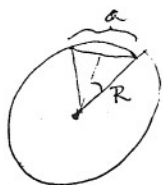


1

1) Feladat (08 pont).

Számolja ki a kör kerületét mint a beírt szabályos sokszögek kerületeinek a határértékét!



$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n} \quad a = 2R \sin \frac{\pi}{n} \quad (2)$$

$$k_n = n \cdot a = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 2R\pi \quad (2)$$

mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vagy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \quad (2)$

2

2) Feladat (12 pont).

Az $y = y(x)$ függvénynek milyen lokális szélsőértéke van az origóban, ha ismeretes, hogy kétszer differenciálható, átmegy a $(0,0)$ ponton és kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$\sinh y + y \sinh x + x^2 = 0$$

$$y' \cosh y + y' \sinh x + y \cosh x + 2x = 0 \quad (1)$$

$$y' \cdot 1 + y' \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = 0$$

$$y'(0) = 0 \quad (3)$$

$$y'' \cosh y + (y')^2 \sinh y + y'' \sinh x + y' \cosh x + y' \cosh x + y \sinh x + 2 = 0 \quad (1)$$

$$y''(0) = -2 \quad (2)$$

$$y'(0) = 0 \text{ és } y''(0) < 0 \Rightarrow \text{lok. max. van.} \quad (2)$$

3

3) Feladat (17 pont).

a) Mondja ki és bizonyítsa be a Rolle tételt! A felhasznált tételt (tételeket) írja le!

b) Igaz-e, hogy ha f differenciálható $[0,1]$ -ben és pontosan három gyöke van $[0,1]$ -ben, akkor f' -nek legalább két gyöke van $[0,1]$ -ben?

a)

(T) Rolle tétel:

Ha f folytonos $[a,b]$ -n és differenciálható (a,b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$

(B) Weierstrass II. tétele értelmében f -nek van minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $f(x) \equiv \text{konst.}$ és így $\forall \xi \in (a,b)$ -re $f'(\xi) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(\xi) = 0$ (ξ a szélsőérték hely).

A felhasznált tételek:

Ha f folytonos $[a,b]$ -ben, akkor ott felveszi az infimumát ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \left(= \max_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = \max f([a,b]) \right)$$

$$f(\beta) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \left(= \min_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = \min f([a,b]) \right)$$

(T) Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.
($K_{c,\delta} \subset D_f$)

b) Legyenek a gyökök rendre $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$.

f -re teljesülnek a Rolle tétel feltételei az $[x_1, x_2]$ -n

és az $[x_2, x_3]$ -n is. Ezért $\exists$ legalább egy $\xi \in (x_1, x_2)$

és $\eta \in (x_2, x_3)$, hogy $f'(\xi) = 0$ és $f'(\eta) = 0$ ($\xi \neq \eta$)

4)
30]

4) Feladat (30 pont).

a) (10p)

Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyen az

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3}$$

függvény monoton! Van-e lokális szélsőértéke f -nek?

b) (6p)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} = ?$$

c) (7p) *

$$\int_a^\infty x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} dx = ?$$

d) (7p) *

Írja le a numerikus sorokra vonatkozó integrál kritériumot, majd ennek alapján döntse el, hogy konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{2}{3}n^3}$$

Becsülje meg a sorösszeg s_{10} -zel való közelítésének a hibáját!

a)
10]

$$f'(x) = 2x e^{-\frac{2}{3}x^3} + x^2 \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 3x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} \quad (2)$$

$$= 2x(1 - x^3) e^{-\frac{2}{3}x^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \quad (1)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-		+		-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		lok. min		lok. max.	

4/b)

6]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\frac{2}{3}x^3}} \stackrel{\infty}{=} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\frac{2}{3} \cdot 3x^2 e^{\frac{2}{3}x^3}} = 0 \quad (3) \quad (1)$$

4/c)

7]

$$\int_a^\infty x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} dx = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_a^\Omega x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} dx =$$

$$= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_a^\Omega -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3} dx =$$

$$= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{2}{3}x^3} \right]_a^\Omega \left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{2}{3}\Omega^3} - e^{-\frac{2}{3}a^3} \right) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}a^3}$$

4/d)

7]

Legyen f pozitív értékű monoton csökkenő függvény $[1, \infty)$ -en és $f(k) = a_k > 0$

a. Ha $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergens $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergens

b. Ha $\int_1^\infty f(x) dx$ divergens $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergens

$f \geq 0$ és $f \searrow 0$ (lásd a)) feltételek teljesülnek $\Rightarrow$ a sor konvergens. (2)

$$H = |s - s_{10}| = \sum_{n=11}^\infty a_n \leq \int_{10}^\infty f(x) dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}10^3} \quad (3)$$

5)
10

*5) Feladat (10 pont).

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = ?$$

$$I = \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} dx =$$

$$A(x+1) + Bx = 1 \quad (1)$$

$$x=0 \quad A=1 \quad (1)$$

$$x=-1 \quad B=-1 \quad (1)$$

$$I = \ln|x| - \ln|x+1| + C \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx &= \left[\ln|x| \right]_1^2 - \left[\ln|x+1| \right]_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \ln \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

6)
11

*6) Feladat (11 pont).

Vezesse be az $x = (1/2) \sin t$ új változót az

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2} dx$$

integrálba majd határozza meg!

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-4 \frac{\sin^2 t}{4}} \cdot \frac{1}{2} \cos t dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} \quad (4)$$

7)
12

7) Feladat (12 pont).

a) (3 p) Indokolja meg, hogy az

$$x = \frac{1}{3}t^3 + t, \quad y = t^7 + t, \quad t \in [0, 1]$$

paraméteresen adott görbe tekinthető egy $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ grafikonjának!

b) (2 p)

$$\frac{dx}{dt} = ? \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

c) (4 p) * Számolja ki a fenti görbe szakasz alatti tartomány területét!

a) $\dot{x} = t^2 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3}t^3 + t$ szigorúan monoton növekvő.
 $\Rightarrow t$ kifejezhető mint az x függvénye (függvényfejtés).
 Ezt beírva az $y = t^7 + t$ kifejtésébe kapjuk,
 hogy y megadható x függvényeként. (3)

$$b) \quad \dot{x} = t^2 + 1, \quad \dot{y} = 7t^6 + 1 \quad (2)$$

$$\text{Terület} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (t^7 + t)(t^2 + 1) dt = \int_0^1 (t^9 + t^7 + t^3 + t) dt = \\ &= \left[\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{4+5+10+20}{40} = \frac{39}{40} \end{aligned} \quad (1)$$

8

Pótfeladat.

Csak a kettes és a hármas vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

10

8) Feladat (10 pont).

Határozza meg az

$$f(x) = 3 \arcsin(5x - 2)$$

függvénynek az f^{-1} inverzét!

$$f^{-1}(x) = ? \quad D_{f^{-1}} = ? \quad R_{f^{-1}} = ?$$

Az arcsin függvény lineáris transzformációja,
ezért f az inverze. ①

$$-1 \leq 5x - 2 \leq 1$$

$$1 \leq 5x \leq 3$$

$$\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad ① \quad D_f = R_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right] \quad ①$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(5x - 2) \leq \frac{\pi}{2} \quad ②$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq 3 \arcsin(5x - 2) \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad ①$$

$$x = 3 \arcsin(5y - 2) \quad ①$$

$$\frac{x}{3} = \arcsin(5y - 2)$$

$$\sin \frac{x}{3} = 5y - 2$$

$$\frac{2 + \sin \frac{x}{3}}{5} = y \quad ②$$