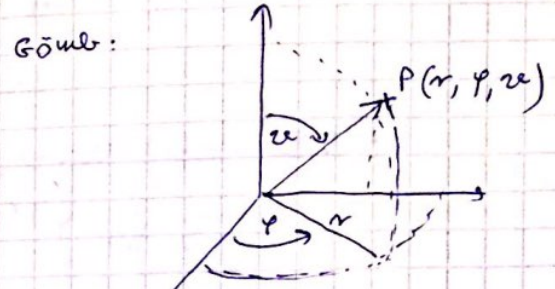
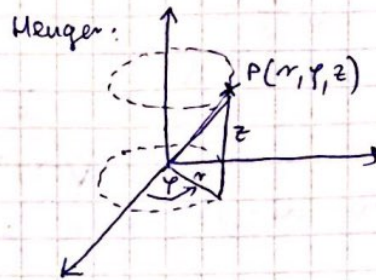
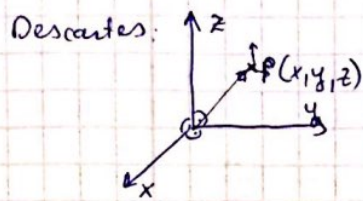


1. A vektoralitika leírása az elektrodinamikában.
A 3D irányított euklideszi tereket vizsgáljuk.
Koordináta rendszereket (origó, helyvektor) segítségével

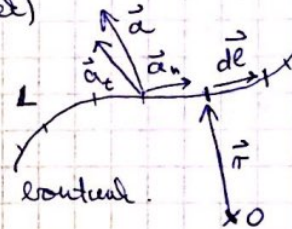


- Skálármező:** $u(\vec{r}) = u(x, y, z) = u(r, \varphi, z)$
Egy skálármenyiséget rendel az tér minden pontjához.
 $\vec{r} \mapsto u(\vec{r})$
 - Vektormező:** $\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z) \cdot \vec{e}_x + a_y(x, y, z) \cdot \vec{e}_y + a_z(x, y, z) \cdot \vec{e}_z$
Egy vektort rendel az euklideszi tér minden pontjához.
Vektor-vektor függvények. $\vec{r} \mapsto \vec{v}(\vec{r})$
- A skálármező értelmezési tartománya vektortér (Skálár-vektor függvények)

- Vonalmenti integrál:**

Vegyük egy L görbét,
amit kis Δl_i darabokra bontunk.
(dt nem fontos kis darabok)

Az $\vec{a}(\vec{r})$ vektort felbontjuk: normális és tangenciális komponensekre
($\vec{a}(\vec{r})$ vektortér helyfüggő mennyiség)



$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_i \cdot d\vec{l}_i$$

$d\vec{l}_i$ az irányított dl $d\vec{l}$ az $\vec{a}_t$ tangenciális komponens irányú

$$\vec{\Delta l}_i = \frac{\vec{a}_i}{|\vec{a}_i|} \cdot \Delta l_i = \vec{\Delta l}_i$$

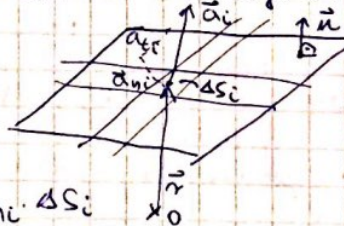
$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_i \cdot \vec{\Delta l}_i = \sum_{i=1}^N |\vec{a}_i| \cdot \Delta l_i$$

$$\lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |\vec{a}_i| \cdot \Delta l_i \cong \int_L \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

(A vonal mentén összegyűjt a vektort)

Ha L zárt, akkor az integrál a körhöz is (örvényösszeg)

- Felületi integrál:**



ΔS_i darabokra osztjuk a felületet

A felület minden pontjához egy $\vec{a}_i$ vektort rendelünk.

$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_i \cdot \vec{\Delta S}_i = \sum_{i=1}^N \vec{a}_{ni} \cdot \Delta S_i$$

$$\vec{\Delta S}_i = \frac{\vec{a}_{ni}}{|\vec{a}_{ni}|} \cdot \Delta S_i$$

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \vec{a}_{ni} \cdot \vec{\Delta S}_i = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

(A felületen összegyűjt a vektort)

Ha S zárt, akkor az a fluxusösszeg.

7.2

Differenciál operátorok:

• Skálármérés gradiense: $\text{grad } u(\vec{r}) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z$

nabla operátor: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

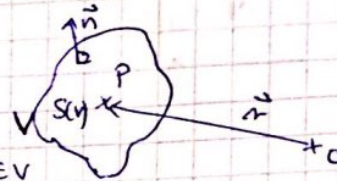
$\text{grad } u(\vec{r}) = \nabla u$

• Vektormérés divergenciája:

$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \oint_S \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \text{div } \vec{a}(\vec{r}) \quad P \in V$

$\text{div } (\vec{a}(\vec{r})) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}(\vec{r})$

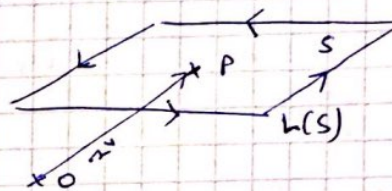
forrássűrűséget ad meg.
// A Jacobi mátrix főátlójának elemeinek összege.



• Vektormérés rotációjára:

$\vec{a} \text{ rot } \vec{a}(\vec{r}) = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{|S|} \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l}$

$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$



• Másodrendű diff. operátorok:

• Skáláris Laplace: $\Delta u = \text{div}(\text{grad}(u)) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
(másodrendű parciális deriváltak összege)

• Vektoriális Laplace:

$\Delta \vec{a}(\vec{r}) = \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{a}))$

$\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{e}_x + \Delta a_y \vec{e}_y + \Delta a_z \vec{e}_z$

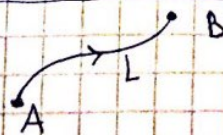
• Felbontási tétel (Helmholtz):

Egy kétszer folytonosan differenciálható $(\vec{v}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3)$ vektormérés forrásmentes ill. örvénymentes, ha divergenciája ill. rotációjára azonosan nulla. Ha azt is kikötjük, hogy $\vec{r}$ vektormérés elég gyorsan nullához tart a végtelenben, akkor teljesül a felbontási tétel:
Minden $\vec{v}(\vec{r})$ vektormérést egyértelműen felbontunk forrás- és örvénymentes vektormérések összegére.

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_d$; $\text{rot } \vec{a}_d = 0$ (örvénymentes)
 $\text{div } \vec{a}_r = 0$ (forrásmentes)

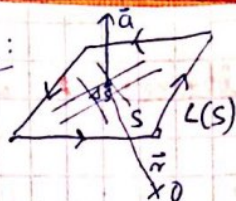
• Integrál tétel:

• Newton - Leibniz:



$\int_L \text{grad}(u) = u(B) - u(A)$

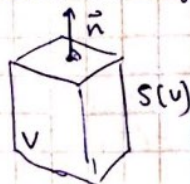
• Stokes - tétel:



$$\int_S \text{rot}(\vec{a}) d\vec{s} = \oint_L \vec{a} d\vec{l}$$

Az önművelés összege csak felületi örművelés maradhat meg.

• Gauss - tétel:



$$\int_V \text{div}(\vec{a}) dV = \oint_S \vec{a} d\vec{s}$$

• Következmények, Azonosságok:

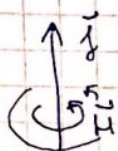
↳ Stokes + Newton-Leibnitz: $\text{rot}(\text{grad}(u)) = 0$
A skálármező örművelés

↳ Stokes + Gauss: $\text{div}(\text{rot}(u)) = 0$
A vektormező forrásmentes

$$\text{div}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot \text{rot}(\vec{a}_1) - \vec{a}_1 \cdot \text{rot}(\vec{a}_2)$$

$$\text{div}(\vec{a} \cdot \text{grad}(b)) = \text{grad}(\vec{a}) \cdot \text{grad}(b) + \vec{a} \cdot \text{div}(\text{grad}(b))$$

• Maxwell egyenletek:



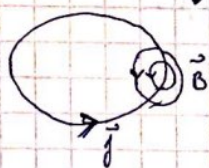
• Ampère törvény Maxwell kiegészítéssel: Az elektromos áram, ill. a folyóssági egyenlet kiegészítéseből adódó eltolási áram mágneses teret hoz létre.

$$\oint_{L(s)} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{Az áram örművelés, magu. elektromos teret hlt})$$



• Faraday - Lenz törvény: A mágneses indukció változása örművelés elektromos teret hlt, amelynek irányja ellenkező, mint az ∂t létrehozó változás.

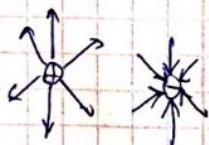
$$\oint_{L(s)} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s} \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



• Gauss mágneses törvénye: A mágneses tér forrásmentes, azaz a mágneses erővonalak önmagukban záródnak.

$$\oint_{S(v)} \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

• Gauss törvény: Az elektromos tér forrásos, azaz elektromos töltés jelenlétében erővonalak indulnak a pozitív töltésekből, melyek a negatív töltéseken végződnek.



$$\oint_{S(v)} \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

2. Ismertesse a konstitúciós egyenleteket és osztályozza ezeket alapján a közvegeket.

A Maxwell egyenletek a közvegtől függetlenül írják le az elektromágneses tér jelenségeit. A közvegy fegyelenberetelével $\vec{E}$, $\vec{B}$ térvektorok és $\vec{D}$, $\vec{H}$ gerjesztett vektorok valamint vezetési közvegyben $\vec{j}$ és a térvektorok kapcsolatait írja le. Egyenlet, lineáris, izotrop, nem diszperzív közvegyben:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad ; \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad ; \quad \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

polarizáció susceptibilitás

ϵ : permittivitás

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad ; \quad \vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

magnetizáció

μ : permeabilitás

$$\vec{j} = \sigma_0 (\vec{E} + \vec{E}_b) \quad ; \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

fajlagos vezetőképesség

$\vec{E}$, $\vec{B}$: intenzitásvektorok

$\vec{H}$, $\vec{D}$: gerjesztett vektorok

ϵ , μ , σ : anyagjellemzők

Elektromos	$\vec{D}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{E}(\vec{r})$	ϵ
Mágneses	$\vec{H}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{B}(\vec{r})$	μ
el. tér és áram sűrűség	$\vec{j}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{E}(\vec{r})$	σ
terjellemtől		

• Lineáris közvegy:

Lineáris közvegy az amilyen

ezek az összefüggések homogén lineáris alakban írhatóak fel. (matematikailag homogén lineáris kapcsolat)

Tenzorok segítségével írható le: $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{\epsilon}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

// A tenzor reprezentációja adott koordináta rendszerben egy mátrix

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Nemlineáris a közvegy, ha ez a leírás nem lehetséges.

• Izotrop közvegy: Az összefüggés az elektromos vagy mágneses anyagjellemzők között irányfüggetlen.

Lineáris közvegy esetén az $\vec{\epsilon}$ tenzor diagonális:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$$

Anizotropia: kristályrácsok, a kristályrács irányítottaságától függően a mért ϵ paraméter más vagy egy transzformátor vasmagján a vasmag hengeres lemezeiből áll és különböző tulajdonságokat mutat a hengeres irányban és a merőleges irányban vagy a metaanyagoknál a struktúráktól adódó anizotropia

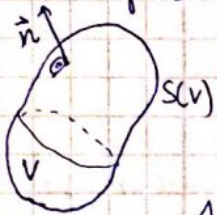
- Homogén közeg: Homogén közegben a kérvetörök közötti összefüggés a helytől független.

Pl.: ha lineáris, izotrop a közeg: $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon$ (konstans)

// Inhomogén: töltő anyagjellemzőjű blokk alkot egyedget

3. Fogalmazza meg a töltésmegmaradás elvét (folytonossági egyenlet) többféle matematikai alakban. Milyen kapcsolatban áll ez a Maxwell-egyenletekkel?

Kapcsolatot terem az áramsűrűség és a töltéssűrűség között.



$$Q = \int_V \rho \, dV \quad : \text{terbeli töltéssűrűség}$$

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad : \text{kifolyó áram}$$

A pozitív áram kifelé folyik és ha a belül lévő töltések csökkennek:

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \Rightarrow 0 = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Folytonossági egyenlet.

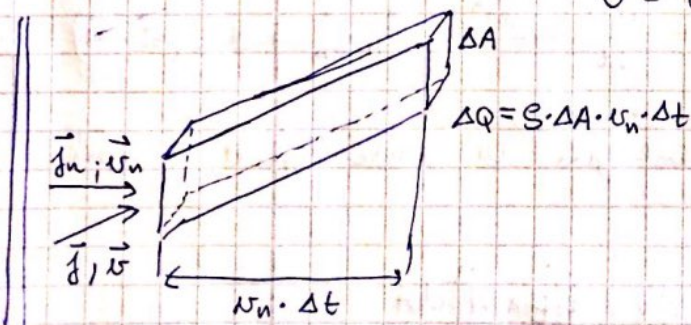
Folytonossági egyenlet:

Az eltávozó és a beérkező áramok összege zérus, a nettó árammentes áram (ellenáram) ellentétben a felhalmozódó töltésmennyiséggel.

Másképpen: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (Maxwell I.)

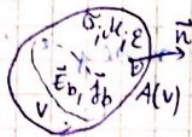
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_S \quad (\text{Maxwell IV.})$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$



4. Ismertesze az elektromágneses térben az energiasűrűségre és az energiaáramlásra vonatkozó általános összefüggéseket. Írja fel az energiamérleget és definiálja a Poynting vektort.

Az EM energia egy fajta az energiatípus. Egy V térfogatban felhalmozott $W = w(t)$ EM. energia két oldalról változhat meg. Vagy fellepnek a térfogatban olyan $P = P(t)$ teljesítmény források, amik $P > 0$ esetén a tér energiáját csökkenti, vagy $P < 0$ esetén növelik. Másrészt a térfogat határoló A zárt felületén átszármazó vagy átsugárzott $P_s = P_s(t)$ teljesítmény csökkenti a ténergiát $P_s > 0$ esetén, vagy $P_s < 0$ esetén növeli.



$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{J}_b; \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \text{ (lineáris)}; \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \text{ (izotrop)}$$

(lineáris, izotrop közeg)

$$\frac{dW}{dt} + P + P_s = 0$$

A P teljesítménysűrűség egy adott térfogatra vett integrálja megadja a térben az egységnyi idő alatt elvégzett munkát. (Az energiaáramlás sebessége):

$$P = \int_V p \cdot dV = \frac{dW}{dt}; \quad p: \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

A w energiasűrűség egy adott térfogatra vett integrálja megadja a térben főtartó összenergiát:

$$W = \int_V w \cdot dV; \quad w: \left[\frac{J}{m^3} \right] = \left[\frac{Ws}{m^3} \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P + P_s = 0$$

A P_s átsugárzott teljesítménysűrűség a Poynting - vektor (teljesítményáram-sűrűség vagy energiaáram-sűrűség) ~~divergencia~~ divergenciája. $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \left[\frac{W}{m^2} \right]$

Az Energiaáram-sűrűség (S) megmutatja, hogy melyik irányba áramlik az elektromágneses energia és hogy mennyi energia áramlik át az S -re merőleges egységnyi felületen időegység alatt.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + P + \text{div} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{\frac{\vec{J}^2}{\sigma}}_P - \underbrace{\vec{E}_b \cdot \vec{J}_b}_{P_s} + \underbrace{\text{div}(\vec{E} \times \vec{H})}_{P_s}$$

A vezetési áram okozta disszipált ~~hő~~ P hőenergia és az átsugárzott energia is veszteségként szerepel.

• Energiamérleg:

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV - \int_V \vec{E}_b \cdot \vec{J}_b dV + \oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$$

A térfogatban főtartó összes EM energia megváltozása (csökken)

$\int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV$ hőteljesítmény vagy Joule-hő $\sim R \cdot I^2$
 $R = \frac{l}{\sigma \cdot A}$

$\int_V \vec{E}_b \cdot \vec{J}_b dV$ nem EM. eredetű munka

$\oint_A (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$ Sugárzott teljesítmény

Bizonyítás:

$$\text{div } \vec{S} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

$$\text{div } \vec{S} = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} \quad (\text{Azonosítóg})$$

$$\begin{cases} \text{Maxwell I.:} & \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{|\cdot \vec{E}|} -\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{j}_v - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{Maxwell II.:} & \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{|\cdot \vec{H}|} \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Poynting-étel: } \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{j}_v - \underbrace{\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial \omega}{\partial t}}$$

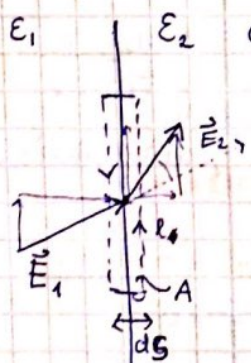
Mivel homogén és lineáris a közeg, ezért
 $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ és $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ ezért:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot \vec{H}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{D} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{B} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{S} = -\rho - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \omega \rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho + \text{div } \vec{S} \stackrel{!}{=} 0$$

5. Ismertesse az EM. vektormezők közeghatáron teljesülési feltételeit. Hogyan változnak a térfelvezető a határon, ha ott felületi töltéssűrűség, ill. felületi áram van jelen? Mondjon ezekre gyakorlati példát.

E_1 E_2 a_1 Elektromos térerősség:
 $\vec{E}_1$ és $\vec{E}_2$ jobb és bal oldali határérték



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$E_{2t} \cdot l + E_{1n} \cdot dS - E_{1t} \cdot l + E_{2n} \cdot dS = - \underbrace{dS \cdot l}_{\downarrow dS \Rightarrow 0} \cdot \frac{\partial B_n}{\partial t}$$

($\frac{\partial B_n}{\partial t}$ változási sebessége véges)

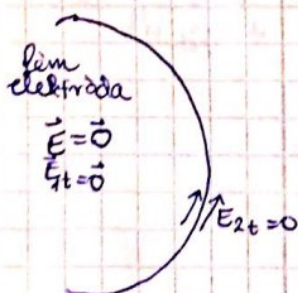
• folytonossági feltétel $\rightarrow E_{2t} \cdot l - E_{1t} \cdot l = 0$

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

Az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át két közeg határon

• peremfeltétel: A villamos térerősség felületirányára mindig merőleges.
 $\rightarrow$ Felületi elviteles: 2 pont közötti felm. különbség nulla, mert az érintőleges komponens nulla

függőleges felületre



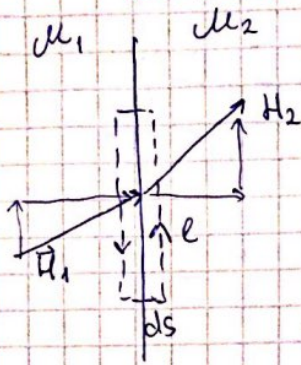
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{H}_t = \vec{0}$$

$$\vec{E}_{2t} = 0$$

$\rightarrow$ gyakorlati példa: fémfelület, kondenzátor lemezfelülete, áramvezető felülete

b, Mágneses térerősség.



$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

$$H_{2t} \cdot l + H_{2n} \cdot ds + H_{1t} \cdot l + H_{1n} \cdot ds = K \cdot l$$

felületi áram sűrűsége
eset a lapra merőleges
komponense miatt

$\downarrow ds \rightarrow 0$

• folytonossági
feltétel

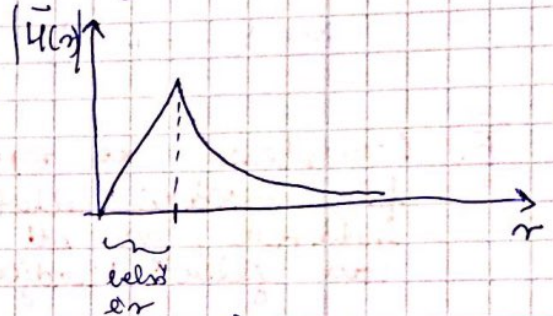
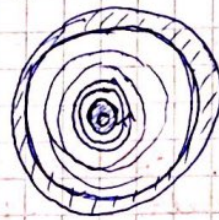
$$H_{2t} - H_{1t} = K$$

A mágneses térerősség tangenciális komponense
létező határon ugrik, ha felületi áram folyik

• gyakorlati példa: - koaxiális kábel mágneses tere.

belső ér: rézvezető,
a belső érben belül
és a belső ér és
a köpeny között is
van mágneses tér.

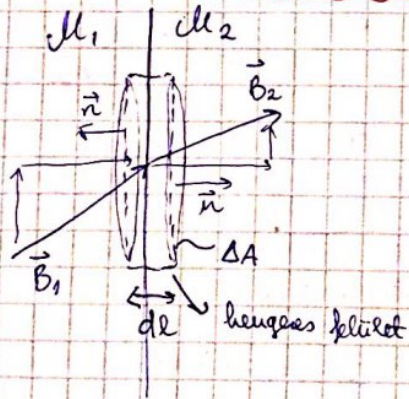
↳ nincs felületi áram



- ideális fény belsejében $\vec{H} = 0 \rightarrow H_{1t} = 0$

Pl.: ismét tér (fény falak határáján) $H_{2t} = K$
a felületi áram elondd megváltoztatására

c, Mágneses indukcióvektor.



$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

a B-nek csak a normális irányú komponense
indult
// a normális a felülethöz
kefélt mutat

$$-B_{1n} \cdot dA + B_{2n} \cdot dA + \Delta \phi_{\text{párolt}} = 0$$

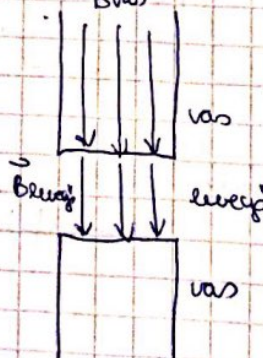
$\downarrow dl \rightarrow 0$ párolt fluxusvörméreg

• folyt. felt.

$$B_{1n} = B_{2n}$$

A mágneses indukcióvektor normális komponense
létező határon folytonosan megy át.

• gyakorlati példa:

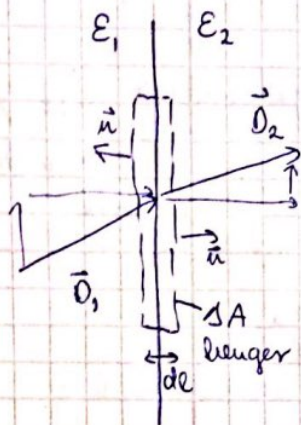


$$\vec{B}_{\text{vas}} = \vec{B}_{\text{levegő}}$$

levegő

vas

d, Elektromos eltolási vektor:



$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV = Q$$

Ha van felületi töltéssűrűség, az megnövekszik ha $\Delta l \rightarrow 0$

$$-D_{1n} \cdot \Delta A + D_{2n} \cdot \Delta A + \Delta \Phi_{\text{párolt}} = \sigma \cdot \Delta A$$

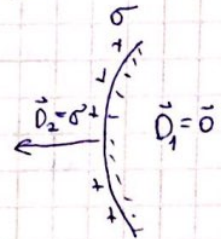
(Willmanns fluxus)

$\downarrow \Delta l \rightarrow 0$

• fizt. felt.: $\rightarrow \boxed{-D_{1n} + D_{2n} = \sigma} \quad \left[\frac{AS}{m^2} \right]$

Az elektromos eltolás normális komponense egyenlő az egyenlő nagyságát a felületi töltéssűrűségével. Ha nincs σ , akkor folytonos marad.

