klasszikus törvények megfelelő leírást fognak adni. Természetesen az elektronok nem változtatják meg viselkedésüket nagy n értékeknél, az elektronok *mindig* a kvantummechanikát követik (miként az Univerzum minden más objektuma). De mondjuk $n = 10\,000$ esetére a pályasugár, az energia, az impulzusnyomaték kvantummechanikai eltérése az $n = 10\,001$-nek megfelelő esetétől lényegében elhanyagolhatóan kicsi és a rendszer viselkedése közelítőleg leírható a klasszikus törvényekkel. Egy másik példaként emlékeztetünk arra, hogy kis sebességek esetére Einstein speciális relativitáselmélete a newtoni mechanikára redukálódik – *s* így a speciális relativitáselmélet is illusztrálja Bohr korrespondencia-elvét. Ez az elv értékes ellenőrzési lehetőséget teremt az új elméleti fejlemények érvényességének megítélésére.



43-11 ábra
Louis Victor de Broglie régi francia arisztokrata család tagja. Eredetileg középkori történelmet tanult a Sorbonne-on, hogy majd a gótikus katedrálisokkal foglalkozzék. Később azonban érdeklődése a fizika felé fordult és 1913-ban fizikus oklevelet szerzett. De Broglie szokatlan javaslatát, hogy egy mozgó részecskével hullám lehet kapcsolatban, Erwin Schrödinger fejlesztette *hullámmechanika*ként ismert kvantummechanikai elméletté. De Broglie, akit nagyon zavart a kvantummechanika valószínűségi természete, nagy (és sikertelen) erőfeszítéseket tett arra, hogy a valószínűségi helyett kauzális értelmezést dolgozzon ki a hullámmechanikára. 1929-ben a fizikai Nobel-díjjal tüntették ki. De Broglie elgondolásainak kialakulását összefoglalja H. Medicus tanulmánya „Fifty Years of Matter Waves" (Az anyaghullámok ötven éve) *Physics Today* (1947) február.

43.4 A de Broglie-hullámok

Bohr *H*-atom modellje nagy diadal volt. Nagyon pontosan követte a Balmer-sorozat hullámhosszait és helyesen adott számot más sorozatoknak a látható tartományon kívüli spektrumáról is. Mégis voltak kicsi és félreismerhetetlen eltérések. Ezek egy része abból a tényből fakadt, hogy az energiákat mozdulatlan atommag feltételezésével számították ki (vagy, ami ezzel egyenértékű, feltették, hogy a mag végtelenszer nagyobb tömegű, mint az elektron). A kísérleti adatokkal való egyezés megjavult, amikor figyelembe vették azt, hogy a proton is mozog a forgó proton-elektron-rendszer tömegközéppontja körül. További finomítást hajtott végre A. Sommerfeld, aki az elektron körpályái mellett ellipszispályákat is figyelembe vett, valamint az elektron mozgásában számításba vette a relativisztikus hatásokat is.

De bizonyos tekintetben még az így tökéletesített elmélet sem bizonyult teljesen kielégítőnek. Mi lehet az oka az impulzusnyomatékra vonatkozó különös kvantum-megkötésnek? Ebből az következne például, hogy egy pörgettyű tetszőleges szögsebesség helyett csak meghatározott ω szögsebesség-

gel mozoghatna. Ahogyan a kísérletek folytatódtak, egyre több rejtély került elő. Néhány színképvonalról kiderült, hogy több színképvonal egybeeső együttese, mert amikor az atomot elektromos vagy mágneses erőtér hatásának tesszük ki, a vonalak két vagy több szomszédos vonallá hasadnak fel. A diszprózium egyik színképvonala például 137 különböző, egymáshoz közel eső vonallá hasadt fel!

Más kérdések is zavarbaejtőek voltak. Miért nem sugároz a körmozgást végző elektron, ahogyan a klasszikus elektrodinamika törvényei előírják – a törvények egyébként ugyanazok, amelyek a mozgáshoz szükséges, centrális erőt adják? Hogyan jönnek létre az atomi energiaátmenetek? Miért vallott kudarcot a Bohr-elmélet, amikor az egynél több elektront tartalmazó atomok színképét próbálták meg kiszámítani? Mindezeket a problémákat leküzdötte az az új kvantumelmélet, ami a következő évtizedben született meg. Most ennek fejlődését követjük lépésről-lépésre, a történet tetőpontját a következő fejezetben érjük el, amelyben az atomszerkezet kvantummechanikai leírását ismertetjük.

A döntő lépést az említett „misztikus" problémák megoldása irányában a Párizsi Egyetem fizikus doktorandusza, Louis Victor de Broglie (herceg) (1892–1987) tette meg. Míg a doktori vizsgájára készült, de Broglie azon kezdett gondolkodni, hogy talán a hullám-részecske kettősség nemcsak a sugárzásra, hanem az anyagi részecskékre is vonatkozik. Ha ez így lenne, az valóban a természet magasfokú szimmetriájának megnyilvánulása lenne. Ekkor tehát a részecskék hullámtulajdonságot, a hullámok részecsketulajdonságot mutatnának. Doktori értekezésében (1924) de Broglie felvetette a következő (itt kissé leegyszerűsített) gondolatokat. Minthogy az elektromágneses sugárzás fotonjai

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{43-15}$$

impulzussal rendelkeznek, de Broglie feltette, hogy minden mv impulzusú részecskéhez hozzárendelhető egy hullám, melynek λ hullámhosszát a

$$mv = \frac{h}{\lambda} \tag{43-16}$$

formula adja meg.

A p impulzusú részecske DE BROGLIE FÉLE HULLÁMHOSSZA

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{43-17}$$

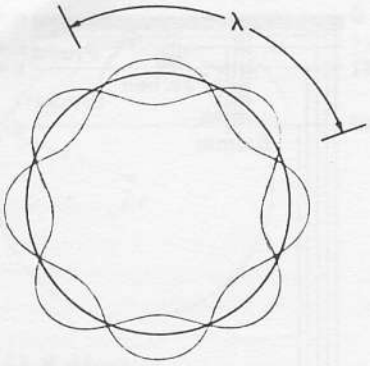
Ahogyan az elektromágneses hullámok esetében, úgy itt is felmerülhet a kérdés, hogy mi az, ami hullámzik, de ez hosszú magyarázatot kívánna. Az azonban bizonyos, hogy *nem* elektromágneses hullámról van szó. De Broglie ezeket a hullámokat *anyaghullámok*nak, *fázishullám*oknak nevezte, mert szilárdan hitt abban, hogy ahogyan a fényhullámok között, úgy itt is fellép majd interferencia a különböző fázisú hullámok között.

43-1 PÉLDA

Az 1 g tömegű részecske 1 mm/s sebességgel mozog. Számítsuk ki a részecskéhez rendelt be Broglie-hullám hullámhosszát!

MEGOLDÁS

A részecskéhez rendelt de Broglie-hullám hullámhossza:



43-12 ábra
A hidrogénatom Bohr-modelljében keringő elektronoknak megfelelő de Broglie hullámok állóhullámok. A csomópontok közti távolság $\lambda/2$. Ez a rajz az $n = 4$ energiaállapotra vonatkozik.

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\times10^{-34}\,\text{Js}}{(0{,}001\,\text{kg})(0{,}001\,\text{m/s})} = 6{,}63\times10^{-28}\,\text{m}$$

Ez megmérhetetlenül kicsiny hullámhosz, mert még a proton mérete is 10^{13}-szor nagyobb nála. Valóban a de Broglie-hullámoknak kevés következménye lesz a makroszkópikus részecskékre. Ugyanakkor mikroszkópikus részecskék, mint az elektronok, neutronok, atomok esetén a de Broglie hullámokkal kapcsolatos interferencia-effektusok teljesen természetesek és meglepő hatásokhoz vezetnek.

De Broglie-kimutatta, hogy ha feltesszük, hogy az elektronoknak is megfeleltethetünk anyaghullámokat, akkor az impulzusnyomatékra vonatkozó és annak idején oly megdöbbentő Bohr-féle kvantumfeltételre ésszerű magyarázat adódik. De Broglie szerint a magyarázat egyszerűen az elektron állóhullám alakzata. Eszerint stacionárius állapotban a körpálya kerületén csak a hullámhossz egész számú többszöröse férhet el, amint azt a 43-12 ábra is mutatja: $n\lambda = 2\pi r$. Ha a hullámhossz de Broglie-féle képletét ($\lambda = h/mv$) behelyettesítjük és végrehajtjuk az átrendezéseket, adódik, hogy

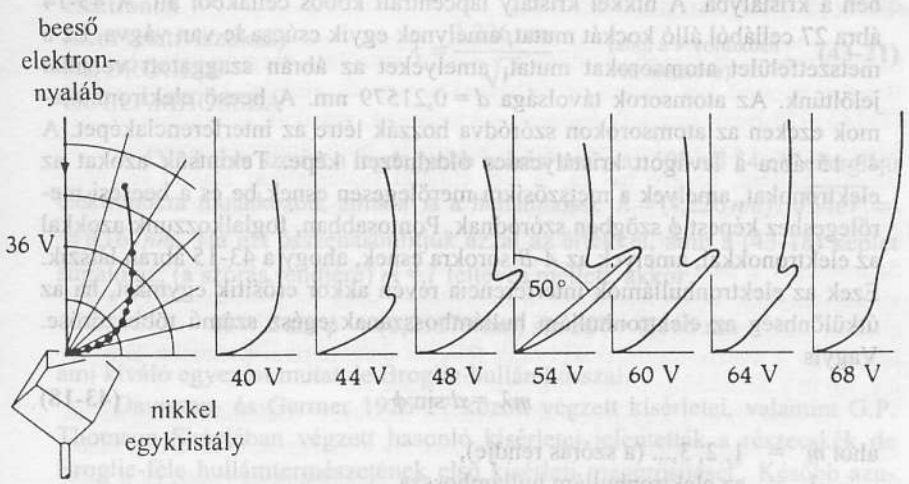
$$mvr = n\left(\frac{h}{2\pi}\right)$$

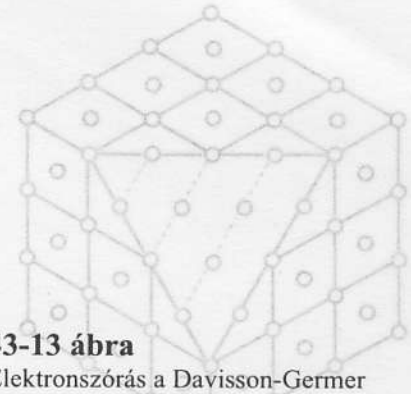
Ez viszont épp a Bohr-féle pálya-feltétel. Így a Bohr-féle *önkényes* feltevés – aminek az indokolása eredetileg csak annyi volt, hogy ez vezet a helyes eredményre – most kézenfekvő magyarázatot kap azáltal, hogy feltételezzük, hogy az elektron csak úgy mozoghat, hogy az atom stacionárius állapotában állóhullám-alakzatot alakít ki. Figyeljük meg, hogy itt egyetlen elektronhoz rendelt de Broglie-hullám különböző részeinek interferenciájáról van szó. (Ez hasonlít ahhoz, hogy a fényinterferencia esetén egyetlen *foton* elektromos mező hullámának különböző részei közötti interferencia a lényeges, nem pedig két különböző foton hullámainak szuperpozíciója.)

A de Broglie-féle feltevést nem azonnal fogadták el. Amíg csak érdekes elméleti fizikai eszmefuttatásnak tekintették, nem volt más, mint egy, a különös feltevések között, melyekről kiderülhet az, hogy érvényes, de az is, hogy nem. A szóbeli doktori vizsgán de Broglie-tól megkérdezték, hogyan lehet a hullámokat kimutatni. Azt válaszolta, hogy talán egy kristályra eső elektronnyaláb már mutatna interferencia-effektusokat, hiszen a kristályrácsban az atomok esetleg az elektronhullám hullámhosszának nagyságrendjébe eső közelségben lehetnek, ami az interferencia bekövetkezésének szükséges feltétele. A de Broglie-hullámok kimutatására vonatkozó első próbálkozások nem jártak sikerrel a kísérleti nehézségek miatt. De három évvel az értekezés megvédése után az Egyesült Államokban az anyaghullámok létezés drámai megerősítést nyert.

43.5 A Davisson-Germer-kísérlet

A de Broglie-hullámok kimutatására szolgáló kísérletek már 1921-ben elkezdődtek, amikor egy amerikai fizikus, Clinton Davisson, az elektronok fémfelületekről történő visszaverődését tanulmányozta a Western Electric





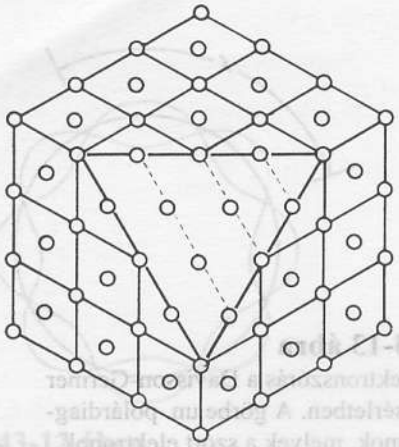
43-13 ábra
Elektronszórás a Davisson-Germer kísérletben. A görbe un. polárdiagramok, melyek a szórt elektronok számát mutatják a szög függvényében.

Company (most Bell Telephone Laboratory) laboratóriumában[5]. A kapott eredmények egy része érthetetlen volt. Ahelyett, hogy az elektronok tetszőleges szögben egyenletesen szóródtak volna, egyes irányokba több, másokba kevesebb elektron szóródott. Davisson nyilvánosságra hozta eredményeit, de nem tudott elfogadható magyarázatot adni a szokatlan szórásra. A kísérleteket asszisztensével Lester Germerrel folytatta tovább.

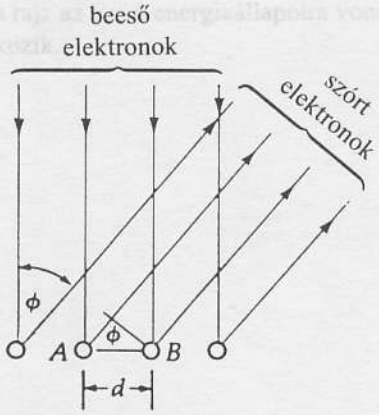
1925-ben Davisson elektron-szóráskísérleteiben tiszta polikristályos Ni fémet használt céltárgyként. A minta véletlenszerű irányítottságú számtalan kicsiny kristályszemcséből állt. Egy véletlen robbanás szétvetette azt az üvegbúrát, ami a berendezést légüres térben tartotta. A levegővel érintkező nikkel felülete oxidálódott és így a minta alkalmatlanná vált a további kísérletek céljaira. Hogy ezt az oxidréteget eltávolítsák, Davisson és Germer újjáépítette a vákuumkamrát és felfűtötte a céltárgyat. Véletlenül azonban annyira túlfűtötték, hogy a nikkel megolvadt és újrakristályosodott. Pontosan oda, ahová az elektronnyaláb becsapódott, néhány nagyobb kristályszemcse került. Az újrakezdett kísérletek eredményei bizonyos elektronsebességeknél eltéveszthetetlen csúcsokat mutattak a szórási eloszlásban. A megfigyelt különbségeket arra a tényre lehetett visszavezetni, hogy most a céltárgy néhány nagyobb kristályból és nem polikristályos anyagból állt. Davisson és Germer nem ismerve de Broglie elgondolását, helytelen javaslattal álltak elő a speciális szórási mintázat eredetét illetően. Azt hitték ugyanis, hogy a kristálysíkok valahogyan „vezették" az elektronokat bizonyos irányokban. 1927-ben, miután Davisson az Oxfordi Egyetemen részt vett egy fizikus találkozón, rájött, hogy a szokatlan szórásért az *anyaghullámok* lehetnek felelősek. Az adatokat kiértékelte de Broglie elméletével és kitűnő egyezést tapasztalt. A 43-13 ábra nagy egykristályon végzett szóráskísérletek eredményét mutatja.

Az elektronok a fémkristály felületéről kitüntetett irányokban szóródnak. Az elektronok hullámtermészetük miatt a felületen elhelyezkedő szabályosan elrendezett atomokkal kölcsönhatva a diffrakciós rácsra eső fényhez hasonlóan interferencia-effektusokat hoznak létre. Vizsgáljuk meg a 43-13 ábrán látható kristályt kissé részletesebben. A 43-14 ábrán a kristály nagyított képe látható a felületén elhelyezkedő atomok elrendeződésével. Azzal nem kell foglalkoznunk, hogy a kristály belsejében milyen az atomok elrendeződése, mert a kis energiájú elektronok nem hatolnak be jelentős mélység-

[5] A General Electric Company szabadalmi pert indított a Western Electric ellen egy elektroncső tervével kapcsolatban. Az elektronok szórására vonatkozó kísérleteket azért kezdték el, hogy a per számára kísérleti bizonyítékokat szerezzenek. A pert a Western Electris nyerte meg.



43-14 ábra
Levágott csúcsú Ni-egykristály képe az atomok felületi elhelyezkedésével.



43-15 ábra
A levágott csúcsú kristály (amit a 43-14 ábrán láttunk), oldalnézetből.

ben a kristályba. A nikkel kristály lapcentrált köbös cellákból áll. A 43-14 ábra 27 cellából álló kockát mutat, amelynek egyik csúcsa le van vágva. Ez a metszetfelület atomsorokat mutat, amelyeket az ábrán szaggatott vonallal jelöltünk. Az atomsorok távolsága $d = 0{,}21579$ nm. A beeső elektronhullámok ezeken az atomsorokon szóródva hozzák létre az interferenciaképet. A 43-15 ábra a levágott kristálycsúcs oldalnézeti képe. Tekintsük azokat az elektronokat, amelyek a metszősíkra merőlegesen esnek be és a beesési merőlegeshez képest ϕ szögben szóródnak. Pontosabban, foglalkozzunk azokkal az elektronokkal, amelyek az *A*-*B* sorokra esnek, ahogy a 43-15 ábrán látszik. Ezek az elektronhullámok interferencia révén akkor erősítik egymást, ha az útkülönbség az elektronhullám hullámhosszának egész számú többszöröse. Vagyis

$$m\lambda = d \sin \phi \qquad \textbf{(43-18)}$$

ahol m = 1, 2, 3,... (a szórás rendje),
λ = az elektronhullám hullámhossza,
d = az atomsorok közti távolság,
ϕ = a szórt elektronnyaláb és a felület normálisa közti szög.

Az elektronok energiája és a hozzájuk rendelt de Broglie-hullám hullámhossza közti kapcsolatot meghatározhatjuk, ha tekintetbe vesszük, hogy a 100 V-nál kisebb V feszültséggel gyorsított elektronok energiája még nem relativisztikus:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

Ebből a v-t kifejezve:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

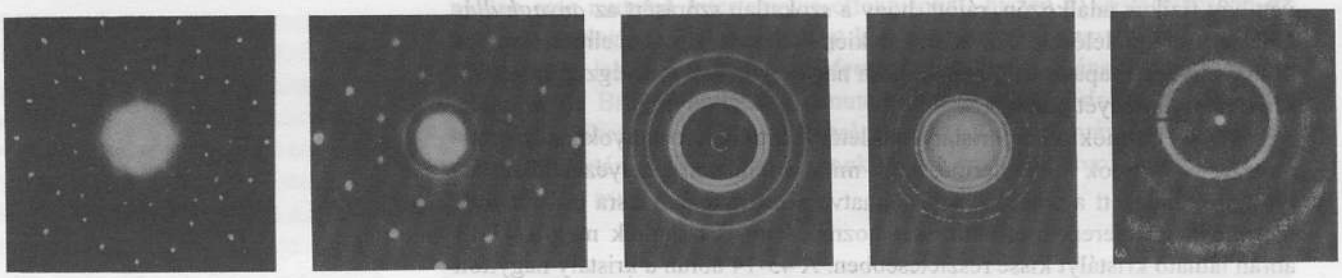
A $p = mv$ impulzus tehát

$$p = m\sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{2meV} \qquad \textbf{(43-19)}$$

és a $\lambda = h/p$ de Broglie-hullámhossz

$$\lambda = \left(\frac{h}{\sqrt{2me}}\right)\frac{1}{\sqrt{V}} \qquad \textbf{(43-20)}$$

A számértékek behelyettesítésével jól használható összefüggés adódik:



(a) Röntgensugarak NaCl-en. (b) Neutronok NaCl-en. (c) 0,070 nm hullámhosszúságú röntgensugár. (d) 600 eV energiájú elektronok. (d) 0,057 eV energiájú neutronok.

43-16 ábra
Elektromágneses hullámokkal, illetve részecskékkel létrehozott elhajlás (a) és (b) A Laue-folt-mintázat a fotonok, ill. neutronok hullámtermészetét demonstrálja. (c), (d) és (e). polikristályos fémmintákon létrejövő szórás diffrakciós gyűrűi.

elektronok (nem relativisztikus) DE BROGLIE HULLÁMHOSSZA

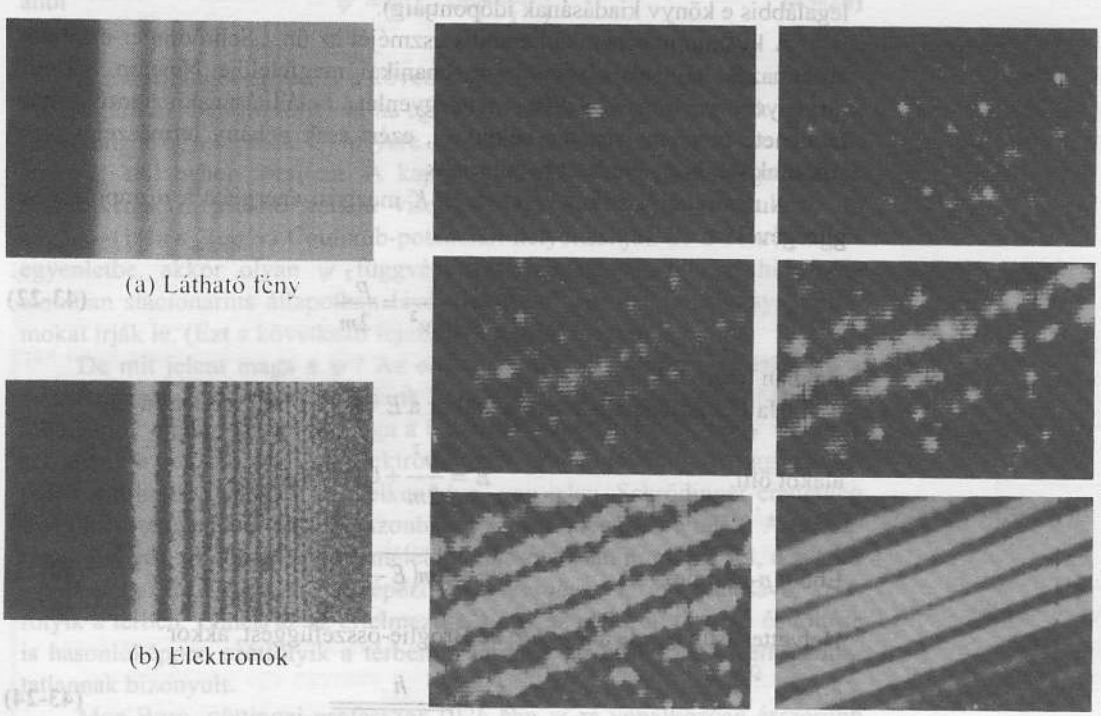
$$\lambda = \frac{1{,}226\ \text{nm}}{\sqrt{V}} \quad \text{(ahol a } V \text{ voltokban van megadva).} \qquad \textbf{(43-21)}$$

A 43-13 ábra szerint a legnagyobb szórási csúcs az 50°-nál 54 eV energiájú elektronokra mutatkozott, amikor is a hullámhossz $\lambda = (1{,}226\,nm)/\sqrt{54eV} = 0{,}167nm$. Ha ezt összehasonlítjuk azzal az értékkel, amit a (43-18) képlet sugalmaz, (a szórás rendjére) $m = 1$ feltevés mellett, akkor

$$\lambda = d \sin \phi = (0{,}21579\ \text{nm}) \sin 50° = 0{,}165\ \text{nm}$$

ami kíváló egyezést mutat de Broglie-hullámhosszal.

Davisson- és Germer 1925-27 között végzett kísérletei, valamint G.P. Thomson Skóciában végzett hasonló kísérletei jelentették a részecskék de Broglie-féle hullámtermészetének első kísérleti megerősítését[6]. Később azután lényegében az összes olyan interferencia- és elhajlási kísérletet elvégezték a részecskékkel, amiket az elektromágneses hullámoknál megismertünk. (Lásd a 43-16 és 43-17 ábrákat.)



43-17 ábra
Csíkrendszerek, amiket (a) látható fény, (b) elektronhullám elhajlása hoz létre egy él mellett. A (b) csíkokat elektronmikroszkópban, a (c) sok független esemény eredőjeként regisztrálható elektroninterferencia. Ha nő az események száma, a mintázat egyre kifejezettebbé válik

[6] Davisson és Thomson 1937-ben az elektron *hullám*természetének kimutatásáért megosztva kapták a Nobel-díjat. 31 évvel korábban Thomson édesapja, J. J. Thomson a Nobel-díjat a gázok elektromos vezetésének tanulmányozása során elért eredményeiért kapta, melyekben az elektron *részecske*tulajdonságainak volt döntő szerepük.

43.6 A hullámmechanika

Mielőtt még a de Broglie-hullámok kísérleti igazolása megtörtént volna, de Broglie eszméit két fizikus is felhasználta egy új elmélet kidolgozásához (1924–1925-ben). Egyikük *hullámmechanikának,* másikuk *kvantummechanikának* nevezte azt az elméletet, amely azt írta le, hogy hogyan viselkedik a de Broglie-hullám, ha erő hat rá. A két elmélet matematikai alakját tekintve meglehetősen különbözött egymástól. Werner Heisenberg német fizikus bonyolultnak tűnő mátrix-módszereket alkalmazott, míg az osztrák Erwin Schrödinger a parciális differenciál-egyenletek módszerével dolgozott[7]. Röviddel ezeknek az elméleteknek a közreadása után felfedezték, hogy a két elmélet tökéletesen egyenértékű,* kölcsönösen levezethetők egymásból. Minthogy a mátrix-módszereket csak felsőbb matematikai kurzusok tárgyalják, mi itt a Schrödinger-féle elméletet mutatjuk be.

Ha csak nem a legegyszerűbb eseteket tekintjük, matematikailag ezt az elméletet is meglehetősen nehéz alkalmazni. Az elméletnek talán a leginkább problematikus pontja az, hogy hétköznapi tapasztalatainktól eltérő és a mindennapi gondolkodás számára idegen fogalmakkal dolgozik. Mégis az a helyzet, hogy ez bizonyult a mikrofizikai világ helyes leírásának. Az elmélet relativisztikus általánosításából, a kvantumelektrodinamikából következő eredményei és a tapasztalat között semmilyen eltérés sincs. (pontosabban: legalábbis e könyv kiadásának időpontjáig).

A kvantummechanika centrális eszméjét az ún. „Schrödinger-egyenlet" tartalmazza. (Ennek klasszikus mechanikai megfelelője Newton második törvénye, a $md^2x/dt^2 = F$ differenciálegyenlet.) Felállításának szigorú gondolatmenete messzire vezetne célunktól, ezért csak néhány természetes érvet sorolunk fel, hogy eredetét bemutassuk.

A nemrelativisztikus részecskék K mozgási energiája a p impulzus segítségével az

$$K = \frac{1}{2mv^2} = \frac{p^2}{2m} \qquad \textbf{(43-22)}$$

alakban írható fel.

Ha U a potenciális energia, akkor a $E = K + U$ teljes energia az

alakot ölti. $$E = \frac{p^2}{2m} + U$$

Ebből p-t kifejezve: $$p = \sqrt{2m(E-U)} \qquad \textbf{(43-23)}$$

Helyettesítsük be ide a $\lambda = h/p$ de Broglie-összefüggést, akkor

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}} \qquad \textbf{(43-24)}$$

adódik.

Mint a 18. fejezetben levezettük, a klasszikus hullámegyenletnek

$$y = A\sin(kx - \omega t) \qquad \text{(ahol } k = 2\pi/\lambda \text{ és } \omega = 2\pi/T\text{)}$$

a $+x$ irányban haladó hullám megoldása ((18-26) formula).
Az argumentumbeli kx tag az y térbeli változását, míg a ωt tag az időbeli változást írja le, aminek következtében az y amplitúdója az ω körfrekven-

---

[7] Heisenberg a Nobel-díjat 1932-ben kapta, míg Schrödinger és P. A. M. Dirac megosztva 1933-ban a kvantummechanika kiépítésében nyújtott teljesítményeikért.

* Ezen egyenértékűség legáltalánosabb bizonyításában a magyar származású Neumann Jánosnak volt meghatározó szerepe. (A magyar kiadás szerkesztőjének megjegyzése.)

ciával változik. A továbbiakban csak a térbeli változással foglalkozunk. Ha a hullámfüggvény x szerinti második parciális deriváltját képezzük, akkor az

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y=0 \qquad \textbf{(43-25)}$$

egyenletet kapjuk, ahol $y = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ **(43-26)**

Ez az egyenlet tetszőleges mechanikai hullám leírására alkalmas – legyen szó hanghullámról, egy kifeszített kötélen végigfutó rugalmas hullámról, stb.

Schrödinger a (3-24) egyenletből λ értékét behelyettesítette a (43-25) egyenletbe és megkapta a ma *időtől független Schrödinger-egyenletnek nevezett összefüggést.*

AZ IDŐTŐL FÜGGETLEN SCHRÖDINGER EGYENLET (egy dimenzióban)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\left(\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\right)\psi=0 \qquad \textbf{(43-27)}$$

ahol $\psi = \psi_{max}\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ **(43-28)**

A Schrödinger-egyenlet a következőképpen alkalmazható. Ha azt akarjuk megtudni, hogy mi történik, ha egy részecskére erőt gyakorolunk, akkor a Schrödinger-egyenletben U helyére az adott erőnek megfelelő potenciális energiát kell behelyettesíteni. A kapott differenciál-egyenlet megoldásai a részecskének megfelelő hullám viselkedését írják le. Így például, ha az $U(r) = -(1/4\pi\varepsilon_0)(qq'/r)$ Coulomb-potenciált helyettesítjük be a Schrödinger-egyenletbe, akkor olyan ψ függvényeket kapunk, amelyek a hidrogénatomban stacionárius állapotban lévő elektronoknak megfelelő anyaghullámokat írják le. (Ezt a következő fejezetben fogjuk megtenni.)

De mit jelent maga a ψ? Az előbb „anyaghullámnak" neveztük, de a puszta elnevezéstől még nem látunk bele mélyebben a lényegébe. Minthogy a hullámok eredendő tulajdonsága a térbeli terjedés, felmerül, hogy vajon ez azt jelenti-e például, hogy az elektron a hidrogén-atomban a ψ függvénnyel jellemzett módon valahogyan „elkenődve" van jelen. Schrödinger eredetileg ezzel az értelmezéssel állt elő, azonban nem sok megértésre talált. A nehézségek a teljes, időtől is függő elmélettel kapcsolatosan merültek fel, e szerint ugyanis a szabad elektront jelképező *hullámcsomag* az idő múlásával szétfolyik a térben. Ennek az az értelmezése, hogy az elektron tömege és töltése is hasonlóképpen szétfolyik a térben, a legtöbb fizikus számára elfogadhatatlannak bizonyult.

Max Born, göttingai professzor 1926-ban ψ-re vonatkozóan ésszerűbb értelmezést javasolt. Born emlékeztetett arra, hogy az elektromágneses hullámok E elektromos erőterének amplitúdójára Einstein új értelmezést javasolt. Minthogy az amplitúdó négyzete a hullám intenzitásával arányos mennyiség, Einstein azt javasolta, hogy E^2 legyen arányos annak valószínűségével, hogy az adott hely környezetében egy fotont találunk. Így a fényképező lemezen a világos és sötét csíkok (amiknek helyét a hullámok interferenciája alapján határozzuk meg) annak a valószínűségeként is értelmezhetők, hogy a lemez adott helyére foton érkezik. Born ezt az elgondolást kiterjesztette a ψ hullámfüggvény értelmezésére. Azt feltételezte, hogy $|\psi|^2$ annak a valószínűsége, hogy a részecske a térnek az adott tartományában tartózkodik. Ez az értelmezés az elkent jelleg helyett megerősítette az elektronok *részecske természetét.* Az *elektron helyének meghatározására vonatkozó lehetőségeink azonban korlátozottak, az elektron helyét csak egy elkent tartományként tudjuk megadni.*

Általában ψ komplex függvény (azaz, a $\sqrt{-1}$ is szerepel benne.) Mivel a fizikailag létező objektumokkal csak valós számok hozhatók kapcsolatba, Born a ψ komplex voltából származó jellegzetességeket úgy kerülte ki, hogy fizikai jellemzőként a ψ *abszolút értékének négyzetét* javasolta. Pontosabban

BORN VALÓSZÍNŰSÉGI ÉRTELMEZÉSE ψ-RE

$$|\psi|^2 \Delta V = \text{(annak a valószínűsége, hogy a } \Delta V \text{ térfogatban a részecskét megtaláljuk)}$$

A P **valószínűségsűrűség-függvény definíció** szerint

$$P = |\psi|^2 \tag{43-29}$$

Ekkor annak $\wp$ **valószínűsége**, hogy egy elektron a V térfogatban van:

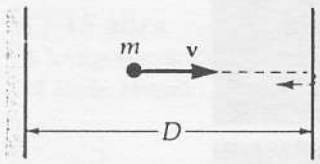
$$\wp = \int_V P dV \tag{43-30}$$

ahol az integrált a V térfogatra kell kiterjeszteni. Ahhoz, hogy $|\psi|^2$-et valószínűségként értelmezhessük, vegyük észre, hogy az elektron valahol bizonyosan megtalálható. Vagyis, ha a P valószínűség-sűrűség-függvényt az egész térre integráljuk, akkor egyet kell kapnunk. Ezért a hullám-függvényre kirójuk a következő *normálási feltételt*

A ψ NORMÁLÁSA

$$\int_{\text{egész térre}} |\Psi|^2 dV = 1 \tag{43-31}$$

A dobozba zárt részecske



43-18 ábra
Az egydimenziós dobozba zárt részecske mozgása. A részecske a falakról rugalmasan visszapattan.

Annak érdekében, hogy a ψ hullámfüggvény és a $\wp$ valószínűség közti kapcsolatot megvilágítsuk, tárgyaljuk most azt az esetet, amikor az elektron egy egymástól D távolságra lévő merev falak közötti egydimenziós tartományban mozog, lásd a 43-18 ábrát. Az elektron, ami ebbe a „dobozba" van bezárva, egy de Broglie-féle állóhullám-mintázattal írható le, amelynek a falaknál csomópontjai vannak. Ez azt jelenti, hogy a D távolságra a félhullámhosszak n egész számú többszörösét illeszthetjük. Ezért

$$n\left(\frac{\lambda}{2}\right) = D, \text{ vagy } \lambda = 2D/n \tag{43-32}$$

A (43-28) Schrödinger-egyenlet megoldása

$$\psi = \psi_{max} \sin(2\pi x/\lambda) = \psi_{max} \sin[2\pi x/(2D/n)]$$

vagy

DOBOZBA ZÁRT RÉSZECSKE HULLÁMFÜGGVÉNYE

$$\Psi(x) = \Psi_{max} \sin\left(\frac{4\pi x}{D}\right) \tag{43-33}$$

ahol x az egyik faltól mért távolság. Mielőtt továbbmennénk, *normáljuk* a hullámfüggvényt azáltal, hogy a (43-33) integrálját képezzük az elektron által hozzáférhető egész térre, vagyis $x = 0$ *és* $x = D$ között, majd az eredményt 1-gyel tesszük egyenlővé:

$$\int_0^D |\psi|^2 dx = 1$$

A (43-33) behelyettesítésével adódik:

$$\int_0^D (\psi_{max})^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{D}\right) dx = 1$$

Ha ezt az integrált meghatározzuk, azt kapjuk, hogy

$$\psi_{max} = \sqrt{\frac{2}{D}} \qquad (43\text{-}34)$$

Így a normált hullámfüggvény:

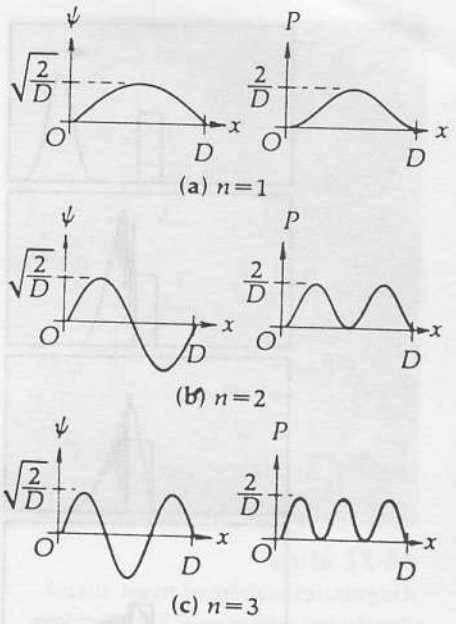
DOBOZBA ZÁRT RÉSZECSKE NORMÁLT HULLÁMFÜGGVÉNYE

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right) \qquad (43\text{-}35)$$

és a $P = |\psi|^2$ valószínűség-sűrűségfüggvény

$$P(x) = \left(\frac{2}{D}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi x}{D}\right) \qquad (43\text{-}36)$$

A 43-19 ábra az első három kvantumállapot (n = 1, 2 és 3) hullámfüggvényét és valószínűségsűrűségeit mutatja. Figyeljük meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a részecskét a doboz közepén lévő kis tartományban találjuk meg, maximális az n = 1 esetén és minimális az n = 2 esetén, mindegyik valószínűségsűrűség görbe alatti terület egységnyi, mert mindegyik hullámfüggvény egyre normált.



43-19 ábra
Egy dimenzióban, egymástól D távolságra elhelyezett merev falak között mozgó elektron első három kvantumállapota.

43-2 PÉLDA

Elektron egydimenziós mozgást végez két, egymástól D távolságra lévő merev fal között. (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az elektront az $x = 0$ *és* $x = D/3$ közti intervallumban találjuk meg, ha az elektron az n = 1 kvantumállapotban van? (*b*) Hasonlítsuk ezt össze a klasszikus valószínűséggel.

MEGOLDÁS

(a) Az elektron megtalálásának $\wp$ valószínűsége az x hosszúságú intervallumban egy egyenes mentén, a (43-30) egyenlet egydimenziós változatával számítható ki:

$$\wp = \int_x^{x+\Delta x} P(x)dx$$

ahol P(x) a (43-36) képlettel van megadva. Ha ezt a fenti képletbe behelyettesítjük, akkor

$$\wp = \frac{2}{D}\int_0^{D/3} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{D}\right) dx$$

$$\wp = \frac{2}{D}\left[\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{2n\pi x}{D}\right) \Big/ \left(\frac{4n\pi}{D}\right)\right]_0^{D/3} = 0{,}196 \quad (n = 1 \text{ esetén})$$

Így az elektron $x = 0$ és $x = D/3$ közti szakaszon az n = 1 állapotban való megtalálásának hullámmechanikai valószínűsége kb 1/5.

(b) A korrespondencia-elv illusztrálásaként: $n \to \infty$ esetén $\lim_{n\to\infty}$ [(sin an/bn)] = 0. Ezért a klasszikus valószínűség $\lim_{n\to\infty} \wp = 1/3$ lesz. Klasszikus szempontból az elektron állandó sebességgel mozog ide-oda a falak között, ezért annak a valószínűsége, hogy az adott térrészben megtaláljuk, valóban 1/3.

Dobozba zárt részecske energiaállapotai

Az elektron által betöltött kvantumállapotok mindegyikének az energiáját az $E = U + K$ összefüggésből kaphatjuk meg. Itt $U = 0$. (Miért?) A K viszont a $p = h/\lambda$ impulzussal kifejezhető. Így

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \qquad \textbf{(43-37)}$$

Stacionárius energia állapotokban (állóhullámok-esetén) a falak közötti D távolságon a *fél*hullámhossz egész számú többszörösének kell elférnie (ellentétben azzal, hogy a hidrogén atomban lévő elektronpályákon a *teljes* hullámhossz egész számú többszörösének kell elférnie),

$$n\left(\frac{\lambda}{2}\right) = D \qquad (\text{ahol } n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \textbf{(43-38)}$$

Ha ezt az értéket a (43-37) képletbe behelyettesítjük, adódik, hogy:

A DOBOZBA ZÁRT RÉSZECSKE ENERGIAÁLLAPOTAI

$$E_n = \left(\frac{h^2}{SmD^2}\right)n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \textbf{(43-39)}$$

ahol az n szám az elektron n-edik kvantumállapotát jelenti.

43-3 PÉLDA

Közelítőleg 6 eV energiájú elektron egymástól pontosan 1 nm távolságra lévő merev falak között mozog. (a) Adjuk meg az elektron által betöltött állapotra az n szám értékét! (b) Adjuk meg az elektron energiájának a pontos értékét!

MEGOLDÁS

Az n kvantumszám és az energia közti kapcsolatot a (43-37) egyenlet adja meg. Ebből n-et kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$n = \left(\frac{2D}{h}\right)\sqrt{2mE}$$

A számértékeket behelyettesítve: $E = (5\text{eV})(1{,}6\times10^{-19}\text{J/eV}) = 8\times10^{-19}$ J adódik, hogy

$$n = \frac{2(10^{-9}\text{ m})}{(6{,}626\times10^{-34}\text{ Js})}\sqrt{2(9{,}1\times10^{-31}\text{ kg})(8\times10^{-19}\text{ J})} = 3{,}642$$

Minthogy n egész szám kell legyen, megpróbálhatjuk az $n = 4$ értéket a (43-37)-ben. Ez $E = 6{,}017$ eV-et ad. Ha $n = 3$, akkor $E = 3{,}384$ eV. Mivel az $n = 4$ esetén az energia „közelebb esik" a „közelítőleg 6 eV"-hoz, arra következtetünk, hogy

(a) $n = 4$

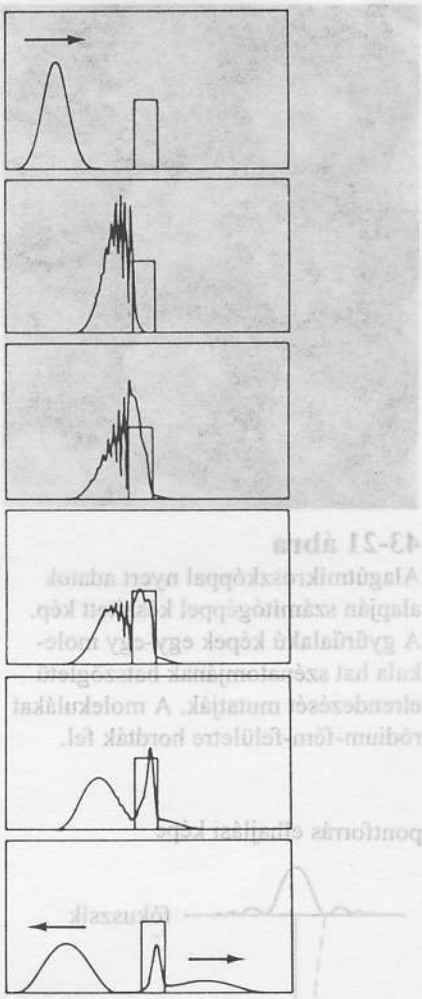
és *(b)* $E = 6{,}02$ eV

A fentiekben a lehető legrövidebb bevezetőt adtuk a kvantummechanikához. Az elméletbe még számos kiegészítést és újítást vezettek be; kiépítéséhez igen sok fizikus járult hozzá, a legnevesebb közöttük P.A.M.Dirac (1928), aki megalkotta a *relativisztikus hullámegyenletet*. Ez a színképvonalak mágneses térben mutatott felhasadásáról is számot adott és megjósolta az antianyag létezését[8].

43.7 Az alagúteffektus

A kvantummechanika egyik meglepő következménye, hogy egy részecske hullámfüggvénye olyan térrészbe is be tud hatolni, amely a klasszikus elmélet szerint tiltott. Tegyük fel, hogy egy homokszemcsét ismételten nekihajítunk egy papírlapnak, amit a térben rögzítve tartunk. Amennyiben a homokszem mozgási energiája nem elég a papír átszakításához, akkor azt várjuk, hogy a papír sértetlensége mellett sohasem fordul elő az, hogy a homokszem változatlan sebességgel haladva megjelenik a papír másik oldalán. Ezzel szemben az elektron, – amikor véges magasságú potenciálgáthoz a gát magasságánál kisebb kinetikus energiával közeledik – másként viselkedik. Az elektron hullámfüggvénye be tud hatolni a falba és a fal túlsó oldalán is zérustól különböző értéket vehet fel. Ez azt jelenti, hogy esetleg úgy találjuk, hogy az elektron egy „kvantummechanikai alagúton" átjutott a potenciálgáton, ahova a klasszikus elmélet szerint sohasem juthatott volna (lásd 43-20 ábra). Makroszkópikus objektumok esetén az átalagútazás valószínűsége lényegében zérus, a kvantummechanikai méretek skáláján azonban jelentőssé válik. A 43B-23 problémában ilyen alagútozás valószínűségét számítjuk ki.

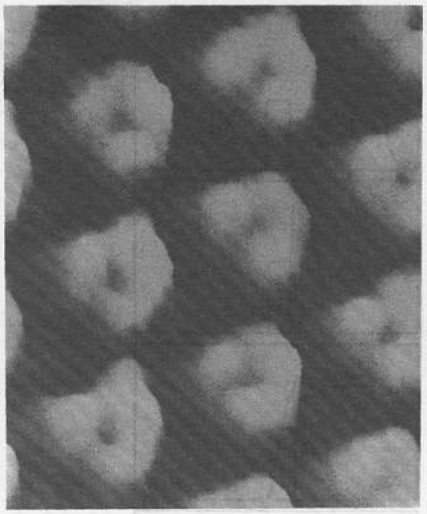
Az alagúteffektusnak igen sok gyakorlati alkalmazása van. A potenciálgát igen kicsiny magasságváltozása az áthaladás valószínűségében igen nagy változást tud eredményezni. Így például az *alagútdiódában* az elektronok áramlását két ellenkező töltésű tartomány között gyorsan lehet változtatni a két tartományt elválasztó potenciálgát kicsiny megváltoztatásával. Egy másik érdekes alkalmazási lehetőség a *pásztázó alagútmikroszkóp*[9]. Ebben a beren-



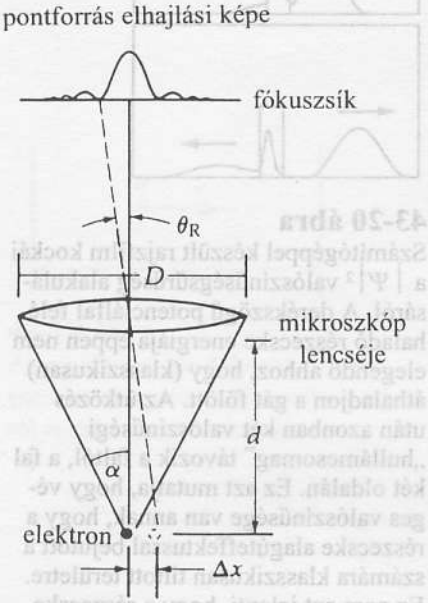
43-20 ábra
Számítógéppel készült rajzfilm kockái a $|\Psi|^2$ valószínűségsűrűség alakulásáról. A derékszögű potenciálfal felé haladó részecske energiája éppen nem elegendő ahhoz, hogy (klasszikusan) áthaladjon a gát fölött. Az ütközés után azonban két valószínűségi „hullámcsomag" távozik a faltól, a fal két oldalán. Ez azt mutatja, hogy véges valószínűsége van annak, hogy a részecske alagúteffektussal bejutott a számára klasszikusan tiltott területre. Ez nem azt jelenti, hogy a részecske kettészakadt volna. Az a tény, hogy a $|\Psi|^2$ a fal jobb oldalán sem tűnik el, csak azt jelenti, hogy a részecske az ütközés után nem nulla (ahogyan a klasszikus fizika mondja), hanem *véges valószínűséggel található meg ebben a részében.* (A. Goldberg – H. M. Shey – J. L: Schwartz: Scattering in One Dimension (Szórás egy dimenzióban) c. filmből, aminek a leírását lásd *American Journal of Physics* 35. 177 (1967).)

[8] Az antianyag – antielektron, antiproton, antineutron, stb... – az anyag új, más megjelenési formája, amely nagy energiájú fotonok és részecskék ütközésekor keletkezik. Az antirészecskék tömege, spinje (lásd a 44.4 pontot) ugyanolyan, mint közönséges párjuké, de töltésük ellentétesek, és ellentétes a spin és a mágneses nyomaték egymáshoz képest vett beállása is. Ha antirészecske ugyanolyan típusú közönséges részecskével találkozik, kölcsönösen megsemmisítik egymást és szétsugárzódva, mc^2 nyugalmi energiájuk fotonok energiájává alakulnak. Minthogy az anyag és az antianyag a kísérletek során egyenlő mennyiségekben keletkezik (párkeltéssel) a kozmológia egyik problémájává vált az a kérdés, hogy miért élünk olyan Univerzumban, melyet túlnyomórészt anyag és nem antianyag tölt be.

[9] Lásd Gerd Binning-Heinrich Rohrer: The Scanning Tunneling Microscope (A pásztázó alagút mikroszkóp) *Scientific American* 253. 50 (1985 aug). Ez a cikk elmagyarázza, hogy hogyan lehet végrehajtani a tűhegy ilyen finoman szabályozott mozgatását. Az 1986 évi Nobel-díjat a két szerző kapta, ezért a találmányért, megosztva Ernst Ruska-val, aki korábban az elektronmikroszkópot találta fel.



43-21 ábra
Alagútmikroszkóppal nyert adatok alapján számítógéppel készített kép. A gyűrűalakú képek egy-egy molekula hat szénatomjának hatszögletű elrendezését mutatják. A molekulákat ródium-fém-felületre hordták fel.



43-22 ábra
Elektron helyének megfigyelése mikroszkóp segítségével. Az elhajlási kép középponti csúcsa a tengelytől mért $\pm\theta_R$ szögű kúpon belül van.

dezésben egy rendkívül hegyes fémtűt, ami (ideális esetben) egyetlen atomban végződik, kb. 2 atomátmérőnyi távolságra viszünk egy vezető felülethez. Kis potenciálkülönbség esetén a klasszikus elmélet szerint az elektronok nem tudnak áthaladni a hézagon. Ezzel szemben a potenciálgáton alagúteffektussal átjutnak. Ha a tű hegye és a felület között a feszültség csökken, az elektronáram is csökken. A tűt a felület mentén mozgatva a tű és a felület távolságát állandóan úgy szabályozzuk, hogy az áram állandó maradjon. Ezáltal a tű függőleges mozgása úgyszólván domborzati térképet rajzol ki hegyekről és völgyekről, feltárva az atomok elhelyezkedését a felületen. A felületet egymás mellett húzódó vonalak mentén tapogatják le, s így valóban komplett domborzati térkép készíthető. Az egyenes vonalakat egy számítógépprogram „kisimítja" és előállítja a 43-21 ábrát. Olyan különbségeket is ki lehetett mutatni, ami az atomátmérő egyszázad része, szemben a fénymikroszkóp gyengébb pontosságával, ahol is a felbontóképesség csak mintegy 2000 atomátmérő.

43.8 A határozatlansági elv

A hullámmechanika a részecskék pályájának pontos térben elkent valószínűségi „felhővel" helyettesíti. Ez mélyreható változást idéz elő természet szemléletünkben. A fizika legátfogóbb elmélete – a kvantummechanika – már nem olyan fizikai modellekre épül, mint a korábbi elméletek. Nem adja meg egzaktul, hogy hol *van* az elektron, vagy hogy *hogyan* mozog, csak azt, hogy hogyan becsülhető meg a tartózkodási valószínűsége egy tartományban, ha közben adott sebességtartományba eső sebességgel halad. A gyötrő kérdés megmarad: az elektronnak *valahol* lennie kell. Vajon nem tudnánk e mérési technikánkat finomítva pontosan megmutatni, hogy hol van az elektron és hogyan mozog egyik helyről a másikra?

Heisenberg 1927-ben rámutatott arra, hogy létezik olyan *alapvető* határ, amely minden mérésre érvényes és minden ilyen lehetőséget kizár. Ezen az alapvető akadályon nem segít át sem az, ha okosabbak leszünk, sem az, ha a mérőeszközeinket tovább finomítjuk, mert ez a korlátozás a *hullám-részecske kettősség következménye* amin nem változtathatunk.

