(K12) Ismertesse a nemlineáris dinamikus Kirchhoff típusú hálózat számításait munkaponti linearizálással! Hogyan dönthető el a munkapont stabilitása? Hogyan ellenőrizhető az eljárás jogosultsága? Illusztrálja az eljárást egy egyszerű példán!

---

1. Munkaponti linearizálás értelmezése:

- Időben változó folyamatok vizsgálata nemlineáris hálózatokban bizonyos feltételek mellett visszavezethető nemlineáris rezisztív hálózat munkapontjának meghatározására (időben állandó összetevő) és egy lineáris hálózat változó folyamatainak vizsgálatára

- a gerjesztés: $u_s(t) = \bar{u}_s + \tilde{u}_s(t)$ $\to$ $\bar{u}_s$: állandó összetevő; $\to$ $\tilde{u}_s(t)$: kellően kis változó összetevő

- ismeretlen: a válasz: feszültség vagy áram: hasonló alakban keresik:

$$u_k(t) = \bar{u}_k + \tilde{u}_k(t) \quad , \quad i_k(t) = \bar{i}_k + \tilde{i}_k(t)$$

- lineáris invariáns ellenállásra: a két összetevő kapcsolata

$$u_k(t) = R_k\, i_k(t) \Rightarrow \bar{u}_k = R_k \bar{i}_k \;, \quad \tilde{u}_k(t) = R_k \tilde{i}_k(t)$$

- ha a két összetevő (u_k, i_k) kapcsolatát nemlineáris invariáns ellenállásra keressük

  $\to$ ha $U_k(i_k)$ kellően sima függvény, akkor a Taylor sorával írható le:

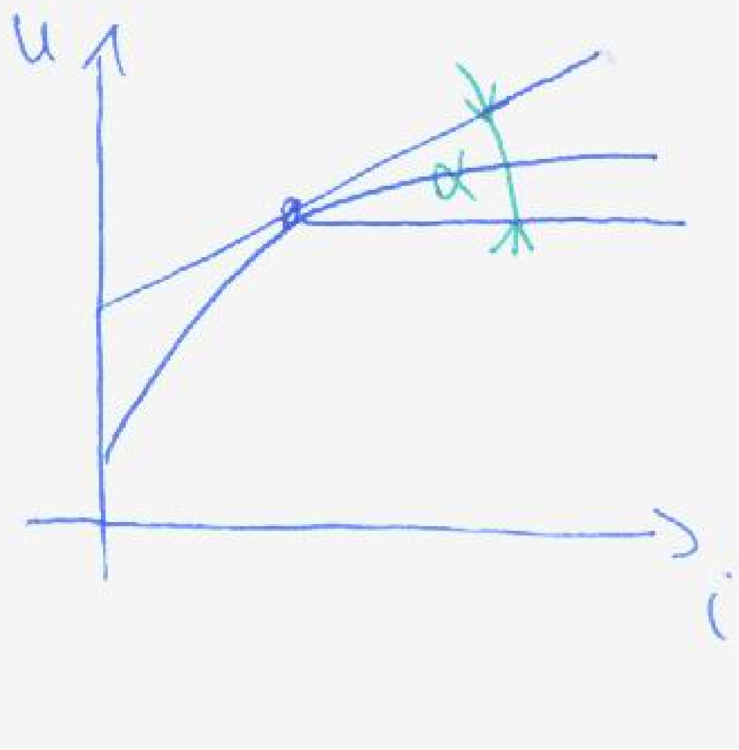
$$\bar{u}_k + \tilde{u}_k(t) = U_k(\bar{i}_k + \tilde{i}_k(t)) = U_k(\bar{i}_k) + \left.\frac{dU_k(i_k)}{di_k}\right|_{\bar{i}} \tilde{i}_k(t) + \dots$$

- ha feltételezzük, hogy a változó összetevők olyan kicsik, hogy valamennyi nemlineáris függvény 1. fokú Taylor polinomjával, vagyis munkaponti lineáris alakjával közelíthető $\Rightarrow$ a jelleggörbét az érintőjével helyettesítjük.

- így a következő közelítéssel élünk:

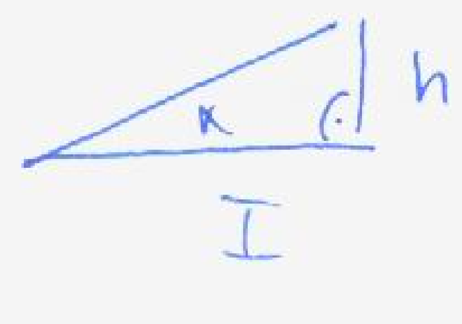
$$\bar{u}_k = U_k(\bar{i}_k) \;;\; \tilde{u}_k(t) = R_k(\bar{i}_k)\cdot \tilde{i}_k(t) ;\; R_k(\bar{i}_k) = \left.\frac{dU_k(i_k)}{di_k}\right|_{\bar{i}_k}$$

ahol $R_k(\bar{i}_k)$ a nemlineáris ellenállás dinamikus rezisztenciája az $\bar{i}_k$ áramú pontban



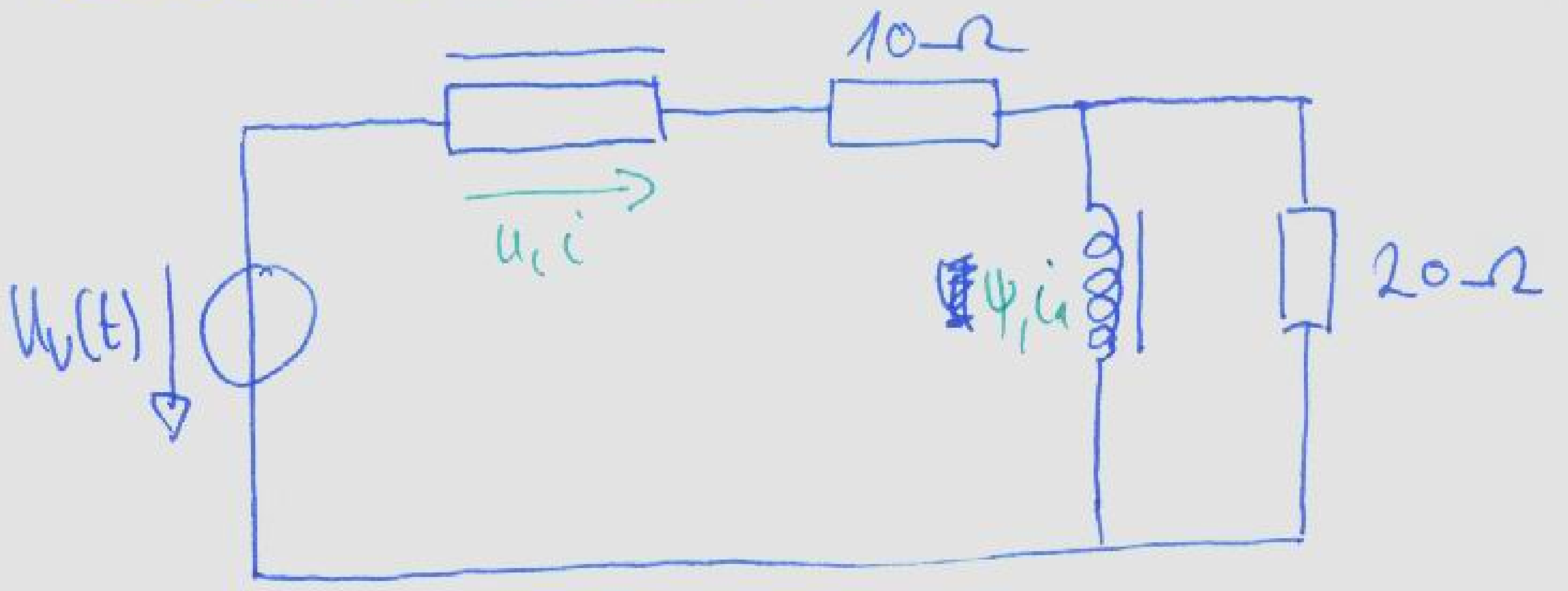
$$u = tg\,\alpha\; I$$

$$\to tg\,\alpha = \left.\frac{du}{di}\right|_M = R_{din}\Big|_{\text{munkapontban}}$$



A változó komponensek közötti kapcsolat olyan, mint egy R_{din} nagyságú lineáris ellenálláson.

2. A munkaponti linearizálás lépései (Példával):



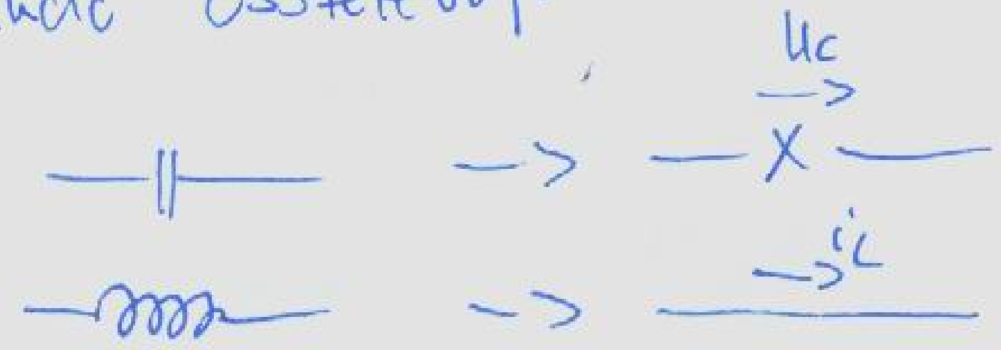
$u = 20\sqrt{i}$

$\psi = 3\cdot10^{-3}\, i^3 + 2\cdot10^{-3}\, i$

$u_V(t) = 50 + \tilde{u}$

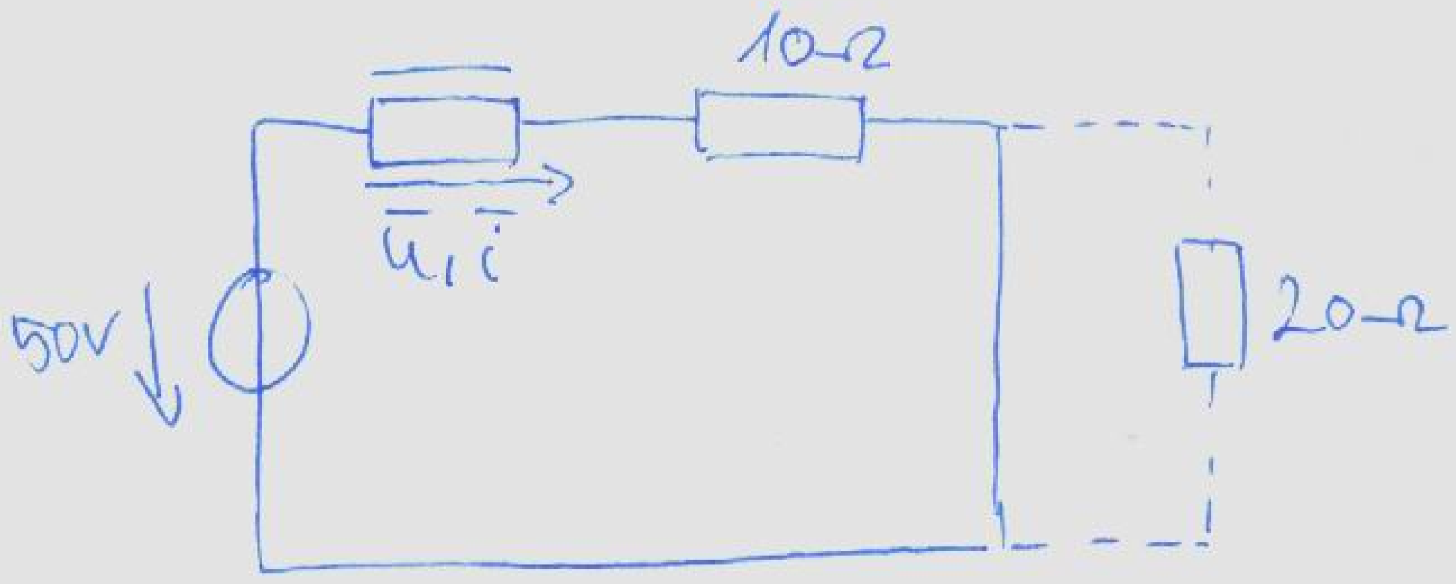
① lépés: munkapont meghatározása:

- helyettesítsük a forrásmennyiségeket állandó összetevőjükkel
- határozzuk meg a nemlineáris komponensek munkapontját és a válaszok állandó összetevőjét
- E során:



(lineáris és nemlineáris is!)

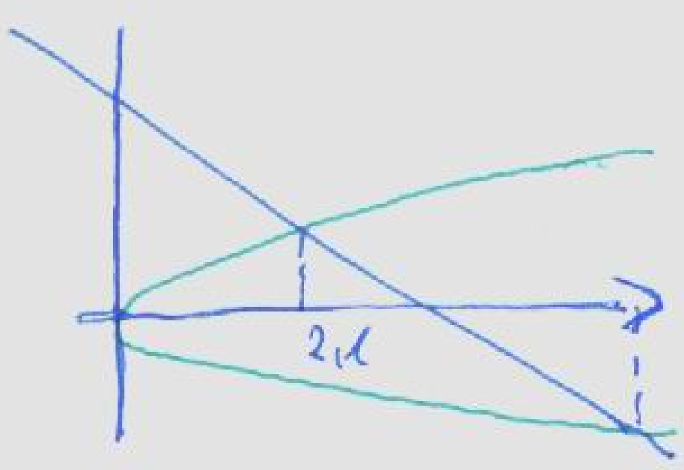
↳ rezisztív hálózatot kapunk, ha csak lineáris rezisztív komponensek vannak



$50 - 10\bar{i} = 20\sqrt{\bar{i}}$

↳ $\bar{i} \simeq$ 11,9 A / 2,1 A

de



↳ 4. síknegyed nem jó!

⇒ a munkapont: $\boxed{\bar{i} = 2{,}1\,A \quad \bar{u} = 29\,V}$

② lépés: munkaponti dinamikus komponensek meghatározása:

$$R_{din} = \left.\frac{du}{di}\right|_{\bar{i}} = \frac{d}{di}\,20\sqrt{i} = \left.\frac{20}{2\sqrt{i}}\right|_{\bar{i}} = 6{,}9\,\Omega$$

$$L_{din} = \left.\frac{d\psi}{di}\right|_{\bar{i}} = \left.\frac{d}{di_1}\left(3\cdot10^{-3}\, i_1^3 + 2\cdot10^{-3}\, i_1\right)\right|_{\bar{i}_1} = 41{,}7\cdot10^{-3}\,H$$

$$C_{din} = \left.\frac{dq}{du}\right|_{\bar{u}}$$: itt nincs

- csatolt komponensek: megfelelő parciális derivált képzés

(11) Ismertesse a diszkrét idejű, lin. invariáns jelfolyam típusú hálózat fogalmát, elemi komponenseinek karakterisztikáját az idő- a frekvencia és a komplex frekv. tartományban!

1., Jellemzés

a) Diszkrét idejű hálózat: - Elemekből épül fel, melyek meghatározott összekapcsolási szabályok szerint kapcsolódnak egymáshoz

- A diszkrét idejű hálózatot egy valódi objektum modellezésére használjuk
- A hálózati elemeket karakterisztikák jellemzik, amelyek az elemek ~~bemeneti~~ bemeneti és a kimeneti jelei közt teremtenek kapcsolatot
- Általánosan: a hálózat valamely mennyiségekkel leírt objektum modellje: az objektum változóját hozzárendeljük a hálózat 1 változójához
- Lehetnek a hálózatban értelmezve olyan változók, melyeknek az objektumban nem felelnek meg fizikai mennyiségek.
- A hálózat változói diszkrét idejűek

b) Diszkrét id. rendszer:

- hálózat hozzárendelése: sokszor az objektumot modellező rendszerhez
- 2 alapvető változófajta → u[k] adottnak tekintett gerjesztés
  → ezekhez tartozó válasz

- rendszertípusok → SISO: Single Input Single Output → ezt vizsgáljuk
  → MIMO: Multi – " – Multi – " –

c) Lineáris, invariáns:

1. lineáris - a gerj. - válasz explicit alakja: $y = W\{u\}$, ahol $W\{\,\}$ egy operátor
   - a rszer. lineáris, ha $W\{\,\}$ lin. operátor.
   ↳ ekkor érvényes a szuperpozíció elve:

$$W\{k_a u_a + k_b u_b\} = k_a W\{u_a\} + k_b W\{u_b\}, \text{ ahol } u_a, u_b: \text{gerj.}$$

k_a, k_b konstans

2. **Invariáns** (időfüggetlen)

Def 1: a gerjesztés n $(n \in \mathbb{Z}^x)$ ütemmel történő eltolása esetén a válasz is n ütemmel tolódik el. $W\{u[k]\} = y[k] \Rightarrow W\{u[k-n]\} = y[k-n]$

Def 2: (Általános): Változóinak kapcsolatát időbeli eltolás nem befolyásolja

2. Hálózati elemek

Az alább felsorolt építőelemekből és összekapcsolási kényszerekből felépülő hálózatot jelfolyam típusú hálózatnak nevezzük.

a) Általánosan:

- A karakterisztikák jellemzik, amelyek az elemek p bemeneti és q kimeneti jelei között teremtenek kapcsolatot
- A bemeneti és a kimeneti jelek az elemek pólusain jelennek meg.

b) Diszkrét idejű komponensek neve + karakterisztikája: 1 pólusok: $q_i = H\{p_i\}$ kapcsolatot keressük

1 Szorzó (erősítő):

$p[k]$ K $q[k]$

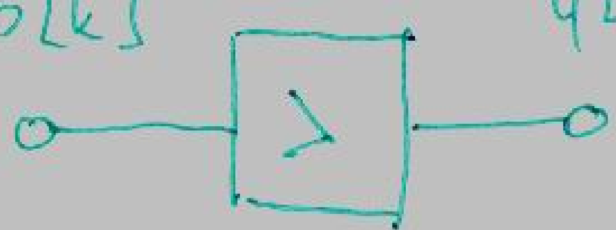
$K \in \mathbb{R}$

időtartomány	frekv. tartomány	komplex frekv. tartomány
$q[k] = K \cdot p[k]$	$Q = K \cdot P$	$V = K \cdot P$

→ jellemzők:
- memóriamentes
- lineáris, invariáns

2 késleltető

$p[k]$ $q[k] = p[k-1]$



→ kimeneti változó késik a bemenetihez képest

időtart.	frekv. t.	kompl. frekv. tart.
$q[k] = p[k-1]$ $q[k+1] = p[k]$	$Q = P \cdot e^{-j\nu}$	$Q = P \cdot z^{-1}$

→ jellemzők:
- memóriával rendelkező
- lin. invariáns

3 forrás

$u[k]$ $q[k] = u[k]$

A hálózat külvilággal való kapcsolatát adja

időtart.	frekv. tart.	kompl. frekv. tart.
$q[k] = u[k]$ $U = u[k]$	U	$U(z) = U$

→ jellemzők: nemlineáris komponens → szuperpozíció elve nem igaz rá!

4 nyelő

$p[k]$ $y[k]$

időtartomány	frekvencia tart.	komplex frekvencia tart.
$p[k] = y[k]$ $y = y[k]$	Y	$Y(z) = Y$

→ jellemzők: nem lineáris

R8. Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikáját! Hogyan számítható az adott gerjesztéshez tartozó válasz az átviteli karakterisztika ismeretében? Hogyan ábrázolható az átviteli kar.?

1. Az átviteli karakterisztika értelmezése

- Lásd H9. tétel

2. Adott gerjesztéshez tartozó válasz számolása $H(j\omega)$ / $H(e^{j\vartheta})$ ismeretében

I. Folytonos eset

a) Periodikus esetben (periodikus gerjesztés)

- adva van: $u(t) = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t) + \ldots$ -> Fourier-sorfejtett alak
  adva van: $H(j\omega) \rightarrow H(jk\omega_1)$
- a válasz: $y(t) = ?$
- ki kell számolni $H(jk\omega_1)$ értékeit $k = 0, 1 \ldots$ -re
  ↳ innen megkapjuk az amplitúdó és fázis karakterisztikát: $|H(jk\omega_1)|$ és $\varphi(k\omega_1)$
- a válasz tehát: $\boxed{y(t) = U_0 \cdot H(0) + U_1 \cdot H(\omega_1) \cdot \cos(\omega_1 + \varphi(\omega_1)) + U_2 \cdot H(2\omega_1) \cdot \cos(2\omega_1 + \varphi(2\omega_1)) + \ldots}$

b) Adott $u(t)$ gerjesztésre:

- adva van $H(j\omega)$
- ki kell számolni $\mathcal{F}\{u(t)\}$-t (ez csak akkor létezik, ha abszolút integrálható)
- felhasználva a definíciót: $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$

  ↳ innen $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot U(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$

II. Diszkrét eset: $H(e^{j\vartheta})$

- Az értelmezés teljesen hasonló, csak minden diszkrét értékű
- a válasz számítása is hasonló!