• gyakorlati példa: - elektródák felülete
 $\rightarrow$ a $\vec{D}_2 = \vec{D}_{2n} = \sigma$ (merőleges a felületre)
 ismét jól esik megkapni a felületi töltéssűrűséget

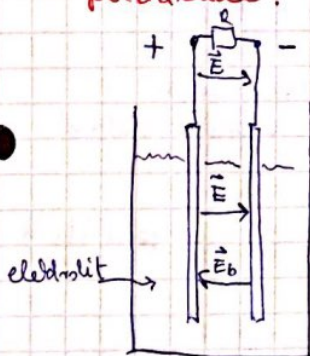


Ha 2 közegben meghatározzuk a teret, akkor a 2 közeg összeillesztésével van szükség a fizt. feltételre.

// e, Áramsűrűség: $\vec{j}_{2n} - \vec{j}_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$

Az áramsűrűség normálisa az időegység alatt megváltozott felületi töltéssűrűség arányával változik.

⑥ Ismertetse a beiktatott mezők szerepét a nem elektromágneses eredetű töltésmozgató hatás leírásában és illusztrálja példákkal.



Ha áram folyik "R" ellenálláson keresztül, a töltések az elektródák között Δt idő alatt mennek át, ami a feszültség ellenében. Ez egy kémiai/idegen eredetű erő $\Rightarrow$ beiktatott feszültség. Ez $\vec{E} < \vec{E}_b$, ha folyik áram, $\vec{E} = \vec{E}_b$, ha nem folyik áram.

A beiktatott feszültség az a nem elektromos hatással reprezentált feszültség.

• A differenciális Ohm-törvény alakja azt mondja ki, hogy a konduktor (vezető) áramsűrűsége egyenesen arányos az elektromos térerősséggel:

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{E}_b] \quad \sigma: \left[\frac{1}{\Omega m} \right]; \text{ fajlagos ellenállás: } \sigma = \frac{1}{\rho}$$

a közeg vezetőképessége.

• Ha nem arányos σ -al:

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{E}_b] + \vec{j}_b$$

Pé: Van den Graaf generátorban a rugalmasan átvihető töltések, ami egy mechanikai hatás

7. Ismerkedés az elektrodinamika felosztásával. Mondjon példákat az egyes területek tipikus alkalmazására.

a, Elektrostatika: időtől független elektromos jelenségek. ($\frac{d}{dt} = 0$)

Statikus elektromos tér. Ha az időtől függő (időre nem változó) rend elhagyjuk a Maxwell egyenletek 2. és 3. számúait, marad az elektrostatika és a magneto statika.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 & \text{Az elektromos tér indukciós} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{A forrás az elektromos töltés} \\ \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} + \vec{P} & \text{A tér homogén} \end{aligned}$$

- Elektroda, kapacitás, potenciál
- Alkalmazás: nagyfeszültségű technika, nyugvó töltéseket fűre

b, Magneto statika: Statikus mágneses tér, ahol áramok sem folynak. Jellemzően a paramágneses tere.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & (\text{stacionárius (lassan változó) áramok tere}) \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{M} := \text{a mágnesezettség} \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

↳ stacionárius (lassan változó) áramok fűrése
Speciális esete

- Alkalmazás: villamos gépek (mágneses skálapotenenciál fogalma)

c, Stacionárius áramok mágneses tere

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \cdot \text{Alkalmazás: villamos gépek, villamos energia} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{átalakítás} \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) & \{ \text{induktivitás, vektorpotenciál} \} \end{aligned}$$

d, Stacionárius áramlási tér: Stacionárius áramok folynak (a tér minden irányában), minden más időben állandó. ($\vec{J} \neq 0$; $\frac{d}{dt} = 0$)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 & \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} - \frac{d\vec{D}}{dt} & (\text{fotonenergia felkeltése}) \\ \text{div } \vec{J} &= 0 & \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{főn} \\ \vec{J} &= \sigma_0 (\vec{E} + \vec{E}_0) & \text{div} \cdot \text{rot } \vec{H} &= \text{div } \vec{J} = 0 \end{aligned}$$

- ellenállás, áramkörök

• Alkalmazás: elektrolizáló kád, földelés biztosítás, orvosi mérőműszerek, földben rejtőző áramok

e, Időfüggő stacionárius tér:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} & \cdot \text{öntáram, skin effektus, behatolási} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \text{mélység} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \cdot \text{Alkalmazás: villamos gépek,} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{magneto statikus anyagvizsgálat,} \\ \vec{D} &= \epsilon (\vec{E} + \vec{E}_0) & \text{induktív hűtés} \\ \vec{B} &= \mu (\vec{H} + \vec{M}) & \text{öntáram áramlás,} \\ \vec{J} &= \sigma (\vec{E} + \vec{E}_0) + \vec{J}_0 & \text{váltakozó áramú ellenállás hálózata} \end{aligned}$$

+ Pl.: Hatráf primer tekercsében időben változó áram folyik, akkor a trafó vasmagjában időben változó indukciós tér jön létre.

Ha áramkimaradásnál egy ellenkező irányú indukciós tér jön létre, ami a vezető közepén a legerősebb és ez kimarad a vezetőt a hengeres test szélére.

↳ EM. hullámok speciális esete. $(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \ll |\vec{J}|$

f) EM. hullámok: ~~(Főmódtól függetlenül vizsgáljuk a teret)~~

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0 \text{ és } \vec{J} \neq 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{J}_b$$

• Alkalmazás: antennák, hullámkijelzős, reflexió, szellőztetés, polarizáció

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

8) Írja fel és értelmezze az elektromágneses Maxwell-egyenleteket differenciális alakban, valamint a vonatkozó konstanciás egyenleteket és folytonossági feltételeket. Hogyan számítható ki az elektromos tér energiája? $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$

• Maxwell-egyenletek:

Gyengébbi törvény: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$

Faraday indukciós törvénye: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{önindukciós}$

Fluxusmegmaradási törvénye: $\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{a indukciós tér forrásmentes}$

Gauss - törvény: $\text{div } \vec{D} = \rho \rightarrow \text{a tér forrása a töltés}$

• Konstanciás egyenletek:

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \text{ha lineáris és izotrop a közeg: } \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$

$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$

$\vec{J} = \sigma(\vec{E}_r + \vec{E}_b) + \vec{J}_b$

• Folytonossági egyenletek: (5. leltel)

$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0 \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$

$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma \quad \vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma$

$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{k} \quad \vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{k}$

$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}$

$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \vec{J}_{2n} - \vec{J}_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$

• Az elektromos tér energiája:

Az energiasűrűség időbeli változása: $\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Az energiasűrűség: $w = \frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot \vec{H}^2$

9. Mutassa le a dielektrikus polarizáció egyszerűsített anyagszerkezeti modelljét, az elektromos térerősség és az eltolás vektornak kapcsolatát, valamint a dielektrikus állandó bevezetését.

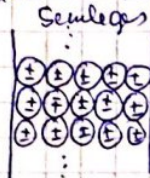
• Elektromos eltolás: $\vec{D} \left[\frac{AS}{m^2} \right] \sim \sigma \left[\frac{AS}{m^2} \right]$

bevezetése:

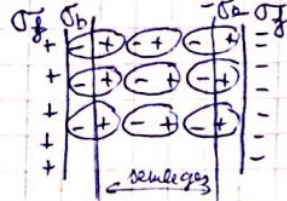
A töltéssűrűséget 2 részre osztjuk: szabad és kötött töltést
 $S = S_f + S_b$
 szabad és kötött töltést
 ↓
 felületen, levegőben körülötte, anyagban

• Anyagszerkezeti modell: dielektrikummal kitöltött síkhondenzátor

töltetlen kondenzátor:



töltött kondenzátor:



→ felületi töltéssűrűség a lemezeken.

A lemezeken a töltést elektromos tér hozza létre, ami torzítja a molekulákat → apró dipolusok jönnek létre. A szigetelőanyag belseje semleges, de a lemezek mellett megjelent egy nettó töltéssűrűség, ami kompenzálható, ezek kötött töltések (σ_b és $-\sigma_b$)

• Matematikai leírás: írjuk le a kötött töltéseket (sűrűséget) mint egy vektormező negatív divergenciáját.

$$S_b = -\text{div } \vec{P}$$

$\vec{P}$:= polarizáció: dipólusmomentum sűrűség

Gauss-tétel: (makroszkopikus alát)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{S}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (S_f + S_b) = \frac{1}{\epsilon_0} (S_f - \text{div } \vec{P})$$

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = S_f \quad \boxed{\vec{D} \triangleq \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\text{div } \vec{D} = S_f \quad (\text{makroszkopikus alát})$$

Az egyenletben csak a szabad töltéssűrűség szerepel, ezért ezt könnyebben tudjuk mérni. Illetve tudjuk mérni az anyagjellemzőjét. (alt. lineáris anyag/közeg)

• Lineáris közeg alát ($\vec{P} \sim \vec{E}$) a polarizáció arányos az $\vec{E}$ -tel

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (\vec{E} + \chi \vec{E}) = \epsilon_0 \cdot \vec{E} (1 + \chi) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{AS}{Vm} \right]$$

szuszceptibilitás

ϵ_r : relatív permittivitás = dielektrikus állandó

ϵ_r : Egy makroszkopikus anyagjellemző, könnyen mérhető, a legkönnyebben meg is adható, leírható

Általános esetben (kristályos közeg) az $\vec{E}$ és $\vec{D}$ vektorok nem párhuzamosak. Eme jelölést is az anyagjellemző állandókat. A permittivitás annál a mérték, hogy egy közeg mennyire áll ellen a $\vec{D}$ hatására elektromos térrel szemben. // ϵ : helybenafüggő lehet, idő is lehet a polarizáció

Kiegészítés: Mágneses (polarizációs): térsűrűség: $\vec{H}$ [$\frac{A}{m}$]

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

(J : térfogati áramsűrűség)

↓
szabad töltés
áram, könnyen mérhető

↓
kött
az atomi
köráramok
hátsótt egye

→ polarizációs áramsűrűség: A $\vec{P}$ teljes névteljes
töltésáram jön létre, ha a polarizáció
időben $\vec{P}$ változik, akkor áram folyik

• Segédvektor más bevezetése $\vec{J}_b = \text{rot } \vec{M} \rightarrow$ mágneseszettség

• Ampère kéle gerjesztési törvény.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Mikroszkopikus alak})$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{J}_f + \text{rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P})}_0 \quad ; \quad \vec{H} \triangleq \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (\text{Makroszkopikus alak})$$

Csak a szabad áramok szerepelnek, amit könnyen mérhetők

• lineáris közegben: $\vec{H} \sim \vec{M}$

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

mágneses susceptibilitás ($-10^{-2} < \chi < 10^4$) (ferromágnes: 10^6)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\mu} \cdot \vec{H}$$

μ_r : relatív permeabilitás

(frekvencia függő is lehet)

Töbör nagyságrendet ölel át mint az ϵ_r

// A ferromágneses anyagok jellemzően nem lineárisak

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am} \right]$$

10. Ismerkedés az elektromos terekkel, vektor skalárpotenciál fogalmát, bevezetésének módját, valamint kapcsolatát a feszültséggel és térerősséggel. Hogyan fejezhető ki az elektromos tér energiája a potenciállal?

A skalárpotenciál segédmenyiség, a vektoralizis integráljaitól egyike. Azt a skalármezőt határozza meg, aminek az adott

vektormező a gradiense. Feltételezzük, hogy a töltések mozdulatlans.

Mivel $\text{rot } \vec{E} = 0$, ezért $\vec{E}$ leírható egy skalár gradienseként:

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi$$

$\phi :=$ skalár potenciál

// azonoság: $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$

↳ könnyű mérni, vektor helyett
skalár az ismeretlen, energiával kapcsol.

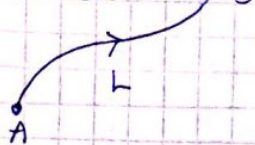
ϕ egy additív K állandó erejéig határozatlan. K konstans, és helyfüggetlen, ezért $\text{grad } K = 0$.

$$\phi' = \phi + K \rightarrow \text{grad } (\phi + K) = \text{grad } \phi + \underbrace{\text{grad } K}_{=0}$$

// analógia a csomóponti potenciál módszerével

- Vegyük egy L görbét, A és B végpontokkal:

Ált. eset:



Elektromos erő / feszültség: $\mathcal{E}_L \triangleq \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (EMF)

itt függ az L alaktól

Q ponttöltés mozg L mentén, ekkor
a mező munkája: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$W_{AB} = \int dW = Q \cdot \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \cdot \mathcal{E}_L$$

- Speciális eset: Elektrosztatika:
mivel $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}$ tér örvénymentes, „potenciálos”

$$\mathcal{E}_L = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_L -\text{grad } \phi \cdot d\vec{l} = \phi(A) - \phi(B) \leftarrow L \text{ alaktól független az EMF}$$

Ebben az esetben a feszültség az EMF potenciális tértől

- A feszültség nem más, mint potenciálkülönbség. Egy pont feszültségét egy referencia ponthoz képest nézzük (r_0)

$$U_{AB} = \phi(A) - \phi(B) \text{ [V]}; \quad U_{AB} = Q \cdot \Delta\phi$$

$$\phi(r) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\phi(r) = \phi(r_0) - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\phi(r_0) \triangleq 0$
($r_0 \rightarrow \infty$ eset.)
explicit definíció

- A térben tárolt energia: (* Laplace-Poisson)

Figyünk fel, hogy a közeg végtelen, lineáris, homogén. (vákuum)

Kiindulási:

az el. térben tárolt energia

$$W_e = \int w_e dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\text{grad } \phi|^2 dV \rightarrow \text{a teljes térre kell integrálni}$$

$$\text{vettünk fel: } \text{div}(\vec{a} \cdot \text{grad } \vec{b}) = \text{grad } \vec{a} \cdot \text{grad } \vec{b} + \vec{a} \cdot \text{div. grad } \vec{b} \quad // \vec{a} = \vec{b} = \phi$$

$$\text{div}(\phi \cdot \text{grad } \phi) = |\text{grad}(\phi)|^2 + \phi \cdot \Delta \phi$$

$\leftarrow$ ezt az alkalmazzuk

$$- \frac{1}{\epsilon_0} \phi S, \text{ mert elektrosztatikával foglalkozunk } (\epsilon \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0})$$

- Vegyük egy véges V térfogatot:
ennek vére az integrál:



$$W_{e,V} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 |\text{grad } \phi|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \phi \cdot S \cdot dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \text{div}(\phi \cdot \text{grad } \phi) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \phi \cdot S \cdot dV + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{S(V)} \phi \cdot \text{grad } \phi \cdot d\vec{S}$$

térfogati rész

Gauss-tétel

felületi rész

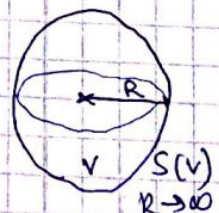
- Ha V a teljes tér, akkor a felület határát a végtelenben vesszük. Legyen V egy gömb, sugara R .

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S(V)} \phi \cdot \text{grad } \phi \cdot d\vec{S} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k_1}{R} \cdot \frac{k_2}{R^2} \cdot 4R^2 \cdot \pi = 0 \quad (\text{A felületi integrál eltűnik})$$

így teljes térre:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \phi \cdot S \cdot dV$$

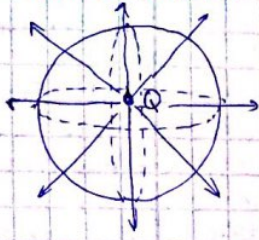
A töltéssűrűség és potenciál közötti energia ad.



Elegendő a töltést helyére integrálni, a kiindulási egyenletünk mindenképp jól kijön, ha csak az, ahol $S \neq 0$

11. Mutassa be néhány egyszerű tölteselrendezés (ponttöltés, egyenes vonaltöltés, töltött síkfelület, dipólus) elektromos tereit és potenciálterét! Milyen módszerrel lehet, ill. célszerű őket számolni?

• Ponttöltés:



vákuumban: $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$; Gauss-tétel: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \, dV$

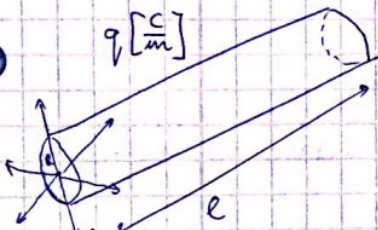
$$\begin{aligned}\phi(r) &= \int_{r_0}^r E_r(r) \, dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{R^2} \, dR = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right] \Big|_{R_0 \rightarrow \infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}\end{aligned}$$

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_r(\vec{r}) \int d\vec{s} = \int \rho \, dV = Q$$

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_r(\vec{r}) \cdot 4\pi \cdot R^2 = Q$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}$$

• Végtelen hosszú egyenes vonaltöltés:



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \, dV = q \cdot l = \sum Q$$

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_r(\vec{r}) \int d\vec{s} = q \cdot l$$

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_r(\vec{r}) \cdot 2\pi \cdot R \cdot l = q \cdot l \quad \text{// szimmetria miatt csak a párhuzamos részt indult bele}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r E_r(r) \, dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} \, dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

• Végtelen kiterjedésű sík:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \, dV = \sigma \cdot A$$

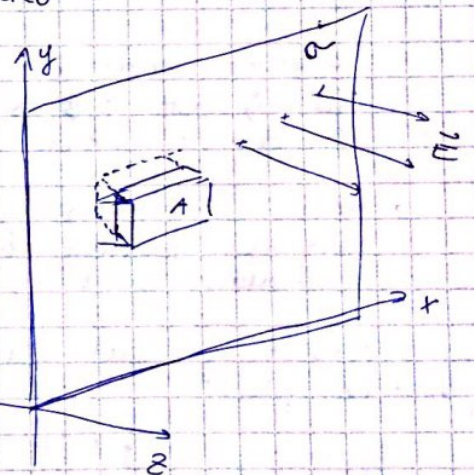
$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_z \int d\vec{s} = \sigma \cdot A$$

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_z \cdot 2A = \sigma \cdot A$$

$$E_z = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

nem függ a távolságtól
az előjel attól függ,
hogy az $\vec{E}$ milyen irányú

$$\phi_z(z) = \int_{z_0}^z E_z(z) \, dz = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z - z_0) \Big|_{z_0=0} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$$



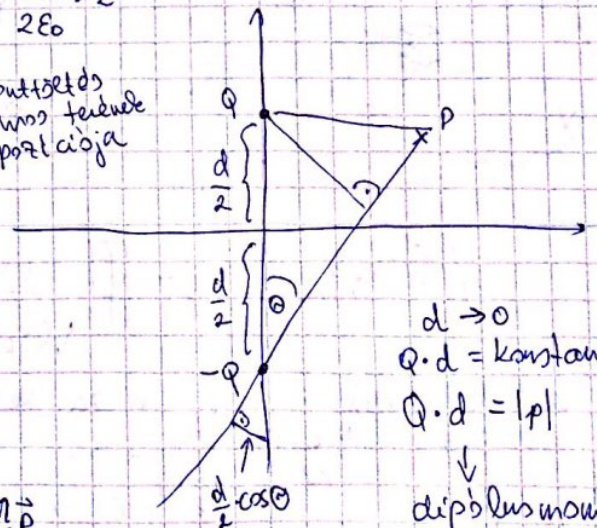
• Dipólus:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos\theta} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r + \frac{d}{2} \cos\theta - r + \frac{d}{2} \cos\theta}{r^2 - (\frac{d}{2} \cos\theta)^2} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cdot \cos\theta}{r^2 - (\frac{d}{2} \cos\theta)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cdot \cos\theta}{r^2}$$

elhanyagolható,
mert $d \ll r$



$d \rightarrow 0$
 $Q \cdot d = \text{konstans}$

$Q \cdot d = |p|$

dipólusmoment
 $\oplus \leftarrow \ominus$

Forgatónyomatek: $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}_{kies\vec{E}}$, $\vec{p} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi \quad ; \quad \text{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{rot}\vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} -2 \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^3} \\ \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\sin\vartheta}{r^3} \right) \\ \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^3} \\ \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{\sin\vartheta}{r^3} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \vec{E}_r(r, \vartheta) \\ \vec{E}_\vartheta(r, \vartheta) \\ \vec{E}_\varphi = \vec{0} \end{matrix}$$

Az elektrosztatikus feladatok m. s. - a egyenletmű adott töltéssűrűség és peremfeltétel mellett. Olyan elrendezést kell találni, amely u. a. a perem feltételek kielégítése mint az eredeti ext. Töltéselosztás elrendezése csiszaváratni m. p. sz. módszerével pont/vonalon töltések el. terése!

Számítási módszer: szuperpozíció elvével a különböző módszerek.

12. Írja fel és értelmezze az elektrosztatika Poisson - egyenletét és adja meg a homogén közegben érvényes, detalános megállapítást! Milyen körülményes ennek a formulának a használata a gyakorlati esetek nagy részében?

- Gauss-törvény + a skálapotenciál definíciója.

$$\text{div}\vec{D} = \rho$$

$$\text{div}(\epsilon \cdot \vec{E}) = \rho$$

$$\text{div}(\epsilon(-\text{grad}\Phi)) = \rho \Rightarrow -\text{div}(\epsilon(-\text{grad}\Phi)) = \rho \rightarrow \text{Poisson - egyenlet detalános alakja}$$

Ha ϵ detalános és a közeg homogén és izotrop:

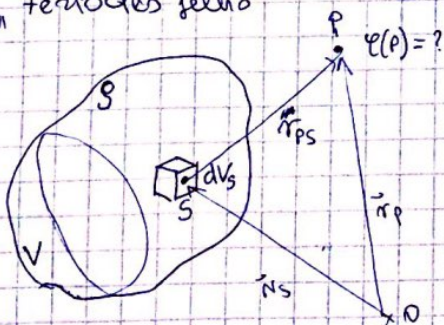
$$\text{div}(\text{grad}\Phi) = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Descartes rendszerben a Laplace operátor: $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

Ha ρ adott $\rightarrow \Phi \rightarrow \vec{E}$ meghatározható,
 Φ skálár, mert skálár.

- Azért körülményes a használata, mert az egyenlet megoldásához szükséges feltételek, hogy legyen végtelen kiterjedésű, homogén és lineáris a közeg és ismert legyen a töltéssűrűség.

- Poisson egyenlet detalános megoldása: lineáris, izotrop, homogén közeg + végtelen kiterjedésű töltéssűrűség ρ pontot körülvevő dV_s területelem, ami olyan kicsi, hogy ponttöltésnek tekinthető.



$$d\varphi(P) = \frac{\rho(s) \cdot dV_s}{4\pi\epsilon \cdot r_{PS}} \quad (\text{ponttöltés potenciálja})$$

$$\varphi(P) = \int_V \frac{\rho(s) dV_s}{4\pi\epsilon \cdot r}$$

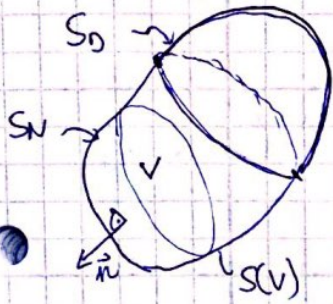
$$\varphi(x_P, y_P, z_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(x_s, y_s, z_s)}{\sqrt{(x_P - x_s)^2 + (y_P - y_s)^2 + (z_P - z_s)^2}} dx_s dy_s dz_s$$

A töltéssűrűség nagy hozzá lehet a potenciáldefiníciót mint ponttöltés szuperpozíciója.