A határozatlansági elv a következőképpen illusztrálható. Tegyük fel, hogy egy elektron helyét akarjuk az x-tengely mentén meghatározni, egy nagy teljesítményű (nagy felbontóképességű) mikroszkóppal (lásd a 43-22 ábrát). A D átmérőjű lencse szélén bekövetkező elhajlás miatt a (pontszerű) elektron képe olyan elhajlási mintázat lesz, amelynek centrális csúcsa a (39-22) képlet szerint

$$\theta_R = \frac{(1{,}22)\lambda}{D}$$

szögátmérővel rendelkezik, ahol λ a megvilágító fény hullámhossza és D a lencse átmérője. A θ_R minimális szögfelbontás a $\Delta x/d$ alakban is felírható. Ebből következik, hogy az elektron helyét csak $\pm\Delta x$ határozatlansággal lehet megadni, ahol

$$\frac{\Delta x}{d} = \frac{(1{,}22)\lambda}{D}$$

Átrendezéssel

$$\Delta x = \frac{(1{,}22)\lambda}{(D/d)}$$

Ha 2α annak a fénykúpnak a nyílásszöge, ahonnan a lencse a fényt gyűjti, akkor $\alpha = (D/2)/d = 1/2(D/d)$. Nagyságrendi becslés érdekében a tg α függvényt sinα-val helyettesíthetjük (ami nem túl jó közelítés, de használható).

$$\Delta x \approx \frac{(1{,}22)\lambda}{2\sin\alpha}$$

Végül ha a becslés eddigi szellemében elhagyjuk az 1,22/2 szorzót, és így azt kapjuk, hogy

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin\alpha} \qquad \textbf{(43-40)}$$

Ez a módszer lényegével együtt járó bizonytalanság, amivel az elektron helyének x-koordinátáját meghatározhattuk, ami annak tulajdonítható, hogy D átmérőjű lencsét használtunk. Ha kisebb átmérőjű lencsét használtunk volna, a határozatlanság nagyobb lett volna (mert a sinα kisebb lett volna).

A helyzeten megpróbálhatunk úgy javítani, hogy kisebb hullámhosszúságú megvilágítást alkalmazunk, mondjuk a röntgen-tartományból. Sajnos azonban a rövidebb hullámokhoz nagyobb impulzus tartozik, hiszen $p = h/\lambda$, és ez az elektront jobban meglökné, amikor a foton az elektronról a mikroszkóp lencséjébe szóródik. A szórt foton *bárhol* beléphet a 2α szög-nyílású kúpon belül a lencsébe. A beesés pontos irányát nem ismerjük, mert az elektront egészen addig nem detektáljuk, míg az a lencsén átjutva a kép helyére nem érkezik. Csak azt tudjuk, hogy a lencsén *valahol* átjutott. A Compton-szórás során, amikor a foton egy elektronon szóródik, a foton x-irányú impulzuskomponense $+(p_x \sin\alpha)$ és $-(p_x \sin\alpha)$ között bármely értéket felveheti. Így az impulzusmegmaradás miatt az elektronnak átadott impulzus is határozatlan. Ezért az elektron impulzusának x-komponensében

$$\Delta p_x \approx 2p\sin\alpha \approx 2\left(\frac{h}{\lambda}\right)\sin\alpha \qquad \textbf{(43-41)}$$

határozatlanság jelenik meg. Ha a hely és az impulzus határozatlanságát egy összefüggéssé kombináljuk, az adódik, hogy

$$\Delta x \Delta p_x \approx \frac{\lambda}{\sin\alpha} 2\left(\frac{h}{\lambda}\right)\sin\alpha \approx 2h \qquad \textbf{(43-42)}$$

Amikor a hely határozatlansága csökken, elkerülhetetlenül nő az impulzus határozatlansága, és megfordítva. Ez a határozatlanság nem a mérőműszer esetleges tökéletlenségével függ össze. Még az elképzelhető legideálisabb berendezéssel is együtt jár az a fundamentális korlátozottság, ami a *sugárzás és az anyag kettős* (hullám és részecske) *természetére vezethető vissza.*

A Heisenberg-féle határozatlansági relációnak szigorúbb megfogalmazása a következő:

HEISENBERG FÉLE HATÁROZATLANSÁGI ÖSSZEFÜGGÉS

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar \qquad \textbf{(43-43)}$$

Egy részecske helyének és impulzusának egyidejű mérésekor a határozatlanságok szorzata nagyobb vagy olyan nagyságrendű, mint a $\hbar = h/2\pi$ szám.

Semmilyen ötlet vagy a méréstechnika mégoly látványos fejlődése sem segíthet át ezen a korláton. Az anyagnak és a sugárzásnak hullám-részecske-kettőssége miatt maga a mérési aktus megzavarja a vizsgált rendszert, még-

hozzá lényegében ismeretlen módon, amit nem lehet elkerülni. Ez a természetben egyfajta beépített korlátozás. A határozatlansági elv azt a tényt húzza alá, hogy az atomi jelenségek klasszikus modelljei biztosan félrevezetőek.

Vegyük azonban észre, hogy kizárólag a részecske helyének vagy impulzusának mérésére, (ha tehát csak az egyik mennyiséget mérjük) semmiféle korlátozás sincsen, tetszőleges pontosság elérhető. De ahogyan a hely Δx határozatlanságát csökkentjük, ($\Delta x \to 0$), a részecske impulzusának egyidejű meghatározásakor a határozatlanság egyre nagyobb és nagyobb lesz ($\Delta p_x \to \infty$), és megfordítva. A Δx és a Δp_x között a pontos összefüggés attól függ, hogy a konkrét esetekben a határozatlanság határait hogyan definiáljuk. A szorzat értéke a $2h$-tól lefelé kb. a $\hbar$-ig változhat. Hasonló relációk állnak fenn az y és a z irányban is

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar \qquad \textbf{(43-44)}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar \qquad \textbf{(43-45)}$$

Az elv más változópárokat is hasonlóképpen érint. Kimutatható, hogy fennáll a

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \qquad \textbf{(43-46)}$$

reláció is, ahol ΔE az adott állapot energiájának határozatlansága és Δt pedig az energiaállapot élettartama. Az elv a szögmérésekre is vonatkozik. Például ha azt akarjuk meghatározni, hogy hol van az elektron a hidrogén-atombeli Bohr-pályán, akkor a ϕ szög mérési bizonytalansága az L_ϕ impulzusnyomaték határozatlanságával lesz

$$\Delta \phi \Delta L_\phi \geq \hbar \qquad \textbf{(43-47)}$$

kapcsolatban. A határozatlansági relációnak ez az alakja lényegében tönkreteszi a Bohr féle „naprendszer" képet, amely szerint az elektronnak mindig a pálya jól definiált pontján kellene lennie. Tekintsük a következő példát!

43-4 PÉLDA

Becsüljük meg, mekkora az elektron szöghelyzetének $\Delta\phi$ határozatlansága a Bohr-pályán!

MEGOLDÁS

A $\Delta\phi$ értékét a (43-47) képlet kapcsolja az elektron L_ϕ impulzusnyomatékának ΔL_ϕ határozatlanságához: $\Delta\phi \Delta L_\phi > \hbar$. Minthogy az L_ϕ az egyik Bohr-feltétel szerint kvantált, *csak diszkrét értékeket vehet fel*, nem lehet szó egyik Bohr-pályán sem határozatlanságról, tehát

$$\Delta L_\varphi = 0$$

Ekkor a (43-47) képlet azt állapítja meg, hogy a $\Delta\phi$-nek nem lehet véges nagyságú. Ez azt jelenti, hogy ϕ-teljesen határozatlan. Egyformán valószínű, hogy az elektron a Bohr-pálya bármelyik pontjában legyen az egész idő alatt. Ezért nincs jelentősége arról beszélni, hogy az elektron a pálya egyik pontjáról átmegy a másik pontjára a pálya mentén.

43-5 PÉLDA

Elektron (aminek a tömege $m = 9{,}11\times10^{-31}$ kg) és puskagolyó (amelynek a tömege $m = 0{,}02$ kg) 500 m/s sebességgel mozog. A sebesség értéke 0,01%-ra pontos. Mely határok között tudnánk a helyüket meghatározni?

MEGOLDÁS

(a) Az elektron impulzusa $p = mv = (9{,}11\times10^{-31}\ \text{kg})(500\ \text{m/s}) = 4{,}56\times10^{-28}$ kgm/s. Ennek az impulzusnak a Δp_x határozatlansága az adatok szerint 0,01%. Így

$$\Delta p_x = (4{,}56\times10^{-28}\ \text{kg m/s})(0{,}0001) = 4{,}56\times10^{-32}\ \text{kg m/s}$$

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció (a (43-43) képlet) szerint a hely Δx határozatlansága nagyságrendben

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{h}{(2\pi)\Delta p_x} = \frac{6{,}63\times10^{-34}\ \text{Js}}{2\pi\left(4{,}56\times10^{-32}\ \dfrac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)}$$

$$\approx 0{,}00231\,\text{m}, \quad \text{vagy} \quad \approx 2{,}31\,\text{mm}$$

Ennél pontosabban nem tudjuk az elektron helyét meghatározni. Ez arra utal, hogy ebben a helyzetben az elektron nem tekinthető tömegpontnak.

(b) A puskagolyó impulzusa $p = mv = (0{,}02\ \text{kg})(500\ \text{m/s}) = 10{,}0$ kgm/s. Az impulzus Δp_x határozatlansága 0,01%, vagyis

$$\Delta p_x = (10{,}0\ \text{kg m/s})(0{,}0001) = 10^{-3}\ \text{kg m/s}$$

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció (43-43) szerint a hely Δx határozatlansága nagyságrendben

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{h}{2\pi(\Delta p_x)} = \frac{6{,}63\times10^{-34}\ \text{Js}}{2\pi\left(10^{-3}\ \dfrac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)} \approx 1{,}00\times10^{-31}\,\text{m}$$

Ez a bizonytalanság messze alatta marad az egyáltalán elképzelhető mérési pontosságnak (az atommag mérete is 10^{-13} m). Ezért makroszkópikus tárgyakra hétköznapi körülmények között megbízhatóan alkalmazhatjuk a klasszikus részecskeképet.

A határozatlansági relációnak mélyreható filozófiai következményei vannak. Miként Einstein rámutatott arra, hogy az abszolút tér, az abszolút idő és az abszolút egyidejűség lényegében meghatározhatatlan tartalom nélküli fogalmak, amelyeket ki kell küszöbölni a fizikai elméletekből, úgy Heisenberg azt mutatta meg, hogy egy elektron egyidejű helye és impulzusa csak eredendően korlátos értelemben használható.

Ez a klasszikus fizikában megszokott helyzettel ellentétes, ott ugyanis *bármilyen mérést*, elvben legalább is, egyre nagyobb pontossággal – korlátozás nélkül – el lehet végezni. A határozatlansági elv ezt tagadja. Azt állítja: nem lehet az objektumon mérést végezni anélkül, hogy meg ne zavarnánk, méghozzá *ismeretlen mértékben*, s így valamely vele kapcsolatban álló fizi-

kai mennyiségre vonatkozó ismeretünk ne csökkenne. Ez még a technikailag *tökéletes* mérőberendezések használatakor is bekövetkezik, mert a bizonytalanság nem a berendezések, vagy a mérési eljárások hibáiból ered. *A határozatlanság eredete az anyag és a sugárzás kettős természetében rejlik.*

Minthogy atomi szinten nem tudjuk kísérletileg tökéletesen meghatározni a részecskék viselkedését, erről a mozgásról nem is szabadna a klasszikus kifejezések használatával beszélni!

Most már kezd világossá válni, hogy a két-réses-interferencia esetén miért lépnek fel paradoxonok, ha a fotonok (vagy a részecskék) áthaladását a réseken a klasszikus pályaképpel írjuk le. Egy kísérletben, ahol egy elektronnyaláb olyan két résen halad át, amelyek távolsága összemérhető az elektronok de Broglie-hullámhosszával, a megszokott két-réses interferencia-mintázatot fogjuk tapasztalni. A csíkrendszer még akkor is kialakul, ha csak egyetlen elektront engedünk egyszerre a résekre. (A kép statisztikailag jön létre, ha elég hosszú ideig elég sok elektront használunk). De ha az expozíciós idő egy része alatt az egyik rést, más része alatt pedig a másik rést zárva tartjuk, akkor a kétréses mintázat helyett a két egy-réses-mintázat szuperpozíciója lesz az eredmény. Így arra a következtetésre kell jutnunk, hogy amikor mindkét rés nyitva van egyszerre, akkor az elektronok valahogyan mindkét réssel egyszerre vannak kölcsönhatásban, annak ellenére, hogy a klasszikus elektronmodell szerint az elektron jól definiált részecske, amelynek egyszerre csak egy résen lenne szabad átmennie. Amennyire kísérletileg igazolható, az elektronok nem klasszikus objektumok, amelyeknek jól definiált pályájuk lenne, ezért nem beszélhetünk róluk úgy, mintha mégis ez volna a helyzet. Ez a *pozitivista filozófia* lényege, mely álláspont eléggé megvetette a lábát a fizikában. Először Einstein relativitáselméletében (mely elvetette az éter fogalmát, mert létét nem lehetett kísérletekkel bizonyítani), később pedig a kvantummechanikában hódított tért, (amely viszonyt elvetette a pontos klasszikus fogalmak használatát az atomi jelenségek leírásában, mert a kísérletek tanusága szerint azok megmérhetetlenek). Ezek helyett a kvantummechanika többnyire csak valószínűségi kijelentéseket kínál. Ha egy rendszer tulajdonságaira vonatkozóan azonos mérésekből álló méréssorozatot végzünk, akkor a mérések átlagértéke kvantummechanikailag is *pontosan* meghatározható, az egyedi mérések eredményeire csak valószínűségi becslések tehetők.

A kvantummechanikának ez a valószínűségi értelmezése az ún. koppenhágai iskola nevével fonódott össze, amit legnagyobb jelentőségű mestere, a dán Niels Bohr működési helyéről neveztek el így. Ma a fizikusok többsége elfogadja ezt az értelmezést – bár vannak illusztris kivételek. Például Einstein sohasem fogadta el, hogy a szigorú oksági elvet – amin a klasszikus fizika nyugodott – el kellene vetni. „Isten nem játszik kockajátékot" szokta mondani és az volt a hite, hogy kell lennie valamilyen kauzális összefüggésnek a háttérben, amely létrehozza az általunk megfigyelt statisztikus viselkedést. Hitt abban, hogy majd a jövőben egy elmélet feltárja a mélyebb szinten megmutatkozó kauzalitást. Néhány kiváló elméleti fizikus hosszú éveket szentelt annak, hogy az ilyen „rejtett paramétereket" megtalálja és kidolgozza az elméletüket. Mindezideig azonban egyikük sem járt sikerrel.

Végül egy körülményt még hangsúlyoznunk kell.[10] Minden megfigyelést a klasszikus fizika nyelvén írunk le, mert végső soron a méréseket makroszkópikus mérőműszerekkel végezzük. Ez azonban nem azt jelenti, hogy a mérőműszerek és más makroszkópikus objektumok nem a kvantum-

[10] Ezeket a megjegyzéseket Herman Feshbach és Victor F. Weisskopf: „Ask a Foolish Question..." (Tégy fel egy buta kérdést...!) c. cikkének alapján fogalmaztuk. (*Physics Today*, 1988 október). Az 1989 áprilisi szám tartalmaz néhány levelet a szerkesztőhöz, amelyek meglehetős lelkesedéssel fejtegetnek más álláspontokat.

mechanika, hanem a klasszikus mechanika törvényeinek tesznek eleget! *Minden objektum a kvantummechanikának tesz eleget.* Viselkedésüket csak azért tudjuk a klasszikus fogalmak segítségével elhanyagolható hibával leírni, mert a makroszkópikus objektumok nagyon nagyok. Amikor azonban az atomi jelenségeket elemezzük, csak a kvantummechanika képes a helyes válaszokat megadni.

A kvantummechanika bizonyos eredményei rendkívüli pontosságúak. Például a hidrogén-atom alapállapotának az energiáját 10^{-12} ($1{:}10^{12}$) pontossággal adja meg. Vannak azonban olyan kérdések, amelyekre a kvantummechanika csak valószínűségi eloszlást ad meg, egyetlen határozott válasz helyett. Ahogyan Feshbach és Weisskopf megfogalmazta:

> *A Heisenberg-féle határozatlansági relációk úgyszólván útjelzőtáblák, amelyek azt mondják: „Eddig és nem tovább használhatók a klasszikus változók (bizonyos párjai). Ezen a határon túl ezek a változók már nem megfelelőek. A nem megfelelő kérdésre valószínűségeloszlás lesz a válasz." Másrészt a megfelelő kérdésekre a kvantummechanika olyan éles, pontos választ ad, mint amilyen pontos a hidrogén-atom alapállapotának energiája.*

A szerzők természetesen definiálták a „nem megfelelő" szó értelmét is. „A megfigyelések eredményeit a klasszikus fizika nyelvén fogalmazzuk meg. De a klasszikus fizika fogalmai nem mindig illeszkednek jól az atomi szituációkhoz". Ezen azonban nem azt kell érteni, hogy az ilyen nem megfelelő kérdéseket nem szabad feltenni. A kvantummechanika tartalma, úgy látszik, mindig heves vita tárgya marad a fizikusok és filozófusok között.

43.9 A komplementaritási elv

Eddig azt írtuk le, hogy a fizikusok miként jutottak arra a meggyőződésre, hogy a természetet a részecskék és a hullámok közötti bizonyos szimmetria jellemzi. De ez az új egyesség csak új fogalmi nehézségek ábrán bontakozott ki. A legjobb elmélet, amivel rendelkezünk, a kvantumelektrodinamika sem teszi lehetővé, hogy a mikroszkópikus testek mozgását és kölcsönhatását úgy írjuk le, ahogyan azt a klasszikus fizikában tettük. Mert ezek az objektumok sem nem részecskék, sem nem hullámok, bár egyes esetekben az egyik, máskor a másik jellegük domborodik ki. Olyan kísérlet, amelyet a *hullámtermészet* kimutatására terveztek (ilyen a két-réses interferencia-kísérlet), nem tárgyalható részecske fogalommal. Hasonlóképpen az a kísérlet, amely a *részecske-természetet* emelik ki, (ilyen pl. a Compton-szórás), nem szemléltethetők a hullámok fogalomrendszerével. Bohr (1928) felismerve a természetnek ezt a lényeges vonását, megfogalmazta az atomi szinten érvényesülő **komplementaritás elvet.**

A BOHR-FÉLE KOMPLEMENTARITÁSI ELV

A kvantumos jelenségek körében a hullám és a részecske tulajdonságok egymást kiegészítik. Bár az egyik leírási mód választása eleve kizárja másik egyidejű (szimultán) használatát, a teljes megértéshez mindkettőre szükség van.

Ennek az elvnek a magyarázatára Bohr egy analógiát ajánlott. Egy pénzérme teljes leírásához mindkét oldalát jellemezni kell, mégis az a helyzet, hogy egyszerre (szimultán) nem láthatjuk ugyanannak az érmének mindkét oldalát. Bohr komplementaritási elve általánosan próbálja kifejezni, hogy miért érzünk dilemmát, amikor az atomi szinten a klasszikus fogalmakhoz próbálunk ragaszkodni.

Fogalmaink, gondolkodásunk és nyelvünk – szóval valójában mindaz, amit gyűjtőnéven józan észnek tekintünk – mind a tapasztalatainkban gyökerezik. A klasszikus fizika ennek a józan észnek egyik legmagasabb rendű produktuma. Az 1920-as években azonban a mikrovilágra és a relativisztikus tartományokra vonatkozó tapasztalataink egyre többször ütköztek olyan megfigyelésekbe, amelyek szemben álltak a klasszikus fogalmakkal, és az ún. „józan ész" határait jócskán ki kellett tolni, elveit meg kellett változtatni, hogy ezeket az új típusú tapasztalatokat befogadhassa. A természet azonban folyamatosan szolgál rejtélyes esetekkel és kihívásokkal. Milyen meglepő új fogalmakat és elgondolásokat kell majd befogadnunk, hogy a jövőbeli új talányokat megfejthessük?

43.10 A kvantumelmélet fejlődésének rövid időrendi táblázata

1900 A fekete-test sugárzásának magyarázata az energia kvantálásával.
Max Planck (Nobel-díj 1918).

1900 A katódsugárzás elektronok áramlása.
Philip von Lenard (Nobel-díj 1905)

1905 A fényelektromos jelenség magyarázata.
Albert Einstein (Nobel-díj 1921)

1905 A speciális relativitáselmélet,
Albert Einstein

1907-1911 A szilárd testek fajhőjének magyarázata az energia kvantálásával.
Albert Einstein

1911 Az atommag kiterjesztésére vonatkozó becslés.
Ernest Rutherford (kémiai Nobel-díj 1908)

1913 A hidrogén-atom első kvantált modellje.
Niels Bohr (Nobel-díj 1922)

1916 A fotoelektromos hatásra vonatkozó kísérleti vizsgálatok.
Robert Millikan (Nobel-díj 1923)

1923 A fénykvantum és az elektron ütközésének felfedezése és magyarázata.
Arthur Compton (Nobel-díj C.T. Wilson-nal megosztva 1927)

1924 Hipotézis arra vonatkozóan, hogy az elektronhoz hullám tartozik, melynek hullámhossza $\lambda = h/p$.
Louis de Broglie. (Nobel-díj 1929)

1925 A hullámmechanika matematikai elmélete.
Erwin Schrödinger. (Nobel-díj, P.A.M. Dirac-kal megosztva 1933)

1925 A mátrix-mechanika matematikai elmélete.
Werner Heisenberg. (Nobel-díj 1932)

1925 A kizárási elv.
Wolfgang Pauli. (Nobel-díj 1945)

1926 A hullámfüggvény statisztikus értelmezése.
Max Born. (Nobel-díj 1945)

1927 A határozatlansági összefüggés.
Werner Heisenberg.

1928 Relativisztikus kvantummechanika és a pozitron létének megjósolása.
Paul A.M. Dirac. (Nobel-díj E. Schrödingerrel megosztva, 1933)

1932 A pozitron megfigyelése.
Carl Anderson. (Nobel-díj, Victor Hess-szel megosztva: 1936)

1948 A kvantumelektrodinamika elméletének kiépítése.
Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger és Richard P. Feynman. (Nobel-díj 1965)

Összefoglalás

A hidrogén-atom Bohr-modellje az alábbi feltevésekre épül:

(1) Az elektron a proton körül körpályán mozog. A centripetális erőt a Coulomb-erő létesíti.

(2) Vannak megengedett E_n energiájú állapotok, amelyekben az elektron sugárzás nélkül mozog.

(3) A megengedett energiájú állapotok azok, amelyekre teljesül, hogy

$$mvr = n\hbar$$

(4) A megengedett energiaállapotok közötti átmenet hf energiájú foton elnyelésével vagy kibocsátásával jár, ahol

$$hf = E_{\text{végső}} - E_{\text{kezdeti}}$$

A megengedett energiaállapotokban a pályasugarak és az energiák rendre

$$\left.\begin{aligned} r_n &= \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m Z e^2} = (0{,}0529\ \text{nm})\frac{n^2}{Z} \\ E_n &= -\frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

A Bohr-féle *korrespondencia-elv:*

> *Minden új elméletnek a megfelelő klasszikus elméletre kell redukálódnia, amikor a klasszikus elméletnek megfelelő körülményekre alkalmazzuk.*

Bizonyos feltételek mellett a részecskék hullámtulajdonságokat mutatnak, melyeknél a hullámhossz a

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

de Broglie-féle hullámhossz és p a részecske impulzusa. A V potenciálkülönbség hatására felgyorsított elektronok esetében

$$\lambda = \frac{1{,}226\ \text{nm}}{\sqrt{V}}$$ (ahol a V feszültséget voltokban mérjük).

A *hullámmechanika* vagy *kvantummechanika* az az elmélet, amit Ervin Schrödinger (és ettől eltérő matematikai formában Werner Heisenberg) épített ki, és amely az anyagoknak és a sugárzásnak mind a részecske, mind a hullám jellegét magába foglalja. Az elmélet a ψ függvény meghatározására alkalmas (parciális) differenciálegyenleten alapul. Born értelmezése szerint

$|\psi|^2 \Delta x =$ *annak a valószínűsége, hogy a részecskét a Δx méretű tartományban találjuk.*

Heisenberg határozatlansági relációja alapvető korlátot ró ki arra a pontosságra, mellyel bizonyos változópárok egyszerre mérhetőek. A bizonytalanságok szorzata nem lehet kisebb, mint $\hbar$. Az alábbiakban felsorolunk néhány ilyen változópárt:

hely és impulzus: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$

energia és idő: $\Delta E \Delta t \geq \hbar$

szög és impulzusnyomaték: $\Delta\phi \Delta L_\phi \geq \hbar$

AZ IDŐTŐL FÜGGETLEN SCHRÖDINGER EGYENLET (egy dimenzióban):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

ahol $$\psi(x) = \psi_{\max} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

A hullámfüggvényt úgy *normáljuk,* hogy a $\psi_{\max}$ értékét a

$$\int_{\substack{\text{az egész} \\ \text{térre}}} |\Psi|^2 \, dV = 1$$

összefüggésből határozzuk meg. Ha a részecske D távolságban elhelyezett merev falakkal határolt dobozba van bezárva, akkor a hullámfüggvényeket abból a követelményből lehet meghatározni, hogy a hullámfüggvényeknek a falaknál csomópontjuknak kell lenniük.

DOBOZBA ZÁRT RÉSZECSKE

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$E_n = \left(\frac{h^2}{SmD^2}\right) n^2$$

ahol az x az egyik faltól mért távolság.

A részecske ψ hullámfüggvénye behatolhat olyan térrészekbe is, amelyek a klasszikus elmélet szerint a részecske számára tiltottak (ezeken a helyeken az $E < U$). Ez a potenciálgátakon való *átalagutazás*hoz vezet (lásd a 43B-23 problémát), ahol a derékszögű potenciálfalon való átmenet valószínűségét határozzuk meg).

Bohr *komplementaritási elve:*

> *A kvantumos tartományban a részecske- és a hullámtermészet kiegészíti egymást. Jóllehet az egyiknek megfelelő leírás választása kizárja a másik egyidejű alkalmazását, mindkét szempont szükséges a teljes megértéshez.*

Kérdések

1. Hogyan alkalmazható a korrespondencia-elv az Einstein-féle speciális relativitáselméletre?
2. Mik lennének a megfigyelhető következményei annak, hogyha a Planck-állandó 0,1 J.s lenne?[11]
3. Miben hasonlítanak egymáshoz az anyaghullámok és az elektromágneses hullámok? Miben különböznek?
4. Miben hasonlítanak egymáshoz a nagy energiájú fotonok és elektronok? Miben különböznek?
5. Jelenti-e a részecskék hullám-természete azt, hogy nyitott ajtón („résen") bedobott baseball-labda (részecske) az áthaladás során elhajlik?
6. A részecskék hullámtermészetének koncepciója miként mond ellent a hidrogénatom Bohr-féle modelljének?
7. Próbáljuk meg megmagyarázni a következő megállapítást! Ha elektronnyalábot alkalmazunk kétréses-interferencia-mintázat előállítására, akkor minden elektronnak mindegyik résen át kell haladnia.
8. A határozatlansági reláció miképpen közvetlen következménye a részecskék hullámtermészetének?
9. Mennyiben összeférhetetlen a határozatlansági relációval de Broglie koncepciója, mely szerint a hidrogén-atomban az elektron a pálya mentén álló hullámot alakít ki?
10. Mi a szerepe a komplementaritási elvnek az olyan kísérletekben, amelyek az elektron-diffrakciót bizonyítják?
11. Dobozba zárt részecskének valószínűségi-sűrűsége (43-18 ábra) bizonyos pontokban zérus lehet. Át tud-e hatolni a részecske ezeken a pontokon?

Feladatok

43.2 Az atommodellek

43A-1 Mielőtt Bohr kidolgozta volna modelljét a hidrogén-atomra, J. R. Rydberg felállított egy empirikus szabályt, mely megadja a λ hullámhossz értékét arra a sugárzásra, mely az atomnak az n_i kezdeti állapotból az n_f végállapotába történő átmenetekor keletkezik:

A RYDBERG-FORMULA: $\frac{1}{\lambda} = R\left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right]$,

ahol R a Rydberg-állandó. Felhasználva azt a tényt, hogy a Balmer-sorozatban az $n = 3$ állapotból az $n = 2$ állapotba történő átmenet során jön létre a H_α vonala, melynek hullámhossza 656,3 nm, mutassuk meg, hogy a hidrogén esetén $R = 1{,}097\times10^7\ \mathrm{m}^{-1}$.

43A-2 Amikor a spektroszkópusok a hullámhossztáblázatokat készítik, a 200 nm-nél nagyobb hullámhosszakat úgy adják meg, mintha az levegőben lenne értendő, hiszen általában ténylegesen úgy is mérik. (A 200 nm-nél kisebb hullámhosszú sugarak a levegőben elnyelődnek, így a táblázatban a vákuumban mért értékeik szerepelnek.) A H_α vonalnak (a Balmer-sorozatból) a hullámhossz-adata 656,28 nm értékkel szerepel a táblázatban. Számítsuk át ezt az értéket vákuumbelire, öt jegyre!

43B-3 Vezessük le a hidrogén-színkép hullámhosszaira az alábbi képletet. Ezek azokhoz a színképvonalakhoz tartoznak, amelyeket az elektron akkor bocsát ki, amikor az n_i kezdeti állapotból az n_f végállapotba megy át!

$$\lambda = 91{,}13\,\mathrm{nm}\left(\frac{n_i^2 n_f^2}{n_i^2 - n_f^2}\right)$$

43B-4 Tekintsünk egy hidrogén-atomot alapállapotban! Számítsuk ki a következő mennyiségeket (elektronvoltokban)! (a) az elektron kinetikus energiáját (b) a potenciális energiáját (c) a teljes energiáját és (d) azt az energiát, amely ahhoz szükséges, hogy az elektront a protontól teljesen elszakítsuk!

43B-5 Oldjuk meg az előbbi problémát az egyszeresen ionizált hélium-atomra! (Ez olyan hélium-atom, amelyről egy elektront eltávolítottunk.)

43B-6 Határozzuk meg a színképvonalak Paschen-sorozatában a hidrogén-atom legnagyobb és a legkisebb hullámhosszúságú színképvonalainak hullámhosszát!

43B-7 Tekintsünk egy ideális, merev kétatomos molekulát, két egyenlő nagy pontszerű m tömeggel, amelyek $2a$ (állandó) távolságban helyezkednek el. A molekula forog a tömegek közti távolság felezőpontján átmenő és arra merőleges tengely körül. Feltéve, hogy az impulzusnyomatékot kvantálni kell úgy, ahogyan a hidrogén-atom Bohr-féle modelljében, mutassuk meg, hogy a rotációs (forgási) energiák szintjeit az $E_n = n^2h^2/16\pi^2ma^2$. összefüggés adja meg.

43B-8 Amikor a hidrogén-atom az $n = 3$ kezdeti állapotból az $n = 1$ végállapotba megy át, egy fotont bocsát ki. Az ólom kilépési munkája 4,25 *eV*. Adjuk meg azt a maximális kinetikus energiát, amire a fotoelektron szert tehet (elektronvoltokban), ha ilyen foton löki ki az ólomból!

---

[11] A relativitáselmélet és a kvantumelmélet különös következményeiről szórakoztató képet ad George Gamow *„Mr. Tompkins in Wonderland"* (Mr. Tompkins a csodák országában) c. könyvében McMillan 1940. Ebben a világban c =10 mérföld/óra, (kb 1,6 km/ó) h = 1 erg.s, és G 10^{12} -szerese a tényleges értéknek). A könyvnek a folytatása: *Mr. Tompkins Explores the Atom"* (Mr. Tompkins felfedezi az atomot) McMillan 1940. Magyarul G. Gamow: Tompkins úr kalandjai a fizikával (*Mr. Tompkins in paperback*) Gondolat 1976.

43.4 A de Broglie-hullámok
43.5 A Davisson-Germer-kísérletek

43A-9 Egy elektronmikroszkóp 50 keV-es elektronokat használ. Hányszor kisebb ezeknek az elektronoknak a de Broglie-hullámhossza, mint az 500 nm hullámhosszú látható fényé?

43A-10 Egy 1 g tömegű részecske és egy elektron 150 m/s-os sebességgel mozog. Számítsuk ki de Broglie-hullámhosszukat.

43A-11 Számítsuk ki a de Broglie-hullámhosszat olyan elektron esetére, melyet nyugalomból 50 V-os potenciálkülönbség gyorsított fel!

43A-12 Egy mozgó neutron de Broglie-hullámhossza 0,2 nm. Adjuk meg (a) a sebességét, és (b) a mozgási energiáját eV egységekben!

43A-13 Az alfa-részecske hélium-atommag, melynek tömege 4 u (ahol u az *atomi tömegegység* $1\ u = 1{,}661\times10^{-27}$ kg). Számítsuk ki az alfa részecskéhez tartozó de Broglie-hullámhosszat, ha az alfa részecske mozgási energiája 2 MeV!

43A-14 Elektronmikroszkóp 0,01 nm de Broglie-hullámhosszúságú elektronok alkalmazásával igen nagy felbontást ér el. Magyarázzuk el, miért nem tervezhetünk fotonmikroszkópot, mely ilyen nagyságrendbe eső hullámhosszúságú fotonokat alkalmaz?

43A-15 Az A elektron úgy mozog, hogy de Broglie-hullámhossza kétszer akkora, mint *B*-é. Adjuk meg mozgási energiájuk K_A/K_B hányadosát!

43B-16 Magyarázzuk meg kvalitatív módon, miért nem jelentősek (nem nyilvánulnak meg) az elektronszórás másodrendű csúcsai a 43-13 ábrán mutatott elektron-energiák esetében!

43B-17 Tekintsük a 60 e*V* energiájú elektronokkal végzett Davidson-Germer kísérletet (43-13 ábra) a) Energiájuk alapján mekkora az elektronok de Broglie hullámhossza? b) Milyen szórási szög várható ebben az esetben?

43B-18 Köbös kristályra a kristály felületéhez képest 35 ° beesési szöggel „fehér" röntgennyaláb (ami sok különböző hullámhosszúságú sugarat tartalmaz) esik. A legnagyobb hullámhosszúságú röntgensugár, ami szimmetrikusan (ugyanabban szögben) verődik vissza, 0,330 nm-es. (a) Adjuk meg a szomszédos atomsíkok távolságát a kristályban. (b) A röntgennyaláb helyett elektronnyalábot használva mekkora lenne azoknak az elektronoknak a minimális energiája (elektronvoltokban), amelyek ugyancsak erős visszaverődést szenvednének ebben a szögben?

43B-19 Elektronokat gyorsítunk *V* feszültségkülönbséggel, majd kristályport tartalmazó céltárgyra irányítjuk őket. A rácsban az atomsíkok legnagyobb távolsága 0,283 nm. Adjuk meg, mekkora az a legkisebb *V*-érték, amelynél olyan Bragg reflexió lép fel, hogy a beeső nyalábtól mérve 130° szögben verődnek vissza az elektronok.

43.6 A hullámmechanika
43.7 Alaguteffektus

43B-20 Szabad elektron hullámfüggvényének helytől függő része $\Psi(x) = A\sin(7\times10^9 x)$ *SI*-rendszerben. Adjuk meg (a) az elektron de Broglie-hullámhosszát, (b) az elektron sebességét és (c) a mozgási energiáját elektronvoltokban!

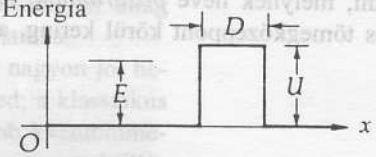
43B-21 Egy részecske egydimenziós mozgást végez egymástól *D* távolságra lévő két merev fal között. A valószínűségi-sűrűségfüggvény $P = |\psi|^2$, amit a (43-29) képlet ad meg. Mutassuk meg, hogy az eloszlás minimumai közti Δx távolság D/n!

43B-22 Egy 80 *pg* tömegű porszem két, egymástól 0,6 mm távolságra lévő merev fal közé zárva lebeg a levegőben. A porszem 5 perc alatt jut el az egyik faltól a másikig. Írjuk le ezt a mozgást kvantummechanikai szempontból úgy, mint egy egydimenziós dobozba zárt részecske mozgását és adjuk meg (a) ennek az energiaállapotnak az *n kvantum*számát. (b) Magyarázzuk meg, miért nem lehet kísérletileg meghatározni a kvantumszám értékét erre az állapotra. (c) Most tegyük fel, hogy ez a porszem a lehető legalacsonyabb ($n = 1$) energiaállapotban van. Adjuk meg (években) mennyi időt venne igénybe, hogy az egyik faltól a másikig eljusson.

43B-23 A *T áteresztési tényező* azt adja meg, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy m tömegű részecske a 43-23 ábrán bemutatott derékszögű potenciálfalhoz közeledve „átalagútozik" a potenciálfalon.

$$T = e^{-2kD} \quad \text{ahol} \quad k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U-E)}{h^2}}$$

Vizsgáljunk olyan potenciálfalat, melyre $U = 5$ eV és $D = 950$ pm (pikométer). Tegyük fel, hogy egy $E = 4{,}5$ eV energiájú elektron közeledik a potenciálfalhoz. Klasszikusan az elektron nem képes áthaladni a potenciálfalon, mert $E<U$. A kvantummechanika szerint azonban véges valószínűsége van az átalagútozásnak. Számítsuk ki ezt a valószínűséget!



42-23 ábra
A 43B-23 és 43B-26 közötti feladatokhoz.

43B-24 Az előző problémánál számítsuk ki, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 4,5 eV energiájú proton átalagútozik a potenciálgáton.

43B-25 A 43B-23 problémában mennyire kellene a potenciálfal *D* szélességét megnövelni ahhoz, hogy a beeső 4,5 eV energiájú elektron esélye az átalagútozására egymilliomod legyen!

43B-26 (a) A 43B-23 problémában számítsuk ki a potenciálfalhoz közeledő 4,5 eV energiájú elektron de Broglie-hullámhosszát. (b) A 950 pm széles potenciálfal hányadrésze a de Broglie-hullámhossznak? (c) Ismételjük meg a számítást a 4,5 e*V* energiájú proton esetére!

43.8 A határozatlansági összefüggés

43B-27 Egy 9 g tömegű golyó 2 m/s sebességgel gurul az asztalon. (a) Ha impulzusát 0,1% pontossággal mérjük, akkor helyének egyidejű mérésében mekkora a határozatlanság? (b) Ismételjük meg a számítást egy ugyanilyen sebességgel haladó elektron esetére! Kommentáljuk az eredményeket!

43B-28 Egy atomot az 1,8 eV energiával az alapállapot fölé gerjesztve, az atom átlagosan 2×10^{-6} s időt tölt el, mielőtt alapállapotba kerülne vissza. (a) Adjuk meg a kibocsátott foton frekvenciáját! (b) Adjuk meg a foton hullámhosszát! (c) Adjuk meg a foton energiájának bizonytalanságát!

43B-29 A π° mezon – egy instabilis részecske – nagy energiájú részecskeütközések során keletkezik. Tömegenergia-egyenértéke 135 MeV, átlagos élettartama csak $8{,}7\times10^{-17}$ s, míg el nem bomlik két gamma fotonra. A határozatlansági elv alapján adjunk becslést a tömegmeghatározás $\Delta m/m$ relatív hibájára!

Vegyes feladatok

43C-30 Negatív μ-mezonnak (amit *müonnak* neveznek) ($-e$) töltése és kb 206,8 m_e tömege van. Tekintsük azt a hidrogénszerű magot, amelyet egy proton és egy müon alkot! (a) Feltéve, hogy a proton mozdulatlan, adjuk meg az $n = 1$ Bohr-pálya sugarát erre a „müonatomra". (b) Mekkora az alapállapot energiája elektronvoltokban? (c) Adjuk meg, mekkora az $n = 2$ kezdeti és $n = 1$ végállapot közti átmenet során kibocsátott sugárzás hullámhossza!

43C-31 Az elektron és a pozitron (melynek tömege egyenlő az elektronéval, csak a töltése pozitív) kötött állapotot képes alkotni, melynek neve *pozitrónium*. A két részecske a közös tömegközéppont körül kering, a teljes impulzusnyomatékot a Bohr-feltételnek megfelelően kvantálni kell. Vezessünk le általános képleteket (a) a kvantált r pályasugarakra és (b) adjuk meg az E_n energiaállapotokhoz tartozó energiákat elektronvoltban. (c) Számítsuk ki, hogy mekkora legnagyobb és legkisebb hullámhosszúságú sugárzást képes kibocsátani az alapállapotba visszatérő pozitronium.

43C-32 Tekintsünk egy olyan *elképzelt* atomot, melynek magva neutron. A neutron körül keringő elektront a két test közötti gravitációs erő tartja pályáján. A Bohr-atomnál használt elemzéshez hasonló módon határozzuk meg (a) a pályasugarakat a (43-7) képletnek megfelelő formula szerint és (b) az energiaállapotokat a (43-10) képletnek megfelelően.

43C-33 Amikor egy atom fotont bocsát ki, az energia valamilyen hányada az atom visszalökődésére fordítódik. Mutassuk meg, hogy ez a hányad közelítőleg $E/2mc^2$, ahol E az átmenet energiája és m az atom tömege.

43C-34 Egy 50 kg tömegű mesterséges hold 2 órás keringési idővel körpályán kering a Föld körül. (a) A Bohr-féle kvantumfeltételeket alkalmazva az impulzusnyomatékra, számítsuk ki erre a pályára az n kvantumszámot. (b) Adjuk meg ezen állapot és a következő nagyobb sugarú megengedett pálya közötti távolságot. Kísérletileg ki lehetne-e mutatni ezt a távolságot?

43C-35 A (43-9) képletből kiindulva vezessük le a hidrogén Balmer-sorozatára a (43-1) empirikus képletet!

43C-36 Az egyszeresen ionizált hélium-atom, melynek jele HeII) egy elektronból és egy $+2e$ töltésű magból épül fel. Alkalmazzuk a Bohr-elméletet és határozzuk meg ennek az ionizált atomnak (a) az E_n megengedett energiáit és (b) az elektronpályák r_n sugarait. (c) Mutassuk meg, hogy a hidrogén-spektrum minden vonalának megfelel egy vonal az ionizált He színképében. Mi az összefüggés az egymásnak megfelelő vonalak n-értékei között? (Figyelem: ezek a vonalak az eredeti Bohr-elmélet szerint azonosak. Valójában kissé eltérnek, mert az R Rydberg-állandó enyhén függ a mag tömegétől).

43C-37 A korrespondencia-elvet illusztrálja az, hogy a relativisztikus kinetikus energia $K = mc^2[1/(1-v^2/c^2)^{1/2}-1]$ a $K = mv^2/2$ klasszikus alakjára redukálódik, ha $v \ll c$. Bizonyítsuk be, hogy ez az állítás igaz!

42A-21 128 MeV
42B-23 A válasz adott.
42B-25 A válasz adott.
42C-27 A válasz adott.
42C-29 A válasz adott.
42C-31 38,3 m
42C-33 A válasz adott.
42C-35 A válasz adott.
42C-37 b) $2{,}27 \times 10^{-13}$ J/m^3
42C-39 A válasz adott.
42C-41 288 keV
42C-43 A válasz adott.
42C-45 A válasz adott.
42C-47 A válasz adott.
42C-49 A válasz adott.

XLIII. Fejezet

43A-1 A válasz adott.
43B-3 A válasz adott.
43B-5 A válasz adott.
43B-7 A válasz adott.
43A-9 $1/9{,}12 \times 10^4$
43A-11 0,173 nm
43A-13 10,2 fm
43A-15 $\frac{1}{4}$
43B-17 a) 0,158 nm b) 47,2°
43B-19 5,71 V
43B-21 A válasz adott.
43B-23 $1{,}03 \times 10^{-3}$
43B-25 956 pm
43B-27 a) $5{,}86 \times 10^{-30}$ m b) 5,79 cm
43B-29 A válasz adott.
43C-31 a) $r_n = (4\pi\varepsilon_0\hbar^2 / me^2)n^2$
b) $E_n = -(6{,}80 \text{ eV})/n^2$ c) 243 nm, 182 nm
43C-33 A válasz adott.
43C-35 A válasz adott.
43C-37 A válasz adott.

XLIV. Fejezet

44A-1 7
44B-3 54,7° és 125,3°
44B-5 32,3°, 59,5°, 80,3°, 99,7°, 120,5°, 147,7°
44B-7 32 állapot
44B-9 b) $9{,}42 \times 10^{-25}$ J c) $3{,}34 \times 10^{-49}$ J
44B-11 25,2
44B-13 Ge; [Zn]$3d^{10}4s^24p^2$
44B-15 A válasz adott.
44A-17 22,0 kV
44B-19 A válasz adott.
44B-21 3,04 foton
44B-23 a) 4,20 mm b) $4{,}53 \times 10^{33}$
c) $3{,}81 \times 10^{31}$
44C-25 $d = (\mu \cos\theta)(dB/dz)(x/v)^2(1/M)$
44C-27 a) $E_1 = -15{,}5$ eV, $E_2 = -7{,}75$ eV, $E_3 = -5{,}16$ eV
c) 479 nm
44C-29 a)Kálium b) [ ]$3p^64p^1$,[ ]$3p^54p^2$
44C-31 b) 3; $4d_{5/2} - 3p_{1/2}$
44C-33 A válasz adott.
44C-35 A válasz adott.
44C-37 a) $(1/96\pi a^5)r^2e^{-r/a}$
b) $(1/24a^5)r^4e^{-r/a}$;$4a$
44C-39 a) $1{,}18 \times 10^{-33}$ b) 32 800 K
44C-41 b) -325 000 K

XLV. Fejezet

45A-1 13,7
45A-3 5,68
45A-7 27,9 perc
45B-9 1 curie
45B-11 $1{,}78t_0$
45B-13 0,565 cm
45B-15 $1{,}71 \times 10^{14}$ (!)
45B-17 A válasz adott.
45B-19 1,37 MeV
45B-21 A válasz adott.
45A-23 38,8 keV
45B-25 a) 0,144 MeV b) 0,288 MeV
45C-27 3785 év
45C-29 a) 86 s; $8{,}1 \times 10^{-3}$ s^{-1}
45C-31 A válasz adott.
45C-33 1,61 W
45C-35 A válasz adott.
45C-37 A válasz adott.
45C-39 a) 0,931 MeV, 5,49 MeV, és 12,86 MeV
b) 24,7 MeV c) 27,7 MeV
45C-41 A válasz adott.
45C-43 0,247 GeV mindkét részecske esetén
45C-45 7,8 cm

ATOMFIZIKA

„Ha ezek az átkozott kvantumugrások valóban igazak, akkor nagyon sajnálom, hogy valaha is kvantumelmélettel foglalkoztam."

ERWIN SCHRÖDINGER (részlet egy, a Bohr-posztulátumokról Bohrral folytatott heves vitából)

„A kvantumelmélet hatalmas kezdeti sikerei sem indítanak engem arra, hogy elhiggyem, hogy itt lényegében kockajáték folyik."

ALBERT EINSTEIN (Max Bornhoz, 1944. november 7-én írt levelében)

44.1 Bevezetés

Az előző fejezetben már láttuk, hogy lényeges különbség van a klasszikus és a kvantummechanika között. A newtoni klasszikus mechanika olyan mérhető paraméterekkel írja le a tárgyak erőhatás következtében végbemenő mozgását – mint a tömeg, sebesség, helykoordináták, gyorsulás – melyek értéke bámely időpontra előre kiszámítható. Ez a felfogás megfelel mindennapi tapasztalatainknak. A kvantummechanika is mérhető paraméterek közötti összefüggéseket ad meg, de úgy, hogy közben elvi korlátokat állít fel. A *határozatlansági* elv (amely az anyag és sugárzás alapvetően kettős: hullám-részecske természetéből ered) szerint bizonyos paraméterpárok nem mérhetők egyidejűleg tetszés szerinti pontossággal. Ennek következményeként a kvantummechanika csak annak a *valószínűségét* állapítja meg, hogy egy adott paraméter milyen meghatározott tartományba esik valamilyen átlag körül. Nem ad tehát pontos eredményt, mint a klasszikus mechanika.

Ha valaki azt gondolja, hogy a kvantummechanika nem nagyon jól helyettesíti az egészen precíz klasszikus mechanikát, akkor téved; a klasszikus mechanika csupán közelítése a sokkal finomabb és gazdagabb kvantummechanikai elméletnek. A klasszikus mechanika korlátlan pontossága csak illúzió. Jó közelítés makroszkópikus környezetben, ahol nagyszámú atom vesz részt a folyamatokban, és az átlag bizonytalansága elhanyagolható, de kisléptékű rendszerekre csak a kvantummechanika alkalmazható. Különösen szép a kvantumelméletben, hogy magába foglalja a teljes newtoni elméletet, és átmegy bele, ha közeledünk a makroszkópikus méretek felé. Ma ez az

egyetlen igazán jó elmélet, amely a világegyetem legtöbb csodáját helyesen írja le.[1] Idézzük Herman Feshbach és Victor F. Weisskopf szavait[2]:

„A kvantumfizika olyan építmény, amely az emberi gondolkodás történetében egyedülálló helyet tölt be, mint a természeti jelenségeknek eddig legtökéletesebben megfogalmazott elmélete."

Ebben a fejezetben a kvantummechanikát a hidrogénatomra alkalmazzuk, és értelmezzük a kapott eredményeket. A legegyszerűbb kéttest-rendszer példáján látványosan lehet szemléltetni a kvantummechanika egyedülálló tulajdonságait.

A hidrogénatom Bohr-modellje csodálatos alkotás; eredményei jól egyeznek a kísérleti adatokkal. Niels Bohr felfedezésének talán a legnagyobb vívmánya, hogy a modell több problémát vetett fel, mint amennyit megoldott, s ezzel elősegítette, hogy az atom szerkezetébe mélyebben betekinthessünk. A megoldatlan problémák közé soroljuk a következőket:

(1) Az elektromágnesség szigorú törvényeivel ellentétben, hogyan keringhet az elektron a proton körül anélkül, hogy energiát veszítene?

(2) Mi az oka annak, hogy ha a hidrogén-spektrumot nagyobb felbontással vizsgáljuk, akkor sok vonal két vagy három vonalra bomlik (*finomszerkezet*)?

(3) Hogyan magyarázható a Bohr-modellel az a tény, hogy a spektrumvonalak különböző intenzitásúak?

(4) Mivel magyarázza a Bohr-modell a pályák kvantáltságát?

Az előző fejezetben már szó volt róla, hogy Louis de Broglie 1924-ben értelmezni tudta a kvantumosságot az anyaghullámokkal. C. J. Davisson és L. H. Germer 1925-ben kísérletileg is kimutatta az anyaghullámok létezését. Mindezzel új atomszerkezet elmélet alapjait megvetették. Az új elméleti legfőbb „építésze" Erwin Schrödinger, a hullámmechanikai modell alkotja meg, Werner Heisenberg volt, pedig az atom kezdő és végállapota közötti átmenetet értelmezte mátrixok segítségével. Később kiderült, hogy a két elmélet teljesen egyenértékű, ezért mi csak az egyszerűbb hullámmechanikai modellt ismertetjük.

A hullámmechanika következtetései jól egyeznek a kísérleti adatokkal, azonban amikor elfogadjuk ezt a tisztán matematikai modellt, le kell mondanunk arról a szemléletes képről, hogy az elektronok a mag körül szigorúan megszabott pályákon mozognak. Azt tudjuk csak megállapítani, hogy az elektron mekkora valószínűséggel található a térnek *ebben* vagy *abban* a tartományában; örvendetes azonban, hogy a legnagyobb valószínűségek éppen a Bohr-modell diszkrét pályáinak felelnek meg.

A kvantummechanika másik sikere, hogy a kvantáltság magából a hullámegyenletből adódik, ha csak *állóhullámmegoldásokat* „engedünk meg". **Megengedettek azok a megoldások**, amelyek eleget tesznek *bizonyos határfeltételeknek*. Ez már előfordult az előző fejezetben is, amikor a szilárd falak között mozgó elektron egydimenziós mozgását vizsgáltuk. Ott kikötöttük, hogy a falaknál $\psi = 0$ legyen, ezzel a megoldásokban automatikusan csak a falak közötti állóhullámokra szorítkoztunk. Az atomi elektron háromdimenziós esetében azt kell kikötnünk, hogy ψ ugyanakkora legyen $\phi = 0°$-nál, mint $\phi = 360°$-nál. A következő pontban megmutatjuk, hogy ezek a korátozások hogyan adják ki a kvantumszámokat is tartalmazó megengedett megoldásokat.

