Rendszeroptimalizálás
Aláíráspótló zárthelyi feladatok

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2021. május 25.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

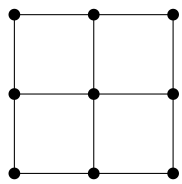
b) A primál feladatot egy LP szolver programmal megoldva azt kaptuk, hogy a célfüggvény (például) a változók következő értékeire veszi fel a maximumát: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = 0$. Adjuk meg a duális feladat egy, a célfüggvényt optimalizáló megoldásában az y_1 duális változó értékét.

$$
\begin{aligned}
&\max\{x_1 + 5x_3 + 9x_4\}\\
&\text{ha}\\
&33x_1 - 15x_2 + 2x_3 \leq 3\\
&x_1 - x_2 + 9x_3 + 7x_4 \leq 0\\
&2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 0\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

2. Adjunk meg egy olyan kéttermékes folyam feladatot, amit lineáris programként modellezve az alábbi feladatot kaphattuk; vagyis rajzoljuk fel a feladathoz tartozó irányított gráfot, ezt egészítsük ki minden olyan (numerikus és nem numerikus) adattal, ami a folyamfeladat kitűzéséhez szükséges és azonosítsuk a változók szerepét a feladat leírásában. (A lineáris programban a változók számozása x_1-től x_6-ig teljesen véletlenszerű, nincs semmilyen összefüggés a változó indexe és a feladatban betöltött szerepe között.)

$$
\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 - x_4 - x_5\}\\
&\text{ha}\\
&\qquad x_3 - x_1 = 0\\
&\qquad x_6 - x_2 = 0\\
&\qquad x_1 + x_6 \leq 4\\
&\qquad x_3 + x_5 \leq 3\\
&\qquad x_2 + x_4 \leq 2\\
&x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. Létezik-e a maximális páros részgráf probléma approximációjára tanult első algoritmusnak olyan lefutása az alábbi gráfon, melyre a középső sorban lévő három csúcs egy osztályba tartozik a kimenetként kapott páros gráfban?



4. Létezik-e a minimális lefogó ponthalmaz probléma approximációjára tanult második algoritmusnak olyan lefutása a **3.** feladat gráfján, melyre az optimum kétszeresénél kisebb értékű megoldást kapunk?

5. Egy probléma bemenete az $(n, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pozitív egészekből álló számsorozat. Döntsük el, hogy az alábbi lépésszámú algoritmusok közül melyek polinomiálisak.

a) $\sqrt[n]{a_n}$

b) $\log(a_1^n \cdot a_2^n \cdot \ldots \cdot a_n^n)$

Rendszeroptimalizálás

Aláíráspótló zárthelyi feladatok — pontozási útmutató

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2021. május 25.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -15 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(2 pont)}$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

(Amint látható, a feltételek között szereplő $2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 0$ egyenlőtlenséget helyettesítettük a (-1)-gyel való beszorzottjával.)
Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{3y_1\} \\ &\text{ha} \\ &33y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ &-15y_1 - y_2 + y_3 \geq 0 \\ &2y_1 + 9y_2 + y_3 \geq 5 \\ &7y_2 + 2y_3 \geq 9 \\ &y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(4 pont)}$$

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) A megadott primál megoldást a célfüggvénybe helyettesítve kapjuk, hogy a primál feladat maximumértéke 1. (1 pont)
Mivel a feladat szövegéből kiderül, hogy a primál feladat rendszere megoldható és a célfüggvénye

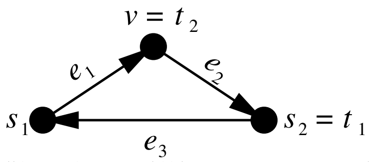
felülről korlátos a megoldáshalmazán (hiszen a feladat megad egy maximumhelyet), ezért a dualitástétel feltételei teljesülnek, így az alkalmazható. (1 pont)
Következésképp a primál feladat minimumértéke is 1. (2 pont)
Ebből tehát egy, a célfüggvényt minimalizáló duális megoldásban $3y_1 = 1$, vagyis $y_1 = \frac{1}{3}$. (2 pont)
A primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 7 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 7 változós lineáris program – ami azonban a tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal (és erre is igaz, hogy egy optimális megoldásában $y_1 = \frac{1}{3}$).