• Szuperpozíció: $\Delta\Phi_1 = -\frac{\rho_1}{\epsilon}$, $\Delta\Phi_2 = -\frac{\rho_2}{\epsilon}$ $\Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon}$

13. Fogalmazza meg az elektrosztatika peremérték-feladatát.

- Egy peremérték feladatnak három alkotórésze van: egy V térfogat, egy egyenlet, amit a keresett függvénynek ϕ kell elégszennie V belsőjében, és egy másik egyenlet, amit a keresett függvénynek ϕ kell elégszennie V peremén. A megoldást kereshetjük zárt térszerűen, vagy nyitott (végtelen) térben. Az első esetben a zárt térszerűen kívül a "külvilágban" ismerős gerjesztések hatását úgy vesszük figyelembe, hogy a térszerűt határoló zárt felületen peremfeltételeket emelünk elő. A Maxwell egyenletek megoldása zárt (felületen) térfogaton egyértelmű, ha a térfogat határoló felületén a potenciál vagy a térerősség normális komponense (= töltéssűrűség) adott. A bizonyítás kompán közeget feltételez.



$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}; \vec{r} \in V$$

(PDE := parciális differenciál egyenlet)

töltéseloszlás van jelen és
energiás or elektrosztatika
laplace egyenlete.

Miért csak a V tartománnyal szeretnénk foglalkozni de
az ezen kívül eső töltések hatását figyelembe
kell venni. $\rightarrow$ a peremre feltételeket emelünk elő $\rightarrow$
 $\rightarrow$ 2 féle peremfeltétel lehet felírni.

- Dirichlet (S_0): A potenciálnak a változást adjuk elő, egy függvény segítségével: $\phi(\vec{r}) = f(\vec{r}); \vec{r} \in S_0$
- Neumann (S_N): A potenciál normális irányú deriváltját adjuk elő, $\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n} = g(\vec{r}); \vec{r} \in S_N$

A ~~kom~~ PDE ezen peremfeltételek megadásával egyértelműen megoldható.
Minden perempontra elő kell tenni valamelyik peremfeltételt.

$$\phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{térfogati töltéssűrűség hatását venni figyelembe}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{S_N} \frac{g(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{felületi töltéssűrűség hatása}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} f(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'}_{\text{külső világ hatása}}$$

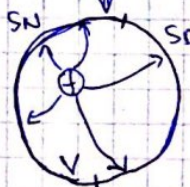
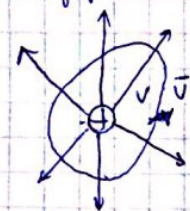
(2 ellentétes előjű töltéssűrűség hatása, amit egymáson vannak)

- A gyakorlatban ezt keressük fel a helyettesítő töltések módszerével

14. Ismertesse az helyettesítő töltések módszerét és a töltéstűrés elvét. Hogyan épül le a módszer a peremérték-feladatok egyértelmű megoldhatóságára?

Az elektrodák felét úgy számíthatjuk (az elektrodákon kívül), mintha a helyettesítő töltések már ott volna létre. Azt mondjuk el a helyettesítő töltések elrendezéséről, hogy a helyettesítő töltések együttes potenciálja, valamennyi elektrodát elvileg potenciálissá tegye (a potenciál konstans legyen minden elektrodán). A helyettesítő töltés elegendő a Laplace egyenletnek, kivéve a töltés helyét, de az nem zavar minket, mert a helyettesítő töltés az elektrodán belül van és ott egyse érvényes a perem, csak az elektrodán kívül. Másrészt a konstanciából következik elegendő a peremfeltételnek is, mert konstans potenciál hoz létre. A helyettesítő töltések potenciálja konstans az elektrodákon.

- Alap probléma: Van egy töltés, vagy a térben több töltés. Csak egy zárt, korlátozott V tartományban vagyunk kíváncsiak a megoldásra. ($\bar{V}$ = a külső, komplementer). A külsőig hatóknak a figyelembe vételére van a peremérték feladat: $PDE: \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$



$$S_0: \phi \text{ adott}$$

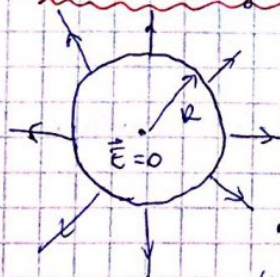
$$S_N: \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ adott}$$

de determinisztikus matematikai egyenletekkel (unicitás = egyértelműen P megoldható)

A Q' és Q'' fiktív töltések a $\bar{V}$ tartományban. Ezek az eredeti töltéssel együtt ugyan tényleg hoznak létre, ami a tartományban belül az eredeti használt

- A terület úgy kapom meg, hogy ezen töltések keltet superpozícióján.
- Ez a tér kielégíti a Poisson egyenletet. (PDE)
- A helyettesítő töltések felrakására szempontja, hogy a peremfeltétellel teljesüljenek. $\rightarrow$ ez nem egyértelmű, de olyan formában érdemes felvenni, hogy addig könnyű legyen vele játszani.

- Pontos helyettesítő töltés: magában álló, töltött gömb.



A gömb felületén egyenletesen oszlik el a töltés. A gömbön belül az el. térerősség nulla. Azon kívül:

$$E_r(r) = \frac{4R^2 \cdot \pi \cdot \sigma}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (r > R)$$

(Gauss tételével)

- Ezt helyettesítő töltéssel:

$$\phi(r) = \int_0^\infty E_r(r) \cdot dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

vagy "egy egyenletesen töltött végtelen nagy" gömbtel is helyettesíthetjük.

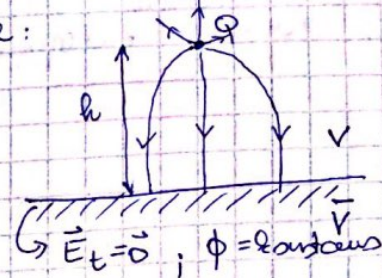


$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$Q = 4R^2 \pi \sigma$$

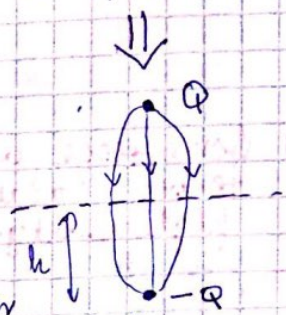
- Tűrhözés síkon: Párosított töltés és fémsík kere:

Az erővonalak merőlegesek a sík felületére
Peremfeltétel: a vezető dielektikum határára
az $E_t = 0 \Rightarrow$ ezért a ϕ konstans



Ezt a teret egy a sík másik oldalán „h” távolságra elhelyezett $-Q$ töltéssel tudjuk helyettesíteni. $\rightarrow$ a peremfeltétel teljesül, Unicitás: a 2 tér megegyezik.

- Analóg probléma: fémgömb kis sugarával és földet szel. ($r \ll h$)
 $\rightarrow$ a gömböt közelítően egy ponttöltéssel és két tűrhözőm



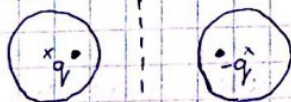
- Hengeres tűrhözés: q' vonaltöltés és földelt fémhenger

A henger felület ekvipotenciális legyen. A hengeren belül egy $-q'$ vonaltöltést kell felvenni helyettesítőként, de nem középen (az δ távolságra a k.p.-tól)

$$\delta = \frac{R^2}{d}$$

Két vonaltöltés terében az ekvipotenciális felületek mindig henger felületek.

- Analóg probléma: hengerek $+Q$ és $-Q$ helyettesíthető vonaltöltéssel, de nem a középvonalban!



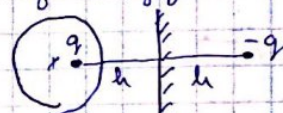
közöttük van egy olyan ekvipotenciális felület, ami sík

henger is sík lehet is tudjuk így modellezni

- Vonaltöltés + meztelt henger:



Ahogy, hogy ne rontsuk el a henger semleges töltését, de a felület ekvipotenciális legyen, a középpontba egy q vonaltöltést kell helyezni.



- Kis sugarú közelítés: ha a henger/gömb sugara sokkal kisebb mint az egyéb távolságok ($r \ll d$)
Hengeresnél a vonaltöltés a középpontba kerül ($\delta = \frac{R^2}{d} = 0$)
Szigetelt hengernél vonal dipólussal helyettesíthünk a középpontban.

- Gömbi tűrhözés: - gömb elektróda + Q ponttöltés

- Földelt fémgömb esetén:



$$Q' = -\frac{QR}{d}$$

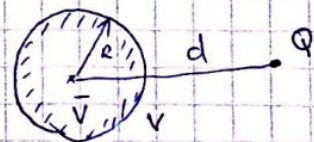
$$\delta = \frac{R^2}{d}$$

- Szigetelt, semleges gömb:

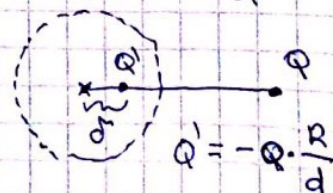
$$Q'' = Q \cdot \frac{R}{d} \rightarrow Q' + Q'' = 0$$



- kis sugarú közelítés: $R \ll d$
 Q' középre kerül, $Q'' = -Q$ vagy,
dipólus körül középre



$$\delta = \frac{R^2}{d}$$



$$\sum Q \neq 0$$

A momentum módszer (Mom) a helyettesítő töltések az S felületen vannak, integrál egyenletekkel alapul módszer (az numerikus módszer)

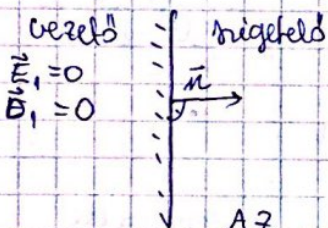
15. Ismeresse a vezető anyagok viselkedését elektrosztatikus térben, valamint a vezető-szigetelő határon érvényes fizikai feltételeket.

Az anyagokban szabad és kötött töltések is vannak. Az elektromos tér hatására a ~~szabad~~ szabad töltések elmozdulnak és belső teret hoznak létre, ami a külsőt kompenzálja: töltésmegpótlás. Vezetőképes anyagok az, ami kezdetben semleges de $\vec{E}$ hatására elindul a töltésmegpótlás és addig tart, amíg a töltésmegpótlás létre nem jön. Minél jobb vezető, annál gyorsabban jön létre (relaxációs idő)

Az, hogy mikor vezető vagy szigetelő az anyag az atomizációtól függ, frekvenciától, relaxációs időtől függ

Az elektrosztatikában a hosszabb relaxációs idejű anyagok is jó vezetőnek tekintendők.

• Határfeltételek:



A két réteg határán az $\vec{E}_1$ és $\vec{E}_2$ vektorok tangenciális komponense egyenlő, de $\vec{E}_1 = 0$:
 $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = 0$, tehát $\vec{E}_2 = \vec{E}_{2n}$ is

$$\left. \begin{array}{l} \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} + q \\ \vec{D}_{1n} = 0 \end{array} \right\} \vec{D}_{2n} = q$$

Az elektróda felületén $\vec{D}$ megegyezik a felületi töltéssűrűséggel.

Az elektróda felülete ekvipotenciális, és a felülethez merőleges az $\vec{E}$, $\vec{D}$ erővonalak.

(* 5. felad)

16. Definíció az elektróda fogalmát. Hogyan fejezhető ki az elektróda rendszer energiája? Mit jelent a "földelés" az elektrosztatika tárgykörében?

Az elektróda vezetőképes anyag (* 15. tétel). Állandó a felülete, constant geometriájú, adott potenciálú. Töltésmegfőtés jön létre ha elektrosztatikus térbe helyezük.
 külső elektromos

• Elektróda rendszer energiája:

S_k := a k -adik elektróda felülete

$$W_e = \frac{1}{2} \int \phi \cdot \epsilon \cdot dV = \frac{1}{2} \sum_k \phi_k \int_{S_k} \epsilon \cdot dV =$$

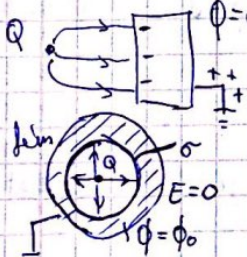
Csak ott kell elvégezni, ahol töltés van. V_k konstans az egyes elektródákon

Töltés csak az elektródán van

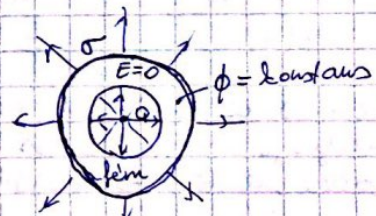
$$W_e = \frac{1}{2} \sum_k \phi_k \oint_{S_k} \epsilon \cdot \vec{S} \cdot d\vec{S} = \boxed{\frac{1}{2} \sum_k \phi_k \cdot Q_k} \rightarrow \text{mindent összefüggés}$$

• Földelés: Végtelen távoli töltésmegfőtés nem nő be a térbe. Nulla potenciálúnak tekintjük. $\phi(\infty) = 0$

Földelt elektróda: Aránykötés, a pozitív töltést eláramlanak a végtelenbe.



• Szegregált, semleges: "levegő" potenciál



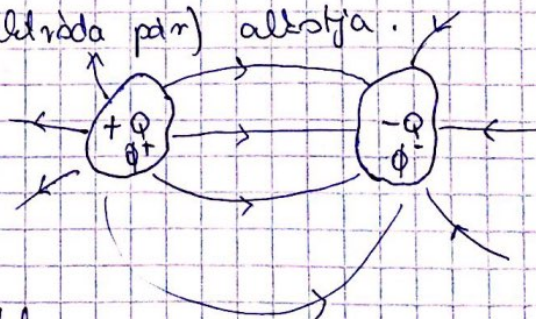
17. Ismertetse a kapacitás fogalmát és energetikai hátterét, fejezze ki a térfélemezű mennyiségekkel. Tervez ki az "önmagában álló" elektróda esetére is.

Kondenzátor: két elektróda (elektróda pár) alkotja. Jellemzője a kapacitás:

Vegyük 2 elektródát $+Q$ és $-Q$ töltéssel. Ez egy rendszert alkotnak. $\sum Q_i = 0$

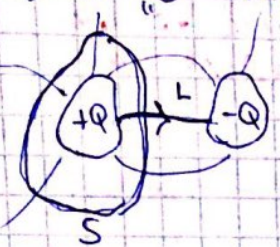
Össze vannak kötve.

Felületen felületi töltéssűrűség lép fel.



Tapasztalati tény: $\phi^+ - \phi^- \equiv U \propto Q$ A két elektróda potenciálkülönbsége (feszültsége) arányos a Q töltéssel. Ez az arányossági tényező a kapacitás. $C \triangleq \frac{Q}{U} [F]$

- A "C" kapacitás kifejezhető a térjellemző mennyiségekkel.
Ehhez vegyünk fel az S felületet és L görbét.
(felvétel)



Gauss tétel:

$$C = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

- Energetikai háttér: a gyakorlatban legtöbbször a kondenzátorok elrendezéseinek numerikus térnyitási programok használatával jellemezzük a kapacitást az energiából kiindulva.

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_k \phi_k \cdot Q_k = \frac{1}{2} (\phi^+ \cdot Q + \phi^- \cdot (-Q)) = \frac{1}{2} Q (\phi^+ - \phi^-) = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

$$C = 2 \cdot \frac{W_e}{U^2} \quad (\text{Az energiát könnyű kiindulni és a feszültséget ált. eldizni})$$

- Önmagában álló elektróda: Egy Q töltésű, gömb alakú elektróda lesz úgy számítható, ha $r > R$ (R a gömb sugara), hogy:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon \cdot r^2}, \quad \text{Ha } r_0 = \infty \text{ nullreferenciapont távolsággal számolunk,}$$

$$\text{a feszültség: } U = \phi_0 - \phi_r = 0 - \left(-\frac{Q}{4\pi \epsilon \cdot r} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon \cdot r} \quad (r \rightarrow r_0)$$

$$\text{a kapacitás: } C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon \cdot r}} = 4\pi \epsilon \cdot r \quad // (4. feladat)$$

- Vonalmenti helyettesítő töltés: Tekintsünk egy ϵ permittivitású sugárból álló, végtelen hosszúnak tekinthető, q vonalmenti töltéssűrűséggel bíró körhenger alakú elektródát: A térerősség radiális: $\vec{E}_r(r) = \frac{q}{2\pi \epsilon r}$ (az elektróda belsejében)

$$\phi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) dr = \frac{q}{2\pi \epsilon} \cdot \ln \frac{r_0}{r}, \quad \text{ha } r_0 = 1 \text{ referenciapontot választunk:}$$

$$\phi(r) = \frac{q}{2\pi \epsilon} \cdot \ln \frac{1}{r}$$

Tekintsük két körhenger alakú, végtelen hosszú elektródát, amelyeket fengelye párhuzamos, sugaruk kicsi a távolságukhoz képest, vonalmenti töltéssűrűsége $+q$ és $-q$.

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{q}{2\pi \epsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow C = \frac{q \cdot l}{U} = \frac{q \cdot l}{\frac{q}{2\pi \epsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \epsilon \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

18) Ismerlesse az elektródarendszert jellemző együtthatókat, különös tekintettel a részkapacitásokra. Adjon az utóbbiakra szemléletes értelmezést. Hogyan tárolt fel szelek az elektromos töltés tárolt energia?

$k=0,1,\dots,n$; $k=0$ a referencia elektróda (föld). Kétből töltés elektródából álló rendszert a részkapacitásokkal jellemezhet.

$n=2$ -re:

$(\phi_2; Q_2)$

$(\phi_1; Q_1)$

$(\phi_0; Q_0)$

$Q_0 = -Q_1 - Q_2$

$$\sum Q_i = 0$$

kialakul egy elektromos tér. A töltések időszelvénye az elektródák potenciálja a töltéssel lineáris kapcsolatban van: $\phi_1 \sim Q_1, Q_2$
 $\phi_2 \sim Q_1, Q_2$

$$\begin{cases} \phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 \\ \phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 \end{cases}$$

homogén lineáris összefüggés töltések és potenciál között és a "p" együtthatók a

konfigurációt/elszórót és a kitöltő anyagot jellemzik. $p_{ik} :=$ potenciálegységhat.

A rendszer reciproka: $p_{12} = p_{21}$

Ha a potenciálegységhat mátrixa invertálható (det. az), akkor a fordított összefüggés is felírható: $\underline{\phi} = \underline{p} \underline{Q} \rightarrow \underline{Q} = \underline{p}^{-1} \cdot \underline{\phi} = \underline{\gamma} \cdot \underline{\phi}$

$$\begin{cases} Q_1 = \gamma_{11} \phi_1 + \gamma_{12} \phi_2 \\ Q_2 = \gamma_{21} \phi_1 + \gamma_{22} \phi_2 \end{cases}$$

ez is reciproka: $\gamma_{12} = \gamma_{21}$

$\gamma_{ik} :=$ kapacitás együtthatók (dét. kes c-vel jelölve)

Vegyük Q_1 -et és egységítsük ki:

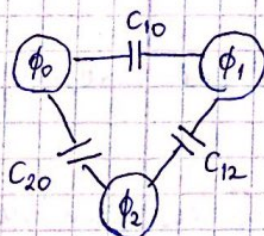
$$\begin{aligned} Q_1 &= \gamma_{11} \phi_1 + (\gamma_{12} \phi_1 - \gamma_{12} \phi_1) + \gamma_{12} \phi_2 = \underbrace{(\gamma_{11} + \gamma_{12})}_{C_{10}} \phi_1 - \underbrace{\gamma_{12}}_{C_{12}} (\phi_1 - \phi_2) \\ Q_2 &= \dots = \underbrace{(\gamma_{21} + \gamma_{22})}_{C_{20}} \phi_2 - \underbrace{\gamma_{21}}_{C_{12}} (\phi_2 - \phi_1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Q_1 = C_{10} \cdot (\phi_1 - \phi_0) + C_{12} (\phi_1 - \phi_2) \\ Q_2 = C_{20} (\phi_2 - \phi_0) + C_{12} (\phi_2 - \phi_1) \end{cases}$$

$C_{10}, C_{20}, C_{12} :=$ részkapacitások

és a töltések az elektródák közötti potenciálkülönbséggel kifejezve

Általános esetben: $Q_i = C_{i0} \cdot \phi_i + \sum_{k=1}^n C_{ik} \cdot (\phi_i - \phi_k)$; $i=1, \dots, n$



$$\begin{aligned} C_{i0} &= \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} := \text{föld kapacitás} \\ C_{ik} &= -\gamma_{ik}; i \neq k := \text{föld kapacitás} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} C_{i0} &= \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \\ C_{ik} &= -\gamma_{ik} \end{aligned}} \right\} \text{részkapacitás}$$

Ezzel könnyű számolni

• Energia: $(\phi_0=0)$

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k Q_k \stackrel{n=2}{=} \frac{1}{2} \phi_1 Q_1 + \frac{1}{2} \phi_2 Q_2 = \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2 + \frac{1}{2} p_{22} Q_2^2 + p_{12} Q_1 Q_2 = \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{11} \phi_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_{22} \phi_2^2 + \gamma_{12} \phi_1 \phi_2 = \frac{1}{2} C_{10} (\phi_1 - 0)^2 + \frac{1}{2} C_{20} (\phi_2 - 0)^2 + \frac{1}{2} C_{12} (\phi_1 - \phi_2)^2 \end{aligned}$$

energiahely is névvel rendelkező, a részkapacitások által a fent energiahely is névvel rendelkező.

19. Vezesse le a stacionárius áramlasi tör alapegyenleteit a Maxwell-egyenletekből differenciális alakban. Írja fel az ún. differenciális Ohm-törvényt, valamint a vonatkozó közhatár-feltételeket. Hogyan számítható a térfelti áramlás által a vezető anyagban keltett hőteljesítmény (joule-vesztés)?

Stacionárius, időben állandó áramok vannak jelen. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; $\vec{j} \neq 0$
A vonatkozó Maxwell-egyenlet: Ha áram van, akkor mágneses tér is van, de ezt ki tudjuk zárni, mert ez nem hat vissza jelentősen az áram eloszlására.

$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \rightarrow \text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j} \xrightarrow{\text{azonosság}} \boxed{\text{div } \vec{j} = 0}$ (tlyt)
A fizikussági (töltésmegmaradás) egyenletét kapjuk.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{j} = 0 \\ \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b \end{cases} \quad (\text{Faraday})$$

elemek
áramútlóiból

Van der Graaf
generátor

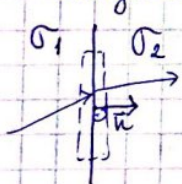
Stacionárius áramlasi feladattól legyenek adottak az ideális vezetőnek tekintett elektródák alakja és áramja, ill. a vezető vezetőképességének és a közeg konduktivitása.

A térnek se forrása se örvényei nincsenek. Általában a $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ elég, mert ilyen esetben a egyenletet ki tudjuk zárni peremfeltétel formájában (a beiktatott mező helyett)

- Differenciális Ohm-törvény: Az Ohm-törvényt másíthatjuk alább, ha figyelembe vesszük, hogy egyetlen "A" keresztmetszetű, "l" hosszúságú vezető esetén a vezető végén között: $U = E \cdot l$ és $I = j \cdot A$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A} ; U = R \cdot I ; \frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma \cdot A} \Rightarrow E \cdot l = \frac{l}{\sigma \cdot A} \cdot j \Rightarrow \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{j}{A}$$

- Közhatár feltételek:



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} ; \phi_2 = \phi_1$$

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow j_{n2} = j_{n1} ; -\epsilon_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\epsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n}$$

A felületi töltés nem változik fel, (töltésmegmaradás)

- A teljesítménysűrűség az áramsűrűségből és az elektromos térerősségből számítható: ($E_b = 0$)

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma} \quad \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

A teljesítmény pedig a teljesítménysűrűség térfogati integrálja:

$$P = \int_V p \cdot dV = \int_V j^2 \cdot R$$

Ez az ellendőlésen hő formájában távozik, az energiamegtérben negatív előjellel vesszük figyelembe.

(20.) Definíció: skalárpotenciált az áramlási térben és írja fel rá a Poisson-egyenletet.