---

[1] Marad még elég megoldatlan magfizikai és elemi részekkel kapcsolatos rejtély, amely a fizikusokat a további kutatásra ösztönzi.

[2] Physics Today, Oct. 1988.

44.2 A Schrödinger-féle hullámegyenlet

A hidrogén-atomra a megoldás hullámmechanikai közelítését akkor kaphatjuk meg, ha az elektront olyan de Broglie-féle „anyag"-hullámnak tekintjük, amely a mag (a proton) U Coulomb-potenciálterében mozog. Az elektron mint hullám, ki kell hogy elégítse a hullámegyenletet. Egydimenziós esetben a (43-27) időtől független Schrödinger-egyenlet:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\right)\psi=0$$

Ennek gyakrabban használt alakja:

SCHRÖDINGER HULLÁMEGYENLETE (egydimenziós)

$$\left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\psi=E\psi \qquad (44\text{-}1)$$

Mivel az elektronhullám háromdimenziós (egy pulzáló zselatingömbhöz hasonlítható), ezért a hullámegyenletet is háromdimenziós alakban kell felírni:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)+U(x,y,z)\psi=E\psi \qquad (44\text{-}2)$$

ahol az $U(x,y,z)$ potenciális energia a Coulomb-potenciál, Descartes-koordinátákkal:

$$U(x,y,z)=-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}} \qquad (44\text{-}3)$$

A gömbszimmetria miatt $U=-ke^2/r$, ezért kényelmesebb a Schrödinger-egyenletet az r, θ és ϕ *gömbi* polárkoordinátákkal felírni (44-1 ábra). Helyettesítés után a hullámegyenlet:

A SCHRÖDINGER-HULLÁM-EGYENLET (gömbi polárkoordinátákban)

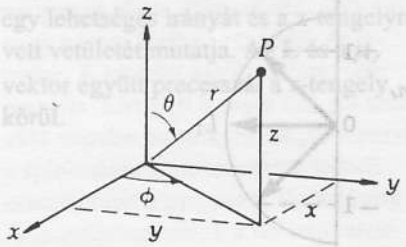
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+U(r)\psi=E\psi \qquad (44\text{-}4)$$

ahol a helyzeti energia egyszerűen

$$U(r)=-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{r} \qquad (44\text{-}5)$$

Nem szabad megijedni ettől a bonyolult egyenlettől, mert ebben az alakjában nem fogjuk alkalmazni. A (44-4) egyenlet teljes megoldása nagyon bonyolult, ezért a megoldásnak csak azokat a lényeges vonásait mutatjuk meg, amelyekből a kvantummechanika fizikai tartalmára tudunk következtetni. Ezek a következők:

(1) A hullámegyenlet $\psi(r, \theta, \phi)$ megoldását három függvény szorzata adja; ezek közül az $R(r)$ radiális tényező csak r, a $\Theta(\theta)$ poláris tényező csak θ és a $\Phi(\phi)$ azimutális tényező csak ϕ függvénye[3], azaz



44-1 ábra
A P pont helyzetét az (x,y,z) derékszögű koordinátákkal vagy az (r,θ,ψ) gömbi koordinátákkal adhatjuk meg.

[3] Az azimut szó csillagászati eredetű, ott a horizont felett, az északi iránytól kelet felé mért szögtávolságot jelenti.

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \qquad (44\text{-}6)$$

Az egésznek a lényege az, hogy ha olyan egyértékű megoldásokra szorítkozunk, ahol a függvény értéke zérushoz tart, ha $r \to \infty$, akkor a térbeli polárkoordináták mindegyikéhez önmagától adódik egy ***kvantumszám*** *(ami a megengedett megoldásokat kijelöli). Ezen állóhullám megoldások mindegyike az atom egy kvantumállapotát képviseli.*

(2) A [$\psi \to 0$, ha $r \to \infty$] határfeltételt kielégítő $R(r)$ radiális függvény csak az n kvantumszám egész: 1, 2, 3 ... értékeinél létezik. Az n szám a *fő-kvantumszám*, mivel az elektron energiája csak ettől függ, a következő módon:

$$E_n = -\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right)\frac{1}{n^2} \qquad (44\text{-}7)$$

Ez azonos a Bohr-modellből kapott energiafüggvénnyel – amint ez várható is volt. Megállapíthatjuk, hogy az energiaszintek tekintetében a Bohr-modell sikeres volt.

(3) A határfeltételeket kielégítő $\Theta(\theta)$ **poláris függvény** eredményezi az ℓ *orbitális*, vagy *mellékkvantumszámot*, amely az

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

értékeket veheti fel adott n esetén. Az $n = 1$ esetén tehát ℓ csak a 0, $n = 3$ esetén pedig a 0, 1, 2 értéket veheti fel. Orbitális kvantumszámnak azért nevezik, mivel ettől függ az elektronnak a proton körüli pályájához tartozó L pálya-*impulzusmomentuma*. Az ℓ diszkrét értékei miatt a pálya-impulzusmomentum kvantálva van, a következő szabály szerint:

$$L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \qquad (44\text{-}8)$$

(Vegyük észre, hogy ez már nem azonos a Bohr-elméletből származó (hibás) $L = n\hbar$ értékkel!)

(4) A harmadik m_ℓ kvantumszám a $\Phi(\phi)$ **azimutális függvényből** származik. Ez az ún. *mágneses kvantumszám* adott ℓ esetén az

$$m_\ell = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm\ell$$

értékeket veheti fel.

Az m_ℓ határozza meg az **L** impulzusmomentum z-irányú komponensét (44-2 ábra) a következő összefüggés szerint:

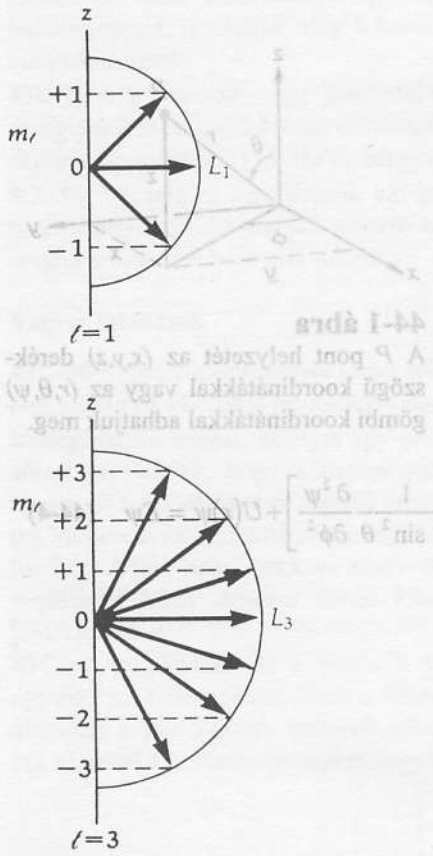
$$L_z = m_\ell \hbar \quad (m_\ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\ell) \qquad (44\text{-}9)$$

Az **L** pálya-impulzusmomentumhoz μ_ℓ *mágneses dipólusmomentum* tartozik (lásd a 30C-41 feladatot):

$$\mu_\ell = -\left(\frac{e}{2m}\right)L \qquad (44\text{-}10)$$

Ezért a mágneses dipólusmomentum z-komponense, $(\mu_\ell)_z$ szintén kvantált:

$$(\mu_\ell)_z = -m_\ell\left(\frac{e\hbar}{2m}\right) \qquad (44\text{-}11)$$



44-2 ábra

$L_z = m_\ell \hbar$ megengedett értékei ℓ két különböző értékére (nem azonos léptékben). Az m_ℓ egészszámok értékét a z tengelyen tüntettük fel $+\ell$ -től $-\ell$ -ig. L nagysága $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$

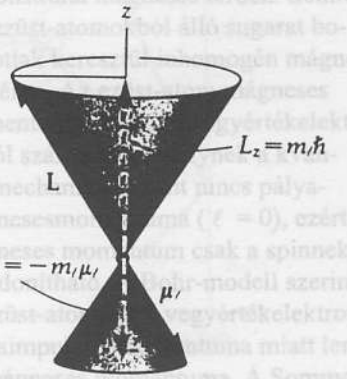
Az $e\hbar / 2m$ tényező az un. **Bohr-magneton.**

A BOHR-MAGNETON: $$\left(\frac{e\hbar}{2m}\right) = 9{,}27\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2} \qquad \textbf{(44-12)}$$

A $(\mu_\ell)_z$ komponense közvetlenül mérhető mennyiség, ezért fizikai szempontból nagyobb a jelentősége, mint μ_ℓ-nek vagy **L**-nek.[4]

Azokban az atomi állapotokban, melyekre n és ℓ értéke azonos, de a hullámfüggvényük különböző, **L** *iránya is különböző*. Ennek kísérleti bizonyításához helyezzük az atomot a $+z$-tengellyel párhuzamos gyenge mágneses térbe (ezzel kitüntetett irányt adtunk meg a térben) A μ_ℓ z-komponensének mérésével észlelhetjük **L** diszkrét irányait (44-2 ábra).

A szemléletességet a legjobban a **vektormodell** segíti. Az **L** impulzusmomentum és a μ_ℓ mágneses momentum szigorúan kapcsolódnak egymáshoz – a mágneses tér viszont forgatónyomatékot fejt ki μ_ℓ-re. Az eredmény: pörgettyű alakul ki, **L** és μ_ℓ együtt végez precessziós mozgást a z-tengely körül. A Heisenberg-féle határozatlansági elvből következő $(\Delta L_z)(\Delta\phi) \geq \approx \hbar$ összefüggés miatt azonban lehetetlen megállapítani, hogy adott pillanatban melyik vektor *hol* található. A vektormodellel ezt a precessziós mozgást *csak* mint átlagos, elkent kúpfelületet tudjuk szemléltetni. (44-3 ábra) Más kísérleti adatunk nem lehet, mint a vektorok abszolút értéke és *vetületük a z-tengelyre.*



44-3 ábra
Vektormodellel szemléltetjük a kvantummechanika vektormennyiségeinek kvantált térbeli beállását. Az ábra **L** egy lehetséges irányát és a z-tengelyre vett vetületét mutatja. Az **L** és a μ_ℓ vektor együtt precesszál a z-tengely körül.

44-1 PÉLDA

Mekkora az **L** és a z tengely által bezárt minimális θ szög az $\ell = 3$ esetben?

MEGOLDÁS

A 44-3 ábra alapján,

$$\cos\theta = (L_z)_{\max} / L = \ell\hbar / \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = 3/\sqrt{12}\,.$$

tehát $$\theta = 30°$$

A hullámegyenlet imént ismertetett megoldása semmit nem árul el a spektrumvonalak ún. *finomszerkezetéről.* Nagyfelbontású spektrométerben egyes vonalak egymáshoz nagyon közeli két vagy három vonalra bomlanak fel. A következő fejezetben ismertetjük a finomszerkezet magyarázatát, amit S. A. Goudsmit és G. E. Uhlenbeck – a leydeni egyetem két fizikus doktorandusza – 1925-ben adott meg. Ők arra a következtetésre jutottak, hogy az elektronnak saját impulzusmomentuma, „spinje" van, amelyhez mágneses momentum is tartozik. Ez a két mennyiség – éppenúgy, mint az

[4] Ez a kvantummechanikai bevezetés zavarosnak tűnhet, ha nem tisztázunk előbb bizonyos fogalmakat. Klasszikusan úgy képzeljük, hogy a részecskék valamilyen pályán mozognak, s ehhez, a klasszikus fogalmi rendszer szerint, az **L** mechanikai impulzusmomentum tartozik. A részecskék töltéssel is rendelkeznek, ezért mozgásukhoz az elektromágnesesség elmélete szerint μ mágneses momentum tartozik. A két fogalom nyilvánvalóan szorosan kapcsolódik egymáshoz, és mindkettő kvantált. Ha vigyázunk, hogy a két fogalmat ne keverjük, akkor közelebb jutottunk a kvantummechanika világképének megértéséhez.



elektromos töltés és a tömeg – az elektron saját, belső tulajdonságai. Szemléletesen ezt úgy lehet elképzelni, hogy az elektron töltéssel bíró gömb, amely saját tengelye körül forog.[5] Az elektron teljes impuzusmomentuma a hidrogénatomban két részből tevődik össze: az **L** pályamomentumból és az **S** spinmomentumból. Annak a megfigyelésnek az alapján, hogy a finomszerkezetben a vonalak legtöbbször párosával fordulnak elő, Goudsmit és Uhlenbeck arra következtetett, hogy az elektronspinnek a külső mágneses tér irányához képest csak kétféle beállása lehetséges: *paralel* vagy *antiparalel*. Ezzel egy negyedik kvantumszám is megjelenik!

(5) Az **elektronspinhez** az m_s spin-kvantumszám tartozik, ami megadja a spin-impulzusmomentum z-irányú S_z komponensét.

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)} \qquad (\text{ahol } s = ½) \qquad \textbf{(44-13)}$$

$$S_z = m_s\hbar \qquad (\text{ahol } m_s = \pm ½) \qquad \textbf{(44-14)}$$

Amikor $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$, akkor azt mondjuk, hogy a spin „felfelé" irányul, amikor pedig $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$, akkor azt, hogy „lefelé". Éppenúgy, mint a pályamozgás esetében a *spin-mágnesesmomentum* z-komponense kapcsolódik S_z-hez:

$$(\mu_s)_z = -m_s\left(\frac{e\hbar}{m}\right) \qquad (\text{ahol } m_s = \pm ½) \qquad \textbf{(44-15)}$$

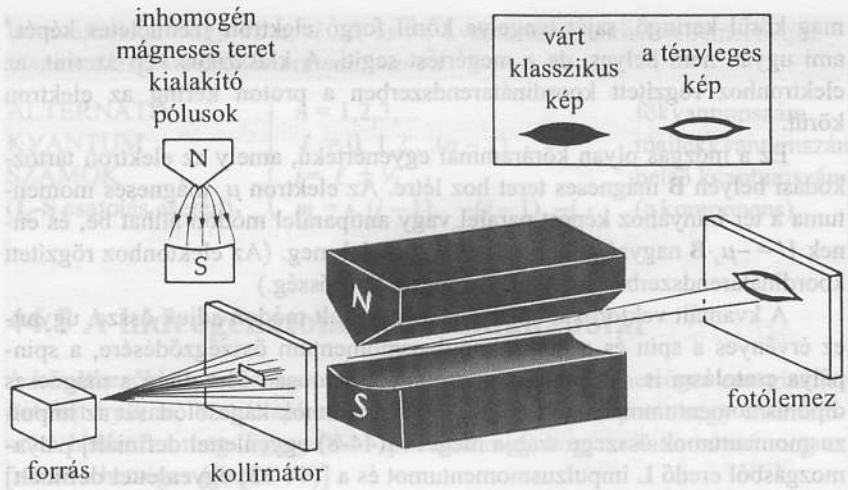
Ezt a (44-11) képlettel összevetve azt találjuk, hogy az elektronspinhez tartozó mágneses momentum kétszer akkora, mint a pályamomentumhoz tartozó.

Foglaljuk össze a hidrogénatom megengedett állapotait jellemző négy kvantumszámot. Az első három természetes módon adódik a proton Coulomb-terében mozgó elektron kvantummechanikai leírásához, míg a negyedik az elektron belső tulajdonságából, a spinből származik.

KVANTUM SZÁMOK

$$\left\{\begin{array}{ll} n = 1, 2, 3,... & \text{főkvantumszám} \\ \ell = 0, 1, 2,...(n-1) & \text{mellék- vagy orbitális kvantumszám} \\ m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2...\pm\ell & \text{mágneses kvantumszám} \\ m_s = \pm ½ & \text{spinkvantumszám} \end{array}\right\} \qquad \textbf{(44-16)}$$

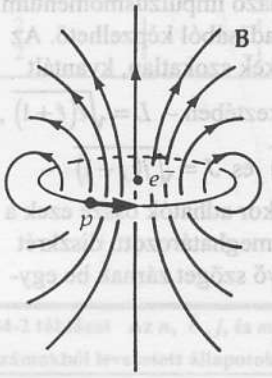
[5] Ezt a forgógömb-modellt – bármennyire is segíti képzeletünket – nem szabad szó szerint venni. Még ha valamilyen módon sikerülne is megjelölni az elektron egy pontját azért, hogy a mozgását követni tudjuk, a határozatlansági elv miatt ez lehetetlen volna. A kvantummechanika szerint az elektron nem forgó gömb!



44-4 ábra
A Stern-Gerlach kísérlet (1922) a spin-mágneses momentum beállását demonstrálta mágneses térben. Semleges ezüst-atomokból álló sugarat bocsátottak keresztül inhomogén mágnesen téren. Az ezüst-atom mágneses momentuma egyetlen vegyértékelektrontól származik, amelynek a kvantummechanika szerint nincs pályamágnesesmomentuma ($\ell = 0$), ezért a mágneses momentum csak a spinnek tulajdonítható. A Bohr-modell szerint az ezüst-atomnak a vegyértékelektron pályaimpulzus-momentuma miatt lenne mágneses momentuma. A Sommerfeld által bevezetett iránykvantálás miatt ez az impulzusmomentum a mágneses térrel párhuzamos állású lenne. A kérdés tehát az volt, hogy a mágneses téren átlőtt atomnyaláb egy vagy három foltban csapódik az ernyőre. A kísérlet egyik jóslatot sem igazolta. Ehelyett a sugár két, jól szétváló vonalra bomlik, bizonyítva ezzel a spin-mágnesesmomentum térbeli orientációját a mágneses tér hatására. A spinmomentumok a tér irányához képest paralel vagy antiparalel módon állnak be; az inhomogén tér felfelé vagy lefelé téríti el – így áll elő a kétvonalas minta.

44.3 Az elektronspin és a finomszerkezet

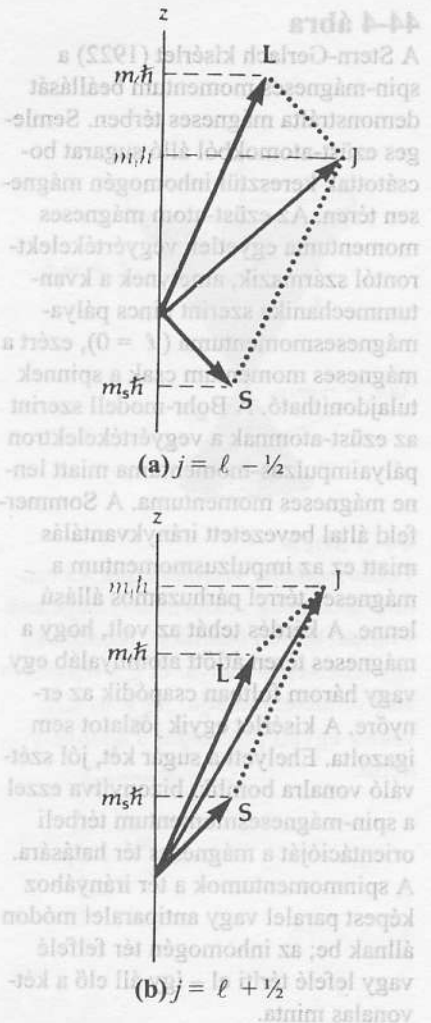
Az atomelmélet fejlődése az 1920-as években felér egy kalandregénnyel. Az évtized első felében csak növekedett a szakadék az elmélet és a kísérleti adatok között. Az egyik alapvető gond a spektrumvonalak *finomszerkezete* volt, a másik pedig az a tény, hogy amikor semleges atomokat bocsátottak át inhomogén mágneses téren, akkor a nyaláb két részre bomlott, amint ezt a 44-4 ábra mutatja. Az addigi elméletek ezt nem tudták megmagyarázni. 1925-ben Goudsmit és Uhlenbeck javaslatai helyes eredményre vezettek. Szerintük: (1) az elektron saját tengelye körül forgó, elektromos töltéssel bíró gömbként viselkedik, amelynek az impulzusmomentuma kvantált; (2) mágneses térben a mágneses dipólusmomentum csak kétféleképpen állhat be: vagy párhuzamos a mágneses térrel vagy ellentétes irányú (*paralel* vagy *antiparalel*). Az elektronnak ez a szemléletes modellje azonban nem illett bele a kvantummechanika kereteibe. A pörgő elektron rejtélyének megoldását 1928-ban P. A. M. Dirac adta meg, aki az elektron relativisztikus hullámmechanikai tárgyalását dolgozta ki. A szemléletes képet előzőleg csak azért fogadták el, mivel következtetései egyeztek a kísérleti tapasztalattal, a relativitáselmélet alkalmazásával azonban az eredmények önmaguktól adódtak. A *Dirac-elmélet, amely csak az elektron töltését és tömegét fogadja el kiindulási adatnak, az elektron összes többi alapvető tulajdonságát – ideértve a spint és az antielektron (pozitron) létezését – megadja!* Az elméleti fizikának ez az egyik legfényesebb győzelme volt – Dirac ezért 1933-ban (Schrödingerrel közösen) Nobel-díjat kapott.



44-5 ábra
Az elektron koordinátarendszerében a proton kering az elektron körül. Ez a mozgás olyan körárammal egyenértékű, amely az elektron tartózkodási helyén **B** mágneses térerősséget hoz létre.

44.4 A spin-pálya csatolás

Az előző pontban kifejtettük, hogy a spektrumvonalak finomszerkezete két mágneses dipólusmomentum kölcsönhatására jön létre; az egyik az elektron spinjéből, a másik a pályamenti (orbitális) mozgásából származik. A két momentum kölcsönhatása, „csatolása" a **spin-pálya csatolás**, vagy **L-S-csatolás**. A tiszta matematikai leírás absztraktsága miatt gyakran használják a



44-6 ábra
L-S-csatolás esetén a **J** teljes impulzusmomentum a pályamenti és a spintől származó impulzusmomentum kétféle összeadásából képzelhető. Az abszolút értékek szokatlan, kvantált értéke következtében – $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}$, $S = \sqrt{s(s+1)}$ és $J = \sqrt{j(j+1)}$ – ezért csak akkor adhatók össze ezek a vektorok, ha meghatározott, diszkrét értéket felvevő szöget zárnak be egymással.

mag körül keringő, saját tengelye körül forgó elektron szemléletes képét,[6] ami ugyan nem helyes, de a megértést segíti. A klasszikus kép szerint, az elektronhoz rögzített koordinátarendszerben a proton kering az elektron körül.

Ez a mozgás olyan körárammal egyenértékű, amely az elektron tartózkodási helyén **B** mágneses teret hoz létre. Az elektron μ_s mágneses momentuma a tér irányához képest paralel vagy antiparalel módon állhat be, és ennek $U = -\mu_s \cdot \mathbf{B}$ nagyságú helyzeti energia felel meg. (Az elektonhoz rögzített koordinátarendszerben mért a **B** mágneses térerősség.)

A kvantált vektorokat az előzőekben vázolt módon adjuk össze, ugyanez érvényes a spin és a pálya impulzusmomentum összegződésére, a spin-pálya csatolásra is. Az impulzusmomentum szorosan összefügg a mágneses dipólusmomentummal, ezért a dipólusmomentumok kapcsolódását az impulzusmomentumok összege szabja meg. A [(44-8) egyenlettel definiált] pályamozgásból eredő **L** impulzusmomentumot és a [(44-13) egyenlettel definiált] **S** spin-impulzusmomentumot *vektoriálisan* összeadva kapjuk a **J** teljes impulzusmomentumot:

SPIN-PÁLYA (vagy **L-S** CSATOLÁS):
$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \qquad \textbf{(44-17)}$$

A **J** nagysága, akárcsak **L** és **S**, szintén kvantált a következő összefüggés szerint:
$$J = \hbar\sqrt{j(j+1)} \qquad \textbf{(44-18)}$$

A 44-6 ábra mutatja, hogyan kapható meg **J** az **L** és **S** vektori összegzésével. Itt j-vel az ún. *belső kvantumszámot* jelöltük, amely ℓ és s kombinációjával jön létre. Az $s = 1/2$ érték miatt ennek nagysága csak
$$j = \ell \pm \frac{1}{2} \qquad \textbf{(44-19)}$$
lehet.

A **J** z-tengely menti vetülete ugyanúgy kvantált mint **L**; a kvantált vetület nagysága $m_j\hbar$. A **J** z-irányú komponense tehát:
$$J_z = m_j\hbar \qquad \textbf{(44-20)}$$
ahol m_j csak az
$$m_j = j,(j-1),(j-2),\ldots,-(j-2),-(j-1),-j \qquad \textbf{(44-21)}$$
értékeket veheti fel – összesen tehát $2j + 1$ értéket.

Az **L** és **S** impulzusmomentumok összegezése meghatározza, hogy hogyan kell összeadni a megfelelő dipólusmomentumokat; ezt a 44-6 ábrán láthatjuk. Mindhárom vektor: **L**, **S** és **J** nagysága kvantált, így az általuk bezárt szög sem lehet akármekkora. A dublettek (kettős vonalak) energiaszintjeihez tartozó különbség az $(\ell + ½)$ és $(\ell - ½)$ azaz a „felfelé" illetve „lefelé" irányuló spinekhez tartozó nívók különbségének felel meg.

Úgy tűnik, mintha a spin-pálya-csatolás figyelembevételével újabb kvantumszámokat vezettünk volna be az elektron állapotának meghatározására. Látni fogjuk, hogy az elektron állapotát *vagy* az n, ℓ, m_l és m_s kvan-

[6] Az analógia a Föld-Nap-rendszerre utal: A Földnek Nap körüli mozgásához is tartozik impulzusmomentum, ehhez járul a Föld saját tengelye körüli forgásából származó momentum.

tumszámokkal *vagy* az n, ℓ, j, és m_j kvantumszámokkal jellemezhetjük – *nincs szükség további kvantumszámokra.*

ALTERNATÍV KVANTUM SZÁMOK (L-S csatolás esetén)	$n = 1,2,3,...$	főkvantumszám	(44-22)
	$\ell = 0, 1, 2, ...(n-1)$	mellékkvantumszám	
	$j = \ell \pm ½$	belső kvantumszám	
	$m_j = j, (j-1), -(j-1), -j$	(z komponens)	

44.5 A hidrogénatom kvantumállapotai

A következőkben a hidrogénatom elektronja számára lehetséges energiaállapotokat írjuk le. Megállapítottuk, hogy az elektron állapotát négy kvantumszám határozza meg. Egy példán mutatjuk meg, hogyan határozható meg az összes lehetséges állapot.

44-2 PÉLDA

Soroljuk fel az elektron $n = 1$ és $n = 2$ állapotaiban lehetséges kvantált energiaállapotokat. Végezzük el ezt: (a) az n, ℓ, m_ℓ és m_s és (b) az n, ℓ, j és m_j kvantumszámok segítségével is.

MEGOLDÁS

(a) A kvantumszámok csak a következő értéket vehetik fel:

$$\ell = 0, 1, 2, ..., (n-1)$$

$$m_\ell = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm\ell$$

$$m_s = \pm 1/2$$

Ezekkel a szabályokkal készítettük el a 44-1 táblázatot. $n = 1$ esetben összesen 2, $n = 2$ esetben összesen 8 állapot lehetséges.

(b) Az n, ℓ, j, és m_j négyest használva ezek értékei:

$$\ell = 0, 1, 2, ...(n-1)$$

$$j = \ell \pm ½ \text{ (ahol } j > 0)$$

$$m_j = \pm j, \pm(j-1), \pm(j-2), \pm...$$

ugyanannyi; tehát $n = 1$ esetben 2, $n = 2$ esetben 8 állapotot kaptunk, amint ezt a 44-2 táblázat szemlélteti.

44-1 táblázat Az n, ℓ, m_ℓ és m_s kvantumszámokból levezetett állapotok

n	ℓ	m_ℓ	m_s
1	0	0	+½
1	0	0	−½
2	0	0	+½
2	0	0	−½
2	1	0	+½
2	1	0	−½
2	1	+1	+½
2	1	+1	−½
2	1	−1	+½
2	1	−1	−½

Spektroszkópiai jelölés

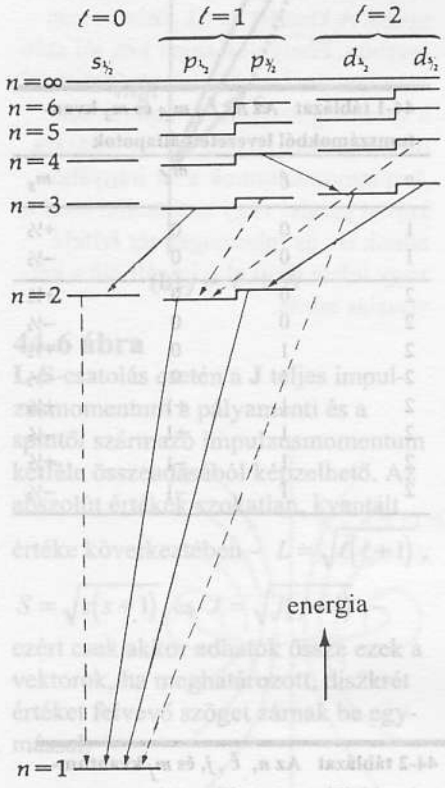
Gyakran egyszerűbb, ha az állapot meghatározására a kvantumszámok felsorolása helyett **spektroszkópiai jelöléseket** alkalmazunk. Egy példa erre: $3d_{5/2}$, ahol a betűt megelőző szám az n főkvantumszám. A betű maga az ℓ mellékkvantumszám helyett áll a következő séma szerint:

ℓ értéke	0	1	2	3	4	5
Betű	s	p	d	f	g	h

Eredetileg az s, p, d és f betűket a spektrumvonalak vizuális észlelése alapján, azok jellegének megadására használták; a megfelelő angol szó kezdőbetűje szerint: *s=sharp*, *p=principal*, *d=diffuse* és *f=fundamental*. Indexben a belső kvantumszámot tüntetjük fel. Lássunk erre néhány példát.

44-2 táblázat Az n, ℓ, j, és m_j kvantumszámokból levezetett állapotok

n	ℓ	j	m_j
1	0	½	+½
1	0	½	−½
2	0	½	+½
2	0	½	−½
2	1	3/2	+3/2
2	1	3/2	−3/2
2	1	3/2	+½
2	1	3/2	−½
2	1	½	+½
2	1	½	−½



44-7 ábra
A hidrogén energiaszint-diagramja a finomszerkezet figyelembevételével. Folytonos vonallal néhány megengedett átmenetet adtunk meg, míg a szaggatott vonalak tiltott átmeneteket jelölnek, azaz olyanokat, melyek megsértik a $\Delta \ell = \pm 1$ kiválasztási szabályt. (Lásd a 7. sz. lábjegyzetet.) A finomszerkezeti felhasadás a rajzon erősen el van túlozva.

44-3 PÉLDA

Az alább felsorolt elektronállapotok között vannak nem megengedettek is; melyek azok?

(a) $1p_{3/2}$ (b) $1s_{1/2}$ (c) $2p_{5/2}$ (d) $4d_{3/2}$ (e) $5f_{5/2}$ (f) $6f_{3/2}$

MEGOLDÁS

Csak (b), (d) és (e) a megengedettek, mivel ezeknél $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ és $\ell < n - 1$ (a) hibás, mivel $\ell > n - 1$ (c) hibás, mert $j > \ell + \frac{1}{2}$ és (f) hibás $j < \ell - \frac{1}{2}$ miatt.

A héj jelölés

A spektroszkópiai jelölésekben nem alkalmazzák, de a röntgensugárzással kapcsolatban használják a főkvantumszám helyett a következő nagybetűket:

n értéke	1	2	3	4	5	6	7
Betű	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*

A $3p$ elektron ezek szerint az *M héjon* és a *p alhéjon* helyezkedik el.

44.6 A hidrogén energiaszint-diagramja

A 43. fejezetben láttuk, hogy a hidrogénatom Bohr-elméletében egyetlen kvantumszám, az n főkvantumszám szerepel, amely az energiaállapotot határozza meg. Ennek alapján rajzoltuk meg a 43-10 ábrán látható egyszerű energiaszint-diagramot. A spin-pálya-csatolással kiegészített hullámmechanikai elmélet finomítja az energiaszinteket, így a diagram is lényegesen bonyolultabbá válik; ennek egy részletét mutatja a 44-7 ábra. Itt erősen eltúlozva tüntettük fel az energia függését a spin-pálya kölcsönhatástól. A valóságban a $3p_{3/2}$ szint $3p_{1/2}$ szint feletti magassága csak kb. 1/1000-ed része a $3p_{1/2}$ és a $3s_{1/2}$ nívók közötti energiakülönbségnek.

Egy magasabb és egy alacsonyabb energiaállapot között nem valósulhat meg minden átmenet, csak az ún. „megengedett" átmenetek, amelyek bizonyos **kiválasztási szabályoknak** tesznek eleget. Itt arra kell gondolni, hogy amikor az atom két állapot energiakülönbségének megfelelő energiát veszít, akkor fotont bocsát ki, és a foton egységnyi impulzusmomentumot is magával visz.[7]

---

[7] Minden fotonnak $\hbar$ nagyságú impulzusmomentuma van. (Ennek klasszikus analógiája a cirkulárisan polarizált elektromágneses hullám.) A „megengedett" átmeneteket szabályozó kiválasztási szabályok az impulzusmomentum-megmaradás törvényének érvényesülését biztosítják.

KIVÁLASZTÁSI SZABÁLYOK $\Delta \ell = \pm 1$
„megengedett" átmenetek $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$

Itt nem részletezett hatások következtében ritkán előfordulnak a kiválasztási szabályok által „tiltott" átmenetek is, de az impulzusmomentum megmaradásának törvénye azokban is érvényes.

44.7 A hidrogén-atom hullámfüggvényei

A (44-4) hullámegyenlet minden megoldásában szerepel egy kezdetben határozatlan együttható például a legalacsonyabb (1s) állapotra a megoldás alakja:

$$\psi = Ae^{-(r/a)}$$

ahol A tetszés szerinti állandó. Kimutatjuk, hogy a **Bohr-modell** szerinti alapállapothoz tartozó pályasugár: a Bohr-sugár:

A BOHR-SUGÁR $$a \equiv \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0{,}0529 \text{ nm} \qquad \textbf{(44-23)}$$

Azt, a már 43-6 pontban tárgyalt műveletet, amikor az A állandónak megfelelő értéket adunk, **normálisnak** nevezzük. (A hidrogén hullámfüggvényei háromdimenziósak, míg a 43-6. pontban egydimenziós esetet tárgyaltunk.) A ψ fizikai jelentése az, hogy segítségével meghatározható, hogy hol tartózkodik valószínűleg az elektron a maghoz képest (ellentétben a Bohr-elmélettel, amely szerint az elektron *alapállapotban* a magtól pontosan 0,0529 nm távolságra található.) A P **valószínűségsűrűségi függvényt** most is a

$$P = |\psi|^2 = \psi\psi^* \qquad \textbf{(44-24)}$$

összefüggéssel határozzuk meg, ahol ψ komplex függvény is lehet.[8]
A hidrogén 1s alapállapotára a hullámegyenlet megoldása: $\psi = Ae^{-(r/a)}$, ezért

$$P = |\psi|^2 = \psi\psi^* = A^2 e^{-(2r/a)} \qquad \textbf{(44-25)}$$

Annak a **valószínűsége**, hogy az elektront az dV térfogatban találjuk:

A ψ ÁLLAPOTÚ RÉSZECSKE $\mathscr{P}$ MEGTALÁLÁSI VALÓSZÍNŰSÉGE AZ $\int dV$ TÉRFOGATBAN:

$$\mathscr{P} = \int |\psi|^2 dV \qquad \textbf{(44-26)}$$

Nyilvánvaló, hogy annak a $\mathscr{P}$ valószínűsége, hogy az elektront $r = 0$ és $r = \infty$ között *bárhol* megtaláljuk 1. Az alapállapot hullámfüggvénye a mag körül szimmetrikus, ezért a valószínűség nem függ a θ és ϕ koordinátáktól. A dV térfogatelemnek tehát $4\pi r^2$ felületű, dr vastagságú gömbhéjat választhatunk, amellyel:

$$\mathscr{P} = \int_0^\infty A^2 e^{-(2r/a)} 4\pi r^2 dr = 1$$

Az integrál kiszámítása után $4\pi A^2 (a^3/4) = 1$

A-ra megoldva: $A = (\pi a^3)^{-1/2}$

---

[8] A komplex számokban $i = \sqrt{-1}$ szerepel. Egy szám*-gal jelölt komplex konjugáltjában i-t –i helyettesíti; ha $\psi = Ae^{i\phi}$, akkor $\psi^* = Ae^{-i\phi}$. A $\psi\psi^* = A^2 e^{i\phi} e^{-i\phi} = A^2 e^0 = A^2$ szorzat mindig valós szám.

Ezt behelyettesítve az (1s) alapállapot *normált hullámfüggvényére* azt kapjuk, hogy

$$\psi = \left(\pi a^3\right)^{-1/2} e^{-(r/a)} \qquad \textbf{(44-27)}$$

A hidrogén két legalacsonyabb állapotának normált hullámfüggvényei a 44-3. táblázatban találhatók. Az a állandó azonos a hidrogén alapállapotához tartozó Bohr-pályasugárral. Megjegyezzük, hogy az 1s és 2s állapotban a hullámfüggvény nem függ θ-tól és ϕ-tól, azaz ezekben a hullámfüggvény maga körül gömbszimmetrikus.

44-3 táblázat A hidrogénatom normált állapotfüggvényei *

	n	ℓ	m_ℓ	ψ
K – héj	1	0	0	
L – héj	2	0	0	
	2	1	0	
	2	1	+1	
	2	1	−1	

*ahol $a = \varepsilon_{0h}{}^2/\pi m e^2 = 0{,}0529$ nm, a Bohr-rádiusz és i = $\sqrt{-1}$.

Hol van az elektron?

A következő kérdésünk: mi annak a valószínűsége, hogy az alapállapotú hidrogénatomban az elektront a magtól r távolságban leíró, kis Δr környezetben megtaláljuk? Az alapállapot hullámfüggvényének gömbszimmetriája következtében a (44-26) egyenletben szereplő térfogatelem $dV = 4\pi^2 dr$ – az alapállapot hullámfüggvényét megtaláljuk a 44-3 táblázatban; ezért

$$\mathscr{P} = \int_r^{r+\Delta r} \left(\frac{1}{\pi a^3}\right) e^{-(2r/a)} 4\pi r^2 dr.$$

Az integrált nem kell kiszámítanunk, hiszen feltételeztük, hogy r értéke a Δr kis környezetben állandó, így:

$$\mathscr{P} = \left(\frac{4r^2}{a^3}\right) e^{-(2r/a)} \Delta r \qquad \textbf{(44-28)}$$

Ebben az esetben a $P(r)$ *radiális valószínűségsűrűség*:

$$P(r) = \left(\frac{4r^2}{a^3}\right) e^{-(2r/a)} \qquad \textbf{(44-29)}$$

ezért:

$$\mathscr{P} = \int P(r) dr \qquad \textbf{(44-30)}$$

Lényeges, hogy megkülönböztessük a P *valószínűségsűrűség-függvényt* a $P(r)$ *radiális valószínűségsűrűség-függvénytől*. A $P\Delta V$ annak a valószínűsége, hogy az elektront egy kis ΔV térfogatelemben, míg $P(r)\,\Delta r$ annak a valószínűsége, hogy a Δr kis *radiális* környezetben találjuk meg.

44-4 PÉLDA

Határozzuk meg azt a (protontól számított) r távolságot, amelynek környezetében az elektron a legnagyobb valószínűséggel található.

MEGOLDÁS

Az elektron legvalószínűbb tartózkodási helye ott van, ahol a radiális valószínűségsűrűségi-függvénynek maximuma van, tehát olyan r értéknél, amelyre nézve

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{4r^2}{a^3}\right)e^{-(2r/a)}\right] = 0$$

Az állandókat kiküszöbölve: $\frac{d}{dr}\left[r^2 e^{-(2r/a)}\right] = 0$

$$2re^{-(2r/a)} - \left(\frac{2r^2}{a}\right)e^{-(2r/a)} = 0$$

ahonnan: $r = a$

Alapállapotban, tehát ha $n = 1$, a magtól számított legvalószínűbb távolság a Bohr-sugár. Meg kell azonban jegyezni, hogy ez *nincs* teljesen összhangban a Bohr-modellel, amely pontosan megállapítja a pályasugarat, míg a kvantummechanika csak azt mondja meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az elektront a magtól bizonyos távolság környezetében megtaláljuk. Még jobban kitűnik ez a következő példából.

44-5 PÉLDA

Mi a valószínűsége annak, hogy a hidrogén alapállapotában az elektront a magtól az $n = 1$-nek megfelelő Bohr-sugárnál kisebb távolságra találjuk meg?

MEGOLDÁS

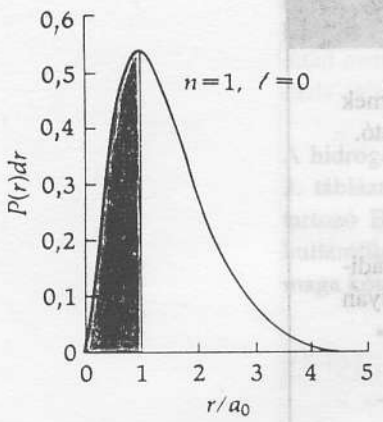
Az elektron megtalálási valószínűségét a (44-30) egyenlettel határozhatjuk meg:

$$\mathcal{P} = \int_0^a P(r)dr$$

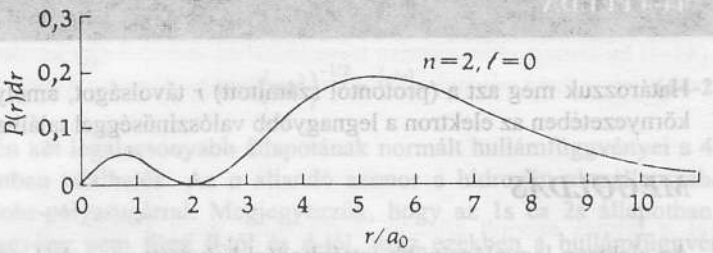
A $P(r)$ értékét a (44-29) egyenletből behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{P} = \left(\frac{4}{a^3}\right)\int_0^a r^2 e^{-(2r/a)}dr = 1 - 5e^{-2} = 0{,}323$$

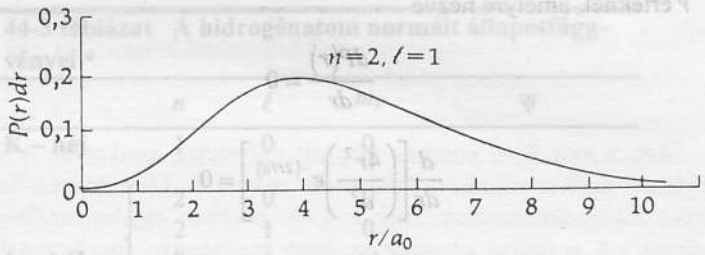
Tehát az a valószínű, hogy elektron az idő egyharmad részében található a Bohr-sugáron belül. A Bohr-modellben az idő egyáltalán *nem* szerepel.



(a) 1*s* állapot ($n = 1$, $\ell = 0$). A beárnyékolt részből látszik, hogy az elektron kb. 32% valószínűséggel tartózkodik a klasszikus Bohr-rádiuszon (a_0) belül (a görbe csúcsa), és kb. 68% a valószínűsége annak, hogy távolabb legyen a magtól.



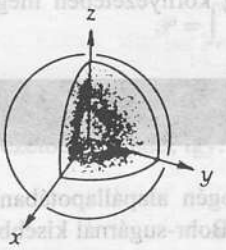
(b) 2*s* állapot ($n = 2$, $\ell = 0$).



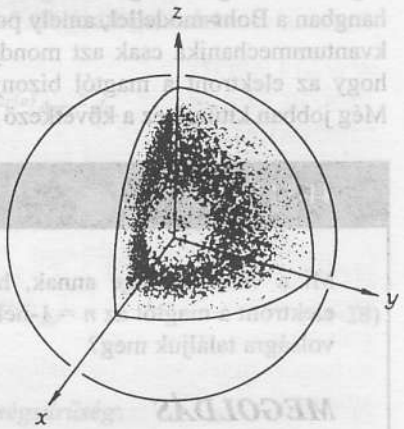
(c) 2*p* állapot ($n = 2$, $\ell = 1$).

44-8 ábra
A hidrogén három legalacsonyabb állapotának $P(r)$ radiális valószínűségsűrűség-függvénye.

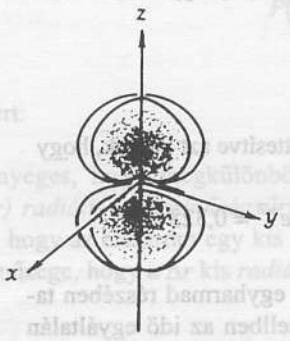
A könnyebb megértés céljából készítettük a 44-8 ábrát, amely az előbbi két példához kapcsolódva a hidrogén 1s alapállapotára mutatja a *P(r)* radiális valószínűségsűrűség-függvény grafikonját. A 44-4 példa eredménye az volt, hogy a görbe maximuma az $n = 1$ Bohr-sugárnál, azaz $r = a_0 = 0{,}0529$ nm-nél van (44-8a ábra). Az árnyékolt rész a görbe alatti terület 32,3%-a; az idő ilyen hányadában van az elektron a maghoz közelebb, mint a Bohr-sugár.



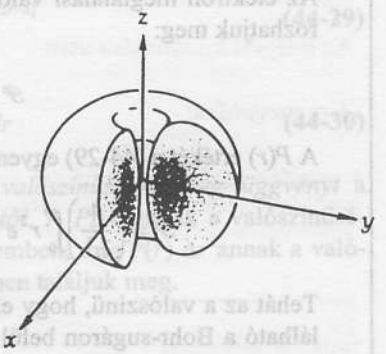
(a) $n = 1$, $\ell = 0$



(b) $n = 2$, $\ell = 0$



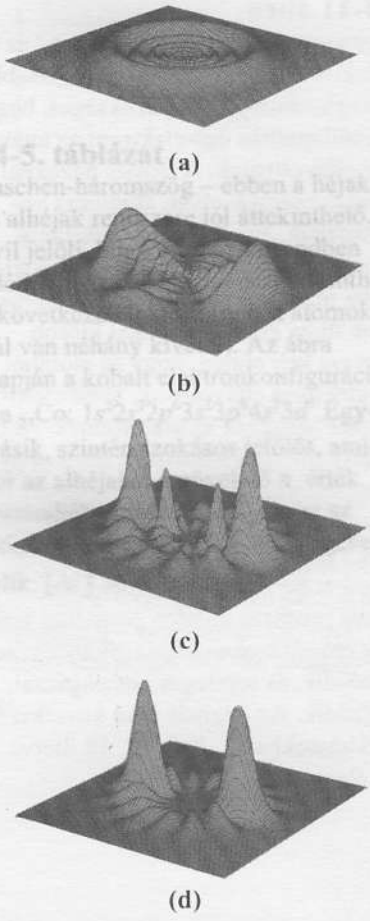
(c) $n = 2$, $\ell = 0$, $m_\ell = \pm 1$



(d) $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 0$

44-9 ábra
A hidrogénatom 1*s*, 2*s* és 3*s* állapotbeli valószínűségsűrűségének egyik szemléltetési módja. Az eloszlás határait bizonyos mértékig önkényesen húztuk meg; annak a valószínűsége, hogy az elektront a felhő határán kívül találjuk meg, kisebb mint 10%. A mag minden esetben a koordinátarendszer origójában van. Mennél sűrűbb a felhő, annál valószínűbb, hogy az elektront ebben a környezetben megtalálhatjuk.

Viszonylag könnyű a hidrogénatom Bohr-modelljének megfelelő, jól meghatározott pályákat ábrázolni, ezzel szemben a kvantummechanikai modellben nemcsak a háromdimenziós képet kell feltüntetni, de az elektron valószínű tartózkodási helyét is. Az ábrázolás egyik módja a 44-9 ábra szerinti, ahol a valószínűségi „felhők" keresztmetszete látható. A felhő sűrűsége arányos a megtalálás valószínűségével. A felhők határának megrajzolása meglehetősen önkényes – úgy van meghúzva, hogy az elektron azon kívül kb. 10%-nál kisebb valószínűséggel tartózkodik. Ne keverjük össze a valószínűségsűrűség ábrázolását a *radiális* valószínűség sűrűségével. Nézzük például a 44-9a ábrát. A felhő itt középen a legsűrűbb, ennek ellenére az elektron itt kevés ideig tartózkodik, mivel ha r értéke kicsi, akkor a hozzá tartozó térfogatelem kisebb mint nagy r értéknél. A 0,0529 nm-en kapott nagy valószínűség a nagy térfogati valószínűség és a nagyméretű térfogatelem kombinációjának az eredménye. Az ábrázolás egy másik módját a 44-10 ábrán mutatjuk. A felhősűrűséget a mag síkjában vett keresztmetszeten megjelenő dombok magassága képviseli.



44-10 ábra
A hidrogénatom egymástól különböző impulzusmomentummal bíró, erősen gerjesztett ($n = 8$) állapotainak valószínűségeloszlása. A csomóvonalak koncentrikus körök, vagy olyan egyenes vonalak, amelyek a magon mennek keresztül. A valódi háromdimenziós eloszlás úgy képzelhető el, hogy a rajzot a magon átmenő vízszintes vonal körül megforgatjuk. A csomófelületek ekkor gömbhéjak vagy kúpok lesznek. Ezekben a gerjesztett állapotokban a hidrogénatom sokkal nagyobb, mint a legalacsonyabb energiájú állapotokban. A magtól a rajz széléig mérhető távolság 380-szorosa az $n = 1$-hez tartozó Bohr-sugárnak.

44.8 A Pauli-féle kizárási elv és az elemek periódusos rendszere

Ebben a pontban azt tárgyaljuk, hogy hogyan oszlanak meg az elektronok a lehetséges energiaállapotok között többelektronos atomokban. Az elektronok lehetséges legalacsonyabb energiaállapotához kötődnek többek között az elemek kémiai és elektromos tulajdonságai. A Mengyelejev által 1870-ben a kémiai tulajdonságok alapján megalkotott periódusos rendszert ezért fizikai alapon tudjuk értelmezni.

Építsük fel az atomokat elektronok hozzáadogatásával (és természetesen az elektromos semlegesség megőrzése céljából, vigyünk be megfelelő számú pozitív töltést is). Kezdjük az $1s^1$, azaz alapállapotú hidrogénnel; a felső index itt az elektronok számát jelenti az 1s állapotban. Az elektronok – miközben bevisszük őket az atomba – a legalacsonyabb energiaállapotot igyekeznek elfoglalni. A hélium képződésekor például a két elektron az $n = 1$, $\ell = 0$ állapotban van, ellentett spinnel. A hélium alapállapotát $1s^2$-vel jelöljük. A lítiumra áttérve, nincs már több $n = 1$ állapotunk, ezért a harmadik elektron az $n = 2$ héjra kerül. A lítium alapállapotának jele $1s^22s^1$. További elektronok hozzáadásával a 44-4. táblázatban feltüntetett alapállapotokhoz jutunk.

Kitűnik, hogy az elektronok nem mindig a legalacsonyabb energiaállapotokat keresik, hiszen akkor mind 1s állapotban lennének. A 44-2. táblázatból láthatjuk, hogy $n = 1$ állapotban csak két elektron, $n = 2$ állapotban pedig nyolc elektron lehet. A 44-1 példában már kiderítettük, hogy az $n = 1$ állapotban (a K-héjon) csak két lehetséges állapot van, az $n = 2$ állapotban (L-héjon) csak nyolc. Wolfgang Pauli 1925-ben állapította meg a lehetséges energiaállapotok és az alapállapot konfigurációja közötti kapcsolatot, mely szerint:

A PAULI-FÉLE KIZÁRÁSI ELV: **Egy atomban nem lehet két olyan elektron, amelynek mind a négy – n, ℓ, m_ℓ, m_s vagy n, ℓ, j, m_j – kvantumszáma azonos.**

Ezt a szabályt később sikerült *levezetni* a kvantumelmélet egy finomított változata alapján, de a maga idején igen nagy segítséget jelentett az atomok tulajdonságainak és a periódusos rendszer szabályainak megértésében. A következő példa mutatja, hogy hogyan kell az egyes héjakon az állapotok számát megállapítani.

44-4 táblázat Az elemek konfigurációja alapállapotban

Elem	Elektronszám	Alapállapot*	*n* értéke
H	1	$1s^1$	*K* héj
He	2	$1s^2$	($n = 1$)
Li	3	$1s^2 2s^1$	
Be	4	$1s^2 2s^2$	
B	5	$1s^2 2s^2 2p^1$	
C	6	$1s^2 2s^2 2p^2$	*L* héj
N	7	$1s^2 2s^2 2p^3$	($n = 2$)
O	8	$1s^2 2s^2 2p^4$	
F	9	$1s^2 2s^2 2p^5$	
Ne	10	$1s^2 2s^2 2p^6$	
Na	11	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$	
Mg	12	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$	*M* héj
Al	13	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$	($n = 3$)

* A belső, lezárt héjakra gyakran rövidített jelölést használnak, pl. a lítium jele [He] $2s^1$, az alumíniumé [Ne] $3s^2 3p^1$. A zárójelben található szimbólum a lezárt héjat jelöli.

