

4. előadás

A logaritmus fogalma, a logaritmus azonosságai

Definíció: $\log_a b = c \iff a^c = b$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

A definíció alapján: $\log_a a^b = b$ és $a^{\log_a b} = b$

A logaritmus azonosságai:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
4. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Feladatok

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

1. a) $\log_2 16$ b) $\log_5 125$ c) $\ln e^6$ d) $\log_2 0,25$ e) $\lg 0,00001$ f) $\log_3 \frac{1}{81}$
2. a) $\log_8 2$ b) $\log_{16} \sqrt{2}$ c) $\log_{125} \sqrt[3]{5}$ d) $\log_{64} \frac{1}{4}$ e) $\log_{27} \frac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\log_{49} \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$
3. a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ c) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}$ d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{32}}$ e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{10}}} 10000$ f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{81}$
4. a) $\log_8 4$ b) $\log_{27} 81$ c) $\log_9 \sqrt{27}$ d) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{32}$ e) $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$ f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}} 16$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

5. a) $2^{\log_4 9} + 9^{1+\log_3 \frac{1}{2}} + e^{-\ln 2}$ b) $\sqrt[3]{10^{3+\lg 27}} + 5^{\log_{25} 36+1}$ c) $\sqrt{5} (8^{\log_6 5} + 3^{1+\log_9 5}) + \sqrt{6^{\log_6 25}}$
6. a) $\sqrt[3]{7^{\log_{\sqrt{7}} 2 - \log_{49} \frac{1}{4}}}$ b) $16^{\log_8 27 + \log_2 \frac{1}{3}} + (\sqrt{2})^{\log_8 64}$ c) $36^{1-\log_6 2} + 81^{\log_{27} 8 + \log_3 \frac{1}{2}}$
7. a) $(\sqrt{5})^{\log_{25} 16} \cdot \sqrt{100^{2-\lg 5}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{\log_3 4}$ b) $\left(\sqrt[3]{4^{6-\log_{\sqrt{2}} 8}}\right) : (25^{1+\log_5 2})$

$$\text{c) } 25^{\log_{\sqrt{5}} 2} \cdot \sqrt{81^{1-\log_2 \sqrt{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\log_4 81}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

$$\text{8. a) } 3^{\log_8 4} \quad \text{b) } \log_{\sqrt[4]{3}} \left(\frac{1}{27}\right) \quad \text{c) } 81^{\log_{27} 9} \quad \text{d) } 2^{-\log_{125} 25}$$

Eredmények

1. a) 4 b) 3 c) 6 d) -2 e) -5 f) -4
 2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{6}$ f) $-\frac{1}{8}$
 3. a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) -6 d) -5 e) -8 f) 8
 4. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{5}{4}$ e) $-\frac{4}{3}$ f) $-\frac{8}{3}$
 5. a) $\frac{23}{4}$ b) 60 c) 25
 6. a) 2 b) 3 c) 10
 7. a) 5 b) $\frac{1}{100}$ c) 16
 8. a) $\sqrt[3]{9}$ b) -12 c) $(\sqrt[3]{3})^8$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Arány- és százalékszámítás

- András és Béla együtt 70 évesek. András ma kétszer annyi idős, mint Béla volt akkor, amikor András annyi idős volt, mint Béla most. Hány éves Béla?
- A bergengóc tudósok szerint egy jégeső a réti csigák 60%-át pusztítja el. A héten már harmadszor volt jégeső. Lelkes gimnazisták megszámozták, hogy a jégesőket követően összesen 16 csiga maradt életben a réten. Átlagosan hány csiga élhetett a réten kezdetben, a bergengóc csigaszám-becslési modell szerint?
- Festéktüszszentő Hapci Benő testtömegének 90%-a víz. Festéktüszszentés céljából permeező végű orrával felszippannt 2 liter festékes vizet, így összesen 47 kg víz lesz a szervezetében. Hány kilós volt eredetileg Benő, ha a festékes víz szárazanyag-tartalmától eltekintünk, és 1 l víz 1 kg?
- A CutIt vállalat munkagépével 24 nap alatt lehet kivágni egy hektár őserdőt, a CutThemAll cég munkagépével 16 nap alatt lehet ugyanezt a hektár ősfát kivágni. Ha ezekből egy-egy ilyen gép együtt dolgozik, hány nap alatt vágja ki az egy hektár ősfát?

5. Két csapon keresztül 4 óra alatt telik meg a benzintartály. Ha csak az egyik van nyitva, a tartály 7 óra alatt lesz tele. Hány óra alatt telik meg a másik csapon keresztül a tartály?

6. Két kőműves együttes munkával 6 nap alatt épít fel egy falat. Hány nap alatt építenék fel a falat külön-külön, ha az egyiknek az egész munka 5 nappal tovább tartana, mint a másiknak?

7. András egyedül 6 nap alatt ássa fel a kertet, András és Béla együtt 2 nap alatt, András, Béla és Cecil együtt 1 nap alatt. Hány nap alatt ássa fel a kertet Béla, illetve Cecil külön-külön, ha csak egyedül dolgoznak?

Eredmények

Arány- és százalékszámítás

1. Legyen András és Béla jelenlegi életkora A és B , a régebbi életkoruk $A - x$, $B - x$. Ekkor az $A = 2(B - x)$, $A - x = B$, $A + B = 70$ egyenletrendszerből $x = 10$, $A = 40$, $B = 30$, tehát Béla ma 30 éves.

2. 250 3. 50 kg 4. 9, 6 nap 5. $\frac{28}{3}$ 6. 10 és 15 7. Béla : 3 nap, Cecil : 2 nap