Valószínűségszámítás 2. pótzárthelyi dolgozat
Műszaki informatikus BSc
2015. december 4.

1. Legyen X $\lambda = 2$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Adja meg az $\mathbf{E}(2+X)^2$ és $\sigma^2(4+3X)$ mennyiségeket, amennyiben léteznek.
Megoldás: $\mathbf{E}X = 2, \sigma^2 X = 2, \mathbf{E}X^2 = \sigma^2 X + (\mathbf{E}X)^2 = 6.$
$\mathbf{E}(2+X)^2 = 4 + 4\mathbf{E}X + \mathbf{E}X^2 = 18, \sigma^2(4+3X) = \sigma^2(3X) = 9\sigma^2(X) = 18.$

2. Egy dobozban kilenc golyó van, 3 fehér, 3 zöld és 3 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a kihúzott golyók számát, Y pedig a kísérletben kihúzott fehér színű golyók számát. Adja meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Függetlenek?
Megoldás:

$\setminus$ X Y $\setminus$	1	2	3	4	5	6	7
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{168}$	0	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{70}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{1}{56}$	0
3	0	0	0	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{84}$

X és Y *nem* függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X=1, Y=1) = 0$ és $\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{3}$ és
$\mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{28} + \frac{3}{56} + \frac{1}{70} = \frac{3}{10}$. Látható., hogy $0 \neq \frac{1}{10}$.
(Ellenőrzés: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{28} + \frac{2}{168} + \frac{8}{56} + \frac{5}{70} + \frac{1}{84} = 1$)

3. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel, Y pedig normális eloszlású $m = -1$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Tudjuk, hogy X és Y függetlenek egymástól. Számolja ki az alábbi mennyiségeket:
a.) $\operatorname{cov}(X-2Y, X+2Y)$ b.) $\mathbf{E}(2X-4Y)$ c.) $\sigma^2(2X-4Y+153)$.
Megoldás: a.)
$\operatorname{cov}(X-2Y, X+2Y) = \mathbf{E}X^2 - 4\mathbf{E}Y^2 - \left((\mathbf{E}X)^2 - 4(\mathbf{E}Y)^2\right) = \sigma^2 X - 4\sigma^2 Y = \frac{1}{9} - 16 = -\frac{143}{9} = -15.889$
b.) $\mathbf{E}(2X-4Y) = 2\mathbf{E}X - 4\mathbf{E}Y = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3} = 4.6667$
c.) $\sigma^2(2X-4Y+153) = 4\sigma^2(X) + 16\sigma^2(Y) = \frac{4}{9} + 64 = \frac{580}{9} = 64.444$

4. Legyenek $X \in B(10, \frac{1}{3})$ (binomiális) és $Y \in Po(2)$ (Poisson) eloszlású független valószínűségi változók. Adja meg az együttes eloszlásukat. Ha $V = 2X - 1$ és $W = 2 - 5Y$, akkor számolja ki a $\mathrm{R}(V, W)$ korrelációs együtthatót.
Megoldás: $\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \mathbf{P}(X=i) \cdot \mathbf{P}(Y=j) = \binom{10}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{10-i} \cdot \frac{2^j}{j!}e^{-2}, i = 0, 1, \ldots, 10; j = 0, 1, 2, \ldots$
Mivel X és Y függetlenek voltak, így V és W is függetlenek maradnak. Ezért a korrelációs együtthatójuk 0.

5. Az X, Y együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,y) = \begin{cases} 0,8(2x^2 + xy + y^2) & \text{, ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$
Számolja ki a $\mathbf{P}(Y < X)$ valószínűséget és X várható értékét.

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < X) = \displaystyle\iint_{y<x, 0<x<1, 0<y<1} 0.8(2x^2 + xy + y^2)\,dxdy = \int_0^1\int_0^x 0.8(2x^2 + xy + y^2)\,dydx =$
$= \displaystyle\int_0^1 0.8\left(2x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{13.6x^3}{6}dx = \frac{13.6}{24} = 0.56667$
$\mathbf{E}X = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 0.8(2x^3 + x^2y + xy^2)\,dydx = \int_0^1 0.8\left(2x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)dx =$
$= 0.8 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} = 0.66667$