Mivel az elektromos térerősség örvénymentes ($\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$) bevezethetünk egy skalárpotenciált: $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ ($\text{rot grad } \phi = 0$)

$$\text{div} [\sigma \cdot (-\text{grad } \phi + \vec{E}_b) + \vec{j}_b] = 0 \Rightarrow \text{div} (\sigma \cdot \text{grad } \phi) = \text{div} (\sigma \cdot \vec{E}_b + \vec{j}_b)$$

Ha a közeg homogén: ($\sigma = \text{konst.}$)

$$\Delta \phi = \text{div} (\vec{E}_b + \vec{j}_b / \sigma)$$

Ha $\vec{E}_b = 0$ és $\vec{j}_b = 0$: $\Delta \phi = 0$

A Laplace operátor nem alkalmazható ott, ahol a tér nem folytonos ill. nem folytonosan differenciálható (pl. közeghatár), ezért meg kell fogalmaznunk a folytonossági feltételeket.

(Analógia * 23. lehel.)

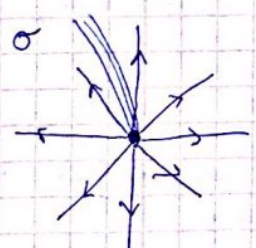
Az egyenletünk megoldhatóságát biztosító peremfeltétel:

$\sigma_1 \mid \sigma_2$ $E_{2t} = E_{1t} \Leftarrow$ ez kifejezhető egy folytonos skalárpotenciállal.
 $\phi_2 = \phi_1 + \text{konstans}$
 $\phi_2 = \phi_1$ $\Rightarrow$ nincs töltés felhalmozódás (* 19. lehel)

$\vec{j}_{2n} = \vec{j}_{1n} \Leftarrow$ nincs töltés felhalmozódás
 $\sigma_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \rightarrow$ a potenciál / gradiens / térerősség normális irányú komponense

(21.) Mutassa be néhány egyszerű elrendezés elektromos mezőjét és potenciálját. Mondjon példát ezek alkalmazására.

Áram-pontforrás: Egy pontszerű forrás vezető közegben, amiből folyamatosan töltést áramlanak. (Ez egy nem valószínű közelítés, ha egy nagyon elcsigázott vezetéken áramot vezetünk a pontba, amivel pótoljuk a töltést de nem befolyásoljuk a teret.)



Szimmetria miatt: $\vec{j} = j_r(r) \cdot \vec{e}_r$ (gömbi koordináta)

$$j_r(r) = \frac{j}{4\pi \cdot r^2}$$

$$\vec{E}_r(r) = \frac{j_r(r)}{\sigma} = \frac{j}{4\pi \cdot r^2 \sigma}$$

Földelési modellre jó

olyan, mint egy ponttöltés képe, ahol a töltést az j áram jelöli és az $E \rightarrow \sigma$ (23. lehel)

Áram-dipólus:



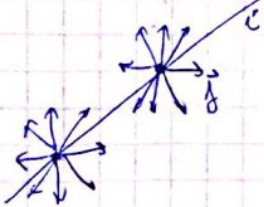
Két pontforrás, a töltések az egyikről a másikra áramlanak. A folytonossági egyenlet helyesül, ha amit a nyelében összegeztük azt a pontba visszavezetjük

Ez 3 objektum superpozíciója: forrás, nyelős, + nyelős áramvonal

Ez nem igényel külső hordozóvezetést, hanem,

dipólus momentum: $j \cdot d$

- Aram vonalrends:** Olyan végtelen egyenes, amelyben az áram nem polarizáltan folyik, hanem minden pontjából szétárad a töltés.



i := a hosszegységre eső névsugárzott áram
// analógia: q

$$E_r(r) = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 r}$$

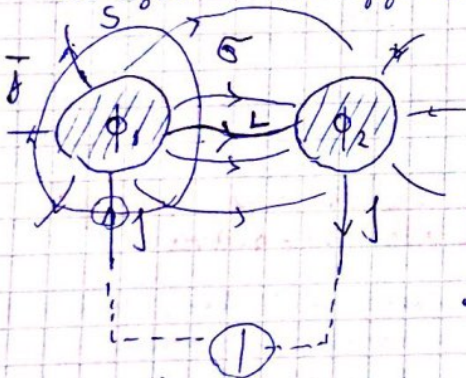
Vezetékek mágneses ellenállására, jó modell (kóax, kettősvezeték) annak számítására

2.2. Ismertesse az ellenállás (rezisztencia) és a vezetés (konduktancia) fogalmát elméleti megközelítésben. Hogyan általánosíthatók ezek legegyszerűbbes szimulációs elektródokra?

- Elektródarendszer:** Az elektróda vezető/negatív minőségű a σ fajlagos vezetőképesség hálójára meg. Ez egy tég. hálóra köztük van. (Pl ezüst: $\sigma_{Ag} = 6,3 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$; $\sigma_{teflon} = 10^{-25} \frac{S}{m}$)

Elektródának tekintjük azokat az anyagokat, melyeknek vezetőképessége a σ külső közeghez képest legalább 1-2 nagyságrenddel nagyobb. (gyakorlati alkalmazás függő)

- Elektróda pár:** az ellenállás definíciója: 2 elektróda vezetőképesség közegben. Az egyikbe áramot vezetünk, a másikból elvezetjük. Kialakul egy áramlási tér.



Tapasztalat szerint: $U = \phi_1 - \phi_2 \sim I$
Az arányossági tényező az ellenállás

$$R \stackrel{\Delta}{=} \frac{U}{I} [R] \quad G \stackrel{\Delta}{=} \frac{I}{U} [S] \quad (\text{konduktancia})$$

- Tényjellemzőkkel:** L görbe mentén integrálva + S zárt felület (kisült az I árammal)

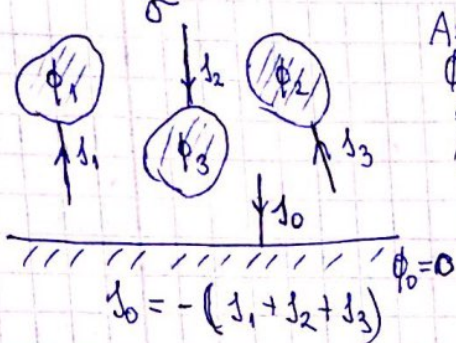
$$R = \frac{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}$$

Gyakorlat: Főleg pl. először a feszültséget és megmérjük az áramot vagy fordítva és megvan a vezetési ellenállás.

- Teljesítményből kifejezve az ellenállást:** Joule-törv. (* 19. lekel)
 $P = \int_V \vec{J} \cdot d\vec{V} = I^2 R \rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV}{I^2}$
numerikus számításokkal és használni (itt is analóg)

- Több elektróda esete:** Rékonduktancia definíciója
Legyen $n=3$:





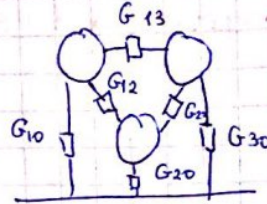
Az $\vec{J}$ áramot a hálózati áramkörben a $\vec{J}_0$ legyen nulla. Az áramot kifejezhetjük az elektródák közötti párhuzamos feszültséggel: $\vec{J} \propto \vec{U}$ levezetés u.a.

$$\begin{aligned} J_1 &= G_{10} \cdot \phi_1 + G_{12}(\phi_1 - \phi_2) + G_{13}(\phi_1 - \phi_3) \\ J_2 &= G_{20} \cdot \phi_2 + G_{12}(\phi_2 - \phi_1) + G_{23}(\phi_2 - \phi_3) \\ J_3 &= G_{30} \cdot \phi_3 + G_{13}(\phi_3 - \phi_1) + G_{23}(\phi_3 - \phi_2) \end{aligned}$$

$G_{ik} :=$ szelvénykonduktancia

Hálózati ekvivalens:

Az alapösszefüggés az, hogy minden egy adott áram befolyásolja



← csatlakozás

az összes többi elektróda potenciálját. Az egyen rendszert úgy tekinthetjük mint csatlakoztatott ellendőségeket. Egy csatlakoztatott effektust csatlakoztatott elemekkel, koncentrált paraméterekkel helyettesíteni. // Elektronstatika is így van

• Vontatási feladat: $n=3$ esetre.

$$P = G_{10} \cdot \phi_1^2 + G_{20} \cdot \phi_2^2 + G_{30} \cdot \phi_3^2 + G_{12}(\phi_1 - \phi_2)^2 + G_{13}(\phi_1 - \phi_3)^2 + G_{23}(\phi_2 - \phi_3)^2 \quad // \frac{U}{R}$$

A konduktancia elméletileg fontosabb mint az ellendőség.

23. Miben áll és meddig terjed a stationárius áramlás és az elektronstatika analógiája? Mondjon példát a tükrözés módszerének alkalmazására áramlási feladatoknál.

Analóg két jellemző, ha azonos alakú differenciál egyenletek és azonos peremfeltételek egyidejűen állnak.

Elektronstatika:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} + \vec{P} \end{aligned}$$

Laplace-Poisson:

$$\text{div}(\epsilon \cdot \text{grad } \phi) = -\rho$$

Stationárius áramlás:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{J}_b \end{aligned}$$

$$\text{div}(\sigma \text{ grad } \phi) = \text{div}(\sigma \vec{E}_b + \vec{J}_b)$$

Elektronstatika:	ϕ	$\vec{E}$	ϵ	$\vec{D}$	ρ	C	Q	q
Stationárius áramlás:	ϕ	$\vec{E}$	σ	$\vec{J}$	$-\text{div}(\sigma \vec{E}_b + \vec{J}_b)$	G	I	i

Vincent $\sigma = 0$ jellemzőjű anyag van (ideális szigetelő) de $\epsilon = 0$ nincs. Azokat a körülményeket, amelyekben $\sigma = 0$ nincs elektronstatikus megfelelőjük.

$$\begin{aligned} \text{Következmény: } C &= \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\int \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U_{12}} = \frac{\epsilon \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U_{12}} \\ G &= \frac{I}{U_{12}} = \frac{\int \vec{J} \cdot d\vec{A}}{U_{12}} = \frac{\sigma \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U_{12}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

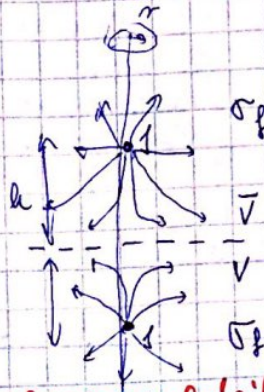
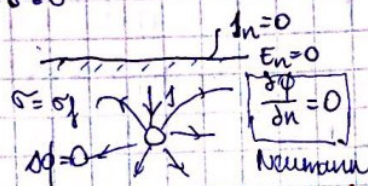
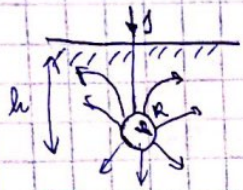
A tükrözés módszere úgy alkalmazható, hogy az adott homogén σ vezetőképességű közegben az eredeti peremfeltételeket kielégítő áramlási feladat eredményez. $J_{2n} = J_{1n}$; $E_{2t} = E_{1t}$

Helyettesítve fordított mágnesre
• statisztikus vezeték tükörképe:

Földfelsz: $h \gg R$

Stacionárius áramlás
permanens mágneses tere:

$$\sigma = 0$$



A földet két pólusos
helyettesítjük.
Tükrözzük a felületre,
homogén a közeg
Forgásmomentum
potenciálján

$$\phi(r, z=0) = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\sigma \sqrt{h^2 + r^2}}$$

gyal.: Lépcsőfokosság

(24) Ismertetése a mágnesstatika alapegyenleteit, véssze be a
mágneses skálárpotenciál és így fel a Poisson-egyenletet.

Állandó mágnesek teré.
Statisztikus mágneses tér, ahol áramok sem folytak. $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{j} = 0$.
fellemben a permanens mágneses tere.

Maxwell-egyenletek:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \end{cases}$$

$\rightarrow$ önindukciós } homogén, nem tartalmaz
 $\rightarrow$ permanens } gerjesztést

$\vec{M} := \alpha$ mágneszettség (tér függvény), gerjesztés

• Mágneses skálárpotenciál: ϕ_m

$\text{rot } \vec{H} = 0 \rightarrow \vec{H} = -\text{grad } \phi_m$: A $\text{rot } \vec{H} = 0$ egyenletet automatikusan
kielegetjük, ha a $\vec{H}$ mezt egy skálárpotenciál gradienseként
írjuk le. ($\text{rot grad } \phi_m = 0$)

(~~div grad~~ ϕ_m)

$$\left. \begin{matrix} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \end{matrix} \right\} \text{div}(\mu_0(-\text{grad } \phi_m + \vec{M})) = 0$$

$$\text{div} \cdot \text{grad } \phi_m = \text{div } \vec{M}, \text{ ha } \mu = \text{konst}$$

$$\text{Poisson-egyenlet: } \Delta \phi_m = \nabla^2 \phi_m = \text{div } \vec{M}$$

ha
(általában)

A gyakorlatban ritkán fordul elő.

- (25.) Ismeresse a stacionárius áramok által keltett mágneses tér alapegyenleteit, vezesse le a mágneses vektorpotenciált és írja fel a vektoriális Poisson-egyenletet.

Ez a létrehozott mágneses tér nem hat vissza jelentősen az áramlósíkra, a kábeleket egyirányú.

• Maxwell-egyenletek:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

ha lineáris anyag, $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$
// $\vec{H}$ -et nem vesszük figyelembe

* A mágneses tér nem szatúrálszik a $\vec{j}$ jellege nem fontos.

• Vektorpotenciál (mágneses): (dualitás az elektrosztatikával)

úgy vezetjük le, hogy a Maxwell-e.-ből a $\text{div } \vec{B} = 0$ automatikusan teljesüljön (Azért is, mert ez homogén, jobb oldala nulla)

$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, a $\vec{B}$ -t egy $\vec{A}$ vektormező rotációjaként írjuk fel, mert $\text{div rot } \vec{A} \equiv 0$.
// analóg a köráramok mágnesével

Nem egyértelmű a vektorpotenciál: $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f$
 $\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } f = \text{rot } \vec{A}$

Be tudunk vezetni egy olyan $\vec{A}'$ vektormezőt, $\equiv 0$
amelynek a rotációja u.a. mint $\vec{A}$ vektormezője, tehát $\vec{B}$ leírására alkalmas.

• Mértékadatlanság: arra van, hogy az $\vec{A}$ vektormezőt egyértelművé tegyük. Ehhez el kell írni a divergenciáját is.
(Helmholtz-tétel)

leggyengébb megoldás: $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow$ Coulomb mérték

• Laplace - Poisson egyenlet:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ \text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} &= \vec{j} \quad \text{Ha a közeg homogén, akkor: } \mu = \text{konstans} \\ \text{rot rot } \vec{A} &= \mu \cdot \vec{j} \quad \xrightarrow{\text{azonosság}} \quad \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{j}$$

$$(x, y, z): \quad \Delta A_x = -\mu \cdot j_x$$

$$\Delta A_y = -\mu \cdot j_y$$

$$\Delta A_z = -\mu \cdot j_z$$

megoldás: $A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j_x(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

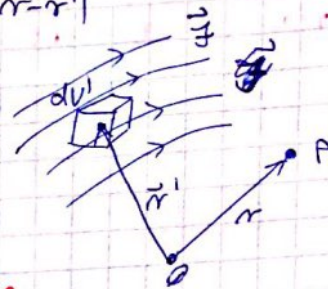
$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j_y(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j_z(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

es már analóg a skalárpotenciállal
 $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ alt. m.o. $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{dx(\vec{r}')\vec{e}_x + dy(\vec{r}')\vec{e}_y + dz(\vec{r}')\vec{e}_z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

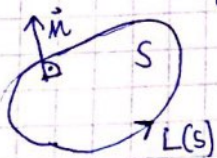
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



26. Írja fel a stacionárius áramok keltette indukciós tér alapegyenleteit, a vonatkozó konstítúciós egyenletet is közeghatár-feltétellel. Hogyan számítható a stacionárius indukciós térben tárolt energia?

- Maxwell: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \rightarrow \text{fmds}$
 $\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{ortogonális}$
 $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \leftarrow \text{konstítúciós egyenlet, lineáris anyaglan}$

- Fluxus: Vegyük egy indukált S felületet. Ezen a fluxus az az indukciós felületi integrálja



$$\Psi_S \triangleq \int_S \vec{B} d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{s} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}$$

↑
vektorpot.
↑
Stokes-tétel

A fluxus a felületet metsző indukciós vonalak száma, kimármolható a vektorpotenciál körüli integráljaként.

- Energia kifejezése: $W_m = \frac{1}{2} \int \mu \cdot \vec{H}^2 dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} dV$

$$\text{// } \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} dV + \frac{1}{2} \int \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{2} \int \underbrace{\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}}_{\vec{j}} dV + \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{s}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV$$

= 0, ha a felületet a végtelenség távolról

↳ elég ott integrálni, ahol az áramsűrűség nem 0-ké különböző

- Folytatásiági feltétel: (* 5. tétel)

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$(\mu_2 - \mu_1) \times n = \vec{j}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$(\mu_2 - \mu_1) \cdot n = 0$$

(27.) Mutassa be néhány egyszerű elrendezés miáltal lehet.
Milyen módszerekkel lehet, ill. egyszerűen elvégezni?

Vonaláram:



Végtelen hosszú vonalvezetős. Az indukció vektorok koncentrikus körök, és a φ irányú komponense van, aminek nagysága az r távolságtól függ.

$$B_{\varphi}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

Vonaláram egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{div } \vec{D} &= \rho \end{aligned} \right\}$$

$\frac{\partial}{\partial t} = 0, j = \text{konstans}:$

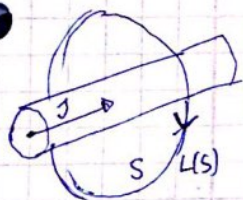
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \cdot \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{j}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\mu}{4\pi} dV$$

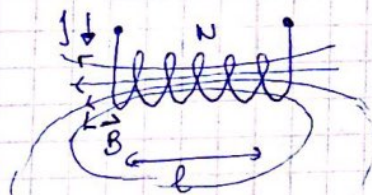
Levezetés: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} = I$



$$H_{\varphi}(\vec{r}) = \oint_L d\vec{l} = \mu_{\varphi}(\vec{r}) \cdot 2\pi r = I$$

$$H_r(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \rightarrow B(\vec{r}) = \mu \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

Szolenoid:



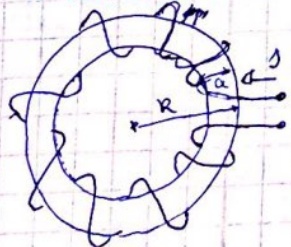
Hosszú tekercs, a terület idealizált esetben lehet számolni.

Egyszerűsítés: a tekercs sűrű, a tekercs hossza jóval nagyobb mint a keresztmetszeti lineáris méret, akkor közelítőleg homogén terület kapunk a tekercsben belül és a külső terület elhanyagolható.

A gyengeit tömegessége: (Bilitz példát) $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} = I$

$$H \cdot l = N \cdot I \rightarrow H = \frac{N \cdot I}{l} \rightarrow B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{l}$$

Toroid:



Ha a tekercs sűrű, akkor a külső terület elhanyagolható. A belső terület körbírós indukciószerű.

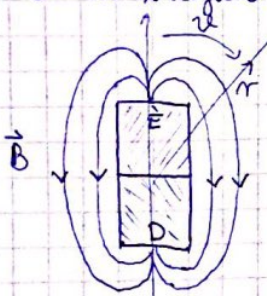
$$H_p \cdot l = N \cdot I$$

$$H_p \cdot 2\pi \cdot R = N \cdot I \rightarrow H_p = \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R} \rightarrow B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R}$$

példák: 4.15

28. Ismertesd a mágneses dipólus és a mágnesszétség fogalmát, a. mágneses térerősség és indukcióvektor kapcsolatot és a permeabilitás bevezetését. Hogyan osztályozzuk az anyagokat mágneses tulajdonságuk szerint?

- Mágneses dipólus: Nem létezik mágneses monopólus.
Elemi mágnesség: mágnetontárhái megközelítése a dipólusnak



Definíció:
gömb koordinátákkal:

$$\phi_m(r, \theta) = \frac{m}{4\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2}$$

(olyan a függése mint az el. dipólusnak)

$m :=$ mágneses dipólusmomentum $[A \cdot m^2]$, $[\frac{Joule}{Tesla}]$

$$\vec{H} = -\text{grad} \phi_m \rightarrow \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Torogatónyomatok: ha a dipólust külső mágneses térbe helyezzük:

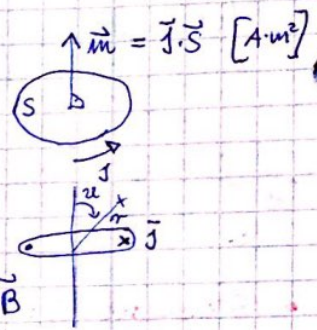
$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_{\text{külső}}$$

- Mágneses dipólus, mint elemi kördínam:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_\varphi(r, \theta) \cdot \vec{e}_\varphi$$

φ irányban szimmetria van

$$A_\varphi(r, \theta) = \frac{\mu \cdot m}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2} \rightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B}$$



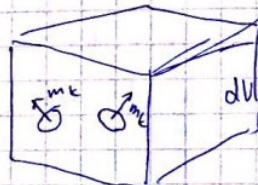
- Mágnesszétség:

Ha vesszünk egy dV térfogatú anyagrést, amelyben mágneses momentumból állnak (m_k), akkor:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_k \vec{m}_k}{\Delta V}$$

// Alkalmazás: Föld mágneses tere:
 $\vec{E} \Leftrightarrow \rho$ pont fordítva

$$\mu_{\text{Föld}} \approx 8 \cdot 10^{22} \frac{J}{T}$$



$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

(mágneses dipólusmomentum sűrűség)

Nem csak kördínamok vannak, hanem spin-ek is van mágneses momentuma.

- Mágneses tulajdonságok:
 - diamágnes: $\mu_r \approx 1$ pl.: réz, alumínium
 - paramágnes: $\mu_r \sim 10^3 - 10^6$ pl.: vas,
 - ferromágnes: nem lineáris

- Permeabilitás: (2. félél)

Lineáris közegben: $H \sim H \rightarrow \vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \cdot \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

↑
vakuum permeabilitás

↑
relatív permeabilitás

29. Ismertesse és értelmezze a Biot-Savart-törvényt, illusztrálja egy egyszerű példával (Pl.: kör alakú hurok)

A Biot-Savart-törvény (alapja) drágájára hurok által keltett mágneses indukció számítására használjuk.

A közeg homogén. A cél $\vec{B}$ és $\vec{H}$ meghatározása Poisson-e. általános megoldása:

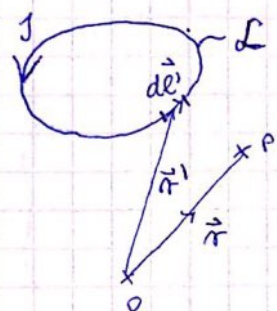
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Speciális eset: vektorvesztés:

Energia számításából: $\int dV = \int \cdot d\vec{l}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ; \text{ A vektorpotenciál csak}$$

teljes vezető
magnetikus állandó
kiszámítható



megoldás, a cél a vektormező meghatározása:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} ; \vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} \rightarrow \text{ha levezetjük az } \vec{A}(\vec{r}) \text{ formula rotációját és}$$

a rotációt megcseréljük az integrálal (figyelni kell a koordináták) ^{vesztés! vekt...}

$$\text{Biot-Savart-törvény: } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

• Értelmezése: Ha elhagyjuk az integráldarabot, akkor megkapjuk a $d\vec{l}'$ elemi szakasz hozzájárulását a mágneses téshez. Majd ezeket összegezzük / superponáljuk.

