1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2009 nyár A2

1. Legyen $\mathcal{L}$ lineáris tér egy bázisa: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Adja meg az $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(L \to L)$ lineáris transzformáció magterének egy bázisát, ha

$$\mathbf{A}e_1 = -e_1 - e_2\,,\quad \mathbf{A}e_2 = e_1 - e_3\,,\quad \mathbf{A}e_3 = 2e_1 - e_2 - 2e_3 + e_4\,,\quad \mathbf{A}e_4 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 - 2e_4\,.$$

MO. $\mathbf{A}$ mátrixa az e bázisban: $\underline{\underline{A}}_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **2p**

Megoldandó az $\underline{\underline{A}}_e \underline{\underline{x}}_e = \underline{\underline{0}}$ homogén egyenlet. **2p**

Gauss-eliminációval $\underline{\underline{A}}_e \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2p**

Ker$\mathbf{A}$ egy dimenziós, egy bázisa az $-e_1 + 5e_2 - 2e_3 - e_4$ vektorból álló egyelemű rendszer. **4p**

10p

2. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Deriválható-e az f függvény az origóban?

MO. f deriválható az origóban, ha $\dfrac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$. **2p**

Nos, $f(x,0) = x \rightsquigarrow f_x(0,0) = 1$ és $f(0,y) = 0 \rightsquigarrow f_y(0,0) = 0$. **2p**

Így $d(x,y) = \dfrac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^3 - x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dfrac{-y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ **2p**

Ennek azonban nincs határértéke az origóban, mert $d(x,x) = \dfrac{-x^3}{2^{3/2}|x|^3} \xrightarrow[x\to 0-]{} 2^{-3/2} \neq 0$, tehát f nem deriválható az origóban. **4p**

10p

3. Legyen K az a síkbeli háromszög, melynek csúcsai a (1,0), (0,1), (-1,0) pontok. Határozza meg az $\iint_K x^4 y\,dx\,dy$ értékét!

MO. $\displaystyle\iint_K x^4 y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} x^4 y\,dx\,dy =$ **5p**

$$= \int_0^1 \frac{x^5}{5}\Big|_{y-1}^{1-y} \cdot y\,dy = \ldots \quad \ldots = \frac{1}{105}$$ **5p**

10p

4. Állapítsa meg, hogy az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \ldots$ numerikus sor esetén

(a) konvergens-e a kettesével bezárójelezett sor **(b)** konvergens-e az eredeti sor
(c) abszolút konvergens-e az eredeti sor.

MO. (a) A kettesével bezárójelezett sor: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. **1p**

Ennek tagjai: $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{n+2-n}{n(n+2)} = \dfrac{2}{n(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ és $\sum 1/n^2$ konvergens, tehát a kettesével bezárójelezett sor konvergens. **2p**

(b) Mivel a bezárójelezett sor konvergens, a tagok 0-hoz tartanak és a zárójelekben szereplő tagok száma max. 2, így a zárójelek elhagyása nem változtat a konvergencián, az eredeti sor is konvergens. **3p**

(c) Az abszolútértékekből alkotott sort kettesével bezárójelezve kapott sor: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2})$.
Ennek tagjai: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}=\frac{n+2+n}{n(n+2)}=\frac{2n+2}{n(n+2)}\sim\frac{1}{n}$ és $\sum 1/n$ divergens
tehát az abszolútértékekből alkotott sornak már egy bezárójelezése is divergens, 2p
így az eredeti sor nem abszolút konvergens.

$\frac{2p}{10p}$

5. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\dots$ függvénysor ?

MO. A sor a $\sin x$ Taylor-sora, mely mindenütt előállítja a függvényt, tehát mindenütt konvergens, 3p
így (lévén hatványsor) minden véges intervallumon egyenletesen konvergens. 4p

(VAGY: minden korlátos $[-K,K]$ intervallumon (abszolút értekben) majorálható a konvergens $K+\frac{K^3}{3!}+\frac{K^5}{5!}+\frac{K^7}{7!}\pm\dots$ numerikus sorral (ez utóbbi konvergenciája a hányadoskritériummal adódik mert ($n\geq 1$-re): $\frac{K^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{K^{2n-1}}=$
$=\frac{K^2}{2n(2n+1)}\longrightarrow 0<1$), így itt Weierstrass-kritériummal egyenletesen konvergens.)

DE nem egyenletesen konvergens az egész számegyenesen mert már az
$f_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ fv. sorozat sem az, hisz az $a_n=2n+1\longrightarrow\infty$ sorozat mentén
$|r_n(a_n)|=|f_n(a_n)|\longrightarrow\infty$, hisz ez az $\frac{n^n}{n!}\longrightarrow\infty\neq 0$ részsorozata.

$\frac{3p}{10p}$

6.

(a) Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges véges dimenziós lineáris tér, továbbá legyen **A** és **B** két $\mathcal{L}$-ből $\mathcal{L}$-be képező lineáris operátor. Igaz-e, hogy

(a1) Ha mind **A** mind **B** képtere egyelemű, akkor $\mathbf{A}=\mathbf{B}$

(a2) Ha mind **A** mind **B** magtere egyelemű, akkor $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

(b) Legyen f a síkon mindenütt deriválható kétváltozós függvény, $a\in\mathbb{R}^2$ tetszőleges. Igaz-e valamelyik állítás?

(b1) Ha grad $f=0$ az a-ban, akkor f-nek lokális szélsőértéke van a-ban

(b2) Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor grad $f=0$ az a-ban.

(c) Legyen $a_n\geq 0$ minden n-re. Igaz-e valamelyik állítás?

(c1) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ sor konvergens, akkor $a_n\longrightarrow 0$

(c2) Ha $a_n\longrightarrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ sor konvergens.

MO.

(a1) Igen: mindkettő a nulloperátor 2p

(a2) Nem: csak annyit jelent, hogy invertálhatóak, pl. a háromdimenziós téren **A** valamely tükrözés, míg **B** valamely elforgatás. 2p

(b1) Nem: pl. $f(x,y)=xy$ az origóban. 1p

(b2) Igen 1p

(c1) Igen: ez szükséges feltétele a konvergenciának (Cauchy konvergencia kritériumból) 2p

(c2) Nem: pl. az $(1/2^n)$ és a $(-1/n)$ összefésülése divergens, mert egy konvergens és egy divergens összefésülése. 2p

$\frac{2p}{10p}$