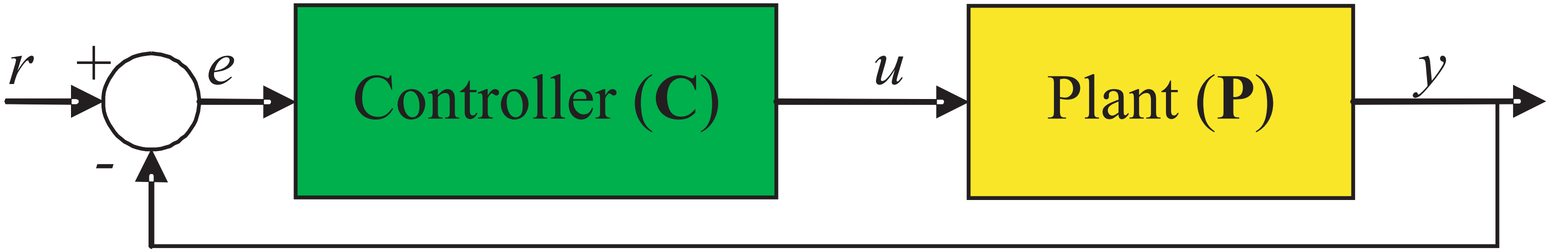
Szabályozástechnika

Tantermi gyakorlat 1

Miért van szükség szabályozástechnikára?
Mi a szabályozástechnika célja?

A szabályozási kör tömör működési vázlata



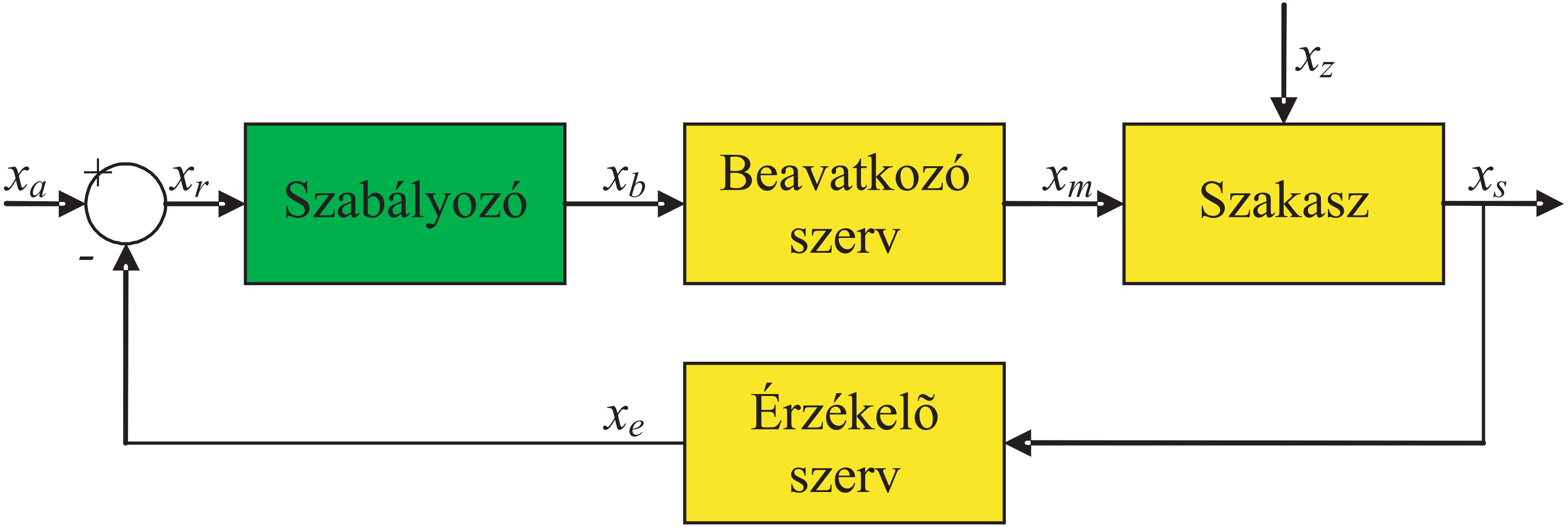
Példák:

- Termosztát
- Erőművek
- Járművek (autó, repülő)
- Robotok
- rakéta
- Merevlemez

Képzeljünk el egy repülőt amely
•2400 km/s sebességgel
•3mm-re a föld felett
•egyenként 2.5 cm-es széles sávval rendelkező 100 000 sávos autópályán
•Előre előírt gyors sávváltásokot valósít meg
•A sávok nem egyenesek, hanem hullámosan kanyarodnak
•Nincsenek sávokat elhatároló jelek felfestve (csak nagyon ritkán pontszerűen)

Skálázzuk le a fentieket 100 0000-ed részére.

