

* 1. feladat (14 pont)

Integráljuk az $f(x, y) := x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvényt a az origó középpontú 1 sugarú körlapon!

Mo. Síkbeli polárkoordinátákkal (2p) $(B_1(0) = \underline{P}([0, 1] \times [0, 2\pi]))$:

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} f &\stackrel{(2p)}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r \, d\varphi \, dr \stackrel{(4p)}{=} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2(\varphi) \, d\varphi \, dr \stackrel{(2p)}{=} \left(\int_0^1 r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \, d\varphi \right) \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^1 \left[\frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \stackrel{(1p)}{=} \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

* 2. feladat (4+6+6=16 pont)

Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} -x & , \text{ ha } x \in [-\pi, 0[\\ \pi - x & , \text{ ha } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

- Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt!
- Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Számítsuk ki a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{3})$ értékeket!
- Adjuk meg a Fourier-bázis $(1, \sin(nx), \cos(nx), n = 1, 2, \dots)$ egy olyan elemét, mely zérus együtthatóval szerepel f Fourier-sorában! Indokoljunk!

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, amely integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $[-\pi, \pi]$ felbontható úgy véges sok részintervallumra, hogy ezek belsején f monoton és korlátos. Ekkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, és

$$(\Phi(f))(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

b) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei (2p), ezért

$$\Phi(0) = \frac{0 + \pi}{2} \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{2}, \quad \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(1p)}{=} f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(1p)}{=} \frac{\pi}{3}$$

c) Az $f - \frac{\pi}{2}$ függvény páratlan (2p) (pontosabban egy perióduson véges sok pontban megváltoztatva páratlanná tehető), tehát Fourier-sorában $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén a $\cos(kx)$ együtthatója

zérus ($a_k = 0$) **(2p)** . Ez azt jelenti, hogy f Fourier-sorában $a_0 = \pi \neq 0$, de $k = 1, 2, \dots$ esetén $\cos(kx)$ együtthatója zérus **(2p)** .

Teljes értékű pontszámot ér az is, ha egy konkrét együtthatóról mutatjuk meg, hogy zérus, például $a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(x) dx = \dots = 0$. Indoklás nélküli helyes válasz **(1p)** .

*** 3. feladat (10 pont)**

Legyen $f(x) := e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$). Tudjuk, hogy minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ (ahol $\mathcal{F}$ a Fourier-transzformációt jelöli). $\mathcal{F}(x \mapsto (x+2)e^{-|x|}) = ?$

(Feltehetjük, hogy az $x \mapsto (x+2)e^{-|x|}$ függvény Fourier-transzformálható, ennek bizonyítása nem része a feladatnak.)

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $g(x) := (x+2)e^{-|x|}$. Ekkor a Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján $\mathcal{F}(g)$ differenciálható és

$$\mathcal{F}(g) = \mathbf{i}\mathcal{F}(f)' + 2\mathcal{F}(f) \quad \textbf{(5p)},$$

azaz minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = -\frac{4\mathbf{i}\omega}{(1+\omega^2)^2} + \frac{4}{1+\omega^2} \quad \textbf{(5p)}$$

4. feladat (6+6=12 pont)

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} + 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n} = ? \qquad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n^2}{2+n^2} \right)^{2n^2} = ?$$

Mo. a)

$$9 = \sqrt[n]{9^n} \stackrel{\textbf{(2p)}}{\leq} \sqrt[n]{3^{2n} + 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n} \stackrel{\textbf{(2p)}}{\leq} \sqrt[n]{11 \cdot 9^n} = 9 \cdot \sqrt[n]{11} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 9, \quad \textbf{(1p)}$$

tehát a rendőrelv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} + 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n} = 9$ **(1p)** .

b)

$$\left(\frac{3+n^2}{2+n^2} \right)^{2n^2} \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} \left(\frac{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\textbf{(3p)}} \left(\frac{e^3}{e^2} \right)^2 = e^2,$$

hiszen a fenti sorozatok az $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}^+}$ és $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}^+}$ részsorozatai.

5. feladat (13 pont)

Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^5 + 5x^3 - 20x + 3$$

függvény abszolút szélsőértékeit a $[0, 2]$ intervallumon (amennyiben léteznek)!

Mo. Az f függvény folytonos, a $[0, 2]$ intervallum korlátos és zárt, tehát a Weierstrass-tétel szerint f -nek létezik minimuma és maximuma ezen az intervallumon **(2p)**. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 - 20 \quad \textbf{(2p)},$$

és

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \textbf{(3p)},$$

vagyis az intervallum belsejében egy kritikus pontja van f -nek: az 1 **(1p)**, és $f(1) = -11$ **(1p)**. Vizsgáljuk a végpontokat is: $f(0) = 3$, $f(2) = 35$ **(2p)**. Tehát

$$\min_{x \in [0, 2]} f(x) = -11 \quad \textbf{(1p)} \quad \text{és} \quad \max_{x \in [0, 2]} f(x) = 35 \quad \textbf{(1p)}.$$

6. feladat (13 pont)

Folytonos-e az alábbi függvény?

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(3x^2 + y^4)}{\sqrt{3x^2 + y^4}} \cdot \cos\left(\frac{1}{2x^2 + y^4}\right) & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mo. Az f függvény folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ halmaz minden pontjában **(2p)**, tehát a kérdés megválaszolásához elég az origóbeli folytonosságot vizsgálnunk. Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ -ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ **(2p)**. Ekkor

$$f(x_k, y_k) \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} \underbrace{\sqrt{3x_k^2 + y_k^4}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \textbf{(1p)}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(3x_k^2 + y_k^4)}{3x_k^2 + y_k^4}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \textbf{(1p)}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{2x_k^2 + y_k^4}\right)}_{\text{korlátos (1p)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \textbf{(1p)}$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ **(1p)**, azaz f folytonos az origóban **(1p)**, következésképpen folytonos.

(Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv, de a hallgató tisztában van a határérték tulajdonságaival.)

7. feladat (9 pont)

Bizonyítsuk be, hogy ha egy numerikus sor abszolút konvergens, akkor konvergens!

Mo. Legyen $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ abszolút konvergens numerikus sor és $\varepsilon > 0$. A sorokra vonatkozó Cauchy kritérium szerint **(2p)** létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n > m \geq N$ esetén $\left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| < \varepsilon$ **(2p)**. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $n > m \geq N$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \textbf{(4p)},$$

következésképpen $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konvergens **(1p)**.

8. feladat (4+9=13 pont)

a) Mondjuk ki a szorzatfüggvény deriválási szabályáról szóló állítást!

b) Bizonyítsuk az a) pontbeli állítást!

Mo. a) Ha az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, akkor az $f \cdot g$ függvény is differenciálható x_0 -ban **(2p)** és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \textbf{(2p)}$$

b) Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{\textbf{(4p)}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségénél kihasználtuk, hogy a g függvény folytonos x_0 -ban **(1p)**, hiszen ott a feltevés miatt differenciálható **(1p)** (és x_0 belső pontja $\text{Dom}(g)$ -nek), azaz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Tehát $f \cdot g$ differenciálható x_0 -ban és adódik az állításbeli egyenlőség is.