A 2. feladat megoldása. Mivel a kéttermékes folyam feladatban minden élhez két változó tartozik (az átfolyó mennyiség az első, illetve második termékből), ezért a gráfnak három éle van. (1 pont)
A (nemnegativitási feltételektől különböző) három egyenlőtlenség nyilván a kapacitás feltételeket írja le. Ezekből tehát megtudjuk az élek kapacitását: $c(e_1) = 4$, $c(e_2) = 3$ és $c(e_3) = 2$ (ahol az éleket sorra e_1, e_2, e_3 jelölik). (1 pont)
Továbbá az is kiderül, hogy e_1-hez az x_1 és x_6, e_2-höz az x_3 és x_5, illetve e_3-hoz az x_2 és x_4 változók tartoznak (de az egyelőre nem, hogy melyik változó melyik termék mennyiségét méri). (1 pont)
A két egyenlet a folyammegmaradási feltételeket írja le. Tartozzon az első az 1-es termékhez, a második a 2-es termékhez (de persze a termékek számozása érdektelen). (0 pont)
Az egyenletekből adódik, hogy x_1 és x_3 az 1-es termék mennyiségét méri a megfelelő éleken, x_2 és x_6 pedig a 2-es termékét. (1 pont)
Mindebből pedig már egyértelműen beazonosítható a változók szerepe:

	e_1	e_2	e_3
1-es termék:	x_1	x_3	x_4
2-es termék:	x_6	x_5	x_2

(1 pont)

Mivel (például) az 1-es termékre csak egy folyammegmaradási feltétel van felírva, ezért a gráfnak csak egy s_1-től és t_1-től különböző csúcsa van; jelölje ezt v. Így tehát G három csúcsú. (1 pont)
Az $x_3 - x_1 = 0$ egyenletből megtudjuk, hogy e_2 kilép v-ből, e_1 pedig belép v-be. (1 pont)
(Fordítva is lehetne, de a feladat megoldása úgy is érdemben azonos maradna).
A célfüggvényből megállapíthatjuk, hogy $x_1 - x_4$ az 1-es termék s_1-ből t_1-be szállított mennyisége, $x_2 - x_5$ pedig a második termék s_2-ből t_2-be szállított mennyisége. (1 pont)
Így e_1 kilép s_1-ből, e_3 pedig belép s_1-be. (1 pont)
Ebből már felrajzolható a gráf:



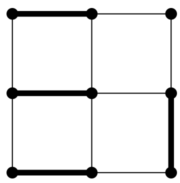
(1 pont)

Mivel a második termék s_2-ből t_2-be szállított mennyisége $x_2 - x_5$, ezért e_3 kilép s_2-ből és e_2 belép s_2-be. Ebből tehát $s_2 = t_1$. (1 pont)
Mivel a 2-es termékre vonatkozó folyammegmaradási egyenlet $x_6 - x_2 = 0$, ezért a 2-es termék szempontjából s_2 közbülső csúcs (mert ebből lép ki e_1 és ebbe lép be e_3). Így tehát $t_2 = v$. (1 pont)
Ezzel tehát a kéttermékes folyam feladat megadása teljes, amit valóban a megadott lineáris programozási feladatot eredményezi.
Bár a fenti megoldás részletesen leírja, hogy az LP feladatból hogyan következtethetők ki a

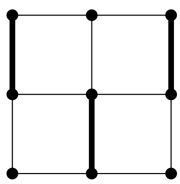
kéttermékes folyam feladat paraméterei, nem elvárás egy teljes értékű megoldástól sem, hogy ugyanezt megtegye, mert a feladat csak egy (lehetséges) olyan folyam feladat leírását kéri, amiből a megadott LP feladat származhat. Így maximális pontszámot ér az, ha valaki leírja a fenti folyam feladatot és megmutatja, hogy abból valóban a szóban forgó LP adódik.