A szabályozási kör elvi felépítése



Feltevések: $f(t)=0$, ha *t* negatív

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt$$ véges valamely véges σ esetén

Laplace transzformáció: $$F(s)=\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Inverz Laplace transzformáció: $$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) s^{st} ds$$ $$s = j\omega$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\}=\frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\}=1 \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}=\frac{1}{s-\alpha}$$

$$\mathcal{L}\{1-e^{-t/T}\}=\frac{1}{s(1+sT)} \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega_0 t\}=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos\omega_0 t\}=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0) \qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\}=s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau\right\}=F_1(s)F_2(s) \qquad \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

Legyen az átviteli függvény egy racionális törtfüggvény:

$$F(s) = \frac{4s+3}{s^2(s+1)(4s+1)(10s+1)}$$

```
Az inverz Laplace transzformáció Matlabban:

>> [r,p,k]=residue([4 3],conv(conv(conv([4 1],[10 1]),[1 1]),[1 0 0]) )
r =
   -0.0370
   -7.1111
   48.1481
  -41.0000
    3.0000
p =
   -1.0000
   -0.2500
   -0.1000
         0
         0
k =
     []
```

Az eredmény értelmezése:

$$F(s) = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{r_n}{s-p_n} + k(s)$$

$$F(s) = \frac{4s+3}{s^2(s+1)(4s+1)(10s+1)} = -\frac{0.037}{s+1} - \frac{7.1111}{s+0.25} + \frac{48.1481}{s+0,1} - \frac{41}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$f(t) = 3t - 41 - 0{,}037e^{-t} - 7{,}1111e^{-0{,}25t} + 48{,}1481e^{-0{,}1t}, \text{ ha } t \geq 0$$

Többszörös pólus esetén: $$\frac{r_j}{s-p_j}+\frac{r_{j+1}}{(s-p_j)^2}+\ldots+\frac{r_{j+m-1}}{(s-p_j)^m}$$

Tag:

A tag átviteli függvénye:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}, \qquad n>m$$

$$W(s)=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

A számláló gyökei az átviteli függvény (a tag) zérusai. A nevező gyökei az átviteli függvény (a tag) pólusai.

A kimenet Laplace transzformáltja:

$$Y(s)=W(s)U(s)$$

Az ugrásválasz Laplace transzformáltja:

$$V(s)=\frac{W(s)}{s}$$

Az állapotteres leírás:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx+Du$$

Az átviteli függvény az állapotteres alakból:

$$sX(s)=AX(s)+BU(s)$$
$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)$$
$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Időtartomány típusa	Reprezentáció	Tárolt struktúra mezői
Folytonos	Átviteli függvény `tf`	`num` – számláló(k) cellatömbje `den` – nevező(k) cellatömbje
Folytonos	Zérus – Pólus – Erősítés `zp`	`z` – zérusok cellatömbje `p` – pólusok cellatömbje `k` – erősítések mátrixa
Folytonos	Állapotegyenlet `ss`	`a` – állapotmátrix `b` – bemeneti erősítés mátrixa `c` – kimeneti erősítés mátrixa `d` – közvetlen erősítések mátrixa

Időtartomány típusa	Reprezentáció	Tárolt struktúra mezői
Diszkrét	Átviteli függvény	`num` – számláló(k) cellatömbje `den` – nevező(k) cellatömbje `Ts` – mintavételi periódusidő
Diszkrét	Zérus – Pólus – Erősítés	`z` – zérusok cellatömbje `p` – pólusok cellatömbje `k` – erősítések mátrixa `Ts` – mintavételi periódusidő
Diszkrét	Állapotegyenlet	`a` – állapotmátrix `b` – bemeneti erősítés mátrixa `c` – kimeneti erősítés mátrixa `d` – közvetlen erősítések mátrixa `Ts` – mintavételi periódusidő

Tartomány	Módszer	Matlab utasítás	Magyarázat
Frekvencia	Bode-diagram	`bode`	A pozitív képzetes féltengely képe az átviteli függvény alatt. A diagram egy amplitúdó-jelleggörbéből és egy fázis-jelleggörbéből áll.
Frekvencia	Nyquist-diagram	`nyquist`	A képzetes tengely képe az átviteli függvény alatt a komplex számsíkon. A kép mindig tengelyszimmetrikus a számsík valós tengelyére.
Frekvencia	pólus-zérus eloszlás	`pzmap`	Az átviteli függvény pólusai és zérusai a komplex számsíkon
Idő	impulzusválasz	`impulse`	időfüggvény kerül (nulla kezdeti feltételek mellett).
Idő	Ugrásválasz	`step`	időfüggvény kerül (nulla kezdeti feltételek mellett).

Bármely átviteli függvény előállítható

egytárlós és kéttárolós tagok

párhuzamos vagy soros kapcsolásával.