3. Az átviteli karakterisztika ábrázolása

I. Folytonos eset:

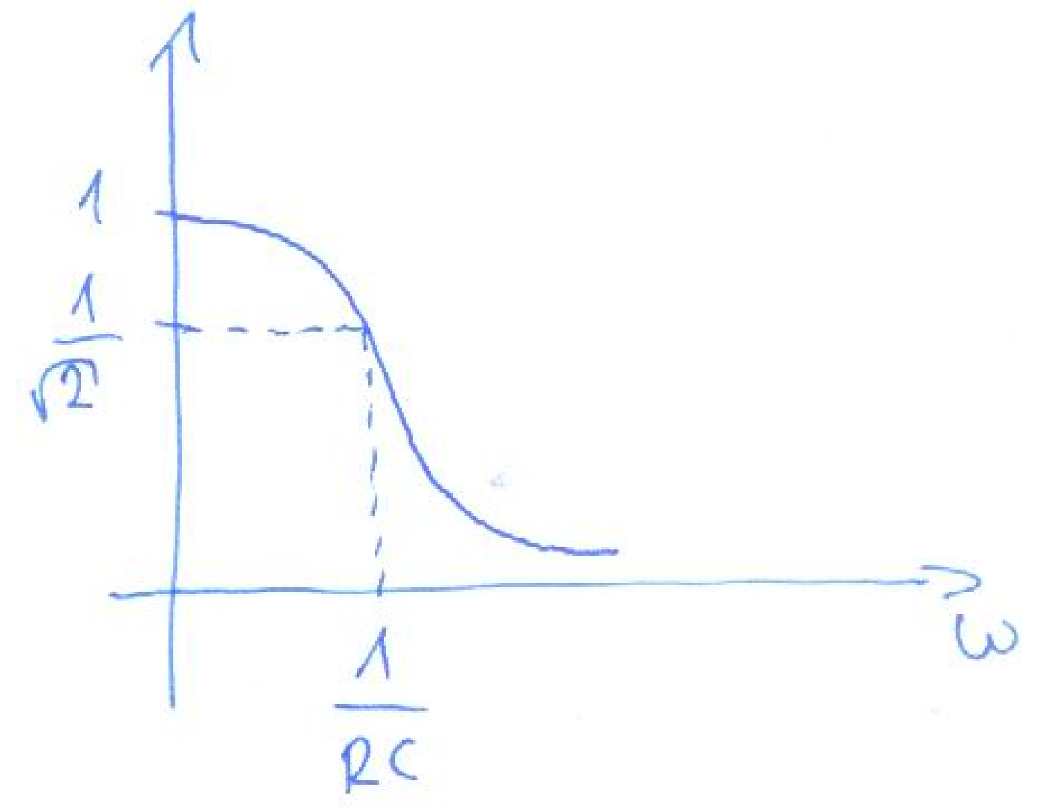
- Adva van: $\rightarrow K(\omega) = |H(j\omega)|$ amplitúdó karakterisztika
  $\rightarrow \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ fázis karakterisztika

- Például soros RC-re: $H(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega RC}$

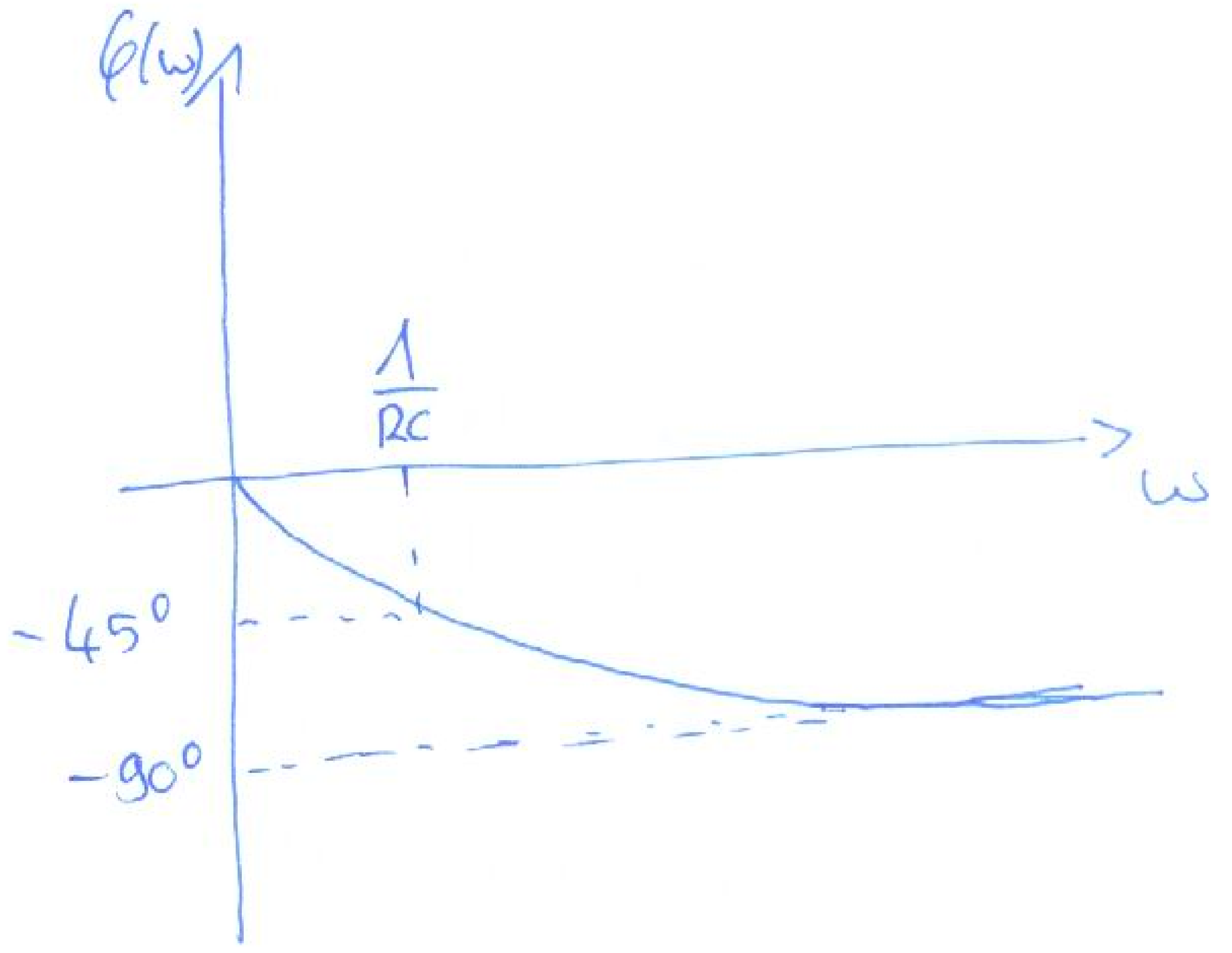
a) Amplitúdó és fáziskarakterisztika ábrázolása

Amplitúdó kar.:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

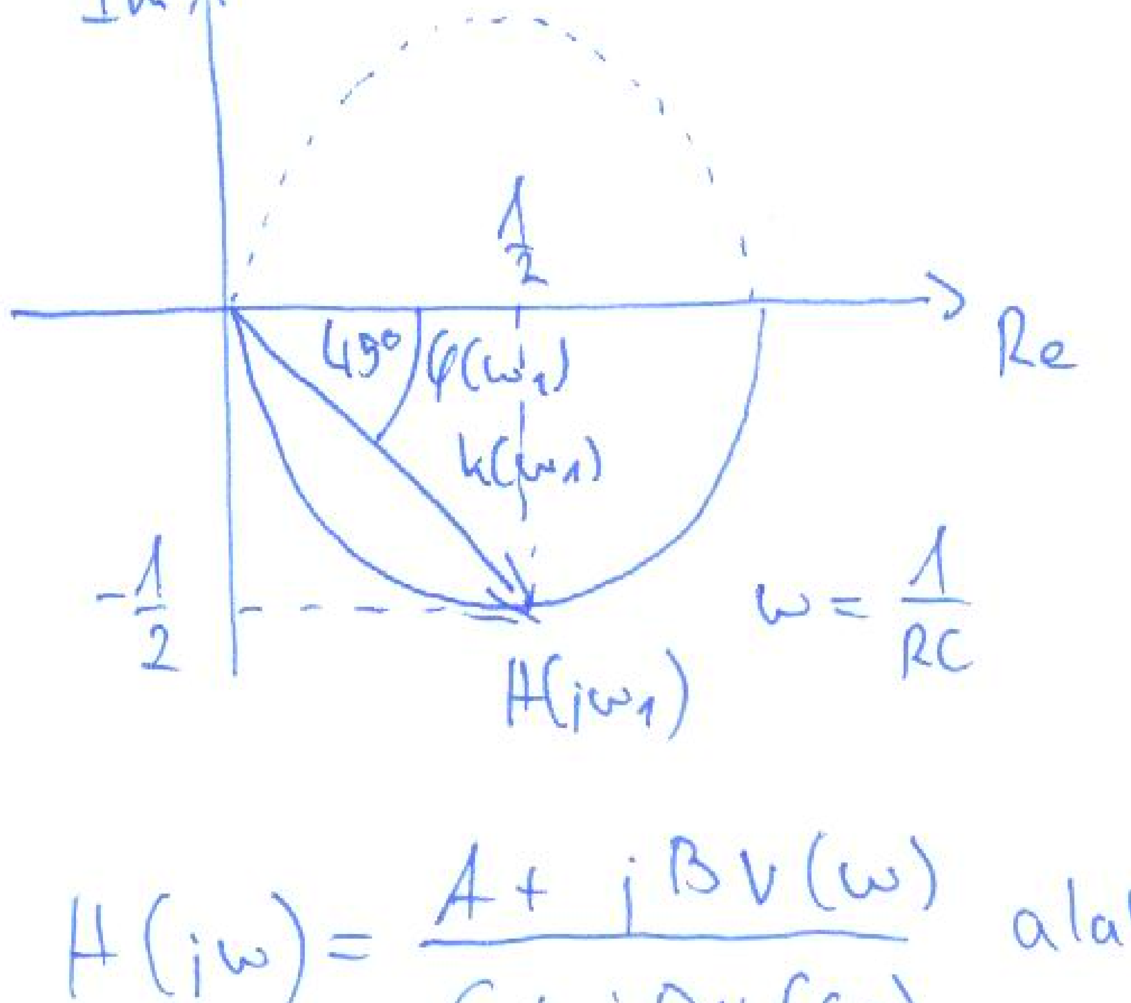


Fázis kar.:



b) Nyquist diagram: – $H(j\omega)$ fazorját jeleníti meg

- Szerkesztése: amplitúdó és fáziskarakterisztika alapján: $K(\omega)$ a vektor hossza és $\varphi(\omega)$ a vektor szöge.
- Az a görbe a komplex síkon, amelyet $H(j\omega)$ befut, miközben ω változik
  $\emptyset$ ~~[illegible]~~ vagy $-\infty$ és $+\infty$ között



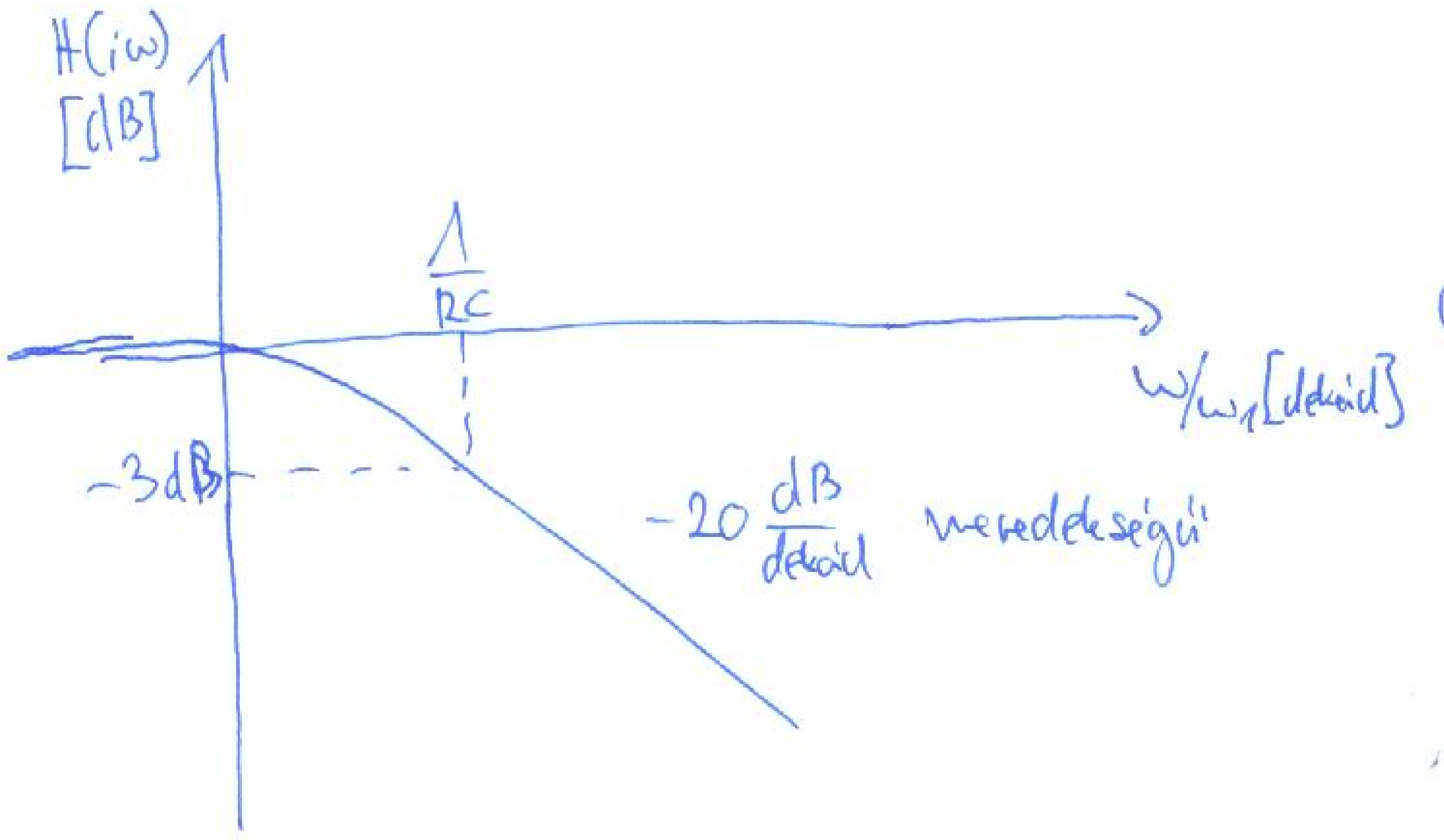
$H(-j\omega) = H^*(j\omega) \rightarrow$ tükörkép a valós tengelyre

- Ha $H(j\omega) = \dfrac{A + jBv(\omega)}{C + jDv(\omega)}$ alakú, vagyis v-ben lineáris törtfüggvénnyel leírható, akkor az átviteli karakterisztika Nyquist diagramja egy kör.
  $\hookrightarrow$ 3 pontjának számításából az egészt felrajzolható.

c) Bode diagram:

– Az átviteli karakterisztikát logaritmikus egységekben ábrázolva Bode-diagramnak hívjuk.

– az áttérés: $K = 10^{\frac{k}{20}}$ és $k = 20 \lg K$ mértékegység: decibel (dB)



ω – logaritmikus léptekben!

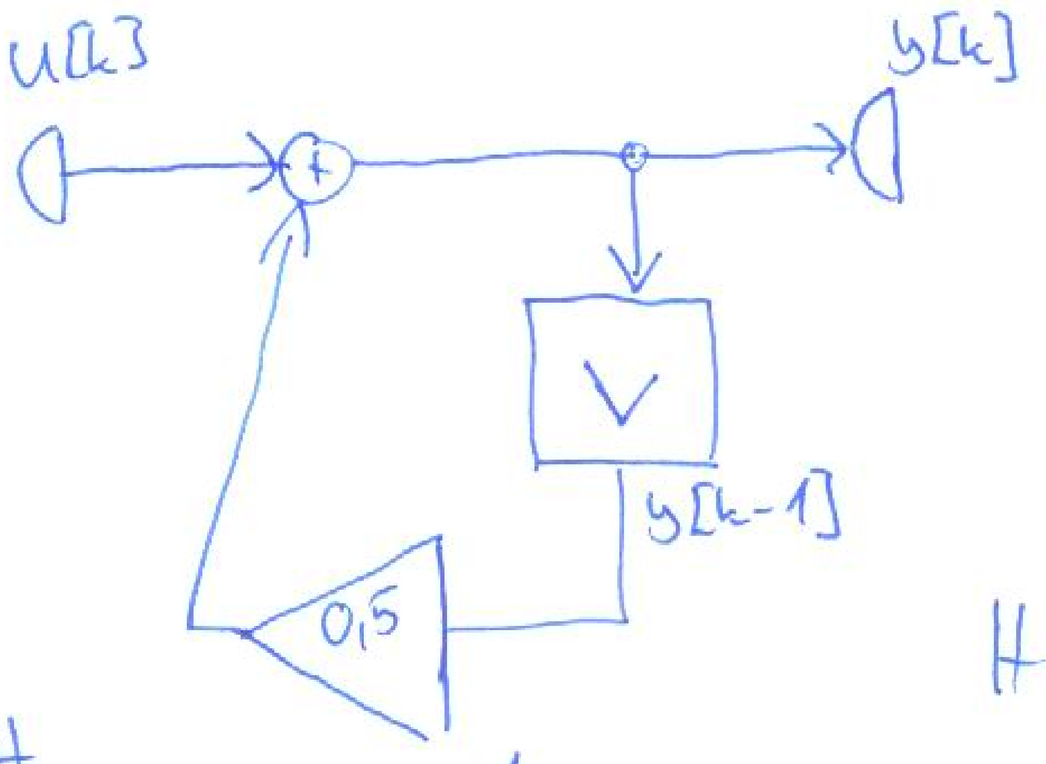
$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10 \longleftrightarrow \log \omega_2 - \log \omega_1 = 1$ dekád

– hasonlóan $\varphi(\omega)$-ra is!

II. Diszkrét eset:

– Adva van: $H(e^{i\vartheta})$ → $K(\vartheta)$: amplitúdó karakterisztika: ϑ: 2π periodikus függvénye és ϑ páros függvénye
→ $\varphi(\vartheta)$: fázis karakterisztika: 2π periodikus függvénye és ϑ páratlan függvénye.

– Például:



$$y[k] = 0{,}5\, y[k-1] + u[k]$$

$\Downarrow$ ← rendszeregyenlet

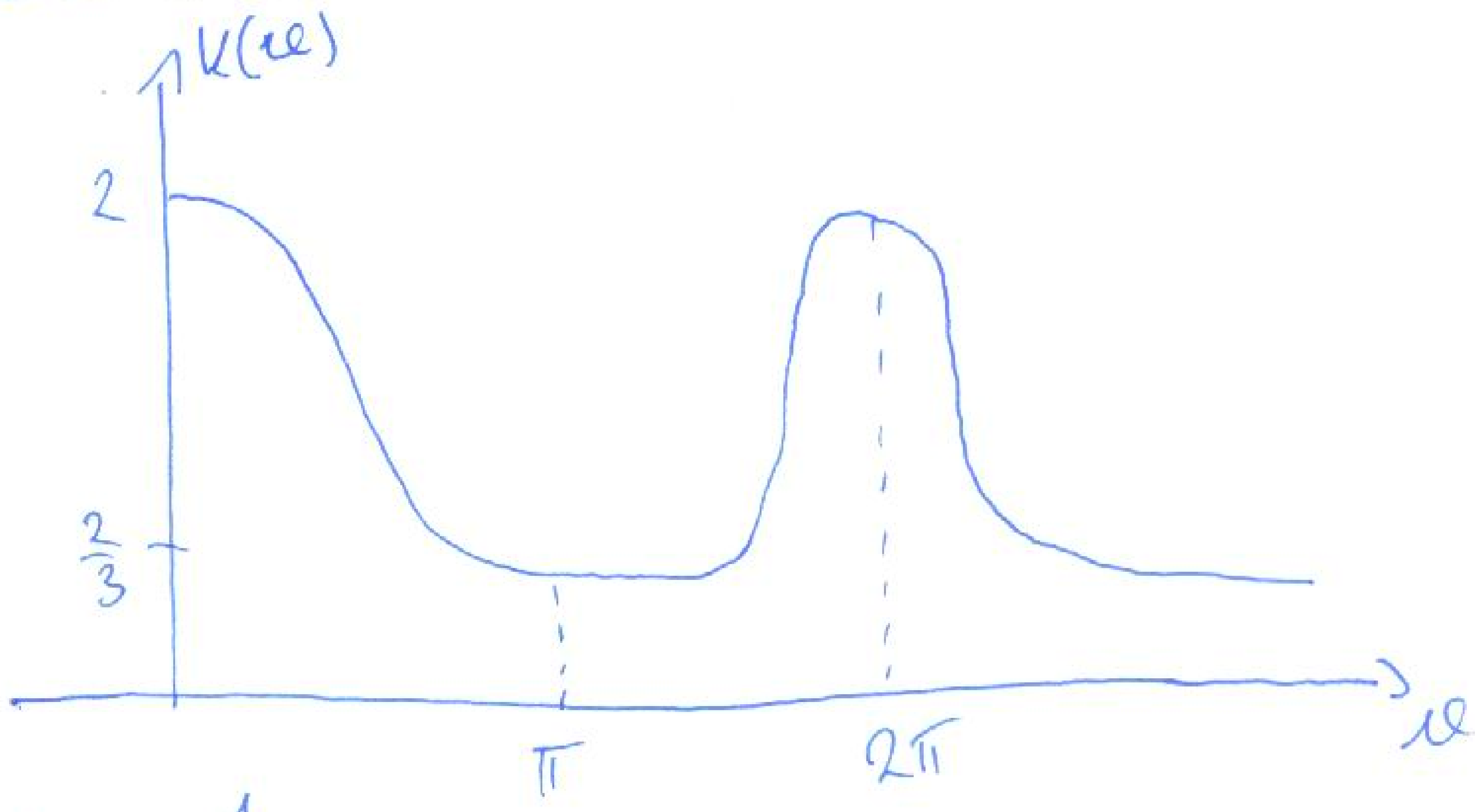
$$y[k] - 0{,}5\, y[k-1] = u[k]$$

$$H(e^{i\vartheta}) = \frac{1}{1 - 0{,}5 \cdot e^{-i\vartheta}} = \frac{1}{1 - 0{,}5\cos\vartheta + i\, 0{,}5 \sin\vartheta}$$

$$H(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + (0{,}5 \sin\vartheta)^2}} \quad (e^{-i\varphi(\vartheta)})$$