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



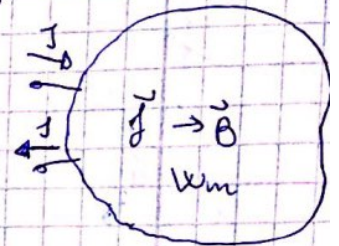
$\Rightarrow$ "áramelem". Ez így a tőle homogén-

Az ömágneses együttható az az arányossági tényező.

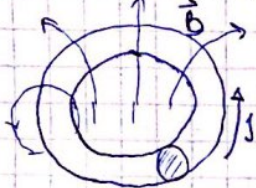
$$L \triangleq \frac{\Psi_s}{I} [H]$$

energia: $W_m = \frac{1}{2} I \cdot \Psi_s = \frac{1}{2} I^2 L$

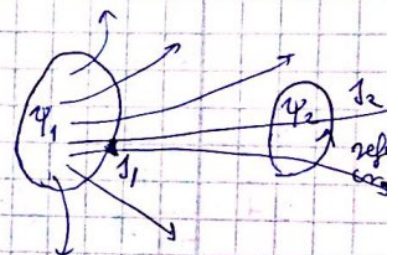
- Általános eset: kiterjedt áramlás:
Van egy kiterjedt áramlás ($\vec{J}$), ami létrehoz egy mágneses
kört ($\vec{B}$). Definícióként 2db kiterjedést $\rightarrow I; \leftarrow -I$
A mágneses mező egy W_m mágneses energiával
asszociálható: $W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \rightarrow L \triangleq \frac{2 W_m}{I^2}$
Lineáris közegre ($W_m \sim I^2$)



- Hibrid megközelítés: "vastag" vezető eset:
probléma: hogyan mérjük a fluxust?
Nem definiálható a felület egyértelműen.
Megoldás: felosztjuk az ömágnesességet:
 $L = L_{külső} + L_{belső}$
a vezető belső
része jelöli ki a fluxust
(a vezetőre adjuk meg)
// Pl: coax kábel, belső vezető
a mágneses térnek az a része, ami
a vezetőn belül van
(energiára adtuk meg)



- Kölcsönös induktivitás: - vékony vezetőkre:
Van két vékony vezető kör, az egyikben
áram folyik is mágneses körhöz létre. Az
indukciós vonalakat egy réteget mérni a másik kör
felületét is megvizsgálom ez a fluxus mérése.



Tapasztalat: $\Psi_2 \sim I_1$ kölcsönös indukciós együttható:

$$L_{21} \triangleq \frac{\Psi_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$L_{12} \triangleq \frac{\Psi_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Ez a rendszer reciproka: $L_{12} = L_{21}$

Nem lineáris rendszert lineáris modellként felhasználhatjuk, L_{12} és L_{21}
között különbséget pl.: Transzformátor vasmagval, ami a feltehető közelítő
üzemű (erősen nem lineáris a vaslefedés) akkor $L_{12} \neq L_{21} \rightarrow$
elegendő lineárisított paraméterek bevezetésével.
Az egyen lineárisított paraméterek bevezetésével.
A fluxus 2 kérés esetén két összerendelésre áll:
(A fluxus eset): $\Psi_1 = L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2$; $\Psi_2 = L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1$

Ömágneses tag kölcsönös indukciós tag
A két superponálható, ha 2 áram hirtelen létre, akkor a
két áram által létrehozott két értéket összeadhatjuk.

Energia: $W_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \cdot \Psi_k = \frac{1}{2} \Psi_1 \cdot I_1 + \frac{1}{2} \Psi_2 \cdot I_2 = \frac{1}{2} (L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2) I_1 + \frac{1}{2} (L_2 \cdot I_2 + M \cdot I_1) I_2$

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2$$

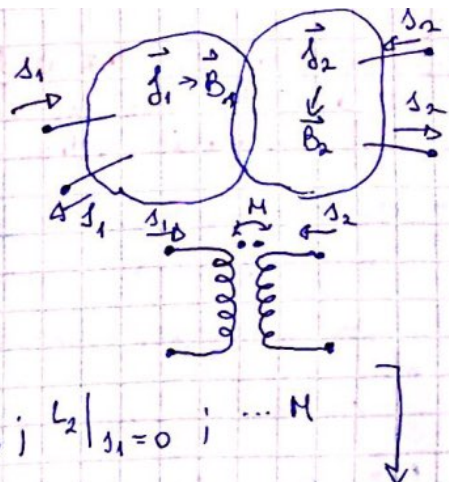
A szimmetria van fröngkapacitás, neminduktív táshoz képest, mert
azok szimmetrikus hálózati elemek voltak
árciklusos csatlakoztatásuk felül meg. 1 db a hálózati

• Általános eset: lekötött áramlók

Az öninduktivitást meg tudom mérni
 az előzőkhoz képest.
 kölcsönös induktivitáshoz az energiával
 kell számolnom.

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \Rightarrow M = ?$$

pl.: "M" meghatározható 3 módszerrel $L_1|_{I_2=0}$; $L_2|_{I_1=0}$; ... M



~~Heurisztika~~ - képlet

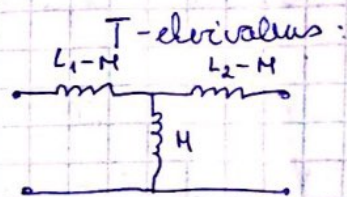
• Tekercsrendszer energiája:

- Fluxus:



Ha ez egy vékony vezető,
 akkor egy matematikai zárt

görbével azonosítható, amely
 kifejezi egy felületet (amint meghatározható a fluxus) és ennek
 a felületnek a kitért fluxusa (Ez a felület tetszőleges, a fluxus
 mindig ugyanannyi lesz) $\Psi_S \sim I$



• Egy tekercs is megfelel egy ilyen körnek, ha a végpontjait
 összekötjük: mintha egy körhöz megcsatlakoznánk

A tekercs fluxus a menetfluxusok összege lesz: $\Psi_{\text{tekercs}} = \sum_k \Psi_k \approx N \cdot \Psi_1$

Ha sűrűn vannak a menetek, akkor a nőt fluxus (ami a menetet csak
 egy résszel van kapcsolatban) elhanyagolható. és a menetfluxusok
 megegyeznek.

- Energia:

Legyünk tetszőleges körhöz (vagy tekercset), a felületi normális
 és a körhöz irányú a jobbszár szabály alapján van felvéve.
 // $d\mathbf{k}$: a körhöz

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot dV = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\vec{e} = \frac{1}{2} \sum_k \oint_k \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\vec{e} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \oint_k \vec{A} \cdot d\vec{e}$$

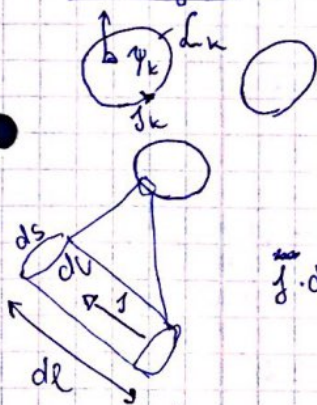
A körhöz áramsűrűség nem állapítható meg, mert az áramok
 vannak,

$$\vec{j} \cdot dV = \frac{j}{ds} \cdot ds \cdot d\vec{e} = j \cdot d\vec{e} \rightarrow \vec{j} \cdot dV = j \cdot d\vec{e}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \cdot \Psi_k$$

// analógia: $W_e = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \phi_k$

$$\Psi_k = L_k \cdot I_k + \sum_{i=1}^N L_{ki} \cdot I_i$$

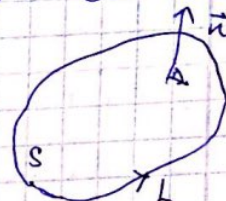


31. Mutassa be az indukálási jelenségeket (nyugalmi és mozgási), valamint az indukált feszültség számítását. Írja fel a differenciális Ohm-törvény mozgó közegben érvényes alakját.

- A Faraday fele indukciótörvény: S felület és az azt körülvé-
ló görbe, jellel L azaz mágly szerint:

Az indukált feszültség:
$$\mathcal{U}_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

A fluxus változása gyorsaságának (-1) -szere.



Maxwell egyenleteiből:
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{egyesített indukciós törvény}$$

// $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\mathcal{U}_i$ ez így egyszerre a nyugalmi és mozgási indukciót is leírja.

Vagy a $\vec{B}$ változik vagy az S felület. Az S felület elmozdulásakor definiálhatunk egy $\vec{v}$ elmozdulási sebességet (lokális sebesség vektor)

$$- \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \dots = - \underbrace{\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}_{\text{Nyugalmi indukció}} - \underbrace{\oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}_{\text{Mozgási indukció}} \rightarrow \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{i,ny} + \mathcal{U}_{i,m}$$

Lorentz-törvény

Faraday átvizsgálva:
$$\oint_L (\underbrace{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}}_{\vec{E}'} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mathcal{U}_i' = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Ha bevezetjük az $\vec{E}'$ tét, akkor a jobboldali nyugalmi indukciós úgy értelmezhető, mint a $\vec{E}'$ tétel mozgó koordinátarendszerben mérünk. (Ha a tétel alapja nem $\vec{E}$ változik) ($\mathcal{U}_i'$)

Az indukált feszültség csak közvetve mérhető, függ a vonatkoztatási rendszertől, nem egy kapcsolhatósság hanem egy integrál.
$$\mathcal{U}_i \triangleq \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- $\vec{E}$ transformálása: Nem csak az $\vec{E}$ -t kell transformálni, ha átvennénk egy másik koordinátarendszert (pl.: nyugati coord. r. $\rightarrow$ mozgó) hanem az összes kiegészítő mennyiséget is, mint azokat mérjük

• Relativisztikus megközelítés ; • Kiseb relativisztikus: $\frac{v^2}{c^2} \approx 0$

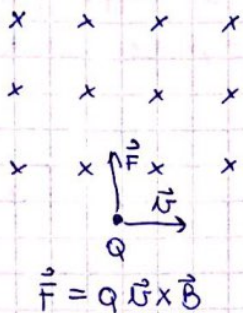
• Nem relativisztikus: $\frac{v^2}{c^2} \approx 0$ és $\frac{v}{c} \approx 0$ ~~ezzel~~

$\rightarrow$ ekkor csak az $\vec{E}$ változása nem elhanyagolható

Van egy K vonatkoztatási rendszer, benne $\vec{B}$ indukció, amiben egy q töltés mozog $\vec{v}$ sebességgel. Ekkor a töltésre $\vec{F}$ erő hat.

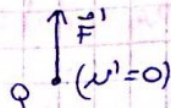
A 2012: 35. lekl

(K.)



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

(K')



K' rendszer egy $\vec{v}$ sebességgel mozgó rendszer, ahol a vonatkoztatási rendszerben Q sebessége nulla. De itt is hat erő a Q-ra kis sebesség esetén: $\vec{F}' \approx \vec{F}$

Ha van is mágneses tér a K' rendszerben, az első töltésre ~~sem~~ nem hat (innen nézve) csak mozgás töltése. Ez az erő csak az elektromos eredetű lehet, innen jön $\vec{E}'$ definíciója:

$$\vec{E}' \triangleq \frac{\vec{F}'}{q} \Big|_{v'=0}$$

Ebben a mozgó rendszerben észleljük egy

egy elektromos teret ami: $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$, különben nem nem konzisztens a rendszer. A térerősséget $\vec{E}$ erőből definiáljuk.

Általános esetben: $\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}} \quad (\vec{B}' \approx \vec{B})$

• Általánosítás:

Mozgó vezető közeg: Van egy (K) rendszer, amiben egy σ vezetőképeségű közeg mozog $\vec{v}$ sebességgel és egy (K') rendszer együtt mozgó rendszer $v'=0$. Ha ebben a rendszerben valamilyen áramlás jön létre: $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$

A konstatació egyenletét álló közegre érvényes. Mozgó közegre vizsgálatakor transzformálni kell.

Feltesszük, hogy $\vec{j} \approx \vec{j}'$ (ha nincs statikus töltéseloszlás K'-ben)

$$\boxed{\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

Értelmezés: $\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{E}_b] + \vec{j}_b$ (Áramlási teret)

$$\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{és} \quad \vec{j}_b = \vec{0}$$

A közegmozgás egy beiktatható térerősséget hoz létre, ami a töltéseket mozgásra kényszeríti.

Pl.: unipoláris generátor = gyors társa mágnes térben (Boltz 5.4)

• Differenciális - Ohm törvény mozgó közegben:

32. Miként jelenik meg az indukált feszültség a kaposfeszültségben?

Hálózatos megközelítésben az indukált feszültség az induktív elem kapcsán mérte feszültség.



$$U_{\text{kapocs}} = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (\text{felte})$$

$$U_i = - \frac{d\psi}{dt} = - \frac{d}{dt} (L \cdot i) = - L \cdot \frac{di}{dt} \neq U_{\text{kapocs}}$$

Térrelméleti megközelítés: Vezető hurok: Kell a görbe és a felület irányítása



S irányítása $(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \dots)$ irány

L irány $(i, \frac{di}{dt}, \dots)$ irány



Feraday féle indukció törvény:

$$U_i \equiv \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\psi}{dt} \quad \text{Bontva két része a}$$

hurok integrálját: $A \rightarrow B$ körre, majd $B \rightarrow A$:

$$\underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{=-U_{\text{kapocs}}} = - \frac{d\psi}{dt} = - \frac{d(L \cdot i)}{dt}$$

Ha a drót jó vezetőből készült, akkor benne a teressűrűség közel nulla, az első tag kiesik.

$$\Rightarrow U_k \approx L \frac{di}{dt} \quad \text{és} \quad U_i \approx -U_k$$

Ahhoz, hogy ez igaz legyen feltettük, hogy a hurok jó vezető. Ha nem így lenne, akkor a kaposfeszültség inkább részt egy ohmos feszültség adna.

Kaposfeszültséggel az indukált feszültség csak akkor mérhető, ha jó vezetővel mérjük de a hurok nem egyenlő meg.

Az U_k kaposfeszültség A és B között csak akkor értelmezhető, ha az áramkör azon részen az indukció nem változik, $\frac{\partial B}{\partial t} \approx 0$ (A mérővezeték nem hurok körbe ~~de~~ ^{mágnes} indukció változat)

Mert a feszültségek ~~csak~~ időben változó terhelés nem értelmezhető

- A hővezetőkkel energia és/vagy információ továbbításra van lehetőségünk, van lehetőségünk.
- A K.T.V. elosztott paraméterű hálózati $\rightarrow$ Kirchhoff hálózati pedig koncentrált - "1"
- Terheléskor megközelítésben a T.V. jelenti a vezetett hullámot ~~mint~~
- ~~A Kirchhoff~~ szemben a hálózati hullámmal.
- Fontos a frekvencia, a hullámhossz és az erősség mértékének a kapcsolata.

$\lambda := \text{hossz}$

K₂Ox:

A hand-drawn diagram of a cylinder. The circular front face has a diameter labeled 'd'. The length of the cylinder is labeled 'l'.

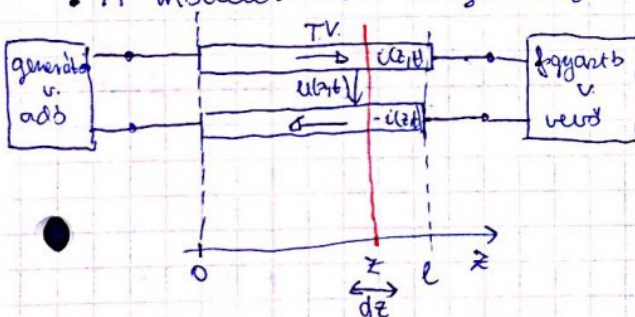
$$\lambda_0 := \text{maxzahl}$$

a frequência angular $\omega \rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{\nu}$

- Ha $\varepsilon, d \ll 1$, akkor az elemet koncentrált paraméterű elemmel helyettesítjük: R, L, C

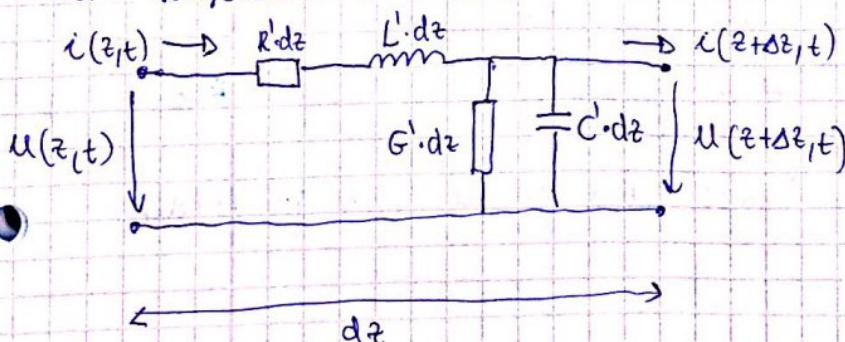
- Ha $\lambda \approx d$ vagy $\lambda \approx \lambda$, akkor általános térsimultell

- A modell: 2db megosztott vezérlő, ami kétféleképpen üzemel



A két vezetőnek ugyan az az áram folyik vissza, mert a hővezetés következtében eltérő áram nem folyhat (34. tétel) $\rightarrow$ töltésmegmaradás

- Szatanszéklet koncentrált paraméterni helyettesítő lép: vesszők a TV egy "d?" másként: feltételezzük, hogy itt az dram és fenietelőg csak minimálisan változik a harm függvényében. Ha a változónál: közös fenietőegység, indukciós m. miatt indukált fenietőegység lép, a két vezetéket közötti kapacitás miatt egy kapacitív kereszt dram aludhat ki → ez egy előző dram a nyitólép között, ill, a nyitólép nem ideális volta miatt mindkét dram lép fel:


$$\left[\frac{L}{\hbar} \right] = \frac{L}{\hbar} ; \left[C \right] = \frac{C}{\hbar} ; \left[\frac{F}{m} \right]$$

$$R' = \frac{R}{l}; \quad G' = \frac{G}{l}$$

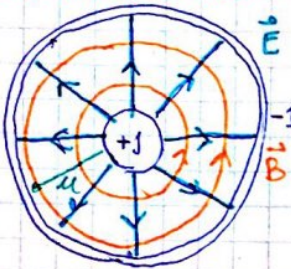
$$G' \neq \frac{1}{2} !$$

Amíg a fizikai folyamatokat helyesen tükrösz, az elemeket
 bármely ábrázolásban és u.a. a véglegesített lapokra
 Ezek az elemek energetikailag egyeznek le a hálózattal.
 R' : soros, árammal arányos érték; G' : felületiárammal arányos érték
 L' : az adott hálózaton a mágneses térben tárolt energiát írja le
 C' : az elektromos térben tárolt energiát írja le.

~~TV paraméterek~~

34. Mutasson be néhány gyakorlati távvezeték- konstrukciót és jellemezze
 azok elektromos és mágneses tén. Hogyan befolyásolja a
 távvezeték geometriája a vezeték paramétereit? Mire
 a soros a hosszúságra való ellendelés?

Koaxiális kábel:



⊕ A vezetékben az adott keresztmetszeten a két
 vezető között felületi áram van, illetve ott-orszá
 áramok folytak.

(A kábel ábrázolásán a belső induktivitás elhanyagolható)

$$C' = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} ; G' = \frac{2\pi \sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}} ; L' \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

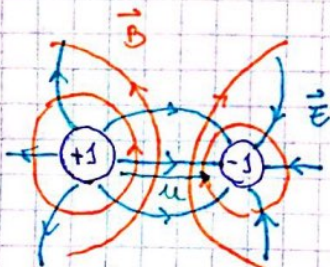
Az R' felületiáramfüggő. ~~(két vezető között)~~



$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_r}{4} \right] ; R' = \frac{l}{\sigma_1 A_1} + \frac{l}{\sigma_2 A_2}$$

Két vezető között:

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{d}{r_0}} \quad (\text{Azt. légrajzjelölés}) \rightarrow G' \text{ elhanyagolható}$$

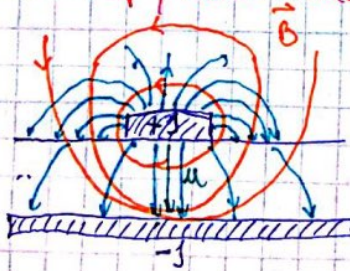


$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0} \quad // \quad L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu_r}{8} \right]$$

Mivel a távvezeték a váltakozó áramon működik,
 az áram nem feltétlenül egyenletesen tölti ki
 a keresztmetszetet és ezért az $R = \frac{l}{\sigma A}$ formula nem
 használható, tehát az R' erősen felületiáramfüggő nemben
 a kapacitással és induktivitással.

$$R' = 2 \frac{1}{\sigma A} ; G' = \pi \sigma_0 \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{d}{r_0} \right)}$$

Mikrostrip / mikroalag csatl. ⊕



Nyújtott áramvív csatlakon van
 tipikus. Szélességét négyzet alakú
 felület, másrészt oldalán a vezető

A levezető sűrűsége csökkön a ϵ törésszám
 csökken.

Kvazi TEM terjedés, de jó hővezetés

• Közös jellemző: - hullós rendszerek: ^{egy áramot} ~~vonak~~ oda- és vissza haladnak az.

- TEM terjedés: (módus): Transverzális Elektromos és Mágneses Terjedés
 EA terjedése merőleges: $E_z=0$; $B_z=0$ (mivel a síkba merőleges komponensük)

- A vezetőhullon létrejött feszültségek és áramok alapján rekonstruálható a tér:
 $(\mu, \epsilon) \Rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$ és egyértelműen hozzárendelhető

A TV.-ben a jelviszonyok leírható egyetlen feszültség és áram adatokkal: $\{a \text{ jel. és áram hely és idő függő: } u(z,t); i(z,t)\}$

2db 2 változós függvény, amelyből rekonstruálható a tér

• Példák: - csőtápvonal: mikros hullámú frekvencián használják, ált. $\square$ keresztmetszettel és egyvezetős rendszer és nem TV. típusú, nincs TEM

- optikai kábel: dielektromos hullámvezető egy fajtája, nincs vezető fém benne

- felületi hullám vezető: csak nagyvezetőkben lépez hullámot terjeszt, de az sem TEM

A terjedés módja a meghatározó nem a konstrukció.

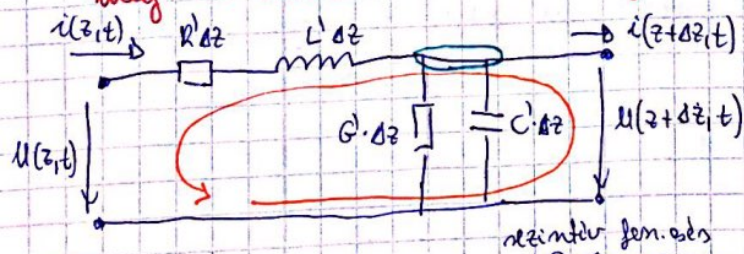
• Ideális tápvezeték: $R'=0$; $G'=0 \Rightarrow$ veszteségmentes és diszperziómentes. ilyen egyszerűen nincs, de jó közelítés.

• Lossy vezetékű TV.: A kitöltő dielektromos anyag lossy: $\epsilon=\epsilon_0$; $\mu=\mu_0$

• $L' \cdot C' \cong \mu_0 \cdot \epsilon = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = \epsilon_r \cdot \frac{1}{c^2}$ Ha minden ideális, akkor ez pontosan teljesül

Ha ideális (végtelen vezetőképességű a vezető), akkor abban nincs mágneses tér minden véges frekvencián.