Egytárolós tag

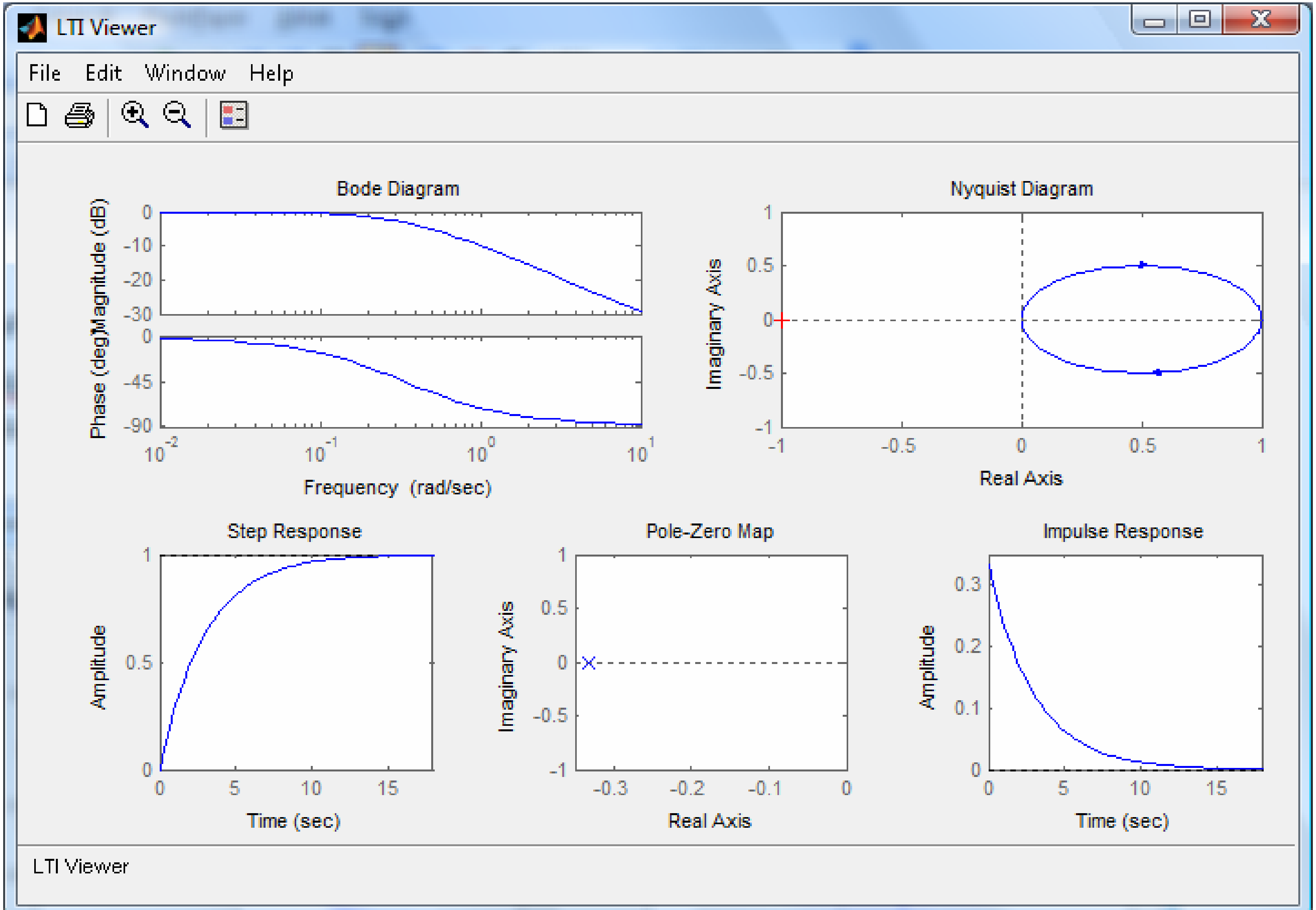
átviteli függvénye: $$W(s) = \frac{1}{1+Ts}$$ (T pozitív)

pólusa: $$-\frac{1}{T}$$

ugrásválasza: $$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(Ts+1)}\right\} = 1 - e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

$$v(\infty) = 1$$

impulzusválasza: $$w(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$



$$T = 3\,\mathrm{sec}$$

Bode diagram amplitúdó- és fázis-jelleggörbéje:

$$a_{dB}(\omega) = 20\lg\left|W(j\omega)\right| = 20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = -20\lg\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\arctan(\omega T)$$

Kéttárolós lengő tag

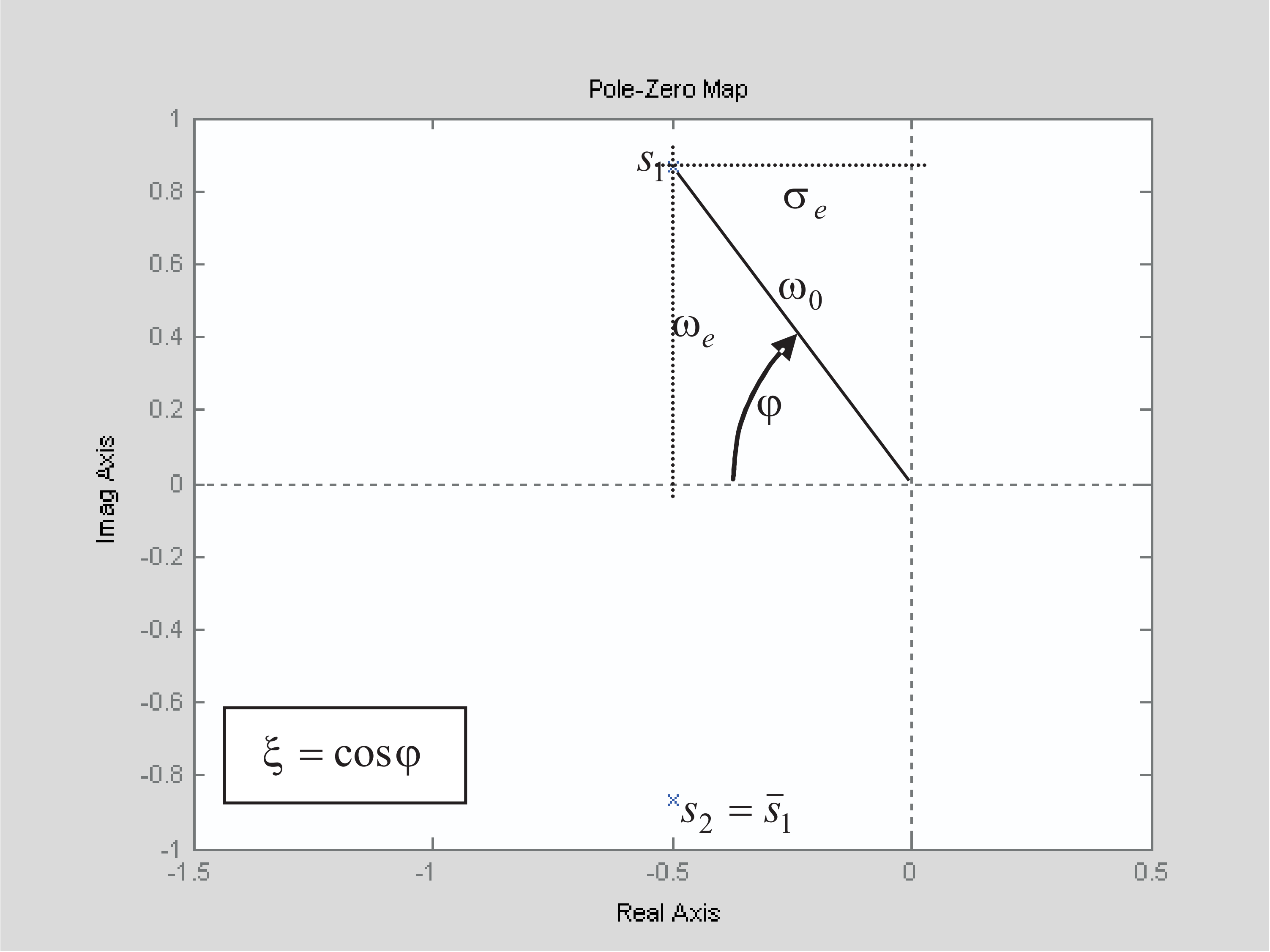
átviteli függvénye: $W(s) = \dfrac{1}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2}$ $\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ (*T* pozitív)