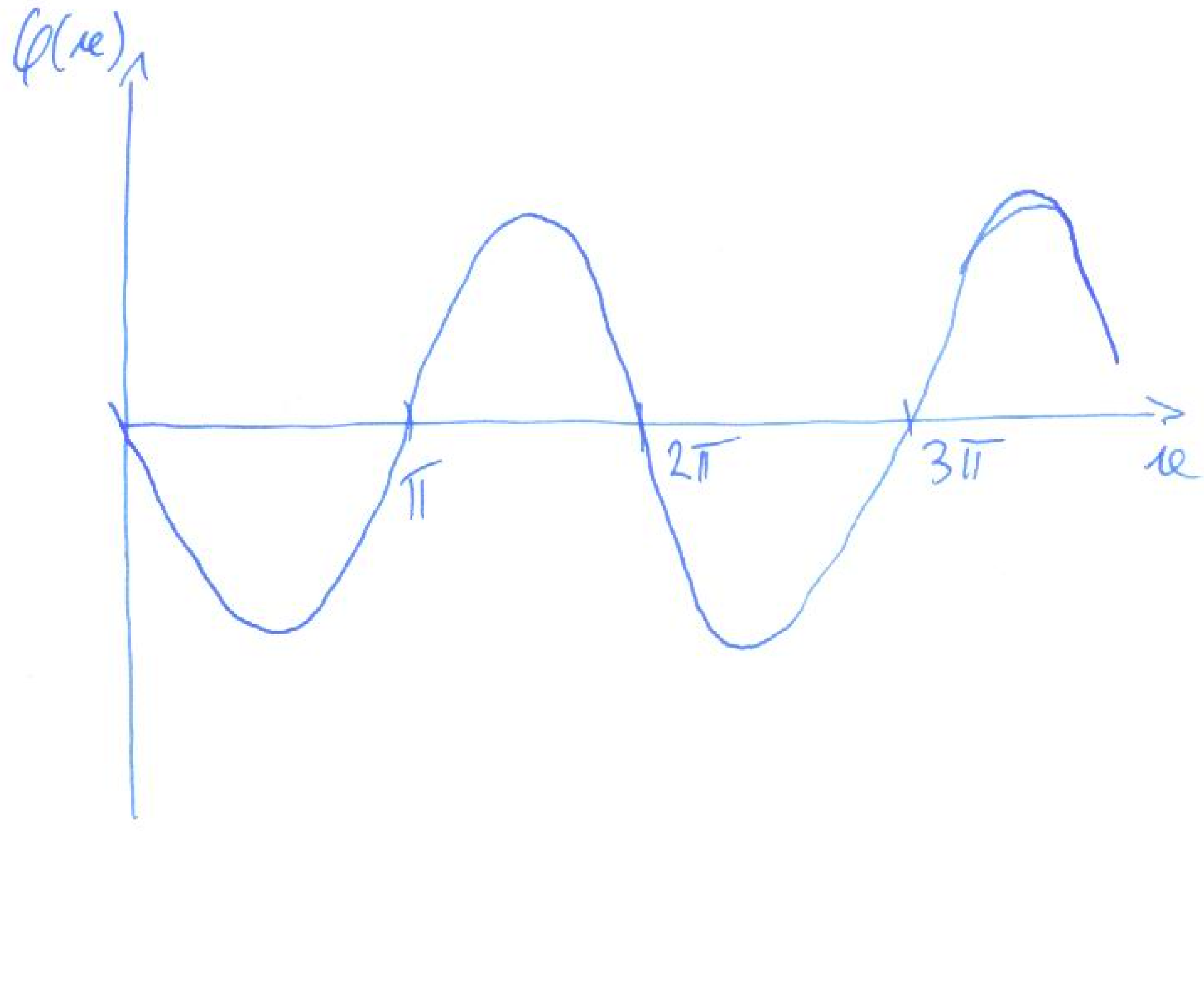
$$\varphi(\vartheta) = \operatorname{arctg} \frac{\sin\vartheta}{1 - 0{,}5\cos\vartheta}$$

a) Amplitúdó karakterisztika:



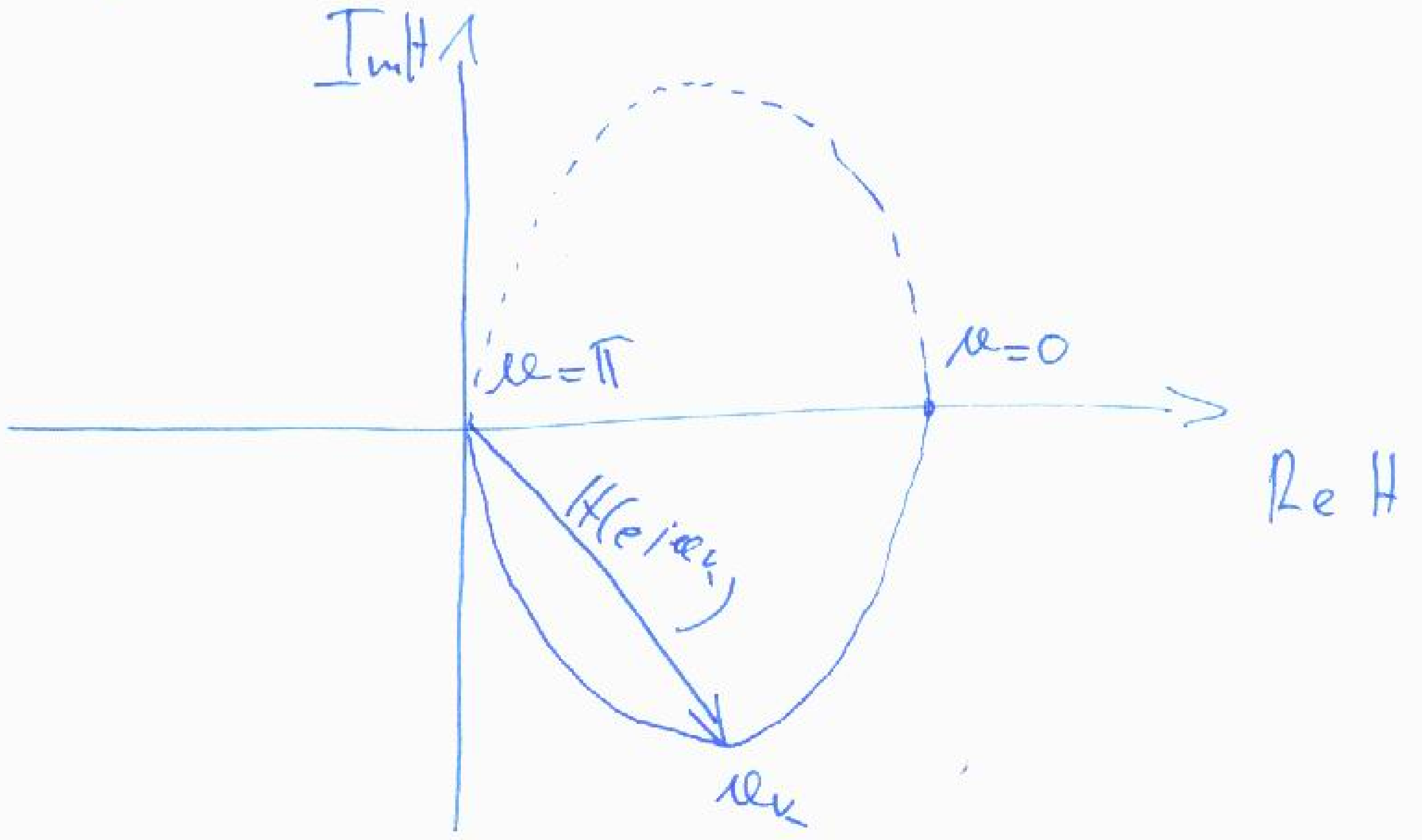
$$K(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1{,}25 - \cos\vartheta}}$$

b) Fázis karakterisztika:



c) Nyquist diagram

- Hasonlóan a folytonos időhöz
- $H(e^{j\vartheta})$ fazorjainak végpontját összekötő görbe:



H2 Ismertesse a folytonos idejű, lineáris, invariáns Kirchoff típusú hálózat fogalmát, elemi komponenseinek (csatolatlan és csatolt kétpólusok) karakterisztikáját az idő-, a frekvencia és a komplex frekvencia tartományában!

I. Kirchoff típusú hálózat fogalma:

a) Hálózat definíciója: - A hálózat egy absztrakció, melyet egy valóságos objektum modellezésére használunk.
- A hálózat komponensek összekapcsolásából áll.
- Minden komponenshez 1 vagy több változó van rendelve
- A változók közötti kapcsolatokat a komponensek és azok összekapcsolása (ök. kényszerek) határozzák meg.

b) Kirchoff hálózatok:

- Alapvető komponensei a kétpólusok
- Minden villamos kétpólushoz egy rajta átfolyó áram, és egy, a pólusai között fellépő elektromos feszültség van rendelve.
- A komponensek pólusai a hálózatok csomópontjaiban egyesíthetők
- Kirchoff hálózatokban az összekapcsolási kényszerek a Kirchoff törvények:

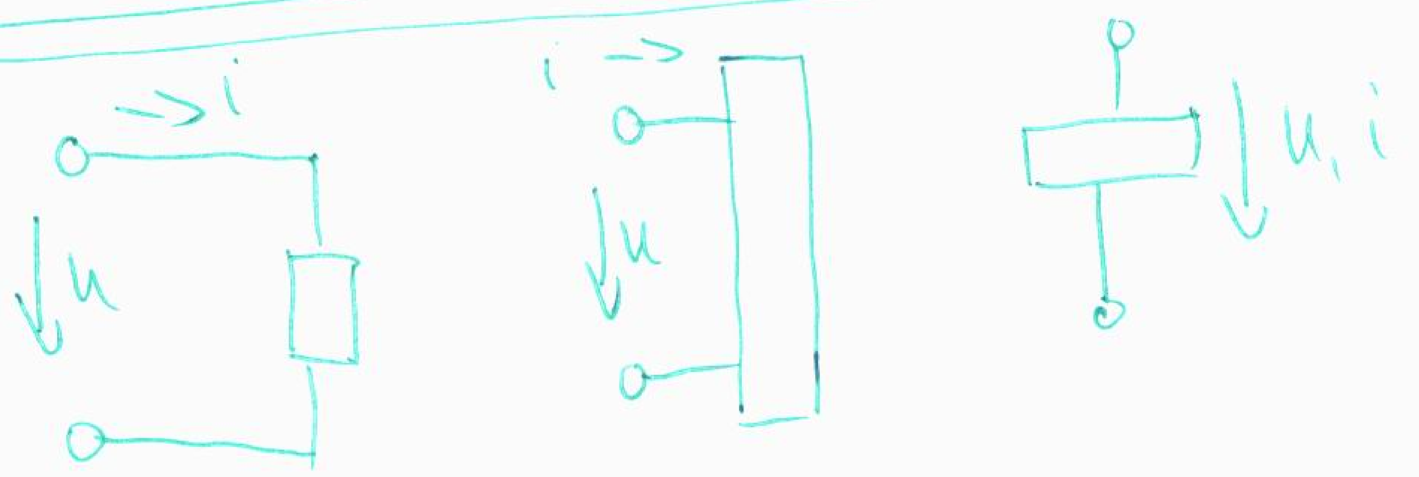
$\sum_k i_k = \emptyset$ zárt felület áramaira

$\sum_k u_k = \emptyset$ adott hurok mentén a hálózatban

c) Lineáris, invariáns hálózat: Olyan hálózat, mely lin. inv. komponensekből és forrásokból (nemlin.) áll.

II. Csatolatlan kétpólusok karakterisztikája:

a) jelölés:

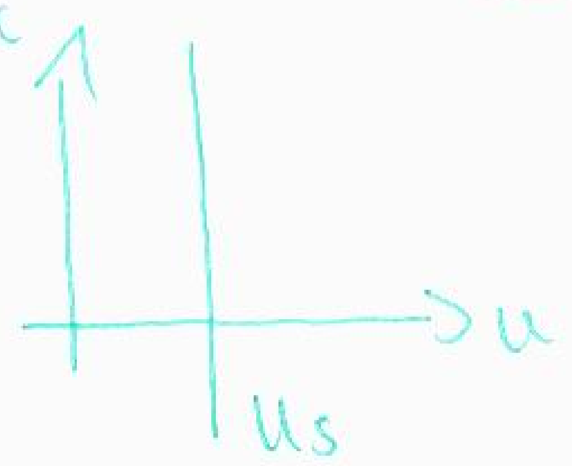


b) Explicit karakterisztika: A kétpólus feszültsége és árama közötti kapcsolatot fejezi ki: $u = \mathcal{U}\{i\}$ vagy $i = \mathcal{I}\{u\}$, ahol $\mathcal{U}$ vagy $\mathcal{I}$ egy operátor, amely az időtől is függhet.

c) Csoportosítás

1. Források:

=> Feszültség forrás : Definíció: A feszültség a két pólus között a rajta átfolyó áramtól független



Időtartomány	Freku. tart.	Kompl. freku.
$u(t) = U_s(t)$	$U = U_s(j\omega)$	$\cancel{I = I_s(s)}$ $U = U_s(s)$

=> Áramforrás : Az árama, a rajta levő feszültségtől független

Időtart	Frekvencia tart.	Kompl. freku.
$i(t) = I_s(t)$	$I = I_s(j\omega)$	$I = I_s(s)$

2. Lineáris ellenállás (rezisztív kétpólus)

$U = R \cdot i$ => $u \sim i$ arányos (Ohm törv.)

$G = \frac{1}{R}$ => konduktancia

freku., kompl. freku tartományban: $U = R \cdot I$

3. Rövidzár - szakadás

	idő	freku	k.freku
Rövidzár:	$u = 0$	$U = 0$	$U = 0$
Szakadás:	$i = 0$	$I = 0$	$I = 0$

4. Dinamikus komponensek (nem rezisztív)

=> Lineáris invariáns kondenzátor - C kapacitással

időtart.	freku. tart.	k. freku. tart.
$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$	$I_c(j\omega) = j\omega C \cdot U_c(j\omega)$	$I_c(s) = s \cdot C \cdot U_c(s)$

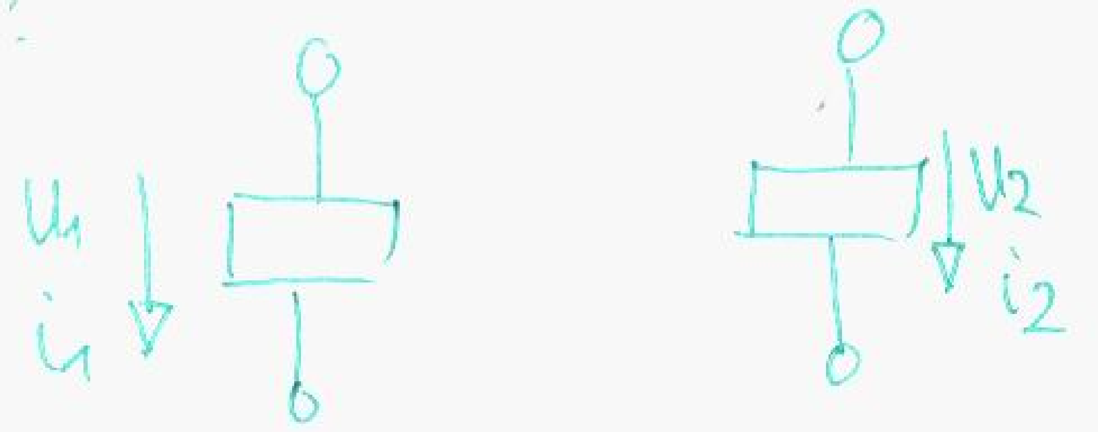
=> Lineáris invariáns tekercs

időt.	freku tart	kompl freku tart
$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$U_L(j\omega) = j\omega L \cdot I_L(j\omega)$	$U_L(s) = sL I_L(s)$

III. Csatolt kétpólusok karakterisztikája

a) Általános definíció

- A „modellezendő" objektum állhat ténylegesen 2 vagy több csatolt kétpólusból (ilyen a 2 vagy több tekercses transzformátor)
- Csatolás jelentése: mindegyik kétpólus feszültsége függ az összes többi áramától: $u_1 = U_1(i_1, i_2)$; $u_2 = U_2(i_1, i_2)$
- Általános alak:

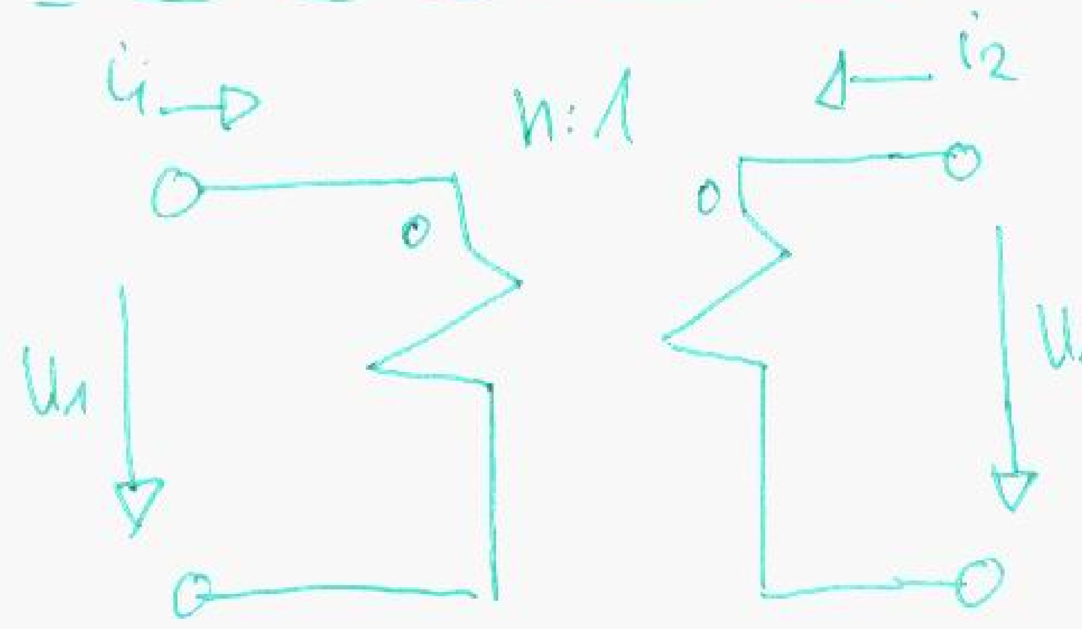


$$u_1 = R i_1 + A u_2$$
$$i_2 = B i_1 + G u_2$$

- Kirchoff törvényei (összekapcsolási kényszerek) ezekre is érvényesek!

b) Csoportosítás

1 Ideális transzformátor:



2 egyenlet: $u_1 = n \cdot u_2$
$i_2 = -n \cdot i_1$
↳ referenciairánnyal ellentétes

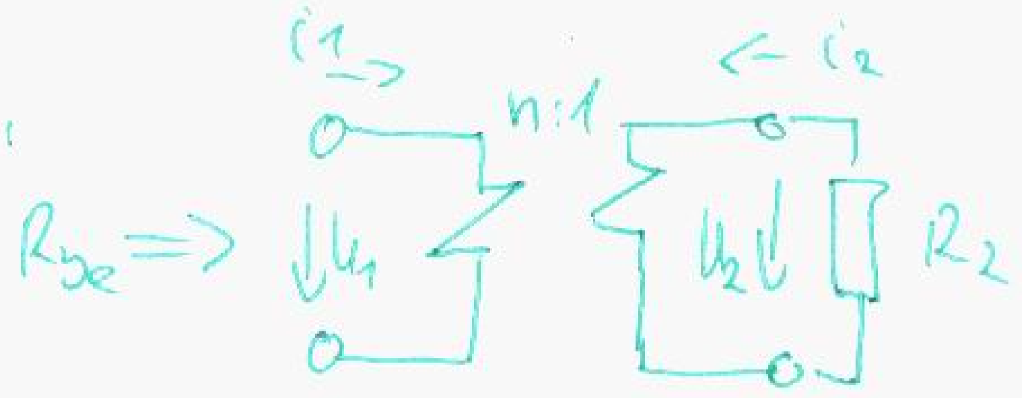
- ez egy valóságtól elvonatkoztatott modell (mert pl $f=0$-n is transzformál)
- tulajdonságok:

⇒ passzív: $p(t) \geq 0$ (- szüks. és elégs. feltétel)

Biz: $p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = n u_2 i_2 + u_2(-n i_1) = 0$

⇒ nonenergikus $p(t) \equiv \emptyset$ $\forall$ időpillanatban

⇒ R_{be} transzformálása:



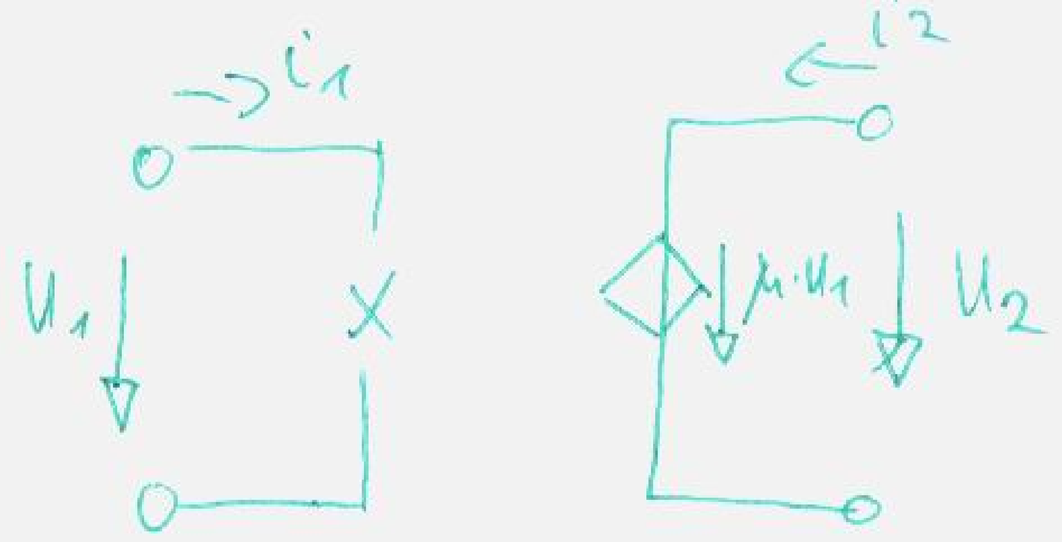
$$u_1 = n \cdot u_2 = n(-R_2 \underbrace{i_2}_{= -n \cdot i_1}) = n^2 R_2 i_1 \Rightarrow \boxed{R_{be} = n^2 R_2}$$

=> két pötty ∘ : arra vannak, hogy milyen referencia irány esetén érvényes a karakterisztika

2. Vezérelt források:

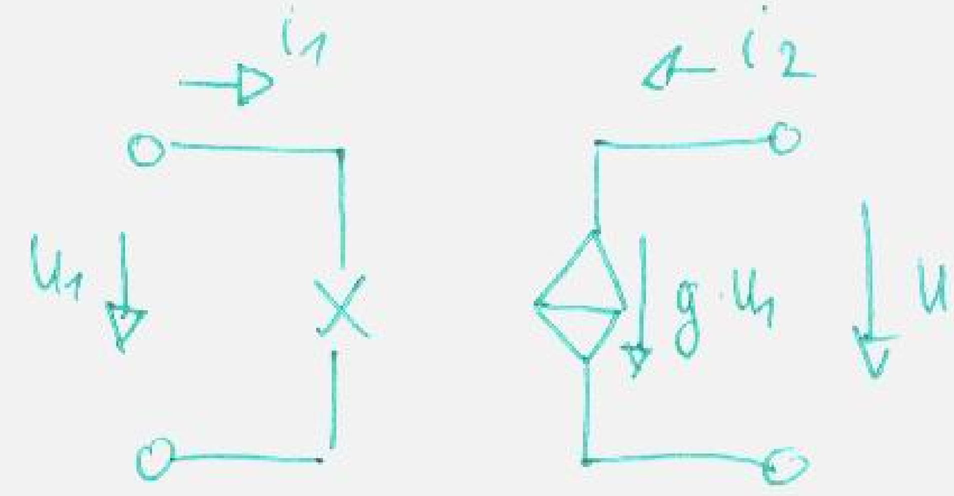
=> Feszültségvezérelt Feszültségforrás:

$i_1 = \emptyset$
$u_2 = \mu \cdot u_1$
μ - fesz. erősítési tényező



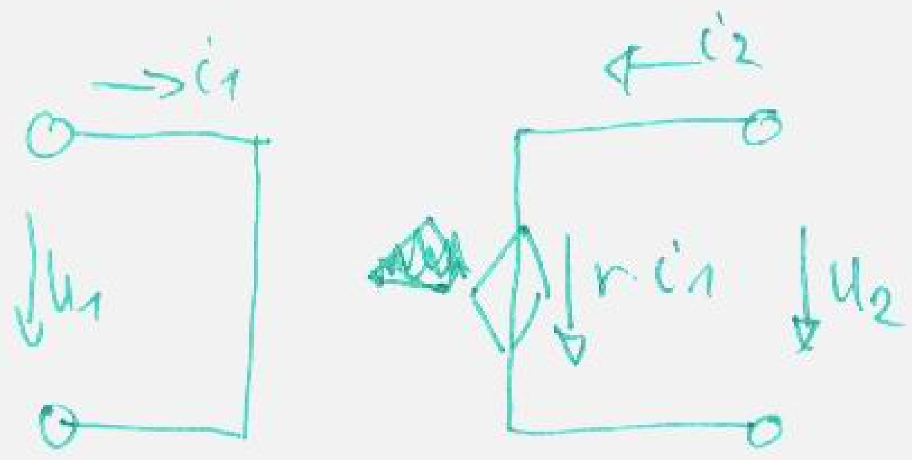
=> Feszültségvezérelt Áramforrás:

$i_1 = 0$
$i_2 = g \cdot u_1$
g - átviteli konduktancia



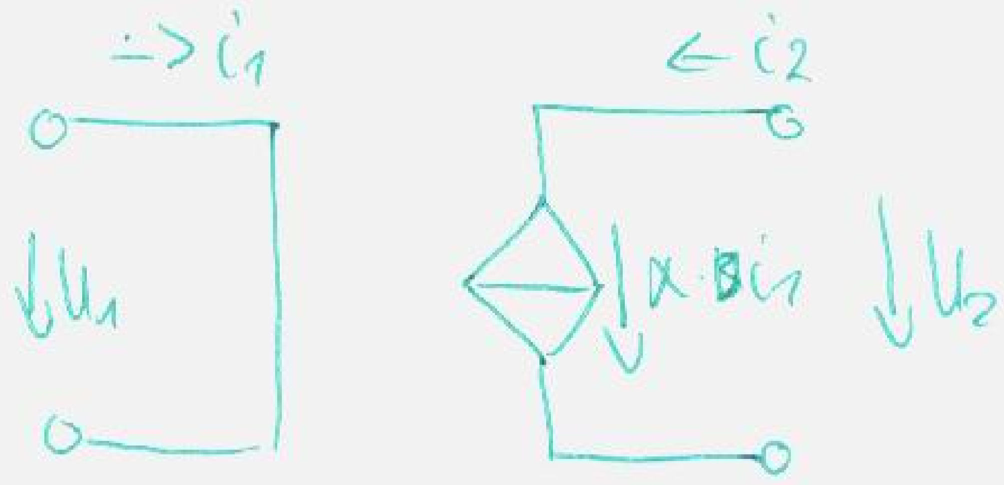
=> Áramvezérelt Feszültségforrás

$u_1 = 0$
$u_2 = r \cdot i_1$
r - átviteli rezisztencia



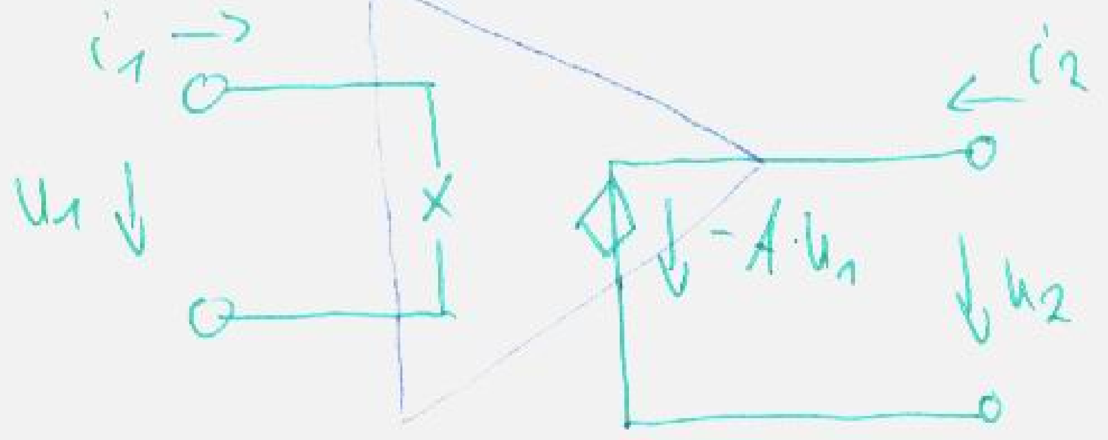
=> Áramvezérelt Áramforrás

$u_1 = 0$
$i_2 = \alpha \cdot i_1$
α - áramerősítési tényező

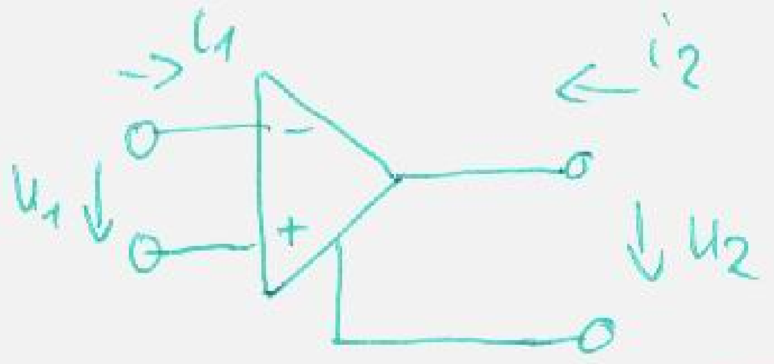


3. Ideális erősítő

- Műveleti erősítőből származik:



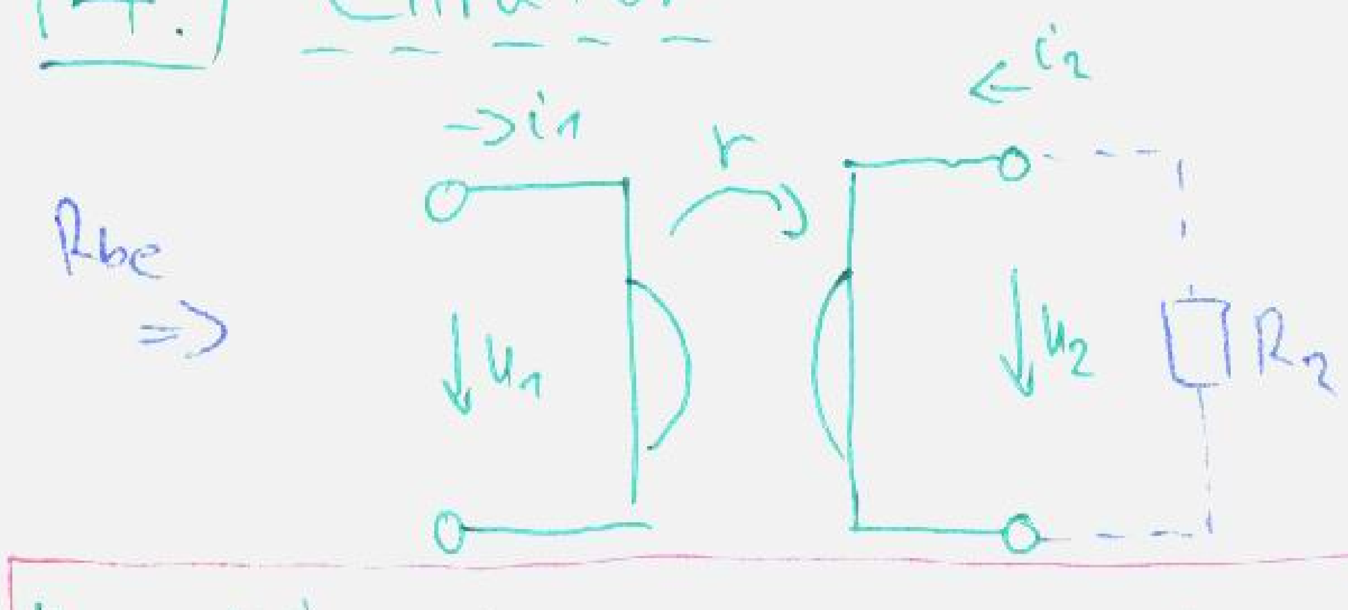
$\xrightarrow[A \to \infty]{}$



$u_1 = 0$
$i_1 = 0$

$i_1 = 0$
$u_2 = -A \cdot u_1 \Rightarrow u_1 = -\frac{u_2}{A}$

4. Girátor



$u_1 = -r \cdot i_2$; $u_2 = r \cdot i_1$; r: girációs rezisztencia

Tulajdonságok: - nonenergikus, passzív
- bemeneti ellenállás:

$u_1 = -r i_2 = -r\left(-\frac{u_2}{R_2}\right) = r \frac{r i_1}{R_2} = i_1 \cdot \frac{r^2}{R_2} \Rightarrow R_{be} = \frac{r^2}{R_2}$

$R_2 = \infty \Rightarrow R_{be} = \emptyset$

$R_2 = \emptyset \Rightarrow R_{be} = \infty$

(R11) Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli függvénye az állapotváltozós leírás ismeretében?

I. Folytonos időben:

- Az állapotváltozós leírás normál alakja: $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}u$
  $y = \underline{C}^T\underline{x} + Du$

- A hálózat átviteli függvénye: $H(s) = \dfrac{\text{a válasz Laplace transzformáltja}}{\text{a belépő gerjesztés Laplace transzformáltja}}$

- Az állapotváltozós leírás Laplace - transzformáltja:

$$s \cdot \underline{X}(s) - \underline{X}(-0) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{B}U(s)$$

$$Y(s) = \underline{C}^T\underline{X}(s) + DU(s)$$

- Az átviteli függvény csak akkor határozható meg könnyen, ha a hálózat energiamentes a $t=0$ időpillanatban. Ekkor $H(s) = \underline{C}^T[s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D$

II. Diszkrét időben:

- Az eljárás hasonló a folytonos idejű esethez
- Az állapotváltozós leírás normál alakja: $\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}u[k]$
  $y[k] = \underline{C}^T\underline{x}[k] + Du[k]$

- Ha $\underline{x}[0] = \underline{0} \Rightarrow H(z) = \dfrac{\text{a válasz } \mathcal{Z} \text{ transzformáltja}}{\text{a belépő gerjesztés } \mathcal{Z} \text{ transzformáltja}}$

- Az állapotváltozós leírás $\mathcal{Z}$ transzformáltja:

$$z \cdot \underline{X}(z) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(z) + \underline{B}U(z)$$

$$Y(z) = \underline{C}^T\underline{X}(z) + DU(z)$$

- Az átviteli függvény: $H(z) = \underline{C}^T[z \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B} + D$

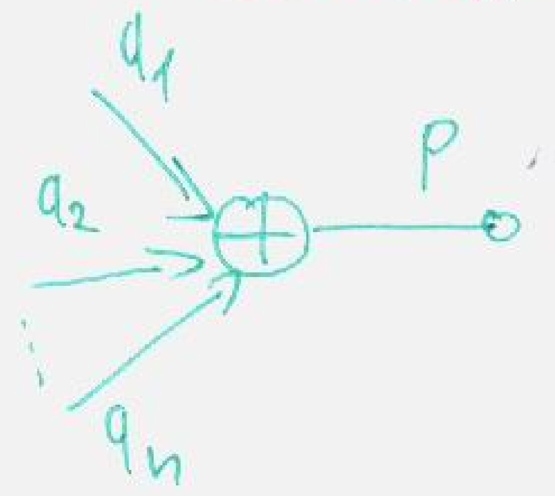
(H3) Ismertesse a jelfolyam típusú és a Kirchoff típ. hálózat összekapcs. szabályait és az összekapcsolási kényszereket kifejező egyenleteket! Illusztrálja 1-1 egyszerű példával ezek alkalmazását! Ismertesse Tellegen tételeit és kapcsolatát az energia megmaradásának elvével!

I. Jelfolyam típusú hálózat összekapcsolási szabályai:

- a hálózat komponensei csomópontokban egyesíthetők

a) Összegző csomópont: - tetszőleges számú kimenet és egy komponens bemenete egyesíthető

(Jel):

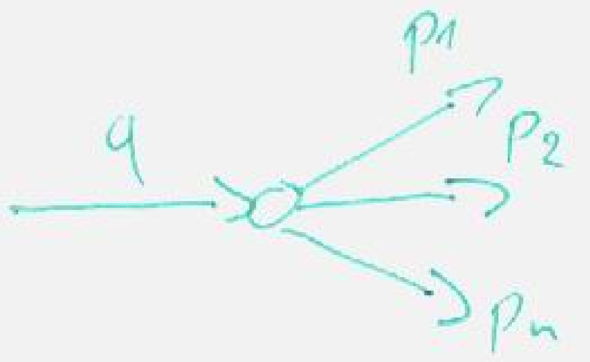


$p = q_1 + q_2 + \dots + q_n$

(hasonlóan frekv. és kompl. frekv. tartban)

b) Szétágazó csomópont: - egy komponens kimenete és tetszőleges számú bemenet egyesíthető

(Jel):



$p_1 = q$
$\vdots$
$p_n = q$

(hasonlóan frekv. és k. frekv. tartban)

Def 1: Jelfolyam típusú hálózatnak nevezzük az olyan típusú diszkrét idejű hálózatokat, melyek:

építőelemei: szorzó, késleltető, forrás, nyelő
összek. kényszerei: összegző, szétágazó csomópont

Def 2: A jelfolyam hálózat komponensek olyan összekapcsolása, amikor a pólusok csomópontokban vannak egyesítve

- Csak olyan pólusok egyesíthetők egy csomópontban, amelyek változói azonos jellegű fizikai mennyiségek (pl. mind feszültség)

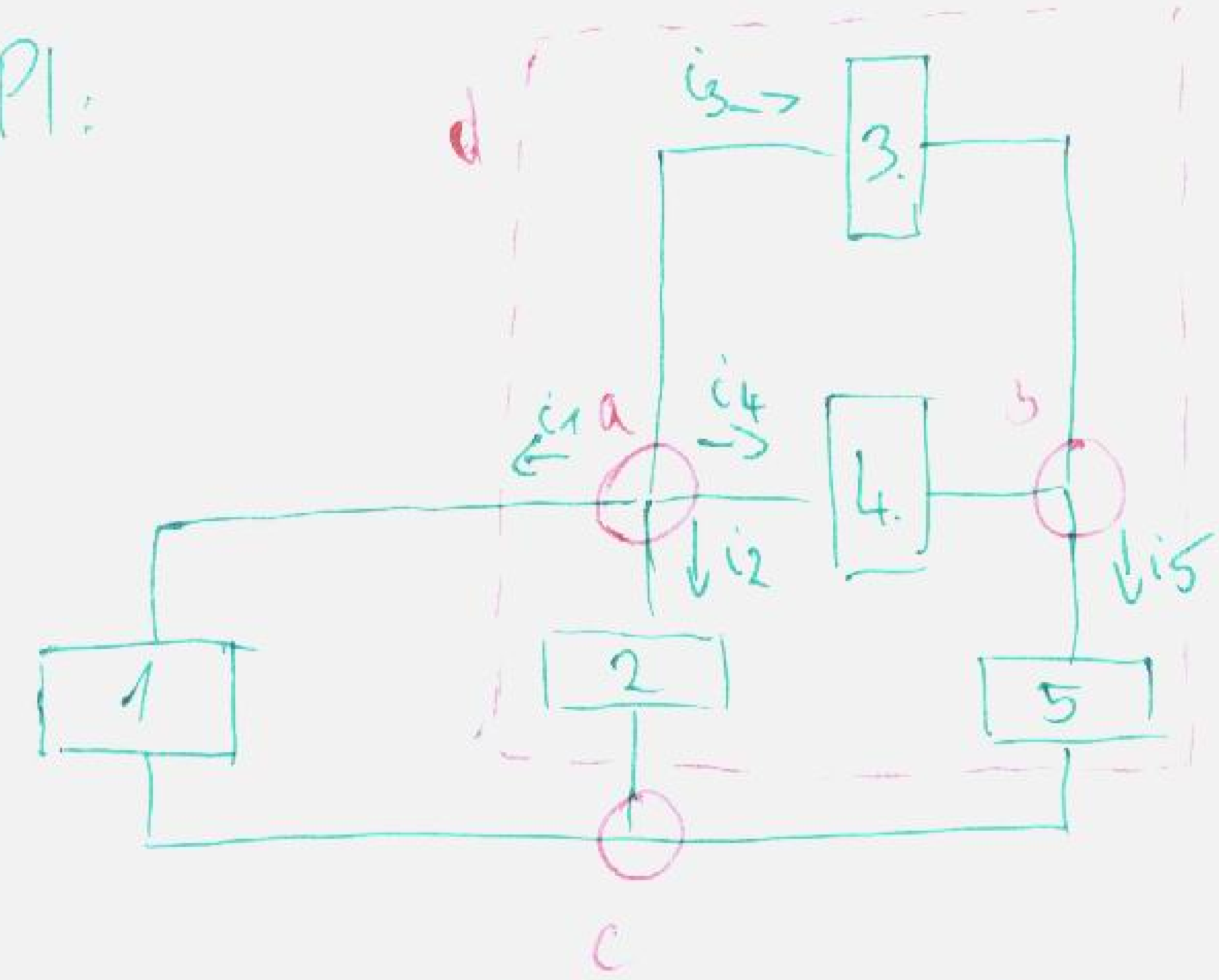
II. Kirchoff típusú hálózat összekapcsolási szabályai, ezek egyenletei

- Kirch. típusú hálózatokban az összekapcsolási kényszerek a Kirch. törvények

a) Kirchoff áramtörvénye: zárt felületre (illetve síkban zárt görbék) érvényes

$$\boxed{\sum_k i_k = \emptyset}$$

Pl:



Fontos: referencia irány = vonatkoztatási irány felvétele (áramirány)
- Ezután néhány zárt görbét kiválasztunk, és ezekre írjuk fel a KÁTV-t:

ⓐ $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$
ⓑ $-i_3 - i_4 + i_5 = 0$
ⓒ $-i_1 - i_2 - i_5 = 0$
ⓓ $i_1 + i_2 + i_5 = 0$

Kérdés: mely egyenletek függetlenek egymástól?
↳ ehhez fundamentális vágatrendszer meghatározása kell (lásd 4. tétel)

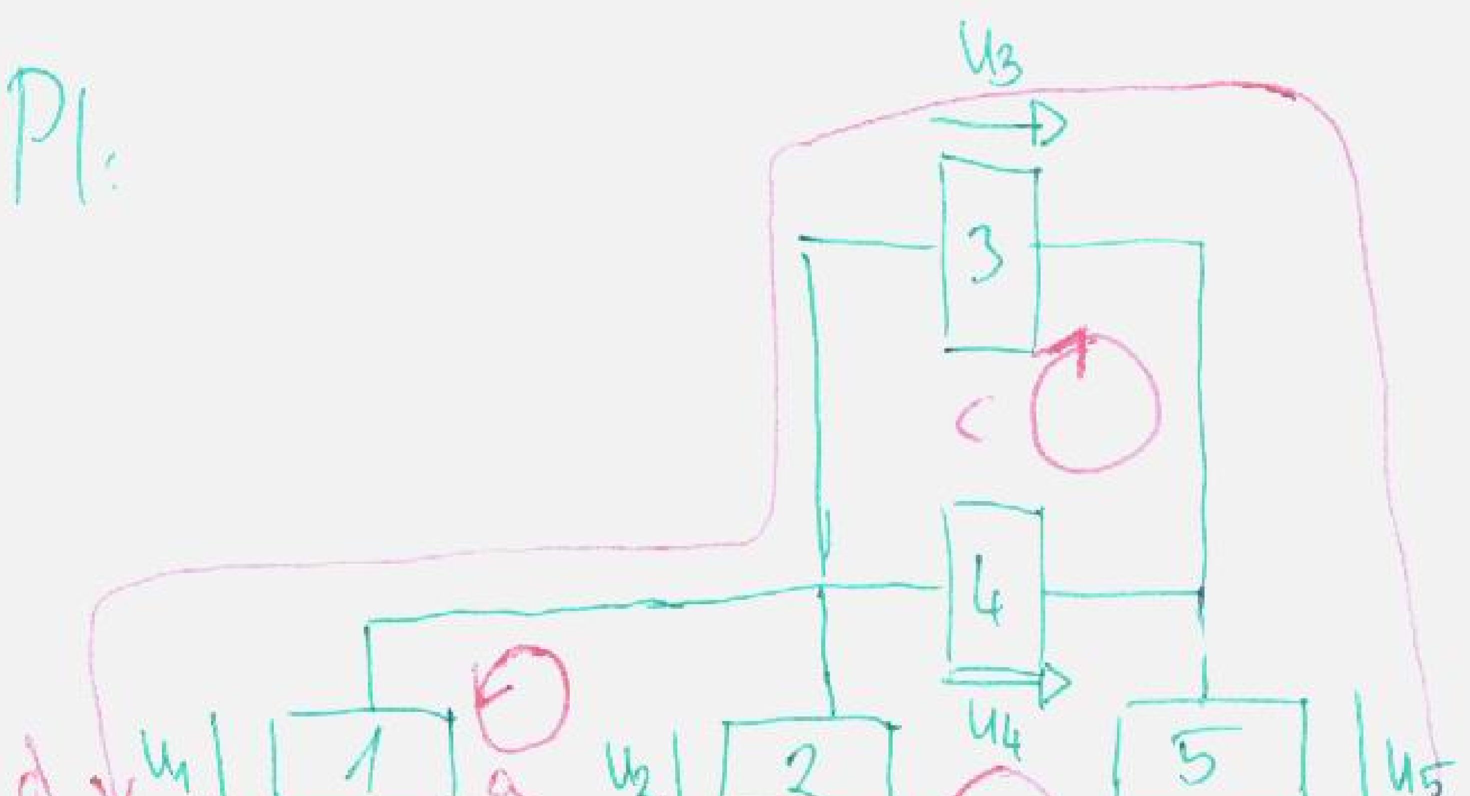
b) Kirchoff feszültségtörvénye: hurok: irányított zárt görbe

Def: 1-1 hurokra a feszültségek előjeles összegének nullának kell lennie.

$$\boxed{\sum_k u_k = \emptyset}$$

- Referencia irány és fesz. előjele } ⊕ ha a ref. val egyező a körüljárási ~~irány~~ ; ⊖ ha ellentétes

Pl:



ⓐ $u_1 - u_2 = 0$
ⓑ $-u_2 + u_4 + u_5 = 0$
ⓒ $u_3 - u_4 = 0$
ⓓ $u_1 - u_3 - u_5 = 0$

itt is a független egyenletek számát kell meghatározni

III. Tellegen tétele : A Kirchoff-hálózatok egy meglepően általános tétele

a) A tétel: Jelölje egy hálózat ágfeszültségeinek Kirchoff feszültség-törvényét kielégítő egy rendszerét $u_1', u_2', \dots u_b'$; ugyanezen hálózat ágáramainak KATv-~~t~~et kielégítő egy rendszerét $i_1'', i_2'' \dots i_b''$. Az u_k' és i_k'' feszültségek/áramok kapcsolatára nincs megkötés => nem feltétlenül tartoznak a hálózat egy adott gerjesztéséhez.