44-6 PÉLDA

Határozzuk meg az $n = 3$ héj elektronjainak a számát.

MEGOLDÁS

Éppen úgy, mint a 44-1 példában soroljuk fel $n = 3$ esetében a kvantumállapotokat

Az $\ell = 2$ esetében m_l *öt* értéket vehet fel, *páronként* m_s ellentett értékével, azaz összesen *tíz* $\ell = 2$, ill. $3d^{10}$ állapot van:

Az $\ell = 1$ esetben *három* m_ℓ van, *páronként* m_s ellentett értékével, azaz összesen *hat* $\ell = 1$, ill. $3p^6$ állapot van:

Az $\ell = 0$ esetben csak *egy* m_l érték lehet, itt is *két* ellentett m_s értékkel; összesen *két* $\ell = 0$, ill. $3s^2$ állapot:

A betöltött $n = 3$ héj konfigurációja tehát: $3s^2 3p^6 3d^{10}$ – ez összesen *tizennyolc* állapot.

A 44-3 táblázat alapján úgy tűnhet, mintha egyszerűen először be kellene tölteni az $n = 2$ héjat, majd az $n = 3$ héjat, és így tovább folyamatosan. A helyzet nem ilyen egyszerű, mivel az energia értéke nem csak n-től hanem ℓ-től is függ, (és természetesen az *L-S*-csatolástól is). Egyes magasabb héjak energiaállapotai kezdik átfedni a belsőkéit, így megtörik azt a szabályt, hogy sorban töltsük be az egyes elektronállapotokat. Ez világosan látszik a 44-5 táblázatból. A kvantummechanikával ezeket a kivételeket is meg tudjuk magyarázni. *Az atom alapállapotú konfigurációjában az elektronok a lehetséges legalacsonyabb energiaállapotban helyezkednek el, de anélkül, hogy megsértenék a Pauli-féle kizárási elvet.*

Betöltött héjban $\mathbf{S} = 0$, $\mathbf{L} = 0$ és $\mathbf{J} = 0$; a betöltött héjakban tehát az elektronok kombinációjának eredménye a zérus impulzusmomentum és a zérus mágneses momentum. Az atom kémiai tulajdonságait elsősorban a kül-

44-5 táblázat Héjak

Röntgen jelölés	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*
n	1	2	3	4	5	6
SUBSHELLS	1*s*	2*s* 2*p*	3*s* 3*p* 3*d*	4*s* 4*p* 4*d* 4*f*	5*s* 5*p* 5*d* 5*f* 5*g*	6*s* 6*p* 6*d* 6*f* 6*g* 6*h* ...

44-5. táblázat

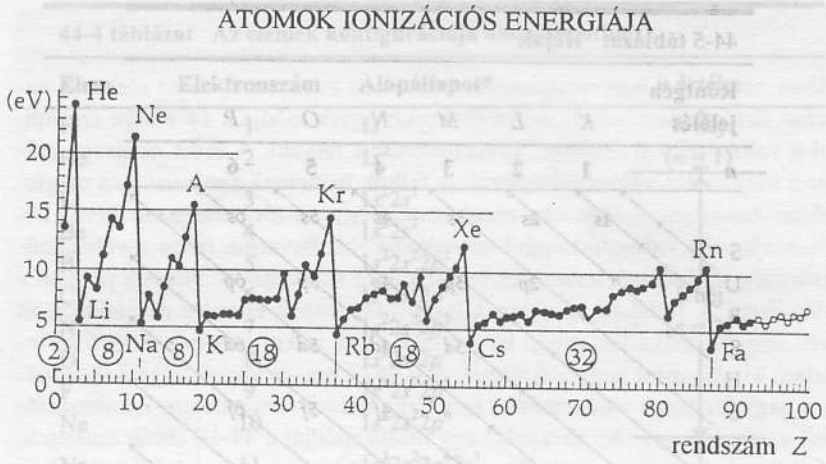
Paschen-háromszög – ebben a héjak és alhéjak rendszere jól áttekinthető. A nyíl jelöli, hogy milyen sorrendben adódik hozzá az előző energiaszinthez a következő elektron (nehéz atomoknál van néhány kivétel). Az ábra alapján a kobalt elektronkonfigurációja $_{27}$Co: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^7$. Egy másik, szintén szokásos jelölés, amikor az alhéjakat a növekvő n érték sorrendjében tüntetik fel – azaz az előző példában a két utolsót megcserélik: [Ar] $3d^7 4s^2$.

ső elektronjai határozzák meg.[9] Emiatt hasonló a kémiai jellege azoknak az atomoknak, amelyeknél a konfiguráció „betöltött héj plusz egy elektron", mivel a kémiai tulajdonságok elsősorban a belső héjaktól távol elhelyezkedő, lazán kötött „plusz" elektrontól származnak. Ezek az atomok külső elektronjukat könnyen átadják más atomoknak, és +1 töltésű ionokat képeznek, míg a másik atomból –1 töltésű ion lesz. Ezt a csoportot az igen reakcióképes *alkálifémek* (lítium, nátrium, kálium, rubídium, cézium és francium) alkotják. A *halogéneket* a „betöltött héj mínusz egy elektron" csoport alkotja (fluor, klór, bróm, jód és asztácium) – ezek hajlamosak arra, hogy egy extra elektron felvételével betöltötté tegyék az elektronhéjukat. Az atomok összekapcsolódásának, a kémiai kötésnek egyik típusa az *ionos kötés*. A nátriumklorid úgy jön létre, hogy a nátriumatom átadja 3*s* elektronját a klóratomnak, amely ezzel feltölti a 3*p* alhéjat, és Na^+Cl^- képződik. A két iont a kölcsönös Coulomb-vonzás tartja össze. Léteznek más típusú kémiai kötések; ilyen az, ahol az atomokhoz közösen tartozik egy vagy több elektron: a *kovalens* kötésben két vagy több atom megosztozik – többé vagy kevésbé egyenlő arányban – egy vagy több elektronon. A H_2 hidrogénmolekula példája a tipikusan kovalens kötéssel összekapcsolt molekulának. Utoljára említjük a nemesgázokat (hélium, argon, kripton, xenon és radon), amelyek egyáltalán nem mutatnak hajlandóságot arra, hogy felvegyenek vagy elveszítsenek egy elektront, ezért normális körülmények között nem képeznek más atomokkal molekulákat.[10] (lásd a 44-11 ábrát)

[9] Egyes fizikusok fölényesen azt mondják vegyész barátaiknak, hogy az egész kémia benne van a Schrödinger-egyenletben, ami persze túlzás, bár van némi valóságalapja. A vegyész válasza általában az, hogy a Schrödinger-egyenlet kizárólag csak az egy elektront tartalmazó atomok esetében oldható meg pontosan! Máskor közelítő módszereket kell alkalmazni. Az igazság az, hogy minden tudományban (így a kémiában is) közelítésekkel élnek – abszolút bizonyosságot csak egyes, nem természettudományos területeken kívánnak meg.

[10] A „nemes" gáz elnevezés abból adódik, hogy ezek az anyagok „elzárkóznak" attól, hogy más, kevésbé előkelő atomokkal egyesüljenek!

44-11 ábra
Egy atom ionizációs energiája az az (elektronvoltban kifejezett) legkisebb energia, amely ahhoz szükséges, hogy alapállapotban egy elektront az atomból eltávolítsunk. A nemes gázoknál látható csúcsok olyan atomokra vonatkoznak, amelyek elektronalhéja teljes. A következő hozzáadott elektron a magtól távolabbi, eggyel magasabb héjra kerül. Itt sokkal kisebb energia kell ahhoz, hogy az atomból az elektront eltávolítsuk; ebbe a csoportba tartoznak az alkálifémek. Ahogyan egyre több elektront (és természetesen megfelelő számú protont) adunk az atomhoz, az elektronok kötése egyre erősebb lesz; addig nő, míg az adott héj (alhéj) megtelik. A periódusos rendszer minden periódusa tehát egy erősen reakcióképes alkálifémmel kezdődik, és semleges nemesgázzal végződik. Az egymás után következő periódusokban 2, 8, 8, 18, 18 illetve 32 elem van.

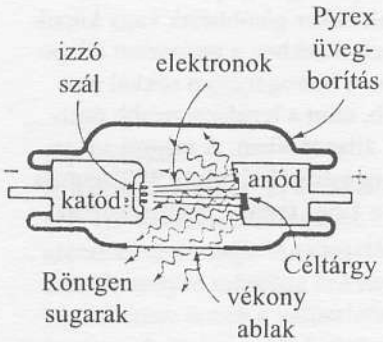


44.9 A röntgensugarak

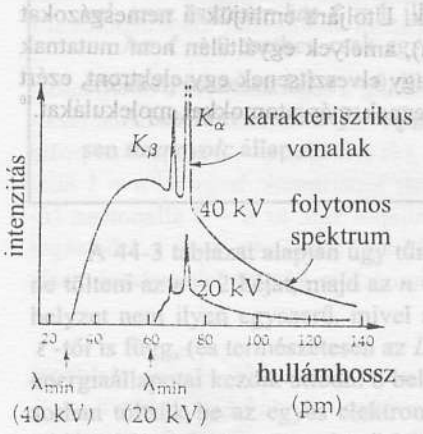
Amikor nagyenergiájú elektronok fém-céltárgyba ütköznek, **röntgensugárzás** keletkezik, azaz olyan fotonok jönnek létre, amelyek hullámhossza nagyon rövid: 0,001 és 10 nm között van. A 44-12 ábrán modern röntgencső vázlatos rajza látható, tipikus röntgenspektrummal. Kétféle folyamat játszódik le, amikor az elektron a céltárgyba ütközik. Az elektronok gyors lefékeződése következtében a **folytonos** hullámhossz-tartományba eső **fékezési sugárzás** jön létre. (Eredeti német nevén, melyet az angolnyelvű irodalom is átvett: Bremsstrahlung.) Ennek jól meghatározott rövidhullámhosszú határa van λ_{min}, amely a V csőfeszültségtől, tehát ez elektronok K kinetikus energiájától függ. Az energiamegmaradás törvénye alapján:

$$[\,K_{elektron}\,]=[\text{ maximális fotonenergia }]$$

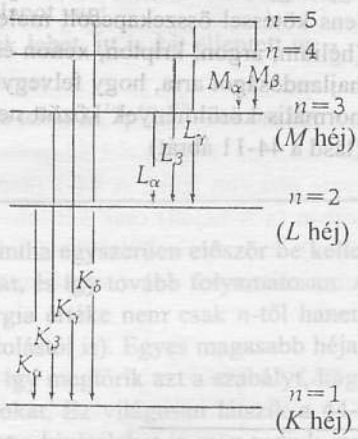
$$Ve = hf_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \qquad (44\text{-}31)$$



a) röntgencső



b) fém-céltárgy röntgenszínképe kétféle gyorsító feszültségnél



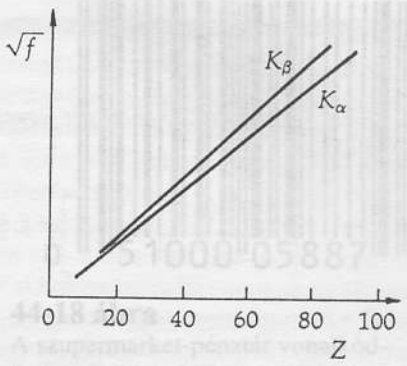
c) a spektrum egyes sorozatait arról a héjról nevezik el, amelyre az elektron a hiány betöltésére visszaugrik

44-12 ábra
Röntgensugarak

Látható, hogy a λ_{min} határhullámhossz nem függ az anód anyagától, csak a gyorsító feszültségtől.

A **karakterisztikus vonalas spektrum** éles vonalak alakjában rakódik rá a folytonos sugárzásra. A vonalak akkor jönnek létre, amikor a beérkező elektronok energiája elég ahhoz, hogy egy belső héjról kilökjön egy elektront, és ezáltal elektronhiányt idézzen elő a K, L vagy más héjakon. Egy külső elektron ide ugorhat, és betöltheti a hiányt, miközben az energiakülönbség a kisugárzott foton energiájaként jelenik meg. Amikor az elektron a L-héjról kerül a K-héjra a K_α-vonal keletkezik, amikor az M-héjról a K-héjra, akkor a K_β és így tovább. Van tehát L-sorozat, M-sorozat, stb.; a sorozatok neve arra a héjra utal, amelyikre az elektron átugrik, és nem arra, ahonnan érkezik. A vonalak „karakterisztikusak", tehát jellemzők a céltárgyat képező elemre. A K-elektronok közel vannak a maghoz, ezért nagyon érzékenyek a Ze magtöltésre. A magasabb héjak elektronjai kisebb magtöltést „éreznek" a belső héjak semlegesítő hatása miatt: a töltés egy része „árnyékolva" van.

1913-ban H. G. J. Moseley angol fizikus (1887-1915) vizsgálta a karakterisztikus röntgenspektrumot; különböző elemeket használva céltárgyként. A K_α-vonalak frekvenciájának f négyzetgyökét ábrázolta a Z *rendszám* függvényében, és érdekes módon egyenes vonalat kapott (44-13 ábra). (A rendszámot Moseley jellemzőbbnek tartotta az atomra, mint az atomsúlyt.) A *Moseley-diagramból* kiderült, hogy néhány elemet fel kell cserélni a szomszédjával, ha azt akarjuk, hogy rá essenek az egyenes vonalra. A magyarázat az, hogy a periódusos rendszert – még Moseley munkája előtt – az *atomsúlyok* alapján állították össze, így egyes elemek az őket alkotó izotópok különböző gyakorisága miatt (45.2 pont) az atomsúlyon alapuló sorrendben felcserélődtek példának hozható fel a nikkel, amely a táblázatban a kobalt elé került. A Moseley-diagramból vált világossá, hogy a kobalt rendszáma a kisebb, azaz az elemek elrendezéséhez a periódikus táblázatban a Z rendszám a mérvadó. A cserével néhány más eltérés is eltűnt, így a sorrend jobban megfelelt az ismert kémiai tulajdonságoknak. A táblázat hézagait új elemek felfedezésével sikerült betölteni, ez igazolta a K_α-vonalakból levont következtetéseket. Moseley egyszerű módszere alapján sikerült megállapítani az 57 – 71 rendszám között elhelyezkedő ritkaföldfémek helyét, illetve sorrendjét; ami a hasonló kémiai tulajdonságaik miatt addig nem sikerült.



44-13 ábra
A Moseley-diagrammon a frekvencia négyzetgyökét, $\sqrt{f}$ -et ábrázoljuk a Z rendszám függvényében; az ábrán a céltárgyelem K-sorozatának két vonalát tüntettük fel. Később Z helyett $(Z-1)$ függvényében készítették el a diagrammot – ami szintén egyenes vonal [Lásd még a 44C-38 feladatot is.]



44-14 ábra
Harry G. J. Moseley (1887-1915). Kitüntetéssel végezte el az oxfordi egyetemet, közvetlenül ezután Manchesterben, Rutherford laboratóriumában kezdett el dolgozni – ugyanabban az évben, amelyikben Bohr az atommodelljét megalkotta. Moseley munkája azért volt különösen értékes, mert ez volt az első kísérleti kapcsolat a kémikusok periódusos rendszere és a fizikusok új atommodellje között. Moseley találékony kísérletező volt, és rendkívül keményen dolgozott. Egy példa erre: amikor azt a problémát akarta megoldani, hogy mennyire nyelődnek el a röntgensugarak a vákuumcső falában, lyukat fúrt az üvegen keresztül, és ökörbélből készített hártyával fedte be. A cső sokszor összetört, de mégis működött! Moseley Ausztráliába utazott, hogy ott a British Association for the Advancement of Science konferenciáján kutatásainak eredményeiről beszámoljon. Megérkezése napján, 1914-ben, üzent hadat Anglia Németországnak. Hazatérve, néhány héttel később, felajánlotta szolgálatait az angol kormánynak. Dolgozhatott volna kutató laboratóriumban is, de ő inkább a műszaki csapatoknál vállalt aktív szolgálatot. Csodálatos karrierje derékbatört: 28 éves korában Gallipolinál elesett.

44.10 A lézer

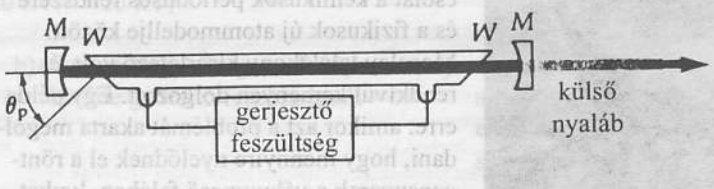
A **lézer** (laser) elnevezés a „**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation" (fény-erősítés a sugárzás gerjesztett emissziójával) angol kifejezés kezdőbetűiből keletkezett. Einstein már 1916-ban megsejtette ezt a hatást (és publikálta a rákövetkező évben). Vegyünk egy atomot, amely képes az E_2 gerjesztett állapotból az E_1 alacsonyabb állapotba átmenni, miközben $hf = (E_2 - E_1)$ energiájú fotont emittál. Tételezzük fel, hogy amikor az atom még a gerjesztett állapotban van, akkor elhalad mellette egy pontosan hf energiájú foton. Ez a foton indukálhatja, hogy az atom gerjesztettsége megszünjön olymódon, hogy az éppen hf energiájú fotont bocsát ki. A leglényegesebb ebben a folyamatban, hogy most már *két azonos energiájú* fotonunk van, amely az eredeti fotonnal *azonos irányba* halad – *azonos polarizációval.* Láncreakció jöhet létre, melynek során a két foton újabb gerjesztett atomokat késztet emisszióra. A fény *koherens* (38.2 pont), és igen nagy intenzitású.

A jelenség kulcsa az, hogy több atom legyen E_2 állapotban, mint E_1-ben. Az E_1 állapotú atom rezonancia folytán elnyeli a hf energiájú fotont és E_2 állapotba kerül. Így a foton eltűnik, ami nem kívánatos. Termikus egyensúlyban lévő atomok esetén az egyes energiaállapotokban található atomok N számát a Boltzmann-eloszlásfüggvény határozza meg: $N = Ce^{-E/kT}$, ahol E az állapot energiája, k a Boltzmann-állandó és T az abszolút hőmérséklet (C állandó). Két állapothoz tartozó betöltési számok (populációk) aránya normális esetben:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} \qquad (44\text{-}32)$$

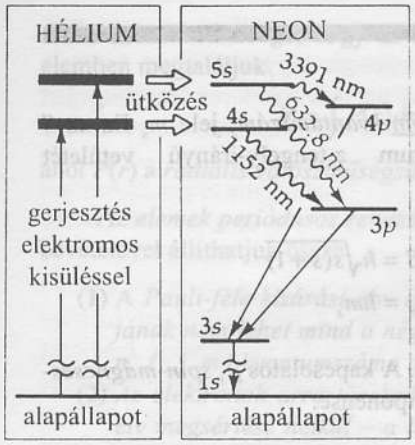
A *magasabb* energiaállapotok populációja *kisebb*. Fel kell borítanunk a normális viszonyokat, **populációinverziót** kell létrehoznunk, azért, hogy az indukált emisszióval bekövetkező fotonképződés gyakoribb legyen, mint a fotonok abszorpciója. A populáció inverziót csak akkor tudjuk fenntartani, ha az atomokat folytonosan „pumpáljuk" a gerjesztett állapotba; ez természetesen *metastabil*[11] állapot, amely elősegíti, hogy a fordított eloszlás hosszabb ideig fennmaradjon. A pumpálás többféleképpen történhet: intenzív villanófénnyel (pulzáló rubinlézer), elektromos kisüléssel (argonlézer), kémiai reakcióval (CO_2-lézer), vagy atomi ütközésekkel (He-Ne-lézer). A 44-15 ábrán látható nagyon elterjedt hélium-neon-lézer a gázalakú elemek keverékét tartalmazza. A pumpálás a gázon keresztül történő elektromos kisüléssel valósul meg; a pumpálás magasabb szintre gerjeszti a héliumatomokat, ez a két szint viszont nagyon közel van a neon két gerjesztett metastabil állapotához (44-16 ábra). A gerjesztett héliumatomok rugalmatlanul ütköznek az alapállapotú neonatomokkal, és átadják ezeknek belső energiájukat. Most a neon kerül a metastabil $5s$ és $4s$ szintre – ez populációinverziót jelent az alacsonyabb $4p$

[11] Az atom gerjesztett állapotának átlagos élettartama durván 10^{-8} s. Bizonyos metastabil állapotok átlagosan $\approx 10^{-3}$ s-ig is megmaradnak bomlás nélkül, mert az alacsonyabb állapotba való átmenet „tiltott" (44.6. pont, 7. sz. lábjegyzet)

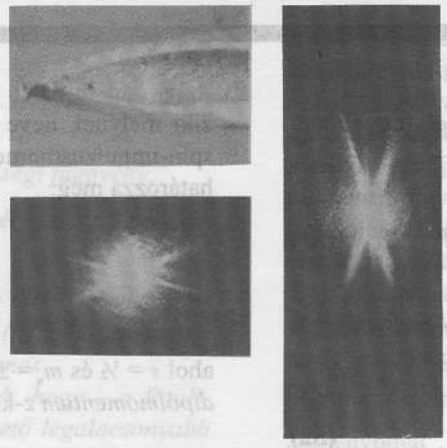


44-15 ábra
He-Ne-gázlézer. A két végén a W-ablakok a Brewster-szög alatt dőlnek, azért, hogy a nemkívánatos polarizációjú sugarakat a lézeren kívülre verjék vissza.* A másik polarizációjú komponens majdnem teljesen (100%-ban) áthatol az ablakokon. (Abban az esetben, ha az ablakok a nyalábra merőlegesek lennének, a sugárzásnak igen nagy – mintegy 4%-a veszne el minden egyes reflexiókor.) Az M homorú tükrök mintegy százszor verik vissza a sugarakat mindkét irányban, miközben a jobb oldali tükör minden alkalommal egy kis hányadot (≈ 1%-ot) átenged; ebből lesz a kilépő nyaláb.

(*Ez nem jelenti azt, hogy a lézer elveszíti az energia felét. Egyszeri áthaladás után a csövön keresztül a Brewster-reflexió eltávolítja ezt a komponenst, így erre nem fordítódik már energia a csőben.)



44-16 ábra
A He-Ne-gázlézer fő energiaszintjei.



44-17 ábra
A bal felső ábra egy injekciós tű erősen nagyított fényképe – a végén kis horog látszik. Lézerfénnyel megvilágítva a tűhegy az alatta lévő diffrakciós képet adta. Egy hibátlan tű a jobb oldali diffrakciós mintát eredményezi – ez lehetővé teszi a gyártási folyamat közben a gyors, automatikus minőségellenőrzést.



44-18 ábra
A szupermarket-pénztár vonalkódleolvasóján He-Ne-lézer keskeny nyalábja tapogatja le az árucikket azonosító UPC (Universal Product Code = általános árukód) mintáját. Fotocella azonosítja a világos és sötét vonalak refelxióját, és az információt számítógépbe továbbítja. Amennyiben a szám megtalálható a kép memóriájában, a leolvasó sípoló jelet ad, kinyomtatja az árura vonatkozó információt, az árat, majd a tételt bevezeti az üzlet leltári nyilvántartásába. Egyes üzletek naponta elemzik a készletek állását, azért, hogy a piaci helyzetről tájékoztatást kapjanak. Így jöttek rá például, hogy a cukorkák fogyasztása hirtelen megnőtt, ha az árut a pénztár közelében helyezték el, vagy pedig amikor a taco-chip árát leszállították, a babszósz forgalma is nőtt. Követni lehet így az újsághírdetések, vagy az üzletben elhelyezett feliratok hatásosságát is. A bemutatott vonalkódon az első zérus élelmiszerüzletet jelöl, a következő öt volnal jelenti a gyártó céget (Campbell soup Co.) az azután következő öt az áru specifikációját: (10 3/4 oz. tömegű, mérsékelt sótartalmú paradicsomleves-sűrítmény). Az utolsó számjegy adja a súlyt vagy térfogatot.

és $3p$ állapotokhoz viszonyítva. (Az $5s \rightarrow 4s$ átmenet tiltott.) Az indukált emisszióval a fő átalakulás a két infravörös (1152 és 3391nm) és a közismert vörös (632,8 nm) vonalat eredményezi. Két *felső* szint közötti indukált emisszió nagyon előnyös: a p-állapot azonnal átmegy 3s-állapotba, és fennmarad a populációinverzió. Ha az alacsonyabb állapot alapállapot volna, akkor gyorsan betöltődne, mivel ennek legnagyobb a betöltöttsége. Ezen felül könnyen idézhetünk elő populációinverziót anélkül, hogy a nagy populációjú alapállapot félig-betöltöttségét kellene megőrizni.

A lézertechnika csodálatos fejlődésének vagyunk tanúi, és képtelenség lenne a teljesség igényével felsorolni a most használatos legintenzívebb, legkisebb méretű vagy az egészen különleges célokra alkalmazott lézerfajtákat. Lézerekkel tapogatják le a Holdat az árapály-jelenség tanulmányozásához, lézerrel végeznek retina-ponthegesztést, készítenek TV- és hi-fi-lemezeket; képesek bitek tízmilliárdjait tárolni (ez – egyenként egy Encyclopaedia Brittanica-kötet méretű – 250 darab könyv tartalmának felel meg). Vezérelnek lézerrel esztergagépet és rakétát, használják sebészeti kés helyett, és azonnal be is hegesztik vele a vágott sebet; készítenek hologramot, kis deutérium-trícium-gömb felrobbantásával fúziós reakciót indítanak el, megváltoztatják a géneket, száloptika segítségével egyszerre többszáz telefon és TV-összeköttetést létesítenek, és még rengeteg más, különféle célra tudják hasznosítani a lézereket.

Összefoglalás

Az *időtől független Schrödinger-egyenlet* (egydimenziós) alakja:

$$\left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\Psi = E\Psi\,, \qquad \textbf{(S1)}$$

ahol E a hidrogénatom teljes energiája, U pedig a Coulomb-erőtől származó potenciális energia:

$$U=-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\frac{e^2}{r} \qquad \textbf{(S2)}$$

A gömbszimmetria miatt kényelmesebb a háromdimenziós hullámegyenletet az r, θ, ϕ gömbi polárkoordinátákkal felírni. Az a követelmény, hogy a megoldás egyértékű legyen, és $r \to \infty$ esetén zérushoz tartson, csak olyan megoldásokat „enged meg", amelyekre az n, ℓ, m_ℓ és m_s *négy kvantumszám* jellemző.
Az n *főkvantumszám* az E_n teljes energiával kapcsolatos:

A HIDROGÉNATOM MEGENGEDETT ENERGIÁI:

$$E_n=-\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\text{ eV}}{n^2} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

A *mellék* (orbitális) *kvantumszám*, ℓ, az elektron mag körüli pályájára vonatkoztatott L impulzusmomentumához tartozik:

$$L=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

A *mágneses kvatumszám*, m_ℓ az impulzusmomentum z-tengely menti vetületét határozza meg:

$$L_z=\hbar m_\ell$$

Az impulzusmomentumhoz, illetve annak z-vetületéhez μ *mágneses dipólmomentum* tartozik:

$$\mu=-\left(\frac{e}{2m}\right)L$$

és

$$\mu_z=-\left(\frac{e}{2m}\right)L_z=-\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)m_\ell$$

Az $e\hbar/2m$ állandó neve *Bohr-magneton*; értéke:

BOHR-MAGNETON:

$$\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)=9{,}27\times10^{-24}\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

Az elektron viselkedése hasonlít egy, a saját tengelye körül forgó testéhez – ehhez újabb kvantumszám tartozik; melynek neve *spin-kvantumszám*, jele m_s Ez az S spin-impulzusmomentum z-tengely-irányú vetületét határozza meg:

$$S=\hbar\sqrt{s(s+1)}$$
$$S_z=\hbar m_s$$

ahol $s = ½$ és $m_s = \pm½$. A kapcsolatos μ_s *spin-mágneses-dipólmomentum* z-komponense:

$$(\mu_s)_z=m_s\left(\frac{e\hbar}{m}\right)$$

Az atomi elektron *kvantumállapota* tehát az n, ℓ, m_ℓ és m_s *kvantumszám*-négyessel adható meg:

$n = 1,2,3,\ldots$	főkvantumszám,
$\ell = 0,1,2,\ldots(n-1)$	orbitális kvantumszám,
$m_\ell = 0, \pm1, \pm2,\ldots\pm l$	mágneses kvantumszám,
$m_s = \pm½$	spinkvantumszám.

A pályamenti mozgáshoz és a spinhez kapcsolódó mágneses dipólusmomentum kölcsönhatásából ered a *spin-pálya* vagy más nével **L-S**-csatolás. Ez a csatolás kissé módosítja az energianívókat; így áll elő a hidrogénszínkép *finomszerkezete*. További következménye ennek az, hogy az elektron állapotának leírásához egy másik, az előzővel egyenértékű kvantumszám-négyest is használhatunk:

$n = 1,2,3,\ldots$	főkvantumszám,
$\ell = 0,1,2,\ldots(n-1)$	orbitális kvantumszám,
$j = \pm½$	belső-kvantumszám,
$m_j = \pm j, \pm(j-1), \pm(j-2)$	j-hez tartozó mágneses kvantumszám.

A 44-3 táblázat (1044. oldal) a hidrogénatom néhány hullámfüggvényét sorolja fel, amelyeket a

$$\int|\psi|^2\,dV=1$$

összefüggéssel *normálunk*; radiális $\psi(r)$ függvényre $dV = 4\pi r^2\,dr$

A P *valószínűségsűrűségi függvény*:

$$P=|\psi|^2$$

Annak a $\mathscr{P}$ valószínűsége, hogy az elektront a dV *térfogatelemben* találjuk:

$$\mathscr{P}=\int P\,dV$$

Annak a valószínűsége, hogy az elektront a *dr radiális* elemben megtaláljuk

$$\mathcal{P} = \int P(r)dr$$

ahol $P(r)$ a *radiális valószínűségsűrűségi függvény.*

Az *elemek periódusos rendszerét* két elv figyelembevételével állíthatjuk össze:

(1) A *Pauli-féle kizárási elv: egy atom két elektronjának nem lehet mind a négy (n, ℓ, m_ℓ, m_s, vagy n, ℓ, j, m_j) kvantumszáma azonos:*

(2) *Az elektronok arra törekednek, hogy – a Pauli-elv megsértése nélkül – a lehető legalacsonyabb energiaszinteket foglalják el.*

Spektroszkópiai jelölés. Ezt a $4d_{5/2}$ példán mutatjuk be. A betű előtt álló szám az *n* főkvantumszámnak, az index *j*-nek felel meg, maga a betű pedig ℓ értékének a következő kulcs szerint: ℓ = 0, 1, 2, 3, 4 és 5; megfelelnek az = *s, p, d, f, g* és *h* betűknek.

Még egy példa: $1s^2 2s^2 2p^1$ *alapállapoti konfigurációt* jelöl, ahol a felső index adott *n*, ℓ állapothoz tartozó elektronok számát jelenti.

Röntgensugarak. Amikor nagyenergiájú elektronok céltárgyba ütköznek, az atom belső héjain elektronhiányt idéznek elő. Ha a hiányt külső elektronok töltik be, akkor röntgensugárzás keletkezik. Az *éles vonalakból álló karakterisztikus spektrum* jelölésére az első szintnek megfelelő betűt használják, ahová az átmenet történik, így jön létre a *K*-sorozat, *L*-sorozat, stb. A *folytonos* vagy *fékezési sugárzás* a becsapódó elektronok lefékeződése következtében áll elő, és a *rövidhullámhosszú* oldalon éles határa van. Az ennek megfelelő λ_{min} hullámhossz akkor emittálódik, amikor az elektron *K* kinetikus energiája teljes egészében egy foton $hf_{max} = hc/\lambda_{min}$ energiájává alakul át. Moseley bizonyította be, hogy az atom röntgenszínképe az elemre jellemző „ujjlenyomat". Amikor a $\sqrt{f_{k\alpha}}$ mennyiséget a [Z – 1] (és nem az atomsúly) függvényében ábrázolta, egyenes vonalat kapott; ez a *Moseley-diagram.*

A *lézerekben* egy gerjesztett metastabil állapotból alacsonyabb állapotba történő indukált átmenettel nagyintenzitású, koherens fénynyalábot lehet előállítani. „Pumpálással" idézik elő a két állapot *inverz* populációját, így érik el, hogy az indukált átmenet a gerjesztett magasabb állapotból az alacsonyabb állapotba gyakoribb lesz, mint az alacsonyabb állapot fotonabszorpciója.

Kérdések

1. Miért feltétlenül $[L]^{-3/2}$ dimenziójú a három dimenzióban elhelyezkedő rendszert leíró ψ hullámfüggvény?
2. Mi annak az oka, hogy az atom hullámmechanikai modellje alapján az elektron helye és sebessége bizonytalan, míg az impulzusmomentum értéke pontosan megadható?
3. Miért független ϕ-től a 44-3 táblázatban felsorolt hullámfüggvények mindegyikére $|\psi|^2$ vagy $(\psi\psi^*)$ értéke?
4. Minek tekinthető a hullámmechanikai modell alapján a hidrogén-atom elektronja: ponttöltésnek, töltött gömbnek vagy a mag körüli elkent töltésnek, esetleg másnak?
5. Vizsgáljuk meg Bohr feltételezéseit, amelyek alapján a hidrogén-atom modelljét levezette. Ezek közül melyek egyeztethetők össze a klasszikus elmélettel, és melyek nem?
6. Egy dolgozatban a következő (hibás) megállapítást találtuk: a nátrium konfigurációja alapállapotban $1s^2 2s^2 2p^6 2d^1$. Miért hibás ez?
7. Mi történne, ha a 44-2 ábrán látható Stern-Gerlach-kísérletben (semleges atomok helyett) egyszeresen ionizált ezüstatomokkal végeznénk a kísérletet? Ez a kísérlet megmutatja, hogyan áll be az elektronok mágneses momentuma a térben a mágneses térerősség hatására; miért nem elektronnyalábbal végezték a kísérletet (semleges ezüstatomok helyett)? Miért kell inhomogén mágneses tér és nem homogén?
8. Gondoljunk a Schrödinger-egyenletre; mit jelent a „megengedett megoldás" kifejezés?
9. Fogalmazzuk meg, miben áll a különbség a hidrogénatomnak a Schrödinger-elméletből, illetve a Bohr-elméletből kialakított képe között?
10. Az elektron spin-impulzusmomentumának és a mágneses momentumának vektorirányítása miért ellentétes?
11. A háromdimenziós térben egy vektor leírásához három paraméter – például három derékszögű komponens – megadása szükséges. Hogyan lehetséges, hogy a hidrogénatomban az elektron impulzusmomentum-vektorának leírásához két kvantumszám is elég?
12. Adjuk meg a következő fogalmak definícióját, és határozzuk meg, hogy mi a különbség közöttük: (a) *hullámfüggvény*, (b) *valószínűségsűrűség-függvény*, (c) *radiális valószínűségsűrűség-függvény.*
13. Magyarázzuk meg, hogy miért nehezebb eltávolítani egy elektront az argonatomból ($Z = 18$), mint a káliumatomból ($Z = 19$) annak ellenére, hogy az utóbbinak több pozitív töltése van?
14. Miért szükségszerű, hogy alapállapotban a héliumatom két elektronjának a spinje ellentétes legyen?
15. 5 eV szükséges ahhoz, hogy a káliumatomból egy elektront eltávolítsunk. Vajon egy második elektron eltávolításához több, kevesebb vagy kb. ugyanannyi energia kell?
16. Az első öt alkálifém-atom közül a lítiumnak a legnagyobb az ionizációs energiája (5,39 eV). Az osz-

lopban lefelé haladva ez az érték folyamatosan csökken; a legkisebb a céziumé (3,89 eV). A két atom közül melyik reakcióképesebb kémiailag és miért? Az atomszerkezet ismeretében magyarázzuk meg a monoton csökkenést a Z-érték növekedésével.

Feladatok

44.3 Elektronspin és finomszerkezet
44.4 Spin-pálya-csatolás

44A-1 Az m_ℓ mágneses kvantumszám hatását tanulmányozhatjuk, ha az atomot mágneses térbe helyezzük (energianívók Zeeman-felhasadása). Hány nívóra válik szét az $\ell = 3$ állapot? Vázlatosan ábrázoljuk a μ mágneses momentum orientációit a mágneses térerősség $+z$ tengellyel párhuzamos irányához képest.

44B-2 A kvantummechanika törvényei minden testre – kicsinyre és nagyra – vonatkoznak. Határozzuk meg a Földnek a Nap körüli pályájára vonatkoztatott kvantumszámát. Mekkora a (joule-ban kifejezett) energiaváltozás, ha a Föld áttér egy szomszédos megengedett állapotba?

44B-3 Mágneses térben az elektron μ_s mágneses momentuma a (z-tengellyel párhuzamos) térirányhoz képest „paralel" vagy „antiparalel" állást foglalhat el. A valóságban a térirány és μ_s által bezárt θ szög véges (nem 0°), azért mert a vektort a z-irányra kell vetíteni. Határozzuk meg a két θ-értéket.

44B-4 A következő állandók gyakran szerepelnek az elméleti atomfizikában:

Bohr-rádiusz: $a_o \equiv \dfrac{\varepsilon_o h^2}{\pi m_e e^2}$

Compton-hullámhossz: $\lambda_C \equiv \dfrac{h}{m_e c}$

Klasszikus elektronsugár: $r_e \equiv \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e c^2}$

Finomszerkezeti állandó: $\alpha \equiv \dfrac{e^2}{2\varepsilon_o hc}$

Számítsuk ki SI-rendszerbeli egységekben ezek numerikus értékét.

44B-5 A hidrogénatomban az elektron teljes **J** impulzusmomentumának értékei $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$. A **J**-nek a z-tengely irányába eső vetülete $J_z = m_j\hbar$ értékű lehet. Határozzuk meg **J** és a $+z$-tengely által bezárt szög megengedett értékeit $J = (5/2)$-re.

44B-6 A hidrogén elektronjának **L** pályaimpulzusmomentuma $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$. **L** z-irányú lehetséges vetületei $L_z = m_\ell\hbar$. Határozzuk meg **L** és a $+z$-tengely megengedett szögeinek nagyságát $\ell = 2$-re.

17. A röntgenspektrumban az L-sorozatnak vagy a K-sorozatnak a hullámhossza nagyobb?

18. Egyes kvantummechanikai vektorok megengedett térbeli orientációját *térbeli kvantálásnak* nevezzük. Mit kvantálunk ebben az esetben?

44.5 A hidrogénatom kvantumállapotai
44.6 A hidrogén energiaszint-diagramja
44.7 A hidrogénatom hullámfüggvényei

44B-7 Soroljuk fel a 44-2 példában vázolt módon $n = 4$-re a hidrogénatom összes kvantumállapotát.

44A-8 A hidrogénatom $\ell = 3$ állapotaiban melyek n, m_ℓ és m_s lehetséges értékei?

44B-9 A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. **21 cm-es sugárzás** keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogénfelhők detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakat, ezért az előbb említett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n-nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az $n = 1$ alapállapotban az elektron és a proton spinje *paralel* vagy *antiparalel* lehet; a két állapot energiája kissé különböző. a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak? b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége? c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számítsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

44B-10 A hidrogén alapállapotára – a (44-26) egyenletben alkalmazott közelítés felhasználásával – becsüljük meg annak valószínűségét, hogy az elektron a magtól $(1 \pm 0{,}01)$ a távolságtartományban található. Az a a Bohr-rádiusz ($n = 1$).

44B-11 A hidrogén alapállapotára – a (44-28) egyenletben alkalmazott közelítés felhasználásával – becsüljük meg a két valószínűség hányadosát, ha (1) az elektron a $\Delta r = (1 \pm 0{,}01)\ a$ távolságra, és (2) $\Delta r = (4 \pm 0{,}01)\ a$ távolságra található a magtól, ahol a a Bohr-rádiusz ($n = 1$)

44.8 A Pauli-féle kizárási elv és az elemek periódusos rendszere

44A-12 Azonosítsuk a következő elemeket elektronkonfigurációjuk alapján: $1s^2 2s^2 2p^1$ és [Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^6$.

44B-13 A 44-4. táblázat segítségével írjuk fel annak az elemnek alapállapoti konfigurációját, amelynek „utolsó" elektronja $4p^2$ állapotú. Melyik ez az elem?

44B-14 Egy atom M-héja betöltött, és nincsenek további elektronjai. (a) Azonosítsuk az atomot. (b) Hány elektron van az egyes alhéjakban?

44B-15 Bizonyítsuk be, hogy az n-edik héjhoz tartozó kvantumállapotok száma n^2.

44B-16 Az atomok mérete nagyjából azonos. (a) Bizonyításul becsüljük meg az alumíniumatom átmérőjét, amelynek moltömege 27 g/mol és sűrűsége 2,70 g/cm^3 és az uránatomét, melynek moltömege 238 g/mol, sűrűsége 18,9 g/cm^3. (b) Mit fejez ki ez az eredmény a belső héjak elektronjai hullámfüggvényeivel kapcsolatban, ha a sorban egyre nagyobb atomtömegű atomok felé haladunk? (Vigyázzunk: a moltérfogat durván D^3N_A-val arányos, ahol D az atomátmérő és N_A az Avogadro-féle szám.)

44.9 Röntgensugarak
44.10 A lézer

44A-17 Az ezüst K_α-vonalának hullámhossza 56,3 pm. Mekkora az a minimális gyorsító feszültség, amelynél – ezüst anódot alkalmazva – ez a vonal éppen megjelenik a spektrumban?

44A-18 Számítsuk ki a 45 kV-on üzemelő röntgencső fékezési sugárzásának rövidhullámhosszú határát.

44B-19 Egy, a Bohr-modell szerint elképzelt, meglehetősen nagy rendszámú atomban hidrogénszerű pályán K-héjhoz tartozó elektron mozog a Ze magtöltés, és az elektronoktól eredő $(-)e$ elektrontöltéstől származó Coulomb-erő hatására. Alkalmazzuk erre az esetre a 43. fejezetben található (43-12) egyenletet, és vezessük le a következő összefüggést a K_α-röntgenvonal f frekvenciája és a Z atomszám között (Moseley-törvény). (A belső elektronok árnyékoló hatását nem vesszük figyelembe):

$$\sqrt{f} = \left[\frac{e^2}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{3m}{32h^3}}\right]Z$$

44B-20 A röntgencsövet, mellyel a 44-12b ábra grafikonját kaptuk, 15,5 kV feszültségen járatjuk. Rajzoljuk fel szabadkézzel a röntgenspektrumot, és húzzuk meg a λ_{min} határt.

44B-21 Tipikus foton halad He-Ne-lézer tengelye mentén – az indukált emisszió erősítési tényezője ~0,7%/méterenként. Átlagosan hány foton keletkezik, ha az eredeti foton a cső 1 m-es hosszán 200-szor halad végig?

44B-22 Nagyteljesítményű impulzusüzemű lézer 4ns idő alatt 30 kJ energiát ad le. (a) Mekkora egy impulzusban a teljesítmény? (b) Milyen nagy az egy impulzus alatt megtett út fizikai hossza? (c) Milyen nagy az abszorbeáló céltárgy által felvett teljes energia?

44B-23 Impulzusüzemű rubinlézer 694,4 nm-es fényt bocsát ki. Az impulzus tartama 14 ps, energiája 3 J. Számítsuk ki (a) az impulzus térbeli fizikai hosszát, (b) az impulzus fotonjainak számát. (c) A körkeresztmetszetű nyaláb átmérője 0,6 cm; hány foton van a nyaláb egy köbmilliméterében?

44B-24 Szemsebészetben alkalmazott Nd:YAG-lézer 1 ns-os, 3 mJ energiájú impulzusokkal működik – a fényt a retinán 30 μm átmérőjű foltra koncentrálják. (a) Számítsuk ki (SI-egységben) a retina egységnyi felületére jutó teljesítményt. [Ennek a mennyiségnek a neve (spektrális) *besugárzásintenzitás*.] (b) Mennyi energia esik egy molekuláris méretű, kb. 0,6 nm átmérőjű foltra?

Vegyes feladatok

44C-25 A Stern-Gerlach-kísérletben M tömegű, μ mágneses momentumú ezüstatomok nyalábja v legvalószínűbb sebességgel tesz meg x távolságot dB/dz gradiensű mágneses térben. A mágneses teret elhagyva a nyaláb két részének távolsága d. Az adatok felhasználásával vezessünk le összefüggést d-re. Gondoljunk arra, hogy a kvantummechanika szerint a μ vektor a tér irányával θ szöget zár be (lásd a 44B-3 feladatot).

44C-26 Klasszikusan gondolkozva, tekintsük az elektront állandó m_e tömegű, r_e sugarú, tengelye körül forgó gömbnek (l. a 44B-4 feladatot). Tudjuk, hogy a spin-impulzus-nyomaték $s_z = \frac{1}{2}\hbar$. Ennek alapján számítsuk ki az egyenlítőn egy pont sebességét.

44C-27 Egy elképzelt egyelektronos atom 160 nm, 120 nm, 100 nm 90 nm és 85 nm hosszúságú sugárzást bocsát ki; a sorozathatár 80 nm. (a) Annak a feltételezésnek az alapján, hogy a sugárzás a legalacsonyabb energiájú (n = 1) állapotba történő átmenetből származik, számítsuk ki az atom három legalacsonyabb szintjének az energiáját. (b) Bizonyítsuk be, hogy az energiaszintek nem írhatók le az $E_n = E_1/n^2$ összefüggéssel. (c) Számítsuk ki az n = 3 állapotból az n = 2 állapotba történő átmenetnek megfelelő sugárzás hullámhosszát.

44C-28 Egy elektron a (klasszikus) Bohr-féle legkisebb sugarú körpályán kering. A proton az origóban nyugalomban van; a körpálya az xy-síkban fekszik. A mozgás olyan irányú, hogy az elektron impulzusmomentuma $-z$-irányú. Az elektronhoz rögzített koordináta-rendszerben a proton mozog körpályán az elektron körül. Számítsuk ki a proton körmozgásából az elektron helyén keletkező mágneses tér **B** nagyságát és irányát. (b) Mikor lesz az $U = -\mu_s \mathbf{B}$ mágneses potenciális energia pozitív (feltételezve, hogy $U \equiv 0$ a 90°-os helyzetre), $j = \ell + ½$ vagy $j = \ell - ½$ esetben? (Útmutatás: gondoljunk arra, hogy a spin-mágnesesmomentum iránya hogyan áll az impulzusmomentum irányához képest. Vegyük figyelembe, hogy az elektron töltése negatív.) (c) Számítsuk ki (elektronvoltban) a két közeli dublettállapot energiakülönbségét.

44C-29 Egy elem alapállapotú konfigurációja $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. (a) Melyik ez az elem? (b) Megadjuk ennek az elemnek néhány gerjesztett állapotú konfigurációját; állapítsuk meg, a 7. sz. lábjegyzetben előírt *kiválasztási szabályok* betartásával, melyikből lehetséges direkt átmenet az alapállapotba: [ ]$3p^6 4p^1$, [ ] $3p^5 4s^2$, [ ] $3p^6 4d^1$ és [ ] $3p^5 4p^2$?

44C-30 0,3 T erősségű mágneses térbe helyezett alapállapotú hidrogénatomra (a) számítsuk ki (elektronvoltban) a tér és az elektronspin $E = -\mu \cdot \mathbf{B}$ mágneses kölcsönhatási energiáját. (b) Milyen nagy a spinmágneses momentum paralel és antiparalel állása közötti energiakülönbség? (c) Számítsuk ki annak a beérkező fotonnak a hullámhosszát, amely „rezonancia"-átmenetet indukál a paralel állásból antiparalel állásba (l. a 44B-3 feladatot).

44C-31 Legyen a hidrogén gerjesztett állapotban. (a) Mutassuk ki, hogy a $3p \rightarrow 2s$ átmenetnél két nagyon közeli vonalból álló fimonszerkezet áll elő. (b) Hány vonalból áll a finomszerkezet a $4d \rightarrow 3p$ átmenet esetén? Adjuk meg a két szint közötti összes tiltott átmenetet. (Nézzük meg előbb a 44-4 ábrát és a 7. sz. lábjegyzetben közölt *kiválasztási szabályokat.*)

44C-32 A hidrogénben az elektronnak a magtól számított átlagos vagy közepes távolsága $r_{átl} = \int_0^\infty rP(r)dr$. Számítsuk ki a hidrogén alapállapotára, az n = 1-hez tartozó Bohr-rádiusszal kifejezett $r_{átl}$ értékét. (Figyelmesen tanulmányozzuk ehhez a G-III. függelék 1. egyenletét.)

44C-33 Bizonyítsuk be, hogy a 44-3 táblázatban közölt, $n = 2$, $\ell = 0$ és $m_\ell = 0$ állapothoz tartozó hullámfüggvény normált, azaz $\int |\Psi|^2 dV = 1$, ahol $dV = 4\pi r^2 dr$.

44C-34 Alapállapotú hidrogénre, $r = a$ esetében számítsuk ki (a) ψ, (b) $|\psi|^2$ és (c) $P(r)$ értékét. Mi ezeknek a fizikai tartalma?

44C-35 Alapállapotú hidrogén hullámfüggvénye független a θ polárszögtől és a ϕ azimutszögtől. Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy a 44-3 táblázatban az 1s alapállapot hullámfüggvénye kielégíti a (44-4) Schrödinger-egyenletet.

44-36 Mi a valószínűsége annak, hogy az $1s$-állapotú hidrogén elektronját a magtól 2,50 a-nál nagyobb távolságra találjuk meg?

44C-37 A hidrogén $2p$ állapotát a 44-3 táblázatban található $\Psi_{2,1,0}$, $\Psi_{2,1,+1}$, $\Psi_{2,1,-1}$ függvény írja le. Mindhárom függvényhez tartozó energiaállapot azonos. Tételezzük fel, hogy az elektron az idő egyharmadában írható le mindegyik hullámfüggvénnyel. Az energiaállapot P valószínűségsűrűsége ekkor:

$$|\psi_{2,1}|^2 = \frac{1}{3}|\psi_{2,1,0}|^2 + \frac{1}{3}|\psi_{2,1,+1}|^2 + \frac{1}{3}|\psi_{2,1,-1}|^2$$

(a) Számítsuk ki $|\Psi_{2,1}|^2$-et; vegyük figyelembe, hogy az eredmény a gömbszimmetria miatt független θ-tól és ϕ-től. (b) Határozzuk meg a $P(r)$ radiális valószínűségsűrűségi függvényt. (c) Számítsuk ki a $2p$ állapotban a legvalószínűbb radiális távolságot, felhasználva a $dP(r)/dr = 0$ feltételt. Az eredményt a-val, az n = 1 állapothoz tartozó Bohr-rádiusszal fejezzük ki.

44C-38 Helyesnek fogadva el a Bohr-féle atommodellt, bizonyítsuk be, hogy a Moseley-diagram *egyenes* akkor is, ha nem vesszük figyelembe az árnyékoló hatást: ha $\sqrt{f}$ -et akár Z, akár $(Z - 1)$ vagy $(Z - k)$ függvényében rajzoljuk fel, akkor minden esetben egyenes vonalat kapunk (k = állandó).

44C-39 (a) Határozzuk meg a („pumpálás nélküli") normális populációarányt a neon két gerjesztett állapotára (N_{5s}/N_{4s}), melyektől a He-Ne-lézer 632,8 nm-es vörös fénye származik. A lézerben a gáz hőmérséklete 27°C. (b) A fénykibocsátáshoz populációinverzióra van szükség, tehát arra, hogy $N_2/N_1 > ½$ legyen. Milyen hőmérsékleten lesz az (egyensúlyi állapotban lévő) gázra $N_2/N_1 > ½$?

44C-40 Folyamatos üzemű nagyteljesítményű CO_2-lézer 10,6 μm hullámhosszú fénye 200 kW teljesítményű (ez néhány másodperc alatt át tud lyukasztani egy kb. 2,5 cm vastagságú acéllemezt). (a) Határozzuk meg a keresztmetszet egy négyzetmilliméterére jutó teljesítményt, ha a nyaláb átmérője 4 mm. Bocsássuk át a nyalábot 6 cm fókusztávolságú ideális lencsén. A 39-12 ábrán látható a képsíkban létrejövő gyűrűs diffrakciós kép, amelynek központi foltjában koncentrálódik az energia 84%-a. Számítsuk ki (b) a központi folt átmérőjét és (c) ennek egy négyzetmilliméterére jutó átlagos teljesítményt.

