Felsőbb matematika vizsga – 2011-01-10

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Legyen adva az $\mathbb{R}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortér! Mit jelent az, hogy a $\mathcal{V}$ vektortér euklideszi tér?

Hogy definiálva van $\mathcal{V}$-n egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ függvény, hogy
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
$\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
$\langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

2. Mely mátrixok diagonalizálhatók a valós test fölött? (röviden indokoljuk a választ!)
a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) nem, mert már Jordan-alakban van, és az nem diagonális *b)* igen, mert 3 különböző sajátértéke van *c)* igen, diagonális alakban van.

3. Legyen $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere. Tekintsük azt a lineáris leképezést, mely merőlegesen vetít a $\mathcal{W}$ altérre. Mik a sajátértékei e leképezésnek, és mik a hozzájuk tartozó sajátalterek?

$\lambda = 1$: $\mathcal{W}$,
$\lambda = 0$: $\mathcal{W}^{\perp}$.

4. Mely négyzetes mátrixok invertálhatók az alábbiak közül? *a)* $\mathbf{A}$ szinguláris értékei $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, *b)* $\mathbf{B}$ sajátértékei i, $-i$, $\sqrt{5}$, *c)* $\mathbf{C}$ domináns főátlójú, *d)* $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$, ahol $\mathbf{X}$ nem négyzetes teljes oszloprangú, *e)* $\mathbf{E} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$, ahol $\mathbf{X}$ nem négyzetes teljes sorrangú mátrix.

b), c), e)

5. Egy 11×11-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 11-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 6, 3, 2, 1, 0. Mennyi a Jordan-láncok száma? Milyen hosszú a leghosszabb lánc? Rajzoljuk le a Jordan-láncokat! *(2 pont)*

A Jordan-láncok száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 11 - 6 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 5 ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb $\mathbf{O}$-t adó hatványa).

$$\begin{array}{lllllllll} \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & & & & & \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & & & & & \\ \bullet & & & & & & & & \\ \bullet & & & & & & & & \end{array}$$

6. Householder-tükrözéssel határozzuk meg azt a $\mathbf{H}$ mátrixot, mely az $(1, 2, 2)$ vektort olyan vektorba viszi, melynek az első koordinátáját kivéve minden koordinátája 0. *(2 pont)*

$\mathbf{a} = (1, 2, 2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, 2)$,
$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

7. Határozzuk meg a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, 2-, ∞- és Frobenius-normáját! *(2 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty = 4$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{13}$

8. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását és szinguláris felbontását! *(2 pont)*

redukált: $\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \cdot [5] \cdot [1 \;\; 0 \;\; 0]$,

teljes: $\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Számítsuk ki az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

Számolható pl. az $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ képlettel:
$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. Primitívek-e az alábbi mátrixok? Válaszunkat röviden indokoljuk! *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

B nem irreducibilis, így nem primitív. A többi mátrix irreducibilis. $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I}$, tehát sosem lesz pozitív, így nem primitív. **C** irreducibilis, és van a főátlójában pozitív elem, tehát primitív. $\mathbf{D}^5 > \mathbf{O}$, tehát primitív.

11. Adjuk meg az $\left\{ \begin{array}{c} 2x + 5y = 17 \\ 3x - 3y = 1 \\ 6x + 8y = 2 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását, ha az együtthatómátrix QR-felbontása: $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

A megoldás $x = 0$, $y = 1$. (A megoldáshoz az $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ egyenletet kell felírni.)

12. Mondjuk ki a Perron–Frobenius-tétel erősebb alakját (nemnegatív elemű mátrixokra). *(3 pont)*

Ha az **A** nemnegatív mátrix irreducibilis, és $r = \rho(\mathbf{A})$ jelöli a spektrálsugarát, akkor

1. $r > 0$,
2. r sajátértéke **A**-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,
3. **A**-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,
4. r egyszeres sajátérték.

13. Igazoljuk, hogy minden lineáris $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezéshez létezik egy olyan $m \times n$-es mátrix, mely ezt a leképezést generálja! *(3 pont)*

ld. jegyzet

14. Igazoljuk, hogy egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora! *(3 pont)*

ld. jegyzet