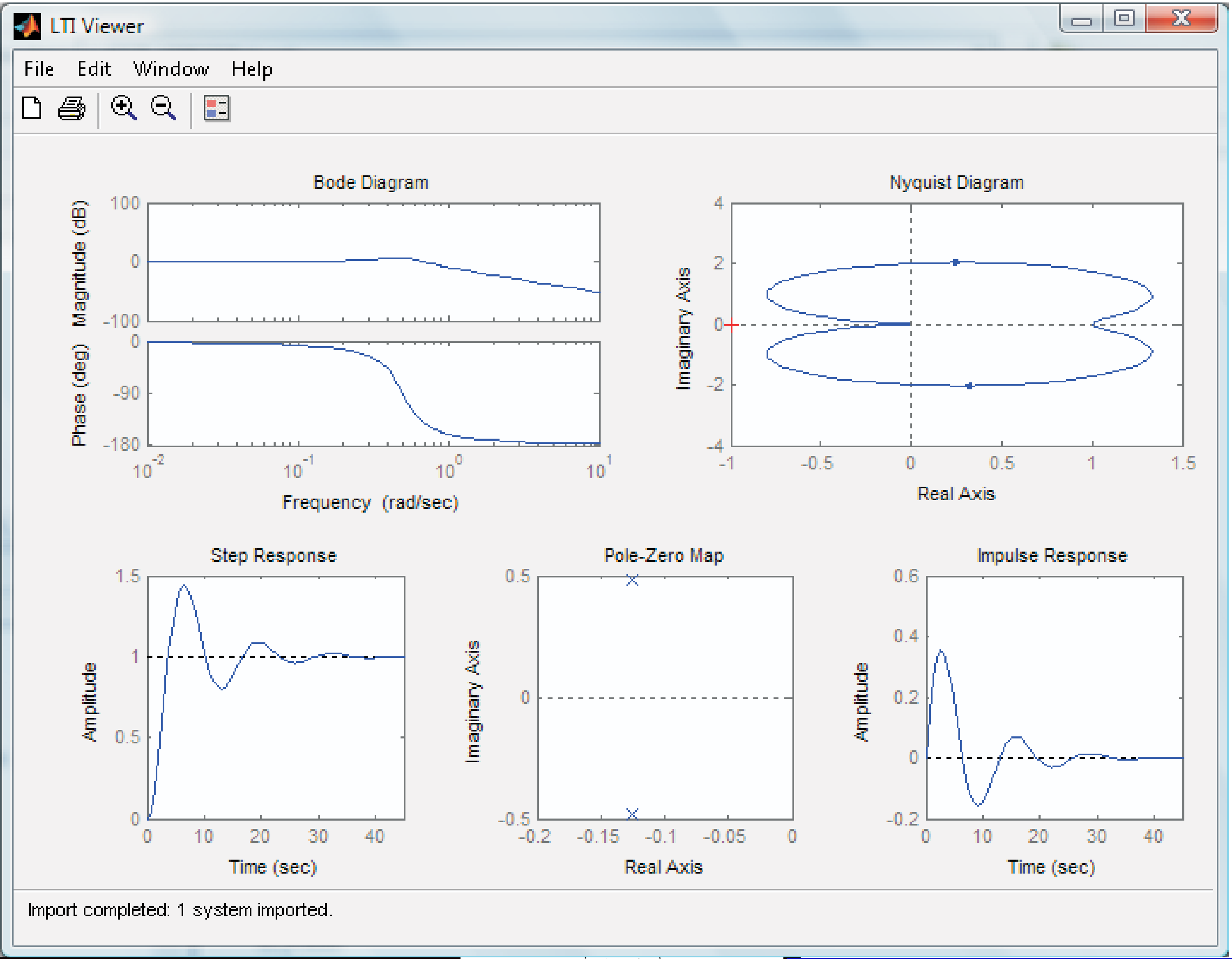
pólusai: $s_{1,2} = -\omega_0\xi \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ $0 \le \xi < 1$