35. Írja le a tápvezető egyenleteit, vezesse le a hullámegyenletet és adjon meg az utóbbi általános megoldását (időtartományban) ideális tápvezetékre.



Ez a hálózatra felírunk egy csomóponti és egy áramegyenletet:

$(z+\Delta z)$ -nél lévő mennyiségeket fejezzük ki: ~~ezek~~

• $u(z+\Delta z) = u(z,t) - R'\Delta z \cdot i(z,t) - L'\Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} i(z,t)$
 A feszültségeket az ellenálláson és az induktivitáson eső fesz. adja
 rezistor fesz. és induktív fesz. és (az az idő szerint derivált)

• $i(z+\Delta z,t) = i(z,t) - G'\Delta z \cdot u(z+\Delta z,t) - C'\Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} u(z,t)$
 Keresztbe elfolyik egy rezistor és egy kapacitív áram is
 egymással keresztbe a kábelben

Az egyenleteket eltoljuk Δz -bel és $u(z, t)$ komponenseket átvisszák, így egy differenciál egyenletet kapunk:

$$\frac{u(z+\Delta z, t) - u(z, t)}{\Delta z} = -R' i(z, t) - L' \frac{\partial}{\partial t} i(z, t)$$

$$\frac{i(z+\Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} = -G' u(z, t) - C' \frac{\partial}{\partial t} u(z+\Delta z, t) \quad , \text{ Ha } \Delta z \rightarrow 0 \text{ , akkor}$$

a bal oldal átmeny z szerinti parciális deriváltja és a $z+\Delta z$ -nek nem len jelentősége, Δz elhagyható:

• További egyenletek:

$$\begin{cases} (1.) & -\frac{\partial u}{\partial z} = R' i + L' \frac{\partial i}{\partial t} \\ (2.) & -\frac{\partial i}{\partial z} = G' u + C' \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad \text{két derivált dűlő is egyenletet kapunk}$$

$$(2.): -\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G' \frac{\partial u}{\partial t} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad / \text{átrendezve} + \text{idő szerinti deriváltja}$$

$$(1.): -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \frac{\partial i}{\partial z} + L' \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \quad / \text{átrendezve} + z \text{ szerinti deriváltja}$$

$\Downarrow$
 $\uparrow (2.)$
 $\uparrow (1.)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' G' u + (R' C' + L' G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{Általános egydimenziós hullámegyenlet}$$

• Ideális TV.: ($R'=0$, $G'=0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{Hiperbolikus, egydimenziós egyenlet hullámegyenlet}$$

Egy mennyiség hely szerinti második deriváltja arányos az idő szerinti második deriváltjával.

Általános megoldás: Bármely fizikailag differenciálható $f(x)$ függvénye:

$$u(z, t) = f\left(t \pm \frac{z}{v}\right) ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

~~246) Vezesse le a~~

Leqnigezett sebesség: $v=c$
 dielektrikummal töltött közegre: $v = \sqrt{\frac{c}{\epsilon_r}}$

- 36) Vezesse le a távvezeték Helmholtz-egyenletét, adja meg és értelmezze annak általános megoldását. Mutassa be a távvezeték hullámparamétereit, ill. kapcsolatukat a fázissebességgel és a hullámhosszal, térjünk ki az ideális távvezeték esetére.

A Helmholtz-egyenlet a Laplace-egyenlet, sinusos, időbeli változásra vonatkozó alakja. Az időben sinusos állandósult állapotot a feszültség és az áram komplex alakjával írjuk le:

$$u(z, t) = \underbrace{\tilde{u}(z)}_{\text{komplex amplitúdó}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u(z)) = \operatorname{Re} \{ \tilde{u}(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

A differenciális $(j\omega)$ -val való hányszorosa egyenlőségek

$$i(z, t) = \tilde{i}(z) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i(z)) = \operatorname{Re} \{ \tilde{i}(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$u(z, t) \text{ helyett: } \tilde{u}(z) = \tilde{u}(z) \cdot e^{j\varphi_u(z)} \quad \text{és} \quad i(z, t) \text{ helyett: } \tilde{i}(z) = \tilde{i}(z) \cdot e^{j\varphi_i(z)}$$

Elegendő csak az amplitúdót és a fázist tekinteni, mert lineáris TV-ket vizsgálunk, ahol egyfrekvenciás gerjesztés esetén minden változó csak az ω frekvencián oszcillál.

• Helmholtz: ~~Állítsuk a törv.~~ $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\textcircled{1} \quad -\frac{d\tilde{u}(z)}{dz} = R' \cdot \tilde{i}(z) + L' \cdot j\omega \tilde{i}(z) = (R' + j\omega L') \tilde{i}(z)$$

// Ez a függvény már csak a z -től függ, nem parametrisz deriváltat használunk

$$\textcircled{2} \quad -\frac{d\tilde{i}(z)}{dz} = G' \tilde{u}(z) + C' j\omega \tilde{u}(z) = (G' + j\omega C') \tilde{u}(z)$$

$$\textcircled{1}: \tilde{i}(z) \text{ kifejezése: } \tilde{i}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\tilde{u}(z)}{dz} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{2} \text{ és megcserélve deriválunk: } \frac{1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{d^2 \tilde{u}(z)}{dz^2} = (G' + j\omega C') \tilde{u}(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \tilde{u}(z)}{dz^2} - (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \tilde{u}(z) = 0 \quad \text{Helmholtz-egyenlet:}$$

defin. • Terjedési együttható: $\tilde{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad \left[\frac{1}{m} \right]$

Ez egy komplex mennyiség. Feltételezzük, hogy a $\tilde{\gamma}$ módja 0 és 2π közé esik, így a $\varphi_{\tilde{\gamma}}$ is 0 és π közé esik.

$$\tilde{\gamma} = \alpha + j\beta$$

csillapítási α [1/m]

fázis β [rad/m]: módelfordulás a harmadik mentén

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} - \tilde{\gamma}^2 \tilde{u} = 0$$

$\Rightarrow$ egydimenziós Helmholtz-egyenlet

• Általános megoldás: $\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \bar{\kappa}^2 \bar{u} = 0 \right];$

próba-függvény: $\bar{u}(z) = \bar{u}_0 \cdot e^{\bar{\kappa} \cdot z} \rightarrow 2x\text{-es derivált: } \bar{\kappa}^2 \bar{u}_0 \cdot e^{\bar{\kappa} \cdot z} - \bar{\kappa}^2 \bar{u}_0 \cdot e^{\bar{\kappa} \cdot z} = 0$

$\Rightarrow \bar{\kappa}^2 - \bar{\kappa}^2 = 0$; ahol $\bar{\kappa} = \pm \kappa$ (szögérték)

Alt. m.o.: $\bar{u}(z) = \bar{u}^{\oplus} \cdot e^{-\bar{\kappa} z} + \bar{u}^{\ominus} \cdot e^{+\bar{\kappa} z}$

$$\bar{j}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\bar{u}(z)}{dz} = \frac{\bar{\kappa}}{R' + j\omega L'} \bar{u}^{\oplus} e^{-\bar{\kappa} z} - \frac{\bar{\kappa}}{R' + j\omega L'} \bar{u}^{\ominus} e^{+\bar{\kappa} z}$$

• Hullámmimpedancia:

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\bar{\kappa}} = \dots = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$\bar{j}(z) = \frac{\bar{u}^{\oplus}}{Z_0} \cdot e^{-\bar{\kappa} z} - \frac{\bar{u}^{\ominus}}{Z_0} \cdot e^{+\bar{\kappa} z} \Rightarrow \bar{j}(z) = \bar{j}^{\oplus} \cdot e^{-\bar{\kappa} z} - \bar{j}^{\ominus} \cdot e^{+\bar{\kappa} z}$$

A távezetékkel és általában a hullámdalan a legfőbb függvény alapértelmezésen komplex, ezt a felírásods elmagyaráz.

• A fenti egyenlet egy, a z-tengely pozitív irányában terjedő, csillapított szinuszos feszültség, ill. áramhullámot ír le. A pozitív, ill. negatív z irányban haladó hullámok öszeeséseként állítható elő a kábelerős feszültség- és árameloszlás. u^+ , u^- , j^+ , j^- konstansok a vezeték végén elhelyezett lezárások (pseudefektusok) következtében határozhatók meg.

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{u^+}{j^+} = -\frac{u^-}{j^-} & u(z) = u^+ \cdot e^{-\bar{\kappa} z} + u^- \cdot e^{+\bar{\kappa} z} \\ & j(z) = j^+ \cdot e^{-\bar{\kappa} z} + j^- \cdot e^{+\bar{\kappa} z} \end{cases} \quad !$$

Értelmezés: van egy távezeték, amit a κ terjedési együtthatóval, a Z_0 hullámmimpedanciával és ℓ hosszal jellemzünk.

Ezen a távezetéken az áram és fen. helyfüggése a fenti egyenletekből jön.

κ és Z_0 a távezeték hullámparaméterei.

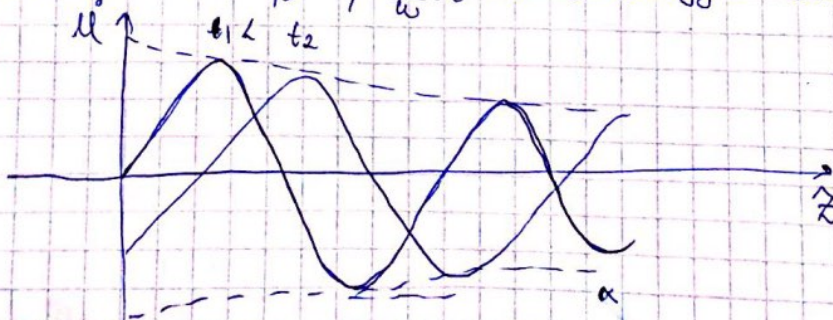
• A megoldás értelmezése: $\bar{u} := 0 \rightarrow u(z) = u^+ \cdot e^{-\bar{\kappa} z} = u^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$
 $\bullet u^+ \in \mathbb{R} \rightarrow u(z,t) = \text{Re} \{ u(z) \cdot e^{j\omega t} \} \rightarrow$

$$u(z,t) = \text{Re} \{ u^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t} \} = u^+ \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$$

Ha $\bar{u} = 0$, akkor az $e^{-\alpha z}$ tényező azt jelenti, hogy a feszültség amplitúdója z függvényében exponenciálisan csökken, és α fejezi ki a csökkenés mértékét, β a feszültség kócska a $z=0$ helyen felvett fázishoz képest

• $\alpha := 0$, ekkor $u(z,t) = u^+ \cos(\omega t - \beta z) = u^+ \cdot \cos[\omega(t - \frac{\beta}{\omega} z)]$

Ez egy helytől és időtől szinuszosan függő feszültség. A helytől függő fázishézés egy határosmat/terjedőmter felé meg, aminek sebessége: $v = \frac{\omega}{\beta}$; $\frac{\beta}{\omega} \cdot z$ a távolsággal arányos fázishézés.

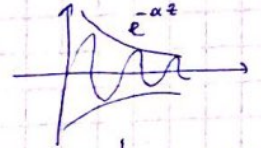


Szinuszos alakú haladó hullám a megoldás

Van térbeli és időbeli periodicitás is (vagy a helyet vagy az időt rögzítjük és a fenn. minőségben változik)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ; \lambda = \frac{2\pi}{\beta} ; v = \frac{\omega}{\beta} \rightarrow \text{fázis sebesség}$$

Ezt általánosítva: $\alpha \neq 0 : u(z, t) = u^+ \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{z\text{-től függő csillapítás}} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$



$u^+ = 0, u^- \neq 0 : u(z, t) = u^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \rightarrow (-z)$ irányú terjedés
összesítve: $u(z) = u^+ \cdot e^{-\gamma z} + u^- e^{\gamma z} \rightarrow$ ez egyenesen foglalt magába a két ~~sz~~ hullámot, azokat superpozíciója.

A vezetékben kialakuló feszültség és áram sinuszos időbeli változás esetén úgy tekinthetjük le, mint két, ellentétes irányban a fázis sebességgel haladó és a terjedés irányában csillapított hullám superpozíciója.

Ideális vezeték esetén: $R' = 0, G' = 0, \alpha = 0$

$$\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{L'C'} ; v = \frac{v_{\text{vac}}}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} ; Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \text{ (hullámellenállás)}$$

$\beta = \omega \sqrt{L'C'}$
 $\hookrightarrow$ frekvenciafüggetlen jelátvitelnél, ha töltés frekvencián viszünk át a jelet az torzul, ez a diszperzió

Gyakran ideális és lossy vezeték: $v = c ; \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} ; \alpha = 0$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

(37) Definíciója a reflexió tényezőt, ismeretese speciális határokat (ellenek, nyitott végű, rövidített) esetén az ideális távvezeték kialakuló áram- és feszültségviszonyokat.

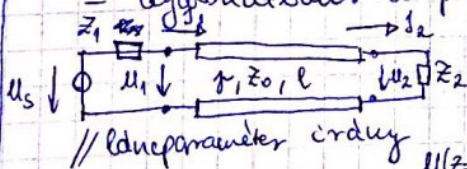
$$\left. \begin{aligned} u(z) &= u^+ \cdot e^{-\gamma z} + u^- \cdot e^{+\gamma z} \\ i(z) &= \frac{u^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{u^-}{Z_0} e^{+\gamma z} \end{aligned} \right\} \text{összerakva: } u^+ \text{ és } u^-$$

paraméterek: Nag kell adni a feszültségértékeket a TV. elején és végén.

- Egyenlet, elemeké eset:

~~paraméter~~ $u(z=0) = u_1 \rightarrow u^+ \cdot e^{-\gamma \cdot 0} + u^- \cdot e^{+\gamma \cdot 0} = u_1$
mivel $u(z=l) = u_2 \rightarrow u^+ \cdot e^{-\gamma l} + u^- \cdot e^{+\gamma l} = u_2$ } u^+, u^- meghatározható
feszültség u_1, u_2 és áram i_1, i_2 minden végén

- Gyakorlatban: a primer és szekunder oldalon a fenn. α áramból is függ.
primer oldalon generátorral, szekunder oldalon passzív fogyasztóval zárjuk le.



// lécparaméter irány

$$\left. \begin{aligned} u(z=0) &\equiv u_1 = u_s - Z_1 \cdot i_1 \equiv u_s - Z_1 \cdot i(z=0) \\ u(z=l) &\equiv u_2 = Z_2 \cdot i_2 \equiv Z_2 \cdot i(z=l) \end{aligned} \right\}$$

$\uparrow$
a Helmholtz-e. megoldása
a $z=0$ és $z=l$ -nél

Helmholtz m.o.:

$$u^+ + u^- = u_s - z_0 \left(\frac{u^+}{z_0} - \frac{u^-}{z_0} \right)$$

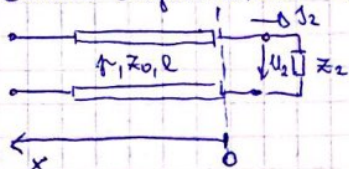
$$u^+ e^{+\gamma z} + u^- e^{-\gamma z} = z_0 \left(\frac{u^+}{z_0} e^{+\gamma z} - \frac{u^-}{z_0} e^{-\gamma z} \right)$$

Az exponenciális
állandók,

u^+ és u^-
meghatározható

Amíg a távezeték lezárásáról nem nyilatkozunk,
addig csak egy állandós megfogalmazás van
az u^+ és u^- komplex együtthatókkal. Amint megadjuk a
lezárást ezek a kielégítő nemfajtailek predefiniáltak minőségű
és meg tudjuk határozni a függvény alakját.

- A lezárs impedancia szerepe: új ábrásod bevezetése:



A távezeték végétől az elje felé mutatós
új x koordinátával tudunk.

$$x = l - z \text{ és } z = l - x$$

Helmholtz-e. az új koordinátarendszerben:

$$u(z) = u^+ e^{-\gamma z} + u^- e^{+\gamma z} = u^+ e^{-\gamma(l-x)} + u^- e^{+\gamma(l-x)} = \underbrace{u^+ e^{-\gamma l}}_{u_2^+} \cdot e^{+\gamma x} + \underbrace{u^- e^{+\gamma l}}_{u_2^-} \cdot e^{-\gamma x} =$$

azaz, helyfüggetlen $\Rightarrow$ összehasonlítható

$$u(x) = u_2^+ \cdot e^{+\gamma x} + u_2^- \cdot e^{-\gamma x}$$

$$i(x) = \frac{u_2^+}{z_0} \cdot e^{+\gamma x} - \frac{u_2^-}{z_0} \cdot e^{-\gamma x}$$

beeső hullámok reflektált/visszatérő hullám (a lezárs nemiségéből)

- Reflexiók levezetése: Definíció: $\Gamma = \frac{u_{\text{reflektált}}}{u_{\text{beeső}}}$ (a lezársán)

A reflektált hullám komplex amplitúdójának viszonya a beeső
hullám komplex amplitúdójához, a lezársán mérve. A reflexió
hányados is komplex.

A rendszer oldali reflexiók levezetése: $\Gamma_2 \stackrel{x=0}{=} \frac{u_2^- \cdot e^{-\gamma \cdot 0}}{u_2^+ \cdot e^{+\gamma \cdot 0}} = \frac{u_2^-}{u_2^+}$

$$\Gamma_2 \stackrel{z=l}{=} \frac{u^- \cdot e^{+\gamma l}}{u^+ \cdot e^{-\gamma l}} = \frac{u^-}{u^+} \cdot e^{+2\gamma l}$$

$$u_2^- = \Gamma_2 \cdot u_2^+ \rightarrow \begin{cases} u(x) = u_2^+ (e^{+\gamma x} + \Gamma_2 \cdot e^{-\gamma x}) \\ i(x) = i_2^+ (e^{+\gamma x} - \Gamma_2 \cdot e^{-\gamma x}) \end{cases}$$

$$i_2^+ = \frac{u_2^+}{z_0}$$

- Ha a feszültség vonatkozó reflexiók levezetése Γ_2 , akkor az
áramra vonatkozó reflexiók levezetése $-\Gamma_2$: $i_2^- = -\Gamma_2 i_2^+$
u.a. a lezársán

A reflexiók levezetése a hely függvényében: $\Gamma(z) = \frac{u^- \cdot e^{+\gamma z}}{u^+ \cdot e^{-\gamma z}}$
 $\Rightarrow$ távezeték hosszának meghatározásához
térvezési, ellenőrzési feladatokhoz

- a reflexiók levezetése kifejezése a lezárs impedanciával:

$$\Gamma_2 = \frac{u_2^-}{i_2^-} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{u(x=0)}{i(x=0)} = \frac{u_2^+ (1 + \Gamma_2)}{\frac{u_2^+}{z_0} (1 - \Gamma_2)} \Rightarrow$$

$$\Gamma_2 = \frac{z_2 - z_0}{z_2 + z_0}$$

Ha $\operatorname{Re}\{\tilde{z}_2\} > 0$ (passzív lezárás), akkor $|\Gamma_2| \leq 1$, komplex számoknál az egyenestörvénnyel lehet vizsgálni.

• Speciális lezárások:

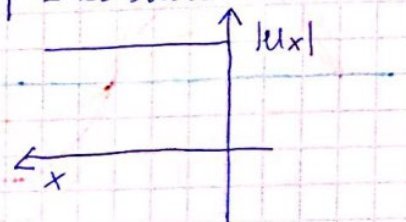
Ellenértékes lezárás: A távezeték a hullámimpedanciájával, megfelelő impedanciával zárunk le: $\tilde{z}_2 = \tilde{z}_0$

$$\Gamma_2 = \frac{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0} = 0 \rightarrow \text{reflexiómentes (mikor hullámtechnikai szempontból van a cél) nincs reflektált komponens.}$$

$U(z) = U^+ e^{-\gamma z}$ ill. $U(x) = U_2^+ e^{j\beta x}$
Az ellenértékes lezárást lehet használni a végtelen hosszú távezetékkel, mert azon nincs reflexió.

• ideális távezeték: $U(x) = U_2^+ e^{j\beta x} \rightarrow |U(x)| = |U_2^+| = \text{konstans}$
Ha nincs reflektált komponens, akkor akkor
folyton haladó hullámot kapunk

Az amplitúdó eloszlása a TV mentén állandó:



Nyitott végű TV: (ideális TV-et tekintünk)

$$\tilde{z}_2 = \infty \text{ és } \alpha = 0$$

$$\Gamma_2 = \lim_{\tilde{z}_2 \rightarrow \infty} \frac{\tilde{z}_2 - \tilde{z}_0}{\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0} = \lim_{\tilde{z}_2 \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\tilde{z}_0}{\tilde{z}_2}}{1 + \frac{\tilde{z}_0}{\tilde{z}_2}} = 1$$

• A teljes / totál reflexió: $|\Gamma_2| = 1 \Leftrightarrow |U_2^+| = |U_2^-|$

A reflektált hullám amplitúdója megegyezik a beeső hullám amplitúdójával

• Hullámlevegő: $U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + \Gamma_2 e^{-j\beta x}) = U_2^+ (e^{j\beta x} + 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2U_2^+ \cos(\beta x)$
 $I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} - \Gamma_2 e^{-j\beta x}) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = 2j \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x)$
amplitúdó(x)

Legyen $U_2^+ \in \mathbb{R}$: $U(x,t) = \operatorname{Re}\{U(x)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{2U_2^+ \cos(\beta x) \cdot e^{j\omega t}\} = 2U_2^+ \cos(\beta x) \cos(\omega t)$

Az idő és hely szerint is periódusosan változik, ez nem haladóhullám, hanem állóhullám: vannak benne kioltási helyek (csomópontok), azaz vannak olyan x helyek, ahol $U(x,t) = 0$ minden időpontban (kioltási helyek)

Interferencia: hullámok superpozíciója

• $U(x,t) = 0$, ha $\cos \beta x = 0$

$$\beta x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}(2k+1); k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2\beta}(2k+1) = \frac{\lambda}{4}(2k+1) \rightarrow \text{a hullámhossz negyedével a páratlan számú többszöröse, a TV. végére jutva}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} - 1 \cdot e^{-j\beta x}) = 2j \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x)$$

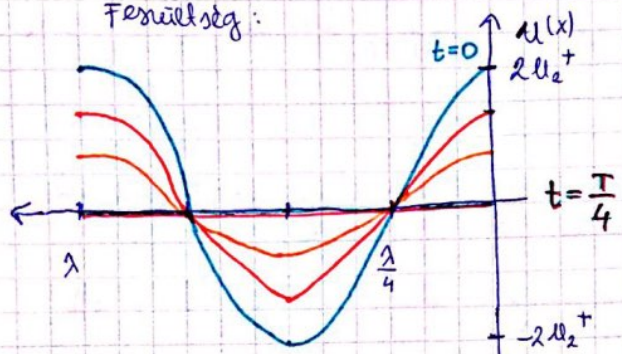
$$i(x,t) = \operatorname{Re}\left\{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot \sin \beta x \cdot e^{j\omega t}\right\} = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x) \cdot \underbrace{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin(\omega t)} = -\frac{2U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x) \cdot \sin(\omega t)$$

• $U(x,t) = 0$, ha $\sin \beta x = 0$

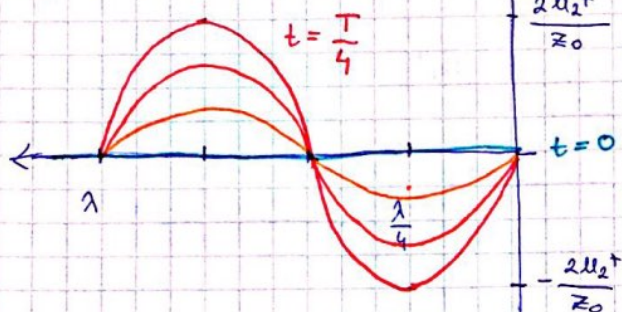
$$\beta x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{\beta} k = \frac{\lambda}{2} k$$

Feszültség:



Áram:

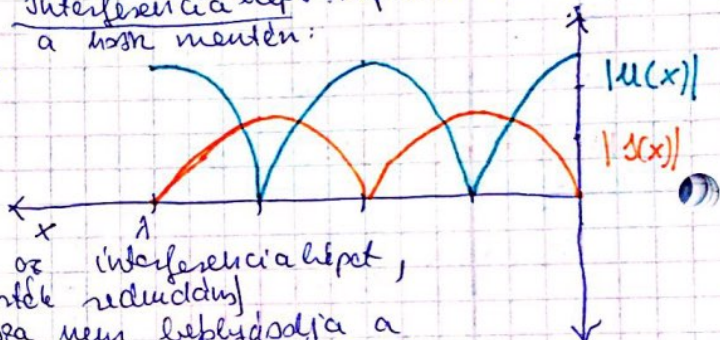


• A feszültség és áram között van egy negyed periódusnyi késés, és a hossz szerint is van egy negyed hullámhossz eltérés

• Van egy pillanat, amikor a TV energiája teljes egészében az $\vec{E}$ térben tárolódik
 $t=0, u=\max, i=0$

• Van egy pillanat, amikor a TV energiája teljes egészében a $\vec{B}$ térben tárolódik:
 $t=T/4; u=0, i=\max$

Interferencia lép: Amplitúdó ábrázolása a hossz mentén:



Ált. a feszültséggel rajzoljuk fel az interferenciaképet, ezt könnyebben mérni (a másik értéke redukálódik).
Ebben a szemléletben a TV hossza nem befolyásolja a hullám alakját, a kezdőérték függ

Rövidre zárt TV: (ideális) $Z_2=0, \alpha=0 \Rightarrow r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1$

Ez is totál reflexió:

$$u(x) = u_2^+ (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = 2j \cdot u_2^+ \cdot \sin \beta x$$

$$i(x) = \frac{u_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) = \frac{2u_2^+}{Z_0} \cdot \cos \beta x$$

(rövidzár/megszakítás alapján megfigyelhető)



38) Ismertesse a tetrazölges impedanciával lezárt ideális távvezeték feszültség- és áramviszonyait, valamint az állóhullám-haladóhullám felbontást.