Az $u_k' \cdot i_k''$ teljesítmény dimenziójú mennyiségek összege $\forall$ időpillanatban $\emptyset$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} u_k' \cdot i_k'' = 0}$$

Ez akkor is igaz, ha a két hálózat különböző, csak a gráfjuk egyezik meg.

b) Kapcsolat az energiamegmaradással: Ha az áramok és feszültségek ugyanahhoz a hálózathoz tartoznak

- ha egy hálózat adott állapotát vizsgáljuk: $i_k \cdot u_k = P_k$ => a k. kétpólus teljesítménye

↳ Tellegen tétele értelmében : $\boxed{\sum_k P_k = \emptyset}$ ami a hálózatra vonatkozó energiamegmaradás következménye

- A kirchoff törvények biztosítják az energia megmaradását.

R10. Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszer átviteli függvényét! Hogyan számítható az adott gerjesztéshez tartozó válasz az átviteli függvény ismeretében? Illusztrálja egyszerű példával!

I. Folytonos idő:

1.) Az átviteli függvény értelmezése: komplex frekvencia tartomány beli rendszerjellemző függvény

- $H(s) = \dfrac{\text{a válasz Laplace transzformáltja (belépő)}}{\text{a belépő gerjesztés Laplace transzformáltja}} = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

- a belépő tulajdonságból következik: $i_L(-0) = \varnothing$ és $u_C(-0) = \varnothing$

- $H(s)$ létezik, ha a rendszer kauzális (a stabilitás nem feltétel)

2.) A válasz számítása $H(s)$ segítségével:

- adott a belépő $u(t)$ gerjesztés
- ~~adott~~ a válasz időfüggvénye (belépő lesz!): $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot U(s)\}$

↳ felismeréses inverz Laplace transzformációval.

3.) Átviteli függvény normál alakja (racionális átviteli függvény)

$$H(s) = \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n}$$

, $m \leq n$ reguláris hálózattal reprezentálható rendszerre.

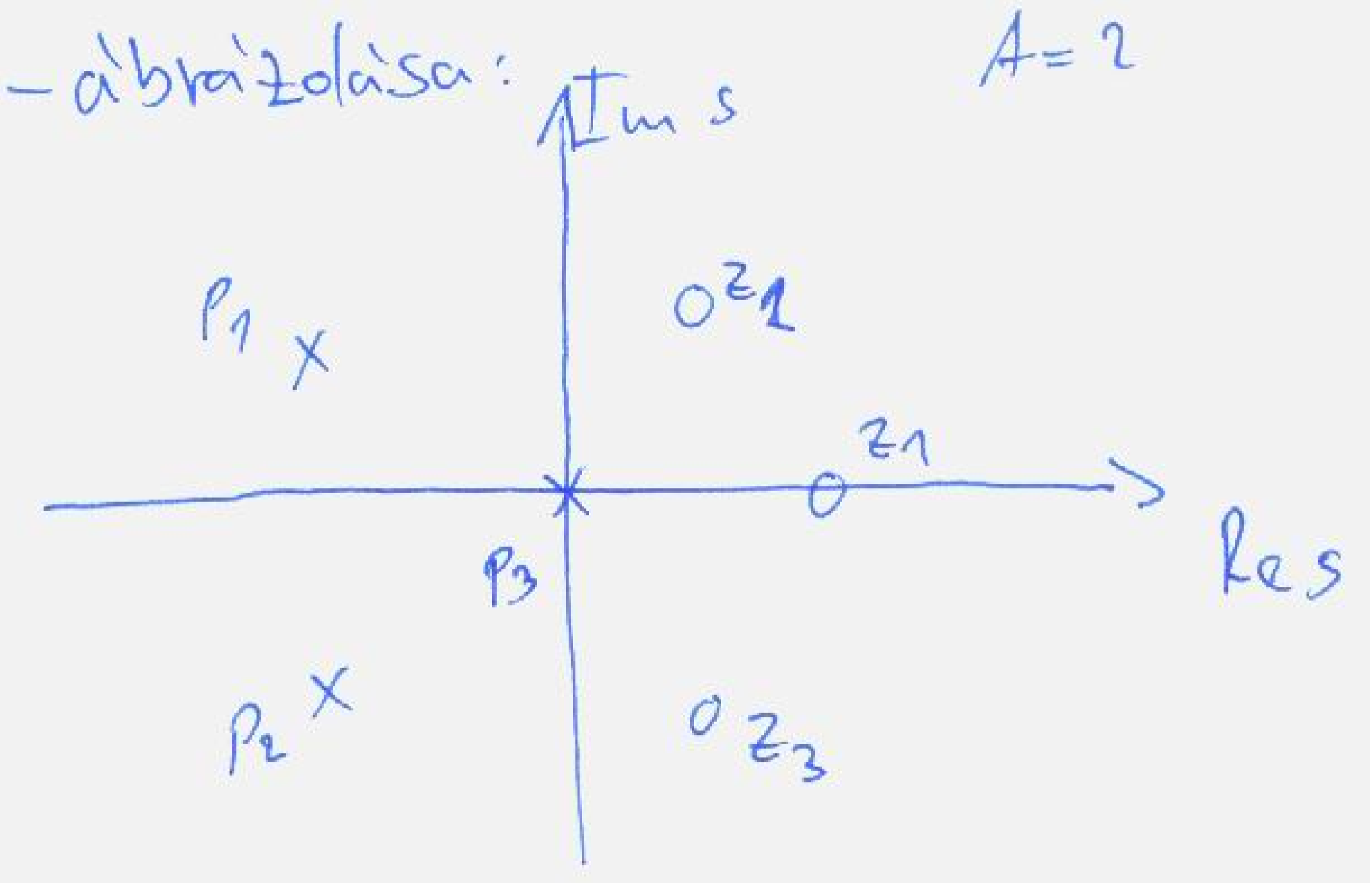
4.) Pólus – zérus elrendezés

$$H(s) = A \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

ahol z_i: zérusok
p_i: pólusok

- p–z elrendezés: egy konstans erejéig meghatározzuk az átviteli függvényt

- ábrázolása: $A = 2$



- stabilitás eldöntése: stabil, ha a pólusok csak a bal félsíkon helyezkednek el.

II. Diszkrét idő

1.) Átviteli függvény értelmezése: - komplex frekvenciatartomány beli rendszerjellemző függvény

- lineáris, invariáns, kauzális rendszerekre, ahol a gerjesztés belépő:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

(a $\mathcal{Z}$ transzformáció a $k<0$ időpontokat figyelmen kívül hagyja, $\emptyset$-nak tekinti!)

2.) Válasz számítása H(z) segítségével:

- csak belépő gerjesztéshez tartozó választ tudunk $H(z)$-vel számolni (de a rendszer nem feltétlenül stabil)

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)\,\mathcal{Z}\{u[k]\}\right\}$$

3.) H(z) racionális függvénye:

- Általában ez fennáll;
- Általános alak:

$$H(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}$$

4.) Pólus-zérus elrendezés:

$$H(z) = b_0 \frac{(z-s_1)(z-s_2)\ldots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_n)}$$

- hasonlóan, mint folytonos időben
- stabilitás: $|q_i| < 1 \Rightarrow$ GV stabil (szükséges és elégséges feltétel)

5.) Y(z) számítása:

- $Y(z) = H(z) \cdot U(z)$
- ez a diszkrét konvolúcióból is kiadódik: $y[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = h[k] * u[k]$

- $\mathcal{Z}$ transzformálva: $\boxed{Y(z) = H(z) \cdot U(z)}$

(H4.) Mit jelent, és hogyan állítható elő a jelfolyam típusú és a kirchoff típ. hálózat egyenleteinek egy teljes rendszere az idő, a frekvencia és a komplex frekv. tartományban? Illusztrálja 1-1 példával!

I. Jelfolyam típusú hálózat (diszkrét)

1.) Időtartományban a hálózat egyenletek teljes rendszere:

a) Ismeretlenek: a bemeneti és a kimeneti változók számainak összege:

ha a források: N_u ; nyelők: N_y ; erősítők: N_k ; késleltetők N_D

bemeneti változók száma: $N_y + N_k + N_D$

kimeneti változók száma: $N_u + N_k + N_D$

↳ Összes változók száma: $N_u + N_y + 2(N_D + N_k)$ → ennyi db egyenlet kell!

b) Egyenletek:

→: minden komponensre értelmezett egy karakterisztika:

$q_{u,i} = u_i$; $p_{y,i} = y_i$; $q_{k,i} = K_i p_{k,i}$; $p_{D,i} = p_{D,i}^{(1)}$

↳ $N_u + N_y + N_k + N_D$ számú karakterisztika ⇒ ugyanennyi egyenlet

→: összekapcsolási kényszerekhez tartozó egyenletek:

- összegző csomópont: mindegyikhez 1 lineáris komponens bemeneti változója tartozik
- szétágazó csomópont: mindegyikhez 1 lin. komponens kimeneti változója tartozik.

> összekapcsolási kényszereket kifejező egyenletek száma ≡ ≡ lineáris komponensek száma ≡ $N_k + N_D$ (erősítők + késleltetők)

⇒: $N_u + N_y + N_k + N_D + N_k + N_D = N_u + N_y + 2N_k + 2N_D$ db egyenlet van, ez egyenlő az ismeretlenek számával!

↳ ez a hálózategyenletek teljes rendszere, amely így jó eséllyel megoldható.

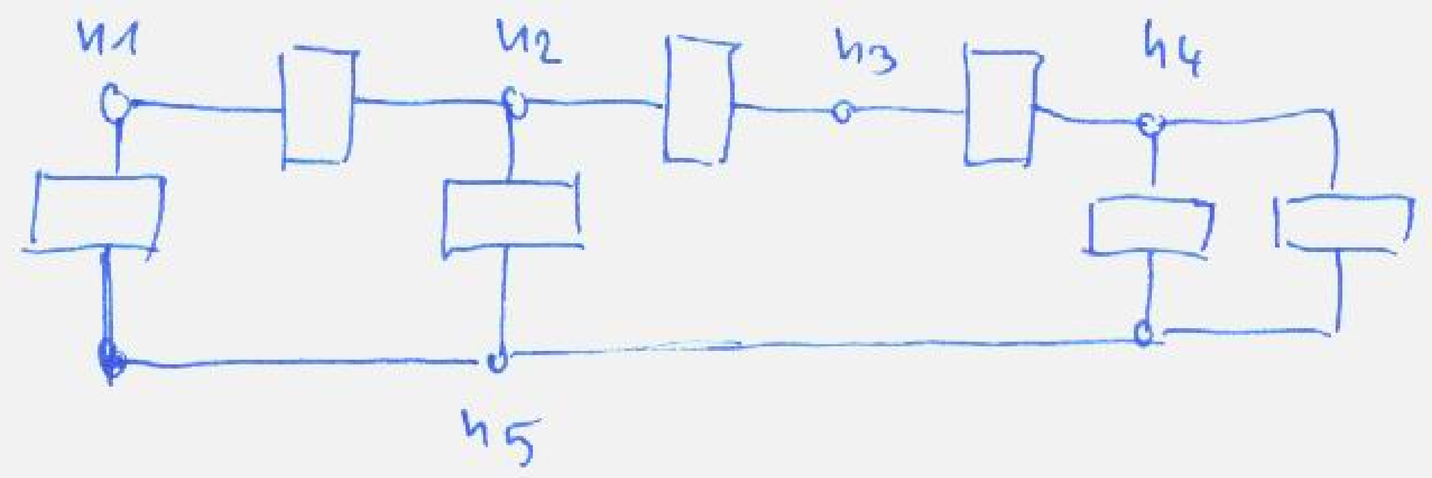
– Gyakorlatban: a teljes rendszert sosem írjuk fel, csak számítógépes megoldások esetén.

2.3. Frekvencia és komplex frekvencia tartomány:

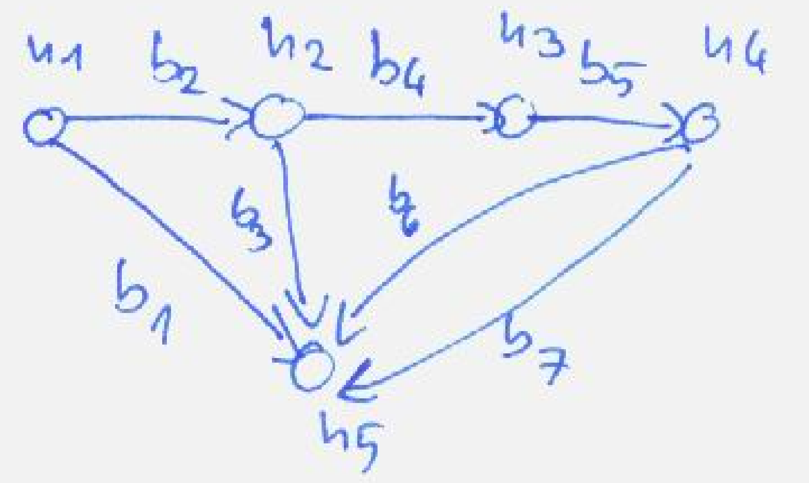
A rendszer egyszerűsödik -> olyan rendszert kapunk, amelyben csak szorzók vannak és késleltetők nem! -> de a teljes rendszerhez hasonló!

II. Kirchoff típusú hálózatok teljes rendszere:

egy hálózat és a hozzá tartozó gráf:



=>



-> A Kirchoff egyenletek fundamentális rendszere: $(r+m=b)$ + karakterisztikák összessége

(a) $\sum_k i_k = \emptyset$ $\quad r = n-1$ (n a csomópontok száma), fundamentális vágatra (ez a gráf rangja is!). r db egyenlet

b) $\sum_k u_k = \emptyset$ $\quad m = b - \underbrace{(n-1)}_{r}$ db független feszültségtörvény írható fel ahol b: ágak száma. Ez épp a fundamentális hurkok száma.

c) karakterisztikák száma = ágak száma = b

> 2b db ismeretlen (u-k és i-k)

-> b db a)ból és b)ből
-> b db c)ből

} 2b db egyenlet = 2b db ismeretlen

→ Megoldhatóság:

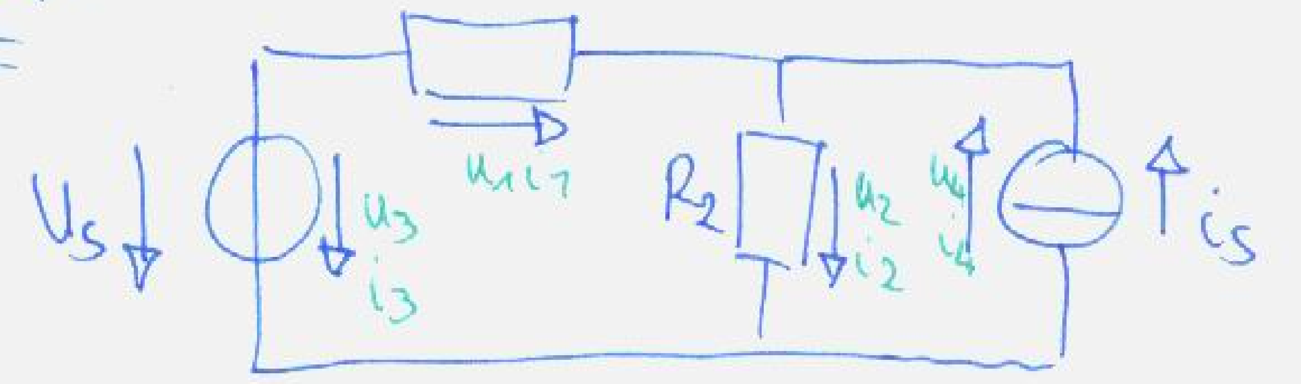
- karakterisztikák egymástól függetlenek
- összekapcsolási kényszerek (helyesen felírva) egymástól függetlenek

→ de a 2 egyenletrendszer nem feltétlenül független (pl modellezési hiba esetén)

↳ Reguláris hálózat: a helyesen felírt hálózategyenletek megoldásával a hálózat minden u-ja és i-je kiszámítható.

→ Lineáris hálózat: megoldása egyértelmű

Példa:



A teljes rendszer:

Áramtörvények: $i_1+i_3=0$; $-i_1+i_2-i_4=0$

Fesz. törvények: $u_1+u_2-u_3=0$; $u_2+u_4=0$

Karakterisztikák: $u_1=R_1 \cdot i_1$ $\quad u_3=U_s$

$u_2=R_2\, i_2$ $\quad i_4=i_s$

Komplex frekvencia és frekvencia tartomány:

Hasonlóan, csak a Fourier vagy Laplace transzformált függvényekkel számolva. $s \Rightarrow j\omega$ áttérés, ha a hálózat stabilis.

(R12) Értelmezze a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű lineáris invariáns rendszer gerjesztés-válasz stabilitásának fogalmát, adja meg teljesülésének feltételeit! Mely feltételek szükségesek, melyek elégségesek?

I. Folytonos eset

1.) Gerjesztés-válasz stabilitás fogalma (rendszerfogalom!)

- A lineáris, invariáns rendszer gerjesztés-válasz stabilis (GV stab), ha bármilyen korlátos gerjesztéshez tartozó válasz is korlátos.
- ha a lineáris, invariáns rendszer nem GV stabilis, de bármely korlátos és idő-korlátozott ($t \in [t_1, t_2]$-n kívül a gerjesztés $\emptyset$) gerjesztéshez tartozó válasz korlátos, akkor a rendszer a GV stabilis határhelyzetben van
- egyébként GV-labilis.

2.) GV stabilitás feltétele, vizsgálati lehetőségei:

a) impulzusválasz alapján:

- tekintsük ismertnek $h(t)$-t
- GV stabilis akkor és csak akkor, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ← szükséges és elégséges feltétel. ehhez szükséges feltétel: $h(t) \to 0$, ha $t \to \infty$

b) állapotváltozós leírás alapján:

- itt az asztimptotikus stabilitást látjuk be, akkor a rendszer GV stabilis is (ez mindig igaz!)
- λ_i: a rendszermátrix sajátértékei: asztimptotikusan stabilis, ha $Re\{\lambda_i\} < 0$. ez elégséges feltétel

c) $H(s)$ alapján:

- Ha minden p_i pólusa a bal félsíkon van $\to Re\{p_i\} < \emptyset$

d) $H(j\omega)$-ból:

- Általánosan a $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$ alapján dönthető el.

- Ha egy rendszer nem GV stabilis, akkor csak fenntartásokkal fogadható el egy lineáris objektum modelljének.

II. Diszkrét eset

1.) GV stabilitás fogalma

- lásd folytonos eset!

2.) GV stabilitás feltételei, vizsgálati lehetőségei:

a) impulzusválasz alapján:

- GV stabilis akkor és csak akkor, ha $h[k]$ abszolút összegezhető:
  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Ez szükséges és elégséges feltétel.
  ↳ ehhez szükséges feltétel: $h[k] \to 0$, ha $k \to \infty$
- ha $h[k]$ belépő és exponenciálisan tart Ø-hoz, akkor ez is elégséges feltétel a GV stabilitáshoz.

b) rendszeregyenletből:

- Ha a rendszeregyenlet minden sajátértéke: $|\lambda_i| < 1$, akkor biztosan GV stabilis
  ↳ ez szükséges feltétel

c) állapotváltozós leírásból

- Ha $\underline{\underline{A}}$ rendszermátrix sajátértékei: $|\lambda_i| < 1$, akkor aszimptotikusan stabilis, tehát GV stabilis is. Ez szükséges feltétel.

d) $H(z)$-ből:

- pi pólusai az egység sugarú körön belül vannak, akkor GV stabilis.

e) közvetlenül a hálózatból:

- csak speciális esetekben dönthető el így
- ha nincs a hálózatban visszacsatolás, akkor FIR (véges impulzusválaszú) típusú rendszer, akkor biztosan aszimptotikusan stabilis, tehát GV stabilis is.

(H5) Mit jelent, és hogyan állítható elő a jelfolyam típusú és a Kirchoff típusú hálózat egyenleteinek egy redukált rendszere az idő-, a frekvencia és a kompl. frekv. tartományban? Illusztrálja 1-1 egyszerű példával!

I.) A redukálásról általánosan:

Ha az adott hálózatba nem írjuk fel külön-külön az összekapcsolási kényszereket és a karakterisztikák egyenleteit, hanem a karakterisztikákat behelyettesítjük az összekapcsolási kényszerekbe, akkor megkapjuk a hálózati egyenletek redukált alakját. (b számú egyenlet)

II. Kirchoff típusú hálózatok egyenleteinek redukált rendszere.

a) Alapfeladat: - A hálózatszámítás alapfeladatai: meghatározandóak bizonyos u-k és i-k, ha a forrásmennyiségek és a rezisztenciák adottak.

- Megoldás: hálózat egyenletek teljes rendszerének segítségével (2b db egyenlet)

  $\hookrightarrow$ egyértelmű megoldás (kivéve: elfajuló esetek)

b) Redukálás: - Gyakorlatban: csak a redukált rendszert írjuk fel (max b db egyenlet), és ezt oldjuk meg.

- Fontos: ismeretlenek és egyenletek száma megegyezzék!