$s_{1,2} = -\sigma_e \pm j\omega_e$ $\sigma_e := \omega_0\xi$ $\omega_e := \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

ugrásválasza: $v(t) = 1 - \dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos\xi), \quad t \ge 0$

impulzusválasza: $w(t) = -\dfrac{\omega_0}{\omega_e} e^{-\sigma_e t}(-\sigma_e \sin(\omega_e t + \varphi) + \omega_e \cos(\omega_e t + \varphi)), \quad t \ge 0$


Pole-Zero Map
Imag Axis
Real Axis
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
s_1
σ_e
ω_0
ω_e
φ
$\xi = \cos\varphi$
$s_2 = \bar{s}_1$


LTI Viewer
File Edit Window Help
Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)
Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
Step Response
Amplitude
Time (sec)
Pole-Zero Map
Imaginary Axis
Real Axis
Impulse Response
Amplitude
Time (sec)
Import completed: 1 system imported.

$$\xi = 0.25$$

$$T = 2\sec$$

Bode diagram amplitúdó- és fázis-jelleggörbéje:

$$a_{dB}(\omega) = -20\lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2}$$

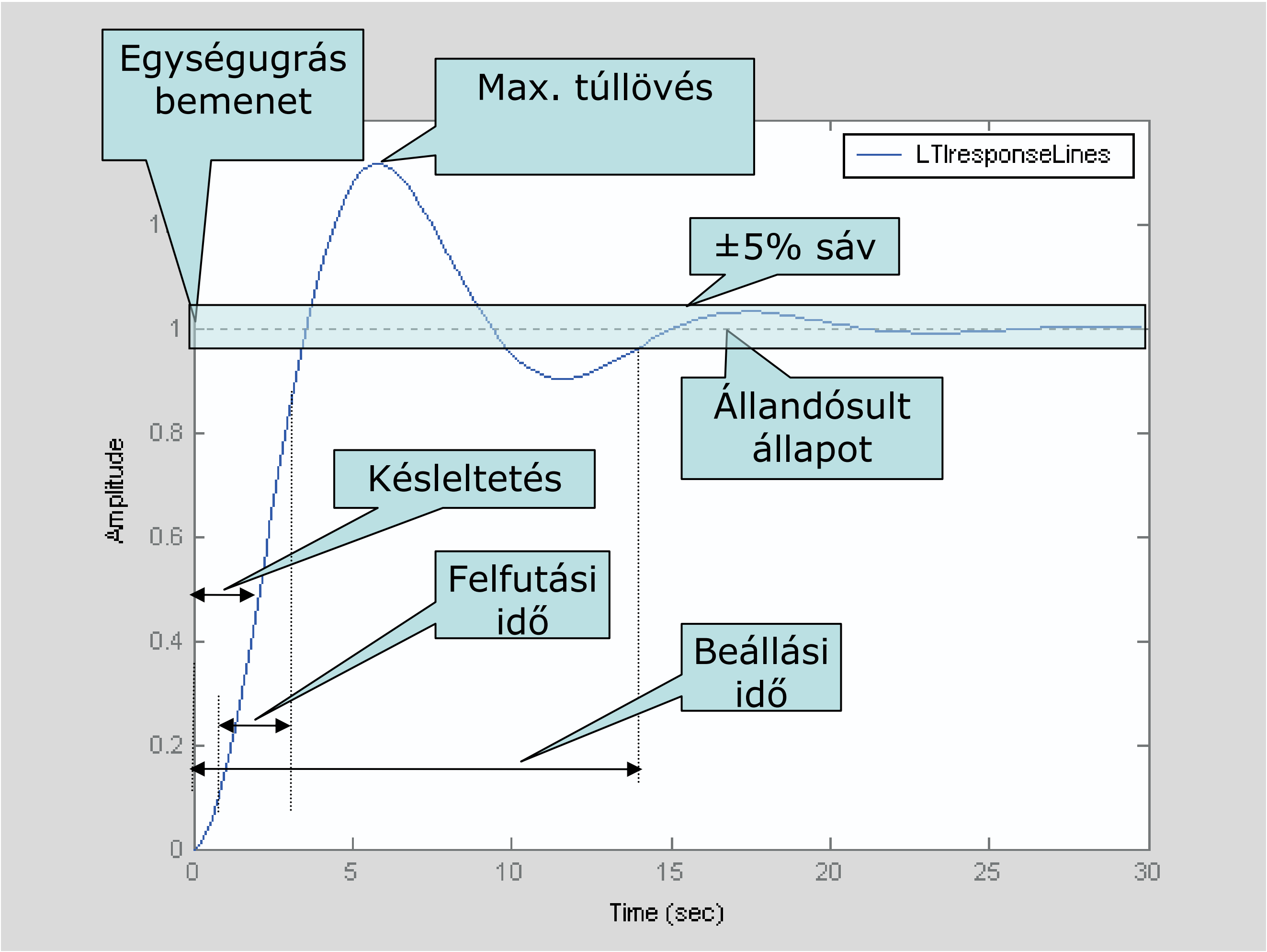
$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}$$

Az ugrásválasz első maximumhelye:

$$\frac{d}{dt}v(t)=w(t)=0\Rightarrow\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t=0$$

$$T_k=\frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\Rightarrow T_m=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