44C-41 A populációinverziót néha szokás *negatív abszolút hőmérsékletű* állapotnak is nevezni. (a) Fejtsük ki, hogy mit jelent ez a kifejezés. (b) Mennyi lesz az ekvivalens negatív hőmérséklet kelvinben a N_2/N_1 = 1,09 arányú inverz populációra 514,5 nm-es fényt sugárzó argon-lézer esetében.

42A-21 128 MeV
42B-23 A válasz adott.
42B-25 A válasz adott.
42C-27 A válasz adott.
42C-29 A válasz adott.
42C-31 38,3 m
42C-33 A válasz adott.
42C-35 A válasz adott.
42C-37 b) $2{,}27 \times 10^{-13}$ J/m^3
42C-39 A válasz adott.
42C-41 288 keV
42C-43 A válasz adott.
42C-45 A válasz adott.
42C-47 A válasz adott.
42C-49 A válasz adott.

XLIII. Fejezet

43A-1 A válasz adott.
43B-3 A válasz adott.
43B-5 A válasz adott.
43B-7 A válasz adott.
43A-9 $1/9{,}12 \times 10^4$
43A-11 0,173 nm
43A-13 10,2 fm
43A-15 $\frac{1}{4}$
43B-17 a) 0,158 nm b) 47,2°
43B-19 5,71 V
43B-21 A válasz adott.
43B-23 $1{,}03 \times 10^{-3}$
43B-25 956 pm
43B-27 a) $5{,}86 \times 10^{-30}$ m b) 5,79 cm
43B-29 A válasz adott.
43C-31 a) $r_n = (4\pi\varepsilon_o\hbar^2 / me^2)n^2$
b) $E_n = -(6{,}80\text{ eV})/n^2$ c) 243 nm, 182 nm
43C-33 A válasz adott.
43C-35 A válasz adott.
43C-37 A válasz adott.

XLIV. Fejezet

44A-1 7
44B-3 54,7° és 125,3°
44B-5 32,3°, 59,5°, 80,3°, 99,7°, 120,5°, 147,7°
44B-7 32 állapot
44B-9 b) $9{,}42 \times 10^{-25}$ J c) $3{,}34 \times 10^{-49}$ J
44B-11 25,2
44B-13 Ge; $[Zn]3d^{10}4s^24p^2$
44B-15 A válasz adott.
44A-17 22,0 kV
44B-19 A válasz adott.
44B-21 3,04 foton
44B-23 a) 4,20 mm b) $4{,}53 \times 10^{33}$
c) $3{,}81 \times 10^{31}$
44C-25 $d = (\mu\cos\theta)(dB/dz)(x/v)^2(1/M)$
44C-27 a) $E_1 = -15{,}5$ eV, $E_2 = -7{,}75$ eV, $E_3 = -5{,}16$ eV
c) 479 nm
44C-29 a)Kálium b) [ ]$3p^64p^1$,[ ]$3p^54p^2$
44C-31 b) 3; $4d_{5/2} - 3p_{1/2}$
44C-33 A válasz adott.
44C-35 A válasz adott.
44C-37 a) $(1/96\pi a^5)r^2e^{-r/a}$
b) $(1/24a^5)r^4e^{-r/a}$;$4a$
44C-39 a) $1{,}18 \times 10^{-33}$ b) 32 800 K
44C-41 b) -325 000 K

XLV. Fejezet

45A-1 13,7
45A-3 5,68
45A-7 27,9 perc
45B-9 1 curie
45B-11 $1{,}78t_o$
45B-13 0,565 cm
45B-15 $1{,}71 \times 10^{14}$ (!)
45B-17 A válasz adott.
45B-19 1,37 MeV
45B-21 A válasz adott.
45A-23 38,8 keV
45B-25 a) 0,144 MeV b) 0,288 MeV
45C-27 3785 év
45C-29 a) 86 s; $8{,}1 \times 10^{-3}$ s^{-1}
45C-31 A válasz adott.
45C-33 1,61 W
45C-35 A válasz adott.
45C-37 A válasz adott.
45C-39 a) 0,931 MeV, 5,49 MeV, és 12,86 MeV
b) 24,7 MeV c) 27,7 MeV
45C-41 A válasz adott.
45C-43 0,247 GeV mindkét részecske esetén
45C-45 7,8 cm

XLV. FEJEZET

ATOMMAGFIZIKA

Az atomrombolásból nyert energia silány dolog. Bárki aki arra számít, hogy az atomok átalakítása energiaforrás lehet, csak álmokat kerget.

ERNEST RUTHERFORD, 1933
(öt évvel azelőtt, hogy Hahn és Strassman német fizikusok véletlenül felfedezték a maghasadást)

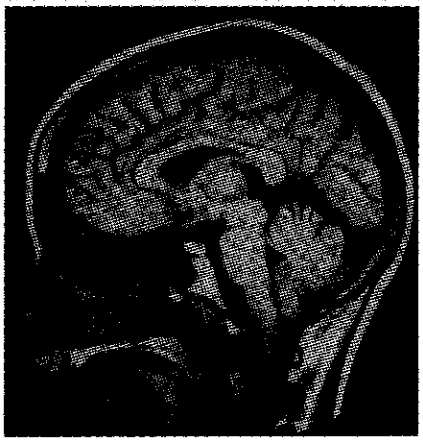
Nézzük az $E = mc^2$ egyenletet. Hitlernek, Sztálinnak és Rooseveltnek csak halvány sejtése volt arról, hogy mit is jelent. Mégis ezen egyszerű egyenlet oly elmélet szülötte, amely szépségében vetekszik egy Mozart koncertoval, hosszabb távon hasznosabb az emberiség számára, mint a tőzsde, és forradalmibb a kommunista pártnál. És ez az elmélet, a relativitás elmélete, egy furcsa kis matematikus agyában fogant meg, akit kirúgtak Németországból, mert a Hazát irányító gyakorlatias gondolkodású emberek nem bírták a zsidókat. Ha Hitler megértette volna e képletet, talán nem vesztette volna el a háborút.

MARTIN GARDNER *Order and Surprise*
(Prometheus Book, 1983. p. 299)

45.1 Bevezetés

A következőkben az atommag tulajdonságait és viselkedését tárgyaljuk. Az erről szóló tapasztalatok nagyjából egy évszázad alatt gyűltek össze, de az utóbbi ötven évben ez a folyamat hihetetlen mértékben felgyorsult. Az emberiség történelmében nem volt még egy olyan korszak, amelyben a fizikának ennyire nagy és egyben aggasztó hatása lett volna a világ alakulására.

Az 1930-as években úgy gondolták, hogy az atommagot alkotó neutronokhoz és protonokhoz hozzávéve az elektronokat és fotonokat, a teljes világegyetemet fel tudjuk építeni ezekből az építőkövekből. A második világháború utáni években a nagyenergiájú gyorsítókkal kapott új eredmények nyomán sok új részecskét fedeztek fel – manapság mintegy 200 az úgynevezett elemi részek és antirészecskék száma. A ma fizikusainak egyik legfontosabb célkitűzése az, hogy olyan elméletet alkossanak, amely más jelenségekkel együtt egységes egészként tárgyalja a részecskék sokféleségét is. Ebben a fejezetben az atommagok szerkezetét és viselkedését, a radioaktivitást, a magreakciókat és az atomenergiát tárgyaljuk; majd befejezésül szólunk az elemi részecskékről is.



45-1 ábra
Emberi fej keresztmetszetének mágneses rezonanciás leképezéssel alkotta képe (*magnetic resonance imaging*, MRI)*.A proton spinje ugyanakkora, mint az elektroné: ½ħ, ezért a mágneses momentuma a külső mágneses tér irányához képest kétféle, kvantált orientációt vehet fel; irányulhat „felfelé" vagy „lefelé". A két állapot energiája alig különbözik; normális esetben a proton az alacsonyabb energiájú állapotban van. Pörgettyűhatás következtében a mágneses momentum *f* frekvenciával precesszál a mágneses tér iránya körül (44-3 ábra). Ha olyan rövid impulzust kapcsolunk be, amelyben az elektromágneses tér szintén *f* frekvenciával váltakozik, akkor rezonanciaátmenet következik be a felső állapotba. Ez a gerjesztett állapot átmegy az alacsonyabb állapotba, és a „spinugrás" kölsőleg is észlelhető. A folyamatban az a legérdekesebb, hogy az *f* frekvencia érzékenyen függ a proton környezetének mágneses terétől, melyet az ott lévő elektronok és magok határoznak meg. Különböző kémiai vegyületekben a hidrogénatomok rezonanciafrekvenciái kissé különböznek egymástól, így meg tudják különböztetni az egyes szerves vegyületeket. Az adatokat számítógéppel dolgozzák fel, így kapható meg az emberi test egyes részeinek keresztmetszeti képe, amelyen világosan különválnak a szervek és a lágy szövetek. A leképezés technikája hasonló a komputer tomográfiához (*computer tomography*, CT), amely röntgensugárzással működik. Az MRI előnye, hogy olyan részleteket is megmutat, amelyek röntgensugárzással nem vehetők észre, segítségével különbséget tudunk tenni az egészséges és beteg szövetek között. A technika roncsolásmentes, és nincs olyan káros fiziológiai hatása, mint a röntgensugárzásnak. [Ajánlott irodalom. (a) MRI technikához: Ian L. Pykett, „NMR Imaging in Medicine", *Scientific American* **246**. p. 78. (May 1982). (b) Komputer tomográfiához: Margaret Stautberg Greenwood, „X-ray CT-Scan Analogy", *The Physics Teacher* **23**. p. 94. (Feb. 1985)]

* Ezt korábban mágneses mag rezonanciának (*nuclear magnetic resonance*, NMR) nevezték, azonban az emberek idegenkedtek az atommag (*nuclear*) szótól, ezért a nevet megváltoztatták.

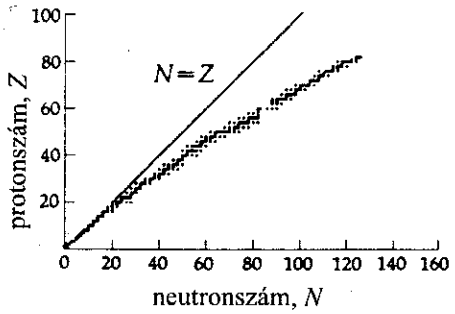
45.2 Az atommag leírása

Az atommag protonokból és neutronokból áll; ezek közös neve *nukleon*. A protonokból és neutronokból álló összekapcsolódott egységek neve *nuklid*. A protonnak ugyanolyan nagyságú, de pozitív töltése van, mint az elektronnak: $1{,}602 \times 10^{-19}$ C, tömege pedig $1{,}673 \times 10^{-27}$ kg. A neutronnak nincs töltése, tömege $1{,}675 \times 10^{-27}$ kg. A neutron és a proton sugara kb. ugyanakkora 10^{-15} m = 1 fm (*femtométer*); mindkettő spinje ½ħ. Az elemeket a Z **rendszám**, azaz a magban lévő protonok száma jellemzi. Az N **neutronszám** a magban található neutronok száma. Az elemek protonjainak a száma állandó; az izotópok az elemek olyan változatai, amelyek a neutronszámban különböznek. Az oxigénnek például nyolc protonja van, de a természetben előforduló három izotópja, amelyeknek 99,785%-ában nyolc, 0,038%-ában kilenc és 0,204%-ában tíz neutronja van. Az protonok és neutronok számának összege az A **tömegszám**:

TÖMEGSZÁM $$A = Z + N \qquad \textbf{(45-1)}$$

A kilenc neutront tartalmazó oxigénizotóp jelölése ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$. A felső index az atom A tömegszáma, az alsó index a Z rendszám, az általános szimbólum tehát ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$. A felső jelet gyakran elhagyjuk, mivel mind a betű, mint az alsó jel az elemet egyértelműen azonosítja. A három természetes oxigénizotóp jele tehát: ${}^{16}\mathrm{O}$, ${}^{17}\mathrm{O}$ és ${}^{18}\mathrm{O}$.

A magot rövid hatótávolságú nagyon erős vonzóerő tartja össze, ennek neve *magerő*. A magerő a protonra és a neutronra egyformán hat. A 45-2 ábrán a természetben található „stabil" izotópokat kis négyzetekkel jelöltük. Kis Z-érték esetén a stabil izotópokban a protonok és a neutronok száma durván azonos ($N = Z$). Z növekedésével nő a Coulomb-erő, ezért érthető, hogy a stabilitás fenntartásához több neutron kell (ezek ugyanis csak vonzó erőt fej-



45-2 ábra
A természetben előforduló izotópok. A fekete négyzetek teljesen stabil (nem radiaktív) izotópokat jelölnek, a színesek pedig olyan radioaktív izotópokat, amelyeknek a felezési ideje 10^5 évnél nagyobb [Kivétel a ${}^{14}\mathrm{C}$ (5730 év) és a ${}^{226}\mathrm{Ra}$ (1600 év)]

tenek ki. A $Z = 82$ felett nincsenek teljesen stabil atommagok – nyilvánvaló, hogy itt a neutronok nem képesek ellensúlyozni a nagyon nagy Coulomb-taszítást. Az egyes elemek természetes izotópjainak a száma nagyon különböző. Az ónnak ($Z = 50$) tíz izotópja van, míg az aranynak ($Z = 79$) csak egy. A technéciumot ($Z = 43$) és a prométiumot ($Z = 61$) nem találták meg a természetben; minden mesterségesen előállított izotópjuk felezési ideje rövid.

Könnyen belátható, hogy a magerőnek erősnek kell lennie; az alábbi példa azt illusztrálja, hogy a gravitációs erő túlságosan gyenge ahhoz, hogy a Coulomb-taszítást ellensúlyozza.

45-1 PÉLDA

Számítsuk ki két proton között ható Coulomb-féle taszítóerő és a gravitációs vonzóerő hányadosát.

MEGOLDÁS

Coulomb-taszítás **Gravitációs erő**

$$F_c = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{r^2} \qquad F_G = G\frac{m_p^{\,2}}{r^2}$$

A két erő hányadosa:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G}\left(\frac{e}{m_p}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{9\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}}\right]\left[\frac{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{1{,}673\times10^{-27}\,\mathrm{kg}}\right]^2 = 1{,}24\times10^{36}$$

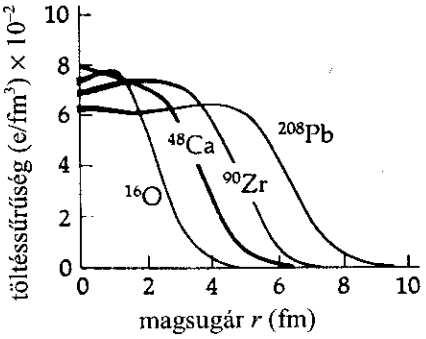
Annak alapján, hogy a magok sűrűsége nagyjából egyenlő, arra lehet következtetni, hogy a vonzó magerők kis hatótávolságúak. Ellenkező esetben, ha a magerők hatása nagy távolságra terjedne ki és nemcsak a legközelebbi szomszédokra, a tömegszám növekedésével a magok egyre inkább összehúzódnának, és sűrűségük egyre nőne. Nagyenergiájú elektronokkal végzett szórási kísérletek azt mutatták, hogy a magok közelítőleg gömbalakúak, és sugaruk kb. azonos méretű:

AZ ATOMMAG R SUGARA: $$R = R_0 A^{1/3} \qquad \textbf{(45-2)}$$

ahol A a tömegszám és R_0 állandó[1]; értéke kb. 1,2 fm. A gömb térfogata R^3-nal arányos, ebből következik, hogy a magok sűrűségének közelítőleg azonosnak kell lenni. Az egyes nukleonok kis szilárd gömbökként viselkednek; a „gömbök" összekapcsolódása atommaggá hasonló a folyadékcsepp képződé-

[1] Az atommag „mérete" függ attól a kölcsönhatástól, ami az adott kísérletben fellép, R_0 értéke 1,0 és 1,5 fm között van. Nagyenergiájú elektronok (amelyek csupán a Coulomb-erőt érzékelik) szóródásából ~ 1,2 fm adódott, míg neutronok és protonok (amelyek a magerőre érzékenyek) szórásából valamivel nagyobb érték. Úgy tűnik, hogy a magerők hatása kicsit túlterjed a mag határain.

A femtométer egységet *ferminek* is szokás olykor nevezni, a nagy olasz fizikus Enrico Fermi (1901–1954) tiszteletére, aki mind az elméleti mind a kísérleti fizika fejlődéséhez jelentősen járult hozzá. Azonkívül, hogy a β-bomlást és a maghasadást tanulmányozta, neutronbombázással új izotópokat állított elő; ez utóbbiért kapta meg a Nobel-díjat 1938-ban.



45-3 ábra
Hogyan oszlik el a pozitív töltés az atommagban? Talán, mint egy üres gömb felületén, a Coulomb-taszítás miatt? Vagy a középpontban koncentrálódik? Esetleg az egész belsejében egyenletes az eloszlás? Az ábrázolt töltéssűrűségeloszlást a Stanford LinearAccelerator Center (SLAC) kísérleti eredményei alapján, nagyenergiájú elektronok rugalmas ütközésével kapták. A vonalvastagsággal a bizonytalanságot akartuk érzékeltetni. Sok magra a belső töltéssűrűség 1%-nál nagyobb pontossággal ismert; ez egy nagyságrenddel nagyobb, mint bármely elmélet alapján várható érték. Feltűnő, hogy A növekedésével a központi töltéseloszlás csökkenő tendenciát mutat. (Forrás: Bernard Frois & Costas N. Papanicolas, „Electron Scattering and Nuclear Structure", *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **37**. (1987), pp. 137-176.)

séhez, amelynek a sűrűsége nem függ a csepp méretétől. Az atommag leírásában a *folyadékcsepp-modell* bizonyult a leghasznosabbnak. A következő példán látni fogjuk, milyen óriási a mag sűrűsége.

45-2 PÉLDA

Határozzuk meg a maganyag sűrűségét.

MEGOLDÁS

A mag sűrűsége $\rho = M/V = Am/V$, ahol a térfogat $V = 4/3\pi R^3$. A (45-2) egyenletből $R = R_0 A^{1/3}$, tehát $V = \frac{4}{3}\pi R_0{}^3 A$, és

$$\rho = \frac{Am}{V} = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi R_0{}^3 A} = \frac{3m}{4\pi R_0{}^3}$$

$$\rho = \frac{3(1{,}67\times10^{-27}\,\text{kg})}{4\pi(1{,}2\times10^{-15}\,\text{m})} = 2{,}31\times10^{17}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ha egy ilyen nagy sűrűségű gömbnek a tömege azonos volna a Földével, akkor a sugara csak 184 m lenne.

45.3 Az atommag tömege és kötési energiája

Az Einstein által megfogalmazott tömeg-energia-ekvivalencia törvény központi szerepet játszik a magreakciókban – kezdve a radioaktív bomlástól egészen az atomreaktorokig. Vizsgáljuk ezt meg pl. a hidrogén ^{2}H-izotópján, a *deutériumon*. A protont és a neutront ebben a magban igen erős magerő kapcsolja össze, és munkát kell befektetnünk, hogy szétválasszuk őket. A befektetett munka a különvált nukleonok megnövekedett tömegében jelenik meg. Ennek a megfordítottja is igaz: amikor a proton és a neutron deutériummá áll össze, bizonyos mennyiségű tömeg tűnik el a magból és helyette vele ekvivalens sugárzó energia emittálódik foton alakjában.

A tömeg-energia-ekvivalencia kvantitatív tárgyalásához a magtömegnek egy megfelelő egységet kell választani. Ez az egység az *atomitömegegység*; ami definíció szerint az atomos ^{12}C tömegének 1/12 részével, beleértve az atom hat elektronjának tömegét is. A tömeg-energia-ekvivalencia alapján:

$$\text{ATOMTÖMEG-EGYSÉG, u} \qquad 1\ \text{u} = \begin{cases} \text{Atomos } ^{12}\text{C tömegének 1/12 része} & \text{(elektronokkal együtt)} \\ 1{,}660\,540\times10^{-27}\ \text{kg} \\ 931{,}494\ \text{MeV}/c^2 \\ 1{,}492\,42\times10^{-10}\ \text{J}/c^2 \end{cases} \qquad \textbf{(45-3)}$$

ahol a c fénysebesség pontosan $2{,}997\,924\,58\times10^8$ m/s. A 45-1 táblázatban feltüntettük néhány kiválasztott izotóp tömegét. Az $E = mc^2$ összefüggés alapján megadjuk három alapvető részecske tömegét MeV/c^2 egységben.

45-1 táblázat Néhány részecske és elem adatai*

részecske	töltés	kg	u	(MeV/c^2)
proton	e	$1{,}6726 \times 10^{-27}$	1,007 277	938,272
neutron	0	$1{,}6749 \times 10^{-27}$	1,008 665	939,566
elektron	–e	$9{,}1094 \times 10^{-31}$	$5{,}4858 \times 10^{-4}$	0,511

elem (kémiai jel, név)	A	atomtömeg (elektronokkal együtt) (u)	kötési energia / nukleon (MeV)	felezési idő	bomlás módja +
$_1$H hidrogén	1	1,007 825	–	stabilis	–
	2	2,014 102	1,11	stabilis	–
$_2$He hélium	3	3,016 029	2,57	stabilis	–
	4	4,002 603	7,07	stabilis	–
$_3$Li lítium	6	6,015 121	5,33	stabilis	–
	7	7,016 003	5,61	stabilis	–
$_4$Be beríllium	9	9,012 182	6,46	stabilis	–
$_5$B bór	10	10,012 937	6,48	stabilis	–
$_6$C szén	12	12 (pontosan)	7,68	stabilis	–
	14	14,003 241	7,52	5730 év	β^-
$_7$N nitrogén	14	14,003 074	7,48	stabilis	–
$_8$O oxigén	16	15,994 915	7,97	stabilis	–
	17	16,999 131	7,75	stabilis	–
	18	17,999 160	7,76	stabilis	–
$_{10}$Ne neon	22	21,991 ,383	8,08	stabilis	–
$_{11}$Na nátrium	22	21,994 434	7,92	2,601 év	β^+ KE
$_{26}$Fe vas	56	55,934 939	8,79	stabilis	–
$_{37}$Rb rubídium	90	89,914 811	8,63	4,26perc/3,03 perc	β^-
$_{55}$Cs cézium	137	136,907 073	8,38	30,17 év	β^-
	143	142,927 220	8,24	1,786 s	β^-
$_{56}$Ba bárium	137	136,905 812	8,39	stabilis	–
$_{79}$Au arany	197	196,966 543	7,92	stabilis	–
	198	197,968 217	7,77	2,693 nap	β^-
$_{80}$Hg higany	198	197,966 743	7,91	stabilis	–
$_{82}$Pb ólom	206	205,974 440	7,88	stabilis	–
$_{84}$Po polonium	210	209,982 848	7,83	138,38 nap	α
$_{85}$At asztácium	210	209,987 126	7,81	8,1 óra	α, KE
$_{90}$Th tórium	232	232,038 054	7,61	$1{,}4\times10^{10}$ év	α
$_{91}$Pa protaktinium	233	233,040 242	7,60	27,0 nap	β^-,γ
$_{92}$U urán	233	233,039 628	7,60	$1{,}59\times10^5$ év	α, γ
	235	235,043 924	7,59	$7{,}04\times10^8$ év	α, γ, SB
	236	236,045 562	7,59	$2{,}342\times10^7$ év	α, γ, SB
	238	238,050 784	7,57	$4{,}468\times10^9$ év	α, γ, SB
$_{93}$Np neptúnium	239	239,052 933	7,56	2,35 nap	β^-,γ
$_{94}$Pu plutónium	239	239,052 157	7,56	$2{,}411\times10^4$ év	α, γ, SB

*Források: Részecskék (kerekített) adatai (*CODATA Bulletin* No. 63, Nov. 1986.) Atomok adatai (*CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 66th ed., CRC Press 1985-86.) További adatok találhatók a J függelékben *Periodic Table of Elements*.

+ KE = Külsőelektron-emisszió; SB = spontán bomlás

45-3 PÉLDA

Számítsuk ki (MeV-ben), hogy mennyi munka befektetésével lehet a deutérium magjának neutronját és protonját szétválasztani.

MEGOLDÁS

A végzett munka, azaz a rendszerrel közölt energia tömegegyenértéke megfelel a $^2H \rightarrow {}^1H$ + neutron átmenet után észlelhető tömegnövekedésnek. A 45-1 táblázatból

	^{1}H tömege = 1,007 825 u
Szétválasztás után	neutrontömeg = 1,008 665 u
	összes tömeg = 2,016 490 u
Szétválasztás előtt:	^{2}H tömege = 2,014 102 u

A tömeghiány a Δm = 0,002 388 u, az ezzel ekvivalens energia pedig $\Delta E = \Delta m c^2$ alapján

$$0{,}002\,388\ \text{u}\left(\frac{931{,}5\ \text{MeV}/c^2}{1\ \text{u}}\right) = 2{,}22\ \text{MeV}$$

Ezen a példán megtanulhatjuk azt a fontos eljárást, hogyan számítsuk ki a tömegkülönbséget a magreakciók folyamán. Nem szabad elfelejteni azt sem, hogy mind a ^{2}H-nak, mind az ^{1}H-nak a magon kívül van egy elektronja is, azonban *atomi tömeggel számolhatunk, mivel az elektron az átváltozás „előtti" és „utáni" tömegben egyformán szerepel, így a különbséget nem változtatja meg.*[2] (Itt egyszerűsítést alkalmaztunk; nem vettük figyelembe az elektron kötési energiáját. Ennek nagysága ~10eV, ami a magreakciókban előforduló energiákhoz viszonyítva elhanyagolható.)

A kötési energia

A nukleonok az egyik magban erősen kötődnek egymáshoz, a másikban pedig kevésbé erősen. A nukleáris kötés erősségét az **egy nukleonra jutó kötési energiával** (kötési energia/nukleonszám) jellemezhetjük. Minél erősebb a nukleonok kötődése, annál stabilabb a mag. Az ^A_ZX atom mag KE/nukleon értékét úgy számítjuk ki, hogy az Z $^1_1$H tömeghez hozzáadjuk (A–Z) neutron tömegét, majd ebből levonjuk az ^A_ZX atom tömegét. Így azt a *tömegnövekedést* kapjuk meg, ami az atomnak nukleonokra történő szétválasztásából származik. Elosztva ezt a nukleonok A számával, és átszámítva energiaegységre:

$$\left[\frac{\text{KE}}{\text{nukleon}}\right] = \frac{1}{A}\left[Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_{\text{n}} - m_{\text{x}}\right]\left[\frac{\text{energiaekvivalens}}{\text{tömeg}}\right]$$

ahol $m_{\text{H}} \equiv {}^1_1$H atomtömege, m_{n} a neutrontömeg, m_{x} pedig az ^A_ZX atom atomi tömege. MeV/nukleonban ez:

---

[2] Egyetlen kivétel akad: lásd a (45-23) egyenlet levezetéséhez felhasznált *pozitronbomlás* tárgyalását.

$$\left[\frac{\mathrm{KE}}{A}\right]=\frac{1}{A}\left[(1{,}007\ 825\ \mathrm{u})(Z)+(1{,}008\ 665\ \mathrm{u})(A-Z)-m_x\right]\left[\frac{931{,}494\ \mathrm{MeV}/c^2}{1\ \mathrm{u}}\right] \tag{45-4}$$

45-4 PÉLDA

Számítsuk ki a következő atomokra az egy nukleonra jutó kötési energiát: a) ^{2}H, b) ^{4}He, c) ^{56}Fe és d) ^{238}U.

MEGOLDÁS

a) Az egy nukleonra jutó kötési energiát ^{2}H esetében a 45-3 példa eredményeinek felhasználásával, vagy a (45-3) képlettel számíthatjuk ki; mi az előbbi utat követjük. A teljes kötési energia 0,002 388 u-val, az egy nukleonra eső kötési energia pedig (1/2)×(0,002 388 u)-val ekvivalens, ennek alapján:

$$\mathrm{KE}/A=(0{,}001\ 194\ \mathrm{u})\left[\frac{931{,}5\ \mathrm{Mev}/c^2}{1\ \mathrm{u}}\right]c^2 = 1{,}11\ \mathrm{MeV}$$

A példa további részének megoldásához használjuk fel a 45-1 táblázat atomtömegeit. Számolhatunk atomtömeggel, mivel a változás „előtti" és „utáni" elektronszám azonos, tehát a különbséget nem változtatja meg.

b) ^{4}He-re a (45-3) egyenletből – megfelelő egységekkel:

$$\mathrm{KE}/A = 1/4[(1{,}007\ 825)2 + (1{,}008\ 665)(4-2) - 4{,}002\ 603](931{,}5)$$
$$= 7{,}07\ \mathrm{MeV}$$

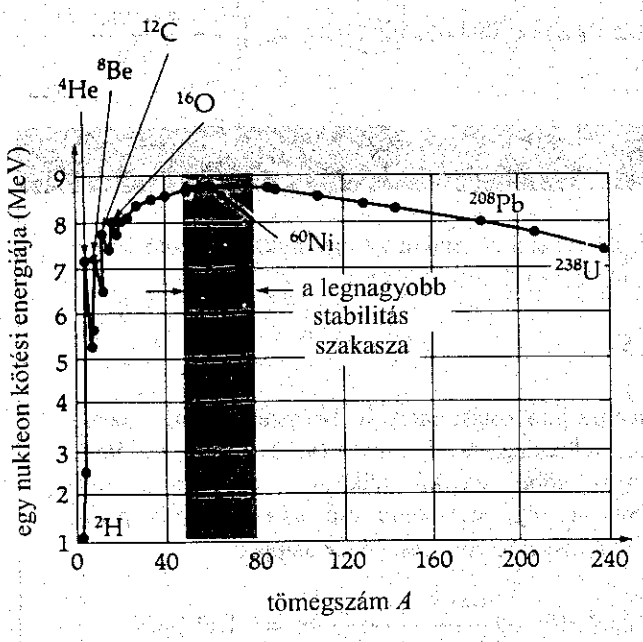
c) ^{56}Fe-re azonos módon:

$$\mathrm{KE}/A = 1/56[(1{,}007\ 825)26 + (1{,}008\ 665)(56-26) - 55{,}934\ 939](931{,}5)$$
$$= 8{,}79\ \mathrm{MeV}$$

d) végül ^{238}U-ra:

$$\mathrm{KE}/A = 1/238[(1{,}007\ 825)92 + (1{,}008\ 665)(238-92) - 238{,}050\ 784](931{,}5)$$
$$= 7{,}57\ \mathrm{MeV}.$$

Ebben a példában bemutattuk, hogy a kötési energia az egyes nuklidoknál jelentős eltéréseket mutat. A 45-4 ábra az egy nukleonra jutó kötési energiát a tömegszám függvényében tünteti fel. A 20-nál kisebb tömegszámok esetén tapasztalható néhány eltérő érték, de egyébként a görbe meglehetősen sima, maximuma az A=63 közelében van. Összekötve a kis tömegszámokhoz tartozó pontokat, szembetűnő, hogy a ^{4}He jelentősen a görbe felett helyezkedik el, ellentétben a ^{8}Be, ^{12}C, ^{16}O és ^{20}Ne pontjaival. Ebből arra következtethetünk, hogy az alfa-rész (^{4}He, azaz 2 proton + 2neutron) a nukleonok különösen stabil kombinációja. Ezt jelzi az a jelenség is, hogy spontán bomlás esetében gyakran emittálódik alfa-rész, mint önálló egység. Ezt a bomlásfajtát a 45.5 pontban fogjuk tárgyalni. Az is kiderül majd, hogy mivel a nehéz nuklidoknál az egy nukleonra jutó kötési energia kisebb, mint azoknál, amelyek az A 50-80 tartományba esnek, a nehéz magok *bomlásából* nukleáris



45-4 ábra
Egy nukleon kötési energiája. Néhány fontosabb izotópra kiszámítottuk az egy nukleonra eső kötési energia értéket, felrajzoltuk a pontokat, majd egyenes vonallal összekötöttük. Feltűnő, hogy a kis tömegszámú atomokhoz tartozó pontokhoz képest a ^{4}He jóval magasabban helyezkedik el.

energia nyerhető (fissziós energia). Másrészt abból a tényből, hogy a nagyon könnyű nuklidokra a KE/A hányados jóval kisebb, mint a ^{4}He-re vagy a ^{8}Be-re, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy magenergiát a könnyű magok – ^{2}H, ^{3}He és ^{6}Li – *összekapcsolódásából* (fúziójából) is kaphatunk (fúziós energia).

45.4 Radioaktív bomlás és felezési idő

A neutronok és protonok nem minden kombinációja eredményez stabilis atommagot. A jelenleg ismert, közelítőleg 1960 atommag bomlik, más maggá alakulhat át. Ezek a *radioaktív* magok. A természetben csak 279-féle olyan atommag van, amely stabilnak, tehát *nem-radioaktívnak* tekinthető, vagyis egyáltalán nem, vagy csak nagyon kis mértékben mutat hajlandóságot a bomlásra. Az atommag bomlásra való hajlamát a $T_{1/2}$ **felezési idővel** szokás jellemezni:

FELEZÉSI IDŐ $T_{1/2}$ **Az az átlagos időtartam, amely ahhoz szükséges, hogy nagyobb anyagdarabban az atommagok fele elbomoljék, más maggá alakuljon át.**

A radioaktív bomlás alapvetően véletlen folyamat: egy kiválasztott radioaktív mag elbomolhat akár a következő másodpercben, akár egy év múlva. Ezért fogalmazunk úgy, hogy a felezési idő fogalma csak nagyszámú atommagra értelmezhető. Sok, számszerint N mag, **aktivitásnak** nevezett dN/dt bomlási sebessége a magok N számával arányos:

AKTIVITÁS:
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad \textbf{(45-5)}$$

ahol λ a mag stabilitását jellemző pozitív arányossági tényező. Minél nagyobb λ értéke, annál kevésbé stabil a mag. A mínusz jel azt jelzi, hogy az idő múlásával a magok száma csökken. A λ állandó neve **bomlási állandó**. Írjuk át a (45-5) egyenletet a következő alakba:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

A két oldal integrálása után:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{1}{N} dN = -\lambda \int_0^t dt \qquad (45\text{-}6)$$

ahol N_0 a magok száma kezdeti időpontban, N pedig t idő múlva. Az integrálás elvégzése után ez úgy alakul:

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$$

A RADIOAKTÍV BOMLÁS TÖRVÉNYE: (λ bomlási állandóval)

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (45\text{-}7)$$

Hogyan függ a $T_{1/2}$ felezési idő λ-tól? A (45-6) egyenlet alapján:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Mindkét oldal természetes logaritmusát véve:

$$\ln 2 = \lambda T_{1/2}$$

illetve

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad (45\text{-}8)$$

Tehát a (45-6) a következő kényelmesebben kezelhető alakban írható:

A RADIÓAKTÍV BOMLÁS TÖRVÉNYE: ($T_{1/2}$ felezési idővel)

$$N = N_0 e^{-(\ln 2/T_{1/2})t} \qquad (45\text{-}9)$$

Az itt következő példa szemlélteti a radioaktív bomlás véletlen jellegét, és azt, hogy hogyan függ a felezési időtől.

45-5 PÉLDA

Vegyünk igen nagyszámú kockát. A kerekítési gondok elkerülése és a számolás egyszerűsítése céljából kezdjük április 1-jén délben 279 936 000 kockával. Április 2.-án délben dobjuk fel az összes kockát, és emeljük ki azokat, amelyekkel egyet dobtunk. Április 3.-án dobjuk fel a maradékot és vegyük ki ismét azokat, amelyek egyet mutatnak. Ezt a műveletet naponta ismételve, mikor lesz a kockák száma a fele az eredetinek?

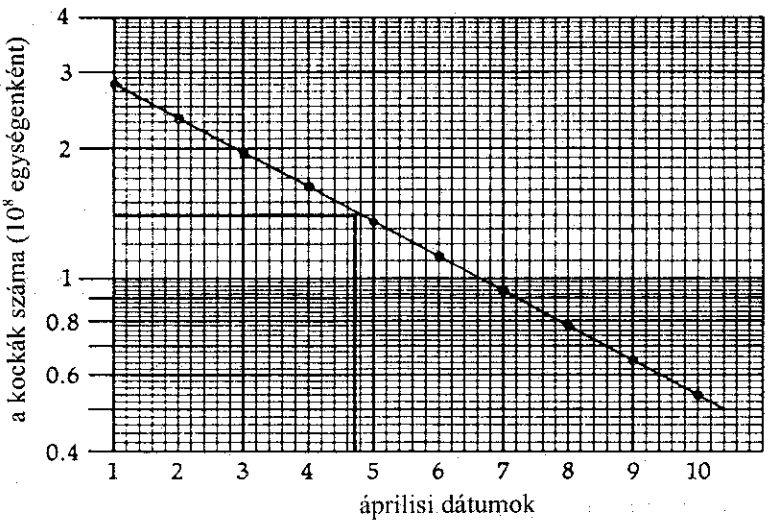
MEGOLDÁS

A kocka mindegyik oldala egyenlő valószínűséggel kerül felülre, ezért kb. a kockák egyhatodával dobunk egyet. A feltételezés érvényessége a kockák számával nő. Április 2-án a kockák egyhatodának levonása után 233 280 000 kockánk marad. Minden délben feljegyezzük az eredményt, az adatok a 45-2 táblázatban találhatók meg. Az $\ln(N/N_0) = -\lambda t$ összefüggés miatt az eredmények grafikus ábrázolására a legkényelmesebb a féllogaritmikus ábrázolás (45-5 ábra).[3] Interpolációval adódik, hogy a kockák száma 4,7 nap múlva fog a felére csökkenni.

45-2 táblázat

Nap	Kockák száma
április 1.	279 936 000
április 2.	233 280 000
április 3.	194 400 000
április 4.	162 000 000
április 5.	135 000 000
április 6.	112 500 000
április 7.	93 750 000
április 8.	78 125 000
április 9.	65 104 167
április 10.	54 253 472

[3] Általában az egyenes vonal illesztése a legegyszerűbb, ezért az exponenciális függvényeket érdemes *féllogaritmikusan* ábrázolni, ez ugyanis éppen egyenest ad. A féllogaritmikus papíron a függőleges tengely beosztása logaritmikus, így a Δy távolság bármely két szám között, amelyek aránya egyenlő azonos(példa: 4 és 2, 6 és 3 vagy 20 és 10). Így a Δy távolság



45-5 ábra
A 45-5 példához. A példában megadott pontokhoz tartozó adatokat féllogaritmikusan ábrázoltuk azért, hogy egyenes vonalat kapjunk.

Más oldalról közelíthetjük meg a probléma megoldását a (45-5) egyenlet, vagyis

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

felhasználásával. Ekkor a keresett felezési idő:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{(1/6)} = \quad 4{,}16 \text{ nap}$$

A két eredmény közötti eltérést az okozza, hogy a (45-5) egyenlet szigorúan csak folytonos változásokra alkalmazható, és a kockadobás nem ilyen jelenség.

Tovább folytathatjuk a példát, ha azt akarjuk kiszámítani, hogy a kockák száma mikor fogy az eredeti negyedére. Az előbb láttuk, hogy a kapott két érték között kb. 10% elétérés van, most – a második feleződés esetében – kevesebb, mint 4% (l. még a 45B-10 feladatot is). Ez azzal magyarázható, hogy két felezési időn keresztül folytatva a számítást, jobban közelítünk egy folytonos függvényhez.

A *dN/dt* izotóp-bomlási sebességet *becquerel* egységben (Bq) adjuk meg; ennek definíciója: 1 becquerel = 1 bomlás/s. Elterjedt – azonban az SI-rendszerhez nem illeszkedő – egység a *curie* (Ci):

A CURIE DEFINÍCIÓJA $\qquad 1 \text{ Ci} = 3{,}71 \times 10^{10}$ bomlás/s

Átszámítás: 1 Ci = $37{,}1 \times 10^9$ Bq = 37,1 GBq (GBq = gigabecquerel). (A Ci egység eredetére lásd. a 45B-9 feladatot.)

a számok közötti $\Delta N/N$ arányt adja meg. Pontosabban ha $N = N_0 e^{-\lambda t}$, akkor $\log N = \log N_0 - \lambda t$, és ha $N \equiv y$, akkor $y = y_0 - \lambda t$, azaz egyenes vonalat kapunk.

45-6 PÉLDA

Radioaktív izotóp kezdeti aktivítása 5 mCi; 48 óra múlva az észlelt aktivítás 4 mCi. a) Határozzuk meg az izotóp felezési idejét. b) Határozzuk meg az izotópmintában az atommagok számát.

MEGOLDÁS

a) Induljunk ki a (45-9) képletből:

$$N = N_0 e^{-(\ln 2/T_{1/2})t}$$

és a (45-5) egyenletből $N = -(1/\lambda)(dN/dt)$, ezért

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 e^{-(\ln 2/T_{1/2})t}$$

Vezessük be a kezdeti aktivitásra a $(dN/dt)_0 = A_0$ jelölést:

AZ AKTIVITÁS (A): $$A = A_0 e^{-(\ln 2/T_{1/2})t} \qquad \textbf{(45-10)}$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát és fejezzük ki $T_{1/2}$-et:

$$T_{1/2} = \frac{(\ln 2)t}{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)} = \frac{(\ln 2)48\,\text{h}}{\ln\left(\frac{5\,\text{mCi}}{4\,\text{mCi}}\right)} = 149\,\text{h}$$

b) Adott felezési időnek és aktivitásnak megfelelő radioaktív magok számának meghatározásához a (45-5) és (45-8) képletből

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

illetve

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Küszöböljük ki λ-t, ekkor azt kapjuk, hogy

$$N = -\left(\frac{dN}{dt}\right)\frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

Figyelembe véve, hogy 5 mCi = $(5\times10^{-3})(3{,}71\times10^{10})$ = $1{,}86\times10^{8}$ másodpercenkénti bomlás felel meg a kezdeti aktivitásnak, és hogy a felezési idő (149 h)(3600 s/h) = $5{,}36\times10^{5}$ s, kapjuk a végeredményt:

$$N = -\left(-1{,}86\times10^{8}\right)\frac{5{,}36\times10^{5}}{\ln 2} = 1{,}44\times10^{14}\ \text{atommag}$$

45.5 A radioaktív bomlás fajtái

Egyes izotópok spontán módon bomlanak, és ekkor más elemek izotópjai keletkeznek. Egyazon izotóp általában egyféle (ritkábban többféle) bomlásban vesz részt, azonban a folyamat többféleképpen mehet végbe:

(1) α-bomlás
(2) β-bomlás
(3) γ-bomlás
(4) belső konverzió
(5) elektronbefogás
(6) spontán hasadás (fisszió).

A következőkben ezeket a bomlási folyamatokat részletezzük. Mi dönti el, hogy az adott izotóp résztvesz-e spontán bomlásban? Ennek feltétele a következő:

A reakciótermékek tömegének összege kisebb kell legyen az eredeti izotóp tömegénél.

A különbség fontos mértéke a *reakcióban felszabaduló „Q" energia*. Ha a reakció folyamán Δm hiányt észlelünk, akkor a reakciótermékek energiájában $(\Delta m)c^2 \equiv Q$ energia jelenik meg.

A REAKCIÓBAN FELSZABADULÓ Q-ENERGIA

$$\text{(eredeti tömeg)}c^2 = \text{(termékek tömege)}c^2 + Q \qquad \textbf{(45-11)}$$

A következő elemzésekben mindig a tömeghiány lesz a döntő tényező.

(1) Az α-bomlás

Az **alfa-bomlás** során új elem keletkezik a magból. Ennek az *átalakulásnak* (transzmutációnak) az általános képlete:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad \textbf{(45-12)}$$

Ez a képlet jelzi a nukleonszám megmaradását, mivel az egyenlet bal oldalán a felső index egyenlő a jobb oldali felső indexek összegével. Hasonlóképpen a töltésmegmaradás is igaz, hiszen a Z protonszámok is egyenlők a két oldalon (természetesen az elektronszámok is). $^{A}_{Z}X$ neve **anyaelem**, míg $^{A-4}_{Z-2}Y$-t **leányelemnek** hívjuk.

A ^{4}He igen nagy egy nukleonra jutó, kötési energiája azt jelzi, hogy rendkívül szorosan kötött alakzat (l. a 45-4 ábrát). Ennek alapján érthető, hogy a nehéz radioaktív nuklidok között nagyon gyakori az alfa-bomlás. Ez a jelenség ritka a ^{186}Os-nál könnyebb elemeknél, mivel azokból olyan izotópok keletkeznének, amelyek a 45-1 ábra stabil izotópokat jelölő görbéje felett helyezkednének el. Elősegíti az alfa-bomlás bekövetkezését, ha a (45-11) által definiált Q nagy. Következő példánkkal az alfa-bomlás relatív gyakoriságát mutatjuk be.

45-7 PÉLDA

Számítsuk ki a ^{210}Po alfa-bomlásának energiáját.

MEGOLDÁS

A ^{210}Po alfa-bomlásának egyenlete:

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Látszik, hogy a két oldal atomtömegszámai és atomszámai kielégítik az előzőkben felállított feltételeket. A 45-1 táblázat adatai alapján vizsgáljuk meg a tömegek viszonyát:

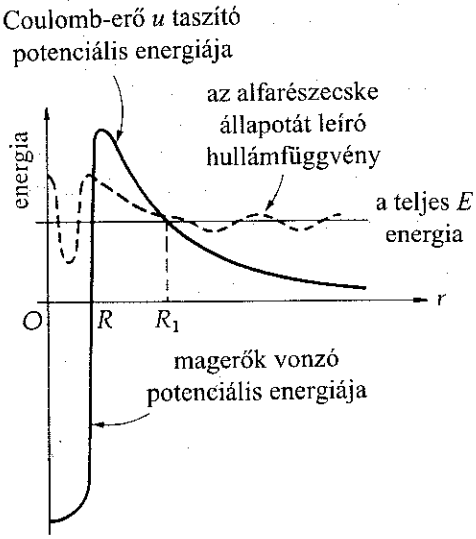
bomlási termékek	anya-atom	^{210}Po	209,982 848 u
	leány-atom	^{206}Pb	205,974 440 u
	hélium-atom	^{4}He	4,002 603 u
	összeg a bomlástermékekre		209,977 043 u.

Az anyaatom tömege 0,005 805 u-val *nagyobb*, mint a bomlástermékeké, azaz az alfa-bomlás végbemehet (és végbe is megy). Végezzük el a tömegkülönbség-energia átszámítást!

$$E = (\Delta m)c^2 = (0{,}005\,805\ \text{u})\left(\frac{931{,}5\,\text{MeV}/\text{c}^2}{1\ \text{u}}\right) = 5{,}41\,\text{MeV}$$

Figyeljük meg, hogy most is, mint máskor, *atomtömeggel* számolunk – az elektronok tömege a különbségből kiesik. Az energia a reakciótermékek kinetikus energiájaként jelenik meg. Az alfa-rész tömege sokkal kisebb, mint a leányelemeké, ezért az impulzusmegmaradás törvénye csak akkor érvényesül, ha az alfa-rész jóval nagyobb sebességgel lökődik vissza, mint a leányatomok. Az atommagok bomlásakor mindig a könnyű részecskék viszik magukkal a kinetikus energia nagyobb részét.

Alfa-bomlás kvantummechanikai alagúthatással. Az alfa-bomlás érdekes magyarázatát adja a kvantummechanika. Az alfa-részt alkotó nukleonok rövid hatótávolságú erős, vonzó magerőt éreznek a többi nukleon részéről, és taszító Coulomb-erőt a mag többi protonjától. A két erő kombinációjához a 45-6 ábrán látható potenciális energia tartozik. Az ábrán feltüntettük az alfa-részt alkotó nukleonok E teljes energiáját. Klasszikusan a Coulomb-potenciálgát miatt az alfa-rész örökké a magban maradna. Ha figyelembe vesszük, hogy az E teljes energia a K kinetikus energia és az U potenciális energia összege, látható, hogy az R és R_1 közötti árnyékolt tartományban a kinetikus energia negatív lenne – ami elképzelhetetlen. Az alfa-rész kvantummechanikai hullámfüggvénye azonban a mag határain kívülre is kiterjed – oda, ahol a kinetikus energia pozitív. Van tehát annak is véges valószínűsége, hogy az alfa-rész az R_1-en kívüli tartományban található. Tény, hogy az alfa-rész mindaddig ismételten „dörömböl" a gáton, amíg át nem megy a *kvantummechanikai alagúton*, és meg nem jelenik a magon kívül (vö. a 43.7 ponttal). A 45-6 ábrán szaggatott vonallal jelöltük az alfa-rész egy lehetséges hullámfüggvényét.



45-6 ábra
Az alfarész–mag kölcsönhatás teljes potenciális energiája a köztük lévő r távolság függvényében.

(2) Béta-bomlás

Egyes magok elektront ${}^{0}_{-1}e$ (vagy β^-) vagy pozitront ${}^{0}_{+1}e$ (vagy β^+) bocsátanak ki; ennek a jelenségnek a neve **béta-bomlás**. Ezekben a reakciókban *a „gyenge" kölcsönhatás* érvényesül, ami egyike a természetben előforduló négy: az elektromágneses, gyenge, erős és gravitációs kölcsönhatásnak.

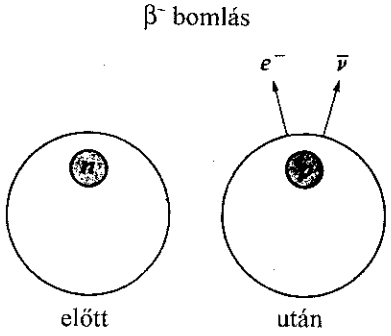
BÉTA BOMLÁS FOLYAMATA

elektron (β^-)-bomlás ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$ **(45-13)**

pozitron (β^+)-bomlás ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e + \nu$ **(45-14)**

Amint erre még röviden visszatérünk, a folyamat során *neutrinó*[4] ν, vagy *antineutrino* $\overline{\nu}$ is keletkezik. A béta-részt a mag bocsátja ki, ezért nem jogo-

[4] Háromféle neutrínó és ezeknek megfelelő három antineutrínó létezik: a béta-bomlás során kibocsátott *elektron-neutrínó:* ν_e és az egyéb folyamatokban megjelenő másik kettő, a *müon-neutrínó*: ν_μ és a *tau-neutrínó*: ν_τ. Feltételezik, hogy a neutrínó tömege zérus, habár az sem zárható ki, hogy rendelkezik kicsiny tömeggel. Egyes neutrínókísérletek alapján meg lehetett állapítani a neutrínó tömegének *felső határát*, ennek nagysága (1989-es adat): ^{3}He bomlásából becsülve kisebb, mint ~ 20 eV/c^2, a Supernova 1987A által kibocsátott neutrínó-impulzus beérkezési időeltolódásából számítva pedig valószínűleg kisebb, mint ~ 14 eV/c^2. Ezek az eredmények azonban nem zárják ki, hogy a neutrínó tömeg mégis zérus.



45-7 ábra
β⁻-bomláskor a nukleonszám változatlan marad. A végeredmény az, hogy a mag egyik neutronja egy magban maradó protonra és egy $e^- + \bar{\nu}$ (antineutrinó) párra válik szét; ez utóbbiak eltávoznak a magból. (β+-bomlás során a magon belüli egyik proton válik szét neutron és pozitron-neutrínó párra).

sulatlan a kérdés: „Vannak-e ténylegesen elektronok és pozitronok a magban?" A 45B-24 feladatból kiderül, hogy a határozatlansági elv miatt a béta-rész nem létezik önálló egységként a magban, hanem a béta-bomlás során keletkezik.

A β⁻-bomlás. A β⁻-bomlás folyamatában a magban egy neutron átalakul protonná, elektronná és neutrínóvá; utóbbiak lépnek ki a magból (45-7 ábra). Az anya nuklid M_X tömege egyenlő a mag m_X atomtömegének és az egyenként m_e tömegű Z darab elektron tömegének összegével

$$M_X = m_X + Zm_e \qquad \textbf{(45-15)}$$

A leánynuklid tömege hasonló meggondolással:

$$M_Y = m_Y + (Z+1)m_e \qquad \textbf{(45-16)}$$

A reakció Q-ja – a (45-11) egyenlet alapján:

$$Q = [m_X - (m_Y + m_e)]c^2 \qquad \textbf{(45-17)}$$

Ebből kiderül, hogy a béta-rész tömegét beszámítottuk a tömeghiányba, míg a Z atomi elektronét nem. A (45-15) és (45-16) egyenletből:

$$Q = (M_X - Zm_e)c^2 - [M_Y - (Z+1)m_e + m_e]c^2$$

A β^--BOMLÁS Q-JA $$Q = (M_X + M_Y)c^2 \qquad \textbf{(45-18)}$$

Ha tehát az anyaatom tömege nagyobb, mint a leányatom tömege, akkor bekövetkezhet a β^--bomlás, ellenben, ha az anyanuklid atomtömege a kisebb, akkor nem. Ez utóbbira mutatunk most példát.

