Valószínűségszámítás zh
2013. április 5.
MEGOLDÁS

1. Egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk 10 darab 2 cm átmérőjű köralakú pénzdarabot. *Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 pénzdarab valamelyik négyzet csúcsát fogja lefedni?
Megoldás: A : egy pénz lefed egy csúcsot, $\mathbf{P}(A) = \frac{\pi}{100}, X$: a csúcsokat fedő pénzdarabok száma, $X \in B\left(10, \frac{\pi}{100}\right)$
$\mathbf{P}(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{\pi}{100}\right)^i \left(1 - \frac{\pi}{100}\right)^{10-i}.$

2. Röntgenvizsgálat során $0,9$ annak a valószínűsége, hogy tbc-s beteg betegségét felfedezik. Annak valószínűsége, hogy egy egészséges embert betegnek találnak $0,002$. A tbc-ben szenvedők aránya a lakosságon belül $0,0003$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ember egészséges, ha átvilágításkor betegnek találták?
Megoldás: B : a páciens tbc-s, F : a röntgennel tbc-snek találják.
$\mathbf{P}(B) = 0.0003, \mathbf{P}(F \mid B) = 0.9, \mathbf{P}\left(F \mid \bar{B}\right) = 0.002.$
A Bayes tételt alkalmazva:
$\mathbf{P}\left(\bar{B} \mid F\right) = \frac{\mathbf{P}\left(F|\bar{B}\right)\mathbf{P}\left(\bar{B}\right)}{\mathbf{P}\left(F|\bar{B}\right)\mathbf{P}\left(\bar{B}\right)+\mathbf{P}(F|B)\mathbf{P}(B)} = \frac{0.002\cdot 0.9997}{0.002\cdot 0.9997+0.9\cdot 0.0003} \approx 0.88.$

3. Legyen $X \in E(1)$ és $Y = X^2 + 1$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!
Megoldás: $F_X(t) = 1 - e^{-t}, t > 0. \mathbf{E}X = \boldsymbol{\sigma}^2 X = 1 \Rightarrow \mathbf{E}X^2 = 2.$
$R_Y = (1, \infty).$
$F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X^2 + 1 < t\right) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt{t-1}\right) = 1 - e^{-\sqrt{t-1}}.$
$f_Y(t) = F_Y'(t) = e^{-\sqrt{t-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}}, t > 1.$
$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^2 + 1 = 3.$

4. *Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 10π helyen!
Megoldás: $[10\pi] = 31, X$: a legkisebb kihúzott lottószám.
$F_X(t) = \mathbf{P}(X < 10\pi) = \mathbf{P}(X < 31) = 1 - \frac{\binom{60}{5}}{\binom{90}{5}}.$

5. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, és $Z = \frac{X}{Y+1}$.
Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!
Megoldás: $R_Z = (0,1).$
$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{t} - 1 < Y\right).$
Tehát geometriai módszerekkel azt kell megállapítanunk, hogy az egységnégyzet (X, Y) pontjai közül melyikekre teljesül a $\frac{X}{t} - 1 < Y$ feltétel. Másképp kell számolni, ha $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ és ha $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
Ha $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, a keresett terület az, ami az $y = \frac{1}{t}x - 1$ egyenes fölött van egy trapéz, $F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = 2t - \frac{t}{2} = \frac{3t}{2}.$

Ha $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ugyanez a terület egy ötszög lesz, így
$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = 1 - \frac{(1-t)\left(\frac{1}{t}-1\right)}{2}$.

Valószínűségszámítás zh
2013. április 5.
MEGOLDÁS

1. Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk 5 darab 3 cm átmérőjű köralakú pénzdarabot. *Mennyi a valószínűsége, hogy legfejebb 3 pénzdarab fogja valamelyik négyzet csúcsát lefedni?
   Megoldás: A : egy pénz lefed egy csúcsot, $p = \mathbf{P}(A) = \frac{(1.5)^2\pi}{400}, X$: a csúcsokat fedő pénzdarabok száma, $X \in B(5,p)$
   $\mathbf{P}(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} \binom{5}{i} (p)^i (1-p)^{5-i}$.

2. Röntgenvizsgálat során $0,99$ annak a valószínűsége, hogy tbc-s beteg betegségét felfedezik. Annak valószínűsége, hogy egy egészséges embert betegnek találnak $0,001$. A tbc-ben szenvedők aránya a lakosságon belül $0,0001$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ember egészséges, ha átvilágításkor betegnek találták?
   Megoldás: B : a páciens tbc-s, F : a röntgennel tbc-snek találják.
   $\mathbf{P}(B) = 0.0001, \mathbf{P}(F \mid B) = 0.99, \mathbf{P}\left(F \mid \bar{B}\right) = 0.001.$
   A Bayes tételt alkalmazva:
   $\mathbf{P}\left(\bar{B} \mid F\right) = \frac{\mathbf{P}\left(F|\bar{B}\right)\mathbf{P}\left(\bar{B}\right)}{\mathbf{P}\left(F|\bar{B}\right)\mathbf{P}\left(\bar{B}\right)+\mathbf{P}(F|B)\mathbf{P}(B)} = \frac{0.001\cdot0.9999}{0.001\cdot0.9999+0.99\cdot0.0001} \approx 0.91.$

3. Legyen $X \in E(2)$ és $Y = X^2 - 1$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!
   Megoldás: $F_X(t) = 1 - e^{-2t}, t > 0.\mathbf{E}X = \boldsymbol{\sigma}X = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{E}X^2 = \frac{1}{2}.$
   $R_Y = (-1, \infty)$.
   $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X^2 - 1 < t\right) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt{t+1}\right) = 1 - e^{-2\sqrt{t+1}}.$
   $f_Y(t) = F_Y'(t) = e^{-2\sqrt{t+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t > -1.$
   $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^2 - 1 = -\frac{1}{2}.$

4. *Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a legnagyobb eloszlásfüggvényének az értékét a $10e^2$ helyen!
   Megoldás: $\left[10e^2\right] = 73, X$: a legnagyobb kihúzott lottószám.
   $F_X(t) = \mathbf{P}\left(X < 10e^2\right) = \mathbf{P}(X < 74) = \frac{\binom{73}{5}}{\binom{90}{5}}.$

5. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, és $Z = \frac{Y}{X+2}$.
   Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!
   Megoldás: $R_Z = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.
   $F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}(Y < tX + 2t)$.
   Tehát geometriai módszerekkel azt kell megállapítanunk, hogy az egységnégyzet (X,Y) pontjai közül melyikekre teljesül a $Y < tX + 2t$ feltétel. Másképp kell számolni, ha $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ és ha $t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.
   Ha $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, a keresett terület az, ami az $y = tx + 2t$ egyenes alatt van

(egy trapéz), $F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = 2t + \frac{t}{2} = \frac{5t}{2}$.
Ha $t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, ugyanez a terület ötszög lesz, így
$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = 1 - \frac{(1-2t)^2}{2t}$.