Kéttárolós lengő tag ugrásválaszának jellemzői

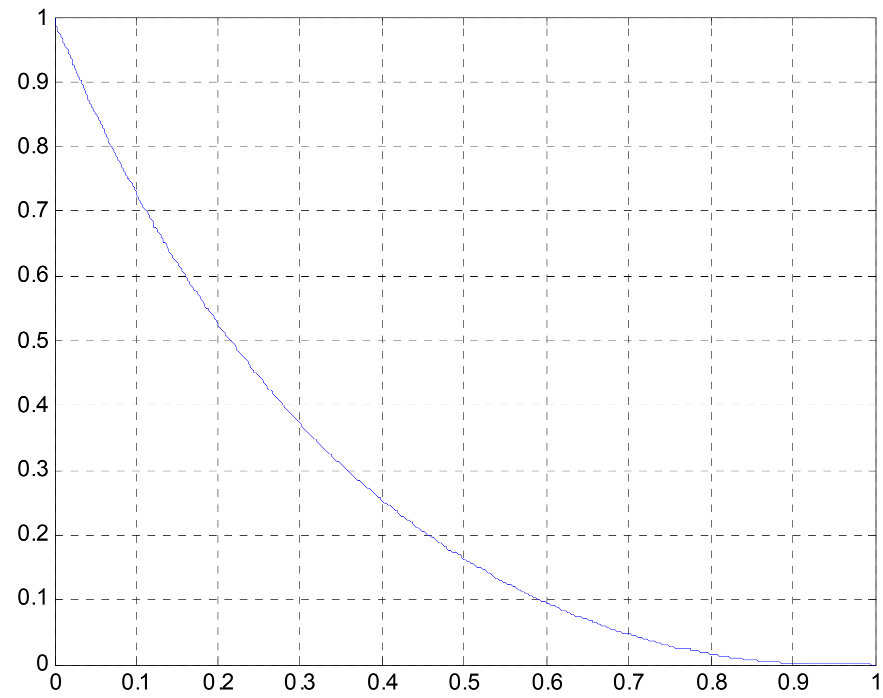


Az maximális túllövés mértéke:

$$\Delta v = v(T_m) - 1 = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

A túllövés a csillapítás függvényében:

```
>> ksi = 0:0.01:1;
>> Deltav = exp(-pi*ksi./sqrt(1-ksi.^2));
Warning: Divide by zero.
>> plot(ksi,Deltav); grid on;
```



A kéttárolós rendszer esetében az ugrásválasz exponenciális burkológörbéjének segítségével számítható ki, hogy a válasz mikor kerül a végérték körüli α %-os sávba

$$\exp(-\sigma_e T_{\alpha\%}) = \frac{\alpha}{100} \qquad T_{\alpha\%} = \frac{\ln\frac{100}{\alpha}}{\sigma_e}$$

Speciálisan:

$$T_{2\%} = \ln\frac{50}{\sigma_e} \approx \frac{4}{\sigma_e} \qquad T_{5\%} = \frac{\ln 20}{\sigma_e} \approx \frac{3}{\sigma_e}$$

Nemlineáris rendszer alakja:

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad x \in R^n;\ u \in R^r$$
$$y = h(x,u) \qquad y \in R^m$$

Egyensúlyi állapot, bemenet, kimenet:

$$0 = f(x_0, u_0)$$
$$y_0 = h(x_0, u_0)$$

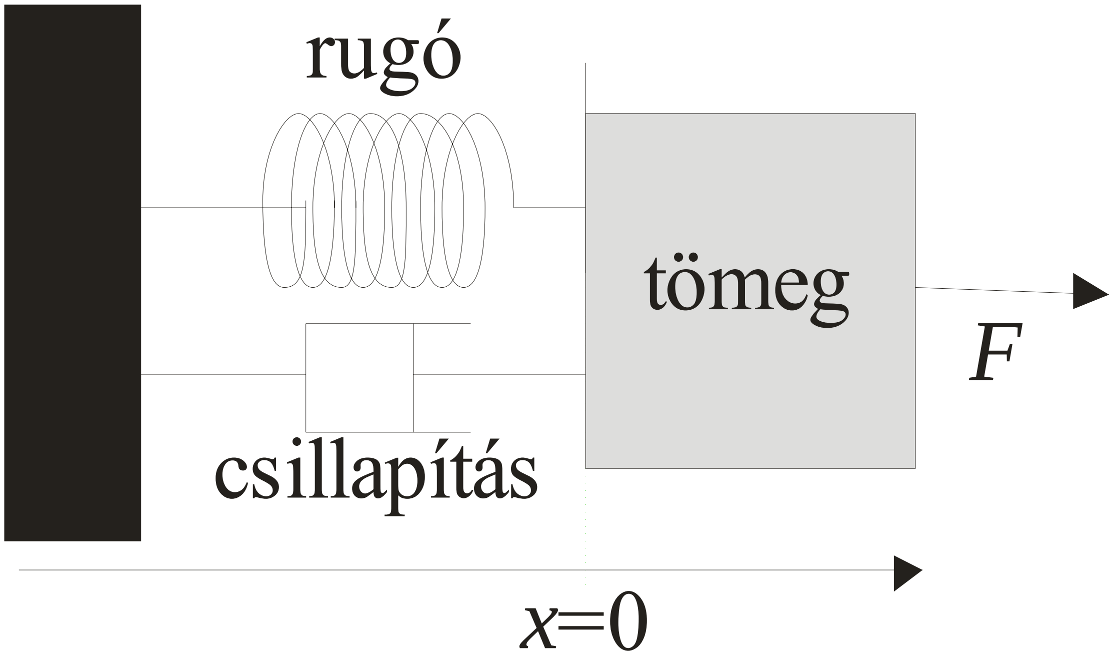
Legyen $\delta x = x - x_0,\ \delta u = u - u_0,\ \delta y = y - y_0$