45-8 PÉLDA

Bizonyítsuk be, hogy a ^{210}Po-nál nem lehetséges β⁻-bomlás.

MEGOLDÁS

A lánymagok azonosításához írjuk fel a reakcióegyenletet:

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{85}\text{At} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

A lánynuklid Z atomszámának eggyel nagyobbnak kell lennie, mint a polóniumé, az A atomtömeg viszont változatlan marad; a keletkezett atom tehát az *asztácium* ($A = 210$, $Z = 85$). A 45-1 táblázatból a ^{210}Po és a ^{210}At atomtömegszáma 209,982 848 u, illetve 209,987 126 u. A lánymag tömege *nagyobb*, mint az anyamagé, a ^{210}Po β^--bomlása tehát nem mehet végbe.

A 45-8 ábra feltünteti, hogy a rendelkezésre álló kinetikus energia hogyan oszlik meg a béta-részecskék között. Az eloszlási görbéből kiderül, hogy az emittált elektronok kinetikus energiája *kisebb*, mint az a reakció Q-ja alapján várható. (A visszalökött mag kinetikus energiáját elhanyagoltuk, mivel ennek tömege lényegesen nagyobb az elektronénál.) Hová tűnik az energia? Egy másik szembetűnő jelenség, hogy a béta-rész és a visszalökött mag pályáját detektálva, ezek sohasem pontosan ellentétes irányúak, ami ellent-

mond az impulzusmegmaradás törvényének. Itt nem tárgyalható tények azt is bizonyítják, hogy az impulzusmomentum sem marad meg. Wolfgang Pauli vetette fel először (1930-ban), hogy a bomláskor egy töltésnélküli részecskének is keletkeznie kell. Erre alapozta Enrico Fermi új elméletét 1934-ben, aminek alapgondolata szerint a kinetikus energia egy részét egy semleges részecske viszi el, amelyet ezekkel az eljárásokkal nem lehet kimutatni. A láthatatlan részecskének a „neutrínó" nevet adta. *Szerinte a neutrínó töltése és nyugalmi tömege zérus, spinje pedig ½. Fermi óriási lépést tett ezzel, hiszen megmaradt a három alapelv: az energiamegmaradás, az impulzusmegmaradás és az impulzusmomentum-megmaradás elvének érvényessége.*

A β^+-bomlás. A β^+ (pozitron)-bomlás ritkább jelenség, mint a β^--bomlás, mivel ehhez az anymag és a leánymag között nagyobb tömegkülönbség szükséges. A pozitronbomlás reakcióegyenlete:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{+1}e + \nu , \qquad \textbf{(45-19)} $$

ahol ${}^{0}_{+1}e$ a pozitron és a ν a neutrínó. Itt is, mint a β^--bomlásnál a reakció Q-ját határozzuk meg. Az anyamag tömege:

$$ M_X = m_X + Zm_e , \qquad \textbf{(45-20)} $$

ahol M_X az atomtömeg, m_X a magtömeg és Zm_e az összes elektrontömeg. A leánymag:

$$ M_Y = m_Y + (Z-1)m_e , \qquad \textbf{(45-21)} $$

A (45-11) egyenletet alkalmazva:

$$ Q = m_X c^2 - (m_Y + m_e)c^2 , \qquad \textbf{(45-22)} $$

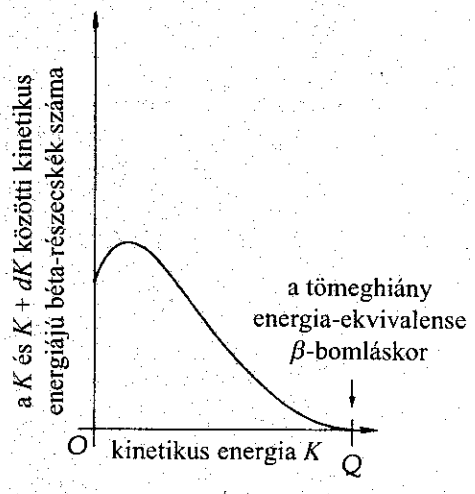
ahol m_e az (elektrontömeggel egyenlő) pozitrontömeg. A Z számú *atomi* elektron itt sem szerepel a reakcióegyenletben. A (45-20) és (45-21) egyenletből adódik, hogy

$$ Q = (M_X + Zm_e)c^2 + [M_Y + (Z-1)m_e + m_e]c^2 $$

A β^+-BOMLÁS Q-JA

$$ Q = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2 \qquad \textbf{(45-23)} $$

Kimutattuk tehát, hogy *β^+-bomláskor az anyamag tömegének legalább két elektrontömeggel kell nagyobbnak lennie a leánymagénál.* (Itt kivételt tettünk az alól a szabály alól, hogy a reakcióegyenletben csak *atomi* tömegek szerepelnek.)



45-8 ábra
Béta-bomlás során kisugárzott béta-részecskék kinetikus energiájának eloszlása. A legtöbb rész energiája sokkal kisebb, mint ami a reakció Q-jának megfelelne. Az „elveszett" energiát az *antineutrínó* viszi magával a β^--bomlásnál (illetve a *neutrínó* a β^+-bomlás során), ezek a béta-résszel egyidejűleg sugárzódnak ki. A visszalökött leánymag is elviszi az energia egy csekély részét.

45-9 PÉLDA

Számítsuk ki a ^{22}Na által kibocsátott pozitronok energiáját.

MEGOLDÁS

Az előző példához hasonlóan a leánynuklidot a reakcióegyenlet felírása segítségével azonosítjuk:

$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + {}^{0}_{+1}e + \nu$$

A 45-1 táblázatból az atomtömegek: ^{22}Na, 21,994 434 u; ^{22}Ne, 21,991 383 u és $m_e = 0{,}000\,549$ u. Behelyettesítve a (45-23) képletbe:

$$Q = [21{,}994\,434\,\mathrm{u} - 21{,}991\,383\,\mathrm{u} - 2(0{,}000\,549\,\mathrm{u})]c^2 \left(\frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}/c^2}{1\,\mathrm{u}}\right) =$$

$$= 1{,}82\,\mathrm{MeV}$$

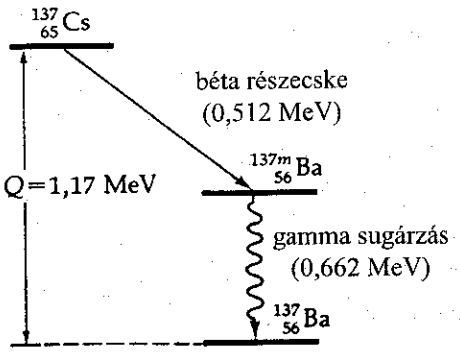
(3) A gamma-bomlás

Gamma-sugarak, az elektromágneses sugárzás nagyenergiájú fotonjai a magban végbemenő energiaállapot-átmenet következtében sugárzódnak ki. (Analógonja ez annak, az atom fotonokat bocsát ki, hogy amikor az atom elektronjai magasabb állapotból alacsonyabba mennek át.) **A gamma-sugárzás** folyamán nem változik meg az atom tömegszáma vagy rendszáma, ezért nem keletkezik új elem.

Más bomlási folyamatok leány-magjai gyakran kerülnek gerjesztett állapotba; egyszerű példája a ^{137}Cs β^--bomlása. Ennek az átalakulásnak a során szinte egyidejűleg észlelhető elektron és gamma-sugárzás kibocsátása, pedig a gamma-sugárzást a leánymag emittálja. A reakcióegyenletek:

$$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \rightarrow \left[{}^{137m}_{56}\mathrm{Ba}^*\right] + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu} \qquad \textbf{(45-24)}$$

$$\left[{}^{137m}_{56}\mathrm{Ba}^*\right] \rightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \gamma \qquad \textbf{(45-25)}$$



45-9 ábra
Az energiaszint-diagramon követhető a $^{137}_{55}$Cs bomlása metastabil $\left[{}^{137}_{56}\mathrm{Ba}^*\right]$ -ra, melyet követően a bárium gamma-sugárzás kibocsátásával alapállapotba kerül.

A csillag (*) a gerjesztett állapotot jelöli. Ez az állapot *metastabil*, mert viszonylag hosszú ideig tart az átmenet az alacsonyabb energiaállapotba – ez az idő elég ahhoz, hogy a felezési időt meg tudják mérni. A (45-24) egyenletben leírt béta-bomlás felezési ideje 30,17 év, míg a (45-25) egyenlet szerinti gamma-bomlásé 2,55 min.

Az atommag energiaszintjeire a kibocsátott gamma-sugárzás energiájából tudunk következtetni. A ^{137}Cs bomlása esetében a ^{137}Ba-mag egyik energiaszintjét meghatározhatjuk a 45-9 ábra energiaszint-diagrammja segítségével. A (45-24) egyenletből Q értéke 1,17 MeV. Ez egyenlő a béta-bomláskor keletkező elektronok maximális energiájának (0,512 MeV), s a gamma-sugárzás energiájának (0,662 MeV) összegével. A ^{137}Ba-mag gerjesztett állapotának energiaszintje tehát 0,662 MeV-vel magasabb az alapállapotnál. A legtöbb bomlási folyamatot gamma-emisszió kíséri, ezekhez több diszkrét energiaérték tartozik. Így például a ^{140}Cs béta-bomlása során húsz különböző energiájú gammasugárzás észlelhető, ebből arra lehet következtetni, hogy a $[^{140}\mathrm{Ba}^*]$ energiaszint-szerkezete nagyon bonyolult.

(4) Belső konverzió

A gerjesztett atommag nemcsak gamma-bomlással szabadulhat meg a többletenergiától, hanem ún. **belső konverzióval** is. Az atomi elektron hullámfüggvénye kissé behatol a magba is, így bekövetkezhet a mag és az atomi elektron közötti közvetlen kölcsönhatás. A mag többletenergiáját átadja az elektronnak, ez pedig akkora kinetikus energiával lökődik ki, ami az atommagon belüli átmenet energiája és az elektron atomon belüli Coulomb-féle kötési energiája közötti különbségnek felel meg. A belső konverzióban általában a *K*-héj, és ritkán más héjak elektronjai vesznek részt. A 45-8 ábrán a béta-bomlás elektronjainak folytonos spektrumát látjuk; ezen a belső konverzió elektronjai diszkrét csúcsokként jelennek meg. Azon a szinten, ahonnan az elektron kilépett, elektronhiány lép fel – ezt külső héjról származó elektronok töltik be, és az energiakülönbség röntgensugárzás alakjában emittálódik. A (45-24) és (45-25) reakcióegyenlettel leírt bomlási folyamat során 0,032 MeV energiájú röntgensugárzás keletkezik.

(5) Elektronbefogás

Láttuk, hogy a béta-bomlás lényegében nem más, mint a mag egy *p* protonjának vagy *n* neutronjának az átalakulása, a következő formájú reakciókban:

A BÉTA-BOMLÁS FOLYAMATÁNAK ALAPSÉMÁJA

β^--bomlás $\quad {}^1_0 n \rightarrow {}^1_1 p + {}^0_{-1} e + \bar{\nu}$

β^+-bomlás $\quad {}^1_1 p \rightarrow {}^1_0 n + {}^0_{+1} e + \nu$

Ezzel kapcsolatban a következő kérdés vetődik fel: „Befoghat-e magon belüli proton magon kívüli elektront, miközben átalakul neutronná?" A válasz igen, a folyamat pedig:

ELEKTRONBEFOGÁS $\qquad {}^0_{-1} e + {}^1_1 p \rightarrow {}^1_0 n + \nu$ **(45-26)**

Az elektronbefogás (EB). Ez igen gyakori bomlási folyamat. Tárgyaltuk már a 44. fejezetben, hogy az elektron hullámfüggvénye a mag belsejére is kiterjed, kissé átfedi azt, így véges valószínűséggel bekövetkezhet, hogy a mag egy protonja elektront fog be. Az elektronbefogást gyakran *K-befogásnak* nevezik, ugyanis az $r = 0$ környezetében a *K*-elektronok hullámfüggvényének amplitúdója nagyobb, mint más elektronoké, ezért a K-elektronok befogása a legvalószínűbb. A reakcióegyenlet:

$$ {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y^+ + \nu \qquad \textbf{(45-27)}$$

A felső indexben a plusz jel azt jelenti, hogy a leánynuklid elveszített egy elektront, tehát pozitív ion képződött.

Elektronbefogás csak akkor lehetséges, ha a reakcióban tömeghiány lép fel, azaz a reakció *Q*-jának pozitívnak kell lennie. A reakció *Q*-jára levezetett képlet most:

$$Q = (m_X - m_Y)c^2$$

ahol m_X és m_Y a magtömegek. Az atomtömegek:

$$M_X = m_X + Zm_e \qquad \textbf{(45-28)}$$

$$M_Y = m_Y + (Z-1)m_e - m_c \qquad \textbf{(45-29)}$$

45-3 táblázat Radioaktív bomlási folyamatok

Folyamat	leánymag	Q
β−-bomlás	Z nő eggyel	pozitív
β+-bomlás	Z csökken eggyel	pozitív ($> 2m_e c^2$)
gamma-sugárzás	Z nem változik	–
belső konverzió	Z nem változik	–
elektronbefogás (K befogás)	Z csökken eggyel	pozitív

A (45-28) és (45-29) egyenletekből m_X és m_Y értékét behelyettesítve:

$$Q = (M_X - Zm_e)c^2 - [M_Y - (Z-1)m_e - m_e]c^2$$

AZ ELEKTRONBEFOGÁS Q-JA: $$Q = (M_X - M_Y)c^2 \qquad \textbf{(45-30)}$$

Az elektronbefogás és a pozitronemisszió közös vonása, hogy [lásd a (45-23) összefüggést] mindkét folyamat során eggyel kisebb Z-jű nuklid keletkezik. Az „anya" tömege mindkét esetben nagyobb, mint a „leányé". Abban az esetben, ha a reakció Q-jának egyenértéke kisebb, mint két elektrontömeg ($2m_e c^2$ = 1,02 MeV), csak elektronbefogás lehetséges. A 45-3 táblázatban feltüntettük azokat a folyamatokat, amelyek során a gerjesztett mag többletenergiát ad le. A leánymag a karakterisztikus γ-sugarak és röntgensugarak alapján azonosítható; ezzel a folyamat jellegét is meg lehet állapítani.

(6) Spontán hasadás

Sok olyan nehéz atommag, amelynek Z-je nagyobb mint 90, képes spontán hasadásra. A hasadás eredménye két nem egyenlő töredék és két vagy három neutron. A 45-10 ábrán látható a ^{236}U hasadása során keletkező töredékek eloszlása. A bomlástermékek az origót és az anyaelemet összekötő egyenes (szaggatott vonal) mentén helyezkednek el. A 45-4 ábrából kitűnik, hogy a töredékek egy nukleonra eső kötési energiája nagyobb, mint az eredeti nuklidé, azaz *a bomlástermékek össztömege mindig kisebb, mint a „szülőé";* a különbséggel ekvivalens mintegy 200 MeV energia szabadul fel a hasadás során. Mivel mindkét fragmentumban többletneutronok vannak, két vagy három neutron azonnal kevesebb, mint 10-15 s alatt kilép – ezek az ún. *prompt neutronok*. Később néhány ún. *késleltetett neutron* is emittálódik. Következik egy példa a ^{236}U egy valószínű hasadására.

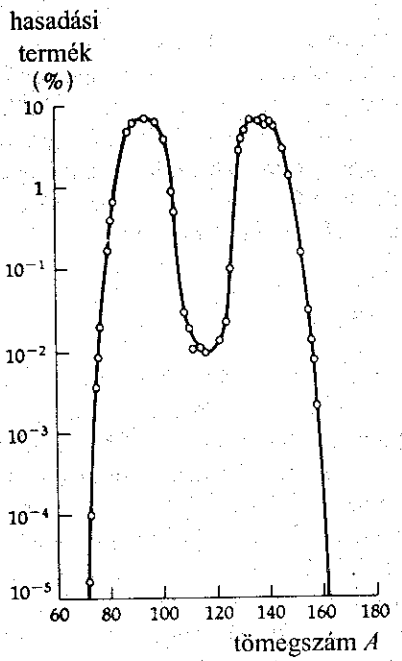
45-10 PÉLDA

Határozzuk meg Q értékét arra az esetre, amikor ^{236}U spontán hasad, és ^{90}Rb és ^{143}Cs keletkezik.

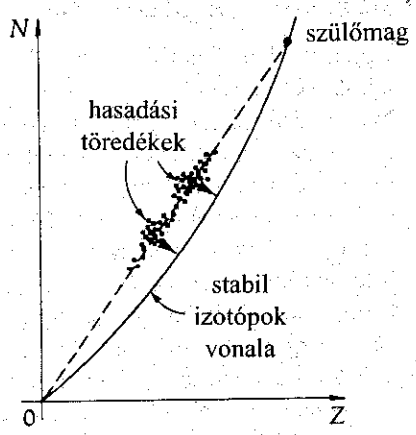
MEGOLDÁS

A hasadás folyamatában megjelenő neutronok számának meghatározásához írjuk fel a reakcióegyenletet:

$$^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{90}_{37}\mathrm{Rb} + {}^{143}_{55}\mathrm{Cs} + 3\,{}^{1}_{0}n \qquad \textbf{(45-31)}$$



a) A hasadási termékek tömeg szerinti százalékos eloszlásából kitűnik, hogy a hasadás általában aszimmetrikus; a legvalószínűbb a két olyan részre bomlás, ahol a tömegszám 90, illetve 140 [Forrás: J. M. Siegel et. al., „Plutonium Project Report on Nuclei Formed in Fission", *Review of Modern Physics* **18**, 538 (1946).]



b) A 45-1 táblázat alapján megrajzoltuk a stabil izotópok vonalát. A hasadási termékek kezdetben a szaggatott vonalra esnek, ezután β⁻-részek kibocsátásával átlósan lefelé haladva elérik a stabil izotópok *stabilitási görbéjét.*

45-10 ábra
^{236}U hasadása a ^{235}U termikus-neutron-abszorpciója után. A két töredék kinetikus energiája egyenként kb. 90 MeV. A töredékek ezt követően tovább bomlanak neutronok, béta-részek, gamma-sugárzás és neutrinó kibocsátásával. Ez utóbbi folyamatban még 20 MeV szabadul fel, az összenergia tehát durván 200 MeV, hasadásonként.

Azért szükséges, hogy a neutronok száma három legyen, mert a reakcióegyenlet két oldalán a tömegszámok, illetve a rendszámok összege csak így egyenlő. A 45-1 táblázatból az atomtömegek: ^{236}U, 236,045 562 u; ^{143}Cs, 142,927 220 u; ^{90}Rb, 89,914 811 u; és n, 1,008 665 u. Kimutatható (lásd a 45A-16 feladatot), hogy erre a reakcióra $Q = (\Delta m)c^2$ értéke:

$$Q = (M_U - M_{Rb} - M_{Cs} - 3m_n)c^2$$
$$Q = [236{,}045\ 562\,\text{u} - 89{,}914\ 811\,\text{u} - 236{,}045\ 562\,\text{u} - 3(1{,}008\ 665\,\text{u})]c^2$$
$$= (0{,}1775\,\text{u})c^2$$

Ezt átszámítjuk MeV egységekre:

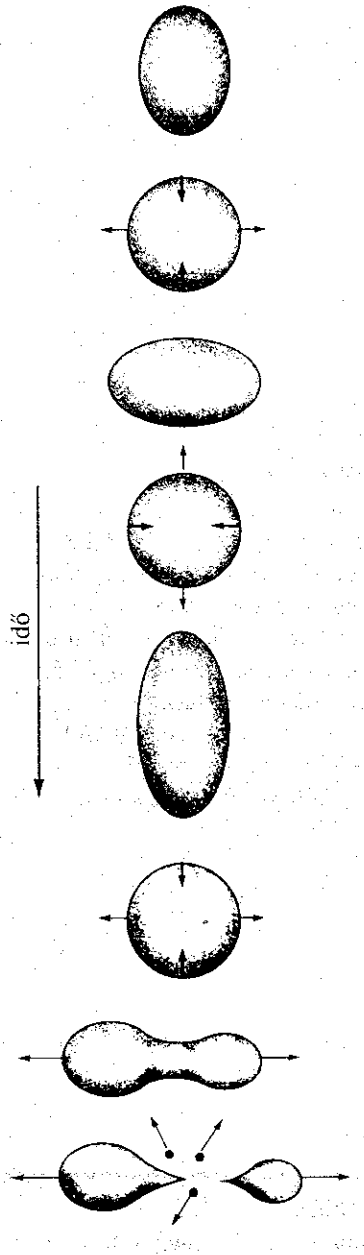
$$Q = (0{,}1775\,\text{u})c^2\left[\frac{931{,}5\,\text{MeV}/c^2}{1\,\text{u}}\right] = 166\,\text{MeV}$$

Ha ehhez hozzáadjuk a 45-4 táblázatból a töredékek bomlásából származó energiát, akkor a fenti hasadási folyamatra jellemző ez a nagy energiafelszabadulás, de a későbbiekben látni fogjuk, hogy mégsem ez az ideális energiaforrás.

Szemléletes képet alkothatunk a hasadás folyamatáról, ha az anyamagot olyan folyadékcseppnek fogjuk fel, amelyre az erős magerőktől származó

45-4 táblázat
A hasadási energia megoszlása

	Energia (MeV)
hasadási termékek kinetikus energiája	165 ± 5
neutronok kinetikus energiája	5 ± 0,5
γ-sugárzás (prompt)	7 ± 1
késleltetett γ-sugárzás	6 ± 1
késleltetett β-részecskék	7 ± 1
késleltetett neutrinók	10
Összesen	200 ± 6



45-11 ábra
Gerjesztett ^{236}U-atommag hasadásának folyadékcsepp-modellje. A többletenergia miatt a csepp gyorsan változtatja alakját, váltakozva lapos, illetve megnyúlt formát vesz fel. A cseppfelszín mozgási irányát nyíllal jelöltük. Amikor a csepp már annyira megnyúlik, hogy „nyak" alakulhat ki rajta, akkor az elektrosztatikus taszítás következtében az atommag prompt-neutronok kibocsátásával két egyenlőtlen töredékre hasad.

„felületi feszültség" hat. A maggal neutronabszorpció útján vagy más módon közölt energia hatására közlünk, rezgések keletkeznek a cseppben, alakja váltakozva tojás alakot vagy korongformát vesz fel (45-11 ábra). A felületi feszültség a cseppet gömbbé igyekszik visszaalakítani, míg a gerjesztési energia hatása a további deformálás. Lassan a csepp súlyzóhoz kezd hasonlítani, középtájon nyakszerű befűződéssel, és a Coulomb-taszítás következtében két része[5] különválik. A folyamat során a töredékek mellett néhány nagyenergiájú neutron is keletkezik.

Radioaktív bomlási sorok

Egy nuklid radioaktív bomlása láncszerű, egymás után következő izotópbomlásokat indíthat meg. A *radioaktív bomlási sorok* közül jelentőségével kiemelkedik az, melyet a 45-12 ábrán mutatunk be. A sor a ^{238}U-ból indul és a ^{206}Pb-nél végződik. Az ábrán feltüntettük az egyes termékek felezési idejét is. Figyelemreméltó, hogy az első bomlás, $^{238}U \rightarrow {}^{234}Th$, felezési ideje ($4{,}5\times10^{9}$ év) sokkal nagyobb a többinél; lényegében ez határozza meg a teljes – $^{238}U \rightarrow {}^{206}Pb$ – átváltozási sor felezési idejét. Ezt a hosszú felezési időt használják fel a geológusok bizonyos kőzetek korának meghatározására. Az olvadt kőzetek kristályosodásakor, különböző olvadáspontjaik következtében, az egyes ásványok természetes szétválása következik be. Kezdeti kialakulásakor a kőzet az egyes elemeket meghatározott arányban tartalmazza. Ha ezek közül valamelyik radioaktív, akkor az idők folyamán az összetétel megváltozik: kialakul egy geológiai naptár. Nézzünk erre egy példát:

45-11 PÉLDA

Egy urántartalmú minta, uranit, ötször annyi ^{238}U-atomot tartalmaz, mint ^{206}Pb-atomot. Tételezzük fel, hogy az ólom teljes mennyisége a 45-13 ábra szerinti radioaktív bomlási sorból származik; az uranit kialakulásakor uránt tartalmazott és ólmot nem. (Az urán más izotópjai olyan sorokat alkotnak, melyeknek nem ^{206}Pb a végterméke.) Számítsuk ki, hogy hány év telt el az uranit kialakulása óta.

MEGOLDÁS

A minta összes atomjainak a száma nem változott, azaz

$$N_0 = N_U + N_{Pb}$$

ahol N_0 a ^{238}U-magok eredeti száma, N_U a ^{238}U-magok jelenlegi száma és N_{Pb} a ^{206}Pb-magok jelenlegi száma. Ennek alapján:

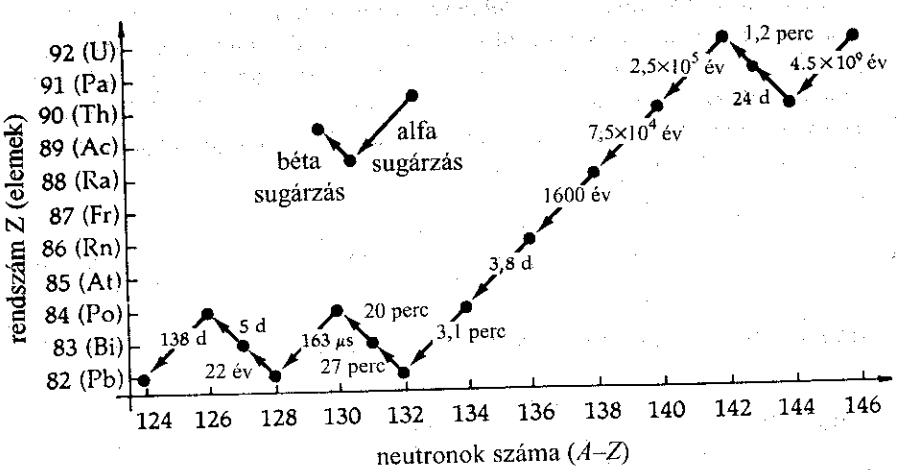
$$\frac{N_0}{N_U} = 1 + \frac{N_{Pb}}{N_U} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

A (45-9) egyenletből ($N = N_U$):

$$N = N_0 e^{-(\ln 2/T_{1/2})t}$$

megkaphatjuk az uránmagok jelenlegi számának és eredeti számának arányát. Ezt t-re megoldva

[5] Ha a gerjesztési energia nem elég nagy ahhoz, hogy meghasadást okozzon, akkor a csepp fölös energiája gamma sugárzás útján távozhat.



45-12 ábra
A $^{238}U \rightarrow {}^{206}Pb$ bomlási sor elsődleges szekvenciája. Nyíllal jelöltük a folyamat egyes lépéseit, a nyilak mellett a felezési időt is feltüntettük. Ez az ábra azonos a 45-2 ábra jobb felső sarkának egy részletével.

$$t = \frac{\ln(N_0 / N)T_{1/2}}{\ln 2}$$

A felezési idő jó közelítéssel $4{,}5 \times 10^9$ év és $N_0/N = 6/5$, így

$$t = \frac{\ln(6/5)(4{,}5\times10^9\ \text{Øv})}{\ln 2} = 1{,}18\times10^9\ \text{Øv}$$

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy ha az eltelt idő sokkal kevesebb, mint egymilliárd év, egy gramm ^{238}U bomlásából évente $1{,}33 \times 10^{10}$ g ^{206}Pb keletkezik. (lásd a 45B-21 feladatot.)

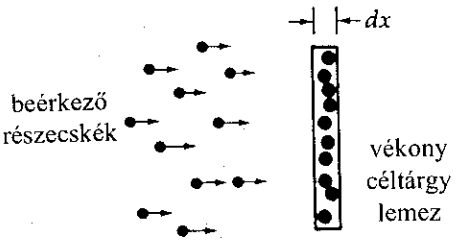
45.6 Az atommag hatáskeresztmetszete

Két részecske kölcsönhatásának valószínűsége azok „hatásgömbjétől" függ. Képzeljük azt, hogy a becsapódó részecske pontszerű lövedék, a mag pedig egy, a beérkezés irányára merőleges δ felületű *céltárgyat* jelent. A δ **keresztmetszet** a céltárgy teljes felületének a becsapódás irányára merőleges vetülete (45-13 ábra). Reakció csak akkor következik be, ha a részecske a céltárgy felületére csapódik be.[6] A keresztmetszet nem közvetlen módon függ a kölcsönható részecskék tényleges fizikai méretétől. Egy adott mag különböző atommag-reakciókban más és más keresztmetszetet képvisel. A δ_s szórási határkeresztmetszet δ_e nagyságú lehet, ha a szóródás *rugalmas* (nincs kinetikus energiaveszteség) és lehet ettől különböző, δ_i a *rugalmatlan* ütközéskor. A 45-14 ábrából az is kiderül, hogy δ jelentősen függ a becsapódó részecske sebességétől. A hatáskeresztmetszetet barn (b) egységben mérik:

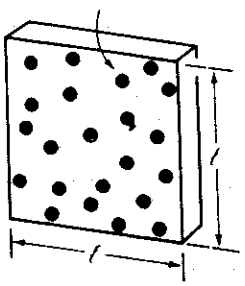
A BARN DEFINÍCIÓJA: $1\text{b} \equiv 10^{-28}\ \text{m}^2 = 10^{-24}\ \text{cm}^2$ **(45-32)**

(A barn nem tartozik az SI-rendszer egységeihez.)

A céltárgyra becsapódó részecskék közül nem mindegyik lép kölcsönhatásba; némelyik változatlanul halad keresztül a lemezkén. A részecske és az atommagok kölcsönhatásának valószínűségét akkor tudjuk meghatározni, ha a *teljes effektív kölcsönhatási felülettel* számolunk; azzal, amit a fóliához



a)
Céltárgy effektív atommagfelülete: σ.



b)

45-13 ábra
Pontszerű részecskék nyalábjával bombázzák a céltárgy – vékony fólia – atommagjait. A céltárgy egy atommagjának a nyalábra merőleges síkra vett vetületének területe σ. Kölcsönhatás akkor következik be, ha a részecske a σ területen csapódik be.

[6] Másik analógia: dobáljunk dárdákat egy falra, amelynek egyes pontjaihoz felfújt léggömböket rögzítettek. Annak valószínűsége, hogy egy dárda egy ballont eltaláljon, függ a felé fordított felülettől, a léggömbök számától és a fal területétől.

közeledő részecske „lát". Ezt a felületet megkapjuk, ha egy atommag σ hatáskeresztmetszetét megszorozzuk a lemezben lévő atommagok számával. Egy négyzetalakú, ℓ^2 területű, dx vastagságú lemezre az $n\sigma\ell^2 dx$, ahol n az atommagok száma a céltárgy egységnyi térfogatában. A kölcsönható és a beérkező részecskék dN/N aránya egyenlő a céltárgy-magok teljes felülete osztva a fólia ℓ^2 felületével, azaz:

$$-\frac{dN}{N} = \frac{n\sigma\ell^2 dx}{\ell^2} = n\sigma dx \qquad \textbf{(45-33)}$$

(Mínusz jel azért van, mert a nyaláb részecskéi távolodnak szóródáskor.)

Integrálva:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_0^x n\sigma dx$$

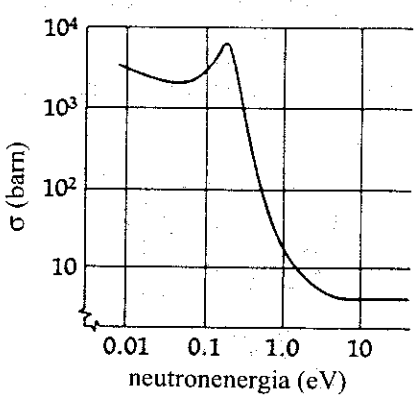
$$\ln N\Big|_{N_0}^{N} = -n\sigma x\Big|_0^x$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -n\sigma x \qquad \textbf{(45-34)}$$

Így adódik, hogy

$$N = N_0 e^{-n\sigma x} \qquad \textbf{(45-35)}$$

Azoknak a részecskéknek a száma, amelyek a céltárgyba x mélységig kölcsönhatás nélkül hatolnak be, x növekedtével exponenciálisan csökken.



45-14 ábra
A természetes kadmium – $_{48}$Cd – neutronbefogási hatáskeresztmetszete a neutronenergia függvényében. A lépték mindkét tengelyen logaritmikus. A lassú neutronokra a nagy hatáskeresztmetszet majdnem teljesen a ^{113}Cd-nek tulajdonítható. [Forrás: Donald J. Hughes & Robert B. Schwartz, *Neutron Cross Sections*, Brookhaven National Laboratory, July 1, (1958)]

45-12 PÉLDA

A fissziós (hasadási) reaktorokban kadmiumból készült szabályozó rudakat alkalmaznak a fölös számú lassú neutronok elnyelésére, mivel a ^{113}Cd izotóp hatáskeresztmetszete lassú neutronokra igen nagy (45-14 ábra). Ez az érték $1{,}99\times10^4$ b, minden ismert anyagénál nagyobb. Számítsuk ki (cm-ben) annak a természetes kadmiumból készült lemeznek a hozzávetőleges vastagságát, amely a felületére érkező lassú neutronok felét elnyeli. A természetes kadmium 12,22%-ban tartalmaz ^{113}Cd-izotópot. A természetes kadmium sűrűsége $\rho = 8{,}65$ g/cm^3, molekulatömege pedig 112,41 g/mol.

MEGOLDÁS

Az x vastagságú anyagon áthatoló neutronnyaláb abszorpcióját a (45-34) egyenletből számíthatjuk ki, ha adva van az anyag σ abszorpciós hatáskeresztmetszete. Egységnyi térfogatban a kadmium atommagok n száma:

$$n = \frac{\rho N_A}{(\text{moltömeg})},$$

ahol ρ a sűrűség, N_A az Avogadro-szám. Ennek azonban csak 12,22%-a ^{113}Cd-mag, ezért a ^{113}Cd magok köbcentiméterenkénti száma

$$n = (0{,}1222)\frac{\rho N_A}{(\text{moltömeg})} = \frac{(0{,}1222)(8{,}65\,\text{g/cm}^3)(6{,}022\times10^{23}\,\text{molekula/mol})}{(122{,}41\,\text{g/mol})}$$

$$n = 5{,}66\times10^{21}\ \text{atommag/cm}^3$$

Az x kiszámításához ezt a (45-34) egyenletbe kell behelyettesíteni:

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -n\sigma x$$

$$x = \frac{-\ln(N/N_0)}{n\sigma}$$

$$= \frac{-\ln(0{,}5)}{(5{,}66\times10^{21}\,\text{atommag/cm}^3)(1{,}99\times10^{4}\,\text{b})(10^{-24}\,\text{cm}^2/\text{b})}$$

$$x = 0{,}00615\,\text{cm} = 6{,}15\times10^{-3}\,\text{cm}$$

A hatáskeresztmetszet nagyon hasznos fogalom magreakciók leírására, alfa-részek magon történő szóródásának, neutronaktivációs-analízis tárgyalására és még sok más kölcsönhatás leírására.

45.7 Magreakciók

Egy részecskének az (eredetileg nyugalomban lévő) céltárgymagokba való becsapódása során nagyon sokféle magreakció mehet végbe. Először gerjesztett átmeneti mag (compound mag) keletkezik, ami – egy vagy több részecske kibocsátása mellett – azonnal bomlik. Először Rutherford figyelt meg ilyen reakciót 1919-ben; ő azt észlelte, hogy amikor alfa-részek (^4_2He) haladnak át nitrogéngázon, protonok keletkeznek. A reakció így írható fel:

$$^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow \left[{}^{18}_{9}\text{F}^*\right] \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H} + Q$$

Az átmeneti mag azonosítása az egyenlet két oldalán a tömegszámegyenlőség megállapítása alapján lehetséges. További példák (az átmeneti mag elhagyásával):

reakció	rövidített jelölés
${}^1_0n + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{11}_5\text{B} + {}^4_2\text{He}$	${}^{14}_7\text{N}(n,\alpha)\,{}^{11}_5\text{B}$
${}^2_1d + {}^6_3\text{Li} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^1_1p$	${}^6_3\text{Li}(d,p)\,{}^7_3\text{Li}$
${}^1_1p + {}^{13}_6\text{C} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + {}^1_0n$	${}^{13}_6\text{C}(p,n)\,{}^{13}_7\text{N}$
${}^1_0n + {}^{32}_{16}\text{S} \rightarrow {}^{33}_{16}\text{S} + {}^0_0\gamma$	${}^{32}_{16}\text{S}(n,\gamma)\,{}^{33}_{16}\text{S}$

Ezekre a reakciókra is érvényes természetesen az energia és az impulzus megmaradásának törvénye. Vegyünk egy olyan általános esetet, amikor x részecske csapódik be a céltárgy X magjába, a reakciótermékek pedig y és Y:

$$x + X \rightarrow y + Y \qquad \textbf{(45-36)}$$

K-val a kinetikus energiát jelölve, a tömeg-energia-mérleg így alakul:

$$E_0 = E$$

$$K_x + m_xc^2 + M_Xc^2 = K_Y + K_y + m_yc^2 + M_Yc^2 \qquad \textbf{(45-37)}$$

Tárgyalásunkat olyan kisenergiájú reakciókra korlátozzuk, amelyeknél a kinetikus energiát és az impulzust nem relativisztikusan, hanem klasszikusan

tárgyalhatjuk. A reakció Q-ját ki tudjuk számítani, ha a részecskék kezdeti és végső tömeg-energiájának a különbségét (vagy a kinetikus energiák különbségét) vesszük:

A REAKCIÓ Q-JA:
$$\begin{cases} Q = \Delta mc^2 = m_x + M_X - m_y - M_Y c^2 \\ Q = K_y + K_Y - K_X \end{cases} \qquad \textbf{(45-38)}$$

Q pozitív, ha a reakcióban tömeghiány lép fel; ilyenkor a termékek kinetikus energiája nagyobb, mint a kezdeti kinetikus energia, tehát a tömeg-energia egy része kinetikus energiává alakult át. A reakciókat, amelyekben tömeg-energia szabadul fel, *exoerg* (energialeadással járó) reakcióknak nevezzük. Másik fajtája az *endoerg* (energiafelvétellel járó) reakció, amikor *Q negatív*; tömeg képződött a kinetikus energia rovására.

Abban az esetben, amikor Q negatív, a beérkező részecskének nem a teljes kinetikus energiája vesz részt a reakcióban; egy része a tömegközéppont mozgásához kötődik (9.5 pont). Ha tehát azt kívánjuk, hogy „menjen" a reakció, a kinetikus energiának $-Q$-nál nagyobbnak kell lennie. A 45C-37. feladatban látni fogjuk, hogy hogyan lehet az energia- és impulzusmegmaradás törvénye alapján a reakciót beindító minimális kinetikus energiát, az $E_{kü}$ *küszöbenergiát* [7] kiszámítani.

A KÜSZÖBENERGIA: ($Q < 0$ esetben)
$$E_{kü} = -Q\left(\frac{m_x + M_x}{M_x}\right) \quad \text{(nem-relativisztikusan)} \qquad \textbf{(45-39)}$$

45-13 PÉLDA

Milyen nagy energiával kell az alfa-résznek minimálisan rendelkeznie a Rutherford által vizsgált ${}^4_2\mathrm{He} + {}^{14}_7\mathrm{N} \rightarrow {}^1_1\mathrm{H} + {}^{17}_8\mathrm{O}$ reakció elindításához?

MEGOLDÁS

A 45-1 táblázatból a tömegértékek:

	rekació előtt		reakció után
^{14}N	14,003 072 u	^{17}O	16,999 131 u
^{4}He	4,002 603 u	^{1}H	1,007 825 u
összesen	18,005 677 u		18,006 956 u

A végső tömeg nagyobb, mint a kezdeti; a tömegváltozás Δm = –0,001 279 u. Ebből a reakció Q-ja:

$$Q = (\Delta m)c^2 = (-0{,}001279\,\mathrm{u})\left(\frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{1\,\mathrm{u}}\right) = -1{,}19\,\mathrm{MeV}$$

A (45-39) egyenletből a küszöbenergia:

$$E_{kü} = -Q\left(\frac{m_x + M_x}{M_x}\right) = -(-1{,}19\,\mathrm{MeV})\left(\frac{18{,}01\,\mathrm{u}}{14{,}00\,\mathrm{u}}\right) = 1{,}53\,\mathrm{MeV}$$

[7] A kezdeti kinetikus energiának legalább olyan nagynak kell lennie, hogy legyőzze a Coulomb-taszítást és így a magok az egymással való kölcsönhatáshoz elegendően közel kerüljenek egymáshoz.

A természetes radioaktív izotópok által kibocsátott legtöbb alfarész energiája 4 MeV-nél nagyobb. Tehát azok az alfa részek, amelyeket Rutherford használt, megfeleltek arra a célra, hogy a reakciót elindítsák. A többlet energia a reakciótermékek kinetikus energiájaként jelent meg.

Rutherford kísérletei után sokan próbáltak töltött részeket olyan energiára gyorsítani, amellyel atommagreakciókat indíthattak el. 1930-ban J. D. Cockcroft és E. Walton protonokat 0,3 MeV-re gyorsított, s ez elég volt a következő reakcióhoz:

$$ {}_1^1\mathrm{H} + {}_3^7\mathrm{Li} \rightarrow \left[{}_4^8\mathrm{Be}^*\right] \rightarrow 2\,{}_2^4\mathrm{He} \qquad \textbf{(45-40)} $$

A gerjesztett berillium kb. 10^{-16} s felezési idővel két alfarészre bomlott. Ennek a reakciónak történeti érdekessége, hogy egyik első kísérleti bizonyítéka volt az Einstein-féle $\Delta E = (\Delta m)c^2$ összefüggésnek.

Attól kezdve, hogy lehetségessé vált a mesterséges elemátalakítás, a fizikusok megpróbálták megvalósítani az alkimisták álmát, az aranycsinálást kevésbé értékes fémből. Arany mesterséges előállítása 1936-ban sikerült J. M. Corknak és E. O. Lawrence-nek, a következő reakciókkal:

$$ {}_{78}^{196}\mathrm{Pt} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_{78}^{197}\mathrm{Pt} + {}_1^1\mathrm{H} $$

$$ {}_{78}^{197}\mathrm{Pt} \rightarrow {}_{79}^{197}\mathrm{Au} + {}_{-1}^{0}\mathrm{e} + \bar{\nu} $$

J. M. Cork szavai szerint azonban „az eredményen érzett örömet beárnyékolta, hogy a reakcióban alkalmazott anyaelem platina volt".

A neutronok központi szerepet játszanak a nukleáris technikában, mivel nincs töltésük, tehát könnyen áthatolnak a mag felületén; – nagy a hatáskeresztmetszetük a magreakciókban. A 45-15 ábra mutatja, hogy a magba ütköző protonnak magas Coulomb-potenciálgátat kell leküzdenie, a töltött részecskék közül tehát csak a nagy energiával rendelkezők érhetik el az atommagot. Igen szemléletesen mutatja ezt a *neutronaktivációs analízis* néven ismert módszer, amelyben az ismeretlen anyag igen kis mennyiségét koncentrált neutonnyalábbal sugározzák be. Az atommagok legtöbbször radioaktív izotópok képződése mellett nyelik el a neutronokat, s az izotópok azonnal bomlanak. Az ismeretlen anyagban lévő elemek a bomlás során kibocsátott karakterisztikus gamma-spektrum alapján azonosíthatók.

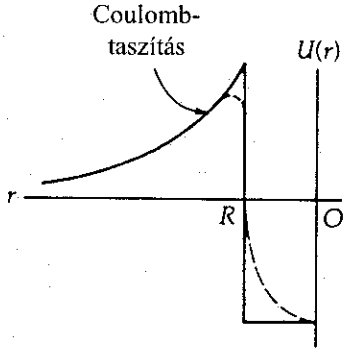
Jó példa a neutronaktivációs analízis alkalmazására az arzén kimutatása a következő reakcióval (l. a 45-14 ábrát):

$$ {}_0^1n + {}_{33}^{75}\mathrm{As} \rightarrow \left[{}_{33}^{76}\mathrm{As}^*\right] \rightarrow {}_{34}^{76}\mathrm{Se} + {}_{-1}^{0}e + \bar{\nu} + 2\gamma \qquad \textbf{(45-41)} $$

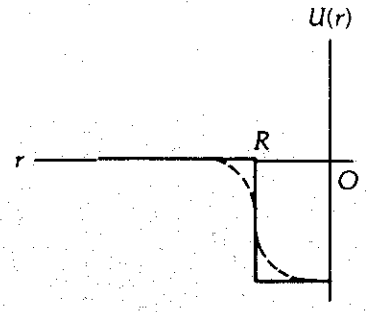
A módszerrel egész kicsiny mennyiségű arzén kimutatható, ezért egyes repülőterek ellenőrző kapuiban neutronaktivációs detektort alkalmaznak a robbanóanyagok felderítésére.

A neutron felfedezése

Már a kezdeti kutatások során tapasztalták egy nagy áthatoló képességű sugárzás megjelenését, amikor alfa-sugárzó anyag kerül érintkezésbe könnyű elemekkel, pl. bórral vagy berilliummal. Először úgy vélték, hogy gammasugárzás keletkezik, de 1932-ben J. Chadwick, amikor a sugárzás útjába pa-



a) A közeledő protonnak a magfelület eléréséhez a Coulomb-taszítást kell legyőzni.



b) A közeledő neutron nem „lát" gátat maga előtt, ezért könnyen behatol a felületbe.

45-15 ábra
Az atommag-potenciálra az egyszerű négyszögletes potenciálvölgy modellt alkalmazva, különbséget tudunk tenni egy közeledő proton és neutron között. (A tényleges potenciális energia inkább a szaggatott vonallal kihúzott görbének felel meg.)

rafint helyezett, szokatlanul nagy számú proton keletkezését észlelte. Ezt a jelenséget nem lehetett gamma-sugarak hatásával magyarázni. Chadwick arra a következtetésre jutott, hogy az ismeretlen sugárzás olyan *töltésnélküli* részecskékből áll, melyek *tömege* kb. a *protonéval azonos nagyságú*. Amikor egy ilyen részecske a parafinban „telibe talál" egy protont, akkor ütközéssel átadja neki a teljes energiáját. Chadwick a részecskét *„neutronnak"* nevezte el. Nagy energiájú neutronok – a töltés hiánya miatt – igen áthatoló képesek, több centiméter vastag ólmon is átjutnak.

Nagy energiájú neutronforrás a berilliumpor és egy alfa-sugárzó anyag, például plutónium, keveréke. A következő reakcióban a plutónium alfa-részeinek igen nagy a neutrontermelési hatáskeresztmetszete:

$$^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{9}_{4}\mathrm{Be}\rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{0}n+Q \qquad \textbf{(45-42)}$$

A kis tömegű neutron a termékek kinetikus energiájának legnagyobb részét elviszi, ezért a neutron kinetikus energiája lényegében egyenlő a reakció Q-jának és a beeső alfa-rész kinetikus energiájának összegével. A maximális neutronenergia ebben az esetben kb. 6 MeV.

Töltött részecskék kimutatása

A 42. fejezetben a 42-11 ábrán bemutatott *szcintillációs* detektoron kívül számos olyan módszer létezik sugárzások és részecskék kimutatására, amely a fotonok és töltött részecskék anyagon való áthaladását kísérő ionizációs hatást használja fel. A 45-16 ábrán látható közismert *Geiger-számláló* kisnyomású gázzal töltött fémcső. A cső és a tengelyében húzódó fémszál közé nagyfeszültséget (~10^3 V-ot) kapcsolnak. A kamrán áthaladó töltött részecskék az útjukba kerülő gázatomokat ionizálják. Az erős elektromos tér a keletkezett elektronokat gyorsítja, s ezek újabb atomokat ionizálnak. Elektronlavina áll elő, ami az elektronoknak a fémszálhoz érkezésekor feszültséglökést eredményez. *Félvezető detektorok,* például szilíciumkristály, segítségével ehhez hasonlóan a töltött részecskék által kiváltott vezetési elektronok okozta impulzust detektálják. Ezek a szilárd félvezető detektorok nagyon hasznosak olyan vizsgálatokhoz, ahol lényeges a kis méret.

A neutron elektromos semlegessége miatt, anyagon való áthaladásakor nem ionizál. A neutrondetektorok egyik fajtájában a bór nagy neutronabszorpciós hatáskeresztmetszetét használják fel: a reakcióban nagyenergiájú alfa-részek keletkeznek, jelentékeny ionizációs hatással. Gyakran alkalmaznak bórtrifluorid (BF_3) gázzal töltött csövet, melyben a következő reakció megy végbe:

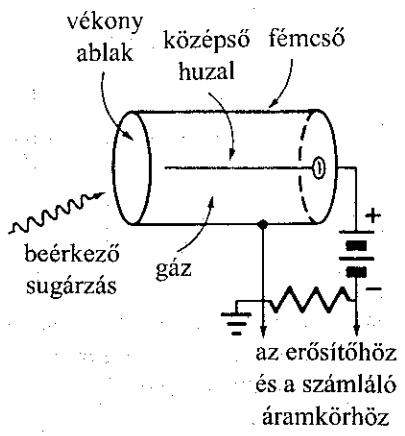
$$^{1}_{0}n+{}^{10}_{5}\mathrm{B}\rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{7}_{3}\mathrm{Li}+Q \qquad \textbf{(45-43)}$$

Radioaktív kormeghatározás

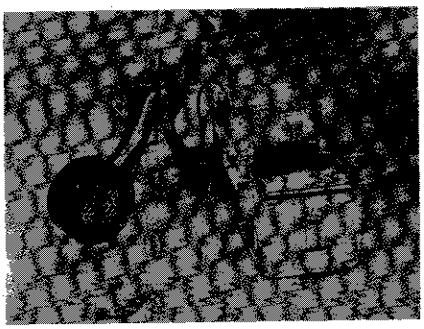
Neutronreakció segítségével történik ősi szerves anyagok radioaktív kormeghatározása. A felső légrétegekben a kozmikus sugárzás neutronjai és a közönséges ^{14}N nitrogénizotóp kölcsönhatása következtében radioaktív ^{14}C szénizotóp keletkezik

$$^{1}_{0}n+{}^{14}_{7}\mathrm{N}\rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}+Q \qquad \textbf{(45-44)}$$

A ^{14}C felezési ideje 5730 év, ami jóval kisebb, mint amióta a képződése tart. Egyensúlyi koncentráció alakul ki: a képződési sebesség és a bomlási sebesség egyenlő. Kb. egy ^{14}C-atom jut minden 1012 darab stabil ^{12}C és ^{13}C izo-



a) Egyszerű végablakos Geiger-cső



b) Hordozható telepes Geiger számlálóval mérik egy urántartalmú ásvány, a szurokérc radioaktivitását.

45-16 ábra
Geiger-Müller –(GM)– számláló, egyszerűbb nevén Geiger-számláló.

tópra. Kémiai szempontból a radioaktív izotópok viselkedése nem tér el a stabil izotópokétól, ezért amikor az élő növények és állatok a szenet a táplálékkal felveszik, szervezetükben a radioaktív izotóp meghatározott arányban halmozódik fel. Az elhalt szervezetek nem táplálkoznak, ezért a bennük lévő ^{14}C relatív koncentrációja a bomlás miatt lassan csökken. A reakció:

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu} \qquad \textbf{(45-45)}$$

A radiokarbon kormeghatározást tehát az teszi lehetővé, hogy az idő múlásával a szerves anyagok radioaktivitása csökken. A ^{14}C bétabomlásának kis energiája és a minták csekély radioaktivitása miatt a módszer pontossága korlátozott: 5000 évre számítva a bizonytalanság ±50 év. A módszer megbízhatósága azon múlik, hogy vajon igaz-e, hogy a ^{14}C-termelés időben állandó. A kapott adatokat összevetették ásatásokból származó, ismert korú minták vizsgálatainak eredményével, és azt találták, hogy az eljárás jó eredményeket szolgáltat.

45-14 PÉLDA

Régészek egy ókori tűzrakásból visszamaradt hamut vizsgálnak. A hamuból származó szén radioaktivitása csak az egyharmada annak, amit jelenkori növényekben mérnek. Számítsuk ki az őskori tűzhely korát.