A 3. feladat megoldása. Az algoritmus a csúcshalmaz tetszőleges két csoportba osztása után megvizsgálja, hogy van-e olyan csúcs, melynek több szomszédja van a saját csoportjában, mint a másikban, és ha van ilyen csúcs, akkor azt áthelyezi a másik csoportba. (2 pont)
Az algoritmus leállásakor tehát minden csúcsnak legfeljebb annyi szomszédja lehet a saját csoportjában, mint a másikban. (2 pont)
Ha a középső sor három csúcsa egy csoportba tartozna az algoritmus leállásakor, akkor közülük a bal szélső csúcs alsó és felső sorban lévő szomszédai a fentiek szerint a másik csoportba kell tartozzanak. (2 pont)
Ugyanez a helyzet a középső sor másik két elemével is, (2 pont)
így az egyik csoportot a középső sor, a másik csoportot az összes többi csúcs alkotná. (2 pont)
Ez azonban lehetetlen, hiszen ekkor a felső sor középső elemének két szomszédja lenne a saját csoportjában és csak egy a másikban, így a kérdéses lefutás nem létezik. (2 pont)

A 4. feladat megoldása. Az algoritmus a gráf egy nem bővíthető párosítását választja ki és ennek végpontjait adja meg kimenetként. (2 pont)
A fenti pontok nem a szöveg leírásáért járnak, hanem akkor, ha valaki ennek megfelelően kísérel meg eljárni. Persze le lehet írni azt is, hogy ezt a nem bővíthető párosítást hogyan keresi az algoritmus, de erre most nincs szükség.
Az optimum értéke 4, (0 pont)
mert a középső csúcs szomszédai 4 elemű lefogó ponthalmazt alkotnak, (1 pont)
ennél kisebb lefogó ponthalmaz viszont nincs a gráfban, mert (pl.) az alábbi ábrán vastaggal jelölt élek 4 élű párosítást alkotnak, (1 pont)



és bármely lefogó ponthalmaz legalább akkora, mint bármely párosítás. (1 pont)
Olyan kimenetet kell tehát keresnünk, ami kevesebb, mint 8 csúcsú. (1 pont)
Ehhez olyan nem bővíthető párosítást kell megadnunk, ami legfeljebb 3 élű, (1 pont)
egy ilyen látható az alábbi ábrán. (4 pont)



Ez a párosítás csakugyan nem bővíthető, hiszen az általa le nem fogott pontok független ponthalmazt alkotnak, a kérdéses lefutás tehát létezik. (1 pont)

Az 5. feladat megoldása. A bemenet mérete $N = \lfloor \log n \rfloor + 1 + \lfloor \log a_1 \rfloor + 1 + \lfloor \log a_2 \rfloor + 1 + \ldots + \lfloor \log a_n \rfloor + 1$. (Nem baj, ha valaki az egészrészeket és plusz 1-eket elhanyagolva adja meg a méretet és később is ezt használja.) (2 pont)

a) Megmutatjuk, hogy a lépésszám nem polinomiális. (0 pont)

Ehhez elég azt megmutatni, hogy pl. $n = 1, a_n = a_1 = 2^k$ esetén nem lesz polinomiális a lépésszám. (2 pont)

A bemenet mérete ekkor $N = k + 2$. (1 pont)

A lépésszám $\sqrt[n]{a_n} = 2^k = 2^{N-2}$, ami exponenciális N-ben, (1 pont)

így csakugyan nem polinomiális. (1 pont)

b) Megmutatjuk, hogy a lépésszám polinomiális. (0 pont)

$$\log(a_1^n \cdot a_2^n \cdot \ldots \cdot a_n^n) = n \log(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = n(\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n) \leq$$
$$N(\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n) \leq N^2.$$

(4 pont)

A lépésszámot így felülről tudtuk becsülni a bemenet méretének egy polinomjával, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)