Linearizált rendszer állapotegyenletének mátrixai:

$$A = Df_x\Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0,u_0} \qquad B = Df_u\Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$C = Dh_x\Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0,u_0} \qquad D = Dh_u\Big|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

Mechanikai lengő rendszer:



$$m = 2\,kg$$

$$k = 0.5\,N/m$$

$$b = 0.25\,Ns/m$$

Mozgásegyenlet: $m\ddot{x} = F - kx - b\dot{x}$

Állapotok:

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$$

Bemenet:

$$u = F$$

Kimenet:

$$y = x_1$$

Állapotegyenlet:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$y = x_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

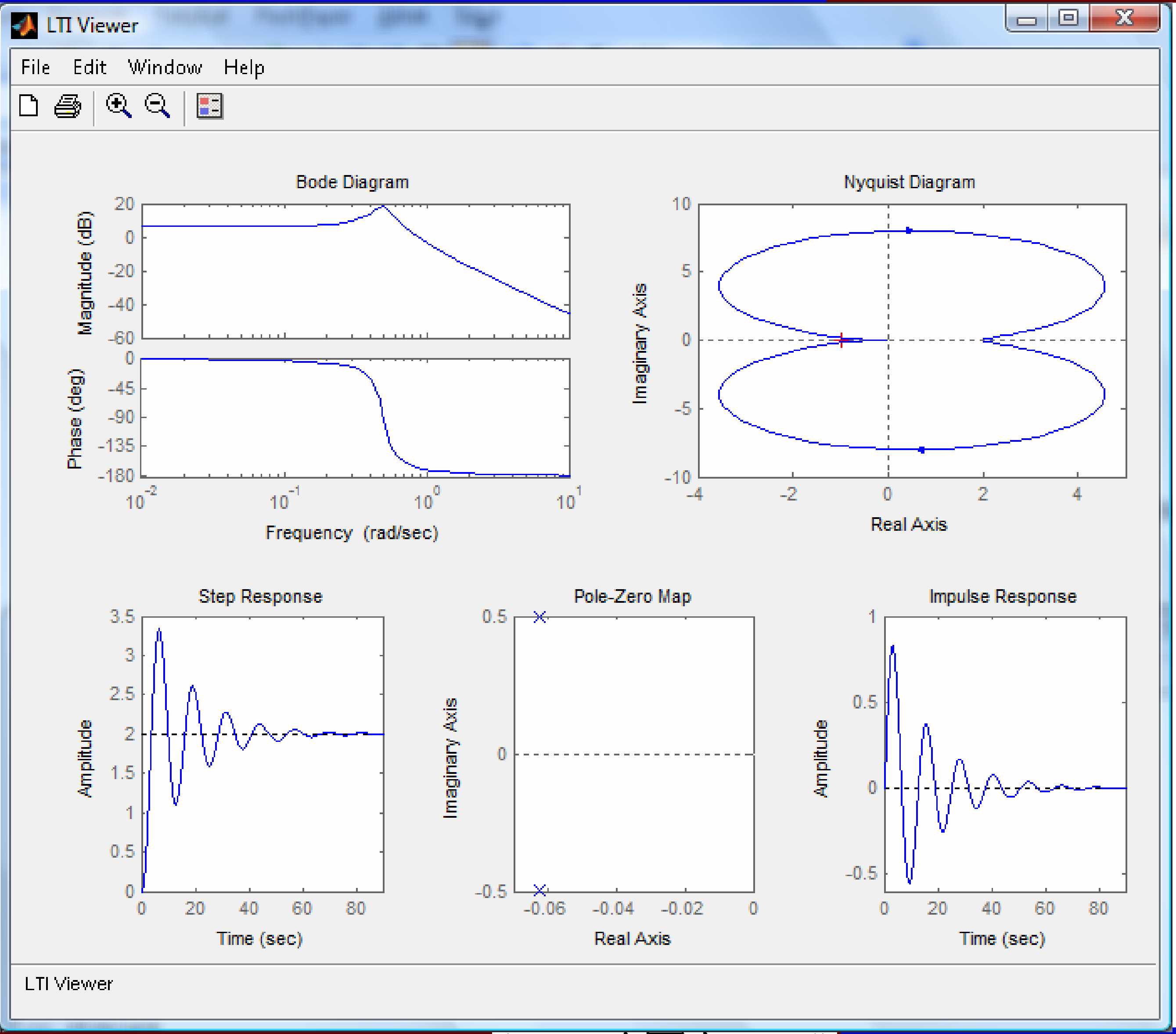
Az *átviteli függvény* a mozgásegyenlet vagy az állapotegyenlet Lapalce-transzformálásával is előállítható :

$$ms^2 Y(s) = U(s) - kY(s) - bsY(s)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{b}{k}s + \dfrac{m}{k}s^2}$$

Ez egy kéttárolós lengőtag:

$$A = \frac{1}{k} \qquad T = \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad 2\xi T = 2\xi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{b}{k} \qquad \xi = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$



Legyen :