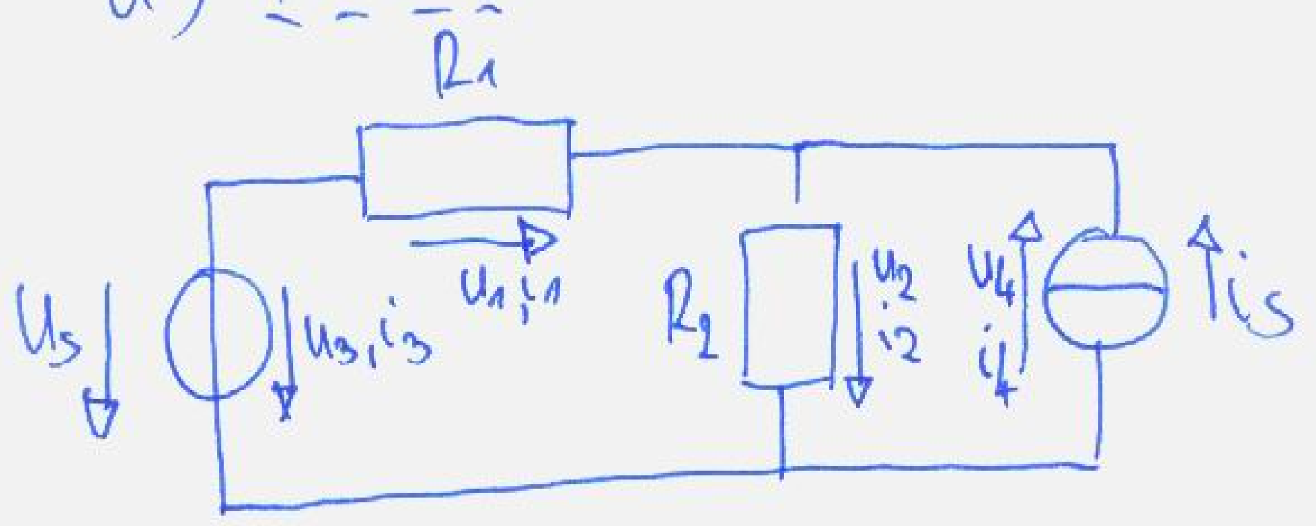
- Redukált rendszer előállítása: felírjuk az összekapcsolási kényszereket kifejező egyenleteket úgy, hogy mindjárt behelyettesítjük minden komponens karakterisztikáját.

c) Speciális módszerek a redukálásra:

-> Csomóponti potenciálok módszere

-> Hurokáramok módszere

d) Példa



Teljes ~~...~~ rendszer:

Áramtörv.	Fesz. törv.	Karakterisztikák:
$i_1 + i_3 = 0$	$u_1 + u_2 - u_3 = 0$	$u_1 = R_1 i_1$ $\quad u_3 = u_s$
$-i_1 + i_2 - i_4 = 0$	$u_2 + u_4 = 0$	$u_2 = R_2 i_2$ $\quad i_4 = i_s$

Redukált hálózategyenletek:

$$-i_1 + \frac{1}{R_2} u_2 - i_s = 0 \quad ; \quad R_1 i_1 + u_2 - u_s = 0$$

itt az ismeretlenek az i_1, u_2. Ezeket kiszámolva a többi is megadható.

III. Jelfolyam típusú (diszkrét) hálózat redukált rendszere:

- Itt is az 1. pontban említett általános eljárást kell követni.
- Erre alkalmas módszerek → állapotváltozós leírás
  ↘ rendszeregyenlet előállítása (lásd: H6, H7)

→ A fentebb tárgyalt módszereknél a frekvencia és komplex frekvencia tartományban csak a komponensek karakterisztikájában van eltérés.

R13. Értelmezze a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű lineáris invariáns rendszer aszimptotikus stabilitásának fogalmát, adja meg teljesülésének feltételeit! Mely feltételek szükségesek, melyek elégségesek?

I. Folytonos idő

- Egy lineáris, invariáns rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a $t = 0$ időponttól a rendszer minden állapotváltozója 0-hoz tart bármilyen gerjesztetlen (magára hagyott) kezdeti állapot esetén.
- Az aszimptotikusan stabil rendszer GV stabilis is (fordítva nem igaz!)
- A hálózat az aszimptotikus stabilitás határhelyzetében van, ha a magára hagyott rendszer minden állapotváltozója korlátos marad tetszőleges kezdeti állapot esetén.
- A GV stabilitás az aszimptotikus stabilitás szükséges, de nem elégséges feltétele.
- Egy rendszer aszimptotikusan stabilis, ha az összes sajátértéke negatív valós részű: $Re\{\lambda_i\} < 0$ -> ez szükséges és elégséges feltétel
- Ha a rendszermátrixnak nincs a jobb komplex félsíkra eső sajátértéke, és a képzetes tengelyre eső sajátértékei egyszeresek, a rendszer az aszimptotikus stabilitás határhelyzetében van.
- Minden más esetben a rendszer aszimptotikusan labilis.
- Ha csak passzív elemek vannak a hálózatban, akkor a hálózat vagy aszimptotikusan stabilis, vagy határhelyzetben van.

II. Diszkrét idő

- Egy diszkrét idejű rendszer aszimptotikusan stabilis, ha minden állapotváltozója bármely kezdeti állapot esetén 0-hoz tart a k diszkrét idő növelésével.
- A GV stabilitás szükséges, de nem elégséges feltétele az aszimptotikus stabilitásnak.
- Az aszimptotikus stabilitás elégséges feltétele: $|\lambda_i| < 1$, vagyis a komplex számsíkon az egységkörön belül vannak.
- Aszimptotikus stabilitás határhelyzete: nincs az egységkörön kívül sajátérték és a körön csak egyszeres sajátértékek vannak.

(H6) Hogyan állítható elő egy diszkrét idejű, jelfolyam típusú, illetve egy folytonos idejű, Kirchoff típusú hálózat állapotváltozós leírása? + 1-1 egyszerű példa

I. Diszkrét jelfolyam típusú rendszer állapotváltozós leírásának előállítása:

a) Állapotváltozó definíciója:

Állapotváltozóknak nevezzük a hálózat változóinak olyan minimális halmazát, amely az alábbi tulajdonságokkal bír:

- az állapotváltozók és a gerjesztés k-adik ütembeli értékéből meghatározhatók:
  - -> állapotváltozók k+1 ütembeli értéke
  - -> a válasz k-adik ütembeli értéke

b) Állapotváltozó megválasztása:

Mi a késleltetők kimeneti változóját tekintjük állapotváltozónak.

c) Hálózat rendszáma:

A független állapotváltozók száma ami $\leq$ a késleltetők számával

d) Állapot egyenletek:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = a_{11}x_1[k] + a_{12}x_2[k] + \dots + a_{1N}x_N[k] + b_1 u[k] \\ x_2[k+1] = a_{21}x_1[k] + a_{22}x_2[k] + \dots + a_{2N}x_N[k] + b_2 u[k] \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_N[k+1] = a_{N1}x_1[k] + a_{N2}x_2[k] + \dots + a_{NN}x_N[k] + b_N u[k] \\ y[k] = c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k] + \dots + c_N x_N[k] + d\,u[k] \end{cases}$$

Mátrixos alakban:
1 gerjesztés, 1 válasz

$$\begin{cases} (1) \quad \underline{x}[k+1] = \underline{A}\,\underline{x}[k] + \underline{B}\,u[k] \\ (2) \quad y[k] = \underline{C}^T \underline{x}[k] + D\,u[k] \end{cases}$$

állapotváltozós leírás normál alakja

ahol: $\underline{A}$: kvadratikus rendszermátrix $\quad \underline{x}$: állapotvektor

$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ oszlopvektor

$\underline{C} = \underline{C}^T = [c_1 \; c_2 \; \dots \; c_N]$ sorvektor

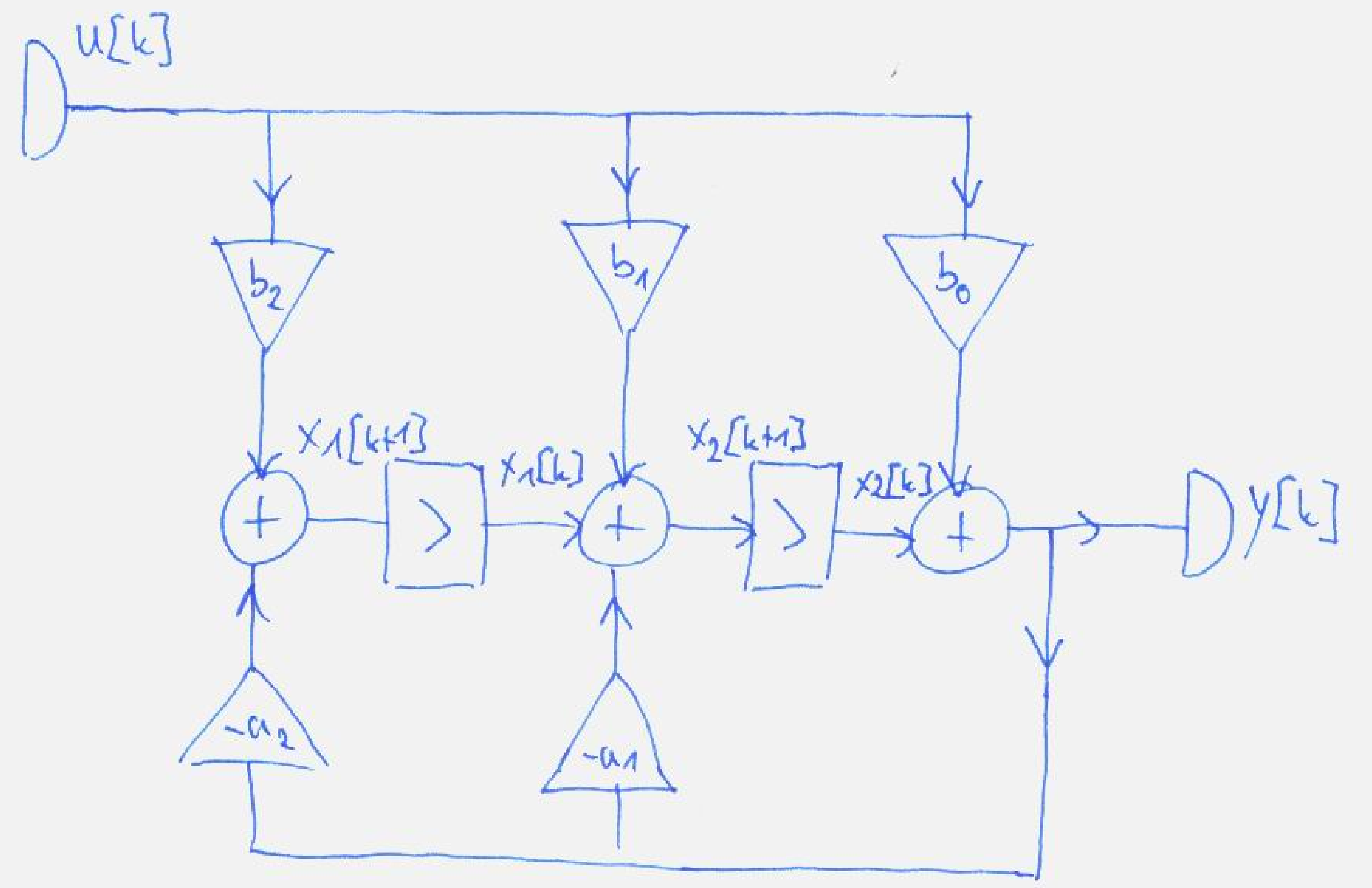
D: skalár

(1): állapotegyenlet (ez egy vektoregyenlet)

(2): válasz állapotváltozós kifejezése

- ha az állapotváltozós leírás normálalakja nem létezik, akkor nem reguláris a hálózat.
- egyszerű hálózatokra a fenti alak egyből felírható.

e) Példa: Cél az állapotváltozók felvétele -> egyenlet az ~~összegzők~~ késleltetők bemenetére



Megoldás: kell az állapot-vált. leírás normálalakja:

$$x_1[k+1] = -a_2 y[k] + b_2 u[k] = -a_2 x_2[k] + (b_2 - a_2 b_0) u[k]$$

$$x_2[k+1] = x_1[k] + b_1 u[k] - a_1 y[k] = x_1[k] - a_1 x_2[k] + (b_1 - a_1 b_0) u[k]$$

$$y[k] = x_2[k] + b_0 u[k]$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{C}^T = [0 \; 1] \quad D = b_0$$

II. Folytonos idejű Kirchoff-típusú hálózatok állapotvált. leírásának előállítása:

a) Állapotváltozó definíciója folytonos időre:

A hálózat állapotváltozói a változók azon minimális halmaza, amelyek az alábbi két tulajdonsággal bírnak:

- az állapotváltozók és a gerjesztések $t=t_1$ beli értékéből meghatározható:
  - -> az állapotváltozók $t_2 > t_1$ beli értéke
  - -> a válaszok t_1 beli értéke

b) Állapotváltozó megválasztása:

Lineáris villamos hálózatokban az állapotváltozók:

- kondenzátor feszültsége
- a tekercsek árama

c) Hálózat rendszáma: független állapotváltozók száma

d) Állapotváltozós leírás normálalakja vektoregyenletekkel:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x} + \underline{\underline{D}}\,\underline{u} \end{cases}$$

ahol $\underline{x}$: állapotváltozók vektora

$\underline{y}$: válasz vektor

$\underline{u}$: gerjesztés vektor

$\underline{\underline{A}}$: rendszermátrix: $N \times N$-es, kvadratikus

- Gyakori eset: 1 gerjesztés – 1 válasz:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}\,s$$
$$y = \underline{C}^T \underline{x} + D s$$

ahol $\underline{B}$ oszlopvektor

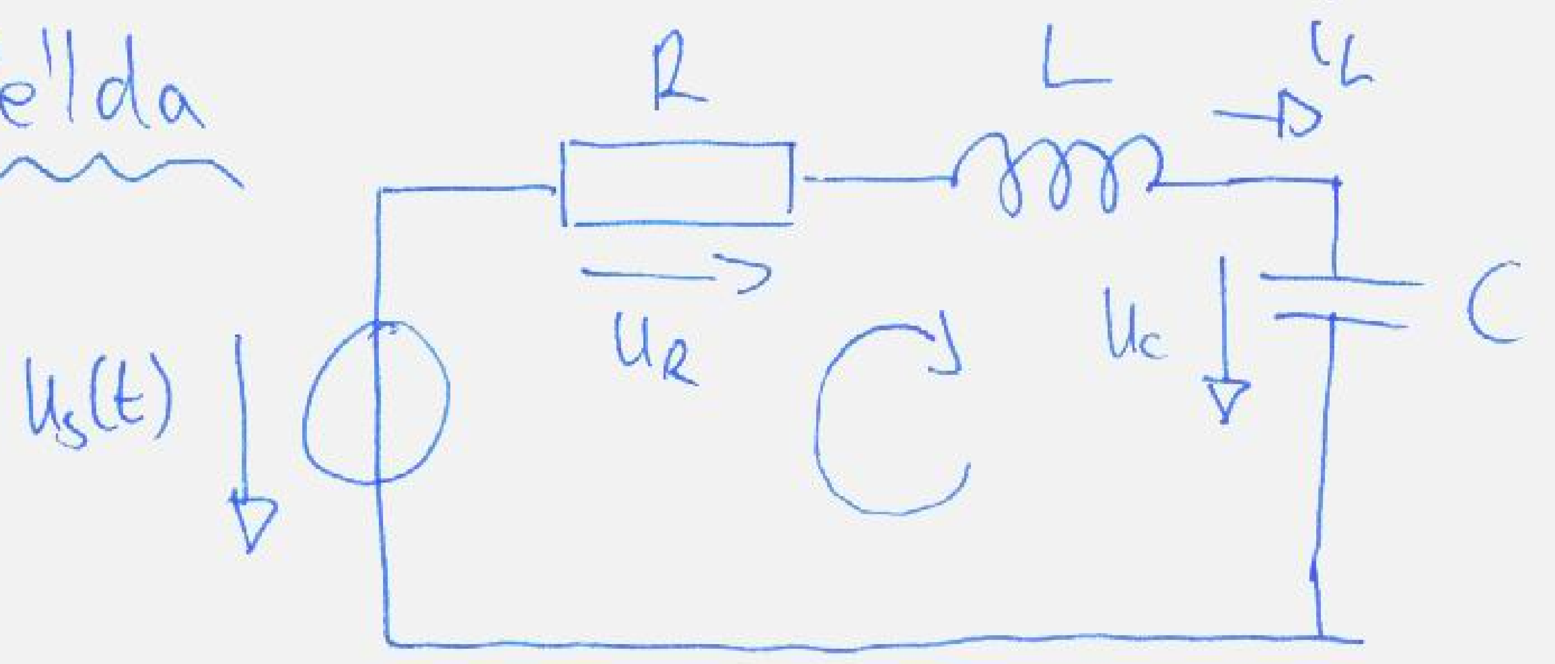
$\underline{C}^T$: sorvektor

D: skalár

↳ megoldása: ismerni kell $\underline{x}(t_0)$ kezdeti értékét

e) Regularitás: ha az állapotváltozós leírás normál alakja nem állítható elő $i_{L,k}$ és $u_{C,k}$-kal mint állapotváltozókkal, akkor a hálózat nem reguláris és az olyan hálózatot nem tekintjük megfelelő modellnek.

f) Példa



Állapotváltozók: u_C, i_L

↳ 2 egyenlet kell + a válasz egyenlete

Válasz: u_R

(1) $R \cdot i_L + L \dfrac{di_L}{dt} + u_C - u_s(t) = 0$

(2) $i_L = C \cdot \dfrac{du_C}{dt}$

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{R}{L} i_L - \dfrac{1}{L} u_C + \dfrac{1}{L} u_s \\ \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L + \emptyset \cdot u_C + \emptyset \cdot u_s \\ u_R = R \cdot i_L \end{cases}$$

-> a válasz egyenlete

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \emptyset \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \emptyset$$

g) Állapotváltozós leírás előállítása:

$$\dot{u}_C = \frac{i_C}{C} \quad \text{és} \quad \dot{i}_L = \frac{u_L}{L}$$

1. lépés:

A kondenzátorokat feszültség, a tekercseket áramforrásokkal helyettesítjük.

2. lépés: egyenletek felírása (pl. csomóponti potenciálokkal), ahol u_C és i_L paraméterek

3. lépés: egyenletrendszer megoldása

4. lépés: keresett mennyiségek kifejezése:

$$\left.\begin{matrix} y \\ i_C \\ u_L \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \\ y \end{matrix}$$

és innen felírni a normál alakot.

R14. Hogyan határozható meg egy lineáris, invariáns rendszer szinuszos vagy periodikus gerjesztéshez tartozó gerjesztett válasza diszkrét idejű, illetve folytonos idejű esetben? Milyen feltételek mellett van a gerjesztett válasznak fizikai tartalma?

I. Folytonos eset: 1.) Szinuszos gerjesztésre adott válasz

a) komplex számításmód (lásd J5.)

b) Kirchoff törvények

- komplex csúcsértékre is érvényesek lesznek!

$$\sum_k i_k(t) = 0 \rightarrow \sum_k \bar{I}_k = 0$$

$$\sum_k u_k(t) = 0 \rightarrow \sum_k \bar{U}_k = 0$$

c) $\bar{Z}$ impedancia értelmezése:

$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I}_R$; $\bar{U}_L = j\omega L \bar{I}_L$; $\bar{I}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{U}_C$

$\bar{Z}_R = R$ $\quad \boxed{\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}}$ $\quad \bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

$\bar{Z}_L = j\omega L$

d) Számítás: - a fenti fogalmak bevezetésével, áttérve komplex számításmódra:
- innen már alkalmazhatók: az elemi módszer, a csomóponti potenciálok módszere, vagy a hurokáramok módszere.

2.) Periodikus gerjesztésre adott válasz

a) Fourier sorfejtés az adott jelre: lásd J6. tétel

b) Átviteli karakterisztikával: lásd R8. tétel

3.) Fizikai tartalma a gerjesztett válasznak:

- GV stabilis rendszerekben, csak akkor létezik $H(j\omega)$ is.

II. Diszkrét eset:

1. Szinuszos gerjesztésre adott válasz

~~lásd J5 tétel~~

a) komplex számításmód bevezetése: - lásd J5. tétel

b) Periodikus jel diszkrét Fourier sorba fejtése: - lásd J6. tétel

c) Komplex számítási móddal rendszeregyenletből

- keressük a választ az $u[k] = K \cdot \cos(\Omega k + \varphi)$ alakú gerjesztésre
- $y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 \cdot u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m \cdot u[k-m]$
- áttérünk: $y[k] \to \bar{Y}$; $u[k] \to \bar{U}$
- $\bar{Y} + a_1 \cdot e^{-j\Omega} \bar{Y} + \dots + a_n \cdot e^{-jn\Omega} \cdot \bar{Y} = b_0 \bar{U} + b_1 \cdot e^{-j\Omega} \cdot \bar{U} + \dots + b_m \cdot e^{-jm\Omega} \cdot \bar{U}$

  ↳ ebből: $\bar{Y} = \bar{U} \cdot \underbrace{\frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\Omega} + \dots + b_m \cdot e^{-jm\Omega}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\Omega} + \dots + a_n \cdot e^{-jn\Omega}}}_{\bar{H}}$

- $\bar{Y} = \bar{U} \cdot \bar{H}$

  ↳ $Y \cdot e^{j\varphi_y} = K \cdot e^{j\varphi} \cdot U \cdot e^{j\varphi_u} \Rightarrow \boxed{Y = K \cdot U \quad \varphi_y = \varphi + \varphi_u}$

d) Periodikus gerjesztésre adott válasz: $H(e^{j\Omega})$-val:

- adott: $H(e^{j\Omega})$
- adott: Fourier sorba fejtve: $u[k] = U_0 + U_1 \cos(\Omega_1 k + \varphi_1) + U_2 \cos(2\Omega_1 k + \varphi_2) + \dots$
- $y[k] = U_0 \cdot H(0) + U_1 \cdot H(\Omega_1) \cdot \cos(\Omega_1 k + \varphi_1 + \varphi(\Omega_1)) + U_2 \cdot H(2\Omega_1) \cdot \cos(2\Omega_1 k + \varphi_2 + \varphi(2\Omega_1)) + \dots$
- A választ az egyes $(k\Omega_1)$ komponensű gerjesztésekre adott válasz szuperpozíciójaként számítjuk (ezt a linearitás biztosítja)

e) Fizikai tartalom:

- Feltétele: GV stabilitás, ugyanis akkor létezik $H(e^{j\Omega})$

#7 Hogyan állítható elő egy jelfolyam típusú, diszkrét idejű hálózat rendszeregyenlete? Hasonlítsa össze a különböző eljárásokat! Illusztrálja ezeket 1-1 példával!

