

1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}, & \text{ha } x \geq 0; \\ \frac{\sin(x^2-1)}{x+1}, & \text{ha } x < 0; \end{cases}$$

Vizsgálja meg, hogy az f függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobboldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1, -1, 0\}$. f folytonos $\mathbb{R} \setminus D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, +1, -1\}$ -en, mert itt folytonos függvények hányadosaként definiáljuk, és a nevező $\neq 0$.

Vizsgáljuk: $-1, 0, +1$

$+1$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow +1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1^\pm} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} = \frac{\operatorname{arctg}(1)}{0^\pm} = \pm \infty; \quad \text{mátrahatár szakadás}$$

$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} > 0$

0 -ben:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2-1)}{x+1} = \frac{\sin(-1)}{+1} = -\sin(1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} = \frac{+\infty}{0-1} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Elsőfajta,} \\ \text{végső nyí} \end{array} \right\} \text{szakadás}$$

-1 -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2-1)}{x+1} \cdot \frac{(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \cdot (x-1) = 1 \cdot (-2) = -2$$

Elsőfajta, megszüntethető

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját a megadott tartományokon! (Számolási szabályokkal.)

$$(a) \quad f(x) = e^{2x^3+5} \cdot \cos(\sqrt{x}) \quad (x > 0) \quad (b) \quad g(x) = \frac{x^2 \operatorname{sh}(5x)}{\operatorname{arch}(2x+1)} \quad (x > -1/2)$$

$$a) \quad f'(x) = 6x^2 e^{2x^3+5} \cdot \cos(\sqrt{x}) + e^{2x^3+5} \cdot (-\sin(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (7)$$

$$b) \quad g'(x) = \frac{(2x \cdot \operatorname{sh}(5x) + x^2 \cdot 5 \operatorname{ch}(5x)) \operatorname{arch}(2x+1) - x^2 \operatorname{sh}(5x) \cdot \frac{2}{\sqrt{(2x+1)^2 - 1}}}{\operatorname{arch}^2(2x+1)} \quad (7)$$

3. feladat (13+13=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \ln(x) \right) = ?$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(4x-1)}{e^x \cdot \operatorname{ch}(3x+3)} = ?$$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{\pm\infty} \cdot \underbrace{\ln(x)}_0 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{2 \sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{\pi x} = -\frac{2 \sin^2(\pi/2)}{\pi} = -\frac{2}{\pi} \quad (2)$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(4x-1)}{e^x \operatorname{ch}(3x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{4x-1} - e^{-4x+1}) \cdot 2}{2 \cdot e^x \cdot (e^{3x+3} + e^{-3x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{6x}}{e^{6x}} \cdot \frac{e^{-1} - e^{-8x+1}}{e^3 + e^{-6x-3}} = \frac{e^{-1}}{e^3} = e^{-4} \quad (3)$$

4. feladat (7+10+10+8=35 pont)

$$f(x) = x^4 - 4x^3, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a fenti függvényen, azaz

- (a) Határozza meg a függvény limeszét $\pm\infty$ -ben és a függvény zérushelyeit!
- (b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény monoton növekvő illetve csökkenő! Határozza meg a lokális szélsőérték helyeket!
- (c) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény konvex illetve konkáv! Határozza meg az inflexiós pontokat!
- (d) Vázlatosan ábrázolja a függvényt! Határozza meg f értékkészletét!

a, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ②; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ②

$$f(x) = x^3(x-4) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ vagy } x=4 \text{ ③}$$

b, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = ③$
 $= 4x^2(x-3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ vagy } x=3 \text{ ③}$$

$$f(3) = 81 - 4 \cdot 27 = -27 \text{ lok. min.}$$

④

x	$x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$3 < x$
f'	-	0	-	0	+
f	$\searrow$		$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

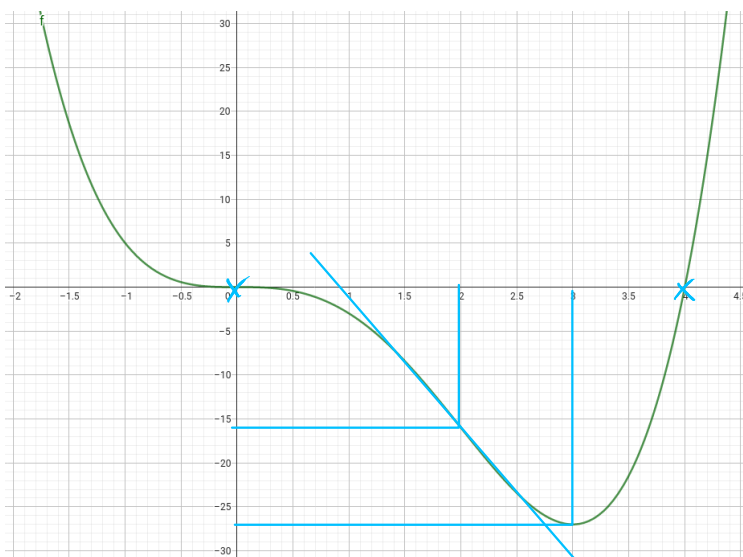
nincs lokális
szélsőérték

c, $f''(x) = 12x^2 - 24x = ③$
 $= 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ vagy } x=2 \text{ ③}$

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x$
f''	+	0	-	0	+
f	U	inflex. pont	n	inflex. pont	U

④ $f(0) = 0$
 $f(2) = 16 - 4 \cdot 8 = -16$

d,



$$R_f = [-27; \infty) \text{ ③}$$

⑤

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot \sin(x^{\frac{1}{3}}), \quad D_f = [0, +\infty)$$

Határozza meg f deriváltját minden $x > 0$ pontban, valamint f jobb oldali deriváltját az origóban!

Ha $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} \sin(x^{1/3}) + x^{2/3} \cos(x^{1/3}) - \frac{1}{3} x^{-2/3} \quad (5)$$

Ha $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad (2) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (h^{2/3} \sin(h^{1/3}) - 0) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sin(h^{1/3})}{h^{1/3}} = \underline{1} \quad (3) \end{aligned}$$