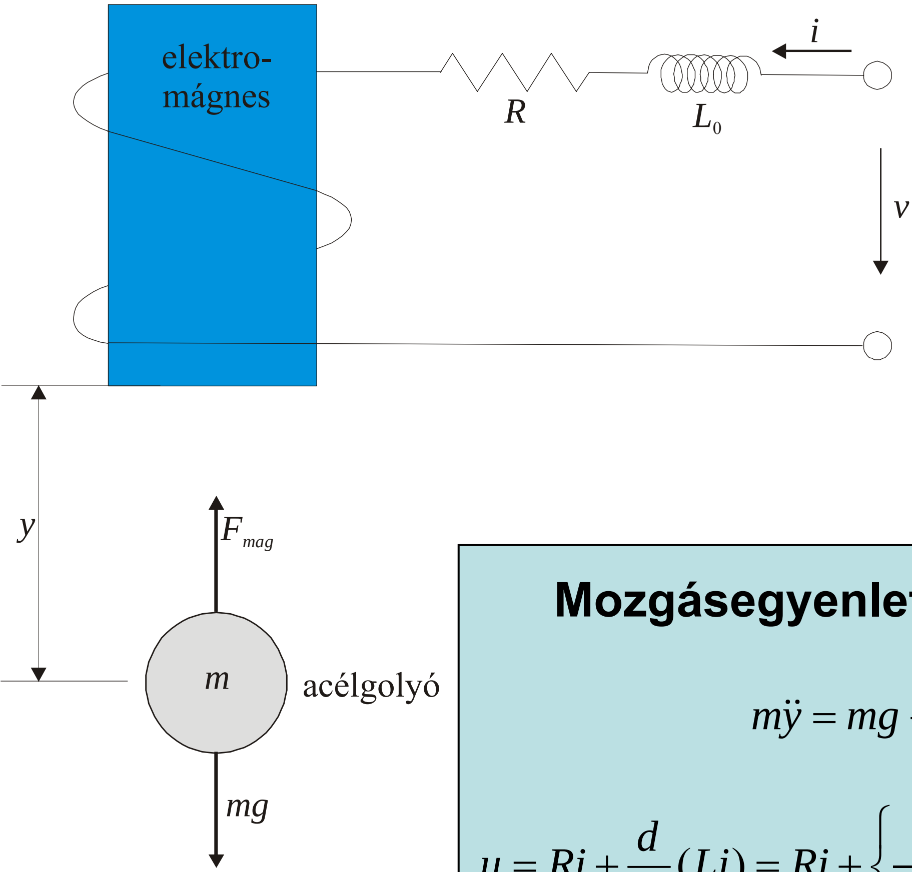
$$T = 2\,\mathrm{sec}$$

$$\xi = 0.125$$

$$T_m = 6.3329\mathrm{sec}$$

$$\Delta v = 0.6731$$

Mágneses lebegtetés:



Legyen:

$$L = \frac{Q}{y} + L_0$$

Légréshez tartozó induktivitásváltozás: $Q = 0.001\,Hm$

A tekercs induktivitása: $L_0 = 0.5\,H$

A tekercs ellenállása: $R = 10\Omega$

A golyó tömege: $m = 0.8\,kg$

Nehézségi gyorsulás: $g = 9.8\,kgm/s^2$

Mozgásegyenlet:

$$m\ddot{y} = mg + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dy} = mg + \frac{i^2}{2}\left(-\frac{Q}{y^2}\right) \Rightarrow \ddot{y} = g - \frac{Q\,i^2}{2my^2}$$

$$u = Ri + \frac{d}{dt}(Li) = Ri + \left\{-\frac{Q}{y^2}\frac{dy}{dt}i + \left(\frac{Q}{y} + L_0\right)\frac{di}{dt}\right\} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \left(\frac{Q}{y} + L_0\right)^{-1}\left(u - Ri + \frac{Q\dot{y}i}{y^2}\right)$$

Állapotok:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (y, \dot{y}, i)^T$$

Bemenet: $u = F$

Kimenet: $y = x_1$

Állapotegyenlet:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{Qx_3^2}{2mx_1^2}$$

$$\dot{x}_3 = \left(\frac{Q}{x_1} + L_0 \right)^{-1} \left(u - Rx_3 + \frac{Qx_2x_3}{x_1^2} \right)$$

$$y = x_1$$

Egyensúlyban a golyó mozdulatlan: $x_2 = \dot{y} = 0$

Legyen az egyensúly: $x_{10} = y_0 = 0.01$

Az egyensúlyhoz szükséges tekercsáram:

$$x_{30} = i_0 = \sqrt{\frac{2mgy_0^2}{Q}} = 1.2522\ A$$

Egyensúlyban a tekercs feszültsége:

$$u_0 = v_0 = Ri_0 = 12.522\ \text{V}$$

A munkaponthoz tartozó linearizált rendszer állapotegyenlete:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{Qx_3^2}{mx_1^{-3}} & 0 & -\dfrac{Qx_3}{mx_1^2} \\ a_{31} & \dfrac{Qx_1x_3}{x_1^2(Q+L_0x_1)} & \dfrac{Qx_2 - Rx_1^2}{x_1(Q+L_0x_1)} \end{bmatrix}_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1960 & 0 & -15.65 \\ 0 & 20.87 & -16.66 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{x_1}{Q+L_0x_1} \end{bmatrix}_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}6667 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy nemlineáris rendszer adott munkapont körüli linearizált állapotegyenletének meghatározását a Matlab Simulink eszköze és a linmod utasítás is támogatja

Ahol:

$$a_{31} = \frac{(u-Rx_3)(Q+Lx_1) - Lx_1(u-Rx_3)}{(Q+Lx_1)^2} + \frac{Qx_1^2x_2x_3(Q+Lx_1) - Q^2x_1^2x_2x_3(2+3Lx_1)}{(Qx_1^2+Lx_1^3)}$$