1. feladat — 4+10 pont

Mondja ki az algebra alaptételét!

Adja meg a $-\imath z^2+4z+5\imath = 0$ másodfokú egyenlet megoldásainak abszolút értékét!

Megoldás: **Tétel:** Egy p(z) legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak mindig van komplex gyöke.

A gyökök $z_1 = 1 - 2\imath$ és $z_2 = -1 - 2\imath$ $\boxed{\textbf{8p.}}$.

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

2. feladat — 4+4+4 pont

Legyen $a_1 = 4$ és $a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 7}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$!

(a) Igazolja, hogy $1 \le a_n \le 7$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

(b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton növő!

(c) Adja meg az a_n sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás:

(a) Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n = 1$-re $1 \le 4 = a_1 \le 7$ teljesül.

Indukciós lépés: ha $1 \le a_n \le 7$, akkor $8 \le 8a_n \le 56 \implies 1 \le 8a_n - 7 \le 49 \implies 1 \le \underbrace{\sqrt{8a_n - 7}}_{a_{n+1}} \le 7$.

(b) Megmutatjuk, hogy $a_n \le \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1}$.

Négyzetre emelve mindkét oldalt kapjuk, hogy $a_n^2 \le 8a_n - 7$, azaz $a_n^2 - 8a_n + 7 = (a_n - 7)(a_n - 1) \le 0$, ami valóban teljesül minden n-re, hiszen (a) miatt $a_n - 7 \le 0$, és $a_n - 1 \ge 0$.

(c) Mivel a sorozat korlátos és monoton növő, ezért konvergens és $\lim a_n = \sup a_n = A \in \mathbb{R}$. De ekkor $A = \lim a_{n+1}$ is teljesül, mert ez egy részsorozat, ugyanakkor $\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{8a_n - 7}$. A határérték és a műveletek kapcsolata miatt $A = \lim \sqrt{8a_n - 7} = \sqrt{\lim 8a_n - 7} = \sqrt{8A - 7}$, ahonnan $A = 1$, vagy $A = 7$. De $A = \sup a_n$ felső korlát, és $1 < 4 = a_1$, vagyis az 1 nem felső korlát, tehát $\lim a_n = A = 7$.

3. feladat **4+6+4 pont**

Legyen f az a pont egy környezetében értelmezett, a-ban deriválható függvény! Mondja ki és bizonyítsa be az a-beli lokális minimumra tanult szükséges feltételt! Mutassa meg, hogy a feltétel nem elégséges!

Megoldás: **Tétel:** Ha az f függvény deriválható az értelmezési tartomány a belső pontjában, és ott lokális minimuma van, akkor $f'(a) = 0$.

Bizonyítás: Mivel f-nek lokális minimuma van a-ban, és a belső pontja D_f-nek, ezért létezik $\delta > 0$, amire $f(x) \geq f(a)$, ha $|x - a| < \delta$.

Speciálisan, ha $a-\delta < x < a$, akkor $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$, így $f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$.

Ugyanakkor, ha $a < x < a + \delta$, akkor $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$, így $f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$.

A fenti féloldali deriváltak léteznek, mert f deriválható a-ban, sőt egyenlőek is, azaz $0 \leq f'_+(a) = f'(A) = f'_-(a) \leq 0$, azaz valóban $f'(a) = 0$.

Legyen $f(x) = x^3$, és $a = 0$. Ekkor a belső pontja $D_f = \mathbb{R}$-nek, $f'(a) = f'(0) = 0$, mégsem lokális minimum. ($f(x) = -x^2$ is jó)

4. feladat **8 pont**

Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ esetén lesz folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{ha } -1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}, & \text{máskor} \end{cases}$$

függvény?

Megoldás: $x \neq -1, 3$ esetén a és b választásától függetlenül folytonos. $\boxed{\textbf{1p.}}$

A -1-ben és 3-ban pontosan akkor folytonos, ha a féloldali határértékek megegyeznek.

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x-3)}{x-1} = -2 \ \boxed{\textbf{2p.}}$$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1} (ax + b) = b - a \ \boxed{\textbf{1p.}}$$

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3} (ax + b) = 3a + b \ \boxed{\textbf{1p.}}$$

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = 0 \ \boxed{\textbf{1p.}}$$

Az egyenletrendszer $b - a = -2$, $3a + b = 0$ megoldása $a = \frac{1}{2}$ és $b = -\frac{3}{2}$. Pontosan ekkor lesz folytonos a függvény $\boxed{\textbf{2p.}}$.

5. feladat **6 pont**

Adja meg az

$$f(x) = \frac{\cos(x^3 + x^2 - x - 1)}{x^2 e^{x-1}}$$

függvény $a = 1$-beli érintőegyenesének egyenletét!

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{-(3x^2 + 2x - 1)\sin(x^3 + x^2 - x - 1)x^2 e^{x-1} - \cos(x^3 + x^2 - x - 1)(2x e^{x-1} + x^2 e^{x-1})}{x^4 e^{2x-2}}$$

$\boxed{\textbf{4p.}}$

$f(1) = 1$, $f'(1) = -3$, így az egyenlet $y = -3 \cdot (x - 1) + 1 = -3x + 4$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

6. feladat* **6+6 pont**

Mutassa meg, hogy az $x(t) = \operatorname{ch} t - t$, $y(t) = \ln(t+1) + t^3$ paraméteres görbének, $t_0 = 0$ esetén létezik az $x_0 = x(t_0)$ pont egy környezetében $y = f(x)$ előállítása! $f'(x_0) = ?$

Megoldás: $x'(t) = \operatorname{sh} t - 1$. $x'(0) = -1 < 0$, $x'(t)$ folytonossága miatt 0 egy környezetében is negatív, ezért itt $x(t)$ szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható, ezért ezen a környezeten létezik $y = f(x)$ előállítás $\boxed{\textbf{6p.}}$.

$y'(t) = \dfrac{1}{t+1} + 3t^2$, így $f'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{1}{-1} = -1$ $\boxed{\textbf{6p.}}$

7. feladat* **8+8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int_0^{1.5} (x-2)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = ?$ (c) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

(a) $\dfrac{x^2+2}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} \implies x^2+2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A \implies A = 2,\ -2A-B+C = 0,\ A+B = 1 \implies A = 2,\ B = -1,\ C = 3$ $\boxed{\textbf{4p.}}$. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$ $\boxed{\textbf{4p.}}$.

(b) $$\int_0^{1.5} \underbrace{(x-2)}_{f}\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{g'}\,\mathrm{d}x = \left[\underbrace{(x-2)}_{f}\left(\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g}\right)\right]_0^{1.5} - \int_0^{1.5}\underbrace{1}_{f'}\left(\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g}\right)\mathrm{d}x\ \boxed{\textbf{4p.}} =$$
$$\left[(x-2)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]_0^{1.5} = \frac{5}{4} - \frac{e^3}{2}\ \boxed{\textbf{4p.}}.$$

(c) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + c$ $\boxed{\textbf{8p.}}$.

8. feladat* **10 pont**

Forgassuk meg a $\operatorname{tg} x$ függvény $x = 0$ és $x = \dfrac{\pi}{4}$ közötti részét az x tengely körül! Mennyi a kapott test térfogata?

Megoldás: $V = \pi\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x\ \boxed{\textbf{3p.}} = \pi\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\ \boxed{\textbf{3p.}} = \pi\left[\operatorname{tg} x - x\right]_0^{\pi/4}\ \boxed{\textbf{2p.}} = \pi - \frac{\pi^2}{4}\ \boxed{\textbf{2p.}}$.