MEGOLDÁS

A radioaktív bomlásban résztvevő anyag aktivitását a (45-10) összefüggésből számíthatjuk ki:

$$A = A_0 e^{-(\ln 2/T_{1/2})t}$$

Fejezzük ki ebből t-t:

$$t = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)\frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{(\ln 3)(5730 \text{ év})}{\ln 2} = 9082 \text{ év}$$

45.8 Az atomenergia

A 45-4 ábra az egy nukleonra jutó kötési energia görbéje. Ennek alapján megérthetjük, melyek a magreakción alapuló energiatermelés alapelvei. A kötési energia felszabadulását akkor várhatjuk, ha a reakcióban olyan termék keletkezik, amelyik közel esik a csúcshoz. A **maghasadás** (fissziós reakció) során a nagy tömegű magból kisebb tömegűek keletkeznek, miközben sok energia szabadul fel. A másik fajta, **fúziós reakció** során kistömegű nuklidok kapcsolódnak össze nagyobbakká. Ezt a reakciót is energiafelszabadulás kíséri. A két folyamat azonban nagyon különböző.

Atommaghasadás

Az urán minden természetben előforduló izotópja, és a legtöbb nehéz nuklid hajlamos a spontán maghasadásra. A 45.10. példából kiderül, hogy milyen hatalmas energiák szabadulnak fel ilyenkor. A maghasadáson alapuló atomreaktor sokféle reakció során termelhet energiát, azonban jelenleg a legtöbb reaktorban ^{235}U izotópot használnak „fűtőanyagként". A természetes urán ezt az izotópot csak 0,72%-ban tartalmazza, míg a ^{238}U izotópot 99,27%-ban, a ^{234}U izotópot viszont csak 0,005%-ban. A reaktorokat természetes uránnal is üzemeltethetnénk, hasznosabb azonban, ha növeljük a ^{235}U koncentrációját. A „dúsítást" költséges gázdiffúziós folyamattal végzik; amivel 90% ^{235}U tartalmú anyag állítható elő.

Az energiatermelés első lépéseként a ^{235}U-ból neutronbefogással ^{236}U keletkezik. A 45-10 példában láttuk, hogy a ^{236}U azonnal hasad. Ennek során két vagy három újabb neutron keletkezik, ami nagyon heves láncreakciót indít el. A többletneutronok eltávolításáról gondoskodnunk kell, ha a hasadás sebességét kontrollálni kívánjuk. Konstans reaktorteljesítmény eléréshez pontosan egy neutront szabad csak felhasználni újabb hasadás előidézéséhez. Az eltávolított neutronok radioaktív bomlást szenvednek vagy pedig elnyelődnek a *szabályozó rudakban*.[8] Ezek kadmiumból vagy más nagy neutronbefogási hatáskeresztmetszettel rendelkező anyagból készültek. Szerencsére a felszabaduló neutronoknak 1%-a nem „prompt", hanem „késleltetett" – ezek ugyanis olyan neutronban gazdag hasadási termékekből származnak, amelyek élettartama másodperc vagy perc nagyságrendű. Ezeknek a késleltetett neutronoknak a jelenléte teszi lehetővé, hogy egyszerű mechanikai módszerrel, szabályozó rudakkal avatkozhassunk be a folyamatba. Az energiatermeléshez felhasznált urán mennyisége csekély, az erőművek azonban egyre növekvő mértékben merítik ki a világ uránkészletét.

45-15 PÉLDA

Egy átlagos atomerőmű teljesítménye kb. 1000 MW. Tegyük fel, hogy az össz-hatásfok 40%, és minden egyes hasadás 200 MeV hőt termel. Számítsuk ki a napi ^{235}U-fogyasztást!

MEGOLDÁS

A feltételezett 40% hatásfok mellett a hasadási folyamatban 1000 MW hasznosítható elektromos teljesítményhez szükséges hasadási energia:

---

[8] A szabad neutron nem stabil, átlagosan 900 s felezési idővel bomlik:

Szabad neutron $$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \qquad (45\text{-}46)$$

A magban a neutron stabilitását a Pauli-elv biztosítja. Alapállapotban a mag legalacsonyabb energianívói be vannak töltve. A fenti reakcióban képződő protonoknak ezért magasabb, még betöltetlen szintekre kellene kerülni, de ehhez a legtöbb protonnak nincs elég energiája. A magneutronok tehát a Pauli-elv miatt nem bomlanak.

Egyes újabb elméletek szerint a szabad proton sem stabil, élettartama 10^{30} év vagy annál hosszabb. A javasolt reakciók közül a legvalószínűbb:

Szabad proton $$p \xrightarrow{?} e^+ + \pi^0 \qquad (45\text{-}47)$$

Ezt nehéz kísérletileg kimutatni, annyi azonban bizonyos, hogy az élettartam nem lehet 10^{32} évnél rövidebb – ez 10^{22}-szer több, mint az az idő, ami a világegyetem keletkezése, a Nagy Robbanás (Big Bang) óta eltelt. Az annihilációnak tehát nincs közvetlen esélye.

$$\frac{1000\,\text{MW}}{0{,}40} = 2500\,\text{MW} = \left(2{,}5\times10^{9}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}\right)\left(\frac{86\,400\,\text{s}}{\text{nap}}\right) = 2{,}16\times10^{14}\,\frac{\text{J}}{\text{nap}}$$

A hasadások száma naponta:

$$\left(2{,}16\times10^{14}\,\frac{\text{J}}{\text{nap}}\right)\left(\frac{1\ \text{maghasadás}}{200\times10^{6}\ \text{eV}}\right)\left(\frac{1\ \text{eV}}{1{,}602\times10^{-19}\ \text{J}}\right) = 6{,}74\times10^{24}\,\text{nap}^{-1}$$

Ennyi ^{235}U-atommag használódott el; tehát az egy nap alatt elfogyasztott ^{235}U tömege:

$$\left(6{,}74\times10^{24}\,\frac{\text{atommag}}{\text{mol}}\right)\left(\frac{235\ \text{g/mol}}{6{,}02\times10^{23}\ \text{mag/mol}}\right) = 2631\ \text{g/nap} = \quad 2{,}63\ \text{kg/nap}$$

Összehasonlításképpen: egy szénüzemű hőerőmű ugyanekkora elektromos teljesítmény előállításához naponta 6×10^6 kg szenet fogyaszt.[9]

Atomreaktor. Atomreaktorok tervezéséhez nagyon sok problémát kell megoldani. A hasadás során felszabadult neutronok például „gyors" neutronok; energiájuk ~1 MeV és ~15 MeV között van. A ^{235}U abszorpciós hatáskeresztmetszete csak lassú neutronokra nagy; olyanokra, melyek energiája ennek töredéke, kb. 1 eV. A hasadási neutronok lassításához *moderátorokat* alkalmaznak – olyan atomokat, melyek tömege közel van a neutronéhoz, így ütközés során sok energiát tudnak átvenni a neutronoktól. Ideális anyag a $^{1}_{1}\text{H}$ volna, azonban ez maga is elnyel neutronokat, a célra tehát nem a legalkalmasabb. A következő a sorban a deutérium $^{2}_{1}\text{H}$, ennek a neutronbefogási hatáskeresztmetszete kicsi, ezért a *nehézvíz*, amelyben az ^{1}H atomot ^{2}H helyettesíti, megfelelő moderátor. Másik lehetőség a nagyon tiszta szén, ^{12}C. Nagyon fontos itt a tisztaság, mivel sok elem – köztük maguk a hasadási termékek is – elnyelnek neutronokat. A reaktor felületén is elszöknek neutronok; ez további veszteséget jelent. A *kritikus tömeg* a hasadó anyagnak az a legkisebb tömege, amely még fenn tudja tartani a láncreakciót. Ez függ a nukleáris fűtőanyag típusától, a *dúsítás* fokától, a moderátortól, és a moderátor körül elhelyezett fűtőelemek *geometriájától*. Tiszta ^{235}U kritikus tömege 3 kg, ha moderátornak közönséges vizet alkalmaznak.

Mivel minden hasadásból csak egy neutront hasznosítanak a láncreakció fenntartásához, a többit felhasználják arra, hogy közönséges ^{232}Th-ból és ^{238}U-ból hasadó ^{233}U és ^{239}Pu izotópot állítsanak elő. Ezek a berendezések a *szaporító vagy tenyésztő reaktorok*, amelyek elegendő fűtőanyagot termelnek a működés szintentartásához, és ezen túlmenően más reaktorok számára kb. tíz évre elegendő hasadó anyagot állítanak elő.[10] Két oka van annak, hogy a plutóniumtermelő reaktorok működését korlátozzák. Az egyik ok a plutónium nagyfokú veszélyessége. A másik ok az, hogy ha a termelt plutónium

[9] 1986-ban a nukleáris erőművek részaránya az Egyesült Államok elektromos energiatermelésében 16,6% volt, a szénüzeműeké 55,7%. (A többi energiát kőolajból, földgázból, vízierőművekből és más forrásokból nyerték.) Ahhoz, hogy ennek méretét el tudjuk képzelni, közöljük, hogy az USA **napi** elektromos energia termelésének fedezésére 197 mérföld hosszúságú szenesvagonokból álló szerelvényt kellene megtölteni. Az USA **napi** kőolajszükségletének fedezésére ugyanebben az évben (1986-ban) 301 mérföld hosszú, olajtartályokból álló vonatra lett volna szükség!

[10] Ez persze nem jelent végnélküli üzemanyag termelést, az induláshoz szükséges alapfűtőanyag nem nélkülözhető, azonban a szaporító reaktor az elérhető készleteket mintegy megszázszorozza.

(vagy más nukleáris fűtőanyag) terroristák kezébe kerül, azok felhasználhatják zsarolásra, vagy valamilyen nagyon egyszerű pusztító fegyver előállítására. Ez a veszély a reaktorok számának növekedésével egyre nagyobb lesz.

A reaktorok hőt termelnek, ezzel azután elektromos generátorokat hajtó gőzturbinákat üzemeltetnek. Különleges gondként jelentkezik, hogy a reaktor szerkezeti elemeinek el kell viselniük a nagyerejű sugárhatást, másrészt a hőt, a reaktor magjától a turbinához közvetítő meleg folyadékot, el kell szigetelni a környezettől. A reaktormagban bekövetkező bármilyen mechanikai törés a környezetre végzetes radioaktív szennyezést idézhet elő. A nagy élettartamú, erősen radioaktív hasadási termékek biztonságos elhelyezése is komoly probléma. Egy reaktor átlagos élettartama harminc év körül van a szerkezeti anyagok radioaktivtás okozta gyengülése miatt. (Egy nagyobb atomerőmű szétszerelése nem kis költséggel jár!) A tudományos kutatási célokra használt reaktorok nagyintenzitású neutron- és gammasugár-nyalábjait alkalmazzák a legkülönfélébb vizsgálatokhoz a biológiában és az orvostudományokban. A bennük képződő radioaktív elemek ugyancsak felhasználhatóak biológiai vizsgálatokra, mert vándorlásuk a szervezetben nyomon követhető.

Atommagfúzió

A Napból és a többi csillagból sugárzott energia forrása a fúzió, azaz a könnyű atommagok összekapcsolódása. A Nap és a Napnál hidegebb csillagok fő energiaforrása *proton-proton-ciklus*nak nevezett fúziós reakciólánc. Ennek végeredménye az, hogy négy proton összekapcsolódása ${}_2^4\mathrm{H}$ atomot, két pozitront, két neutrínót és két gammakvantumot eredményez:

$$4\ {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu + 2\gamma + Q \qquad \textbf{(45-48)}$$

A 45C-39 feladatban látni fogjuk, hogy összesen 27,7 MeV energia szabadul fel; nukleononként 6,9 MeV, szemben a hasadási rakciókban nyert 1 MeV/nukleon energiával. Vélhetőleg a Napnál melegebb csillagokban a fő energiaforrás a *szénciklus* (lásd a 45B-17 feladatot).

Rendkívüli haszonnal jár majd, ha ténylegesen sikerül fúziós reaktorral energiát termelni. A fúziós reakció során – a hasadással szemben – sokkal kisebb a radioaktív hulladékok elhelyezésének a problémája. Nem termelődik fegyverként felhasználható anyag, és attól sem kell tartani, hogy „megszalad" a reaktor, és baleset következik be. Nagyon fontos szempont, hogy ez a fűtőanyag olcsó, mert a tengervízben és tavakban található természetes deutérium használható fel. A reakciók lehetséges sorozata a következő:

$${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_1^3\mathrm{H} + {}_1^1\mathrm{H} \qquad (Q = 4{,}0\ \mathrm{MeV}) \qquad \textbf{(45-49)}$$

$${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_2^3\mathrm{He} + {}_0^1n \qquad (Q = 3{,}3\ \mathrm{MeV}) \qquad \textbf{(45-50)}$$

$${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1n \qquad (Q = 17{,}6\ \mathrm{MeV}) \qquad \textbf{(45-51)}$$

Önmagában is érdekes az utolsó reakció, amelyben trícium szerepel, mert ez szolgáltatja a legtöbb energiát. A trícium a természetben nem fordul elő nagyobb mennyiségben, mivel radioaktív (béta-bomló, 12,3 év felezési idővel). Mesterséges előállítása rendkívül költséges: ára kb. 2 millió dollár kg-onként! Figyelemreméltó az a javaslat, mely szerint a reaktormagot olvadt lítiummal kellene körülvenni. A reaktorban termelődött nagyenergiájú neutronok elnyelődnek a lítiumban, miközben felmelegítik. Ezzel a hővel fejlesztenének gőzt az elektromos energia előállítására. Még egy előnye van a dolognak; a neutronok tríciumot termelnek a következő reakciókkal:

$$ {}_0^1n + {}_3^7\mathrm{Li} \rightarrow {}_1^3\mathrm{H} + {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1n \qquad \textbf{(45-52)} $$

(gyors) (lassú)

$$ {}_0^1n + {}_3^6\mathrm{Li} \rightarrow {}_1^3\mathrm{H} + {}_2^4\mathrm{He} + 4{,}8\,\mathrm{MeV} \qquad \textbf{(45-53)} $$

(lassú)

A trícium egy körfolyamattal fűtőanyagként visszajuttatható a reaktorba; ez egy fajta szaporító reakció, melynek folyamán az olcsó lítiumból tríciumot állítanak elő.

A fúziós reakcióknak nincs hasadási termékük, azonban jelentékeny mennyiségben állítanak elő radioaktív tríciumot, ezen kívül a neutronok a szerkezeti elemekben radioaktivitást indukálnak; így a radioaktív veszélyeztetettség fennáll. Ez a veszély elhárítható egy érdekes reakció kihasználásával, amelyben a természetben bőségesen előforduló bórt és hidrogént reagáltatják:

$$ {}_5^{11}\mathrm{B} + {}_1^1\mathrm{H} \rightarrow 3\ {}_2^4\mathrm{He} + 8{,}7\,\mathrm{MeV} \qquad \textbf{(45-54)} $$

Ezt *termonukleáris* hasadásnak is nevezik. Több hasadási terméket is eredményez. Megvan arra is a remény, hogy a nagyenergiájú alfa-részekkel – gőztermelés, turbina és generátor nélkül – közvetlenül tudnak majd elektromos energiát előállítani. A fő akadály az, hogy a reakció elindításához, a Coulomb-gát legyőzéséhez 3×10^9 K hőmérsékletet kell elérni.

A 45-16 példában összehasonlítjuk a fúziós energiatermelést és az ásványi fűtőanyagok elégetésével végzett energiaelőállítást. A reakció reaktorban még nem végezhető el, azonban a példából látható, hogy a fúziós folyamatokban nagy lehetőségek rejlenek.

45-16 PÉLDA

Számítsuk ki az egy liter tengervíz természetes deutériumtartalmából ideális esetben nyerhető energiát a következő reakció alapján:

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_2^3\mathrm{He} + {}_0^1n \qquad \textbf{(45-55)} $$

A deutérium a természetes hidrogénben 0,015%-ban jelenlévő stabil izotóp. (Egy liter vízből jelenleg kb. 3 cent költséggel lehet a deutériumot tartalmazó vízmolekulákat kivonni.)

MEGOLDÁS

Számítsuk ki először a reakció Q-ját. A reakció végén a tömeghiány:

	induló tömeg		**végső tömeg**
$2\ {}^2\mathrm{H}$	2(2,014 102 u)	${}^3\mathrm{He}$	3,016 029 u
		${}^1\mathrm{n}$	1,008 665 u
összesen	4,028 204 u		4,024 694 u

A tömeghiány 0,003 510 u; ezt átszámítjuk energiára:

$$ Q = (\Delta m)c^2 = (0{,}003\,510\,\mathrm{u})\left(\frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}/\mathrm{c}^2}{1\,\mathrm{u}}\right)c^2 = 3{,}27\,\mathrm{MeV} $$

illetve joule-ban:

$$Q = (3{,}27\times10^{6}\ \text{eV})\left(\frac{1{,}602\times10^{-19}\ \text{J}}{1\,\text{eV}}\right) = 5{,}24\times10^{-13}\ \text{J}$$

1 liter vízben a vízmolekulák száma: (6,03 × 10^{23} molekula/mol) (103 g/l) [1/(18 g/mol)] = 3,36×10^{25} A ^{2}H-magok száma ebben – figyelembe véve, hogy a reakcióban 2 darab ^{2}H-mag szerepel: (3,36×10^{25} molekula/l) (2H-mag/molekula) (0,00015 ^{2}H/H) = 1,004×10^{22} Egy liter vízből nyerhető teljes energia tehát:

$$\left(\frac{1{,}004\times10^{22}\ {}^{2}\text{H}/1}{2\ {}^{2}\text{H}/\text{reakció}}\right)\left(5{,}24\times10^{-13}\ \frac{\text{J}}{\text{reakció}}\right) = 2{,}63\times10^{9}\ \text{J}/1$$

Ennek az energiának a nagyságát jobban érzékeljük, ha összehasonlítjuk 1 l benzin elégetésekor felszabaduló energiával, ami kb. 3,4·10^{7} J/l. Mivel

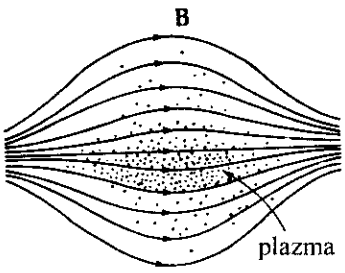
$$\frac{2{,}63\cdot10^{9}\ \text{J}}{3{,}4\cdot10^{7}\ \text{J}/1} = 77{,}3\,1$$

ez azt jelenti, hogy 1 l normál tengervíz fúzió energia tartalma kb. 77 l benzin kémiai energiájával egyenlő.

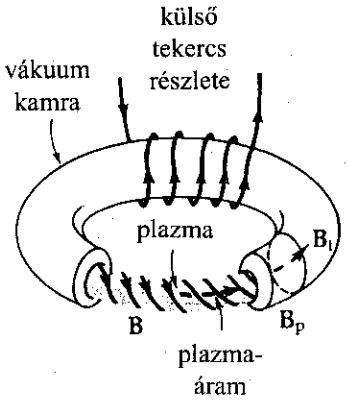
A töltések összetartása. Az atommagok pozitív töltésűek, ezért ha azt akarjuk, hogy a Coulomb-taszítást legyőzve olyan közel jussanak egymáshoz, hogy a rövidtávú vonzóerők érvényesüljenek – azaz végbemenjen a fúzió – akkor a magoknak igen nagy kinetikus energiát kell adni. A mai nagyenergiájú gyorsítóberendezésekkel könnyű nagy sebességet előidézni, de itt az is elengedhetetlen, hogy az ütközések gyakoriak legyenek. Meg kell oldani tehát, hogy a fúzióhoz szükséges igen nagy, durván 200-400 millió K hőmérsékletet az elérhető legnagyobb sűrűségű plazmában állítsuk elő. John D. Lawson vezetett le erre egy összefüggést; szerinte akkor önfenntartó a reakció, ha teljesül a *Lawson-kritérium*: $n\tau > \sim10^{20}$ sm^{-3}, ahol n a a kölcsönhatásban résztvevő részecskék sűrűsége, és τ az összetartási idő.

Jelenleg kétféle összetartási mechanizmus látszik megvalósíthatónak. Az egyik a **mágneses összetartás**, amikor a magokból és elektronokból álló semleges plazmát „mágneses palackba" zárják. (A behatároló erők nagyságának megértéséhez nézzük meg a 30. fejezetben a 30-6 ábrát). Az az egyszerű elrendezés, amelyet a 45-17a ábrán mutatunk be, a végeken „lyukas". Ennek javított változatában, amelyet a Szovjetunióban fejlesztettek ki, a végeket toroid alakban összezárják (45-17b ábra). A készülék neve *tokamak* – ez olyan betűszó, amely a „tórusz", „kamra" és „mágneses" szavak orosz változatának összevonásából keletkezett. A forró plazma nem érhet a vákuumkamra falához; nem azért mert az esetleg megolvad, hanem mert a folyamat a fúziós hőmérséklet elérése előtt „befagy". A koncentrált plazma fúziós hőmérsékletre való felmelegítésére több megoldást javasoltak: erős áram átbocsátását, bombázást semleges részecskékkel, összenyomást igen erős mágneses térrel vagy a rádiófrekvenciás fűtést.

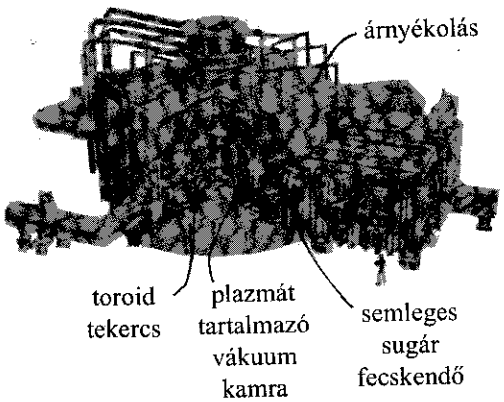
Egy másik módszer neve **tehetetlenségi** (inerciális) **összetartás.** Egy fűtőanyagból készült, kb. 1 mm átmérőjű kis gömböt felrobbantanak úgy, hogy egyszerre minden oldalról bombázzák igen nagy energiájú lézernyalábokkal. A keltett lökéshullám befelé terjed, az anyag sűrűségét kb. az ezerszeresére növeli, ez fűti fel a gömböcske magját a kívánt hőfokra. A fúziós feltételek – a mag tehetetlensége folytán – 10^{-11}–10^{-9} s ideig fennmaradnak, majd ezután a nagy nyomás szétfújja a gömböcskét. A számítások szerint – ha sikerül jó hatásfokot elérni – akkor egy 1000 MW-os erőmű üzembentartásához elegendő másodpercenként 10 gömböcske.



a) Egyszerű „mágneses tükör" erőtérkonfiguráció. A mozgó töltött részecskéket a rájuk ható mágneses erő „visszatükrözi" a két végről a közép felé. Sajnos a végek nem zárnak tökéletesen, ugyanis az erővonalakkal párhuzamosan haladó részecskék nem „éreznek" eltérítő erőt.



b) A tokomakban az (a) szerinti elrendezés tartálya egy toroid. A toroid tengelyében futó B_t toroidális mezőt a külső tekercsben folyó áram idézi elő. Magában a plazmában folyó áram a B_p poláris mezőt hozza létre (ez egyúttal a plazma fűtését is segíti). A két mező kombinációja az összetartási karakterisztikát is javító, B spirálisan futó mezőt eredményezi.



c) Tokomak Fúziós Kisérleti Reaktor (Tokomak Fusion Test Reactor TFTR) Princetonban (New Jersey). A plazmát egyrészt a benne indukált árammal fűtik; ehhez járul az a hő, melyet a belövellt nagysebességű semleges atomok idéznek elő.

45-17 ábra
Vázlatos rajz; atommagokból és elektronokból álló forró plazma összetartása fúziós reakcióhoz.

A könyv írása idején (1989-ben) üzemelt olyan kísérleti reaktor, amellyel elérték az *áttörési pontot*, azt az állapotot, amikor a termelt fúziós energia éppen elegendő a fúzió beindításához. Nem tudtak még *gyújtást* produkálni, vagyis olyan feltételeket, melyeknél a plazma maga táplálja a termonukleáris reakciót. Nagyon súlyos mérnöki feladatokat kellene még itt megoldani, de van rá remény, hogy – nemzetközi összefogással – a fúziós folyamat megvalósítható.

A RÉSZECSKEFIZIKA TÖRTÉNETE ÉS JELENLEGI ÁLLÁSA

Thomas Ferbel
(University of Rochester)

Heteken és hónapokon át hajóztunk
(négy hetet együtt hónapnak mondunk)
De eddig még soha (itt a kapitány beszél)
A Snarknak még szagát sem hozta felénk a szél.

LEWIS CAROLL
(Snark vadászat, 1891)

Bevezetés

Az anyag szerkezetének és a vele kapcsolatos törvényszerűségeknek felderítése mindig foglalkoztatta a tudósok fantáziáját. Növelve azoknak a berendezéseknek az energiáját, amelyek egyre finomabb és finomabb felbontást tettek lehetővé, új és meglepő jelenségeket sikerült felfedezni. Századunk tudományos felfedezései lélegzetelállítóak, azonban a modern fizika forradalmának egyik legjelentősebb teljesítménye mégis az, hogy a már elfogadott fizikai elveket a kísérleti megfigyelések egyre nagyobb mennyiségű és egyre változatosabb tényeire lehetett alkalmazni. Kiderült, hogy világegyetemünk kis számú fundamentális objektumból áll össze. Az objektumok négyféle olyan erővel hathatnak egymásra, amelyek első pillantásra teljesen különböznek egymástól. A behatóbb vizsgálat alapján van rá remény, hogy kideríthetjük: itt egyetlen alapvető törvény különböző megnyilvánulásairól van szó.

Ha az eget kezdjük el vizsgálni, felfedezzük a naprendszerben a gravitációt; hatalmas tömegek vonzzák egymást irdatlan távolságokból. A sokkal erősebb elektromágneses, nukleáris és gyenge kölcsönhatási erőknek éppen csak a jeleit érzékelhetjük. Az elektromágneses erő a gravitációhoz hasonlóan négyzetesen csökken a távolsággal, azonban a nagy testeknek alig van eredő töltésük, így az elektromágnesség óriási szerepét csak akkor érzékeljük, ha a testeket atomi vagy molekuláris méretekben vesszük szemügyre. A másik két erő rendkívül kis távolságon hat, ezért észlelésükhöz az atommagba kell behatolnunk. A gyenge kölcsönhatás ezen felül csak bizonyos instabil magok és részecskék bomlásakor nyilvánul meg.

Az eddig tanultak alapján kiderült, hogy az atomok világát, a kondenzált anyagot, a kémiai jelenségeket az elektromágnességre alkalmazott kvantummechanika segítségével tudjuk megmagyarázni. Az atommag igen nagy stabilitása csak akkor érthető, ha olyan nagy vonzóerőt tételezünk fel, amely képes a pozitív töltésű protonok között ható elektromos taszítást le-

győzni. Ez az új erő független az elektromos töltéstől. De akkor honnan származik? Lehet-e ez az anyagnak belső tulajdonsága, mint az elektromos töltés, amely a Coulomb-törvény alapját képezi, vagy pedig valamilyen fundamentális tulajdonságok kiegyensúlyozódása után megnyilvánuló *maradék* (remanens) *hatás*. Ez utóbbira példa egy semleges molekula, ahol az elektromos töltések összege zérus, de a töltéseloszlás egyenlőtlen, így a molekulák elektromosan vonzzák egymást. Részecskefizikai kísérletek alapján arra hajlunk, hogy a magerő inkább reziduális, maradék jelenség.

A részecskefizika utóbbi harminc év alatt elért eredményei lenyűgözőek. Az új nagyenergiájú gyorsítókban sokféle és nem is sejtett részecske egész „állatseregletét" produkálták. Ezek természetesen nevet kaptak, és görög betűkkel jelölték őket, pl. müon (μ), pion (π), lambda (Λ), szigma (Σ), stb. míg ki nem merítették az egész görög ábécét. Mindegyik instabil – élettartamuk $\sim 10^{-23}$ s-tól $\sim 10^{-6}$ s-ig terjed. A felfedezésáradat zavarbaejtő volt. Akkor lehetett elvi meggondolások alapján csoportosítani, „családokba" sorolni őket, amikor lényeges hasonlóságokat állapítottak meg a különböző részecskék között. Kialakult valamiféle rend, azonban az egész még mindig nagyon bonyolult volt.

A részecskefizikusok arra voltak kíváncsiak, hogy a sok, alapvetőnek tartott részecskét nem lehet-e előállítani néhány még elemibb objektumból. A jelenlegi elmélet éppen itt tart: a többszáz részecskét úgy írja le, mint néhány **kvark** és bizonyos „hírnökök" (messengers), **gluonok** (ragasztók) kombinációját. Az új alkotórészek tulajdonságainak furcsa neveket adtak, pl. *szín* és *íz* (angolul: color, flavor) [hatféle íz, zamat van, ezek közül egyik elnevezése *ritkaság* (strangeness), a másiké *báj* (charm)]. Ezeket a szavakat persze nem a szokásos módon kell értelmezni, csak az alkotórészeket jellemző kvantumszámok megjelölésére valók.

A legújabb felfedezések, és azok elméleti értelmezése alapján megalkották a **Standard Modellt**, ami egyenlőre nem teljes elmélete a részecskefizikának, azonban összhangba hozható az ismert elemi részecskék összes kölcsönhatásával. Az elmélet tárgyalása előtt a részecskék három olyan jellemzőjét ismertetjük, amelyek lehetővé teszik tulajdonságaik alapján történő besorolásukat. A nagyszámú felfedezett részecskét a Standard Modell alapján néhány csoprtba tudjuk sorolni.

1. **Spin**. A *fermionok* ($\hbar$-egységben mérve) *feles spinű részecskék*, és a Pauli-elvet (44.6 pont) követik. Adott kvantumállapotban tehát csak egy fermion lehet, így egyszerre csak egy nem keletkezhet belőlük. A *bozonok egész spinűek*, nem követik a Pauli-elvet, ezért akárhány bozon ugyanazt a kvantumállapotot foglalhatja el, és nagyenergiájú ütközés során akármennyi létrejöhet egyszerre.
2. **Fundamentális kölcsönhatások**. Minden olyan objektumra, amelynek energiája (és ezzel ekvivalens tömege) van, hat a gravitációs erő. Az elektromos töltéssel bíró testek alá vannak vetve az elektromágneses hatásnak is. Azokat a részecskéket, amelyek a *gyenge és az erős* kölcsönhatást „érzik", **hadronoknak** nevezzük. A *csak gyenge* erők közvetítésével egymásra ható részecskék a **leptonok**. A hadronoknak két típusa van, a *barionok és a mezonok*, a különbség köztük az, hogy a barionok fermionok és a mezonok bozonok. A legegyszerűbb barionok a proton és a neutron. Minden barionnak *barion-kvantumszáma* van – ez azt jelenti, hogy az összes barion olyan anyagfajtából van összetéve, mint a hidrogénatom magja. A mezonok barionszáma zérus. Minden fermion és néhány bozon *konzervatív* – megmaradó – kvantumtulajdonságokkal rendelkezik, olyanokkal, melyek nem keletkezhetnek, illetve nem semmisíthetők meg. Például, ha nagyenergiájú ütközés során új barion keletkezik, akkor ott mindig létre kell jönnie egy *antibarionnak* is.

45-5 táblázat Elemi részecskék típusai

részecskék	gyenge kölcsönhatás (leptonok)	erős kölcsönhatás (hadronok)	ütközés során képződnek
fermionok	leptonok	barionok	antifermion – fermion párok
bozonok*	nem észlelték	mezonok	egyszerre csak egy+

* a fundamentális bozonokat a 45-6 táblázat sorolja fel

+ ha nem mond ellent más, speciális (báj, ritkaság) tiltó szabályoknak

3. **Részecske-antirészecske-szimmetria**. Minden részecskéhez rendelhető egy antirészecske ellenpár, azonos spinnel és ellentétes előjelű elektromos töltéssel és barionszámmal. Az antirészecskét azonos szimbólummal jelöljük, mint a párját, de a szimbólum felett vonással; az antiproton jele tehát $\overline{p}$. Amikor antirészecske halad át az anyagon, ionizáció folytán energiát veszít, lelassul és ha részecskével találkozik szétsugárzódik. A részecske-antirészecske rendszer nyugalmi tömege kisebb nyugalmi tömegű részecskék tömegébe megy át, amelyeknek a kinetikus energiája nagyobb. Rejtély még, hogy a természetben, a mi univerzumunkban miért főleg anyag van, és nem antianyag; ez is egyike azon kihívásoknak, amelyek ma is foglalkoztatják a fizikusok és csillagászok fantáziáját.

A 45-5 táblázatban az ismertetett elnevezések alapján osztályoztuk a részecskéket. A Standard Modell szerint minden, a természetben észlelhető kölcsönhatás leírható hatféle lepton, hat kvark és ezek antirészecskéi – ezenkívül hat fundamentális bozon segítségével.

Új korszak kezdete

A részecskefizika új korszakának kezdetét olyan felfedezéshez kapcsolhatjuk, amely hasonló Rutherford kísérletéhez, mellyel kimutatta a koncentrált, nagytömegű atommag létezését. Itt elektronok szóródtak protonokon. Rutherford alfarészek nagyszögű szóródását észlelte arany-atommaggal történt ütközés után (ehhez természetesen hozzátartozott a nagy impulzusváltozás is). Ez utóbbi ellentmondott a várakozásoknak, és ugyanígy történt a stanfordi lineáris gyorsítócentrumban (Stanford Linear Accelerator Center, a továbbiakban SLAC), ahol az elektronok sokkal gyakrabban szóródtak nagyobb impulzuscserével, mint amilyen a protonon belüli egyenletes töltéseloszlásból következett volna. A mért eloszlás alapján arra következtettek, hogy a proton töltése olyan egészen kicsi tartományokban koncentrálódik, amelyek a proton teljes méreténél legalább százszor kisebbek.

Ez a felfedezés a SLAC-ban – más, az elemi részecskékre vonatkozó tapasztalatokkal együtt – azt jelezte, hogy a nukleonok is (igen hasonlóan az atommaghoz) alkotórészekből tevődnek össze. A meglepetés az volt, hogy az összetevők, a kvarkok az elemi töltés törtrészével rendelkeznek és barionszámuk is törtszám. A további kísérletekből kiadódott, hogy a nukleonokban a pontszerű töltéssel bíró kvarkok mellett szintén pontszerű, semleges gluonok is találhatók. (*Pontszerű* most egyszerűen azt jelenti, hogy „nincs észlelhető struktúrája".)

A bennünket körülvevő, elektronokból és atommagokból álló stabil világ leírható néhány fundamentális alkotórésszel és erővel. Az elektronok pontszerűek, és egységnyi nagyságú negatív elektromos töltésük van. (Ezt a meghatározást Benjamin Franklinnak tulajdonítják.) A magban pozitív tölté-

sű protonok és elektromosan semleges neutronok vannak, amelyek kvarkokból és gluonokból állanak. Az elektromos töltéstől származtatjuk az elektromágneses teret (és annak kvantumait, a fotonokat); ehhez hasonlóan a kvarkok és gluonok *„szín"*-(color)-töltéséből ered az a hatóerő, melyet erős (strong) vagy szín (color) kölcsönhatásnak nevezünk (az ebből származó kvantumok a gluonok). Az elektronoknak és a kvarkoknak van elektromos töltésük, ezért mindkettőre hatnak az elektromágneses erők; a gluonok ezzel szemben semlegesek és pontszerűek, nem érzékelik az elektromágneses hatást. Az elektronok olyan fundamentális részecskék, amelyek nem tartalmaznak „színt" és nem érzékelik a „színhatást".

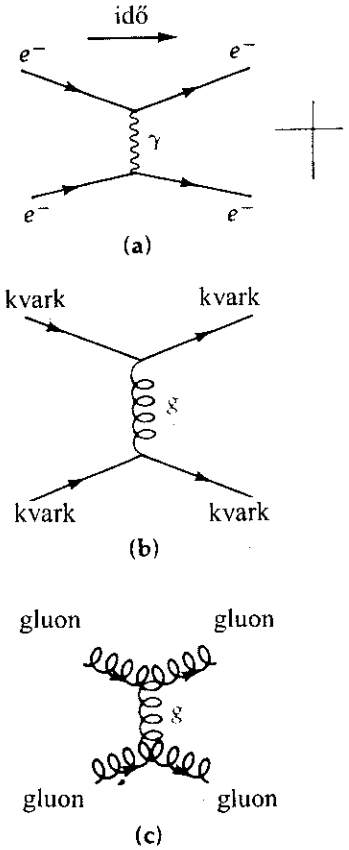
Színek (Colors), Ízek (Flavors), QED és QCD

Az előző pontban elmodottakból kitűnt, hogy lényeges különbség van az elektromágneses erőt közvetítő fotonok és a színerő hordozói, a gluonok között: a fotonok nem adnak hírt más fotonoknak, nem is egyesülnek velük, míg a gluonok képesek más gluonokkal való kommunikációra. A különbség onnan származik, hogy (a különböző előjeltől eltekintve) csak egyetlen típusú elektromos töltés létezik a természetben, míg – a kísérletek tanúsága szerint – a kvarkok és gluonok három típusa létezik; ezek egymástól a szín kvantumszámban különböznek. A két kvantumtérelmélet: a *kvantumelektrodinamika* (Quantum Electrodynamics, a továbbiakban QED-nek rövidítjük és a *kvantum-színdinamika* (Quantum Chromodynamics, QCD) alapelvei hasonlóak, és ezeket a lényeges különbségeket meg tudják magyarázni. A 45-18 ábra Feynman-diagrammjai vázlatosan szemléltetik a két kvark, két elektron, illetve két gluon közötti „megengedett" folyamatokat, és az azok folyamán kicserélt erőhordozó hatástovábbító kvantumokat.

A közönséges anyag leírásához elegendő kétféle (két különböző flavorral jellemzett) kvark; jelölésük *„u"* és *„d"* (*felfelé* és *lefelé* – az „up" és „down" angol szavak rövidítéséből). Elektromos töltésük +2/3e illetve –1/3e. A proton két *u* és egy *d* vegyérték-kvarkból, míg a neutron egy *u* és két *d* vegyérték kvarkból van összetéve. Az antianyag létezéséből arra kell következtetnünk, hogy van $\bar{u}$ - és $\bar{d}$ - antikvark is. Az elmélet folyománya az is, hogy amennyiben a barionok tulajdonságai megmagyarázhatók három vegyérték-kvark feltételezésével, akkor a kvarkok maguk fermionok.

A negyvenes évek végén felfedezték a piont és a müont; olyan részecskéket, melyek tömege az elektron és a protoné között van. A müonról kiderült, hogy pontszerű, és viselkedésében hasonló az elektronhoz, de tömege az elektronénál 207-szer nagyobb. (Tulajdonságaira még visszatérünk.) A pionok erős kölcsönhatásai olyanok, mint amilyeneket a maganyagnál észleltek, azonban nincs barionszámuk, így (legalábbis eddigi tapasztalataink alapján) a nukleonok nem alakulhatnak át pionokká. A semleges pion rendszerint két fotonra (bozonra) bomlik, amiből következik, hogy a pionokban nincs kvark, vagy talán logikusabb arra gondolni, hogy kvark-antikvark szubstruktúrájuk van. A pionok a hadronokhoz tartozó mezon-család legegyszerűbb tagjai.

Az ötvenes években kozmikus-sugárzási kísérletek során kiderült, hogy léteznek még más olyan objektumok is, amelyeknek a tulajdonságai nem érthetők meg, ha nem vezetjük be az új, íz(flavor)-kvantumszámot. Ezek a *„ritka"* (angolul strange = különös, furcsa) részecskék, és tulajdonságaik megegyeznek a maganyagéval, de leírásukhoz egy új kvark, az *s*-kvark létezését kellett feltételezni. Szélesedett a hadron-spektrum, mivel sok ritkasághordozó (strangeness-carrying) bariont fedeztek fel. A hetvenes években felfedezték a *„bájos"*-flavort (c-flavor), amely a c-kvarkot jellemzi (a „c" betű itt is a charm szó rövidítése), majd nem sokkal később a *„b"-kvarkot* (b = alsó, a bottom angol szó rövidítéséből). Ezeknek az új, nagyobb tömegű kvarkoknak a megértéséhez fel kellett tételezni, hogy a már ismert kvarkokból származtathatók úgy, hogy egy vagy több nehéz kvarkot könnyebbek helyettesítenek.



45-18 ábra
Pontszerű objektumok szóródását szemléltető Feynman-diagram. A kvantumok, illetve a „hírnök" (messenger) részecskék közvetítik két részecske között a kölcsönhatást. Ezek: az (a)-ábrán egy foton [γ], a (b)-n és (c)-n pedig gluon [g].

Színkorlátok

Minden ismert hadront egészszámú elektromos- és bariontöltés jellemez. Eddig még nem észleltek fizikai (vagy más néven „csupasz") kvarkot, vagy gluont. Ez lényegében megegyezik a QCD-vel, amely kimondja, hogy a kvarkok és gluonok „be vannak zárva" a hadronok belsejébe, ezért ezeknek nincs eredő színtöltésük. A kvarkok és gluonok tulajdonságait a 45-6 táblázat foglalja összse. Ebben megtaláljuk a még fel nem fedezett *t-kvarkot* (top quark=„felső" kvark), amellyel kiegészítve a Standard Modell teljessé válik. A 45-7 táblázat feltünteti több alaposan tanulmányozott hadron vegyérték-kvark összetételét.

Meglehetősen furcsának tűnik, hogy olyan, színkvantumszámmal jellemzett fundamentális építőelemekből összetett fizikai objektumok tulajdonságait tárgyaljuk, amelyeket sohasem fogunk látni. A helyzet nem olyan abszurd, mint első pillantásra tűnik. Gondoljunk csak a neutronra: nincs elektromos töltése, a mágneses momentuma azonban nagy – ezt pedig csak a benne folyó áramok eloszlásának tulajdoníthatjuk. Egy szerkezetnélküli neutron elektromágneses hatását nem tudnánk megmagyarázni. Nézzünk egy másik példát, a molekuláris erőket. A molekulák elektromosan semlegesek, az anyag legtöbb tulajdonságát mégis molekuláris elektromágneses kölcsönhatásokkal lehet értelmezni. Az egyes molekulákban a töltések összege zérus, de ennek a töltésnek a térbeli *eloszlása* (az egyes elektronok molekulánbelüli helyzete) az, ami a makroszkópikus tárgyak fizikai sajátságait meghatározza. Ugyanez a helyzet a szín-nélküli hadronnál: tulajdonságait és kölcsönhatásait a beljesében lévő kvarkok és gluonok eloszlása határozza meg. Éppenúgy, mint a molekuláris elektromos töltés esetében, itt is a kvarkok és gluonok színtöltéseinek összege zérus – a maradék hatás kifelé mégis jelentékeny.

45-6 táblázat Fundamentális fermionok és bozon-erőhordozók

FUNDAMENTÁLIS FERMIONOK (spin = 1/2)

kvarkok	elektromos töltés (e)	leptonok	elektromos töltés (e)	leptontömeg (GeV/c^2)
fel (u)	2/3	ν_e	0	$< 2 \times 10^{-8}$
le (d)	−1/3	e	−1	$5{,}1 \times 10^{-4}$
bájos (c)	2/3	ν_μ	0	$< 2{,}5 \times 10^{-4}$
ritka (s)	−1/3	μ	−1	0,106
felső (t)	2/3	ν_τ	0	< 0,035
alsó (b)	−1/3	τ	−1	1,784

PONTSZERŰ BOZONOK (egész spin)

erő típusa	erő hordozó	elektromos töltés (e)	spin	tömeg (GeV/c^2)
elektromágneses (QED)	foton (γ)	0	1	0
gyenge	W^+	+1	1	81
	Z^0	0	1	92
	W^-	−1	1	81
erős – szín (QCD)	gluon (g)*	0	1	0
gravitáció	graviton (G)	0	2	0

* A kvarkoknak és gluonoknak szín-kvantumszámuk van. A kvarkokat három különböző színnel jellemezhetjük; a gluonokat nyolc, egyértelmű color-anticolor kombinációval. A kvarkok és gluonok önálló fizikai objektumként nem léteznek (csak más részecskék belsejében), ezért tömegük nem állapítható meg egyértelműen. Az u és d kvarkokat, illetve a gluonokat zérus tömegűnek fogadjuk el. Kevesebb a gondunk a nehezebb kvarkok tömegével; körülbelüli értékük: $m_c = 1{,}5\ GeV/c^2$, $m_b = 4{,}7\ GeV/c^2$, $m_t = 70\ GeV/c^2$, $m_s = 0{,}15\ GeV/c^2$. A leptonokat és kvarkokat vízszintesen három „generációba" sorolhatjuk. A Standard Modellből éppen ez a három generáció származtatható, azonban nem tudjuk, hogy nem létezik-e még több fermion, vagy több generáció, amelyeknek a tömege nagyobb.

45-7 táblázat Hadronok kvarkszerkezete

jelölés	név	kvark szerkezet	elektromos töltés (e)	tömeg (GeV/c^2)	spin	átlagos élettartam*
Fermionok (barionok és antibarionok)						
p	proton	uud	1	0,938	1/2	$>5\times10^{32}$
n	neutron	udd	0	0,940	1/2	898
Λ	lambda	uds	0	1,116	1/2	$2{,}6\times10^{-10}$
Ω^-	omega-minusz	sss	–1	1,672	3/2	$0{,}8\times10^{-10}$
$\Delta^{++}(1232)$	delta	uuu	2	1,232	3/2	$\sim6\times10^{-24}$
$\bar{p}$	antiproton	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	–1	0,938	1/2	$>3\times10^{14}$
$\bar{\Lambda}$	antilambda	$\bar{u}\bar{d}\bar{s}$	0	1,116	1/2	$2{,}6\times10^{-10}$
Bozonok⁺ (mezonok)						
π^+	pion	$u\bar{d}$	1	0,140	0	$2{,}60\times10^{-8}$
π^0	pion	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	0,135	0	$0{,}87\times10^{-16}$
K^+	kaon	$u\bar{s}$	1	0,494	0	$1{,}24\times10^{-8}$
ρ^+	ró	$u\bar{d}$	1	0,770	1	$\sim4{,}4\times10^{-24}$
D^0	d-mezon	$c\bar{u}$	0	1,865	0	$4{,}3\times10^{-13}$
B^0	b-mezon	$u\bar{b}$	1	5,271	0	$1{,}4\times10^{-12}$

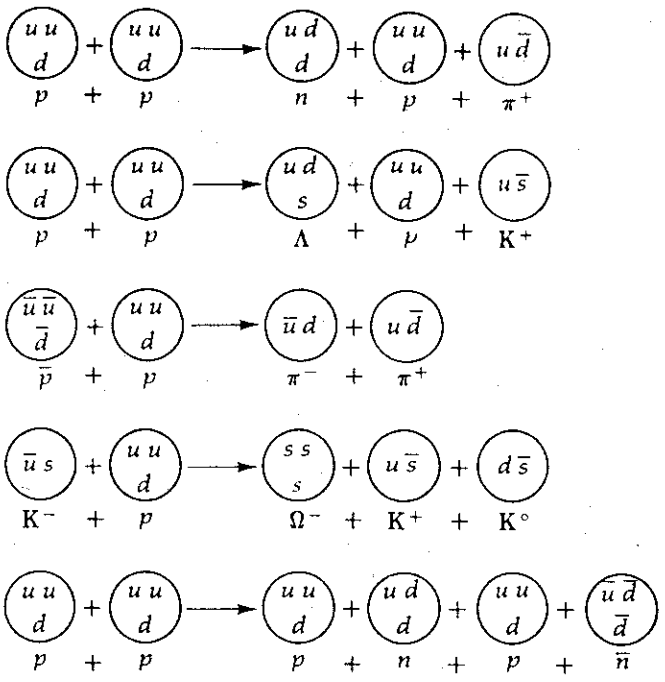
* A 10^{-18} s-nál rövidebb élettartamok a részecskék mért tömegeloszlásából adódtak. A Δmc^2 „szélesség", azaz tömegbizonytalanság használható fel, a Heisenberg-reláció segítségével, az élettartam megbecsüléséhez. ($\Delta E\Delta t \sim \hbar$-ból az átlagos élettartam $\Delta t = \hbar/\Delta mc^2$). A nagyon rövid élettartamokból nagyon erős átmenetekre lehet következtetni. Nagyságrendileg ezek megfelelnek az atommagreakciók tartamának ($r_p/c \sim 10^{-13}$ cm/ $3{,}0 \times 10^{10}$ cm/s $\approx 3 \times 10^{-24}$ s), ahol a flavortartalom megőrződik. Hosszabb élettartamokból gyenge folyamatokra következtetünk, amikor a kvarkflavor-tartalom változó. Közepes, 10^{-16} s nagyságrendű élettartamok általában elektromágneses átmenetekben fordulnak elő.

⁺ A barionokkal ellentétben a bozonoktól az antibozonokat nem mindig tudjuk megkülönböztetni; így a π^0 antirészecskéje önmaga. A három pion (π^+,π^0, π^-) erős kölcsönhatásokban észlelt tulajdonságai hasonlóak, ezért pion-„triplett" csoportról szokás beszélni; ez hasonló eset, mint a protonból és neutronból álló nukleon-dublett. A $\bar{p}$ és $\bar{n}$ antirészecskék ezzel szemben megkülönböztethetők p-től és n-től, míg az antipion-triplett azonos a pion-triplettel. Az eredő flavortartalommal rendelkező mezonok (nemcsak az u és d változat) például a K^0 (ds), különböznek antirészecskéiktől.

A 45-18 ábrából kitűnik, hogy az elektromos töltés és a színtöltés nem teljesen analóg fogalmak. A QCD értelmében két gluon gluoncserével képes egymásra hatni, míg két foton – a QED szerint – nem szóródhat egymáson fotoncserével. A színtöltéssel összekapcsolt objektumokat *széthúzva* a hatás a távolsággal *nő*, míg az elektromosan töltött testeket *távolítva* egymástól az erőhatás *csökken*. A végeredmény tehát az, hogy egyetlen kvark nem távolítható el egy zérus színtöltéssel bíró hadronból. Nagy energiákon a hadronok „hasadnak" (széttörhetők), de ez csak más színnélküli részecskék, például pionok vagy fotonok, „felforrása" árán következhet be, de ilyenkor maga a hadron színnélküli marad. Elemi részecskék kölcsönhatásakor sohasem jelenik meg egyedül (szabadon) kvark vagy gluon, létezésükben mégis hiszünk, mivel segítségükkel megfigyelhető jelenségek jól magyarázhatók.