Komplex impedancia lezáras és komplex reflexió lényegű, ideális a TV:

$$r_2 = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = r \cdot e^{j\varphi}; \quad r \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Feszültséggel: } u(x) = u_2^+ (e^{j\beta x} + r \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}) = u_2^+ \cdot e^{j\beta x} + u_2^+ \cdot r \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}$$

$$= \underbrace{u_2^+ \cdot e^{j\beta x} (1-r)}_{\text{haladó hullám}} + \underbrace{u_2^+ \cdot r \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}} \left[e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} + e^{-j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} \right]}_{\text{állóhullám}}$$

$$u(x) = u_H(x) + u_A(x)$$

$$|u_H(x)| = |u_2^+ (1-r)| = \text{konstans}$$

$$|u_A(x)| = 2|u_2^+| \cdot r \left| \cos\left(\beta x - \frac{\varphi}{2}\right) \right| \rightarrow \text{összetartja annak a hely függvényében}$$

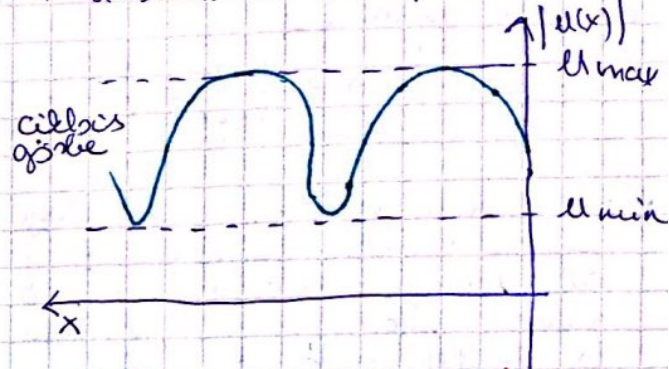
Távvezetékben kialakult hullámot egy pozitív irányba haladó és egy ellátható visszafelé terjedő fel. (Áram esetén hasonlóan) (Bár nem biztos, hogy egyértelműen, a főtét lehet változtatni)

Interferenciakép: haladó hullám: U_{max} + ellátható visszafelé terjedő hullám: U_{min}

Az U_{max} és U_{min} értékek között oszcillál, de nem szimmetrikus

$$f(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} - r \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}) =$$

$$= f_2^+ (1 + r) \cdot e^{j\beta x} - f_2^+ \cdot e^{j\varphi} \cdot 2r \cdot \cos(\beta x - \frac{\varphi}{2})$$



39) Hogyan határozható meg a feszültségamplitúdó minimum- és maximum helyei a TV. mentén, a lezárás ismeretében? Definíciója az állóhullámamplitúdó és ismertesse számítását. Hogyan használható ez a mennyiség nagyfrekvenciás impedanciamezésre?

VSWR := Voltage Standing Wave Ratio (feszültség arányát meg)

• Állóhullámamplitúdó: $\sigma \triangleq \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{min}}}$ A TV. mentén átlag mérhető

maximális és minimális feszültségamplitúdó hányadosa. Ezek az elv. min. és max. értékek, lehet, hogy a TV. nem elég hosszú, hogy ezek kivegyeszen fel is legyenek.

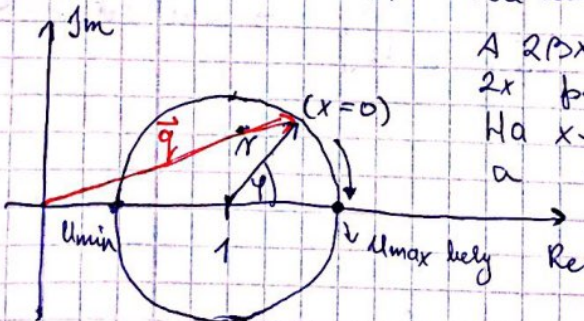
Haladó hullámra: $U_{\text{min}} = U_{\text{max}}$
 Ellátható hullámra: $U_{\text{min}} = 0$ } $\sigma \in [1; \infty]$

A feszültség abszolút értéke maximumnál az áram abszolút értéke minimumnál és fordítva, és ezeken a helyeken az áram és a feszültség fázisban vannak. Ezért kimondhatjuk, hogy ideális vezetékben a maximális és minimális abszolút értékek impedancia egyenlőként finta valós, és az állóhullám-arányát a következőképp fejezhetjük ki. A két impedancia helyének távolsága éppen negyed hullám hosszúságú. $Z_{\text{max}} = Z_0 \cdot \sigma$; $Z_{\text{min}} = \frac{Z_0}{\sigma}$

• Kapcsolata r_2 -vel: $\vec{r}_2 = r \cdot e^{j\varphi}$
 $U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + r \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}) = U_2^+ e^{j\beta x} (1 + r \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j2\beta x}) = U_2^+ e^{j\beta x} (1 + r \cdot e^{-j(2\beta x - \varphi)})$
 $|U(x)| = |U_2^+| \cdot |1 + r \cdot e^{-j(2\beta x - \varphi)}|$

$g(x)$ hely szerinti változás szempontjából ez számít, elég csak a véletlenét vizsgálni

Az $r \cdot e^{-j(2\beta x - \varphi)}$ egy r sugarú origó k.p.-t köré írt az x változással a komplex síkban. Hozzá adva 1-el a k.p.-t eltoljuk.



A $2\beta x$ miatt, 1 hullámhossz alatt $2x$ fordul körbe.

Ha x -et növeksztünk, akkor a körön fog mozogni a g . Ennek a g -nek kell az abszolút értéke, és ez a állós gömb.

$$\begin{aligned}
 U_{\max} &= \max_x |U(x)| = |U_2^+| (1+r) \rightarrow \text{az előbbi hullám legnagyobb értéke} \\
 &\quad \text{ha } \beta x - \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi \\
 U_{\min} &= \min_x |U(x)| = |U_2^+| \cdot (1-r) \rightarrow \text{az előbbi hullám csomópontja} \\
 &\quad \text{ha } \beta x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (2k+1)
 \end{aligned}$$

Ezekből következik:

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|} \rightarrow \text{átalakítható!}$$

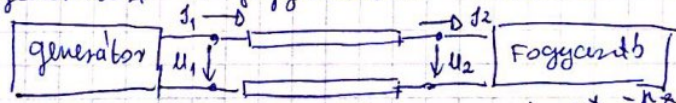
- Az előbbi hullám arány jelentősége az impedanciakülbséggel mutatkozik meg. Normál esetben impedanciát feszültséggel és árammal lehet mérni, de magyarázatban a hozzávezetési feladatoknál is számítható, mivel nagyobb a frekvencia annál jobban, mert a hozzávezetési is hullámvezetést vezetnek

Az előbbi hullám arányt lehet mérni a TV mentén különböző mérő elrendezéssel (pl.: hasított tápvezeték) $\rightarrow$ reflexió kóder $\rightarrow Z_2$ kezdés
 Kell φ is: először ismert impedanciával, majd az ismertekkel

$$\begin{aligned}
 U_{\max} &= |U_2^+| (1+r) = |U_2^+| + |U_2^-| && \text{a haladó hullám teljesítmény adódik} \\
 U_{\min} &= |U_2^+| (1-r) = |U_2^+| - |U_2^-| && \text{az előbbi hullám } Q\text{-ra tolódik}
 \end{aligned}$$

40. Somatessze a TV kétkapuként történő leírását lánctparaméterek segítségével.

A tápvezeték legkisebb mértékű alkalmazása a feszültség- és áram- és a teljesítmény átvitel. A tápvezeték elhanyagolhatóan kicsi, többnyire a generátort a fogyasztóval összekötött kétkapuként használjuk.



Helmholtz - egyenlet általános megoldása: $U(z) = U^+ \cdot e^{-\gamma z} + U^- \cdot e^{+\gamma z}$
 $I(z) = \frac{U^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} \cdot e^{+\gamma z}$

A TV. eleje: $z=0$:
$$\begin{cases} U_1 = U^+ + U^- \\ I_1 = \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

A TV. vége: $z=l$:
$$\begin{cases} U_2 = U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{+\gamma l} \\ I_2 = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{+\gamma l} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{+\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{+\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

U^+ és U^- eliminálása:
$$\begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{+\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{+\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{behelyettesítjük}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{e^{+\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} & \frac{Z_0 (e^{+\gamma l} - e^{-\gamma l})}{2} \\ \frac{1}{Z_0} \frac{e^{+\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} & \frac{e^{+\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

-idealisi TV - $x: \alpha=0; \tau=1, \beta$

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & Z_0 j \sin(\beta l) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

A hullámparaméterek ismeretében $\mathbb{R}$ közvetlenül számolható, az l függvénye.

$$\parallel \cos(f \cdot \rho \cdot l) = \cos(\rho \cdot l) \quad \text{e} \quad \sin(f \cdot \rho \cdot l) = f \cdot \sin(\rho \cdot l)$$

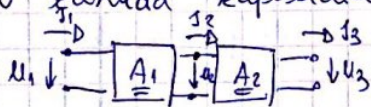
$$\parallel \frac{e^{xk} + e^{-xk}}{2} = \cosh(xk) \quad \frac{e^{xk} - e^{-xk}}{2} = \sinh(xk)$$

~~A7D~~ • A leikapu, talay dousdycu:

- reciprok, mert $\det \underline{A} = \cosh^2(\rho l) - \sinh^2(\rho l) = 1$

- symmetrisches, meist reziprok $\Rightarrow$ meist $A_{11} = A_{22}$

- TV fənlərdə kəsirlərə



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 1_1 \end{bmatrix} = \underline{A_1} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ 1_2 \end{bmatrix} = \underline{A_1} \cdot \underline{A_2} \begin{bmatrix} u_3 \\ 1_3 \end{bmatrix}$$

41. Ismertesze a TV bemeneti impedanciájának fogalmát, számítási módját és speciális esetét. Hogyan használható ez a mennyiség illesztési feladat megoldására?

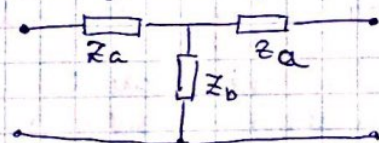
A bemeneti impedancia: egy négyzetlapon mérhető impedancia a standard oldal valamely lezárás esetén, a primer oldal feszültség és áram hányadosával szorozható.

Landcharakterentfika segitségeivel:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{z_0}{\sinh(\pi e)}} \cdot \begin{bmatrix} \cosh(\pi e) & -1 \\ 1 & -\cosh(\pi e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$Z_{in} :=$ Impedancia parametruke
reciproke (S_2 linc her. induglan can)

T-helpelesci b helpe:



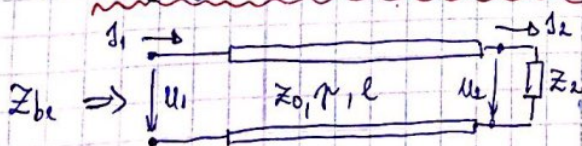
$$z_a = z_0 \frac{\cosh(\pi e) - 1}{2\sinh(\pi e)}$$

$$Z_b = \frac{Z_o}{\sinh(\pi l)}$$

Atide, hoogy egy koncentrált porcsueteu idobzalat helyettesiteni tudjuk
a TV. modell t, utg hiteles van rd, mert az impedancia higenet
(elontott par. modell)

a felvencsítde (p-an van benne). Egy koncentrált parametere
($R, L, C, \dots$) elrendezésű ábrák hálóját ~~ábrák függvénye~~ ($H(f\omega)$), impedancia-
karakterisztikája matematikailag olyan mint az ábrák $f\omega$ ($H(f\omega)$)
($f\omega$) racionális tört $f\omega$ -e. Z_a, Z_b pedig nem $\rightarrow$ lehetnek olyan
elemek nem kapunk.

- A ~~Adm~~ bem-estar impedância:



$$\varepsilon_{be} = \frac{I_1}{I_2} \quad (\text{komplex amplifikációs hányadosa})$$

$$Z_{be} = \frac{u_2 \cdot \overset{I_1}{ch(\mu e)} + Z_0 \cdot I_2 \cdot sh(\mu e)}{\frac{u_2}{Z_0} \cdot sh(\mu e) + I_2 \cdot ch(\mu e)} = Z_0 \cdot \frac{\frac{u_2}{I_2} \cdot ch(\mu e) + Z_0 \cdot sh(\mu e)}{\frac{u_2}{I_2} \cdot sh(\mu e) + Z_0 \cdot ch(\mu e)}$$

Általános eset:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cdot \cosh(\gamma l) + Z_0 \cdot \sinh(\gamma l)}{Z_2 \sinh(\gamma l) + Z_0 \cosh(\gamma l)}$$

- Speciális távvezeték:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{j Z_2 \sin \beta l + Z_0 \cos \beta l} \xrightarrow{/: \cos \beta l} \boxed{Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + j Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + j Z_2 \tan \beta l}} \quad [R]$$

- Speciális esetek:

- $Z_2 = Z_0$, illesztett lezárás $\Rightarrow Z_{be} = Z_2 = Z_0$

Impedancia megegyezése, olyan mintha a TV. ott se lenne.
(váltakozó áramú vezeték van)

- $Z_2 = 0$, rövidzár $\Rightarrow Z_{be} = -j Z_0 \tan \beta l \equiv Z_{be, rz}$

- $Z_2 = \infty$, nyitott $\Rightarrow Z_{be} = j Z_0 \tan \beta l \equiv Z_{be, nyj}$

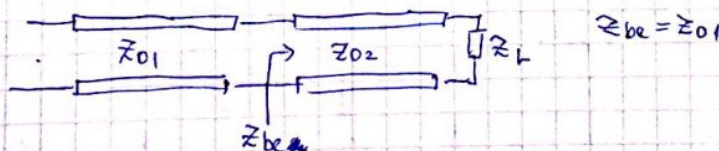
Nyitott végű vagy rövidzárú TV.-ben teljesítményes impedancia eloszlítás a hossz megfelelő megválasztásával.

$$Z_0 = \sqrt{Z_{be, rz} \cdot Z_{be, nyj}} \quad (\text{mértani közép}) \quad \left. \vphantom{Z_0 = \sqrt{Z_{be, rz} \cdot Z_{be, nyj}}} \right\} \text{ ideális TV.-nél}$$

$$\tan \beta l = \sqrt{\frac{Z_{be, rz}}{Z_{be, nyj}}}$$

Az üregábrós megvalósítás nagyfelvételén nem egyenlő, mert ott a vezeték végi sugárhosszú rezonancia felvételén, nem rendelkezünk nyitott véggel, képzőnk sugárhossz van.

Illesztési feladatoknál a Z_{be} létezik úgy kell hozzáállni, hogy reflexmentes legyen az illesztés. Azaz a második vezeték bemeneti impedanciája megegyezzen az első hullámimpedanciájával



- Végtelen hosszú távvezeték bemeneti impedanciája: egyenlő minős reflexió $\rightarrow$ ez úgy is nézhet, hogy $Z_2 = Z_0$

42. Ismertesse a szalaktéri hullámterjedés általános modelljét, és vezesse le az elektromos térerősségre vonatkozó hullámegyenletet.

- Homogén hullámegyenlet: egyszerűsítések: (ezek az általánosokból esnek):
homogén, lineáris közeg (μ, ϵ, σ helyett független állandó)
nincs töltés: $\rho = 0$
nincsenek beiktatott testek: $\delta_{be} = 0, E_{be} = 0$

- Maxwell-egyenletek: I. rot $\vec{H} = \underbrace{\sigma \cdot \vec{E}}_J + \underbrace{\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial D}{\partial t}}$; Az elektromos térerősség mozgatja a töltéseket minden áram, ami folyik az $\vec{E}$ -től függ
- II. rot $\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$\mu = konst \rightarrow$ III. div $\vec{H} = 0$
 $\sigma = 0 \rightarrow$ IV. div $\vec{E} = 0$

- homogén hullámegyenlet az $\vec{E}$ térerősségvektora:
 $rot \ rot \ \vec{E} = -\mu \cdot rot \ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} rot \ \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \cdot \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
 a rot) és a deriválás felcserélhető, mert ugyanabban a rendszerben vagyunk
 azonoság: $rot \ rot \ \vec{E} = grad \ div \ \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

A homogén vektoriális hullámegyenlet $\vec{E}$ -re:

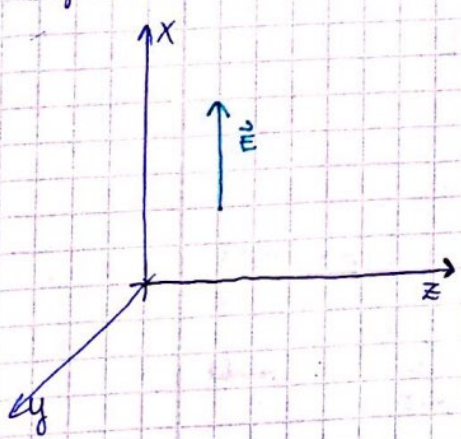
$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$\vec{H}$ -ra:
$$\Delta \vec{H} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

43. Ismertesse a térerősségvektor komplex amplitúdójának fogalmát (sinusos állandósult állapot) és írja fel az E.M. hullámok Helmholtz-egyenletét az elektromos térerősségre.

Tíztá sinusos időbeli változás esetén komplex számokkal tudunk dolgozni. A hullámszámokból ismert módon a sinusos jeleket komplex amplitúdóval, exponenciális függvények valós részeként értelmezzük.

Megfigyeléskor kell lemnünk:



- felvenünk egy koordinátenrendszert és olyan megfigyeléssel lebecsüljük, amiben az $\vec{E}$ térerősség x irányú: $\rightarrow$ lineárisan polarizált

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E(z, t) \cdot \vec{e}_x$$

- Változása csak z irányban van: $\frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0$

- Síkhullám: ha vettünk egy terjedés irányára merőleges síkot, akkor ennek a síknak minden pontjában u.a. a térerősséget tapasztaljuk. = sinusos változás esetén az amplitúdó és a fázisa z függvénye merőleges síkban ugyanaz a $síkt$ minden pontjában = a hullámfrontok párhuzamos síkok alakúak.

- A sinusos időbeli változás: $E(x,t) = \hat{E}_x(z) \cdot \cos(\omega t + \varphi(z)) \Rightarrow$
 z -tól függő amplitúdó

$$E(x,t) = \operatorname{Re} \{ \bar{E}_x(z) \cdot e^{j\omega t} \} \rightarrow \text{egyetlen változótól függő komplex skálár mennyiséggel írjuk le a skálármezőt}$$

komplex amplitúdó

- A téli hullám Helmholtz-egyenlete:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x + \underbrace{\Delta E_y \cdot \vec{e}_y}_{=0} + \underbrace{\Delta E_z \cdot \vec{e}_z}_{=0}$$

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}}_{=0}$$

Komplex amplitúdóknál: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} - \bar{\kappa}^2 \bar{E}_x = 0}$$

$$\boxed{\kappa = \sqrt{j\omega \cdot \mu (\sigma + j\omega \epsilon)}}$$

$\hookrightarrow$ terjedési együttható

$$\kappa = \alpha + j\beta$$

csillapítási
koefficiens

fáziseltérítés

STH

- Helmholtz-egyenlet általános megoldása

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ \cdot e^{-\bar{\kappa}z} + \bar{E}^- \cdot e^{\bar{\kappa}z}$$

- $\vec{H}$ kifejezése: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \Rightarrow H(x,y,z,t) = H_y(z,t) \vec{e}_y$$

Komplex amplitúdóval: $\bar{H}_y(z) = \hat{H}_y(z) \cdot e^{j\omega t}$

$$\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} = -j\omega \mu \cdot \bar{H}_y$$

$$\bar{H}_y = -\frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega \mu} (-\bar{\kappa} \bar{E}^+ \cdot e^{-\bar{\kappa}z} + \bar{\kappa} \bar{E}^- \cdot e^{\bar{\kappa}z})$$

$$\text{Legyen } \bar{Z}_0 = \frac{j\omega \mu}{\kappa} = \frac{j\omega \mu}{\sqrt{j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon)}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \epsilon}} \quad \text{: hullám}$$

$\hookrightarrow$ a közeg hullámimpedanciája

$$\boxed{\bar{H}_y(z) = \frac{\bar{E}^+}{\bar{Z}_0} \cdot e^{-\bar{\kappa}z} + \frac{\bar{E}^-}{\bar{Z}_0} \cdot e^{\bar{\kappa}z}}$$

44. Definíció a síkhullám fogalmát, és írja fel a síkhullám egydimenziós Helmholtz-egyenletét. Mit jelent a TEM típusú terjedés? Milyen áll a síkhullám - töltévezeték analógia?