I. Rendszeregyenlet definíciója, jellemzői:

- Időtartományban közvetlen összekapcsolja a gerjesztést és a választ.
- Általános alak: $y = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)} - \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i)}$

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]$$

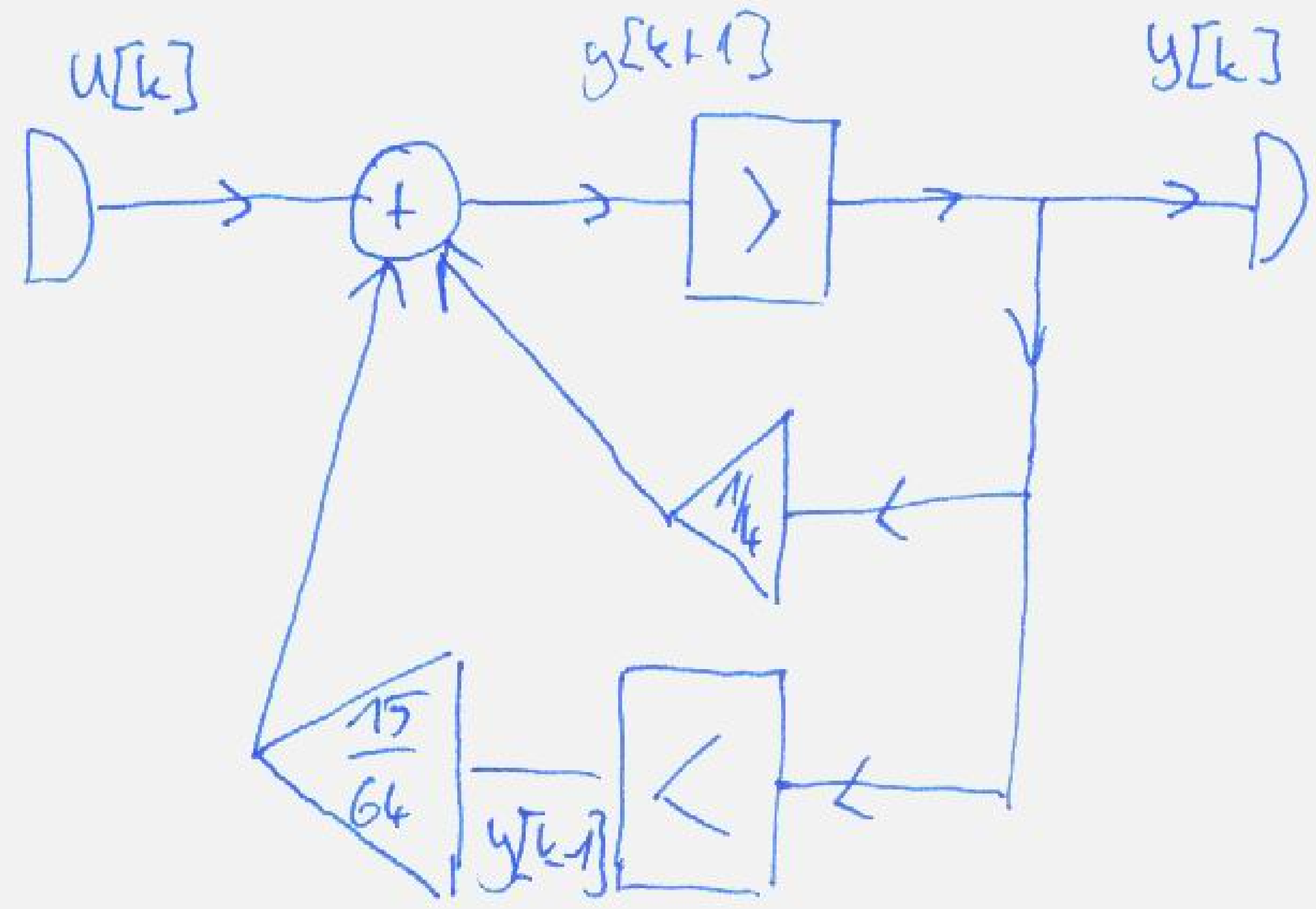
- A Rendszeregyenlet meghatározása időtartományban nem célszerű.
- Célszerű: $\mathcal{F}\{\ \}$ és $\mathcal{Z}\{\ \}$ transzf.

II Rendszeregyenlet megadási módjai:

[1] Időtartományban, közvetlen a hálózatból

- Cél: fejezzük ki y választ v_i változók és $u[k], u[k-1]$ lineáris kombinációjaként
- előny: könnyen számolható (ha nincs visszacsatolás vagy csak a válasz van visszacsatolva)
- hátrány: bonyolult hálózatok esetén nem alkalmazható.

Példa:



$$y[k+1] = u[k] + \frac{1}{4} y[k] + \frac{15}{64} y[k-1]$$

$\downarrow$ eltolás

$$y[k] - \frac{1}{4} y[k-1] - \frac{15}{64} y[k-2] = u[k-1]$$

[2] Időtartományban az állapotváltozós leírásból:

Adva van: $y[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k] + D u[k]$ -> felírjuk a válasz 1,2,... N ütemmel siettetett alakját

$$y[k+1] = \underline{c}^T \underline{x}[k+1] + D u[k+1] = \underline{c}^T \{ \underline{\underline{A}}\, \underline{x}[k] + \underline{B} u[k] \} + D u[k+1]$$

$\vdots$

$$y[k+N] = \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^N \underline{x}[k] + \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{N-1} \underline{B} u[k] + \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{N-2} \underline{B} u[k+1] + \dots$$

$$\dots + \underline{c}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{B}\, u[k+N-2] + \underline{c}^T \underline{B} u[k+N-1] + D u[k+N]$$

↳ ez egy lineáris egyenletrendszer.

ezt megoldjuk $y[k+N]$ és $x_p[k]$ $(k=1,2..N)$ ismeretlenekre, a többi változót tekintsük ismertnek.

→ $y[k+N]$ utóbbiakkal lineáris kapcsolatban áll:

$$y[k+N] = b_0 u[k+N] + b_1 u[k+N-1] + \ldots + b_N u[k] - a_1 y[k+N-1] - a_2 y[k+N-2] - \ldots - a_N y[k]$$

→ elvégezve a $k \to k-N$ helyettesítést, akkor a rendszeregyenlet szokásos alakját kapjuk.

Példa: A megoldásnak csak elvi jellege van

- előny: bonyolult hálózatokra is alkalmazható, de bonyolult.

$\boxed{3.}$ Frekvenciatartományon átviteli karakterisztikából.

- Adva van: $H(e^{j\vartheta})$ átviteli kar. : $H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y_{be}}{U_{be}}$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y_{be}}{U_{be}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + \ldots + b_m e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + \ldots + a_n e^{-jn\vartheta}}$$

↳ ha ez az alak megvan, akkor felszorzunk:

$$\Rightarrow Y_{be} + a_1 Y_{be} e^{-j\vartheta} + \ldots + a_n Y_{be} \cdot e^{-jn\vartheta} = U_{be} b_0 + U_{be} b_1 \cdot e^{-j\vartheta} + \ldots + U_{be} \cdot b_m \cdot e^{-jm\vartheta}$$

↳ ezt inverz fourier-transzformálva megkapjuk a rendszeregyenletet.

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \ldots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \ldots + b_m u[k-m]$$

- Példa: a fenti alapján egyszerű!

$\boxed{4.}$ Frekvencia tartományon állapotváltozós leírásból:

Igazából az átviteli karakterisztikát kell meghatározni, majd a $\boxed{3}$. pont alapján.

- Példa:
$$\begin{cases} x_1[k+1] = a_{11} x_1[k] + a_{12} x_2[k] + b_1 u[k] \\ x_2[k+1] = a_{21} x_1[k] + a_{22} x_2[k] + b_2 u[k] \\ y[k] = c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k] + d u[k] \end{cases}$$

Jelölés: $x_1[k] \to X_1(e^{j\vartheta})$, $x_2[k] \to X_2(e^{j\vartheta})$

$y[k] \to Y(e^{j\vartheta})$, $u[k] \to U(e^{j\vartheta})$

$\mathcal{F}\{\}$

$$\left.\begin{aligned} e^{j\vartheta} X_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 U \\ e^{j\vartheta} X_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 U \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X_1 &= \bigcirc \cdot U \\ X_2 &= \bigcirc \cdot U \end{aligned}$$

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + d U$$

$Y = U \cdot \bigcirc$ -> ebből megvan az átv. kar, majd a rszeregyenlet

! a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ csak stabilis rendszerre alkalmazható!

$\boxed{5}$ Rendszeregyenlet meghatározása z transzformációval:

- Hasonlóan, mint előbb csak $e^{j\vartheta}$ helyére z^{-1}-et írva
- Két lehetőség:
  - állapotváltozós leírás z transzformáltja
  - z tartománybeli egyenleteket egyből felírva

$$\Rightarrow \text{megvan} \quad H(z) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

-> ebből felsorozva, inverz z transzformálva megkapjuk a rendszeregyenletet

- Példa: lásd előző pont, csak $\mathcal{Z}\{\}$-val!

(R15) Értelmezze a rendszerjellemző függvényt! Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszerek rendszerjellemző függvényeinek kapcsolatát! Mik az egyes rendszerjellemző függvények előnyei és hátrányai? Milyen rendszertulajdonságok határozhatók meg az egyes rendszerjellemző függvények ismeretében közvetlenül?

-Rendszerjellemző függvény: olyan (esetleg általánosított) függvény, amelynek ismeretében az adott $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ válasz meghatározható. Egyes rendszerjellemző függvények csak bizonyos típusú rendszerekre és bizonyos típusú gerjesztésekre értelmezettek.

I. Folytonos idő

1.) Időtartomány: - időtartományban a rendszerjellemző függvény az impulzusválasz.

Impulzusválasz: - tetszőleges gerjesztésre a válasz konvolúcióval határozható meg:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

- az impulzusválasz a $\delta(t)$ gerjesztésre adott válasz
- az impulzusválaszból meghatározható:
  - ->a rendszer kauzalitása <=> az impulzusválasz belépő
  - -> a GV stabilitás <=> az impulzusválasz abszolút integrálható
- az impulzusválasz értelmezett akauzális és labilis rendszerekre is.

2.) Frekvencia tartomány:

Átviteli karakterisztika: $H(j\omega)$

- mérhető: szinuszos gerjesztés alkalmazásánál, állandósult állapotban
- $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot \mathcal{F}\{u(t)\}\}$ ha $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| < \infty$ (abszolút integrálható)
- $H(\omega)$: amplitúdó karakterisztika, $\varphi(\omega)$: fázis karakterisztika
- csak GV stabilis rendszereknél létezik. (különben a válasznak nincs ω körfrekvenciájú állandósult állapota)

3.) Komplex frekvencia tartomány

Átviteli függvény ($H(s)$): - hátránya: nincs fizikai tartalma

- $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot \mathcal{L}\{u(t)\}\}$ ha $u(t) = 0$ $t < 0$-ra
- csak kauzális rendszerekre (de nem kell stabilnak lennie.)

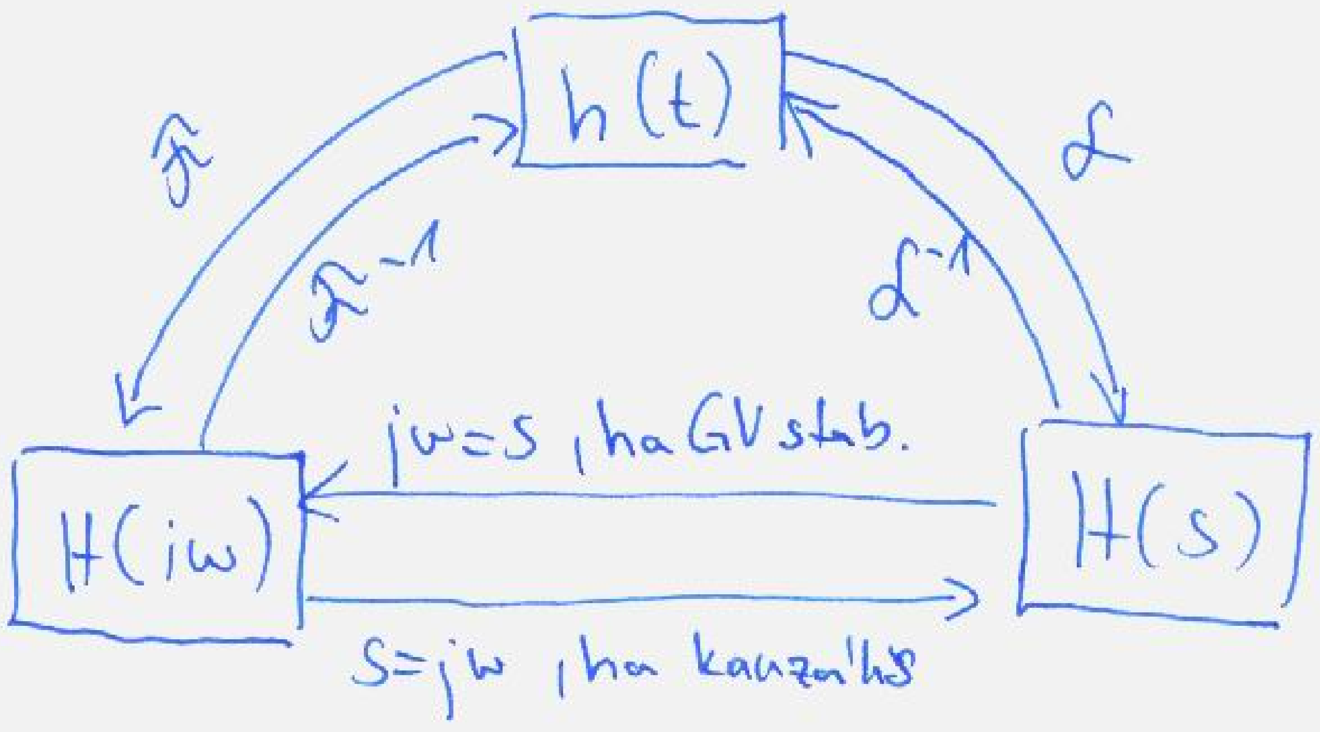
II. Diszkrét idő :

– ugyanazok, mint folytonosban

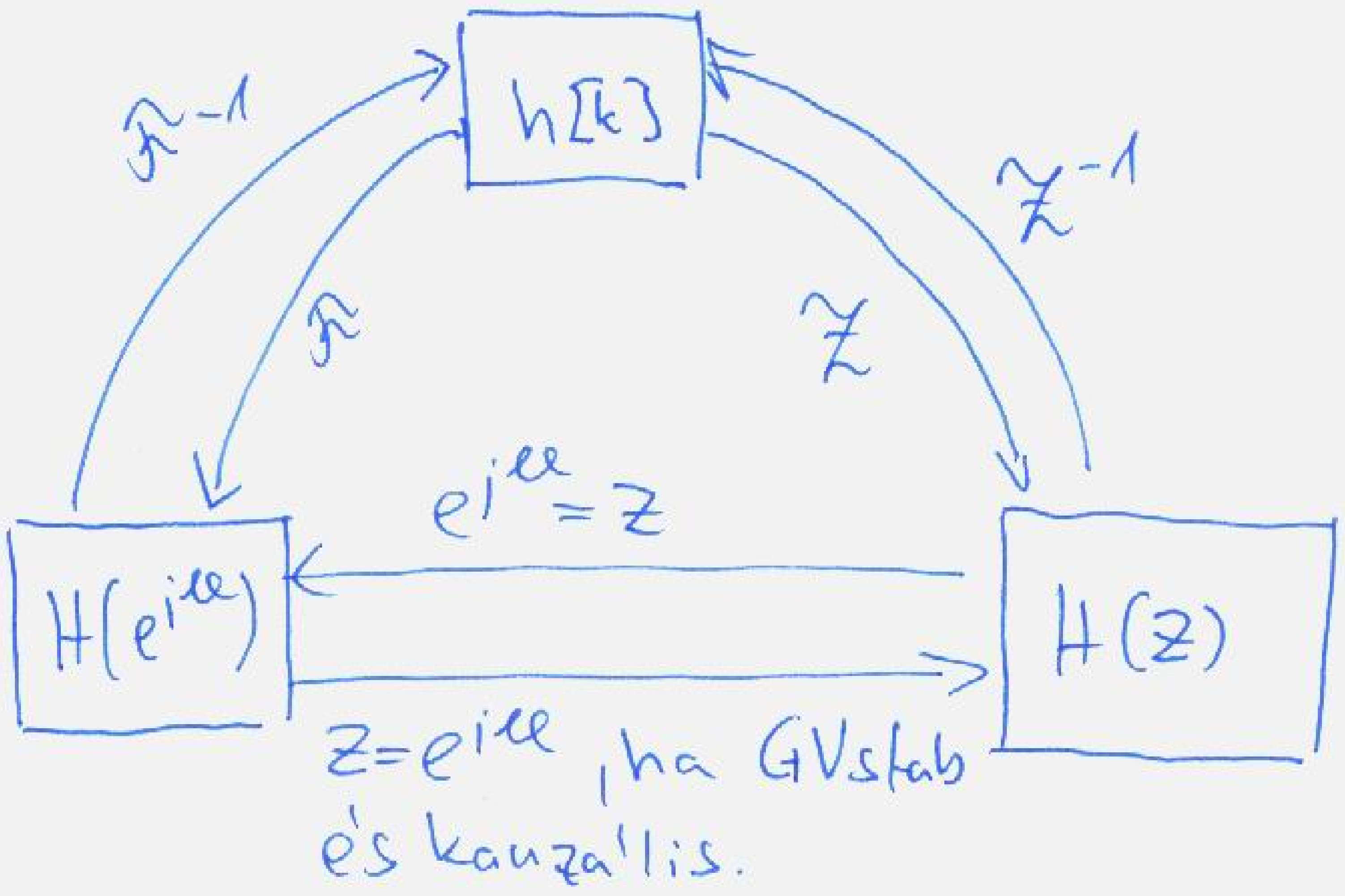
– D.I. konvolúció: $y[k] = h[k] * u[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] \cdot h[k-n]$

III. Rendszerjellemző függvények kapcsolata:

1.) Folytonos idő:



2. Diszkrét idő:



→ Előnyösnek tekintjük, ha a rendszerjellemző függvény:

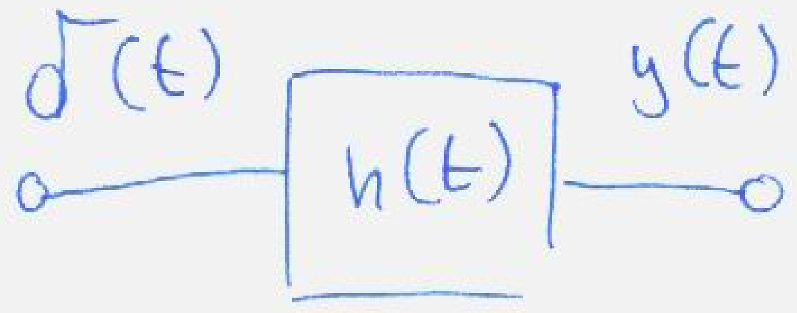
- enyhe megszorítások mellett alkalmazható
- ismeretében a válasz zárt alakban vagy numerikusan egyszerűen számolható.
- az objektumon egyszerűen mérhető
- áttekinthetően ábrázolható
- a hálózati reprezentáció ismeretében könnyen előállítható

H8.) Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer impulzusválasza hálózati reprezentációjának ismeretében? Hasonlítsa össze a különböző módszereket!

I. Folytonos idő:

1.) Az impulzus válaszról általánosan:

- Adott rendszerre:



- Def: a Dirac-impulzus gerjesztésre adott választ imp. válasznak nevezzük.

- kauzális rendszerek: $h(t)$ belépő: $h(t)=0$, ha $-\infty < t < 0$
- tetszőleges gerjesztésre adott válasz $h(t)$ segítségével meghatározható

$\Rightarrow$ Konvolúció tétel: $y(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = u(t) * h(t)$

$\hookrightarrow$ ha belépő: $\int\limits_{0}^{\infty} \dots$, ha kauzális is: $\int\limits_{0}^{t} \dots$

2.) Az impulzusválasz számítása:

$\boxed{1}$ A hálózatból közvetlenül:

- ha kondenzátoron $\delta(t)$ áram folyik át, akkor töltése egységgel, feszültsége $\frac{1}{C}$-vel ugrik $\left(\frac{Q}{C}\right)$ $u_C = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\, d\tau = \frac{Q}{C}$ $\quad i_C(t) = C\frac{du(t)}{dt}$

- ha egy tekercsre $\delta(t)$ fesz. jut $\rightarrow$ fluxusa egységgel ugrik:

$i_L(t) = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\, d\tau = \frac{\Psi}{L}$

$\rightarrow$ árama $\frac{1}{L}$-el ugrik.

- a $\delta(t)$ rákapcsolása pillanatában a kondenzátor rövidzárként, a tekercs szakadásként viselkedik.