Gyenge folyamatok, generációk, leptonszám

Az eddig tárgyalt folyamatokban érvényesült az energia, impulzus és impulzusmomentum megmaradásának klasszikus törvénye, de ezekhez hozzájött a kvark flavortartalmának megmaradása is. Céloztunk már arra, hogy normál részecskék olyan ütközésénél, ahol barion képződik, meg kell jelenni az antibarionnak is. Ehhez hasonlóan: ahol báj-flavor töltésű mezon vagy barion keletkezik, mindig várható a $\bar{c}$- -kvark képződése. Ez a *társas keletkezés* (associated production), amelynek elvét több folyamaton bemutatva a 45-19 ábrán szemléltetjük. Vannak más folyamatok azonban, amelyek során a kvark-flavortartalom nem marad meg (míg a barionszám igen). Ez a fajta

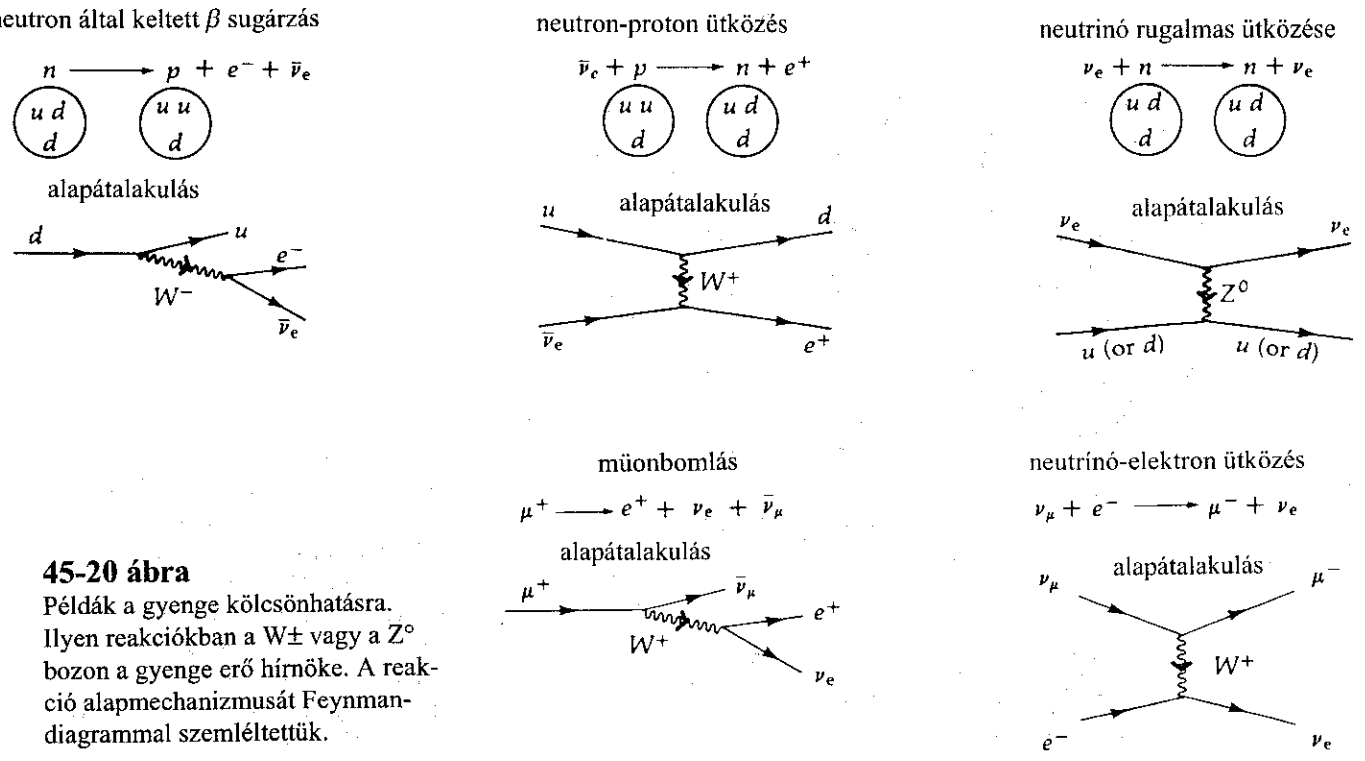


45-19 ábra
Példák megengedett részecskeütközésekre. Ezekben az erős kölcsönhatásokban a kvark-flavorok összege a nyíltól balra illetve jobbra azonos (megőrződik!). Ebből következik, hogy egy $\bar{u}$ keletkezésekor az egyensúly csak akkor áll fenn, ha egyidejűleg egy u-kvark is megjelenik, stb.

kölcsönhatás nagyon gyenge, és nem játszódik le, ha más kölcsönhatás is lehetséges. Minden béta-bomlási folyamat például (45.5 pont) ilyen *gyenge kölcsönhatás* következtében végbemenő jelenség.

A neutrínó csak gyenge kölcsönhatásban vesz részt, mivel pontszerű, nincs sem elektromos, sem színtöltése. Egyértelmű bizonyítékok vannak arra, hogy kétféle neutrínó (és a megfelelő antineutrínó) létezik. Az egyik az elektron-neutrínó (ν_e), a másik a müon-neutrínó (ν_μ). Az elektron-neutrínóhoz hasonlóan – amely olyan gyenge folyamatokban képződik, melyek résztvevője elektron vagy pozitron – a müon-neutrínó a müon résztvételével végbemenő folyamatok terméke. Gyenge kölcsönhatásban még egy részecske vehet részt, a tau (τ), amelynek tulajdonságai az elektronéhoz hasonlóak, de tömege még a müonénál is nagyobb. A hozzá kapcsolódó tau-neutrínó (τ_ν) létezése ugyan még nem bizonyított, azonban nem kétséges, hogy tulajdonságai mind a ν_e, mind a ν_μ tulajdonságaitól különbözni fognak. Az antirészecskékkel együtt tehát hat pontszerű, gyengén kölcsönható részecske van; ezek alkotják a fermionok leptoncsaládját. Az elektron, müon és tau egyértelmű elektron-, müon- és tau-leptonszámmal jellemezhetők, és éppen úgy, mint a flavortartalom az erős kölcsönhatásokban, a részecskék folyamataiban a *leptonszám* (vagy leptonflavor) is állandó. A neutrínó leptonflavorja azonos a megfelelő töltött partnerével, ezért, ha egy lepton keletkezik, mindig létre kell jönnie a megfelelő antileptonnak is; így az univerzum teljes leptonflavor-tartalma állandó (megőrződik). A 45-20 ábrán azt mutatjuk be, hogy a neutron béta bomlásakor például elektron és a megfelelő antineutrínó jön létre.

A jelenlegi felfogás szerint a gyenge folyamatok közvetítői a pontszerű és nagy tömegű W^+, W^- és Z° bozonok; ezek a gyenge hatás hordozói. Szerepük ugyanaz, mint a más erőknél a gluonoké és a fotonoké. A 45-20 ábra szemlélteti ezeket a közvetítő részecskéket (l. a 45-6 táblázatot) és néhány reakciójukat. Az ábra olyan W-cserével végbemenő gyenge kölcsönhatásokat mutat be, amelyek során a kvark-flavor nem marad meg. Kvarkflavor-megmaradással járó gyenge átmenetekben Z° szerepel. Hely hiányában nem



45-20 ábra
Példák a gyenge kölcsönhatásra. Ilyen reakciókban a W± vagy a Z° bozon a gyenge erő hírnöke. A reakció alapmechanizmusát Feynman-diagrammal szemléltettük.

tudunk minden, a Standard Modellből következő szabályt ismertetni. Megemlítjük még, hogy annak ellenére, hogy kvarkok elnyelnek illetve kibocsátanak W és Z részecskéket, ezeknek nincs színtartalmuk, így gluonokhoz nem kapcsolódhatnak; kizárólag csak a *„gyenge töltést"* hordozó leptonokból és kvarkokból származhatnak. A W és Z részecskék csak a kvarkok és leptonok között ható gyenge erőket tudják közvetíteni.

Egyesítés és a jövő

Először is azt kell hangsúlyozni, hogy a tömegüktől eltekintve, a Z°-nak és a fotonnak sok közös tulajdonsága van. Kvantumelméleti szempontból ez azt jelenti, hogy egyes reakciókról nem tudjuk megállapítani, hogy melyikük a közvetítő; azaz: a gyenge erők és az elektromágneses erők egymással összefüggésbe hozhatók. Ez és más tények vezettek annak az elméletnek megalkotásához, mely egyesíti a két hatást, és ezzel megerősíti a Standard Modell érvényességét. Ez az *Electrogyenge Elmélet* [az ELECTRO és WEAK (= gyenge) angol szavakból] megjósolta a W és Z° részecskék tulajdonságait és tömegük pontos nagyságát, azóta észlelt más hatásokkal együtt, ezért nagy remény van arra, hogy egyesíteni lehet a jövőben az elektrogyenge és az erős kölcsönhatások elméletét is. (Ez lesz a *Nagy Egyesítés*, angolul Grand Unification.)

A 45-18 és 45-20 ábrán vázoltuk az egyes alkotórészek illetve az elektronok kölcsönhatásait és a kicserélt kvantumokat. Lehetséges, hogy minden fundamentális reakció mechanizmusa azonos? A gravitációnak még nincs kvantum-térelmélete. Évek óta keresik azonban a **gravitont (G)**, azt a bozonkvantumot, amelyről azt tételezik fel, hogy a gravitációs tér hordozója. Nincs ugyan még kísérleti bizonyítéka, de aligha lehet kételkedni a létezésében, és hogy ugyanazt a szerepet játssza a gravitáció kvantumelméletében (Quantum Gravity angol kifejezés rövidítése után: QGD), mint a foton a QED-ben, a gluon a QCD-ben és a W illetve Z° a gyenge kölcsönhatásoknál. A gyenge, elektromágneses és erős kölcsönhatások egymásra ható (vagy gyorsuló) töltései adják a megfelelő kvantumokat, ehhez hasonlóan a gyorsuló tömeg (vagy energia) a gravitonok forrása. Az ismert kölcsönhatások

közül a gravitáció messze a leggyengébb, ezért nincs kimutatható hatása az elemi részecskékre a gyorsítókkal ma elérhető energiáknál. Nézzük az erők arányát például két, egymástól 10^{-13} cm távolságra lévő proton esetében. Vegyük a Coulomb-erőt egységnek, akkor a gravitációs erő ennek 10^{-36}-szorosa, míg az erős *kölcsönhatás* kb. húszszor nagyobb az elektromágneses erőnél. Ugyanezen a skálán a gyenge kölcsönhatás nagysága kb. 10^{-7}.

A fundamentális kölcsönhatások (valamint a kvarkok és a leptonok) hasonlósága ösztönzi arra az elméleti fizikusokat, hogy megkíséreljék az egységes térelmélet megalkotását. A kérdés az, hogy hogyan lehet ennyire különböző nagyságrendű erőket egy fedél alá hozni. Erre azt lehet válaszolni, hogy mivel az erők nagysága az objektumok közötti távolság függvénye, a Heisenberg-féle bizonytalansági elvből következik, hogy egyúttal a folyamatok impulzus- és energiacseréjének függvénye is. Azt várják, hogy kb. 10^{-32} cm távolságban az összes erő nagyságrendje azonos lesz. Bár mindez kecsegtető elképzelés, még nem nyugszik szilárd alapokon.

A Standard Modellel elért jelentékeny eredmények ellenére ismereteinkben jókora fehér foltok találhatók. Itt van pl. az az egyszerűnek látszó probléma, hogy a pontszerű fermionok miért oszlanak három csoportra (*generációra*), vagy pedig a másik: léteznek-e eddig fel nem fedezett W és Z részecskék. Nem tisztázott a tömeg eredete sem; az sem, hogy miért nehezebb 3500-szor a tau-lepton az elektronnál? A fotonnak zérus tömege van, ugyanakkor a Z^0 tömege százszor nagyobb a protonénál. Biztosak vagyunk-e abban, hogy a leptonok és kvarkok valóban elemiek, azaz oszthatatlanok, habár 10^{-16} cm méretig lemenve valóban szerkezetnélkülinek tűnnek. A részecskefizikusok abban bíznak, hogy ezekre a kérdésekre a választ a gyorsítók most készülő új generációi fogják megadni. Ilyen lesz a texasi Ellis Countyban *épülő „Szupravezető Szupergyorsító"* (Superconducting Super Collider, rövidítve SSC) vagy CERN-ben (Genf, Svájc) építésére javasolt *Nagy Hadron Gyorsító* (Large Hadron Collider, LHC) (Collide, Collider = ütközni, ütköztető angol szavakból). Ezek a berendezések kimondottan arra a célra épülnek, hogy az ott elérhető energiákon az általunk vázolt problémákat tisztázhassák.

Kozmikus összefüggések[11]

A kozmológusok jelenlegi feltételezése szerint a világegyetem egyetlen hatalmas robbanás, a *„Nagy Bumm"* (Big Bang) során jött létre. Az elemi részecskék, a fundamentális erők, a kémiai elemek, a csillagok és a galaxisok – eredete visszavezethető erre az ősállapotra. Nem szabad ezt úgy elképzelni, hogy az anyag és a sugárzás robbanása az eredetileg üres térben ment végbe; maga a tér is ekkor keletkezett. A táguló világegyetem terét, az idő folyását a Nagy Bummtól számítjuk, ez a $t = 0$.

Az első pillanatokban az univerzum túl forró volt ahhoz, hogy benne atomok vagy atommagok létezhessenek. Ekkor még fundamentális erőkkel egymásra ható legegyszerűbb objektumok léteztek csupán. Kezdetben egyetlen erő volt, de a – számunkra elképzelhetetlenül rövid – 10^{-24} s idő múlva a gravitáció különvált az egyesült „erős-electrogyenge" erőtől, tehát már két erő működött. Az univerzum tágult és gyorsan hűlt. 10^{-35} s „idős" korában az univerzum hőmérséklete $kT = 10^{24}$ eV energiával lett egyenértékű; most az erős és az electrogyenge erő is elkülönült egymástól. A hűlés folytatódott – 10^{-12} s-kor, 10^{12} eV-nál az utóbbi is kettévált, és mind a négy, ma ismert erő hatni kezdett. Nem sokkal később, 10^{-6} s-kor a kvarkok és

[11] Ennek az alfejezetnek a forrása főleg a következő mű: „To the Heart of the Matter – The Superconducting Super Collider", Universities Research Association, Washington D. C., April 1989.

gluonok protonokká és neutronokká egyesültek. Percekkel mérhető az az idő, amelynek elteltével az anyag kondenzációja kezdődött el, atommagok emelkedtek ki a protonokból és neutronokból álló tengerből, azonban még több százezer évnek kellett eltelni ahhoz, hogy egész atomok alakuljanak ki. Nemigen tudjuk elképzelni, hogy a mai világegyetem összes anyaga és energiája 10^{-42} s-os korában néhány tized milliméter átmérőjű gömbben fért el!

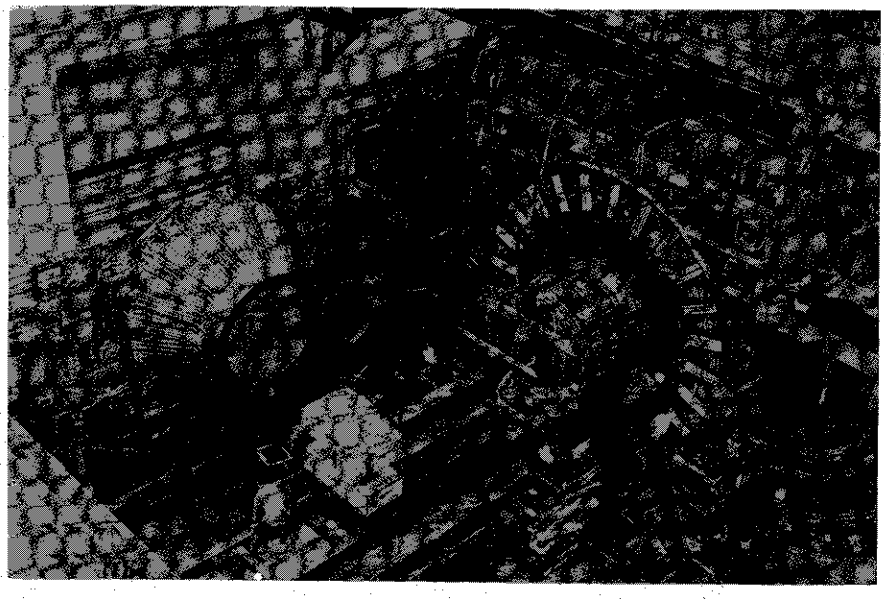
Világegyetemünk kora 10^{10} év, átlagos hőmérséklete $2{,}3 \times 10^{-4}$ eV-tal egyenértékű (2,7 K). Az eredeti tűzgolyó lehűlt maradványait vizsgálják a mai csillagászok. Csodálatos teljesítmény, hogy a kozmikus történelem korszakait a kozmológusok a Nagy Bumm utáni néhány mikroszekundumig visszamenőleg képesek voltak rekonstruálni. Nagy része van ebben a részecskefizikának. Egy gyorsítóban ütköző két részecske számunkra a kozmikus történelem korai pillanatait idézi fel, és mennél nagyobb az ütközési energia, annál messzebb tudunk haladni visszafelé az időben. Az elemi részecskék világának feltárása a korai univerzum kutatásának felel meg.

A részecskefizikusok és a kozmológusok tudják, hogy céljuk és érdeklődési területük sokban közös. Nézzünk csak egy ilyen közös témát, a sötét anyag (*dark matter*) problémáját. Egy galaktikának a középponti gázfelhő mozgásából számított tömege nagyobbnak adódik, mint az őt alkotó világító, látható csillagok, gáz és por tömegének összege. Sokáig zavarban voltak a csillagászok, hogy mi is a hiányzó, láthatatlan, sötét anyag, de most, úgy látszik, hogy a részecskefizikusok megtalálták a megoldást. Ez a sötét anyag olyan részecskékből áll, amelyek – láthatatlanul – túl tudták élni azt az időt, amely a keletkezésüktől, amikor az univerzum még sokkal forróbb volt, eltelt. (Az univerzumban csak a protonok, fotonok, elektronok és neutrínók a valóban stabil részecskék, és ezekből nem adódik ki a hiányzó tömeg.) Új részecskék felfedezése a jövő még nagyobb energiájú gyorsítóiban nemcsak az erők egyesített elméletéhez vezethet el, de megoldhatja a kozmológusok „sötétanyag-problémáját" is.

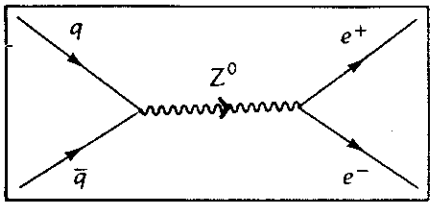
Utószó

Elénk tárult a W és Z^0 részecskéknek, a leptonoknak és kvarkoknak, a gluonoknak fantasztikusan gazdag világa. Mindezt lehetetlen lett volna felfedezni a gyorsítókat megalkotó tudósok, és a részecskéket észlelő detektorokat létrehozó zseniális kísérletezők munkája nélkül. Hajlandók vagyunk néha elfelejteni, hogy a fizika kísérleti tudomány. A század egyik legnagyobb teoretikusa, Victor Weisskopf a kísérletező tudósokat Kolumbuszhoz, a gyorsítókat a Kolumbusz hajóihoz, az elméleti fizikusokat azokhoz a mindentudó, Spanyolországban maradt tudósokhoz hasonlítja, akik még Kolumbuszt is meggyőzték arról, hogy nyugat felé haladva Indiába fog jutni. A sors iróniája – és ez Viki figyelmét is elkerülte – hogy a Karib-tengeri elszórt szigeteket ma is Nyugat-Indiának hívják; ilyen hatalmas a teoretikusok befolyása!

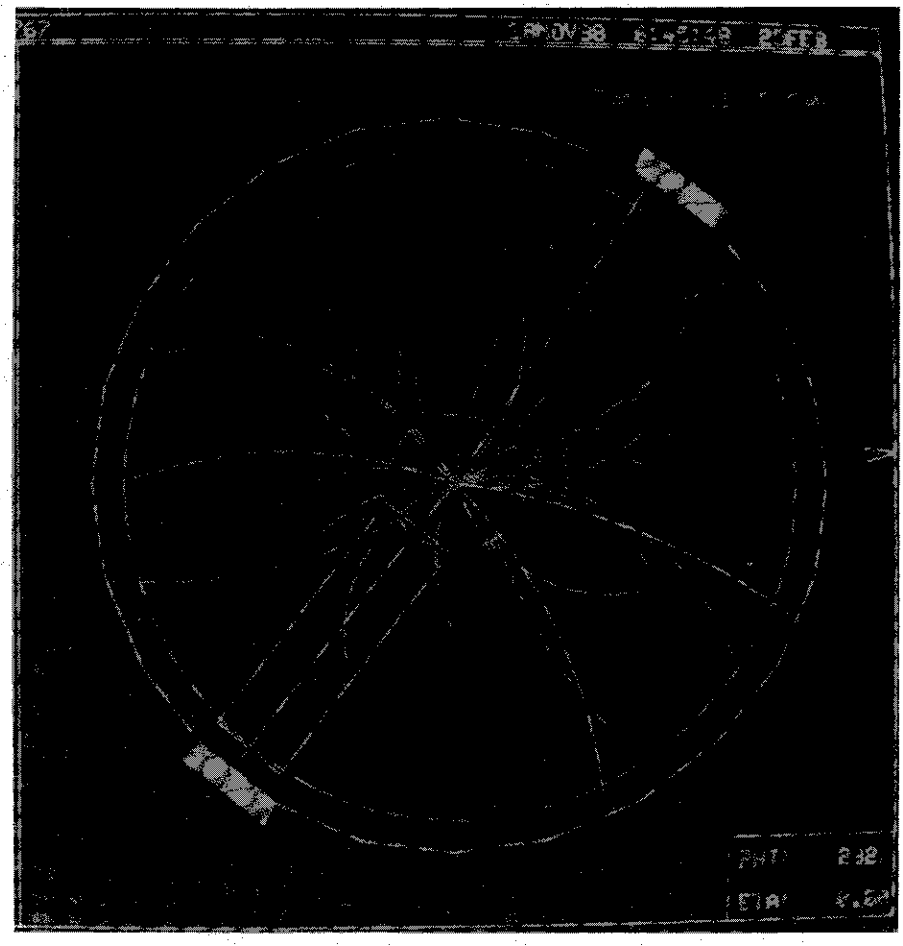
Arra nincs helyünk, hogy a terület minden csodálatos eredményét ismertessük – igaz egyesekre már kitértünk az előző fejezetekben. (Megemlítjük, hogy Sir John Adams, a CERN-gyorsítók már elhunyt konstruktőre megjegyezte, hogy publikációi betonba vannak öntve.) Példaként bemutatjuk a Fermi National Laboratory (Fermilab) ütköztető detektorát, amellyel protonok és antiprotonok ütközésekor keletkező kvarkok és gluonok kölcsönhatásait vizsgálják. Ez igazi mesebeli labirintus. Sok tízezer önálló elemből áll; ezeken jelennek meg a töltött és semleges részecskék pályái, segítségükkel mérhető az impulzusuk és az energiájuk. A 45-22 ábrán láthatóhoz hasonló ütközések kísérleti megvalósításakor az elképzelhetetlen jelenik meg benne.



45-21 ábra
A Fermilab kettőezer tonnás ütköztető-detektora (Collider Detector at Fermilab, rövidítve CDF). Ezt a bonyolult detektor-rendszert a nagyenergiájú ütközésekben keletkező részecskék energiájának és irányának mérésére használják. A detektorok rétegekben helyezkednek el az ütközési pont körül. Mindegyik réteg speciális információt ad az áthaladó részecs-kéről. Az ütközéshez legközelebb a *vertex-detektor* található (a képen nem látható); ez érzékeli a nagyon kis repülési hosszat befutó (azaz nagyon kis élettartamú) részecskéket. A képen a működési helyén látható következő réteg *a központi nyomjelző kamra* (central tracking chamber). Ez huzalelektródok koaxiális hengerek mentén elhelyez-kedő együttese, amely a pályamenti ionizációs hatást felhasználva érzékeli és rajzolja fel a töltött részecskék útját. A kamra mágneses térben van, ezért a pályagörbület alapján meg tudja különböztetni a pozitív töltésű részecskéket a negatív töltésűektől. Az 1,5 T erősségű axiális mágneses teret a központi nyomjelző kamrát körülvevő 5 m hosszú szupravezető szolenoid-tekercsel állíthatják elő. A tekercsen kívül további berendezés-rétegek találhatók. Az első egy szegmentált kaloriméter egység, amely ólom- vagy acélleme-zekből készült, és a lemezek közé szcintillátor-lapokat helyeztek. A kaloriméter szeleteken áthaladó részecskék a kölcsönhatásokban újabb részecskéket keltenek, és szcintillációt idéznek elő; a leadott energiát fotoelektronsokszorozó csövek mérik. A müonok pályájukon nagyon kevés energiát adnak le, ezért áthatolnak a kaloriméteren. Ezeket a speciális, külső müondetektor-kamrák regisztrálják. A fényképen csak a vég-kaloriméterek láthatók rendeltetési helyükön, az ék alakú központi kalorimétereket karbantartás céljából hátrahúzták. A dobozszerű vasszerkezet biztosítja a mechanikai szilárdságot, ezen kívül zárja a mágneses fluxust. Az oldalsó kúp alakú kiszögellés a két végkalori-méter-együttes egyike, és pontosan beleillik a CDF első illetve hátsó nyílásába. Egy napot veszigénybe, hogy a bonyolult, sok réteges, kb. 100 000 csatornás berendezést a „garázsból" az „ütköztető csarnokba" szállítsák, ahol vele az 1 TeV energiájú protonok és az 1 TeV energiájú antiprotonok ütközését tanulmányozzák. A detektort egész sereg elektronikus eszköz és számítógép segítségével vezérlik, illetve ellenőrzik.



45-22 ábra
Z^0 bozon előállítása a CDF felhasználásával. A proton-antiproton ütközés során létrejött részecskék pályáit a CDF-fel rekonstruálják, számítógépes segédlettel. A görbék az axiális mágneses térrel eltérített elektromosan töltött részecskék trajektóriái. (Minél nagyobb a részecske impulzusa, annál közelebb van a vonal az egyeneshez.) A körvonal két oldalán látható világos négyszög két kaloriméter. Ezek mérik az egymástól egyenes vonalban elpattanó igen nagy energiájú részecskéket: egy e^+ és egy e^- elektront, amelyek effektív tömege megegyezik a Z° részecske tömegével. Z°-t a detektor az igen rövid élettartam miatt nem tudja észlelni, létezését csak bomlástermékein keresztül lehet regisztrálni. Megjelennek még nagyon kis energiájú kísérő részek; ezek az ütközésben csupaszon résztvevő „megfigyelő" (spectator) kvarkok maradványai. A Feynman-diagramból kitűnik, hogyan keletkezik Z° a $\overline{p}p$-ütközés során. A p-ből származó kvark és a $\overline{p}$-ból származó antikvark egyesül Z°-lá – ez bomlik utána e^+ e^- párrá. A töltéshez és impulzushoz hasonlóan a színösszegnek is meg kell maradnia. (A téglatest alakú doboz a legnagyobb impulzussal rendelkező részecskét választja ki.)



A Standard Modell csodálatos alkotás, de az igazi élmény az lesz, ha megtaláljuk a korlátait, mert ez is csak halvány közelítése a természetnek. A további eredményeket a kísérletező szakemberek fogják megteremteni.[12]

[12] A téma alaposabb megismeréséhez ajánljuk a következő műveket: F. Close, M. Martin and C. Sutton, Ther Particle Explosion, Oxford Univ. Press, 1987. és L. Lederman and D. Schram, From Quarks to Cosmos, W. H. Freeman, 1989. Ezúttal mondunk közönetet értékes tanácsaikért A. Hudsonnak, K. Metropolisnak és C. Quiggnek.

Összefoglalás

Az atommagot a *Z rendszámmal* (a protonok számával) és az N *neutronszámmal* jellemezzük; a *tömegszám* ezek összege: $A = Z + N$. Az *izotópok* *Z*-je azonos, *N*-je különböző; jelölésük: ${}^{A}_{Z}[\text{vegyjel}]$ (Z-t gyakran elhagyjuk, mivel a vegyjel az elemet egyértelműen azonosítja).

A közelítő *atommagsugár* $R = kA^{1/3}$, ahol *k* értéke ~1,2 fm és ~1,4 fm között van attól függően, hogy milyen kölcsönhatás segítségével határoztuk meg. Az atommagok sűrűsége nagyjából azonos, ez jelzi, hogy a magerők rövid hatótávolságnak.

Az atommag tömegét *egységes atomi tömegegységben* adjuk meg – ennek jele u.

$$1\ \text{u} = \begin{cases} \text{a } {}^{12}\text{C atomos szénizotóp tömegének } 1/12\text{-e} \\ 931{,}494\ \text{MeV/c}^2 \\ 1{,}660\,540\times10^{-27}\ \text{kg} \\ 1{,}492\,42\times10^{-10}\ \text{J/c}^2 \end{cases}$$

Ha az atomag neukleonokra bontásához szükséges energiát elosztjuk a nukleonok számával, akkor megkapjuk az *egy nukleonra jutó kötési enrgiát.*

A kezdetben N_0 atommagot tartalmazó anyagdarab radioaktív bomlását kifejező törvény:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{vagy másképpen} \quad N = N_0 e^{-(\ln 2)t/T_{1/2}}$$

ahol λ a *bomlási állandó*, és $T_{1/2}$ a *felezési idő*. A radioaktivitás *curie* (Ci) egységben mérhető, az *A* az *aktivitás*:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{és} \qquad \text{Ci} \equiv 3{,}71 \times 10^{10}\ \text{bomlás/s}.$$

Radioaktív mag bomlása történhet alfa (α)-sugárzás, béta (β^- vagy β^+)-sugárzás kibocsátásával, gamma (γ)-bomlással, belső konverzióval, elektron befogással (más néven *K*-befogással) és néhány nehéz mag esetében *spontán hasadással.* A reakció *Q*-jának minden esetben pozitívnak kell lennie:

$$Q = [\text{kiindulási tömeg} - \text{végtermékek tömege}]c^2.$$

Pozitron (β^+)-bomláskor az anyanuklieond tömegének $2m_e c^2$-tel nagyobbnak kell lennie a leánynuklieond tömegénél.

Az *atommagreakciók* általános esete az, amikor egy *x* részecske talál egy, a céltárgyban lévő (kezdetben nyugalmi állapotú) *X* atommagot, és *y* illetve *Y* végtermékek keletkeznek. A reakció lehet exoerg (energiatermelő) (*Q* pozitív) és endoerg (energia-elnyelő) (*Q* negatív); az elsőben tömeg-energia szabadul fel, míg a másodikban a *kezdeti kinetikus energia* alakul át a részecske tömeg-energiájává. Negatív *Q* esetében a reakció előidézéséhez legalább az $E_{kü}$ küszöbenergiával kell rendelkezni:

$$E_{kü} = -Q\left(\frac{m_x + M_x}{M_x}\right) \qquad \text{(nem relativisztikusan)}$$

A *nukleáris hatáskeresztmetszet* egyenlő a reakció bekövetkezésének relatív valószínűségével. Ez az a tényleges felület, amelyet a (pontszerűnek feltételezett) beérkező részecske „érzékel" a céltárgyban lévő atommagból. Reakció akkor következik be, ha ezen a területen belül találkoznak. A hatáskeresztmetszetet *barn*-ban mérjük ($1\text{barn} \equiv 10^{-28}\ \text{m}^2 = 10^{-24}\ \text{cm}^2$). A hatáskeresztmetszet függ a reakció típusától és a beérkező részecske kinetikus energiájától.

A *radioaktív kormeghatározás* a ^{14}C-izotóp 5730 éves felezési idejét használja fel a széntartalmú leletek korának megállapítására. Geológiai minták kora meghatározható bizonyos, radioaktív bomlási sorban szereplő elemek mennyisége alapján is.

Atomenergiát nehéz atommagok – pl. ^{235}U vagy ^{239}Pu – neutronok által előidézett hasadásából (fisszió) vagy pedig nagyon könnyű atommagok – pl. ^{2}H és ^{3}He – egyesüléséből (fúzió) nyerhetünk. Fogyasztási célú energiatermelést fúzió révén eddig nem sikerült megvalósítani, mivel a fúziós hőmérsékletre vonatkozó Lawson-kritériumnak nem sikerült nagy mértékben eleget tenni. (Lawson-kritériumot: $nr \geq 10^{20}\ sm^{-3}$.

Részecskefizika. A „Standard Modell" (a fotonok kivételével) két csoportba sorolja a részecskéket, az egyikbe tartoznak a *hadronok* (amelyek főleg erős kölcsönhatással hatnak egymásra), a másikba a *leptonok* (ezek reakcióiban csak gyenge kölcsönhatási erők vesznek részt). A hadronok felosztása: feles spinű barionok (fermionok) és egész spinű *mezonok* (bozonok). Újabb kísérleti eredmények alátámasztják a *kvarkmodellt*, amely szerint a hadronok kvarkok különböző kombinációiból állnak. A részecskék közötti kölcsönhatást a „hírnök" vagy „erőhordozó" (messenger, force carrier) részecskék közvetítik – a folyamat során ezek cserélődnek ki.

erő	**erőhordozó**
elektromágnesesség	foton ($\gamma\chi$)
gyenge	$W^{\pm}$, Z^0
erős	gluon (g)
gravitáció	graviton (G)

Az elméleti fizikusok arra törekednek, hogy *egységes, un. egyesített elméletet* (unified theory) fogalmazzanak meg – ennek alapján minden (elegendően nagy energiájú) kölcsönhatást egyetlen, univerzális erő segítségével lehetne tárgyalni.

Az ismert részecskék között a világegyetemben csak az *elektron*, a *proton*, a *neutrínó* és a *foton stabilis.*

Kérdések

1. Növeljük arányosan a hidrogénatom méretét úgy, hogy a proton átmérője egy milliméter legyen. Milyen nagy lesz az atom átmérője?
2. Miben hasonlítanak és miben különböznek egymástól az elektrosztatikus, gravitációs és a nukleáris erők?
3. Miért független az atommag tömegsűrűsége a benne lévő nukleonok számától?
4. Tegyünk kvalitatív összehasonlítást az atommag mérete és a barn között.
5. A radioaktív bomlás véletlen folyamat; miért lehet ennek ellenére egyszerű matematikai függvénnyel leírni?
6. Milyen bomlási módot (módokat) várhatunk a ^{124}Ba esetében, és miért?
7. A $^{2n}_{n}X$ felépítésű magok (ahol n páros szám) miért különösen stabilisak az $n \leq 10$ esetben, és miért nem ha $n > 10$?
8. Az atommaghasadás során létrejövő töredékmagok miért hajlamosak inkább β^-, mint β^+ bomlásra?
9. Az arany egyik izotópja $^{197}_{79}$Au. Milyen másik számpárokkal azonosíthatjuk még ezt az izotópot?
10. Molibdén bomlásakor technécium – az atommaghasadás tipikus terméke – keletkezik. Mivel magyarázható, hogy a természetes technécium valószínűleg nem fordul elő a földkéregben?
11. Hasonlítsuk össze a ^{113}Cd-nek a 45-12 példában megadott neutronbefogási hatáskeresztmetszetét a 45-14 ábra adataival. Az első érték miért nagyobb kb. egy nagyságrenddel, mint a grafikon által mutatott?

Feladatok

45.2 Az atommag leírása
45.3 Atommagtömeg és a kötési energia

45A-1 Durván megbecsülhetjük a protonokat az atommagban összetartó erők és a Coulomb-taszítás arányát: számítsuk ki az egy protonra jutó *kötési energia* (KE) és a két proton *Coulomb-féle potenciális energiájának* (U) a hányadosát a ^{4}He-magban, ha a két proton távolsága 1 fm.

45A-2 a) Számítsuk ki a $^{133}_{55}$Cs-nuklid közelítő sugarát. b) Közelítőleg mekkora annak az atommagnak az A tömegszáma, amelynek a geometriai hatáskeresztmetszete 0,8 b?

45A-3 A Richter-skálán egy földrengés M magnitúdójának, és a kiváltott E energiának az összefüggése a következő képlettel adható meg: $M = (1/1{,}5)\log_{10}(E/25\,000)$, ahol E-t joule-ban mérjük. Egy megatonnás (tehát 10^6 TNT-ekvivalens) hidrogénbomba robbanásakor keletkező energia $4{,}18\times10^{12}$ J. Mekkora annak a földrengésnek a magnitúdója, amelynek az energiája ugyanakkora, mint egy két megatonnás hidrogénbombáé?

45B-5 Mekkora (joule-ban kifejezett) energia szükséges ahhoz, hogy egy gramm tömegű $^{56}_{26}$Fe atommagjaiban a nukleonokat különválasszuk?

45.4 Radioaktív bomlás és felezési idő
45.5 Radioaktív bomlási módok

45A-6 Ásatás során a nevadai Lake Winnemucca közelében múmiát találtak, melyet „Wiskey Lil"-nek neveztek el. Karbon-kormeghatározással kiderítették, hogy az eredeti ^{14}C-tartalomnak még 73,9%-a található benne. Melyik évben halt meg Whiskey Lil?

45A-7 Számítsuk ki, hogy mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a 12 min felezési idejű izotóp aktivitása a kezdeti aktivitás ötödrészére csökkenjen.

45A-8 A ^{241}Am felezési ideje 432 év, és alfa-rész kibocsátásával bomlik. a) Írjuk fel a bomlás reakcióegyenletét. b) Mekkora tömegű anyag aktivitása 1 mCi?

45B-9 Mennyi az aktivitása egy gramm ^{226}Ra-nak, ha a rádium molekulatömege 226, és felezési ideje 1620 év?

45B-10 A 45-5 példában szereplő 279 936 000 darab kockából naponta a meglévő egyhatodát eltávolítjuk. a) A 45-6 ábra grafikonjának felhasználásával számítsuk ki, hogy mennyi idő múlva lesz a maradék az eredeti mennyiség egynegyede. b) Számítsuk ki a 45-6 összefüggésből ugyanezt. c) Milyen nagy a két eredmény közötti különbség százalékban? Magyarázzuk meg az eltérés okát.

45B-11 Nukleáris robbanás után a keletkezett teljes radioaktivitás nem követi az exponenciális bomlási törvényt; a robbanás utáni első hat hónapban az aktivitás a következő összefüggés szerint változik:

$$A = A_0 (t / t_0)^{-1,2}$$

ahol A_0 a robbanás után t_0 időpontban észlelt aktivitás. (Hat hónap után már gyorsul a bomlás, és 10 év múlva a fenti képlettel számítható aktivitásnak csak 1/25 részét mérik.) Számítsuk ki a rövidtávú $T_{1/2}$ felezési időt a fenti összefüggéssel.

45B-12 A $^{49}_{24}$Cr izotóp pozitron kibocsátással, 42 min felezési idővel bomlik. a) Írjuk fel a reakcióegyenletet. b) Mekkora legy egy 24 mCi kezdeti aktivitású minta aktivitása két óra múlva?

45.6 Hatáskeresztmetszet

45B-13 Termikus neutronok nyalábja csapódik be egy ^{12}C anyagú szénlemezre. A termikus neutronokra a teljes befogási hatáskeresztmetszet 3,5 mbn. Milyen mélységben fog a neutronnyaláb 20%-a elnyelődni? (A szén sűrűsége 2,25 g/cm^3.)

45B-14 Egy ólomtégla térfogatának túlnyomó része lényegében üres tér. Az ólomatomok homogén eloszlását feltételezve számítsuk ki, hogy milyen vastagnak kell lennie a téglának, ha az összes bennefoglalt hatáskeresztmetszeti területet egy lapra vetítve, az a lapnak csak egytized részét fedi be. $R_0 = 1{,}3$ fm.

45B-15 A Földtől kb. 170 000 fényévnyi távolságra lévő 1987A. szupernova felületén 10^{46} J erősségű neutrínókitörés zajlott le. Vegyük az átlagos neutrínóenergiát 6 MeV-nek és testünk hatáskeresztmetszeti felületét összesen 5000 cm^2-nek. A kibocsátott neutrínók közül hány hatolt át testünkön? [a feladatot az *American Journal of Physics* 56, 5. (1988. máj.) számának *Back of the Envelope* rovatából vettük át.]

45.7 Atommagreakciók

45A-16 A ^{236}U hasadási termékei ^{90}Rb és ^{143}Cs. Mutassuk meg, hogy a reakció Q-ját a $Q = (M_U - M_{Rb} - M_{Cs} - 3m_n)c^2$ összefüggés adja meg, ahol M_U, M_{Rb}, M_{Cs} és m_n a megfelelő atomtömegek illetve a neutron tömege.

45B-17 Jelenlegi tudásunk szerint a Napnál melegebb csillagok energiaforrása a *szénciklus*, azaz a következő reakciósorozat:

$$^{12}_{6}C + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{13}_{7}N + \gamma$$
$$^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + e^+ + \nu$$
$$^{13}_{6}C + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{14}_{7}N + \gamma$$
$$^{14}_{7}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{15}_{8}O + \gamma$$
$$^{15}_{8}O \rightarrow {}^{15}_{7}N + e^+ + \nu$$
$$^{15}_{7}N \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ennek a sorozatnak a végeredménye azonos a proton-proton ciklusával (l. a 45C-39 feladatot), ahol négy proton kapcsolódásából He-atommag alakul ki (figyeljünk arra, hogy a szén nem használódik el a fenti ciklusban, csak katalizátorként hat). b) Magyarázzuk meg, hogy a szénciklushoz miért szükséges magasabb hőmérséklet, mint a proton-proton ciklushoz.

45B-18 A 45C-41 feladat végeredményét felhasználva számítsuk ki azoknak a $^2H(d, n)$ reakciókban résztvevő neutronoknak az energiáját, amelyek a deutériumcéltárgyra becsapódó 0,5 MeV deutériumnyaláb irányához képest 90°-os szögben emittálódnak.

45B-19 A természetben előforduló aranynak csak egyetlen izotópja van, $^{197}_{79}Au$; ez lassú neutronokkal bombázva β^--részecskéket bocsát ki. (a) Írjuk fel a reakció egyenletét. (b) Számítsuk ki a béta-részek maximális energiáját.

45B-20 A következő magreakciókban határozzuk meg x-et, és írjuk fel a reakcióegyenletet a megfelelő A és Z értékekkel – belevonva az átmeneti magot is: $^9Be(\alpha, n)X$; $X(\alpha, p)^{31}P$; $^7Li(d, 2\alpha)X$; $^{11}B(p, \alpha)X$; $^{12}C(\gamma, \alpha)X$.

45B-21 Bizonyítsuk be, hogy 1 g $^{238}_{92}U$ bomlásából évente $1{,}33 \times 10^{-10}$ g $^{206}_{82}Pb$ keletkezik, ha a számítási időszak sokkal rövidebb, mint egy milliárd év. A 45-12 ábrából látható, hogy a $^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb$ bomlási lánc felezési ideje jó közelítéssel $4{,}5 \times 10^9$ év.

45.8 Nukleáris energia

45A-22 Közönséges vizet használva moderátorként a tiszta ^{238}U kritikus tömege 3 kg; milyen nagy a megfelelő urángömb átmérője?

45A-23 3×10^8 K fúziós hőmérsékleten egyensúlyi állapotban lévő hidrogéngázban a ^2H-magok négyzetes középsebessége v_{nk}; számítsuk ki eV-ban egy mag kinetikus energiáját.

45A-24 Tételezzük fel, hogy egy elektron van egy 10^{-14} m átmérőjű atommagban. Számítsuk ki (MeV-ban), hogy közelítőleg mekkora energiával kell ennek az elektronnak rendelkeznie. Alkalmazzuk a határozatlansági elvet, és értelmezzük a hely, határozatlanságot, mint a mag átmérőjét, és az impulzus határozatlanságot impulzusként. Alkalmazzuk az $E = pc$ relativisztikus közelítést. A béta-bomlás elektronjainak energiája ritkán nagyobb 1 MeV-nél, így a határozatlansági elv miatt nem létezhetnek elektronok az atommagban.

45B-25 Tegyük fel, hogy a fúziós reakcióhoz két atommag középpontjának legalább 10 fm-re kell egymást megközelíteni. Számítsuk ki a fúzió bekövetkezéséhez szükséges minimális teljes energiát (E, MeV-ban), a) a deutérium-deutérium reakcióban és b) a deutérium-trícium reakcióban.

45B-26 a) Számítsuk ki a deuteronok négyzetes középsebességét egy 200 K hőmérsékletű összetartott plazmában. b) Mennyi idő múlva fog a deutérium kiszökni a 10 cm átmérőjű gömbből, ha nincs összetartó hatás?

Vegyes feladatok

45C-27 A légkörrel egyensúlyban lévő, szerves anyagból álló élő mintában minden 10^{12} stabil szénatomra jut egy (5730 év felezési idejű) ^{14}C-atom. Egy régészeti faminta (cellulóz – $C_{12}H_{22}O_{11}$) tömege 21,0 mg. A mintát egy 88% hatásfokkal dolgozó bétaszámlálóba helyezve a berendezés egy hét alatt 937 beütést mutat. Számítsuk ki a minta korát, ha feltételezzük, hogy az eltelt idő alatt nem változott meg lényegesen sem a kozmikus sugárzási fluxus, sem a Föld légköre.

45C-28 Egy radioaktív minta bomlását $t = 0$-tól kezdve 10 s-onként mérjük. Mérési adataink: 1137, 861, 653, 495, 375, 284, 215, 163. (a) Ábrázoljuk az adatokat féllogaritmikus diagrammon, és húzzuk meg a legjobban illeszkedő egyenest. (b) A grafikon alapján állapítsuk meg a minta felezési idejét.

45C-29 Egy radioaktív minta bomlását $t = 0$-tól kezdve 1 percenként mérjük. Mérési adataink (másodpercenkénti beütésszám): 260, 160, 101 72, 35, 24, 13, 10, 5,2 4,0. a) Ábrázoljuk az adatokat féllogaritmikus diagrammon, és húzzuk meg a legjobban illeszkedő egyenes vonalat; b) számítsuk ki a felezési időt, c) és a bomlási állandót.

45C-30 Féllogaritmikus grafikonpapír hiányában mérjük fel közönséges milliméterpapíron a beütésszám logaritmusát az idő függvényében. Ekkor is egyenest fogunk kapni. Oldjuk meg így az előző feladatot.

45C-31 Élő szervezetben radioaktív indikátort alkalmazva előfordul, hogy az anyagcsere folyamán a jelzett atomot eltávolítja a szervezet. Ilyenkor a mért beütésszám kisebb, mint ami a radioaktív bomlásból következne. A biológiai folyamatra is logikusan tételezhető fel az exponenciális bomlás, azaz két bomlási állandónk lesz, egy *fizikai* λ_f és egy *biológiai* λ_b, tehát a folyamatok lefolyása:

$$\frac{dN}{dt} = -N(\lambda_p + \lambda_b) \quad \text{és} \quad N = N_0 e^{-(\lambda_p + \lambda_b)t}$$

Bizonyítsuk be, hogy a két folyamat együttes vagy *effektív felezési ideje* $1/T_e = 1/T_f + 1/T_b$.

45C-32 A ^{226}Ra 4,7845 MeV energiájú alfa-sugarakat bocsát ki. Számítsuk ki a teljes bomlási energiát, beleértve az anyamag visszalökődéséhez tartozó energiát is.

45C-33 Az 50 Ci aktivitású, ^{210}Po-ból készült kis gömböt megérintve, melegnek érezzük. Mennyi hő termelődik a gömb belsejében?

45C-34 A 45-12 példában olyan reakciót írtunk le, melyben a hatáskeresztmetszet sokkal nagyobb, mint az atommag vetületének nagysága. Másik szélsőség a neutrínó igen kicsi kölcsönhatási keresztmetszete; tudjuk, hogy ezért nagyon nehéz a neutrínót kimutatni. Az antineutrínó detektálására felhasznált egyik reakció: $\bar{\nu} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^0_{+1}e + {}^1_0n$, amelynek a hatáskeresztmetszete 10^{-19} b. (a) Határozzuk meg azt a vízmélységet (km-ben), amelyben az eredeti neutrínófluxus egymilliomod részével csökken.(b) Hasonlítsuk össze ezt az értéket a Föld-Nap távolsággal.

45C-35 Maradjunk az előző feladatnál. Egy atomreaktor antineutrínófluxusa 10^{13} antineutrínó/cm^2. Tételezzük fel, hogy ez a fluxus homogén eloszlásban éri egy 10 cm élhosszúságú vízkocka egyik lapját. Számítsuk ki, hogy mennyi lesz a vízben átlagosan naponta az antineutínó-proton kölcsönhatások száma.

45C-36 Elhanyagolható kinetikus energiájú lassú neutront abszorbeál egy nyugalomban lévő bór-atommag, és a (45-43) egyenlettel leírt reakció megy végbe. Milyen nagy lesz a reakcióban keletkezett két atommag kinetikus energiája?

45C-37 Az endoerg reakció Q értéke negatív. Az energia- és impulzus-megmaradás (nemrelativisztikus) törvényének felhasználásával mutassuk meg, hogy egydimenziós ütközés esetében az $E_{kü}$ *küszöbenergiát* a (45-39) képlettel számíthatjuk ki.

45C-38 Van egy olyan – lassú neutronok hatására végbemenő – hasadása a ^{235}U atommagnak, ahol az egyik hasadási termék ^{137}Te. A reakcióban nem termelődik neutron. (a) Melyik a másik hasadási termék? (b) A reakció Q-ja 190 MeV. A tömegeket egészszámra kerekítve számítsuk ki az egyes fragmentumok kinetikus energiáját.

45C-39 A fúziós reakciók alábbi sorozatát *proton-proton-ciklusnak* nevezik és feltehetőleg ez a napenergia forrása:

$$\begin{aligned} {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} &\rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + e^+ + \nu \\ {}^1_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} &\rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma \\ {}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \end{aligned} \qquad \textbf{(C 39)}$$

a) Számítsuk ki a reakciók Q-ját. b) Látszik, hogy az első két reakciónak kétszer kell bekövetkezni, hogy a harmadikban szereplő két $^3_2$ He keletkezzék. Ezt figyelembevéve számítsuk ki, hogy a *proton-proton-ciklus* végeredményeképpen a négy proton egyesüléséből létrejött $^4_2$He -atommag képződése mekkora energiafelszabadulással jár. c) Amikor a ciklusban kibocsátott két pozitron elektronnal találkozik, pozitron-elektron-szétsugárzás (annihiláció) következik be. Ekkor két egyenlő energiájú foton keletkezik, amelyek (az impulzusmegmaradási törvény értelmében) ellenkező irányban haladnak. Az (e^+, e^-)-szétsugárzáskor $2m_ec^2$ energia szabadul fel, ennyivel növekszik a reakcióban termelt összes energia. A szétsugárzást is figyelembevéve számítsuk ki a *p-p*-ciklusban felszabaduló összes energiát.

45C-40 Két deuteron (^{2}H) egyesüléséből alfa-részecske (^{4}He) jön létre. a) A tömeghiány alapján számítsuk ki a reakcióban termelt energiát. b) Hány ilyen reakciónak kell lezajlania másodpercenként ahhoz, hogy egy 60 W-os izzót tápláljon? c) Egy milligrammnyi deutérium mennyi ideig üzemeltetheti ezt az izzólámpát?

45C-41 m tömegű és K_0 kinetikus energiájú részecskét befog egy nyugalomban lévő M tömegű atommag. Az átmeneti mag a részecske beesési irányához képest 90°-os irányban azonnal kibocsát egy M_1 tömegű könnyű részecskét. A visszalökött mag tömege M_2. Bizonyítsuk be, hogy a kibocsátott könnyű részecske K kinetikus energiája:

$$K = \left[Q - \left(\frac{m - M_2}{M_2} \right) K_0 \right] \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right) \qquad \textbf{(C 41)}$$

ahol Q a teljes tömegkülönbségnek megfelelő energia.

45C-42 A következő reakciókban sérül-e valamelyik megmaradási törvény, és ha igen, melyik? Melyik folyamatot lehet ezek közül a fundamentális kölcsönhatások valamelyikével leírni?

$$
\begin{aligned}
&a)\ \rho^+ \to \pi^+ + \pi^0 \qquad f)\ \Lambda \to p + e^- + \bar{\upsilon}_e \\
&b)\ \rho^+ \to \mathrm{K}^+ + \pi^0 \qquad g)\ \pi^+ \to \mu^+ + \upsilon_\mu \\
&c)\ \rho^+ \to \pi^+ + \gamma \qquad h)\ \bar{\Lambda} + p \to \mathrm{K}^+ \qquad \textbf{(C 42)} \\
&d)\ \pi^+ \to p + \bar{n} \qquad i)\ \bar{\Lambda} + p \to \mathrm{K}^+ + \pi^0 \\
&e)\ \Lambda \to p + \pi^- \qquad j)\ \pi^+ + n \to K^+ + \Lambda
\end{aligned}
$$

45C-43 Egy K^+ részecske nyugalomba jut és $(e^+ + \nu_e)$-re bomlik. A nyugalmi tömeget elhanyagolva számítsuk ki a pozitron által elvitt energiát. Mennyi energiát visz el a ν_e?

45C-44 Egyenként 46 GeV energiájú e^- és e^+ frontálisan ütközik és Z_0 részecske keletkezik, majd a Z_0 $(\pi^+ + \pi^-)$-ra bomlik. Lehetséges-e ez? Fel tudjuk-e írni ennek az átmenetnek a lefolyását? (Útmutatás: Meg kell engedni, hogy a vákuumból kvark-antikvarkpár keletkezzék.)

45C-45 Ütközés során 1,116 GeV/c impulzusú Λ-részecske keletkezik. Mekkora lesz az átlagos úthossza a laboratóriumban, mielőtt elbomlik?

45C-46 Semleges M^0-részecske repülés közben két fotonra bomlik. Fejezzük ki a részecske nyugalmi tömegét a fotonok energiájával és impulzusával, és mutassuk ki, hogy kis szögek ($\cos\theta \sim 1 - \theta^2/2$) esetén $\theta^2 = m^2c^4/E_1E_2$, ahol E_1 és E_2 a fotonok energiája, θ a két foton impulzusvektora által bezárt szög és m a részecske nyugalmi tömege. Bizonyítsuk be, hogy θ akkor a legkisebb, ha $E_1 = E_2 = E/2$, ahol E a mezon energiája ($E = E_1 + E_2$, tehát $\theta_{\min} = 2mc^2/E$). Ha 10 GeV energiájú π^0 bomlik ($\pi^0 \to \gamma + \gamma$), milyen távolságra lesz a két foton, ha a detektort a keletkezés helyétől 2 m távolságra helyezzük el? Mi a helyzet egy 100 GeV-es π^0 esetében? (Útmutatás: Arra figyeljünk, hogy a fotonnak nincs nyugalmi tömege, tehát érvényes az $E = pc$ összefüggés.)