Felsőbb matematika vizsga – 2012-12-18

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ tér egy bázisa. Egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor standard bázisbeli koordinátás alakját jelölje $[\mathbf{v}]$, a $\mathcal{B}$ bázisbeli alakját $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Ismerjük a $[\mathbf{b}_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és a $[\mathbf{v}]$ koordinátás alakokat. Fejezzük ki mátrixműveletekkel a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinátás alakot.

2. Ismerjük egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását! Hogyan számítanánk ki az $\mathbf{A}^{-1}$ inverzet?

3. Hány dimenziós alteret feszítenek ki az $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 3, 5, 0)$ és $(0, 1, 2, 0)$ vektorok $\mathbb{R}^4$-ben? Számítsuk ki az általuk kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixát! *(3 pont)*

4. A valós $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris érték szerinti $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ felbontásának ismeretében írjuk föl az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ egy bázisát és e bázis elemei közt az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés hatását!

5. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* diagonalizálható (a választ bázisok segítségével fejezzük ki), *(b)* diagonalizálható (a választ a geometriai multiplicitásokkal fejezzük ki), *(c)* ortogonálisan diagonalizálható, *(d)* unitéren diagonalizálható legyen? *(2 pont)*

6. Milyen képlettel definiálhatjuk azt a fogalmat, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix *(a) nilpotens*, *(b) primitív.*

7. Adva van az $\mathbb{R}^4$ tér három vektora: $(1, 1, 1, -1)$, $(1, 0, 0, 3)$, $(2, 1, 1, 2)$. Adjuk meg az általuk kifeszített tér egy ortonormált bázisát a Gram–Schmidt-eljárással. *(2 pont)*

8. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldását keressük. *(2 pont)*
(a) Milyen feltétel fennállása esetén kapunk egyetlen optimális megoldást? *(b)* Hogyan kaphatjuk ezt meg, ha ismerjük $\mathbf{A}$ QR-felbontását?

9. Mit tudunk egy valós $\mathbf{A}$ mátrix főminorairól, ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, és mit tudunk vezető főminorairól, ha $\mathbf{A}$ negatív definit? *(2 pont)*

10. Mit jelent az, hogy az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek?

11. Egy $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéshez keressünk olyan $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ bázisokat, amelyekben e lineáris leképezés mátrixa diagonális. Léteznek-e minden L-re ilyen bázisok? *(2 pont)*

12. Írjuk le a Perron–Frobenius-tétel erős változatát! *(3 pont)*

13. Bizonyítsuk be, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek! *(4 pont)*