↳ ki kell számítani ezekre → a rövidzáron folyó áramot
↘ a szakadáson eső feszültséget

⇒ így kapunk egy gerjesztetlen, de kezdeti értékekkel ellátott hálózatot (csak saját válasz) Ahol a kezdeti érték: $\underline{x}(t_0) = \underline{b}$

[2] g(t) ugrásválasz segítségével:

- Állapotváltozós leírás ⇒ könnyen megoldható $u(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztésre
- $h(t) = g'(t)$ lesz! ahol $(\,)'$ általánosított deriválás
- pl: $g(t) = \varepsilon(t) \cdot e^{-4t}$ $\quad h(t) = g'(t) = \delta(t) \cdot e^{-4t} - \varepsilon(t) \cdot 4e^{-4t} = \underline{\delta(t) - \varepsilon(t) 4e^{-4t}}$

[3.] H(jω) - ból frekvencia tartományon:

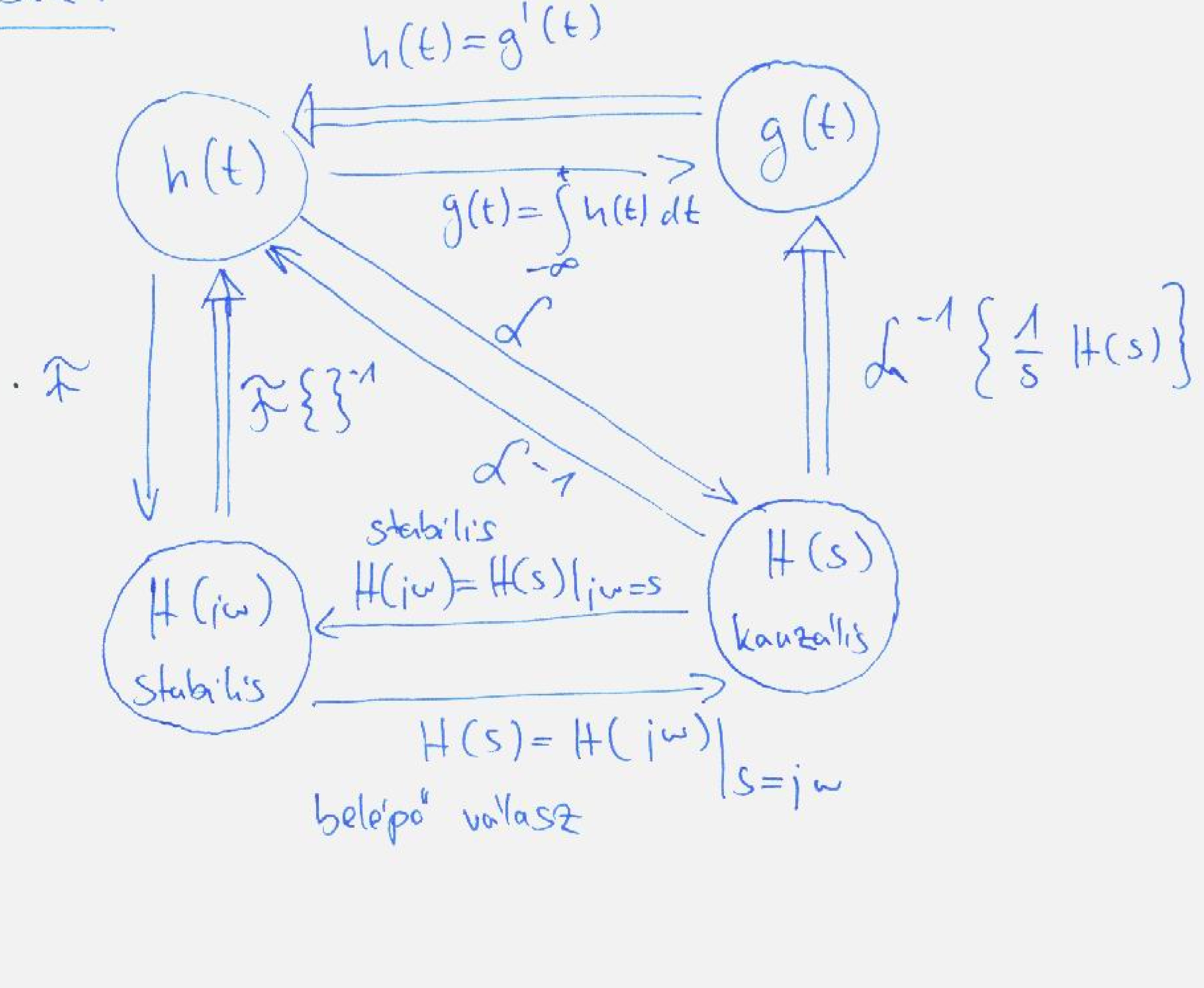
$H(j\omega)$ adott: $u(t) = \delta(t)$

$$\text{imp. válasz} = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot \overbrace{\mathcal{F}\{\delta(t)\}}^{=1}\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$$

[4.] H(s) átviteli függvény ismeretében:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Összefüggések:



II. Diszkrét időre:

1.) h[k] általánosan:

- az impulzusválasz a D. idejű lin. invariáns rendszer időtartománybeli rendszerjellemző függvénye
- $h[k]$ az egységimpulzus gerjesztéshez tartozó válasz: $y[k] = h[k]$
  $u[k] = \delta[k]$
  $k \in \mathbb{Z}$
- tetszőleges gerjesztéshez tartozó válasz: konvolúcióval számítható

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]\, h[k-n] = u[k] * h[k]$$

- stabilitás: ~~...~~
  szükséges és elégséges feltétel: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ abszolút összegezhető

2.) Az impulzusválasz számítása:

[1] Lépésről lépésre módszerrel a rendszeregyenletből:

$h[0] = b_0$

$h[1] = b_1 - a_1 h[0]$

$h[2] = b_2 - a_1 h[1] - a_2 h[0]$

$h[k] = a_1 h[k-1] - a_2 h[k-2] - \dots - a_n h[k-n]$

[2] Állapotváltozós leírás ismeretében (fokozatos behelyettesítés formula):

a) formula: - adva az állapotváltozós leírás

↳ $\delta[k]$ megszabja a kezdeti feltételeket $\underline{x}[k]$-ra

↳ $\underline{x}[1] = \underline{b}$ (ezt lépésről lépésre m.-el megkaphatjuk)

⇓

b) Lagrange mátrixos formula:

$$\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \underline{\underline{A}}\, \underline{x}[k] + \underline{B}\, u[k] \\ y[k] &= \underline{C}^T \underline{x}[k] + D u[k] \end{aligned} \Rightarrow \boxed{h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\, \underline{C}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{B}}$$

ahol $\underline{\underline{A}}^k = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{L}}_i \lambda_i^k$

ahol $\underline{L}_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N} \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_i - \lambda_p}$ és $\sum_{i=1}^{N} \underline{L}_i = \underline{E}$

$\boxed{3.}$ $H(e^{j\vartheta})$ ismeretében (frekv. tart)

$$h[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\}$$

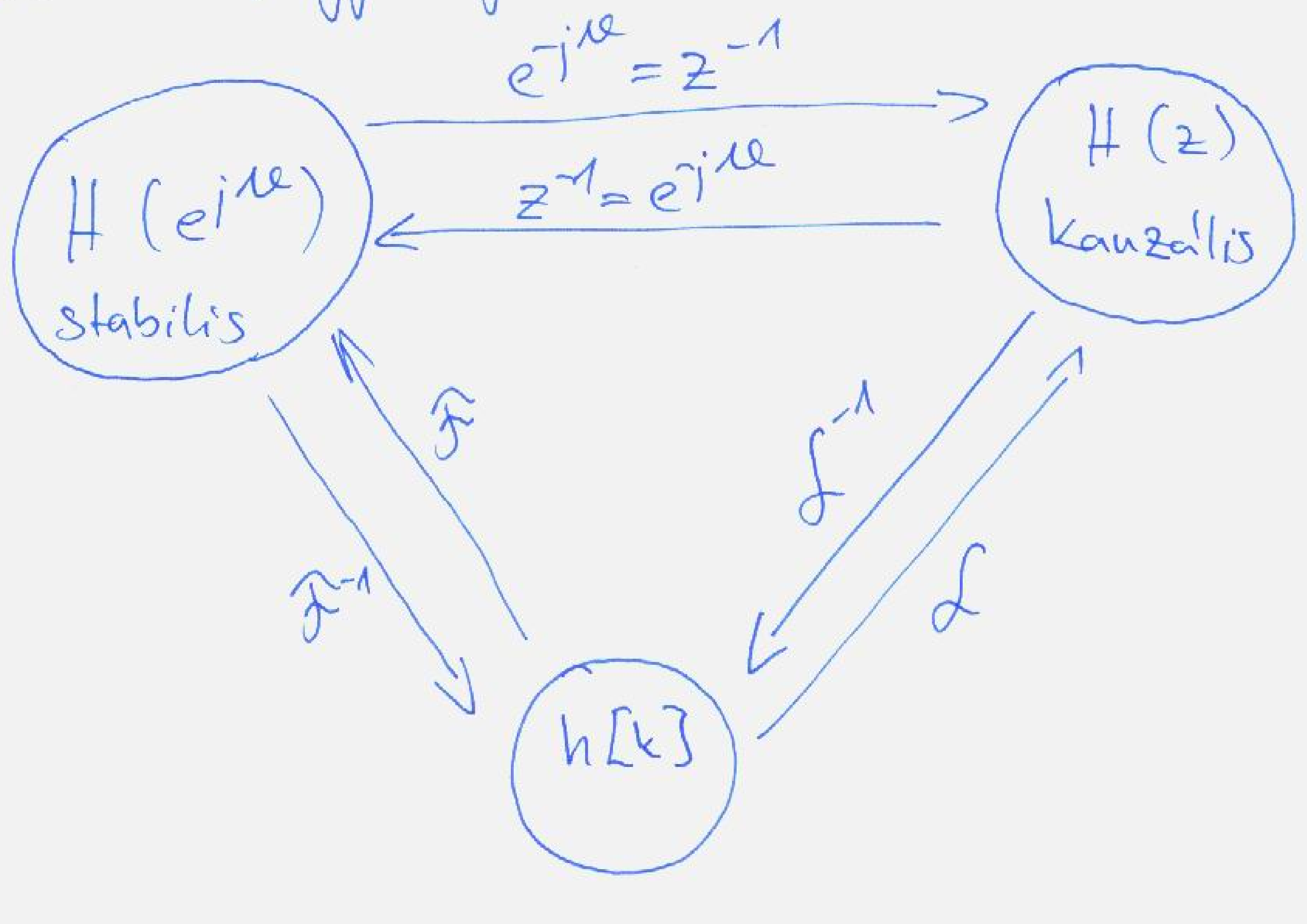
$\boxed{4.}$ $H(z)$ ismeretében:

$$h[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$

→ A hálózati reprezentáció alapján e módszerek bármelyike alkalmazható

→ Egyszerű hálózatokra: $\mathcal{Z}$ transzformációval a legegyszerűbb

→ Rendszerjellemző függvények kapcsolata:



(P.16.) Ismertessen néhány speciális tulajdonságú rendszert (pl. véges impulzusválaszú, mindent áteresztő, minimálfázisú)! Milyen tulajdonságúak ezek rendszerjellemző-függvényei? Ismertesse Bode tételeit!

I. Véges impulzus válaszú rendszer : FIR (Finite Impulse Response)

1.) Definíció : A véges impulzus válaszú rendszer:
- impulzusválasza belépő
- értéke $\emptyset$ valamely véges diszkrét időpont után

2.) $h[k]$ általános alakja FIR esetén:
- $h[k] = c_0\delta[k] + c_1\delta[k-1] + c_2\delta[k-2] + \ldots + c_{L-1}\delta[k-L]$
- ekkor az impulzusválasz L ütem hosszú (utána $\emptyset$-vá válik)

3.) $H(z)$: átviteli függvény
- $H(z) = \mathcal{Z}\{h[k]\} = c_0 + c_1\cdot z^{-1} + c_2\cdot z^{-2} + \ldots + c_{L-1}\cdot z^{-(L-1)}$

4.) $H(e^{j\vartheta})$: átviteli karakterisztika
- $z = e^{j\vartheta}$-val adódik

5.) Stabilitás
- biztosan GV stabilis, mert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ (véges sok tag)
- 1db pólus : $p = \emptyset$, ez (L-1)-szeres pólus.

6.) Hálózati realizáció :
- FIR rendszernek létezik olyan hálózati realizációja, amely L-1 számú késleltetőt és legfeljebb L számú erősítőt (szorzót) tartalmaz.

II. Mindent áteresztő rendszer

→ Folytonos esetben :

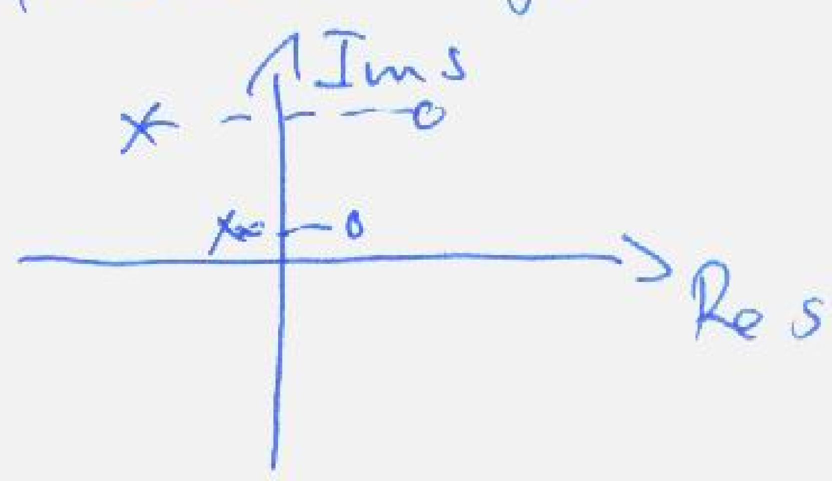
1.) Definíció : - olyan lineáris, invariáns, kauzális, GV stabilis rendszer, amelynek $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikája a frekvenciától függetlenül állandó : $\boxed{K(\omega) = K_0}$

2.) Következmény:
- $|Y(j\omega)| \sim |U(j\omega)|$ (a válasz és a gerjesztés amplitúdóspektruma arányos)
- a fázis spektrumok kapcsolatára nincs előírás.

3.) Pólus - zérus elrendezés vizsgálata:

$$- H(s) = A \cdot \frac{(s+p_1^*)(s+p_2^*)\dots(s+p_n^*)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$ ahol $\boxed{Re\{p_i\} < \emptyset \quad Re\{z_i\} > \emptyset \quad \text{és } z_i = -p_i^*}$

- a pólusok a bal félsíkon, a zérusok a jobb félsíkon helyezkednek el, a képzetes tengelyre tükrös párt alkotnak:



4.) Átviteli karakterisztikája:

- nevező: $j\omega - p_i = A_i(\omega) \cdot e^{j\alpha_1(\omega)}$
- számláló: $j\omega - z_i = A_i(\omega) \cdot e^{j(\pi - \alpha_1(\omega))}$

helyettesítéssel

$\hookrightarrow H(s) \Rightarrow H(j\omega) = A \cdot e^{j(n\cdot\pi - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 \dots - 2\alpha_n)}$

$\hookrightarrow k(\omega) = |A|$, független ω-tól

- számláló a nevezőből: $s \to -s$; $j\omega \to -j\omega$ - val

→ Diszkrét eset

1.) Definíció: - Előzővel megegyező: $K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})| = K_0$

- Mindentáteresztő: arra utal, hogy a szinuszos gerjesztés amplitudóját a rendszer minden frekvencián azonos erősítéssel „engedi át".
- Fázisokra itt sincs előírás $|Y(e^{j\vartheta})| = K_0 |U(e^{j\vartheta})|$

2.) Példa: késleltető: - $H(e^{j\vartheta}) = K \cdot e^{-j\vartheta}$

- fáziskarakterisztika pozitív frekvenciákon monoton csökken.
- bizonyítható: $K(\vartheta) = K_0 \to \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} \le 0$; $0 < \vartheta < \pi$

3.) Átviteli függvény:

$$H(z) = K_A \cdot z^{-r} \frac{a_n \cdot z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \qquad r \in \mathbb{N}$$

- a számlálóból kiemelve z^n-t és $z = e^{j\vartheta}$-t helyettesítve látszik, hogy a nevező a számláló konjugáltja.

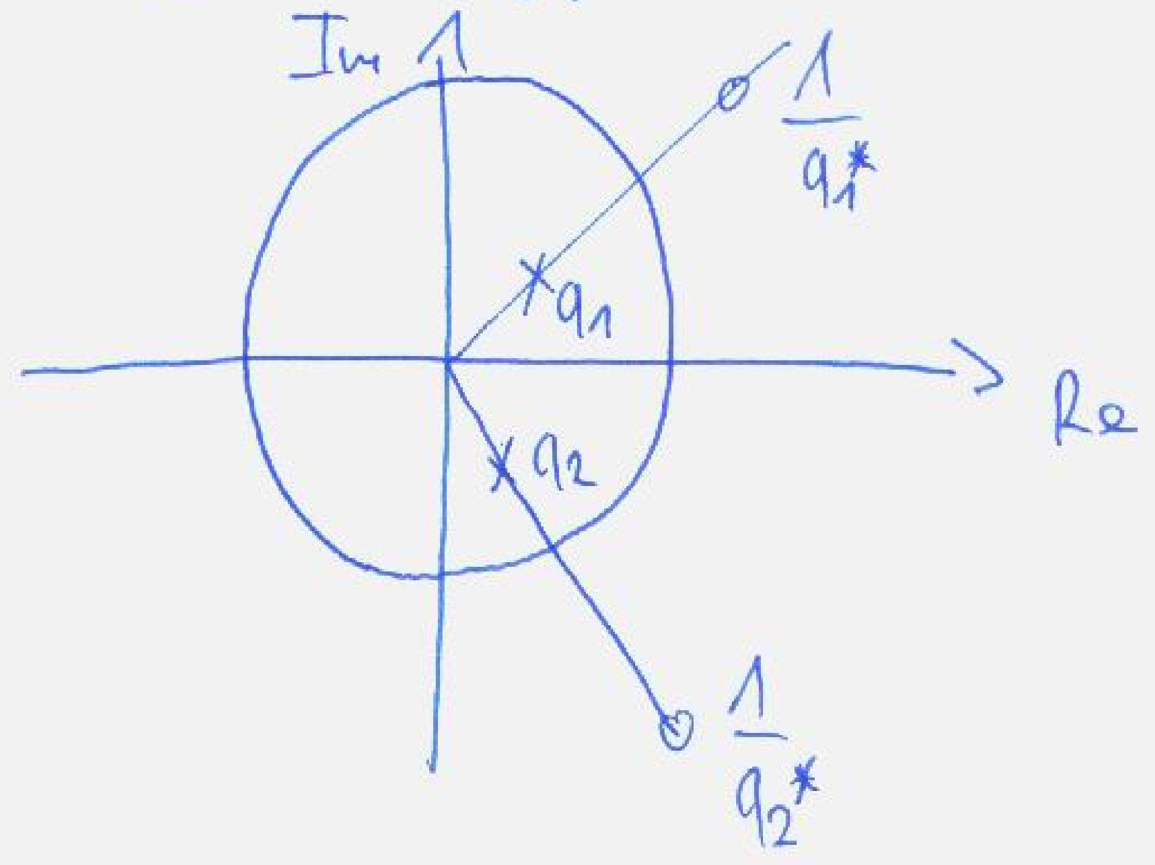
- gyöktényezős alak:

$$H(z) = \frac{K_A}{z^r} \cdot \frac{(z - \frac{1}{q_1^*})(z - \frac{1}{q_2^*})\dots(z - \frac{1}{q_n^*})}{(z-q_1)(z-q_2)\dots(z-q_n)}$$

ahol $|q_i| < 1$ és $\left|\frac{1}{q_i^*}\right| > 1$

4.) Pólus-zérus elrendezés:

- minden zérus egy pólus lineáris körképe az egység sugarú körre:



5.) $h[k]$: nincs rá speciális megkötés mindent áteresztőre.

III. Minimálfázisú rendszer:

Folytonos eset:

1.) Definíció: - olyan lineáris, invariáns, kauzális, GV stabilis rendszer, amelyre a racionális $H(s)$ átviteli függvény minden p_i pólusa a bal félsíkon helyezkedik el és egyetlen z_k zérus sincs a jobb félsíkon (vagy a bal félsíkon vannak, vagy a határoló képzetes tengelyen)

- Szigorúan minimálfázisú: $H(s)$ minden zérusa a bal félsíkon helyezkedik el

2.) Átviteli függvény

$$H(s) = A \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

ahol $Re\{p_i\} < 0$

$Re\{z_i\} \leq 0$

és $m \leq n$

3.) Átviteli karakterisztika

- $s = j\omega$ -val adódik
- ha $j\omega - p_i = A_i(\omega) \cdot e^{j\alpha_i(\omega)}$, $j\omega - z_k = B_k(\omega) \cdot e^{j\beta_k(\omega)}$
- ha bal síkbeli zérust jobb síkbelivel helyettesítünk, akkor:

$$z_k' = -z_k^* \Rightarrow j\omega - z_k' = B_k \cdot e^{j(\pi - \beta_k(\omega))}$$

↳ az amplitudó karakterisztika ezzel nem változik, de a ~~fáziskarakt~~ fáziskarakterisztika nagyobb lesz.

- azonos amplitudó karakterisztikájú rendszerek közül a minimálfázisúnak a legkisebb a fáziskarakterisztikája.

→ Diszkrét eset

1.) Definíció: - olyan lineáris, invariáns, kauzális, GV stabilis rendszer, amelyre a $H(z)$ átviteli függvény egyetlen zérusa sincs az egységsugarú körön kívül.

2.) Átviteli függvény:

→ e miatt GV stabil

$$H(z) = K \cdot \frac{(z-s_1)(z-s_2)\ldots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_n)}$$ ahol $\emptyset \le |q_i| < 1$

$|s_i| \le 1$

és $m \le n$

3.) Szigorúan minimálfázisú rendszer

- ha $|s_i| < 1$ (minden zérus belül van a körön)
- igazolható: szigorúan minimálfázisú rendszer $K(\omega)$-ja meghatározza $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztikát (fordítva is igaz egy konstans erejéig)
- Szigorúan minimálfázisú rendszer $K(\omega)$-ja is rendszerjellemző függvény.

4.) $\varphi_{MF}(\omega)$

- minimálfázisú rendszer fáziskarakterisztikájára igaz:

$$K_{MF}(\omega) = K(\omega) \Rightarrow \frac{d\varphi_{MF}(\omega)}{d\omega} \ge \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

- a minimálfázisú rendszer futási idő karakterisztikája a legkisebb a megegyező amplitudó-karakterisztikájú rendszerek közül.

IV. Bode tételei:

- Belépő spektrum esetén a spektrum valós és képzetes része egymást meghatározza $\Rightarrow K(\omega)$ maga is rendszerjellemző függvény

- $\lim H(j\omega) = \lim K(\omega) + j\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \int_0^\infty \frac{\lim K(\lambda) - \lim K(\omega)}{\lambda - \omega}\, d\lambda$$

(32.) Ismertesse a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek frekvencia tartománybeli leírásának módját, a rendszerelméletben előforduló legfontosabb speciális jeleket (egységugrás, Dirac impulzus), és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveletek (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás) megfelelőit a frekvencia tartományban! Adja meg a jel energiatartalmának definícióját és frekv. tartománybeli kifejezését!

$\boxed{\text{Folytonos idejű jelek}}$

- Jelek frekvenciatartománybeli leírásának módszere a Fourier transzformáció.
- $x(t)$ időtartománybeli jel $X(j\omega)$ frekvenciatartománybeli spektruma a Fourier transzformáltjával kapható: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ Az integrál létezésének feltétele, hogy $x(t)$ abszolút integrálható legyen.
- $X(j\omega)$-ból $x(t)$ az inverz Fourier transzformációval kapható:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

- $|X(j\omega)|$ – a jel amplitúdóspektruma
  $Arc(X(j\omega))$ – a jel fázisspektruma

A jel energiatartalma: – időtartomány: $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$

– frekvenciatart.: $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

A két kifejezés egyenlő egymással, ez Parseval tétele.

– legfontosabb speciális jelek spektruma:
  - Dirac impulzus: $\mathcal{F}(\delta(t)) = 1$
  - Egységugrás spektruma: $\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
  - $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$
  - $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

A Fourier transzformáció tételei:

1. Linearitás: $\mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$
2. Eltolási tétel: $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$
3. Modulációs tétel: $\mathcal{F}\{x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} X(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2} X(j(\omega-\omega_0))$
4. Deriválási tétel: $\frac{dx}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(j\omega)$
5. Konvolúció: $\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$