- Síkhullámnak nevezzük azt a hullámfajtát, amikor az azonos frekvenciájú helyek egy vonalon vannak. A hullámok egyúddal párhuzamosak, melyek egyenletes sebességgel haladnak a közös normálisra irányulva. A hullámegyenlet egy olyan megoldása, amely nem függ külön-külön a helytől és időtől:

- $\vec{E}$ kizárólag x irányú; $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \rightarrow$ csak z irányú változás
 $\vec{E}(x, y, z, t) = E(z, t) \vec{e}_x$

Helmholtz-egyenlet: $\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial z^2} - k^2 \vec{E}_x = 0 \\ \text{és} \end{array} \right.$
 $\Delta \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x \rightarrow \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$
 $k = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$

- TEM: Transverzális elektromos mágneses terjedés:
 A villamos és mágneses térerősségek is csak a lengésmérőleges síkban van komponense.
 $E_z = 0, H_z = 0 \quad E \perp H, E, H \perp e_z$

Mind az $\vec{E}$ és a $\vec{H}$ merőleges a terjedés irányára

- Síkhullám - TV. analógia:

működési mód	átviteli mód	TV:	U	i	R'	L'	C'	G'	U(z)	I(z)
hossz	mágneses fal (H=0)	Síkhullám:	E_x	H_y	-	μ	ϵ	σ	$U(z) = U^+ e^{-kz} + U^- e^{+kz}$	$I(z) = I^+ e^{-kz} - I^- e^{+kz}$
									$E(z) = (E^+ e^{-kz} + E^- e^{+kz}) \cdot e_x$	$H(z) = (H^+ e^{-kz} + H^- e^{+kz}) \cdot e_y$

Az analógia addig használható, amíg lineárisan polarizált síkhullám merőlegesen esik le egy közeghatárra. Ha a síkhullám tartományként homogén közegben terjed, és a közeghatár a hullámfrontokhoz párhuzamos sík, akkor a TV.-nél látható módon definiálhatjuk a reflexió tényezőit, bemeneti impedanciát, állóhullámviszony - stb. mennyiségeket síkhullámok esetére is.

polarizáció: síkhullámnál detalános állapot

közeghatár: síkhullám és közeghatár vonala

Ha nem merőleges, akkor a reflektált hullám nőtörlik, nem u.a. az átvitt ter váma

- R' hiánya: mágneses töltés hiánya - elméleti megfigyelés.
 $R' :=$ hosszirányú áramok leirásához, ill. felírásához kell. + TV.-nél ideális esetben ($R'=0$) TEM típusú terjedés van. Ha nem ideális: lesz z irányú komponense az $\vec{E}$ nek, aminek anyaghatáron a tangenciális komponense folyamatosan megy át, így a vezeték körül is lesz z irányú tér.
 $\hookrightarrow$ ez nem TEM $\rightarrow$ de a síkhullámnál TEM terjedés van

- A σ : nem mindig jó modellje a közegben fellépő veszteségnek. A σ egy szacionárius vezetőképesség. Azonban a dielektrikumban a polarizáció miatt akkor is fellép veszteség ha a vezetőképesség elhanyagolható.

Az átpolarizálódás miatt a nikeláls anyag melegekkel, vastagság lehetne benne, ezt a σ nem venni figyelembe.

Stokols bevezetni a polarizációs vektorra, minnos időfüggésére:

$$\vec{E} = E' - j \cdot E''$$

komplex : ez erősen frekvenciafüggő

45. Somertesse a síkhullám viselkedését ideális szigetelőben. Tervezi ki a hullámparaméterek, a fázissebesség és a hullámhossz számítására.

Ideális nikeláls/dielektrikum: $\sigma = 0$ és $\epsilon \in \mathbb{R}$

A hullámparaméterek:

$$\gamma = j \cdot \omega \sqrt{\mu \cdot \epsilon} = j \cdot \beta \quad ; \quad \alpha = 0 \rightarrow \text{tényleg káros}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}} \quad ; \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

↳ a hullám fázissebessége

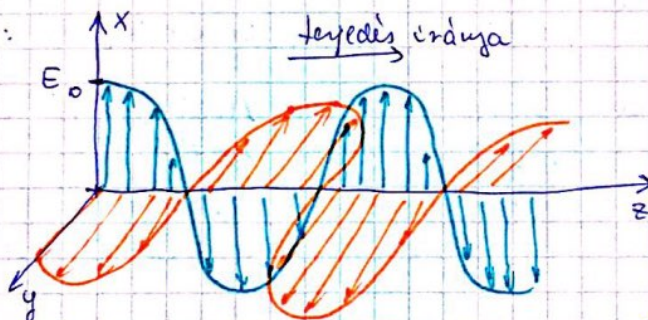
$$\text{valós} \rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \cdot \eta$$

η := Szabadtéri hullám impedanciája

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi \Omega \approx 377 \Omega$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Hullámkép:



miel Z_0 valós, ezért az $\vec{E}$ és $\vec{H}$ fázisban van

Ez az időbeli haladás hullám $\vec{E} \perp \vec{H}$ és $\vec{E}, \vec{H} \perp \vec{e}_z \Rightarrow \text{TEM}$

$$\text{Ha } E_x = 0 \text{ és } E_x^+ \in \mathbb{R} = E_0$$

$$E_x(z, t) = E_0 \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right]$$

$$H_y(z, t) = \frac{E_0}{Z_0} \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right]$$

$E \perp H$:

időben fázisban van

terben 90° -kal elfordulva

készítve a reflektált komponent, ami haladtán terjedéssel elhanyagolható (végtelen közeg)

Tetnőleges hullámok felbontható síkhullámok superpozíciójaként.

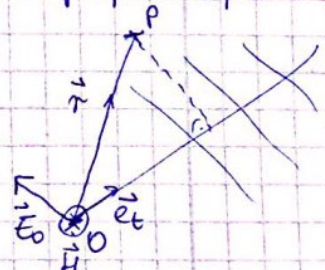
Tetnőleges irányú terjedés:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{j\beta(\vec{r} \cdot \vec{e}_t)} = \vec{E}_0 \cdot e^{-j \cdot \vec{e} \cdot \vec{r}}$$

$\vec{e} = \beta \cdot \vec{e}_t$: a hullámnormálvektor

↳ a terjedési irány és a β -t és magára foglalja

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{Z_0} \cdot \vec{e}_t \times \vec{E}(\vec{r})$$



46. Ismeresse, hogy miként terjed az energia a síkhullámokban, vezesse be és értelmezze a komplex Poynting-vektort. Ismeresse a polarizáció fogalmát és jelölését síkhullámra vonatkozóan.

Speciális eset: síkhullám ideális dielektrikumban, csak z irányba terjedés van ($\phi = z$)

$$\vec{E}_x(z) = \vec{E}^+ \cdot e^{-j\beta z} = |\vec{E}^+| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H}_y(z) = \vec{H}^+ \cdot e^{-j\beta z} = |\vec{H}^+| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z} ; \vec{H}^+ = \frac{\vec{E}^+}{Z_0}$$

// Mikor kell és mikor nem kell az $\frac{1}{2}$? Levezetés:

$$E_x(z,t) = |\vec{E}^+| \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

φ -t beírjuk, így általánosabb esetet vizsgálunk. $\Rightarrow E$ és H fázisban van

$$H_y(z,t) = |\vec{H}^+| \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

- Poynting-vektor: Az energia / teljesítmény áramlás sűrűsége.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{E}_x \cdot \vec{e}_x) \times (\vec{H}_y \cdot \vec{e}_y) = S_z \cdot \vec{e}_z \quad \left[\frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2} \right] ; S_z = E_x \cdot H_y$$

A síkhullám a terjedés irányába szállítja az energiát.

Az $\vec{S}$ vektor az irányra merőleges felületen időegység alatt áthaladó energia.

$$S_z(z,t) = |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| \cdot \cos^2(\omega t - \beta z + \varphi) \stackrel{\text{trig. az.}}{=} \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| + \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| \cdot \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$$

időbeli átlag: ami a határos teljesítménnyel kapcsolatos

$$S_{\text{átlag}}(z) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T S_z(z,t) dt = \frac{1}{2} |\vec{E}^+| |\vec{H}^+| \rightarrow$$

Az első tag ~~átlaga~~ konstans, a második tag $\cos$, aminek átlaga 0.

Szám: A határos teljesítmény, ami a felületegységen átdramlik. Síkhullámnál ez z -től független, az ideális dielektrikum nem von fel határos teljesítményt, nincs veszteség.

↳ Értelmezés: zárt "A" felületre: $P = \oint_A \vec{S}_{\text{átlag}} \cdot d\vec{A}$

• Elődefiniálása komplex amplitúdókkal: $S_{\text{átlag}} = \frac{1}{2} \vec{E}_x(z) \cdot \vec{H}_y^*(z) =$
 $= \frac{1}{2} |\vec{E}^+| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z} \cdot |\vec{H}^+| \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j\beta z} = \frac{1}{2} |\vec{E}^+| \cdot |\vec{H}^+| \quad \checkmark$

Ez a formula általánosítható: komplex Poynting-vektor:

$$\vec{S} \triangleq \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad \text{komplex vektorkból álló vektormező}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x \cdot \vec{e}_x + \vec{E}_y \cdot \vec{e}_y + \vec{E}_z \cdot \vec{e}_z \quad \text{minden rendszere komplex}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_x \cdot \vec{e}_x + \vec{H}_y \cdot \vec{e}_y + \vec{H}_z \cdot \vec{e}_z = \vec{H}_{\text{re}} + \vec{H}_{\text{im}} \cdot j$$

Értelmezése: $P :=$ határoló teljesítmény
 $Q :=$ meddő teljesítmény

$$P + j \cdot Q = \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$



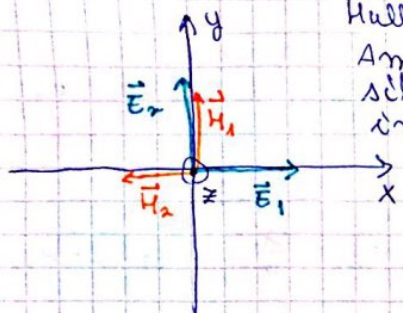
Speciális eset: $P = \oint_A \operatorname{Re}\{\vec{S}\} \cdot d\vec{A}$ és $Q = \oint_A \operatorname{Im}\{\vec{S}\} \cdot d\vec{A}$

Statisztikus, mert az energia terjedésére jellemző.

- Polarizáció: A terjedés z irányú, a lapra merőleges.

Hullámok superpozíciója:

Ami vagyunk kíváncsiak, hogy egy keresztmetszeti síkban az eredő térerősségvektor milyen pályát ír le. Kiválasztott sík: $z=0$

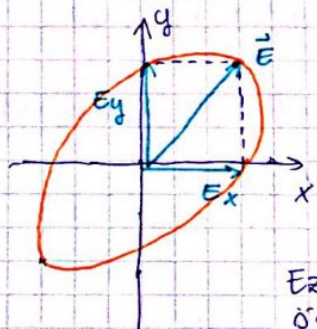


$$z=0: E_x(t) = E_{x0} \cdot \cos(\omega t) \quad // \varphi=0; \omega_1=\omega_2$$

$$E_y(t) = E_{y0} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \text{ vektorpálya}$$

Ha 2 egyúdsra merőleges, szimultán változó komponens oszcimele, akkor azonos frekvencia mellett az eredő alakja mindig egy ellipszis.



↳ Elliptikusan polarizált síkhullám $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ elliptikus polarizáció

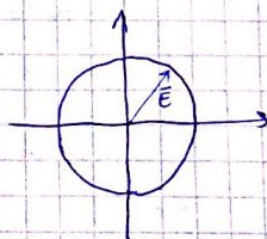
Ez az általános eset, a továbbiakban a két síkhullám ösége egy db síkhullám és akárhány további síkhullámot hozzávennünk, az eredmény mindig ellipszis lesz.

Ha már van egy elliptikusan polarizált síkhullám, azt véglegesen soha nem lehet fel lehet bontani különböző Pl.: lineárisan polarizált síkhullámokra. $\rightarrow$ mivel nem egyértelmű a felbontás inkább egyetlen polarizált síkhullámról tekintünk beszélni.

Speciális eset:

$$E_{x0} = E_{y0} = E_0 \text{ és } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

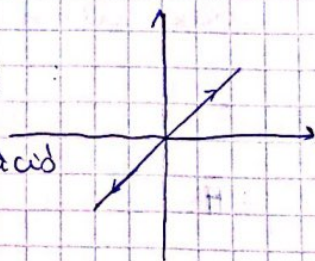
↳ körkörös polarizáció



elliptikusak ezek is

$$\varphi = 0 \text{ vagy } \varphi = \pi$$

↳ lineáris polarizáció



- Ha a frekvencia különbözik de a komponensek merőlegesek és szimultán: Lissajous-görbe

A TV. analízis csak lineáris polarizációt alkalmazhat.

47. Ismertesze a síkhullám ütközését anyaghatáron, különös tekintettel a merőleges beesésre. Hogyan alkalmazható továbbá a törvényt az analógiára? Mi a szerepe a közeghatár-feltételeknek?

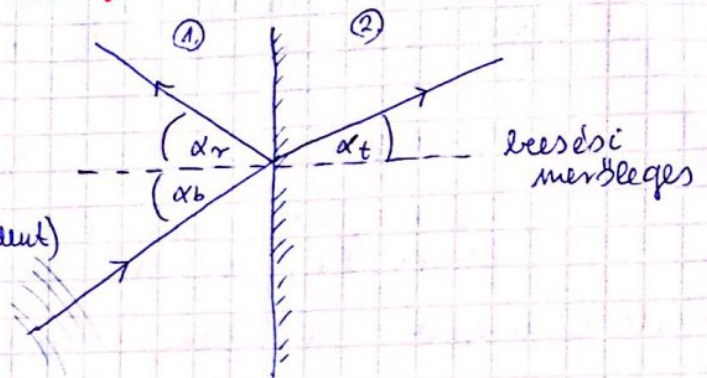
- Alkalmazás eset: közeghatár:
A hullámot az irányával azonosítjuk.

$\alpha_b :=$ a beeső hullám szöge (incident)

A hullámfrontokhoz merőleges
síkban vagyunk

$\alpha_r :=$ a reflektált hullám szöge, reflected

$\alpha_t :=$ a megtört, átteremtett hullám szöge : transmitted



Optikában a Snellius-Descartes törvény:

A beeső és reflektált hullám a beesési merőlegeshez viszonyított szöge megegyezik: $\alpha_b = \alpha_r$

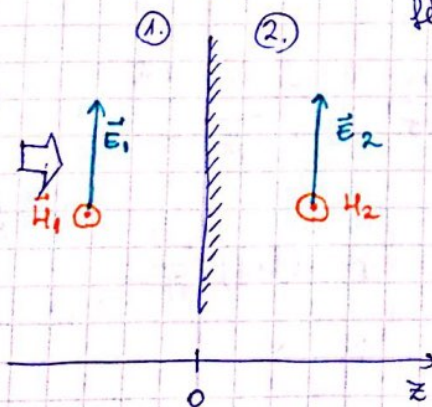
A megtört hullámnál a szöget sinuszai vagy aránylancok
mint a törésmutatók vagy mint a dielektromos állandók négyzetgyöke

$$\frac{\sin \alpha_t}{\sin \alpha_b} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

Ha a hullámhossz összemérhető a vezetési hosszal nagyságával,
akkor komplikálódik. Pl.: nem mindig a polarizáció,
(Fresnel- képlet)

- Merőleges beesés: $\alpha_b = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$ és $\alpha_t = 0$

Feltételek: lineáris polarizáció, jobbról és balról végtelen
feltétel, megvilágítás balról (a végtelenről)



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad E_1(z) &= E_1^+ \cdot e^{i k_1 z} + E_1^- \cdot e^{-i k_1 z} \\ H_1(z) &= \frac{E_1^+}{Z_{01}} \cdot e^{i k_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} \cdot e^{-i k_1 z} \end{aligned} \quad \textcircled{2} \quad \begin{aligned} E_2(z) &= E_2^+ \cdot e^{-i k_2 z} \\ H_2(z) &= \frac{E_2^+}{Z_{02}} \cdot e^{-i k_2 z} \end{aligned}$$

A végtelen feltétel miatt a 2-es közegben
nincs reflektált hullám.

• Folytonosság anyaghatáron: $E_{1t} = E_{2t}$
 $H_{1t} = H_{2t} ; (k=0)$

Feladat: $-z=0$ -val felírjuk a tangenciális komponenseket, amik
merőleges beeséssel TEM típusú hullámok minden
körkomponens alapfeltevéssel minden tangenciális

$$\begin{aligned} z=0: \quad E_1^+ + E_1^- &= E_2^+ \\ \frac{E_1^+}{Z_{01}} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} &= \frac{E_2^+}{Z_{02}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{A két egyenlet elég a három} \\ \text{változóhoz, mert az egyiket} \\ \text{előzőekben ismert} \end{array} \right\}$$

- Reflexiók levezetése:

$$r_{12} \triangleq \frac{\bar{E}_1}{E_1^+} = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}}$$

- Van egy továbbadós komponens is, me bevezetjük a transzmissziós együtthatót:

$$T_{12} \triangleq \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2 Z_{10}}{Z_{20} + Z_{10}}$$

$$r_{12} + r_{21} = 1$$

$r_{12} + r_{21} = 1$, mert a hullám ene a két része továbbad, transzmittált és reflektált hullám.

- TV. analógia: a reflexió levezetése:



Z_{20} lezáró impedancia modellje a végkellő feltétel

Mértékes beesés esetén lineárisan polarizált síkhullámra a TV analógia fennmarad. Az egyes rétegek TV hatásokat modellezhetők ill. az utolsó réteg egy lezáró impedanciával.

- 4.p.) Ismertesd a síkhullám viselkedését vezető anyagban! Tervezd ki a hullámparaméterek számítására, valamint a behatolási mélység fogalmára! Hogyan alkalmazható ez a jelenség nagyfrekvenciás terhelés megoldására?**

$\vec{H}$ vezetőnek olyan közegét nevezzük, ahol a vezetési áram sok nagyságrenddel nagyobb az eltolási áramnál; ezért feltesszük, hogy: $|\vec{H}| \ll \sigma$. Ezt hívjuk kvázistacionárius közelítésnek. A véges vezetőképességű közegben a hullámegyenlet tartalmazni fogja a veszteséget reprezentáló σ vezetőképességgel felírt tagot.

$$\omega \epsilon \ll \sigma$$

- Behatolási mélység: (eztén mélység) a terjedési együtthatóból vezetjük le:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{j} \cdot \sqrt{\omega\mu\sigma} = \dots$$

$$= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\text{Behatolási mélység: } \delta = \frac{2}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} \text{ [m]}$$

$$\gamma = (1+j) \frac{1}{\delta} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\delta}$$

$$\beta = \frac{1}{\delta}$$

A terjedési együtthatónak valós része is van, így a hullámok csillapodva terjednek.

Azoknál fogva látni is lehet, hogy a hullámviselkedés teljesen más, mint a hullámviselkedés vákuumban is, az az összefüggés helyesül.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{j} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} = \frac{\gamma}{\sigma}$$

A hullámimpedanciának valós és képzetes része is van.

Adott két végtelen félter, az egyikben levegő van, míg a másikon jó vezetőképeségű anyag. A vezető félter felületére merőlegesen süllyedő esik le. A vezetési számítása során a végtelen vezető félter közelében úgy kezelhető, mint ha a felület vastagsága teljesen egyenlően volna el a teljes áramerősség, a mélyebb rétegekben pedig nem folyna áram. Innen az elvezetés.

• δ értéke különböző frekvenciákon: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}} = \frac{a}{\sqrt{f}}$

f :	50 Hz	1 MHz	1 GHz
réz, $\sigma = 5,7 \frac{MS}{m}$ Cu $\mu_r = 1$	9,43 mm	66,7 μm	2,11 μm
vör, $\sigma = 14,5 \frac{MS}{m}$ Fe $\mu_r = 4000$	0,3 mm	2,09 μm	66 nm

• Nagyfrekvenciás Jelenet átvitel: A tény, hogy a töltések nincs idejük elmozdulni a vezető felületén olyan mértékben, ami töltésretartást okoz. Minél nagyobb a frekvencia, a vezetőben nemcsak levezetés, hanem töltés is. (A vezető levezetését ismétlődése miatt a vezető nagyfrekvencián tanúsított ellenállása megnövekszik.)
+ a h.g. felület ellenállása

49. Ismertesse az áramkínálts és a közelségi hatás jelenségét, és szemléltesse azokat hegyes vezetőn. Milyen aszimptotikus (modellel) modelleket ismer a hegyes vezető nagyfrekvenciás ellenállásának számítására?

• Áramkínálts: (skin-effektus): $E_2(z) = E_2^+ \cdot e^{-\alpha_2 z}$

$\sigma = 0$ ① ② $\sigma \gg \omega \epsilon$

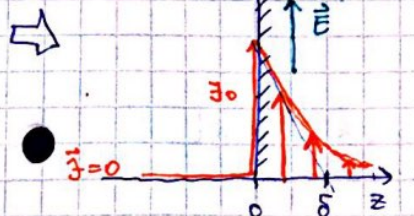
$$\vec{J}(z) = \sigma \cdot E_2^+ \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot e^{-j\beta_2 z} ; z > 0$$

A félter végtelen kiterjedésű, a 2-es közelségben a hullámmód nincs reflektált komponense.

$\vec{J}(z)$ az áramsűrűség ②-ben. ($\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$), $\alpha_2 = \alpha_2 + j\beta_2$
A levezetés nem feszültség, hanem áram.

Behatolás mélységét beírva:

$$|\vec{J}(z)| = \underbrace{\sigma \cdot |E_2^+|}_{J_0(z=0)} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot 1$$



Az áramsűrűség a felületre befelé haladva exponenciálisan csökken valamilyen J_0 felületi értékre kezdve.

• δ a behatolási mélység hasonlít a rendszerleltetőből ismert τ -hoz:
A kezdeti mélység itt mérni a függést + 5τ után az érték elhanyagolható.

• Az exponenciális csökkenés mértéke hullámhosszal:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \cdot \delta \approx 6,285 \delta ; |\vec{J}| \approx 0 \text{ ha } z > 5\delta$$

Tehát már 1 hullámhosszon belül elcsúszik az áramsűrűség.

- Alkalmazás: Aramlisszintűs kör keresztmetszetű / hengeres vezetékben:
Kérdés a hengeres vezeték ellátása.



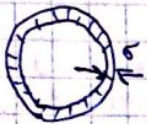
Adott egy hosszú egyenes r sugarú, l hosszúságú hengeres vezeték, melyben I amplitúdójú, f frekvenciájú váltakozó áram folyik.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \approx r \rightarrow \text{Ha } \delta \gtrsim r, \text{ akkor nincs aramlisszintűs, az áram egyenletesen tölti ki a keresztmetszetet.}$$

Egyenáramú ellátás formuláját használjuk:

$$R'_0 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi r} ; L'_0 = \frac{\mu}{8\pi}$$

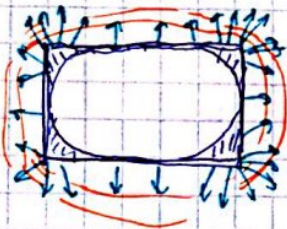
$\rightarrow$ Ha $\delta \ll r$, akkor van aramlisszintűs, és a δ vastagságban a hengeres vezeték palástja jó közelítéssel síknak tekinthető lokálisan és a vezeték felére kapott formula alkalmazható: olyan, mintha a vezeték belsejében egy δ vastagságú rétegen folyna az áram.



$$R' \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi \delta}$$

$\rightarrow$ Ha $\delta \approx r$, akkor Bessel módszer vagy numerikus módszer alkalmazható.

- Kitérítés: Ha $\square$ keresztmetszetű a vezeték, akkor:



a sarkok környezete erőteljesebben vesz részt a vezetésben és az ellátás módjától mind nem alkalmazható

Az $\vec{E}$ és $\vec{B}$ vektorok a sarkoknál skálázódnak $\Rightarrow$ A pozitív-vektor nagyobb a sarkoknál és a negatív-vektor a sarkoknál.

- Közelségi hatás:

Alkalmazás, ha két vezeték van egymás mellett, amelyek ellenkező irányú áramot vezetnek.



Először az aramlisszintűs nem egyenletes, hanem az egyenlő fél produktos részen hangszályszerű.